

# Optimización en el diseño de lagunas de estabilización con programación no lineal

• Facundo Cortés-Martínez\* • Alejandro Treviño-Cansino •  
*Universidad Juárez del Estado de Durango, México*

\*Autor de correspondencia

• María Aracelia Alcorta-García •  
*Universidad Autónoma de Nuevo León, México*

• Agustín Sáenz-López •  
*Universidad Juárez del Estado de Durango, México*

• José Luis González-Barrios •  
*Instituto Nacional de Investigaciones Forestales Agrícolas y Pecuarias*

## Resumen

Cortés-Martínez, F., Treviño-Cansino, A., Alcorta-García, M. A., Sáenz-López, A., & González-Barrios, J. L. (marzo-abril, 2015). Optimización en el diseño de lagunas de estabilización con programación no lineal. *Tecnología y Ciencias del Agua*, 6(2), 85-100.

El estudio presenta un modelo matemático de optimización para el diseño de sistemas lagunares integrado por dos lagunas: facultativa y de maduración. El modelo tiene como función objetivo el costo y considera cuatro variables de decisión: tiempo de retención hidráulico y número de mamparas en la laguna facultativa; en la laguna de maduración, también número de mamparas y tiempo de retención. Se consideran como restricciones los coliformes fecales y la materia orgánica. Dicho modelo resultó ser no lineal, ya que las relaciones entre las variables no son proporcionales. Se diseñó un sistema lagunar utilizando la metodología tradicional adoptada por la Comisión Nacional del Agua para México, luego se aplicó el modelo matemático. Se lleva a cabo una comparación de los resultados, los cuales indican una reducción del tiempo de retención de 14.16% y una disminución del costo de 12.04%. El resultado anterior es importante, ya que la principal desventaja de estos sistemas es el requerimiento de terreno. Se incluye, además, el análisis de sensibilidad de la función objetivo y las restricciones consideradas. El citado análisis es sensible a la variación de los parámetros. Ambos estudios cumplen perfectamente con las condiciones de calidad del agua tratada que indica la normatividad para el vertido a los cuerpos receptores. Se recomienda llevar a cabo otros estudios de optimización, considerando diferentes configuraciones.

**Palabras clave:** sistemas lagunares, coliformes fecales, tiempo de retención, materia orgánica, costo de construcción, modelo matemático de optimización.

## Abstract

Cortés-Martínez, F., Treviño-Cansino, A., Alcorta-García, M. A., Sáenz-López, A., & González-Barrios, J. L. (March-April, 2015). *Design Optimization for Stabilization Ponds Using Non-Linear Programming*. *Water Technology and Sciences (in Spanish)*, 6(2), 85-100.

The article herein presents a mathematical optimization model to design lagoon systems containing two ponds: facultative and maturation. The objective function of the model was the cost. Four decision variables were considered: hydraulic retention time and number of screens in the facultative pond; in the maturation pond, also number of screens and retention time. Fecal coliform and organic matter were considered as restrictions. The resulting model was non-linear since the relations among the variables were not proportional. A pond system was designed using the traditional methodology adopted by the National Water Commission for Mexico. The mathematical model was then applied. A comparison of the results indicated a reduction in retention time of 14.16% and a decrease in cost of 12.04%. This finding is important given that the primary disadvantage of these systems is the need for land. In addition, a sensitivity analysis of the objective function and the restrictions is included. This analysis is sensitive to changes in the parameters. Both studies fully meet the quality standards stipulated by norms for treated water discharged into receptor bodies. Additional optimization studies that include different configurations are recommended.

**Keywords:** Pond systems, fecal coliform, retention time, organic matter, construction cost, mathematical model optimization.

---

Recibido: 25/01/2013  
Aceptado: 07/05/2014

---

## Introducción

Las lagunas de estabilización tienen tres objetivos principales: a) la eliminación de coliformes fecales; b) la remoción de la materia orgánica, también llamada demanda bioquímica de oxígeno (DBO), y c) de nutrientes: nitrógeno y fósforo (CNA e IMTA, 2007a). De acuerdo con Senzia, Mayo, Mbwette, Katima y Jorgensen (2002), Agunwamba, Ochonogar y Ukpong (2003), Mara (2004), Abbas, Nasr y Seif (2006), Hamzeh y Ponce (2007), y Naddafi *et al.* (2009), los estanques de estabilización se sugieren en países con climas tropicales, pues las condiciones ambientales incrementan la eficiencia en la remoción de contaminantes.

Los sistemas lagunares se pueden clasificar en relación con la presencia de oxígeno: anaerobias, facultativas y de maduración (Metcalf & Eddy, Inc., 1991):

- *Anaerobias.* Las bacterias presentes no requieren oxígeno disuelto necesario para la descomposición de la materia orgánica; al proceso descrito también se le conoce como digestión anaerobia (Rolim, 2000).
- *Facultativas.* El mecanismo se lleva a cabo en el estrato superior, es decir, el comensalismo de bacterias aerobias y algas. La materia orgánica es descompuesta por las bacterias heterotróficas, lo anterior genera compuestos inorgánicos. El oxígeno necesario para realizar la simbiosis es suministrado principalmente por el proceso de fotosíntesis (Mara, 2004).
- *De maduración.* Reciben el efluente de las lagunas facultativas y se utilizan para pulir el efluente de patógenos de acuerdo con la calidad requerida. Sólo existe una zona: aerobia (CNA e IMTA, 2007b).

## Deflectores

Shilton y Mara (2005), Abbas *et al.* (2006), Cortés, Treviño, Luévanos, Luévanos y Uranga (2014a), y Cortés *et al.* (2014b) recomiendan el

uso de deflectores en los sistemas lagunares, puesto que se mejoran en forma importante las condiciones hidráulicas y se favorece la reducción de las áreas muertas.

A la fecha se han realizado estudios en laboratorio para aumentar la eficiencia hidráulica y la eliminación de contaminantes, considerando deflectores. Killani y Ogunrombi (1984); Pedahzur, Nasser, Dor, Fattal y Shuval (1993); Muttamara y Puetpaiboon (1997); Zanutelli, Medri, Belli-Filho, Perdomo y Costa (2002); Shilton y Harrison (2003a); Sperling, Cherni-charo, Soares y Zerbini (2003); Shilton y Mara (2005), y Abbas *et al.* (2006) publicaron que se obtiene mayor eficiencia hidráulica y mejor tratamiento del agua residual con mamparas a 70% de la longitud. Luego Banda (2007), y Winfrey, Stronsnider, Nairn y Strevett (2010) concluyeron que se obtienen mejores resultados al utilizar mayor número de deflectores.

## De los modelos matemáticos

Killani y Ogunrombi (1984) recomendaron el uso de la investigación de operaciones en lagunas de estabilización, con el propósito de obtener una optimización de recursos económicos, es decir, determinar el costo óptimo del sistema. Nelder y Mean (1965); Fonseca y Fleming (1993, 1995); Oke y Otun (2001); Bracho, Lloyd y Aldana (2006); Winfrey *et al.* (2010), y Olukanni y Ducoste (2011) aplicaron la programación lineal en el diseño de sistemas lagunares; concluyeron que sí era posible mejorar el diseño mediante la optimización, a manera de incrementar la eficiencia del tratamiento y minimizar costos. Finalmente, Sah, Rousseau y Hooijmans (2012) realizaron estudios comparativos de los modelos existentes y concluyeron que era necesario proponer un modelo integral de optimización, donde se consideren todas las variables que intervienen en el tratamiento del agua con estanques de estabilización.

De acuerdo con la revisión bibliográfica, en México existen pocos modelos matemáticos de optimización aplicados a los estanques de estabilización; debido a lo anterior, se plantearon

los siguientes objetivos: a) realizar un análisis matemático para determinar el modelo de optimización con dos lagunas; b) diseñar un sistema lagunar con la metodología tradicional, incluyendo el costo; c) aplicar el modelo matemático de optimización utilizando el sistema *Solver* de Excel, y d) comparar los resultados entre los dos análisis y definir las ventajas económicas de ambos estudios.

### Programación no lineal

El Gradiente Reducido Generalizado (GRG) es el algoritmo utilizado por el sistema *Solver* de Excel. El GRG inicia con una solución conocida, es decir, calculada anteriormente. El objetivo es encontrar una nueva propuesta, pero mejorada. El algoritmo revisa la región factible de la solución conocida y determina una nueva solución, hasta que ya no es posible optimizar más el resultado. La herramienta actúa en un grupo de celdas llamadas variables de decisión, que se incluyen en la fórmula de la función objetivo y restricciones. Algunas de las características de los problemas de programación en donde es posible utilizar el método de GRG son las siguientes: la función objetivo puede ser lineal o no lineal, admite restricciones de igualdad o desigualdad y el punto de inicio para aplicar el GRG puede ser factible o no (Muramatsu, 2011).

### Análisis de sensibilidad

Según Anderson, Sweeney y Williams (2004), el diagrama de tornado es recomendable para determinar la sensibilidad del proyecto. El análisis consiste en modificar los rangos de valores considerados en el estudio, condición que proporciona información acerca de cómo afecta a la solución mejorada. El diagrama de tornado muestra la información por medio de barras, es decir, la barra más ancha indica el parámetro más sensible al cambio.

El presente estudio es continuación del modelo matemático de optimización publicado por Olukanni y Ducoste (2011). La aportación

del presente artículo es determinar un modelo matemático, incluyendo dos lagunas: facultativa y de maduración. Se consideran como restricciones la demanda bioquímica de oxígeno y el número de coliformes fecales en el efluente.

Consideraciones del modelo matemático publicado por Olukanni y Ducoste (2011): utilizan un modelo multiobjetivo; es decir, se maximiza la eliminación de contaminantes y se minimiza el costo; incluye además como restricción la concentración de coliformes fecales en el efluente, el número de mamparas y el área. Mientras que en el presente estudio se incluyen como limitaciones tanto los coliformes fecales como la materia orgánica, número de mamparas y tiempo de retención. Otra diferencia importante es que el presente estudio incluye un solo modelo para dos lagunas, mientras que el de Olukanni considera una sola laguna.

La novedad del presente trabajo respecto a otras publicaciones de los autores referenciados (Cortés, Treviño, Luévanos & Luévanos, 2013; Cortés *et al.*, 2014a; Cortés *et al.*, 2014b), como ya se indicó, es que se considera un modelo matemático integrado por dos lagunas, con cuatro variables de decisión; mientras que en las publicaciones anteriores, el modelo fue definido para una sola laguna, con dos variables controlables. Es importante indicar que el presente modelo matemático es único, es decir, de acuerdo con la revisión bibliográfica, no ha sido publicado anteriormente.

El documento está organizado de la siguiente forma: en la primera parte se describe la nomenclatura para el diseño de una laguna facultativa y de maduración, así como la metodología tradicional de diseño. La segunda parte incluye el análisis realizado para definir la función objetivo preliminar, relaciones matemáticas, variables de decisión y restricciones consideradas. En la tercera parte se desarrolla un ejemplo de diseño con la metodología tradicional y luego la aplicación del modelo matemático propuesto; además se considera un cuadro comparativo con resultados y análisis de sensibilidad del modelo. En la cuarta parte se incluyen las conclusiones.

## Materiales y métodos

Para el diseño del sistema lagunar se consideró la metodología establecida para México por la Comisión Nacional del Agua (CNA) y el Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA). El manual consultado fue *Paquetes tecnológicos para el tratamiento de excretas y aguas residuales en comunidades rurales de la Comisión Nacional del Agua* (CNA e IMTA, 2007a).

## Nomenclatura para el diseño de lagunas de estabilización

CO	= carga orgánica.
$Q_i$	= caudal en el influente de la laguna ( $m^3/\text{día}$ ).
$DBO_i$	= concentración de la demanda bioquímica de oxígeno en el influente de la laguna en mg/l.
1 000	= factor de conversión.
$\lambda_v$	= carga orgánica superficial (kg/ha-día).
$T$	= temperatura mínima media mensual del aire ( $^{\circ}\text{C}$ ).
$L_i$	= concentración de $DBO_5$ en el influente de la laguna (mg/l).
$A_f$	= área de la laguna facultativa en ( $m^2$ ).
$Q_{med}$	= caudal en el influente en ( $m^3/\text{día}$ ).
$Z$	= profundidad (m).
$V$	= volumen ( $m^3$ ).
$O_F$	= tiempo medio de retención hidráulico, laguna facultativa (días).
$O_M$	= tiempo medio de retención hidráulico, laguna de maduración (días).
$X$	= relación entre longitud y anchura.
$B_{Prom}$	= ancho promedio en (m).
$L_{Prom}$	= longitud promedio en (m).
$B_{Sup}$	= ancho superior en (m).
$L_{Sup}$	= largo superior en (m).
$A_{Sup}$	= área superficial en ( $m^2$ ).
$Q_e$	= caudal en el efluente de la laguna ( $m^3/\text{día}$ ).
$e$	= evaporación (mm/día).
$d$	= factor de dispersión adimensional.
$K_b$	= coeficiente de reducción bacteriana ( $d^{-1}$ ).

$a$	= constante adimensional.
$Ne$	= coliformes fecales corregidos por evaporación en el efluente de la laguna (NMP/100 ml).
$N_i$	= coliformes fecales en el influente de la laguna (NMP/100 ml).
$N_f/No$	= número de coliformes fecales en el efluente (NMP/100 ml).
$K_f$	= constante de decaimiento de la $DBO_5$ ( $\text{día}^{-1}$ ).
$DBO_{ef}$	= concentración de la $DBO_5$ en el efluente de la laguna (mg/l).
$DBO_e$	= concentración de la $DBO_5$ en el efluente de la laguna corregida por evaporación (mg/l).
$N_{MampF}$	= número de mamparas en la laguna facultativa.
$N_{MampM}$	= número de mamparas en la laguna de maduración.
$A_M$	= área de la laguna de maduración ( $m^2$ ).

## Diseño de laguna facultativa (flujo disperso. Método de Yáñez)

a) Carga orgánica:

$$C.O. = Q_i(DBO_i) / 1\,000 \quad (1)$$

b) Carga superficial de diseño:

$$\lambda_s = 250(1.085)^{T-20} \quad (2)$$

c) Área de la laguna facultativa:

$$A_f = 10L_iQ_{med}/\lambda_s \quad (3)$$

d) Volumen de la laguna:

$$V = (A_f)(Z) \quad (4)$$

e) Tiempo medio de retención hidráulico:

$$O_F = V/Q_i \quad (5)$$

f) Dimensionamiento. Relación largo ancho  $X = 3$ :

$$B_{Prom} = \sqrt{\frac{Af}{X}} \quad (6)$$

$$L_{Prom} = \frac{Af}{B_{Prom}} \quad (7)$$

g) Para el ancho y largo:

$$B_{Sup} = B_{Prom} + (Z)(Talud) \quad (8)$$

$$L_{Sup} = L_{Prom} + (Z)(Talud) \quad (9)$$

h) Cálculo del área superficial:

$$A_{Sup} = (B_{Sup})(L_{Sup}) \quad (10)$$

i) Gasto en el efluente:

$$Q_e = Q_i - 0.001A_{Sup}e \quad (11)$$

j) Remoción de coliformes fecales: considerando mamparas con longitud de 0.70 del largo de la laguna se tiene que:

$$X = (L_{Prom})(0.70) (\text{núm. de mamparas} + 1) / (B_{Prom}) / (\text{núm. de mamparas} + 1) \quad (12)$$

$$d = \frac{X}{-0.26118 + 0.25392(X) + 1.0136(X)^2} \quad (13)$$

k) Coeficiente de reducción bacteriana:

$$K_b = 0.841(1.075)^{T-20} \quad (14)$$

l) Constante "a". Se determina a través de la fórmula:

$$a = \sqrt{1 + 4(K_b O_F d)} \quad (15)$$

m) Coliformes fecales en el efluente de la laguna facultativa:

$$\frac{Nf}{No} = \frac{4a \exp^{(1-a)/2d}}{(1+a)^2} Ni \quad (16)$$

n) Coliformes fecales corregidos por evaporación:

$$Ne = (Ne)(Q_i) / Q_e \quad (17)$$

o) Concentración de la DBO en el efluente de la laguna:

$$Kf = \frac{Kf_{35}}{(1.085)^{35-T}} \quad (18)$$

p) Concentración de la demanda bioquímica de oxígeno en el efluente de la laguna:

$$DBO_{ef} = \frac{DBO_i}{KfO_F + 1} \quad (19)$$

q) Eficiencia de remoción de la DBO:

$$\% = \frac{(DBO_i - DBO_{ef})}{DBO_i} \times 100 \quad (20)$$

r) DBO corregida por evaporación:

$$DBO_e = (DBO_i)(Q_i) / Q_e \quad (21)$$

### Laguna de maduración (método flujo disperso)

1. Tiempo de retención hidráulico (O). Se analiza por tanteos, es decir, se propone un tiempo de retención hidráulico y se revisa la concentración de los coliformes fecales en el efluente; éstos deben ser iguales o menores de 1 000 NMP / 100 ml.

2. Volumen de la laguna:

$$V = (Q_i)(O_M) \quad (22)$$

3. Área de la laguna:

$$A_M = \frac{V}{Z} \quad (23)$$

Para el resto del diseño se aplicaron las ecuaciones a partir del inciso f) hasta r), que se indican en la metodología de la laguna facultativa.

### Función objetivo preliminar

Los costos considerados para determinar la función objetivo son los siguientes: del terreno, \$750.00 metro cuadrado; costo índice del bordo, \$1 200.00 metro lineal; de la mampara, \$500.00 metro lineal.

Según Cortés et al. (2014a; 2014b), la longitud de la mampara se considerará al 70% de la longitud:  $(0.7) N_{Mamp} L_{Sup}$ . Para definir el área de la laguna facultativa se observa el ancho superior más la longitud de cada uno de los lados, como se muestra en la figura 1. Para la longitud se tiene  $(B_{sup} + 12) (L_{sup} + 12)$ ; de igual forma para el perímetro:  $2 (B_{sup} + 3) + 2 (L_{sup} + 3)$ . El mismo criterio se sigue para la laguna de maduración, considerando la información que se indica en la figura 2. Con los datos anteriores se determinó la expresión (24):

$$\begin{aligned} \text{Costo total} = & 750 \left[ (B_{SupF} + 12) (L_{SupF} + 12) \right. \\ & \left. + (L_{SupM} + 10) (L_{SupM} + 3) \right] \\ & + 1200 \left[ 2 (B_{SupF} + 3) + 2 (L_{SupF} + 3) + (B_{SupM} + 3) \right. \\ & \left. + 2 (L_{SupM} + 3) \right] \\ & + 500 (0.7) \left[ N_{MampF} L_{SupF} + N_{MampM} L_{SupM} \right] \end{aligned} \quad (24)$$

Donde  $B_{SupF} = B_{PromF} + 3$ . Según la CNA y el IMTA (2007a; 2007b), esta expresión se refiere al ancho superior de la laguna facultativa más tres metros de la relación 2:1 considerada en los bordos (figura 1). La ecuación siguiente determina la relación largo ancho:

$$L_{SupF} = 3B_{PromF} + 3$$

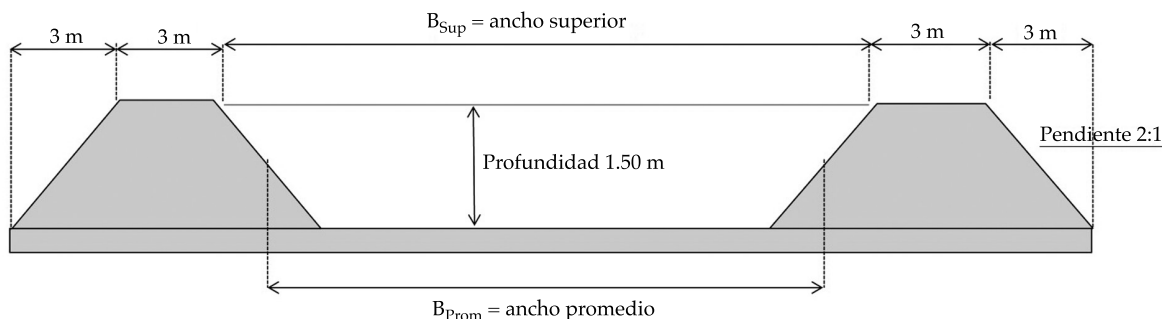


Figura 1. Corte transversal de la laguna facultativa.

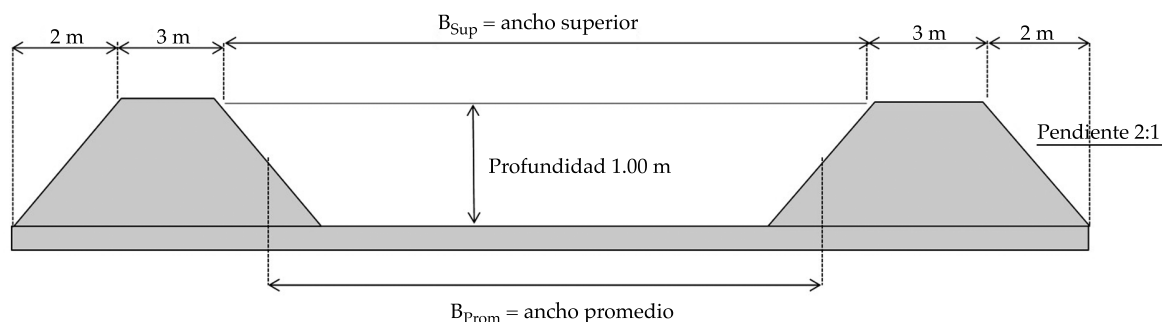


Figura 2. Corte transversal de la laguna de maduración.

Para calcular el ancho promedio de la laguna facultativa se realizan las siguientes operaciones: a) despejar el volumen de la ecuación (5) de la metodología tradicional; b) luego sustituir el volumen en la expresión (4), y c) finalmente la expresión se determina para el ancho del estanque, sustituyendo en la ecuación (6):

$$B_{PromF} = \sqrt{\frac{O_F * Q_F}{4.5}}$$

Para calcular el ancho superior de la laguna se considera la relación de talud de los bordos; de esta forma se define la expresión (25):

$$B_{SupF} = \sqrt{\frac{O_F * Q_F}{4.5}} + 3 \quad (25)$$

De forma similar, para el largo superior de la laguna facultativa se obtiene la expresión (26) (Cortés et al., 2014a, 2014b):

$$L_{SupF} = 3\sqrt{\frac{O_F * Q_F}{4.5}} + 3 = \sqrt{2O_F * Q_F} + 3 \quad (26)$$

Para la laguna de maduración con 1.0 metro de profundidad se define:

$$B_{SupM} = B_{SupF} - 1$$

Sustituyendo la expresión (25) en  $B_{SupM} = B_{SupF} - 1$  se obtiene:

$$B_{SupM} = \sqrt{\frac{O_F * Q_F}{4.5}} + 2 \quad (27)$$

Para calcular el largo de la laguna de maduración se considera la ecuación (7) de la metodología; luego, siguiendo el mismo criterio del ancho superficial de la laguna de maduración, se tiene:

$$L_{SupM} = \frac{\text{Área}_{Prom}}{B_{PromM}} + 2$$

Para el área se sustituye la ecuación (22) en la expresión (23) de la metodología; como ya se dijo, se considera 1.0 metro de profundidad

para la laguna de maduración. El ancho promedio se obtiene restando la profundidad por la relación de inclinación del talud al ancho superficial. Finalmente se obtiene la expresión para calcular a longitud superior:

$$L_{SupM} = \frac{O_M * Q_M}{\sqrt{\frac{O_F * Q_F}{4.5}}} + 2 \quad (28)$$

Sustituyendo las ecuaciones (25), (26), (27) y (28) en la (24), se determina la función objetivo, ecuación (29):

$$\begin{aligned} \text{Costo total} = & 750 \left[ \left( \sqrt{\frac{O_F * Q_F}{4.5}} + 15 \right) \left( \sqrt{2O_F * Q_F} + 15 \right) \right. \\ & \left. + \left( \sqrt{\frac{O_F * Q_F}{4.5}} + 12 \right) \left( \frac{O_M * Q_M}{\sqrt{\frac{O_F * Q_F}{4.5}}} + 5 \right) \right] \\ & + 1200 \left[ 2 \left( \sqrt{\frac{O_F * Q_F}{4.5}} + 6 \right) + 2 \left( \sqrt{2O_F * Q_F} + 6 \right) \right. \\ & \left. + \left( \sqrt{\frac{O_F * Q_F}{4.5}} + 5 \right) + 2 \left( \frac{O_M * Q_M}{\sqrt{\frac{O_F * Q_F}{4.5}}} + 5 \right) \right] \\ & + 500(0.7) \left[ N_{MampF} \left( \sqrt{2O_F * Q_F} + 3 \right) \right. \\ & \left. + N_{MampM} \left( \frac{O_M * Q_M}{\sqrt{\frac{O_F * Q_F}{4.5}}} + 2 \right) \right] \quad (29) \end{aligned}$$

Como se observa en la expresión (29), el modelo matemático resultó no lineal debido a las relaciones matemáticas que intervinieron para determinar la función objetivo.

Las variables de decisión consideradas son  $O_F, O_M, N_{MampF}, N_{MampM}$ .

El tiempo de retención hidráulico en ambas lagunas influye directamente en las dimensiones de éstas. El número de mamparas favorece la eficiencia del tratamiento de las aguas residuales (Winfrey et al., 2010).

Restricciones:

$$1 \leq O_F \leq 30$$

$$d \geq 0$$

$$1 \leq O_M \leq 10$$

$$0 \leq \text{DBOe} \leq 75$$

$$N_e = 1000$$

$$0 \leq N_{\text{Mamp}F} \leq 4$$

$$0 \leq N_{\text{Mamp}M} \leq 4$$

$$N_{\text{Mamp}F}, N_{\text{Mamp}M} = \text{enteros}$$

$$N_{\text{Mamp}F}, O_F \geq 0$$

Se diseñó una planta de tratamiento de lagunas de estabilización para un poblado ejidal. La comunidad en cuestión se ubica en el municipio de Gómez Palacio, Durango, México. Datos: número de habitantes al horizonte de proyecto 1 500; aportación = 154 l/hab/día (CNA e IMTA, 2007a); gasto de diseño: 231 m<sup>3</sup>/día; temperatura promedio del mes más frío: 11.8 °C (CNA e IMTA, 2007b); concentración de la materia orgánica (DBO<sub>5</sub>) en el influente = 220 mg/l; coliformes fecales 1.0 × 10<sup>7</sup> NMP/100 ml. Estos valores son considerados para aguas residuales domésticas (Metcalf & Eddy, Inc., 1991).

La evaporación es de 5 mm/día. Considerar la relación largo ancho de tres para la laguna facultativa; para la de maduración se considerará el mismo ancho que el estanque facultativo. Para determinar la calidad del agua residual tratada se incluyó como base lo que indica la Norma Oficial Mexicana NOM-001-ECOL-96 (DOF, 1996).

## Resultados y discusión

El cuadro 1 muestra los resultados de diseño del sistema de lagunas con el método tradicional; la figura 3 indica las dimensiones determinadas; se observa que con 2 y 4 mamparas se cumple con las condiciones de calidad que indica la norma.

### Aplicación del modelo matemático para la optimización

El cuadro 2 indica que el sistema encontró una solución en donde todas las restricciones y condiciones de optimización fueron satisfechas. En el primer apartado del cuadro 2 se observa el comparativo de costos. El resultado fue 12.04% menor; en el mismo cuadro, en el apartado de variables de decisión, se indica que el sistema

Cuadro 1. Resultados de diseño del sistema lagunar, método tradicional.

Datos				Laguna facultativa		Laguna de maduración	
Qi	Ni	DBOi	T	Of	N <sub>mampF</sub>	OM	N <sub>mampM</sub>
231	10 000 000	220	11.8	25.77	2	1.88	4

Resultados de la laguna facultativa									
X	d	kb	a	W <sub>sup</sub>	L <sub>sup</sub>	Qe	Ne	DBOe	Área
18.9	0.0516	0.4648	1.8628	39.37	112.11	208.93	2 335	43	4 414.03

Resultados de la laguna de maduración									
X	d	kb	a	W <sub>sup</sub>	L <sub>sup</sub>	Qe	Ne	DBOe	Área
58.94	0.0167	0.4648	1.0287	38.37	12.80	206.47	998.09	32	491.13

Área total	Costo, laguna facultativa	Costo, laguna de maduración	Costo total
4 905.16	\$5 238 328.77	\$678 661.09	\$5 916 989.86



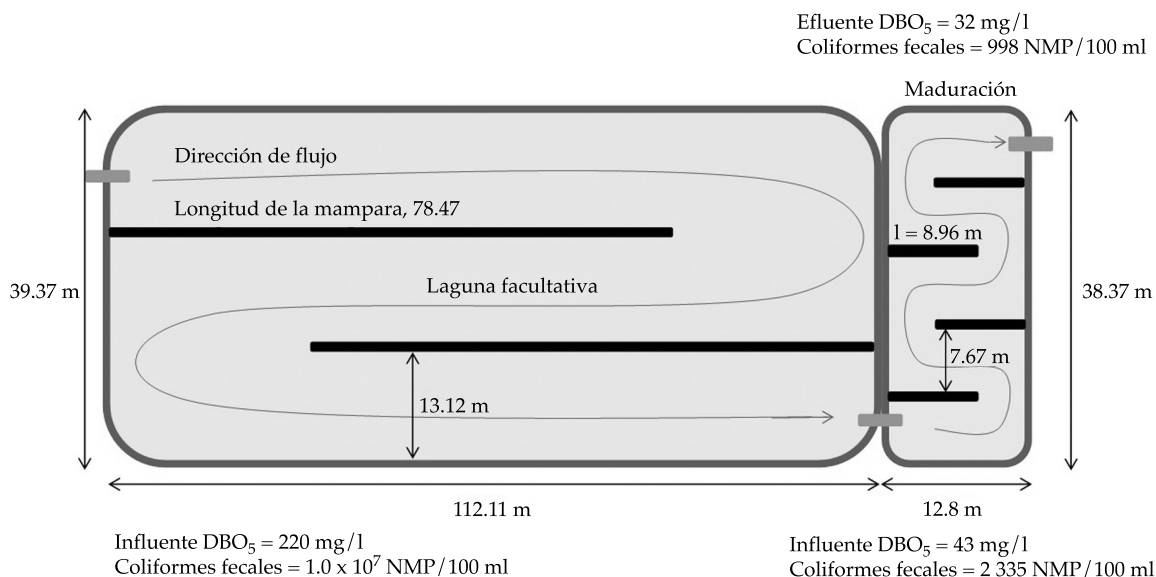


Figura 3. Dimensiones del sistema lagunar con el método tradicional. Arreglos de la laguna facultativa con dos mamparas y de la laguna de maduración con cuatro.

redujo el tiempo de retención hidráulico de 25.77 a 22.12 días: la diferencia es de 3.65 días, que representan 14.16%. Según la CNA e IMTA (2007a; 2007b), el tiempo de retención hidráulico influye de forma directa sobre el tamaño del estanque y, como consecuencia, en la necesidad del terreno. Los resultados del presente documento coinciden con las aseveraciones de la CNA e IMTA (2007a; 2007b). Otro cambio importante es que se determinaron cuatro mamparas en la laguna facultativa, en lugar de las dos que fueron propuestas de manera original.

Según Killani y Ogunrombi (1984); Muttamara y Puetpaiboon (1996, 1997); Rolim (2000), Sperling, Chernicharo, Soares y Zerbini (2002); Shilton y Harrison (2003a); Shilton y Mara (2005); Oakley (2005); Abbas *et al.* (2006), y Cortés *et al.* (2013), esta condición favorece al flujo pistón dentro de la laguna, por tanto aumenta la eficiencia en la eliminación de contaminantes. Los resultados del presente estudio concuerdan con las afirmaciones de los autores citados.

En los cuadros 1 y 3 se indican las áreas definidas en la laguna facultativa por cada uno

de los métodos. Las dimensiones del estanque facultativo con el modelo matemático son menores. Existe una diferencia de 594 metros cuadrados: 13.45%. No obstante que el área es menor que en el diseño tradicional, la eficiencia de remoción de coliformes fecales resultó mayor con el modelo de optimización. Como ya se mencionó, este resultado se debe a la incorporación de cuatro mamparas en lugar de las dos propuestas de manera original. Olukanni y Ducoste (2011) concluyen que en la optimización en el diseño de sistemas lagunares es posible reducir el costo, condicionado a que se incluyan las restricciones adecuadas, considerando siempre las normas de la calidad del agua tratada en el efluente de estos sistemas. Como se observa, el presente estudio coincide con las afirmaciones de estos autores.

Acerca de la DBO<sub>5</sub>, los dos casos estudiados cumplen con la concentración de contaminantes en el efluente del estanque facultativo que menciona la norma mexicana NOM-001-ECOL-96 (DOF, 1996); 43 y 48 mg/l para el método tradicional y la aplicación del modelo matemático, respectivamente. De acuerdo con

Cuadro 2. Informe de resultados de optimización y comparativo del diseño del sistema lagunar.

Microsoft Excel 12.0 Answer Report  
 Worksheet: [Artículo 1 solver.xls] DISEÑO facultativa Maduración  
 Report Created: 22/01/2013 16:29:42  
 Result: Solver found a solution. All constraints and optimality conditions are satisfied  
 Engine: Standard LSGRG Nonlinear  
 Solution Time: 05 seconds  
 Iterations: 6  
 Subproblems: 17  
 Incumbent Solutions: 3

## Objective Cell (Min)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$J\$20	Costo total	5 916 989.864	5 204 275.071

## Decision Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Type
\$G\$6	$O_F$	25.77	22.12	Normal
\$H\$6	$N_{mampF}$	2.00	4.00	Normal
\$I\$6	$O_M$	1.88	1.00	Normal
\$J\$6	$N_{mampM}$	4.00	2.00	Normal

## Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$H\$20	Costo laguna facultativa	\$4 738 058.85	$\$H\$20 \geq 0$	Not Binding	4 738 058.846
\$I\$20	Costo laguna de maduración	\$466 216.23	$\$I\$20 \geq 0$	Not Binding	466 216.2251
\$J\$16	DBOe	41	$\$J\$16 \leq 75$	Not Binding	34.08882517
\$J\$16	DBOe	41	$\$J\$16 \geq 0$	Not Binding	40.91117483
\$I\$16	NF/No	1 000.00	$\$I\$16 = 1 000$	Binding	0
\$C\$16	$d$	0.0290	$\$C\$16 \geq 0$	Not Binding	0.029014794
\$H\$6	$N_{mampF}$	4.00	$\$H\$6 \geq 1$	Not Binding	3
\$I\$6	$O_M$	1.00	$\$I\$6 \leq 10$	Not Binding	9
\$J\$6	$N_{mampM}$	2.00	$\$J\$6 \geq 1$	Binding	0
\$J\$6	$N_{mampM}$	2.00	$\$J\$6 \leq 4$	Not Binding	2
\$I\$6	$O_M$	1.00	$\$I\$6 \geq 1$	Binding	0
\$G\$6	$O_F$	22.12	$\$G\$6 \geq 1$	Not Binding	21.12037699
\$H\$6	$N_{mampF}$	4.00	$\$H\$6 \leq 4$	Binding	0
\$G\$6	$O_F$	22.12	$\$G\$6 \leq 30$	Not Binding	7.879623014

los resultados de los cuadros 1 y 3, se obtuvo un costo menor con el modelo matemático de \$500 269.92, que representa 9.55%. Lo anterior es una cifra importante, considerando la disponibilidad de recursos económicos.

*Laguna de maduración o pulimento*

El cuadro 3 muestra los resultados del diseño de las lagunas de maduración. Con la aplicación del modelo matemático propuesto resultó

Cuadro 3. Resultados de la optimización del diseño del sistema lagunar con el sistema Risk Solver Platform.

Datos				Laguna facultativa		Laguna de maduración	
$Q_i$	$N_i$	DBOi	$T$	$O_F$	$N_{mampF}$	$O_M$	$N_{mampM}$
231	10 000 000	220	11.8	22.12	4	1.00	2

Resultados de la laguna facultativa									
$X$	$d$	$kb$	$a$	$W_{sup}$	$L_{sup}$	$Q_e$	$N_e$	DBOe	Área
52.5	0.0187	0.4648	1.3301	36.70	104.09	211.90	1 571	48	3 819.91

Resultados de la laguna de maduración									
$X$	$d$	$kb$	$a$	$W_{sup}$	$L_{sup}$	$Q_e$	$N_e$	DBOe	Área
33.76	0.0290	0.4648	1.0266	35.70	8.29	210.42	1 000.00	41	295.87

Área total	Costo, laguna facultativa	Costo, laguna de maduración	Costo total
4 115.78	\$4 738 058.85	\$466 216.23	\$5 204 275.07

menor tiempo de retención y, por tanto, un área menor de 39.375%. El número de mamparas calculado con el método tradicional fue de cuatro; mientras que en el segundo diseño cambió a dos. No obstante lo anterior, los dos casos analizados cumplen perfectamente con los requerimientos de calidad del agua residual tratada que indica la Norma Oficial Mexicana, así como la reducción de costos, que fue de \$212 444.86, lo anterior significa 31.30%. Como puede observarse, el ahorro de recursos es importante. La principal desventaja de estos sistemas de tratamiento es la gran área de terreno que ocupan (CNA e IMTA, 2007a; 2007b).

#### Del sistema lagunar en su conjunto

La reducción del tiempo de retención fue de 4.53 días y un área menor de 16.09%. La diferencia de costos es de \$712 714.79, que significa 12.04%.

Es prudente indicar que no es recomendable aumentar en forma indiscriminada el número de deflectores; según Oke y Otun (2001), Shilton y Harrison (2003b), Bracho *et al.* (2006) y Winfrey *et al.* (2010), deben tomarse en cuenta los costos, por lo que los autores citados recomiendan se realice un análisis económico

costo-efectividad. De acuerdo con Chávez, Hernández y Flores (1989), se obtienen resultados óptimos que proporcionan elementos de juicio para la toma de decisiones.

El cuadro 2 muestra el comparativo de resultados, así como las variables de decisión a que fue sometido el estudio. En el mismo cuadro, en el apartado de restricciones, se observa el parámetro de los coliformes fecales en el efluente donde se cumplió exactamente con la igualdad. También se puede apreciar que el sistema toma el número máximo permitido por la restricción de mamparas en la laguna facultativa, a diferencia del tiempo de retención en la laguna de maduración, en el cual se selecciona el límite inferior de la restricción. Lo anterior se interpreta que cuando el número de mamparas aumenta en la laguna facultativa, el tiempo de retención de la laguna de maduración tiende a cero. En el cuadro 3 se observan los cambios realizados por el sistema de análisis *Solver* en las 20 celdas dependientes.

#### Reporte de sensibilidad

En este análisis (figura 4) se graficó la función objetivo y se consideró constante el número de mamparas determinado por el modelo mate-

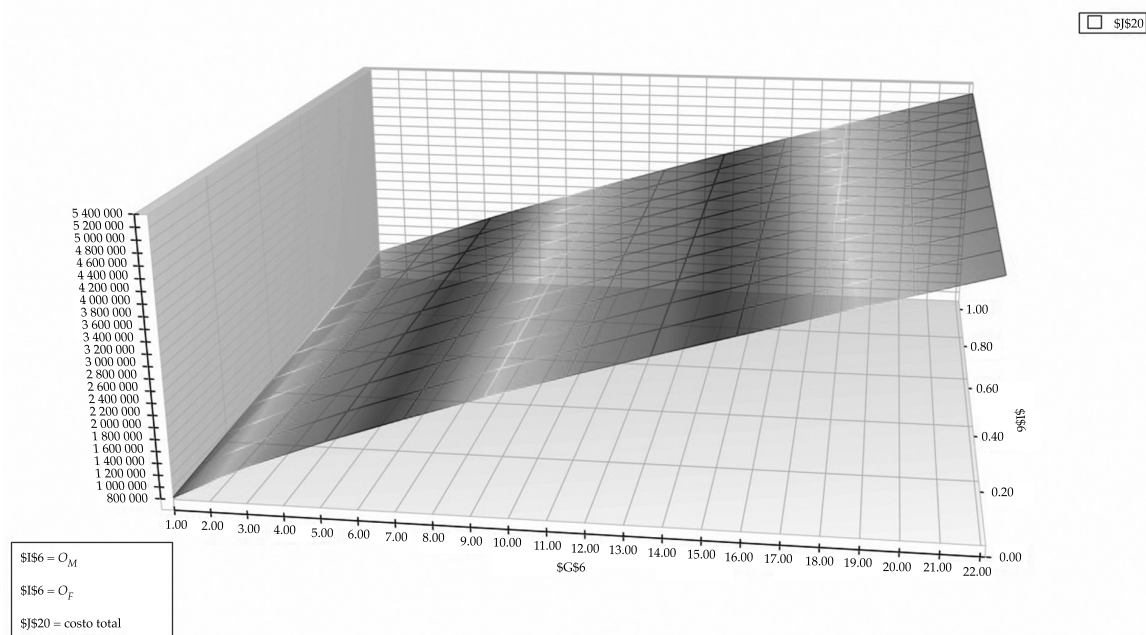


Figura 4. Reporte de sensibilidad de costos con variaciones de manera independiente, considerando sólo el tiempo de retención.

mático de optimización en ambas lagunas: 4 y 2, respectivamente. Al fijar como constantes el número de mamparas se tienen sólo tres variables ( $O_F$ ,  $O_M$  y costo total); de esta manera se puede representar gráficamente. Se confirma que la función es no lineal, ya que la relación entre las variables no es proporcional. También se infiere que el modelo es sensible al cambio de las variables, pues entre mayor es el tiempo de retención en ambas lagunas, el costo de construcción aumenta; así, es congruente con la realidad, puesto que si estos parámetros son mayores, aumenta el área necesaria para contener las aguas residuales y, por tanto, incrementa el costo.

### Análisis de sensibilidad del sistema lagunar

Para verificar la sensibilidad se consideró una variación de más menos 10% en los principales parámetros (Muramatsu, 2011) y se realizó una gráfica de tornado para observar los paráme-

tros más sensibles al cambio. En la figura 5 se analiza el costo total del proyecto.

Como se observa, la barra más ancha es el volumen de agua en el influente del sistema de tratamiento. Éste es el parámetro más sensible al cambio; es decir, a mayor volumen más requerimiento de área de terreno y, por ende, mayor costo. En orden de importancia sigue el tiempo de retención hidráulico, que tiene influencia con las dimensiones del sistema lagunar.

En la figura 6 se indica que el parámetro más sensible que influye para la eliminación del organismo indicador es el tiempo de retención, o sea, a menor tiempo de retención hidráulico es mayor la concentración de coliformes fecales. Otro parámetro importante es la temperatura: a menor temperatura, mayor concentración del organismo indicador.

Acerca de la demanda bioquímica de oxígeno en el efluente del sistema lagunar, la figura 7 muestra que la  $DBO_5$  en el influente es la barra más sensible, seguida por la temperatura, y

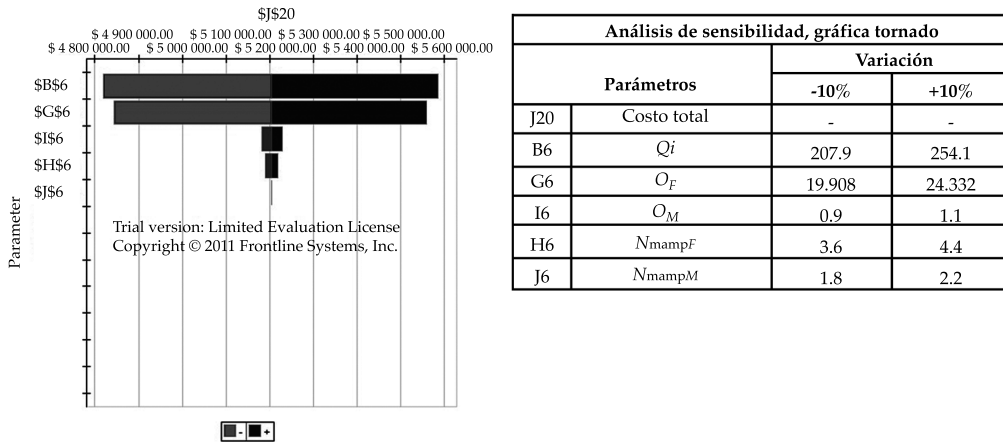


Figura 5. Análisis de sensibilidad de costo total.

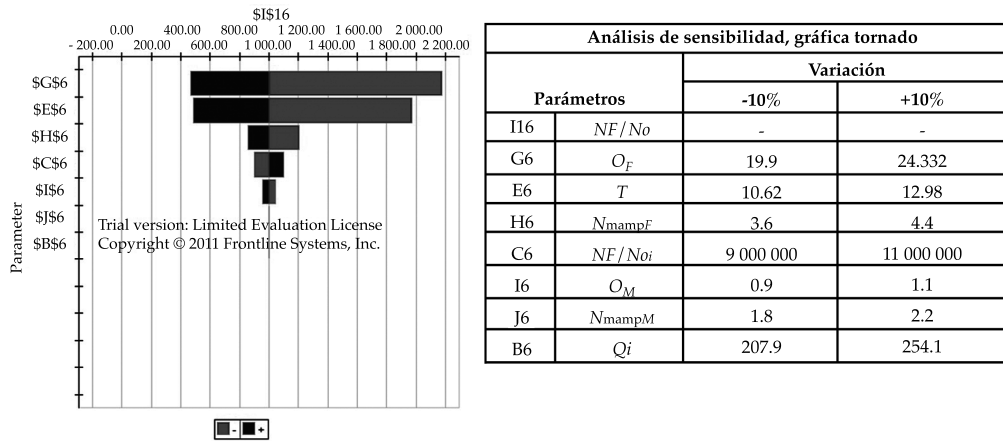


Figura 6. Análisis de sensibilidad de número de coliformes fecales.

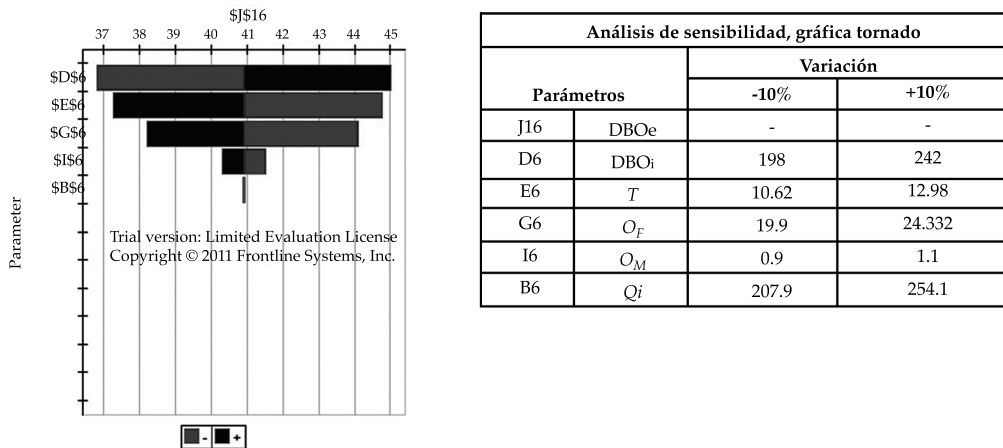


Figura 7. Análisis de sensibilidad de DBOe.

significa que a menor temperatura, mayor concentración de la materia orgánica. La eficiencia de remoción de la materia orgánica tiene como límites de temperatura superior e inferior de 37 y 4 grados; es decir, fuera de este rango, la actividad de las algas que producen oxígeno decrece de manera importante (Rolim, 2000; Oakley, 2005). En orden de relevancia sigue el tiempo de retención hidráulico: la barra indica que a menor tiempo de retención mayor es la concentración de la materia orgánica.

Como puede observarse, el análisis de sensibilidad responde de modo adecuado a la variación de los parámetros involucrados en cada concepto.

En la figura 8 se muestran las dimensiones optimizadas del sistema lagunar, determinadas por el modelo matemático.

## Conclusiones

De acuerdo con los objetivos planteados, se obtuvieron mejores resultados con la aplicación del modelo matemático de programación no lineal: menor costo, tiempo de retención hidráulico y área.

Es importante mencionar que el presente análisis matemático puede aplicarse a diferentes condiciones de diseño; es decir, a cualquier región; pero es necesario llevar a cabo algunos cambios, como costos del terreno, terraplenes, deflectores, evaporación y temperatura, entre otros.

Es recomendable, para los países en desarrollo, la aplicación de la programación no lineal como herramienta auxiliar alternativa en la optimización en el diseño de lagunas de estabilización. Se obtienen ahorros importantes y se cumple a la perfección con la normatividad en materia de descarga de aguas residuales a los cuerpos receptores.

Es prudente llevar a cabo estudios adicionales, considerando la incorporación de una laguna anaerobia, luego comparar los resultados con el fin de precisar la menor área y costo para la ejecución del proyecto.

## Referencias

- Abbas, H., Nasr, R., & Seif, H. (2006). Study of Waste Stabilization Pond Geometry for Wastewater Treatment Efficiency. *Ecol. Eng.*, 28(1), 25-34.

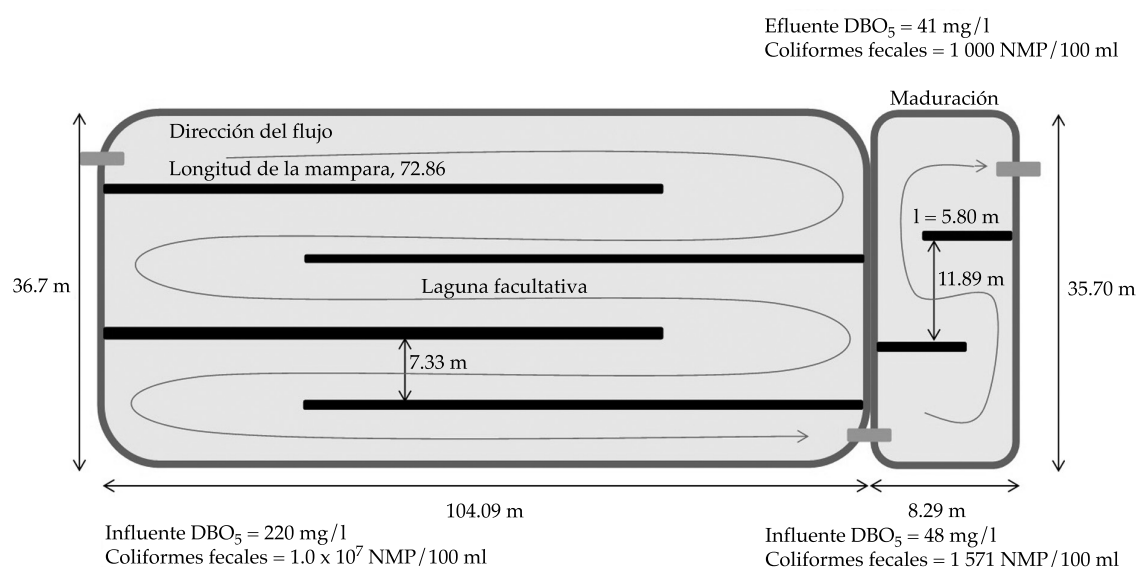


Figura 8. Dimensiones del sistema lagunar con el modelo matemático propuesto.

- Anderson, D. R., Sweeney, D. J., & Williams, T. A. (2004). *Métodos cuantitativos para los negocios* (116 pp.). México, DF: Thomson Corporation.
- Agunwamba, J. C., Ochonogar, A., & Ukpong, E. C. (2003). Experimental and Principal Component Analysis of Waste Stabilization Ponds. *Journal of Applied Science, Engineering and Technology*, 3(1), 25-30.
- Bracho, N., Lloyd, B., & Aldana, G. (2006). Optimization of Hydraulic Performance to Maximize Fecal Coliform Removal in Maturation Ponds. *Water Res.*, 40, 1677-1685.
- Banda, C. G. (2007). *Computational Fluid Dynamics Modeling of Baffled Waste Stabilization Ponds*. Ph.D. thesis. Leeds, UK: School of Civil Engineering, University of Leeds.
- Chávez, A., Hernández N., M., & Flores, S. (1989). Modelación digital y optimación de acuíferos. *Ingeniería Hidráulica en México*, 2(3), 31-39.
- CNA e IMTA (2007a). *Manual de diseño de agua potable, alcantarillado y saneamiento. Paquetes tecnológicos para el tratamiento de excretas y aguas residuales en comunidades rurales* (pp. 56-83). Jiutepec, México: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.
- CNA e IMTA (2007b). *Manual de diseño de agua potable, alcantarillado y saneamiento. Manual de diseño de lagunas de estabilización* (234 pp.). Jiutepec, México: Instituto Mexicano de Tecnología del Agua.
- Cortés, M. F., Treviño, C. A., Luévanos, R. A., Luévanos, R. R. & Uranga, S. A. C. (2014a). Función objetivo en el diseño de laguna facultativa (caso de estudio). *Revista Mexicana de Ciencias Agrícolas*, 5(3), 433-447.
- Cortés, M. F., Treviño, C. A., Alcorta, G. M. A., Luévanos, R. R., Kalashnikov, Vyacheslav, & Luévanos, R. R. (2014b). Mathematical Analysis for the Optimization of a Design in a Facultative Pond: Indicator Organism and Organic Matter. *Mathematical Problems in Engineering*, Article ID 652509.
- Cortés, M. F., Treviño, C. A., Luévanos, R. A., & Luévanos, R. R. (2013). Mathematical Model for the Optimization of the Design of a Facultative Pond (case study). *Far East Journal of Mathematical Sciences (FJMS)*, 81(1), 127-145.
- DOF (1996). Norma Oficial Mexicana NOM-001-ECOL-1996. Que establece los límites máximos permisibles de contaminantes en las descargas de aguas residuales a los sistemas en aguas y bienes nacionales (30 pp.). *Diario Oficial de la Federación*. México, DF: Semarnat-Secretaría de Gobernación.
- Fonseca, C. M., & Fleming, P. J. (1993). *Genetic Algorithms for Multi-Objective Optimization: Formulation, Discussion and Generalization*. Citado el 12 de enero de 2012. Recuperado de [http://pdf.aminer.org/000/310/607/genetic\\_algorithms\\_for\\_multiobjective\\_optimization\\_formulationdiscussion\\_and\\_generalization.pdf](http://pdf.aminer.org/000/310/607/genetic_algorithms_for_multiobjective_optimization_formulationdiscussion_and_generalization.pdf).
- Fonseca, C. M., & Fleming, P. J. (1995). An Overview of Evolutionary Algorithms in Multiobjective Optimization. *Evol. Comput.*, 3(1), 1-16.
- Hamzeh, R., & Ponce, V. M. (2007). *Design and Performance of Waste Stabilization Ponds*. Citado el 13 de enero de 2012. Recuperado de <http://ponce.sdsu.edu/ramadan/stabilizationponds.html>.
- Killani, J. S., & Ogunrombi, J. A. (1984). Effects of Baffles on the Performance of Model Waste Stabilization Ponds. *Water Research*, 18(8), 941-944.
- Mara, D. D. (2004). *Domestic Wastewater Treatment in Developing Countries*. London: Earthscan Publications.
- Metcalf & Eddy, Inc. (1991). *Wastewater Engineering: Treatment, Disposal, Reuse*. New York: McGraw-Hill.
- Muramatsu, M. (2011). *Risk Solver Platform*. Versión 11.5. Programa computacional [descarga en línea]. Incline Village, USA: Frontline Systems Inc.
- Muttamara, S., & Puetpaiboon, U. (1996). Nitrogen Removal in Baffled Waste Stabilization Ponds. *Water Sci. Technol.*, 33(7), 173-181.
- Muttamara, S., & Puetpaiboon, U. (1997). Roles of Baffles in Waste Stabilization Ponds. *Water Sci. Technol.*, 35(8), 275-284.
- Naddafi, K., Hassanvand, A. S., Dehghanifard, E., Faezi-Razi, D., Mostofi, S., Kasaei, N., Nabizadeh, R., & Heidari, M. (2009). Performance Evaluation of Wastewater Stabilization Ponds in Arak-Iran, Iran. *J. Environ. Health. Sci. Eng.*, 6(1), 41-46.
- Nelder, J. A., & Mead, R. (1965). A Simplex Method for Function Minimization. *Comput. J.*, 7(4), 308-313.
- Oakley S. (2005). *Lagunas de estabilización en Honduras. Manual de diseño, construcción, operación y mantenimiento, monitoreo y sostenibilidad* (201 pp.). Long Beach, EU: Universidad Estatal de California.
- Oke, I. A., & Otun, J. A. (2001). Mathematical Analysis of Economic Sizing of Stabilization Ponds. *Nigerian J. Eng.*, 9(1), 13-21.
- Olukanni, O. D., & Ducoste, J. J. (2011). Optimization of Waste Stabilization Pond Design for Developing Nations Using Computational Fluid Dynamics. *Ecol. Eng.*, 37(11), 1878-1888.
- Pedahzur, R., Nasser, A. M., Dor, I., Fattal, B., & Shuval, H. I. (1993). The Effect of Baffle Installation on the Performance of a Single-Cell Stabilization Pond. *Water Science and Technology*, 27(7), 45-52.
- Rolim, M. S. (2000). *Sistemas de lagunas de estabilización. Cómo utilizar aguas residuales tratadas en sistemas de riego* (pp. 199-323). Bogotá: OPS y OMS, McGraw-Hill.
- Sah, L., Rousseau, D. P. L., & Hooijmans, C. M. (2012). Numerical Modelling of Waste Stabilization Ponds: Where do we stand? *Water, Air & Soil Pollution*, 223(6), 3155-3171.
- Senzia, M. A., Mayo, A. W., Mbwette, T. S. A., Katima, J. H. Y., & Jorgensen, S. E. (2002). Modelling Nitrogen Transformation and Removal in Primary Facultative Ponds. *Ecological Modelling*, 154(3), 207-215.

- Shilton, A. N., & Harrison, J. (2003a). *Guidelines for the Hydraulic Design of Waste Stabilization Ponds*. Institute of Technology and Engineering, Massey University, New Zealand. Citado el 12 de enero de 2012. Recuperado de <http://www.bvsde.paho.org/bvsacd/agua2003/hidra.pdf>.
- Shilton, A. N., & Harrison, J. (2003b). Integration of Coliform Decay within a CFD (Computational Fluid Dynamic) Model of a Waste Stabilization Pond. *Water Sci. Technol.*, 48(2), 205-210.
- Shilton, A. N., & Mara, D. D. (2005). CFD (Computational Fluid Dynamics) Modeling of Baffles for Optimizing Tropical Waste Stabilization Ponds System. *Water Sci. Technol.*, 51(12), 103-106.
- Sperling, M. V., Chernicharo, C. A., Soares, A. M., & Zerbini, A. M. (2002). Coliform and Helminth Eggs Removal in a Combined UASB Reactor-Baffled Pond System in Brazil: Performance Evaluation and Mathematical Modelling. *Water Science and Technology*, 45(10), 237-242.
- Sperling, M. V., Chernicharo, C. A., Soares, A. M., & Zerbini, A. M. (2003). Evaluation and Modelling of Helminth Eggs Removal in Baffled and Unbaffled Ponds Treating Anaerobic Effluent. *Water Science and Technology*, 48(2), 113-120.
- Winfrey, B. K., Stronsnider, W. H., Nairn, R. W., & Strevett, K. A. (2010). Highly Effective Reduction of Fecal Indicator Bacteria Counts in an Ecologically Engineered Municipal Wastewater and Acid Mine Drainage Passive Co-Treatment System. *Ecol. Eng.*, 36(12), 1620-1626.
- Zanotelli, C. T., Medri, W., Belli-Filho, P., Perdomo, C. C., & Costa, R. H. R. (2002). Performance of a Baffled Facultative Pond Treating Piggery Wastes. *Water Science and Technology*, 45(1), 49-53.

## Dirección institucional de los autores

Dr. Facundo Cortés-Martínez

Profesor investigador  
Facultad de Ingeniería, Ciencias y Arquitectura  
Universidad Juárez del Estado de Durango, campus Gómez  
Palacio Durango

Av. Universidad s/n, Fraccionamiento Filadelfia  
35120 Gómez Palacio, Durango, MÉXICO  
Teléfono: +52 (871) 7152 017  
facundo\_cm@yahoo.com.mx

M.I. Alejandro Treviño-Cansino

Profesor investigador  
Facultad de Ingeniería, Ciencias y Arquitectura  
Universidad Juárez del Estado de Durango, campus Gómez  
Palacio Durango  
Av. Universidad s/n, Fraccionamiento Filadelfia  
35120 Gómez Palacio, Durango, MÉXICO  
Teléfono: +52 (871) 7152 017  
atrevinoc@live.com.mx

Dra. María Aracelia Alcorta-García

Profesora investigadora  
Facultad de Ciencias Físico Matemáticas  
Centro de Investigaciones en Ciencias Físico Matemáticas  
Universidad Autónoma de Nuevo León  
Av. Universidad s/n  
66451 San Nicolás de los Garza, Nuevo León, MÉXICO  
maaracelia@gmail.com

Dr. Agustín Sáenz López

Profesor investigador  
Facultad de Ingeniería, Ciencias y Arquitectura  
Universidad Juárez del Estado de Durango, campus Gómez  
Palacio Durango  
Av. Universidad s/n, Fraccionamiento Filadelfia  
35120 Gómez Palacio, Durango, MÉXICO  
Teléfono: +52 (871) 7152 017  
agusgpl@hotmail.com

Dr. José Luis González-Barrios

Investigador titular  
Centro Nacional de Investigación Disciplinaria Relación  
Agua-Suelo-Planta- Atmósfera  
Instituto Nacional de Investigaciones Forestales Agrícolas  
y Pecuarias  
Margen Derecha Canal Sacramento  
35140 Gómez Palacio, Durango, MÉXICO  
Teléfono: +52 (871) 1590 105  
gonzalez.barrios@inifap.gob.mx