

# EL COEFICIENTE DE DESCARGA Y LA DENSIDAD BETA

• José Roberto Mercado\* • Mauro Íñiguez • Pedro Guido •  
• Javier Ramírez-Luna • Arturo González-Casillas •  
*Instituto Mexicano de Tecnología del Agua*

\*Autor de correspondencia

## Resumen

MERCADO, J.R., ÍÑIGUEZ, M., GUIDO, P., RAMÍREZ-LUNA, J. & GONZÁLEZ-CASILLAS, A. El coeficiente de descarga y la densidad beta. *Tecnología y Ciencias del Agua*. Vol. V, núm. 2, marzo-abril de 2014, pp. 161-175.

Se estudia el coeficiente de descarga y la distribución de intensidades de la turbulencia. Con el teorema de Torricelli y la teoría de probabilidades se formulan el caudal y el coeficiente de descarga, siguiendo una densidad beta unimodal, renormalizada, con dos parámetros de forma. Se había construido un modelo multifractal para la cascada de la energía cinética en la turbulencia, partiendo de los métodos de Pearson y de Kolmogorov. Para la intensidad de la turbulencia, con el primero se creó una distribución beta; para el segundo, una ley en potencia. Se completa el modelo multifractal, reconociendo la función de estructura como la función Kummer. Se busca la compatibilidad entre los dos modelos y la identificación de sus parámetros. Se encuentra que los dos parámetros de forma determinan la resolución del modelo de cascada. Se determina la dimensión local y el espectro de dimensiones para los estados que producen el teorema de Torricelli. Redefiniendo la función de estructura, la resolución queda determinada por el tirante para el cambio de régimen. Análogamente, pueden identificarse diversos prototipos, a los que hemos denominado: cuatro experimentales, tres canales, Kolmogorov, Kármán, Taylor, Verhulst (logística), Cauchy-Manning y Euclides (área). Se concluye que el coeficiente de descarga es una beta renormalizada; la distribución de intensidades de la turbulencia es una beta; el prototipo Torricelli resulta representativo para los cuatro experimentales y el de Euclides, quedando lejos de la distribución Gaussiana, que está contenida en el de Kármán; en tanto, el de Taylor produce la delta de Dirac.

**Palabras clave:** ecuaciones de descarga, autoafinidad, modelos de turbulencia, funciones de distribución, función de Kummer, multifractales, energía cinética.

## Introducción

Existen muchos trabajos sobre la determinación del coeficiente de descarga para flujos a superficie libre y en diferentes documentos se pro-

## Abstract

MERCADO, J.R., ÍÑIGUEZ, M., GUIDO, P., RAMÍREZ-LUNA, J. & GONZÁLEZ-CASILLAS, A. *The Discharge Coefficient and the Beta Density*. *Water Technology and Sciences (in Spanish)*. Vol. V, No. 2, March-April, 2014, pp. 161-175.

*Discharge coefficient and turbulence intensity distribution are studied. With Torricelli's theorem and the approach of probability theory, flow discharge and discharge coefficient equation are derived, following an unimodal Beta density function, renormalized, with two shape parameters. A multifractal model for the kinetic energy cascade in the turbulence was built, starting from the methods of Pearson and Kolmogorov. For turbulence intensity, with the first method, a Beta distribution was created; with the second, a power law. The multifractal model is completed, recognizing the structure function as a Kummer function. The compatibility between the two models are searched and so the identification of its parameters. It is found that the two shape parameters determine the cascade model resolution. Local dimension and dimension spectra are determined for the two states that produce Torricelli's theorem. Redefining the structure function, resolution is defined by the water depth for the regime change. Analogously, different prototypes could be defined, which we have called: the four experimental, three channels, Kolmogorov, Kármán, Taylor, Verhulst (logistic), Cauchy-Manning, and Euclides (golden proportion). We conclude that the discharge coefficient is a renormalized Beta; turbulence intensity distribution is a Beta; Torricelli prototype results representative for the four experimental and the Euclides, far away from the Gaussian distribution that is contained in von Karman model, meanwhile the Taylor's model yields the Dirac function.*

**Keywords:** Discharge equations, self-similarity, turbulence models, density function, Kummer function, multifractals, kinetic energy.

ponen ecuaciones para flujo libre y ahogado. Existe además la deducción clásica de ecuaciones de descarga para vertedores de cresta ancha en canal rectangular (Henderson, 1966). En Sotelo (1999) se citan diferentes ecuaciones de descarga

para vertedores por métodos empíricos. En dichas ecuaciones se observa la dificultad al pasar de un régimen a otro, con coeficientes empíricos que conserven su validez cuando ocurre dicho cambio de régimen. En general, para las estructuras de control y extracción no existe una ecuación de descarga que trabaje de forma adecuada en todos los regímenes de funcionamiento impuestos por la dinámica del flujo en los canales de riego. Una ecuación de descarga con invarianza para los diferentes regímenes es útil para su acoplamiento con la dinámica del flujo en el canal. De acuerdo con Baume (1992), la derivación de ecuaciones de descarga invariantes, bajo los diferentes regímenes de funcionamiento, ha sido raramente tratada.

La derivación de ecuaciones de descarga se ha abordado con diferentes enfoques empíricos y visión determinista, razón por la cual esas ecuaciones contienen coeficientes de descarga empíricos que dependen de varios parámetros (Henderson, 1966; Chow, 1959; Swamee *et al.*, 1993; Baume, 1992).

Los regímenes del funcionamiento para el flujo en un vertedor se acostumbra denominar como flujo ahogado, o a descarga sumergida, cuando dicho flujo depende de las condiciones hidráulicas aguas abajo y arriba de la estructura; en tanto que si sólo depende de las condiciones hidráulicas aguas arriba, se denomina flujo a descarga libre (Ramírez, 1997). El cambio de régimen corresponde al estado de mínima energía. Además, el flujo, de acuerdo con la estructura, se clasifica de dos maneras: en un vertedor, como flujo a superficie libre, y en una estructura tipo orificio, como flujo en carga.

El propósito de este trabajo es estudiar el coeficiente de descarga, desde un punto de vista experimental y teórico, y abordar su invarianza para diferentes vertedores y en diferentes regímenes de funcionamiento, posibilidad que se abre a través del enfoque estadístico. Kármán estudió la función de correlación a partir de la ecuación de Navier-Stokes; aproximando hasta la doble correlación y suprimiendo desde la triple correlación

(correlación entre tres componentes) en adelante y bajo la hipótesis de la turbulencia isotrópica llega a una ecuación de Kummer, cuya transformada de Laplace inversa produce una distribución beta (De Kármán y Howarth, 1938). Nosotros invocamos las simetrías de la ecuación de Navier-Stokes para encontrar algunas propiedades de la función de correlación y completamos su descripción por medio de un proceso de Cantor generalizado, (Mercado, 2008). Ahora, con el coeficiente de descarga descrito a través de una distribución beta, y una transformada de Laplace directa, comprobamos la función de correlación, la cual, por el trabajo de Kármán, refleja la ecuación de Navier-Stokes como una aproximación hasta la doble correlación. Además, las simetrías de la ecuación de Navier-Stokes son independientes de la viscosidad, por lo que la función de correlación vale también para la ecuación de Navier-Stokes fraccional.

El esquema del trabajo se presenta en cinco apartados. En el primero se define el concepto de coeficiente de descarga y se desarrolla el método esbozado en esta introducción, la cual se sustenta en la ecuación de Navier-Stokes, pasa por la ecuación de Bernoulli y llega al teorema de Torricelli. En el segundo se aplica el teorema anterior y se elabora una forma covariante para el caudal adimensional generalizado; se reconoce la densidad beta y se muestra el cambio de la energía específica de la sección, en términos del tirante, hasta su forma beta. En el tercero se estudia la relación del coeficiente de descarga con la función Kummer, conocida como hipergeométrica confluyente, y su descripción como función Fox; con el modelo (Mercado, 2008) se establece la relación entre los parámetros de forma de la beta y la resolución, para culminar la construcción del multifractal Torricelli, identificando la función de estructura como función Kummer. En la cuarta subsección se estudia la función de correlación a partir de las simetrías de la ecuación de Navier-Stokes hasta proponer la variable dual al tirante y la función de correlación con un exponente que contiene la información de

los números característicos, y los números de Reynolds y Froude. En la última subsección se describen los prototipos y los números que los identifican, y se construyen tablas que recogen esa información; se estudian los números de Euler para diferentes vertedores y se identifican los valores de sus parámetros, después se enuncian las principales conclusiones.

## Métodos

El coeficiente de descarga puede concebirse como un número de Euler que se expresa en función de las longitudes relativas características y de los números de Froude y Reynolds; es un objetivo primordial el esclarecer esa dependencia. Los números de Euler y de Froude se definen, respectivamente, por:

$$E^2 = \frac{\frac{1}{2}\rho v^2}{\Delta p}, \quad F_d^2 = \frac{v^2}{gl} \quad (1)$$

donde  $\rho$ ,  $v$ ,  $\Delta p$ ,  $g$  y  $l$  son, respectivamente, densidad, velocidad, variación de presión, gravedad y una longitud característica.

En la referencia de Mercado *et al.* (2012) se expone una visión fraccional de la ecuación de Navier-Stokes y se considera su versión clásica para el presente trabajo, cuya forma vectorial es (2):

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{v} = \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{v} - \nabla \cdot (-\nu \nabla \mathbf{v}) - \nabla \left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{p}{\rho} + \phi \right) \quad (2)$$

donde  $\mathbf{v}$ ,  $p$ ,  $\rho$ ,  $\nu$ ,  $t$  y  $\phi$  son velocidad, presión, densidad, viscosidad cinemática, tiempo y potencial escalar de la fuerza externa, como la gravedad. Integrando a lo largo de una línea de flujo entre dos cualesquiera de sus puntos, y bajo la hipótesis de flujo estacionario e inviscoso, surge la ecuación de D. Bernoulli (1738). Se trata de una ecuación de la energía y expresa la constancia de la misma. La expresión  $\left( \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} + \frac{p}{\rho} + \phi \right)_{i=1,2}$  se identifica como

carga total y se establece que la carga total es la misma a lo largo de cada línea de corriente (Rouse, 1946). La aplicación de la ecuación de D. Bernoulli para diferentes estados a lo largo de una línea de corriente puede expresarse como variaciones entre dos de estos estados, cualesquiera de ellos.

Desde un punto de vista histórico, la ecuación de D. Bernoulli es una generalización del teorema de Torricelli. Este teorema se obtiene al considerar que la superficie libre superior de un recipiente de agua está en el estado que se describe por la presión atmosférica, siendo constante y revalorada como  $p = 0$ ; la carga piezométrica por  $h$ ; y la velocidad  $v = 0$ ; en la otra superficie, la inferior, el estado está dado por la presión atmosférica  $p = 0$ , la carga por  $h = 0$ , y la velocidad de salida por  $v$ . Por tanto, la variación de la energía es

$\Delta E = \left( 0 - \frac{1}{2}v^2 \right) + ((0 + gh) - (0 + 0)) = 0$ , entonces  $-\frac{1}{2}v^2 + gh = 0$ , luego  $v = \sqrt{2gh}$ . Este resultado en forma equivalente corresponde a la velocidad adquirida por una partícula fluida en el proceso de caída libre, que partiendo del reposo descienda la altura  $h$  bajo la acción única del campo gravitacional.

## Coeficiente de descarga

Para las condiciones del teorema de Torricelli, con la caída del tirante  $H-h$ , y las diferencias de energía a lo largo de las líneas de corriente  $\Delta E = \Delta K + \Delta U$ , con  $C$  como coeficiente de Coriolis, se tiene  $\left( \frac{1}{2}C \frac{v^2}{g} - 0 \right) + (h - H) = \Delta E$ . Para pérdida de carga nula  $\Delta E = 0$ , entonces  $H = \frac{1}{2}C \frac{v^2}{g} + h$ , de tal manera que para un ancho unitario,  $A = h$ , el gasto es  $Q = Av$  o  $Q = h \sqrt{\frac{2g}{C}(H-h)}$ , la cual puede formularse como:

$$Q = \sqrt{\frac{2g}{C} H^3} \left( \frac{h}{H} \right) \left( 1 - \frac{h}{H} \right)^{1/2} \quad (3)$$

Dado que el coeficiente de Coriolis es mayor que 1, y puede llegar a acercarse al valor 2, su efecto puede interpretarse como un reforzamiento del número de Froude, visto como una intensificación de la inercia o un debilitamiento de la gravedad. En forma adimensional, el gasto, para un vertedor de

cresta ancha en canal de sección rectangular, es

$$Q_* = \sqrt{C} \frac{Q}{\sqrt{2gH^3}} = \left(\frac{h}{H}\right) \left(1 - \frac{h}{H}\right)^{1/2} \quad (\text{Ramírez, 1997}).$$

Que tiene la forma  $Q_* = \left(\frac{h}{H}\right)^{2-1} \left(1 - \frac{h}{H}\right)^{3/2-1}$ .

Para definir el caudal máximo, según el cambio del régimen de funcionamiento, se aplica el principio de mínima energía en la ecuación adimensional y se obtiene la condición de cambio de régimen  $\left(\frac{h}{H}\right)_{cr} = \frac{1}{1+1/2} = \frac{2}{3}$  (la moda), con lo cual se puede definir:

$$Q_* = \frac{\left(\frac{h}{H}\right)^{2-1} \left(1 - \frac{h}{H}\right)^{3/2-1}}{\frac{2}{3} \left(\frac{1}{3}\right)^{1/2}}, 0 < \frac{h}{H} \leq \left(\frac{h}{H}\right)_{cr} \quad (4)$$

Por lo que la ecuación debe formularse en términos de un gasto adimensional, adoptando una forma que generalice el gasto derivado del teorema de Torricelli  $Q_* = \left(\frac{h}{H}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{h}{H}\right)^{b-1}$ .

Desde el punto de vista de la teoría de probabilidades, el factor  $(1-h/H)^{b-1}$  se ve como proporcional al flujo (volumen) por unidad de tiempo y por unidad de área y, por tanto, representa la densidad de corriente de probabilidad; en tanto, el factor  $(h/H)^{a-1}$ , como proporcional al área, representa la función de riesgo, por lo que el producto de los dos designa la probabilidad por unidad de tiempo, y donde  $h/H$  es la cota superior del dominio de los valores que puede asumir la variable aleatoria en el intervalo  $(-\infty, h/H)$ . Aunque es igualmente probable definir al primero como el flujo y al segundo como el área, porque bastaría con hacer un cambio de variable y medir  $h/H$

de derecha a izquierda, y no al revés, como se acostumbra, lo que equivale al cambio  $h/H \mapsto 1 - (h/H)$ ; en todo caso, uno de ellos representa al flujo de energía y el otro, al riesgo.

En Ramírez (1997) se formula un coeficiente de descarga de la siguiente forma:

$$C_d = \frac{Q_*}{Q_{*m\acute{a}x}} = \frac{\left(\frac{h}{H}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{h}{H}\right)^{b-1}}{\left(\frac{h}{H}\right)_{cr}^{a-1} \left(1 - \frac{h}{H}\right)_{cr}^{b-1}}, 0 < \frac{h}{H} \leq \left(\frac{h}{H}\right)_{cr} \quad (5)$$

Donde  $Q_{*m\acute{a}x}$  es el valor del caudal a descarga libre, y  $a$  y  $b$  son parámetros de forma, que dependen de las longitudes relativas características y de los números de Froude y Reynolds. Si  $L$  es la longitud de la cresta del vertedor, se observa que  $Q = C_d L Q_{*m\acute{a}x}$ . El cambio de régimen  $(\cdot)_{cr}$  viene dado por  $\left(\frac{h}{H}\right)_{cr} = \frac{a-1}{a+b-2}$ ,

la cual corresponde a la moda de la densidad de la distribución beta. Por tanto, se representa al coeficiente de descarga de forma general como:

$$C_d = \frac{\left(\frac{h}{H}\right)^{a-1} \left(1 - \frac{h}{H}\right)^{b-1}}{\left(\frac{h}{H}\right)_{cr}^{a-1} \left(1 - \frac{h}{H}\right)_{cr}^{b-1}}, 0 < \frac{h}{H} \leq \left(\frac{h}{H}\right)_{cr} \quad (6)$$

Se trata de una densidad beta renormalizada  $\frac{(\bar{h})^{a-1} (1-\bar{h})^{b-1}}{(\bar{h})_{cr}^{a-1} (1-\bar{h})_{cr}^{b-1}}$ , de tal manera que  $\bar{h} = \bar{h}_{cr}$  valga 1, por lo que queda normalizada por su máximo y no por el área debajo de la curva, como se acostumbra con la densidad beta. Ésta es la función de distribución más probable en el sentido del principio de mínima energía y queda determinada por la relación beta renormalizada (6), definida hasta el cambio de régimen.

En la sección de exposición de los prototipos se ilustra su aplicación al vertedor de cresta ancha, de cresta aguda, de compuerta, etcétera.

Se conoce el comportamiento característico de la energía específica de una sección, que muestra un subrango dado por una función creciente de la energía con el tirante, el flujo subcrítico o lento; otro subrango con una función decreciente con el tirante es el flujo supercrítico o rápido; un punto que los separa y a la vez los une corresponde al tirante crítico, y al mínimo de la energía con respecto al tirante.

El tirante puede adimensionalizarse con el tirante crítico, definiendo  $h/h_c$ . Con el cambio de variable  $\bar{h} = \frac{h/h_c}{1+h/h_c}$  se contrae el intervalo de variación desde los reales positivos hasta el intervalo unitario  $0 \leq h/h_c < \infty \mapsto 0 \leq \bar{h} < 1$  y con el cambio de signo de la energía específica de la sección  $H \mapsto \bar{H} = -H$ . La rama creciente de la función representa el subrango supercrítico y la rama decreciente el subrango subcrítico, separados por el punto máximo, representando el estado crítico. Así, el cambio de la densidad de probabilidad es

$$\bar{h}^{a-1}(1-\bar{h})^{b-1} \leftrightarrow \left(\frac{h/h_c}{1+h/h_c}\right)^{a-1} \left(\frac{1}{1+h/h_c}\right)^{b-1}$$

### Coeficiente de descarga y la función Kummer

La representación obtenida en la sección anterior para el coeficiente de descarga permite otra interpretación del mismo, que lo vincula con la ecuación diferencial de Kummer. El coeficiente de descarga es la transformada de Laplace inversa de la función Kummer, en tanto que es una solución de la ecuación diferencial homónima. O recíprocamente, la transformada de Laplace del coeficiente de descarga es solución de la ecuación diferencial de Kummer. Una sección transversal sobre el vertedor se cuadrícula y sobre cada cuadro se toma un valor del tirante representativo, se adimensionaliza, se define la función completamente monótona  $f(h_k) = \frac{\binom{a}{k}}{\binom{a+b}{k}} h^{-k}$ ; con el proceso de Cantor generalizado y la discretización  $h_n = \frac{n}{s}$  —entendiendo como  $s$  la variable dual al tirante, la cual también debe ser adimensional— se obtiene

${}_1F_1(-s; a, a+b)$  (Mercado, 2008). Pero  ${}_1F_1(z; a, a+b)$  es una solución de la ecuación diferencial ordinaria  $zu'' + (a+b-z)u' - au = 0$  y además  ${}_1F_1(-s; a, a+b) = L\left(\frac{h^{a-1}(1-h)^{b-1}}{B(a,b)}\right)(s)$ , la cual es renormalizada y produce (7):

$$L^{-1}(C_d(h))(s) = \left(\frac{B(a,b)}{h_{cr}^{a-1}(1-h_{cr})^{b-1}}\right) {}_1F_1(-s; a, a+b) \quad (7)$$

Por tanto, la función  ${}_1F_1(-s; a, a+b)$ , solución de la ecuación diferencial de Kummer, determina de forma única al coeficiente de descarga, una vez que se han fijado los dos parámetros de forma. Sin embargo, de acuerdo con nuestra hipótesis, existe una relación entre los dos parámetros, relación que depende del índice de ocupación espacial o bien del índice de estabilidad Lévy.

Por otra parte, esa función tiene también su representación como función Fox y, por tanto, como transformada inversa de Mellin (Metzler y Klafter, 2000):

$$\begin{aligned} & {}_1F_1(-s; a, a+b) \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} H_{2,2}^{1,1} \left( s \left| \begin{matrix} (1-a, 1) \\ (0, 1), (1-(a+b), 1) \end{matrix} \right. \right) \\ &= \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)} M^{-1}(\chi(t))(s) \end{aligned} \quad (8)$$

en donde  $\chi(t) = \frac{\Gamma(-t)}{\Gamma(a+b+t)} \frac{\Gamma(a+t)}{1}$ , y  $\Gamma(t)$  es la función gamma de Euler.

### Multifractal Torricelli

En Mercado (2008) se presenta un modelo multifractal para la cascada de energía de la turbulencia partiendo de los métodos de Pearson y de Kolmogorov, simbolizando con  $q$  la llamada base de la resolución, siendo  $q > 1$ ; además, se tienen  $f(\bar{\alpha})$ , el espectro multifractal;

$\bar{\alpha}$ , la dimensión fractal local;  $D_{B'}$  el máximo del espectro multifractal y medida del soporte;  $\varepsilon$ , la tasa de transferencia de la energía cinética;  $l_0$  la longitud que corresponde a la dimensión de los vórtices iniciales; y  $n$  representando la enésima etapa del proceso de fractalización. Se encuentra que la intensidad de la turbulencia  $I_T$ , entendida como la media cuadrática del módulo de las variaciones de las velocidades (como sustituto del valor rms, el cual queda indeterminado para las distribuciones Levy, salvo la Gaussiana), puede describirse por  $\langle |\Delta u| \rangle^2 = (\varepsilon l_0)^{2/3} (q^{-n})^{\frac{2}{3} + \frac{4}{3}(D_T - f(\bar{\alpha}))}$ , con  $u_0 = \varepsilon l_0^{1/3}$ ,  $\beta = \frac{f(\bar{\alpha})}{D_T}$ , y  $D_T$  es la dimensión topológica, por tanto se obtiene (9):

$$I_T = \langle |\Delta u| \rangle = (\varepsilon l_0)^{1/3} (q^{-n})^{\frac{1}{3} + \frac{2}{3} D_T (1-\beta)} \quad (9)$$

Si se asume que la distribución de la intensidad de turbulencia sigue una distribución beta  $h^{a-1} (1-h)^{b-1}$ , se quiere calcular el sustituto del valor rms, para lo cual se requiere evaluar la integral  $(\int_0^\infty h^{2\sigma} B dh)^{1/2}$ ; pero su cuadrado es la transformada de Mellin de orden  $2\sigma + 1$  de la densidad beta, recordando que en tanto distribución se define como nula fuera del intervalo unitario,  $\int_0^\infty h^{2\sigma} B dh = M(B)(2\sigma + 1)$ ; en términos de los símbolos de Pochhammer, el valor de la integral es  $\frac{(a)_{2\sigma}}{(a+b)_{2\sigma}} = \frac{\Gamma(a+2\sigma)}{\Gamma(a)} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a+b+2\sigma)}$ , de tal manera que para una etapa bastante elevada del proceso de fractalización, ese valor se comporta como  $\frac{(a)^{2\sigma}}{(a+b)^{2\sigma}} \sqrt{\left(\frac{a}{a+b}\right)^\sigma}$ , por lo que la intensidad de la turbulencia resulta representada por su valor medio elevado a la potencia  $\sigma$ . Para que exista compatibilidad, la base de la resolución queda definida a partir de los dos parámetros de forma  $q^{-1} = \frac{a}{a+b} \mapsto \kappa$

y se denotará como  $\kappa$ , más adelante. Además, el primer momento de la beta es la tangente en cero de la función Kummer, en tanto función generatriz de momentos; por tanto, si se construye un modelo multifractal, en donde la función de estructura sea la función Kummer, se puede afirmar que la transformada de Laplace inversa del coeficiente de descarga aporta la función de estructura. Para completar la descripción del modelo multifractal, se obtiene la dimensión local  $\bar{\alpha} = -\frac{d}{ds} \tau(s) = -\frac{d}{ds} ({}_1F_1(-s; a, a+b)) = \frac{a}{a+b} {}_1F_1(-s; a+1, a+b+1)$ , por lo que el espectro resulta:

$$f(\bar{\alpha}(s)) = {}_1F_1(-s; a, a+b) + s \frac{a}{a+b} {}_1F_1(-s; a+1, a+b+1) \quad (10)$$

En particular, para los datos de Torricelli, el inverso de la resolución es  $\kappa = \frac{2}{7/2} = \frac{4}{7}$  y entonces la potencia debe ser  $\sigma(\alpha) = \frac{\kappa}{7\kappa-1} \Big|_{\kappa=4/7} = \frac{4}{21} = 0.19048 < 1$ .

Por tanto, del teorema de Torricelli y la cascada energética puede construirse la distribución de las intensidades de la turbulencia y renormalizarla para obtener el coeficiente de descarga, para que entonces su transformada de Laplace aporte la función generatriz de momentos, la cual es la función Kummer. Pero, además, para cada uno de los prototipos puede construirse el correspondiente multifractal con base en los parámetros de forma  $a$  y  $b$ , y la función de Kummer, de una manera similar al que hemos denominado de Torricelli. Una forma alternativa es definir la función de estructura como combinación lineal de la variable de reiteración  $s$  y la función de Kummer desplazada en la unidad  $g(s) = {}_1F_1(-s; a, a+b) - 1$ , así que  $g(s)$  satisface las tres condiciones  $g(0) = g'(\infty) = 0$ ,  $g(\infty) = -1$  y los dos coeficientes de la combinación lineal deben determinarse para cada caso (Liu et al., 2003).

## Función de correlación

El presente camino constituye un recíproco al anterior, donde se describe la función de correlación de la velocidad y puede obtenerse la distribución de probabilidades asociada. En general, la función de correlación depende de la distancia entre los dos puntos y su orientación, pero como la ecuación de Navier-Stokes es invariante bajo rotaciones, la función de correlación depende sólo de la distancia entre los dos puntos y del tiempo (Olver, 1993).

Por otra parte, dentro de las simetrías de la ecuación de Navier-Stokes se incluyen las relativas a la escala, las que poseen como generadores a:  $\mathbf{G}_1 = x\partial_x + y\partial_y + z\partial_z + t\partial_t$  y  $\mathbf{G}_2 = t\partial_t - u\partial_u - v\partial_v - w\partial_w - 2p\partial_p$ , siendo  $x, y, z$ , y  $t$  las coordenadas cartesianas usuales y el tiempo; y  $u, v, w$ , y  $p$  las coordenadas de la velocidad usuales y la presión. Para un canal con el eje  $x$  en la dirección de la corriente principal, las líneas del campo vectorial satisfacen  $\frac{dt}{t} = \frac{du}{-u}$  o  $\ln\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1} = \ln\left(\frac{u}{u_0}\right)$ , así  $\left(\frac{u}{u_0}\right) = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1}$ .

En general, como ya se dijo, la función de correlación será función de la distancia y del tiempo, pero a través de las transformaciones de escala dependerá de las longitudes características y de los números de Strouhal, Reynolds y Froude. Para el número de Strouhal resulta la dependencia de la velocidad proporcional, la cual, a través del factor de fricción, quedará en términos de los números de Reynolds y de Froude. De acuerdo con las longitudes características hay que tomar en cuenta los dos estados hidráulicos posibles: el liso y el rugoso. Cuando la rugosidad queda sumergida en la capa límite y se tiene el estado completamente liso, la escala de longitud de turbulencia está dada por la longitud intrínseca  $l_0 = \frac{\nu}{U_*}$ ; en tanto, en el estado rugoso está dada por la longitud asignada a la rugosidad  $k_s$ .

Los números de Reynolds locales se dan por  $\frac{r}{l_0} = \frac{rU_*}{\nu}$  para el estado liso y  $\frac{k_s}{l_0} = \frac{k_s U_*}{\nu}$  para el

estado rugoso. También para el estado rugoso, el

número de Strouhal se da por  $\frac{Ut}{l_1} \mapsto \frac{U \frac{k_s}{U_*}}{k_s} = \frac{U}{U_*}$

y para el liso  $\frac{U l_0}{U_*} = \frac{U}{U_*}$ , así que para los dos

estados ese número invariante se da por la velocidad proporcional, que a través del factor de fricción incluirá la dependencia de las longitudes características y los números de Reynolds y Froude, dependencia que finalmente será transferida a la potencia de la velocidad. Por tanto, la función de correlación se expresa a través de las variables adimensionales  $\frac{r}{l_0}$  y  $\frac{U}{U_*}$ , en la subcapa inercial; así  $f\left(\frac{r}{l_0}, \frac{U}{U_*}\right)$  (De Kármán, 1938; Chen, 2006).

Con base en los resultados experimentales, para el estado rugoso se admite representar la velocidad como distribución en potencia

$\frac{u}{u_0} = \left(\frac{y}{y_0}\right)^\sigma$ , con  $0 < \sigma \leq 1$ . Con los cambios de escala se tiene  $\frac{u}{u_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1}$  o bien repotenciados:

$$\frac{u}{u_0} = \left(\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-1}\right)^{m_\sigma \kappa} \quad (11)$$

siendo  $m_\sigma > 1$ , el entero más grande, tal que el  $\sigma_{exp} = \frac{1}{m_\sigma}$  medido. Si en (11), con  $0 < \sigma \leq 1$ , se modifica la escala,

así que  $\frac{u}{u_0} = \left(\left(\frac{y}{y_0}\right)^{m_\sigma}\right)^\sigma = \left(\frac{y}{y_0}\right)^{\sigma m_\sigma}$  y

$\frac{u}{u_0} = \frac{l/t}{l_0/t_0} = \frac{l/l_0}{t/t_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-m_\sigma \kappa}$ , entonces

$\frac{l}{l_0} = \left(\frac{t}{t_0}\right)^{-(m_\sigma \kappa - 1)}$ , por tanto en la ecuación (11) se tiene  $\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-m_\sigma \kappa} = \left(\left(\frac{t}{t_0}\right)^{-(m_\sigma \kappa - 1)}\right)^{\sigma m_\sigma}$  y entonces

$$\sigma = \frac{\kappa}{m_\sigma \kappa - 1} < 1.$$

El proceso se basa en los criterios de Taylor y Kármán. Sea  $m(\sigma) = m$ , el mínimo  $\sigma$

admitido en la secuencia (o el máximo  $\sigma^{-1}$ ). Bajo el criterio  $m\kappa - 1 = \kappa$  de Kármán, luego

$$\kappa = \frac{1}{m-1}, \text{ con lo que } \kappa > \frac{1}{m}, \text{ o } m\kappa - 1 > 0; \text{ pero}$$

$$\kappa = \frac{a}{a+b}, \text{ por tanto } m = 2 + \frac{b}{a}, \text{ y para Kármán, } b = 1;$$

por tanto,  $a = \frac{1}{m-2}$ , con  $m > 2$ . Los valores propuestos por Kármán y también por Taylor son  $m_\sigma = 5$  (De Kármán, 1938); sin embargo, esta normalización deja fuera importantes resultados reportados en Cheng-Lung (1991), pero puede escogerse  $m > 5$  para que queden cobijados otros exponentes de rango rugoso, como el de Manning. Para ello, en la expresión

$$\text{de Kolmogorov } a = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}D_T(1-\beta), \text{ el término } \frac{2}{3}D_T(1-\beta)$$

debe tender a cero cuando se suprime la turbulencia y se transforme en mono-fractal, con  $\beta(s=0) = \frac{D_B}{D_T} = \frac{D_B}{3}$ , por lo que

$$\frac{2}{3}D_T(1-\beta) \rightarrow \frac{2}{3}D_T\left(1 - \frac{D_B}{3}\right) \rightarrow 0, \text{ si } D_B \rightarrow 3. \text{ Sin}$$

embargo, el término  $\frac{1}{3}$  es relativo, ya que puede ser absorbido por la resolución para sustituirlo por otro, así que la expresión de Kolmogorov

$$\text{sea } a = \frac{1}{5} + \frac{6}{5}(1-\beta) \text{ y la condición } D_B \rightarrow 3, \text{ en}$$

cuyo caso  $m - 2 = 5$ , por tanto  $m = 7$  es la cota inferior y el máximo  $\sigma^{-1}$  admitido es  $6$  o  $\sigma = \frac{1}{6}$ ,

que corresponde al resultado experimental propuesto por Manning y está reportado en Cheng-Lung (1991). Está suficientemente documentado el vínculo entre la cascada energética de Kolmogorov y la distribución Gaussiana para las velocidades (Chen, 2006). Este vínculo se mantiene, porque si  $\kappa(\alpha) = \frac{1}{6}$ ,

entonces  $\alpha = 2.0$ . Recíprocamente, si se toma  $b = 1$ , para mimetizar el factor  $(1-h)^{b-1}$ , como se hace implícitamente en el modelo de cascada, y el inverso de la resolución es  $\kappa = \frac{1}{6}$ ,

$$\text{se encuentra de } \kappa = \frac{a}{a+b} = \frac{a}{a+1} = \frac{1}{6}, \text{ que } a = \frac{1}{5},$$

tal como se propuso en el modelo de cascada.

Por otra parte, si el máximo aceptado para el inverso del exponente de la velocidad es  $\sigma_{\text{máx}}^{-1} = m$  y bajo el criterio de Kármán  $m\kappa - 1 = \kappa$ ,

$$\text{luego } \kappa = \frac{1}{m-1}, \text{ por tanto } m = 2 + \frac{b}{a}, \text{ y si } m = 7,$$

criterio de Taylor y Kármán, entonces  $\frac{b}{a} \leq 5$ ,

$$\text{luego } 0 < \frac{b}{a} \leq 5. \text{ Entonces, de } \sigma = \frac{\kappa}{m_\sigma \kappa - 1} < 1,$$

se infiere que  $\frac{2}{\kappa} = m - \sigma^{-1}$ , y como  $\kappa = \frac{a}{a+b}$ ,

$$\text{entonces } \frac{b}{a} = m - \sigma^{-1} - 1. \text{ Por tanto, bajo el}$$

criterio Kármán-Taylor:  $\frac{b}{a} = 6 - \sigma^{-1}$ .

Por ejemplo, si se examina el exponente ligado a Lacey  $\kappa = \frac{1}{4}$ , conduce a  $6 - 4 = 2$ ; lo

satisface. Por el contrario, el de Blasius  $\kappa = \frac{1}{7}$ , se

tiene  $6 - 7 = -1 \notin (0,5)$ ; no satisface este criterio de clasificación. Por su parte, el de Manning

$\kappa = \frac{1}{6}$  produce  $6 - 6 = 0 \in (0,5)$  y lo satisface en el límite. En conclusión, desde un punto

de vista físico podría señalarse a la fracción  $\frac{1}{7}$

como la fracción que separa los exponentes en los rangos lisos y rugosos. El intervalo experimental reportado por Agroskin

$$\frac{1}{2} \leq \sigma \leq \frac{4}{7},$$

para el extremo  $\frac{1}{2}$ , se tiene  $6 - 2 = 4 \in (0,5)$ , y

$$\text{para } \frac{4}{7} \text{ es } 6 - \frac{7}{4} = \frac{17}{4} \in (0,5); \text{ por tanto, todo el}$$

intervalo de Agroskin queda incluido y puede ser agregado al rango rugoso (Agroskin, 1980). Finalmente, la propuesta para la función

de correlación es  $f\left(\frac{r}{l_0}, \frac{U}{U_*}\right) = f(s)$ , siendo

$$s \approx \frac{U/U_*}{r/l_0} = \left(\left(\frac{r}{l_0}\right)^2\right)^{\alpha(\alpha)} \text{ y } \sigma(\alpha) = \frac{\kappa(\alpha)}{7\kappa(\alpha) - 1},$$

normalizada mediante: si  $\alpha \rightarrow 2^-$ , se tiene  $\sigma(\alpha) \rightarrow 1$ ; y para Taylor  $\kappa \rightarrow \frac{1}{7} \Leftrightarrow \sigma(\alpha) \rightarrow \infty$ , que simboliza una delta de Dirac.

## Resultados y discusión

En el presente apartado se describen los prototipos, los números que los identifican y



se construyen los cuadros que muestran esa información. Además, se estudian los números de Euler para diferentes vertedores y se identifican los valores de sus parámetros.

**Prototipos**

Se consideran a continuación varios prototipos que provienen de muy diversas fuentes.

Para ellos, si se aportan los parámetros de forma, se obtiene el inverso de la resolución dada por  $\kappa = \frac{a}{a+b}$ . En seguida puede hallarse el exponente de la velocidad  $\sigma(\alpha) = \frac{\kappa}{7\kappa-1} \leq 1$ .

Después se encuentra el índice Lévy resolviendo para  $\alpha$  la ecuación  $\kappa(\alpha) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\alpha\right) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$ .

Finalmente, el índice de ocupación espacial se obtiene de  $\beta(\alpha, D_T) = 1 - \frac{1}{\alpha D_T}$  (Ramírez et al., 2009).

Al prototipo principal, los autores lo han llamado Torricelli, porque se obtiene del teorema homónimo. Este prototipo surge de los estados que dan origen al teorema de Torricelli y además se realiza como el vertedor de cresta ancha. Los exponentes que definen la densidad beta se determinan de  $a = 2, b = 3/2$ , luego  $\kappa = \frac{a}{a+b} = \frac{4}{7}$ , en seguida

$$\sigma(\alpha) = \frac{\kappa}{7\kappa-1} = \frac{4}{21} < 1 \quad \text{y} \quad \left(\frac{h}{H}\right)_{cr} = \frac{a-1}{a+b-2} = \frac{2}{3}$$

De la referencia Mercado (2008), reformu-

lada como  $\kappa(\alpha) = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\alpha\right) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \frac{4}{7}$ , se de-

termina que  $\alpha = 1.1843$ , siendo además  $\beta(\alpha, D_T) = 1 - \frac{1}{\alpha D_T} = 0.71854, D_T = 3$ .

Para un vertedor de cresta ancha, y de acuerdo con el teorema de Torricelli, si la carga total aguas arriba es  $H$ , para luego reducirse a  $h$ , la velocidad del flujo se determina como un punto material en caída libre, bajo la exclusiva acción de la gravedad, así que  $v = (2g(H-h))^{1/2}$ , y para el caudal en un ancho unitario es

$$Q = (2gH^3)^{1/2} \left(\frac{h}{H}\right)^{2-1} \left(1 - \frac{h}{H}\right)^{3/2-1} \text{ y en forma adimensional } Q_s = \left(\frac{h}{H}\right)^{2-1} \left(1 - \frac{h}{H}\right)^{3/2-1}$$

; en particular, sobre la cresta del vertedor será  $\frac{Q_s}{Q_{s\text{máx}}} = \frac{\left(\frac{h}{H}\right)^{2-1} \left(1 - \frac{h}{H}\right)^{3/2-1}}{\left(\frac{h}{H}\right)_{cr}^{2-1} \left(1 - \frac{h}{H}\right)_{cr}^{3/2-1}}, \text{ con } \left(\frac{h}{H}\right)_{cr} = \frac{2-1}{2+3/2-2} = \frac{2}{3}$ .

El inverso de la resolución es  $\kappa = \frac{4}{7}$ , por lo que coincide con el mismo valor para el de Torricelli; por tanto, el vertedor de cresta ancha está representado por el caso que se ha denominado Torricelli.

En el primer grupo se abordan los prototipos que provienen principalmente de resultados experimentales. Unos se sitúan dentro de los vertedores, en tanto que otros, como canales. Para los cuatro experimentales se determinan los parámetros de los vertedores: cresta ancha de arista viva, redondeado y de arista redondeada, triangular y Creager (cuadro 1), según la ecuación (6), y se anexa el valor de las variables al cambio de régimen de funcionamiento hidráulico. Los datos experimentales son presentados en Ramírez (1997).

Cuadro 1. Características de vertedores.

Vertedores	Cresta ancha y arista viva	Triangular	Cresta ancha redondeado	Cresta ancha y arista redondeada	Creager
(a-1)	1.9	1.3	1	0.8	0.618
(b-1)	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
$(h/H)_c$	0.792	0.722	0.667	0.615	0.553

En la figura 1 se muestran las gráficas del coeficiente de descarga en el eje vertical y de acuerdo con la ecuación (6); en tanto, en el eje horizontal se representa  $(1 - h/H)^{1/2}$ , y las gráficas tienen validez hasta el cambio de régimen. Se reconocen de izquierda a derecha de acuerdo con las columnas del cuadro 1; así, la primera línea continua corresponde a la primera columna o vertedor de cresta ancha y arista viva; la última, de cuadritos, al vertedor Creager. En correspondencia, en el cuadro 2 se muestran los valores de los parámetros de forma de la función beta unimodal, la resolución, el índice Lévy, el de ocupación espacial y el exponente de la velocidad, aunque

se omite la columna 4 del vertedor de cresta ancha redondeada.

Para los tres canales (Ramírez et al., 2009), los datos se presentan en el cuadro 3.

Los resultados experimentales citados en Agroskin (1980), que se ubican en el rango rugoso, producen lo que se tiene en el cuadro 4.

El resultado de Lacey (1930), citado por Cheng-Lung (1991), se originó de forma experimental, y es una de las potencias más altas dentro del rango rugoso. Se obtiene de la potencia de la velocidad  $\sigma = \frac{\kappa}{7\kappa - 1} = \frac{1}{4}$ , lo que produce  $\kappa = \frac{1}{3}$ , entonces  $\alpha = 1.45$ , por lo que  $\beta(\alpha, 3) = 0.77011$ .

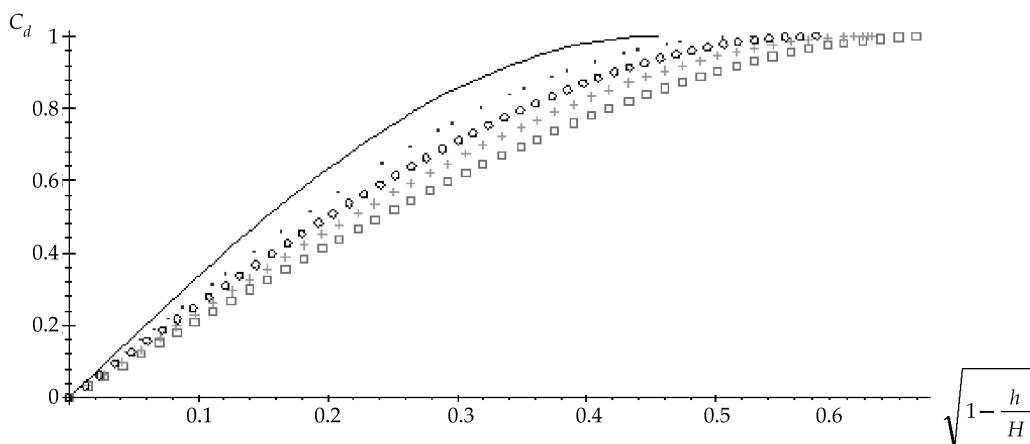


Figura 1. Coeficientes de descarga.

Cuadro 2. Parámetros de los cuatro experimentales.

	Parámetros	Resolución	Índice Lévy	Índice de ocupación	Exponente
1	$a = 2.9, b = \frac{3}{2}$	$\kappa = 0.65909$	$\alpha = 1.1303$	$\beta(\alpha, 3) = 0.70509$	$\sigma(\alpha) = 0.18239$
2	$a = 2.3, b = \frac{3}{2}$	$\kappa = 0.60526$	$\alpha = 1.1618$	$\beta(\alpha, 3) = 0.71309$	$\sigma(\alpha) = 0.18699$
3	$a = 1.8, b = \frac{3}{2}$	$\kappa = 0.54545$	$\alpha = 1.2031$	$\beta(\alpha, 3) = 0.72294$	$\sigma(\alpha) = 0.19355$
4	$a = 1.618, b = \frac{3}{2}$	$\kappa = 0.51892$	$\alpha = 1.224$	$\beta(\alpha, 3) = 0.72767$	$\sigma(\alpha) = 0.19713$

Cuadro 3. Parámetros de los tres canales.

	Resolución	Índice de Lévy	Índice de ocupación	Exponente
Brannif	0.17845	1.934	0.82765	0.71624
San Nicolás	0.19413	1.856	0.8204	0.54089
Coria	0.22114	1.743	0.80876	0.40355

Cuadro 4. Resultados en Agroskin (1980).

	Exponente	Resolución	Índice de Lévy	Índice de ocupación
I	1/2	1/5	1.8293	0.81778
D	4/7	4/21	1.8733	0.82206

### Orificio ahogado

Para el caso del flujo a través de un orificio, siendo  $C_c$  el coeficiente de contracción del chorro, un poco después de su salida y que está dado por el cociente del área del chorro sobre el área del orificio de salida (Rouse, 1946):

$$E_u = \sqrt{\frac{1}{2} \rho v^2} = \left( \frac{C_d}{C_c} \right) = \left( 1 - \left( C_c \frac{\bar{b}}{B} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}-1} \quad (12)$$

por tanto, con los valores de la variable aleatoria ligada al tirante y expresados por  $h = \left( C_c \frac{\bar{b}}{B} \right)^2$ , se tiene  $E_u = h^{1-1} (1-h)^{\frac{1}{2}-1}$ .

En consecuencia, el inverso de la resolución es  $\kappa(\alpha) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ , luego produce  $\alpha = 1.1262$  con  $\sigma(\alpha) = \frac{2}{11}$  y  $\beta(\alpha, 3) = 0.70402$ .

### Orificio horizontal ahogado

Para la descarga a través de un orificio horizontal ahogado se debe sustituir la proporción entre fronteras  $\frac{\bar{b}}{B} \mapsto \frac{\bar{b}}{2\bar{h}}$ , siendo  $2\bar{h}$  relativamente grande con respecto a  $\bar{b}$ , o sea la sustitución del ancho  $B \mapsto 2\bar{h}$ , entonces (Rouse, 1946):

$$E_u = \sqrt{\frac{1}{2} \rho v^2} = \left( 1 - \left( C_c \frac{\bar{b}}{2\bar{h}} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}-1} \quad (13)$$

por tanto, con  $h = \left( C_c \frac{\bar{b}}{2\bar{h}} \right)^2$  se encuentra  $E_u = h^{1-1} (1-h)^{\frac{1}{2}-1}$  y, en consecuencia, se repiten los valores del caso anterior.

En el resultado anterior, si  $\bar{h} \mapsto \frac{b}{2}$ , se transforma en un vertedor de cresta aguda, y con  $2\bar{h} \mapsto h$ , el caudal es

$$q = \frac{2}{3} C_c \sqrt{2g} \left( \left( \frac{v_0^2}{2g} + h \right)^{3/2} - \left( \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2} \right) \quad (\text{Rouse, 1946),}$$

desplazando  $q_d = q + \frac{2}{3} C_c \sqrt{2g} \left( \frac{v_0^2}{2g} \right)^{3/2}$

es  $q_d = \frac{2}{3} C_c \frac{v_0^2}{\sqrt{2g}} (1 + \tilde{h})^{3/2}$ ,  $\tilde{h} = \frac{h/h_0}{F_{d0}^2}$ ,  $F_{d0}^2 = \frac{v_0^2}{h_0}$  y

donde números  $F_d$  bajos implican grandes deflexiones gravitacionales:

$$E_u = \frac{C_d}{C_c} = (1 + \tilde{h})^{3/2} \quad (14)$$

así que  $\kappa = \frac{5/2}{5/2+1} = \frac{5}{7}$  y  $\sigma = \frac{5/7}{7(5/7)-1} = \frac{5}{28}$

y se ubica en el rango rugoso y cerca del de Manning. Además, se obtiene  $\alpha = 1.1022$ ; y  $\beta(\alpha,3) = 0.69757$ .

Se recuerda que en este vertedor se presenta un decrecimiento de la presión piezométrica desde el dato, ubicado en la base plantilla, hasta el borde del vertedor de altura  $w$ , en donde se hace cero, acompañado con un crecimiento de la carga de velocidad; este borde representa un cambio brusco, un quiebre de la pendiente de la presión piezométrica. Luego dentro del chorro, un posterior crecimiento del tirante de presión hasta un máximo en el interior del chorro, para luego presentar un decrecimiento hasta la superficie exterior superior del chorro, que vuelve a ser cero, con el concomitante decrecimiento de la carga de velocidad, seguida de un crecimiento hasta la superficie exterior del borde superior del chorro (Rouse, 1946).

### Compuerta

En este prototipo se presenta una diferencia con el de la abertura horizontal ahogada debido a que la presión en el exterior del chorro de aquel es la atmosférica, en tanto que para el presente se tiene una distribución hidrostática. Con la ecuación de continuidad y la de D. Bernoulli se encuentra  $q = \frac{C_c}{\sqrt{1 + \left(C_c \frac{\bar{b}}{B}\right)}} \sqrt{2gh}$  (Rouse, 1946), luego:

$$E_u = \frac{C_d}{C_c} = (1 + \tilde{h})^{\frac{1}{2}-1}, \quad \tilde{h} = C_c \frac{\bar{b}}{B} \quad (15)$$

Entonces  $\kappa = \frac{1/2}{1/2+1} = \frac{1}{3}$  y se reproduce el de Lacey. Se presenta un comportamiento del tirante de presión y de la velocidad similar al vertedor anterior con el cambio de la altura  $w$  por la abertura  $\bar{b}$ .

El segundo grupo de prototipos proviene de la teoría (algunos a partir de los parámetros de forma), otros del índice Lévy y algunos de la potencia.

### Kolmogorov

Este prototipo surge de la cascada energética  $I_T$  (ecuación (9)), produciendo un modelo en potencia, que corresponde a una densidad beta  $B = h^{a-1}(1-h)^{b-1}$ , con  $b = 1$  y siendo el índice Lévy  $\alpha = 2$ , que designa a la distribución Gaussiana, por lo que  $\kappa(\alpha) = \frac{1}{6}$  y de  $\kappa = \frac{a}{a+b} = \frac{1}{6}$  se obtiene  $a = \frac{1}{5}$ . Además,  $\beta(2,3) = \frac{5}{6}$ . En tanto, el exponente de la velocidad es  $\sigma(\alpha) = \frac{\kappa}{7\kappa-1} = 1$ .

El tirante para cambio de régimen  $\left(\frac{h}{H}\right)_{cr} = \frac{a-1}{a+b-2} = 1$ . El modelo de cascada se ilustra en la figura 2. En el eje vertical se representa la intensidad de la turbulencia  $I_T$  y en el horizontal  $h = \eta^n$ . La curva de trazos es  $\frac{1}{5}h^{\frac{1}{5}-1}$ , ya que el coeficiente de la función beta

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)} \text{ es } u_0 = (\epsilon l_0)^{1/3} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{5}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{5}\right)\Gamma(1)} = \frac{1}{5}.$$

Sobre esta curva de trazos, en la secuencia de pequeños círculos, se aprecia el proceso de fractalización que ocurre de derecha a izquierda, en donde la sucesión de la resolución se toma como  $h \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^n$  de acuerdo con el planteamiento original de Kolmogorov, aunque también puede tomarse por ejemplo como  $h \mapsto \left(\frac{1}{6}\right)^n$ . En tanto, la línea continua representa  $\frac{1}{B(1/10)}h^{\frac{1}{10}-1}$  y sirve de referencia para el cambio del parámetro de forma  $a = \frac{1}{5}$  hasta  $a = \frac{1}{10}$ , y también para el cambio en la sucesión de la resolución desde  $h \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^n$  hasta  $h \mapsto \left(\frac{1}{10}\right)^n$ .

El de Kármán surge de la función de correlación, al establecer el inverso de la resolución como  $\kappa = \frac{1}{6}$ , así que en la distribución  $b = 5a$ . La potencia de la velocidad  $\sigma(\alpha) = 1$ ,

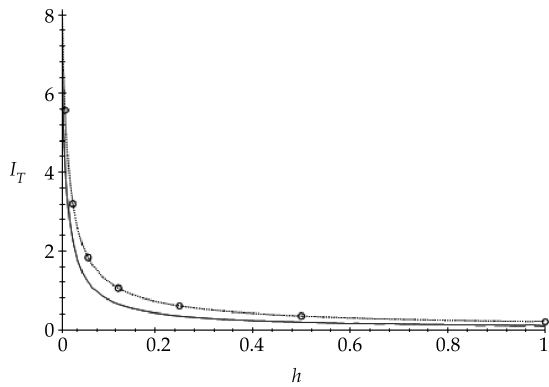


Figura 2. Modelo de cascada.

por lo tanto coincide con la de Kolmogorov. El cociente de funciones gammas puede expresarse como una función Pochhammer

$$\frac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)_{\left(\frac{3-1}{\alpha}\right)}$$

si  $\frac{3}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} = 1$ , lo que equivale a  $\alpha = 2$ , y entonces

$$\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{6}\alpha\right) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)} = \left(\frac{1}{\alpha}\right)_{(1)} = \frac{1}{\alpha} \text{ y } \kappa = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}.$$

De forma recíproca, cerca del régimen laminar  $\alpha \rightarrow 2$ ,

$$\text{por lo que } \kappa \rightarrow \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)_{\left(\frac{3-1}{2}\right)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6},$$

lo cual significa la participación de la viscosidad.

### Taylor

El modelo de Taylor brota de la función de correlación, siendo  $\kappa(\alpha) = \frac{1}{7}$  el inverso de la resolución. De ello se obtiene  $\alpha = 2.1563$ , lo cual no es posible, porque  $\alpha \leq 2$  y resulta  $\sigma \rightarrow \infty$ .

### Manning

Si el índice Lévy es  $\alpha = 1$ , la distribución es la de Cauchy, luego el inverso de la resolución

es  $\kappa(1) = 1$ , entonces  $\frac{a}{a+b} = 1$  y  $b \rightarrow 0$ ; la potencia de la velocidad es  $\sigma = \frac{1}{6}$  y el índice de ocupación espacial es  $\beta(1,3) = \frac{2}{3}$ . De forma análoga, de acuerdo con los resultados de Manning, la potencia de la velocidad es  $\sigma = \frac{1}{6}$ , lo que produce  $\kappa(\alpha) = 1$ , entonces se obtiene  $\alpha = 1$  y  $\beta(1,3) = \frac{2}{3}$ . Este exponente de modo tradicional se ubica en el rango rugoso.

### Euclides

Se origina en el arte y puede describirse a partir de la distribución, recordando la definición de la proporción de oro de Euclides: un segmento puede partirse en dos subsegmentos de longitud; el mayor es la media proporcional entre la totalidad y el menor  $\frac{a+b}{a} = \frac{a}{b}$ , lo que da

$$\text{lugar a la solución } a = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)b, \text{ o en forma aproximada surge de dividir un segmento en cinco partes y destacar tres de ellas contra las dos restantes. Entonces, el inverso de la resolución es } \kappa = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = 0.61803 \approx \frac{3}{5}.$$

El índice Lévy es tal que  $\alpha = 1.1652$ . La potencia de la velocidad es  $\sigma(\alpha) = 0.1858 \approx \frac{1}{5}$ . El índice de ocupación espacial es  $\beta = 0.71393$ .

### Logística

Puede originarse desde cualquiera de dos aspectos: las funciones de distribución o de correlación. Desde la distribución, si  $a = 2 = b$ , entonces el inverso de la resolución es  $\kappa = \frac{1}{2}$  y el índice Lévy  $\alpha = 1.2401$ . La potencia de la velocidad es  $\sigma(\alpha) = \frac{1}{5}$  y  $\beta(\alpha,3) = 0.7312$ . En la figura 3 se muestra la gráfica de los inversos de la resolución con respecto al índice de estabilidad, donde se aprecian sus ubicaciones relativas y sus posiciones en referencia a los dos extremos marcados por  $\alpha = 1$  y  $\alpha = 2$ . En el eje

horizontal se representan los valores del índice Lévy  $\alpha$ . La línea continua describe la gráfica de

$$\kappa(\alpha) = \left( \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\alpha \right) \frac{\Gamma\left(\frac{3}{\alpha}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)}. \text{ En particular, se destaca}$$

el caso de Taylor, que se ubica fuera del intervalo señalado. Tanto los cuatro experimentales como el de Euclides de la proporción dorada se agrupan alrededor de la posición del de Torricelli y por tanto se asemejan al vertedor de cresta ancha; todos ellos, a su vez, se ubican más cerca del extremo 1 de la figura 3, por lo que se destaca su comportamiento turbulento.

La potencia de la velocidad se ilustra en la gráfica de la figura 4, en donde se señalan los dos extremos representados por  $\alpha = 1$ , caso de Cauchy  $\mapsto \sigma(\alpha) = \frac{2}{11} > \frac{1}{7}$ , y  $\alpha = 2$ , caso de Gauss  $\mapsto \sigma(\alpha) = 1$ . En particular, para el de Taylor, la potencia diverge a infinito, así que está fuera del intervalo  $0 < \sigma \leq 1$ , como ya se señaló. La línea continua representa  $\sigma(\alpha) = \frac{\kappa(\alpha)}{7\kappa(\alpha) - 1}$ . En el eje horizontal se representa el índice Lévy.

La ecuación (6) permite representar de forma general las ecuaciones de descarga para diferentes vertedores. Se conjetura que dicha ecuación es válida para otros vertedores, lo que se ilustra encontrando la forma de los números de Euler para el orificio ahogado, el orificio horizontal ahogado y la compuerta. Los datos

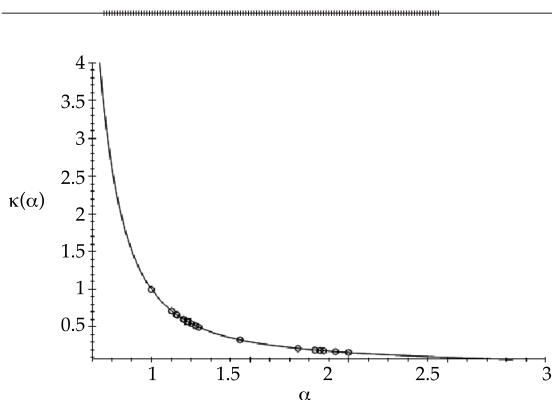


Figura 3. El inverso de la resolución  $\kappa(\alpha)$ .

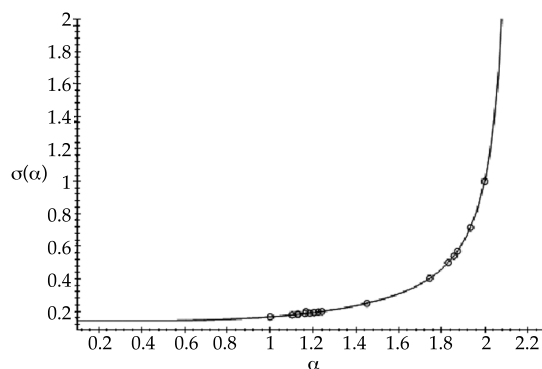


Figura 4. El exponente de la velocidad  $\sigma(\alpha)$ .

de los parámetros de los tres canales muestran la validez de las relaciones presentadas en el primer párrafo de la sección Prototipos. Los parámetros correspondientes al modelo teórico Torricelli son representativos de los cuatro experimentales, los que además se ubican claramente en régimen turbulento (figura 3), mientras que, por el contrario, el modelo teórico de Kolmogorov resulta más representativo para los tres canales, que se ubican más cerca del régimen laminar.

### Conclusiones

1. El coeficiente de descarga adopta la forma covariante que se deriva del teorema de Torricelli o vertedor de cresta ancha.
2. La distribución de la intensidad de la turbulencia es la beta.
3. La función de correlación es la función Kummer.
4. Los exponentes de la velocidad del rango rugoso se extienden desde el de Manning hasta el de Kolmogorov o Kármán.
5. El coeficiente de descarga (6) refleja, a través de una aproximación, las ecuaciones de Navier-Stokes.

Recibido: 08/12/2009

Aceptado: 26/06/2013

## Referencias

- AGROSKIN, I.I. *Hidráulica*. Tomo I. Torralba, V.J. (traductor). La Habana: Ministerio de Educación Superior, Instituto Superior de Ciencias Agropecuarias de La Habana, 1980, 521 pp.
- BAUME, J.P. *Cemagref Mtp. Modélisation des ouvrages de type : déversoir, vanne, orifice, dans les modèles d'hydraulique à surface libre*. Rapport interne. Montpellier: Cemagref, 1992.
- CHEN, W. A Speculative Study of 2/3-order Fractional Laplacian Modeling of Turbulence: Some Thoughts and Conjectures. *Chaos*. Vol. 16, 2006, 023126.
- CHENG-LUNG, C. Unified Theory on Power Laws for Flow Resistance. *J. of Hydraulic Eng.* Vol. 137, No. 12, 1991, pp. 1696-1699.
- CHOW, V.T. *Open-channels hydraulics*. New York: McGraw-Hill Book Company, 1959, pp. 33-37.
- DE KÁRMÁN, T. and HOWARTH, L. On the Statistical Theory of Isotropic Turbulence. *Proc. Roy. Soc. A*, 164, London, 1938, pp. 192-215.
- HENDERSON, P.J. *Open Channel Flow*. New York: MacMillan Publishing Co., 1966.
- LIU, S.D., LIU, S.K., FU, Z.T., REN, K., and GUO, Y. *The Most Intensive Fluctuation in Chaotic Time Series and Relativity Principle*. *Chaos, Solitons and Fractals*. Vol. 15, 2003, pp. 627-630.
- MERCADO, J.R. La ecuación de Navier-Stokes y multifractales. *Revista de Matemática: Teoría y Aplicaciones*. Vol. 15, núm. 1, 2008, pp. 49-72.
- MERCADO, J.R., GUIDO, P., OJEDA, W., SÁNCHEZ, J., and OLVERA, E. Saint-Venant Fractional Equation and Hydraulic Gradient. *Journal of Math. and System Science*. Vol. 2, No. 8, 2012, pp. 494-503.
- METZLER, R., and KLAFTER, J. *The Random Walk's Guide to Anomalous Diffusion: A Fractional Dynamics Approach*. *Phys. Rep.* Vol. 339, 2000, pp. 1-77.
- OLVER, P.J. *Applications Lie Groups to Differential Equations*. New York: Springer-Verlag, 1993, 513 pp.
- RAMÍREZ, J. *Modélisation des ouvrages frontaux et lateraux dans les canaux d'irrigation*. These de Doctorat. Paris: L'École Nationale du Génie Rural, des Eaux et des Forêts (ENGREF), 1997.
- RAMÍREZ, J., MERCADO, J.R., PEREA, H., OLVERA, E., RUIZ, V., and ÍÑIGUEZ, M. Reynolds Equations and Water Distribution in Irrigation Canals. *Hydraulic Engineering in México*. Vol. XXIV, No. 3, July-September, 2009, pp. 121-130.
- ROUSE, H. *Elementary Mechanics of Fluids*. New York: Dover, Publ., 1946, pp. 376.
- SOTELO, G. *Hidráulica General*. Volumen I. México, D.F.: Editorial Limusa, 1999, pp. 126.
- SWAMEE, P.K., PATHAK, S.K., and ALI, M.S. Analysis of Rectangular Sluice Gate. *Journal of Irrigation and Drainage Engineering*. Volume 119, Issue 6, November, 1993, pp. 1026-1035.

## Dirección institucional de los autores

Dr. José Roberto Mercado  
 Dr. Mauro Íñiguez  
 Dr. Pedro Guido  
 Dr. Javier Ramírez Luna  
 Dr. Arturo González Casillas

Instituto Mexicano de Tecnología del Agua (IMTA)  
 Paseo Cuauhnáhuac 8532, Colonia Progreso  
 62550 Jiutepec, Morelos, México  
 Teléfono: +52 (777) 3293 600  
 rmercado@tlaloc.imta.mx  
 mic@tlaloc.imta.mx  
 pedroguido@tlaloc.imta.mx  
 jramirez@tlaloc.imta.mx  
 arturo\_gonzalez@tlaloc.imta.mx