高校数学における定積分を用いた e の新しい導入に関する研究

石　塚　貴　大・照　屋　　　保・山　本　亮　介

A new introduction method of the number e by using the definite integral in high school math

Takahiro ISHIZUKA, Tamotsu TERUYA and Ryosuke YAMAMOTO

群馬大学教育学部紀要　自然科学編
第 67 巻　11—20 頁 2019 別刷

高校数学における定積分を用いた e の新しい導入に関する研究

石　塚　貴　大[1]・照　屋　　保[2]・山　本　亮　介[2]
1）群馬県立嬬恋高等学校
2）群馬大学教育学部数学教育講座
（2018 年 9 月 26 日受理）

A new introduction method of the number *e* by using the definite integral in high school math

Takahiro ISHIZUKA[1], Tamotsu TERUYA[2] and Ryosuke YAMAMOTO[2]
1）Tsumagoi Senior High School
2）Depertment of Mathematics, Faculty of Education, Gunma University
Maebashi, Gunma 371-8510, Japan
（Accepted on September 26th, 2018）

1　はじめに

1.1　研究の背景

現行の平成 21 年度版学習指導要領では、自然対数の底 e の導入は「数学 Ⅲ」「(3) 微分法」で指導することになっている。高等学校学習指導要領解説数学編 [2] によると、三角関数・指数関数・対数関数の導関数に関する内容の中で『自然対数の底 e を導入しておく必要がある。その導入の仕方としては、例えば、h の値が限りなく 0 に近づくとき、$(1+h)^{\frac{1}{h}}$ の極限値が存在することを納得させ、それを e とする方法がある。』と述べられている。

平成 29 年度採用の教科書における「e の導入」は下記のように対数関数の導関数を求める過程で e を導入しているものが多い。他にも、対数関数の $x=1$ における微分係数を求める過程で e を導入しているものも見られた。

河合 (2006) は、この e の導入を「数学 Ⅲ の難所の一つ、唐突で天下り的な印象を受ける e の導入」[1] と述べていることからも、教科書による e の導入は実際に計算させるわけではないため、e の存在を実感することは困難となり、e については暗記だけにとどまっているのではないかと推測される。

教科書における e の導入 [4]

$$(\log_a x)' = \lim_{h\to 0}\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}$$

(中略)

$$= \frac{1}{x}\lim_{k\to 0}\log_a(1+k)^{\frac{1}{k}}$$

$k\to 0$ のとき $(1+k)^{\frac{1}{k}}$ が一定の値に近づくことが予想される。実際に、$k\to 0$ のときの $(1+k)^{\frac{1}{k}}$ の極限値が存在し、その値を e と表す。すなわち

$$e=\lim_{k\to 0}(1+k)^{\frac{1}{k}}$$

e は無理数で、$e=2.718281828459045\cdots$ であることが知られている。

1.2 調査の方法と結果

数学 III を履修した大学生 103 名と高校生 40 名に e の導入に関してアンケート調査を行なった (平成 29 年 7 月実施)。アンケートは 2 問で構成され、各質問項目に対して 2 件法 (「◯:はい」と「×:いいえ」) で回答を求めた。結果は表 1,2。

e に関する質問項目

(質問 1) e の極限式は覚えていましたか？
(質問 2) e について教科書（授業）でどのように説明されたか理解していますか?

表 1: 大学生のアンケート結果 (n=103)

	質問 1		質問 2	
	◯	×	◯	×
人数 (人)	83	20	14	89
割合 (%)	80.6	19.4	13.6	86.4

表 2: 高校生のアンケート結果 (n=40)

	質問 1		質問 2	
	◯	×	◯	×
人数 (人)	20	20	1	39
割合 (%)	50.0	50.0	2.5	97.5

表 1,2 より、e について教科書（授業）でどのように説明されたか理解していない人が多く、e の極限式を記憶している人が多い傾向にあることが示された。

ここでさらに細分化して分析すべく、回答内容から「A(質問 1:◯ 質問 2:◯)」「B(質問 1:◯ 質問 2:×)」「C(質問 1:× 質問 2:◯)」「D(質問 1:× 質問 2:×)」とそれぞれグループに分け、それぞれを以下の段階であるとした (表 3)。調査結果は表 4, 表 5 のようになった。

分析結果より、B グループと D グループが多いことがわかった。よって、現行の e の導入では、学習者は e の極限式の暗記にとどまってしまうどころか、e について全く記憶に残らない状況に陥ってしまうことが推察される。

表 3: グループの特徴

グループ	特徴
A	e の極限式とその導出過程を理解している。
B	e の極限式をただの式として暗記している。
C	e の極限式の導出過程のみを覚えている。
D	e の極限式について全く理解していない。

表 4: 表 3 を用いた表 1 の分析結果 (n=103)

	質問 1	質問 2	人数 (人)	割合 (%)
A	◯	◯	13	12.6
B	◯	×	70	68.0
C	×	◯	1	1.0
D	×	×	19	18.4

表 5: 表 3 を用いた表 2 の分析結果 (n=40)

	質問 1	質問 2	人数 (人)	割合 (%)
A	◯	◯	1	2.5
B	◯	×	19	47.5
C	×	◯	0	0
D	×	×	20	50.0

1.3 研究の目的

調査結果から現在の自然対数の底 e の導入には 3 つの課題があると考えられる。

課題 1

先に学習する三角関数の導関数については、既習事項である加法定理等を用いれば導関数を求めることができる。しかし、対数関数の導関数については、求める過程において e を新たに定義する必要があり、突如 e が導入されるという印象を受けるということ。

課題 2

導関数を求める過程よりも結果に対する意識が強く、あくまで導関数が学習の主幹となっていることから、e に対する印象が薄いということ。

課題 3

$\lim_{t\to 0}(1+t)^{\frac{1}{t}}$ または $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ という式が 2.7··· という数と同等であると結びつけることが困難であるということ。

以上のことから、対数関数の導関数や対数関数の $x=1$ における微分係数を求める過程での e の導入が、e についての理解が十分でないことの原因の 1 つであると考える。また、数学 III において、e を底とする指数関数や自然対数は学習の主要な内容の 1 つになるものであり、e についての理解が十分でないことは、大変深刻な問題である。

そこで、本研究では現行の学習指導要領において、多くの教科書で用いられている e の導入が抱える課題を解決することができるような新しい e の導入を考案し、実践研究等を通して、e の導入における優れた点や改善点について検討し、より良い e の導入について見いだすことを目的とした。

2 e の新しい導入を取り入れた授業

e の新しい導入を取り入れた授業は、大きく分けて「導入 → 展開 ((1) から (9)) → 整理」という 3 つの段階を設けた。

2.1 導入での学習内容

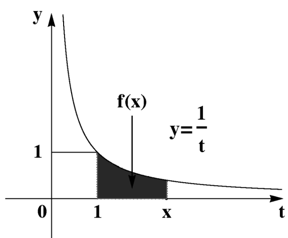


図 1: $y=\frac{1}{t}$ のグラフ

$y=\frac{1}{t}$ という反比例のグラフを提示し、$x>1$ として $y=\frac{1}{t}$ の t が 1 から x までの面積を $f(x)$ とする (図 1)。このとき、$\boldsymbol{f(x)=\int_1^x \frac{1}{t}dt}$ であることを確認する。この $f(x)$ の値の変化に視点をおき、「$f(x)$ が 1 になるところはどこか」と発問する。そして「具体的な値を用いて調べる活動の必要性」を促し、展開へと入っていく。

2.2 展開での学習内容

2.2.1 e の導入の準備

ここでは、展開 1 として導入で述べたように具体的な値を用いて調べる活動を行う。その中で、$x=2$ のときの面積である $f(2)$ と $x=4$ のときの面積である $f(4)$ が 1 よりも大きいのか、小さいのかに視点を当てて考える。すると以下の結果を得ることができ、これを用いて e の導入を行う。

面積比較による結果

$\frac{1}{2}<f(2)<1$, $1<f(4) \Rightarrow f(2)<1<f(4)$

2.2.2 e の導入

展開 1 でまとめたことを使い、展開 2 として e の導入 を行う。内容は以下のようで進めていく。

e の導入

展開 1 より、$\frac{1}{2}<f(2)<1$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}<f(4)$ となることがわかった。
ここで、 $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}>1$ であるから、$f(2)<1<f(4)$ であることがわかる。
したがって、x を 2 から連続的に増加させていくとどこかで面積が 1 となる。
すなわち、図 2 のように $2<x_0<4$ で $f(x_0)=1$ となる数 x_0 がある。
また、面積は (狭義) 単調増加であるから、$f(x_0)=1$ となる x_0 は 1 つしかない。
よって、図 3 から、この x_0 を $\boldsymbol{e}$ とする。
すなわち $\boldsymbol{f(e)=1}$ である。

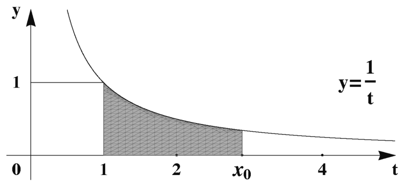


図 2: x_0 の発見

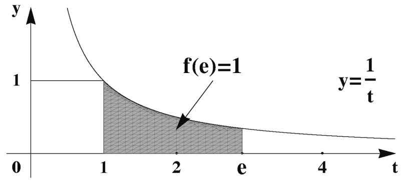


図 3: e の導入

2.2.3 $f(x)$ の性質①

$f(x)$ の性質の焦点をあてて e の性質に迫っていく。$f(x)$ の性質は 2 つある。

$f(x)$ の性質

$$f(ab) = f(a) + f(b) \cdots ①$$
$$f(a^n) = nf(a) \cdots ② \quad (n : 自然数)$$

最初に、① に着目して考えていく。

①の証明の過程

$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ より

$$f(a) + f(b) = \int_1^a \frac{1}{t}dt + \int_1^b \frac{1}{t}dt$$
$$f(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t}dt$$

$f(ab)$ について積分区間を a で分割すると

$$f(ab) = \int_1^{ab} \frac{1}{t}dt = \int_1^a \frac{1}{t}dt + \int_a^{ab} \frac{1}{t}dt$$

よって、性質 ① を示すために
$\int_1^b \frac{1}{t}dt = \int_a^{ab} \frac{1}{t}dt$ であることを証明する。

まずは、$\int_1^b \frac{1}{t}dt$ と $\int_a^{ab} \frac{1}{t}dt$ をそれぞれ図示して考える。そしてそれぞれの面積を比較すると以下の

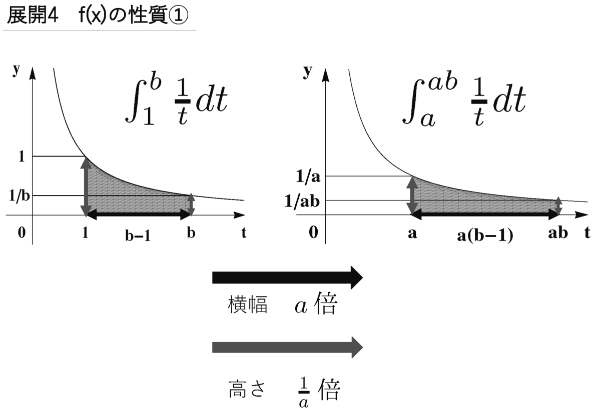


図 4: $\int_1^b \frac{1}{t}dt$ と $\int_a^{ab} \frac{1}{t}dt$ の比較

図 4 より、$\int_a^{ab} \frac{1}{t}dt$ の横幅が $a(b-1)$ で $\int_1^b \frac{1}{t}dt$ の横幅が $b-1$ であることから、$\int_a^{ab} \frac{1}{t}dt$ の横幅が $\int_1^b \frac{1}{t}dt$ の横幅の a 倍であることがわかる。

次に、$\int_1^b \frac{1}{t}dt$ の左端の高さは 1 で右端の高さが $\frac{1}{b}$ である。また、$\int_a^{ab} \frac{1}{t}dt$ の左端の高さは $\frac{1}{a}$ で右端の高さが $\frac{1}{ab}$ であることがわかる。すなわち、$\int_a^{ab} \frac{1}{t}dt$ の高さが $\int_1^b \frac{1}{t}dt$ の高さの $\frac{1}{a}$ 倍であることがわかる。

以上のことから、$\int_1^b \frac{1}{t}dt$ と $\int_a^{ab} \frac{1}{t}dt$ の値は等しいのではないかと考えられる。しかし、$\int_1^b \frac{1}{t}dt$ と $\int_a^{ab} \frac{1}{t}dt$ は曲線で囲まれた面積であるため明確に等しいとは判断できない。そこで面積を分割して考えていく。

そして、この 2 つの面積を比較する条件は「分割する長方形の数を等しくすること」である。そこから、任意の n 分割のときに分割した長方形の面積を比較する。

まずは、$\int_1^b \frac{1}{t}dt$ を任意の n 分割に分割したときの k 番目の長方形の面積を調べていく。以下、図 5 を参照しながら考えていく。

まず、t が 1 から b までの区間を n 分割していることから、分割した長方形の横幅は $\frac{b-1}{n}$ であることがわかる。

次に、t 座標をそれぞれ $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 3$ $\cdots$ $\alpha_n = b$ とおく。よって、k 番目の長方形と t 軸との交点の座標は α_k となる。よって、k 番目の

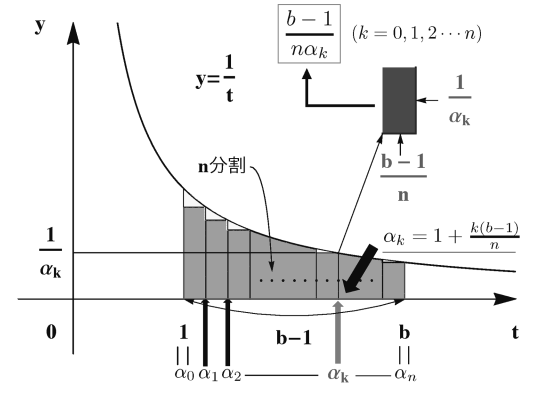


図 5: $\int_1^b \frac{1}{t}dt$ の分割

長方形の縦幅は $\frac{1}{\alpha_k}$ となる。

以上のことから、$\int_1^b \frac{1}{t}dt$ を任意の n 分割に分割したときの k 番目の長方形の面積は $\dfrac{b-1}{n\alpha_k}$ となることがわかる。

次に、$\int_a^{ab} \frac{1}{t}dt$ を任意の n 分割に分割したときの k 番目の長方形の面積を調べていく。以下、図 6 を参照しながら考えていく。

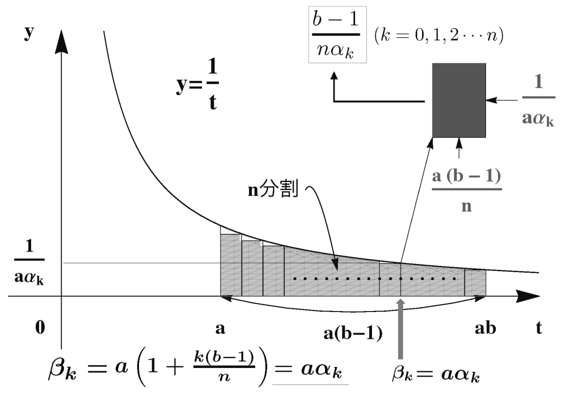


図 6: $\int_a^{ab} \frac{1}{t}dt$ の分割

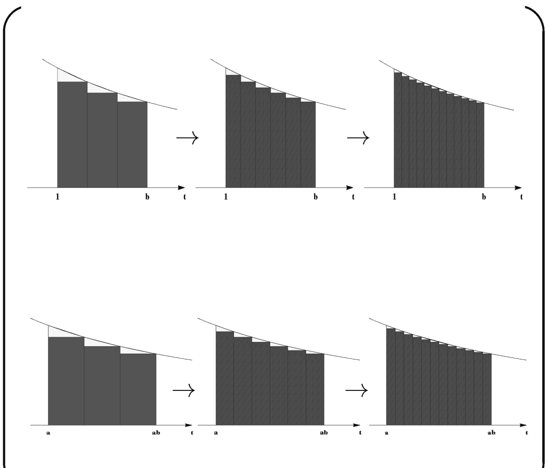
まず、t が a から ab までの区間を n 分割していることから、分割した長方形の横幅は $\frac{a(b-1)}{n}$ であることがわかる。

次に、$\int_a^{ab} \frac{1}{t}dt$ の横幅が $\int_1^b \frac{1}{t}dt$ の横幅の a 倍であることに着目すると、k 番目の長方形と t 軸との交点の座標は α_k を a 倍した $a\alpha_k$ となる。よって、k 番目の長方形の縦幅は $\frac{1}{a\alpha_k}$ となる。

以上のことから、$\int_a^{ab} \frac{1}{t}dt$ を任意の n 分割に分割したときの k 番目の長方形の面積は $\frac{b-1}{n\alpha_k}$ となることがわかる。

すなわち、$\int_1^b \frac{1}{t}dt$ を任意の n 分割に分割したときの k 番目の長方形の面積と $\int_a^{ab} \frac{1}{t}dt$ を任意の n 分割に分割したときの k 番目の長方形の面積はどちらとも $\frac{b-1}{n\alpha_k}$ であった。よって、「**対応する $k(k=0,1,2\cdots n)$ 番目の面積がそれぞれ等しいから任意の n 分割では分割された長方形の面積の和は等しい。**」ことがわかる。

任意の n 分割では分割された長方形の面積の和は等しいことがわかった。ここで、下図のように分割を限りなく増やしていく。すると、分割された長方形の面積の和が曲線で囲まれた面積に限りなく近づいていくことがわかる。すなわち、$\int_1^b \frac{1}{t}dt = \int_a^{ab} \frac{1}{t}dt$ であることがいえる。



2.2.4 $f(x)$ の性質②

次に $f(x)$ の性質 ② である $f(a^n) = nf(a)$ を証明する。性質 ② の証明には様々な方法がある。そのため、性質 ② の証明問題は自由度が与えられており、生徒の興味・学力に応じて、ある程度、自由に学習できる幅があるといえる。ゆえに、教師は

学習者の集団によって考えを洗練する環境づくりと適切な指導を行う必要がある。そして、学習者1人ひとりの学力に応じ、個性豊かで創造的な学習が可能となるように工夫しなければならない。

2.2.5 e の特徴づけ

$n > 0$ として 1 から $\frac{1}{n}$ の幅をとり、$f\left(1+\frac{1}{n}\right)$ の大きさを考える。そのため、展開 1 と同様に $f\left(1+\frac{1}{n}\right)$ の大小比較を行う。すると e の極限式を見いだすことができる。また、視覚的教材を用いて $e = 2.71828\cdots$ であることも導出することができる。

$f\left(1+\frac{1}{n}\right)$ の大小比較による e の特徴づけ

大小比較や $f(x)$ の性質より

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n}} < f\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) < 1$$

ここで、各項を $n \to \infty$ とすると

$$1 \leq f\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) \leq 1$$

はさみうちの原理より、以下が成立する。

$$\lim_{n\to\infty} f\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = 1$$

ここで展開 2 における e の定義より

$$f(e) = \lim_{n\to\infty} f\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

$f(x)$ は連続関数より極限と交換ができるから

$$f(e) = f\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)$$

$f(x)$ は (狭義) 単調増加であるから中身は一致する。すなわち

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

2.2.6 $f(x)$ の性質②の拡張

ここでは、$f(x)$ の性質 ②: $f(a^n) = nf(a)$ が一般の実数でも成り立つのかどうか調べる。すなわち、以下の性質を証明する。

$f(x)$ の性質

$$f(a^\alpha) = \alpha f(a) \cdots ③ \quad (\alpha : \text{実数})$$

数の拡張に着目して段階を追って証明する。

性質③ の証明 1

性質② に着目すると

$$f(a) = f\left(\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\right) = nf\left(a^{\frac{1}{n}}\right)$$

この両辺を n で割ると

$$f\left(a^{\frac{1}{n}}\right) = \frac{1}{n}f(a) \quad \cdots(i)$$

<u>有理数への拡張</u>
任意の数 $p, q > 0$ をとる。(i) より

$$f\left(a^{\frac{q}{p}}\right) = qf\left(a^{\frac{1}{p}}\right) = \frac{q}{p}f(a)$$

よって、有理数で 性質② が成り立つ。

性質 ③ の証明 2

<u>実数への拡張</u>
まず、無理数 $\alpha > 0$ をとり、

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$$

である有理数列 $\{\alpha_n\}$ を考える。ここで

$$f(a^\alpha) = f\left(\lim_{n\to\infty} a^{\alpha_n}\right) = \lim_{n\to\infty} f(a^{\alpha_n})$$

証明 1 より、性質 ② は有理数でも成り立つから

$$\lim_{n\to\infty} f(a^{\alpha_n}) = \lim_{n\to\infty} \alpha_n f(a) = \alpha f(a)$$

よって、一般の実数で性質 ② が成り立つ。

2.2.7 $f(x)$ の新しい性質

ここでは、性質 ③ を用いて $f(x)$ の 2 つの新しい性質を導いていく。

$f(x)$ の性質 I

実数 x をとると、性質③ より

$$f(e^x) = xf(e)$$

$f(e) = 1$ であるから

$$f(e^x) = x$$

ここで $g(x) = e^x$ とすると

$$f(g(x)) = x$$

加えて

$$g(f(x)) = e^{f(x)}$$

このとき任意の $x \geq 0$ に対して $x = e^t$ となる t は選ぶことができるから

$$\begin{aligned} e^{f(x)} &= e^{f(e^t)} \\ &= e^{t \cdot f(e)} \\ &= x \end{aligned}$$

すなわち

$$f(g(x)) = x \quad , \quad g(f(x)) = x$$

よって $f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ と $g(x) = e^x$ は互いに逆関数であることがわかる。
ここで $y = e^x$ とし、x と y を入れ替えると $x = e^y$ になる。ゆえに式変形を行うと

$$\boldsymbol{f(x) = \log_e x}$$

$f(x)$ の性質 II

$f(x) = \int_1^x \frac{1}{t}dt$ を x で微分すると $f'(x) = \frac{1}{x}$ である。よって、$\log x$ を微分したら $\frac{1}{x}$ になることがわかる。
ここで、$f(e^x) = x$ の両辺を x で微分すると

$$\begin{aligned} f'(e^x)(e^x)' &= 1 \\ \frac{1}{e^x} \cdot (e^x)' &= 1 \end{aligned}$$

すなわち、以下の性質を導き出すことができる。

$$\boldsymbol{(e^x)' = e^x}$$

3 実践研究 I

3.1 実践対象と日時

平成 29 年 7 月に群馬県立 A 高校 3 年 1 学級 (32 名) を対象に本研究による授業を A 高校教諭が実践した。対象生徒は高校 2 年次に e についての学習を終えている。

3.2 実践内容と方法

本時では生徒に e の存在について疑問を持たせ、e という数をわかりやすく実感することができるために e の再定義を行うという授業展開をとった。その手立てとして Mathematica を用いて作成した教材をもとに、A 高校教諭が作成した視覚的教材を活用した。

授業前後にアンケート調査を行い、生徒の実態把握と授業前後における e についての理解の変容を調査した。授業前アンケートは 1.2 で述べたものを使用した。授業後アンケートでは、(質問 4.1)「e の存在の実感の有無」と (質問 4.2)「e の存在を実感することができた理由」について調査した。

3.3 授業前アンケートの結果と考察

3.3.1 結果

表 6: 授業前アンケート結果 (n=32)

	質問 1		質問 2	
	◯	×	◯	×
人数 (人)	13	19	1	31
割合 (%)	40.6	59.4	3.1	96.9

表 6 より、e について教科書 (授業) でどのように説明されたか理解していない生徒が 31 人 (96.9%) と非常に多かった。

表 7: e の知識・理解に関する分類 (n=32)

	質問 1	質問 2	人数 (人)	割合 (%)
A	◯	◯	1	3.1
B	◯	×	12	37.5
C	×	◯	0	0
D	×	×	19	59.4

表 7 より、B,D グループが非常に多く、A,C グループはほとんどいなかった。

3.3.2 考察

表 6, 表 7 の結果から、現在の e の導入では、e の極限式の暗記にとどまり、e についての定着が低いと考えられる。

3.4 授業後アンケートの結果と考察

3.4.1 結果

(質問 4)「e の存在の実感の有無」の質問に対し、「実感できた」と見受けられる回答をした生徒は 26 人と全体の約 81%を占めた。

次に、実感できた理由を明らかにするために 26 人の回答を分析した。その中で 18 人の回答内容から具体的な用語を抽出した。なお、1 つの回答に複数の用語があった場合は、全ての用語を抽出した。

表 8: 授業後アンケート結果 (n=32)

	質問 4.1 結果	
	実感できた	実感できなかった
人数 (人)	26	6
割合 (%)	81.2	18.8

表 9: 回答が多かった抽出用語 (n=18)

	抽出用語			
	グラフ	式	面積	図
個数 (個)	10	7	6	3

表 9 より、e の存在を実感できた理由として視覚的な要因が多いことがわかる。

図 7: 教師が作成した視覚的教材による説明

3.4.2 考察

表 8,9 の結果より、視覚的に e を捉えることができたことにより e の存在を実感することができたと推測され、現在の e の導入が抱える課題を解決することができると考えられる。この e の導入は有用性があるといえる。

4 実践研究 II

4.1 実践対象と日時

平成 29 年 7 月に筆者らが所属する大学の理工学部 1 年生 (50 名) を対象に実践研究 I で行った授業の結果をもとに本研究による e の導入を実践した。また、本時においても A 高校教諭が作成した視覚的教材を活用した。対象の学生は既に e についての学習を終えている。

授業前アンケートは、実践研究 I と同様のアンケートを実施した。また、授業前アンケートの結果を表 3 のような実践研究 I と同様のグループに分けて調査を行なった。

4.2 実践内容と方法

本時では、実践研究 I と同様に e の存在について疑問を持たせ、e という数をわかりやすく実感することができるために e の再定義を行うという授業展開をとった。手立ては実践研究 I と同様の手段をとった。

授業前後にアンケート調査を行い、学生の実態把握と授業前後における e についての理解の変容を調査した。授業前後のアンケート内容は実践研究 I と同様のものを用いた。

4.3 授業前アンケートの結果と考察

4.3.1 結果

表 10: 授業前アンケート結果 (n=50)

	質問 1		質問 2	
	○	×	○	×
人数 (人)	34	16	7	43
割合 (%)	68.0	32.0	14.0	86.0

表 10 より、e について教科書 (授業) でどのように説明されたか理解していない学生が 43 人 (86%) と非常に多かった。

表 11: e の知識・理解に関する分類 (n=50)

	質問 1	質問 2	人数 (人)	割合 (%)
A	○	○	6	12.0
B	○	×	28	56.0
C	×	○	1	2.0
D	×	×	15	30.0

表 11 より、B,D グループが非常に多く、A,C グループは少ない結果となった。

4.3.2 考察

表 10 より、e の極限式を覚えている学生が半数以上いたことから e の学習を終えても e の極限式に関しては暗記, 記憶にとどまりやすいと考えられる。しかし、e の導入に関しては、教科書 (授業) でどのように説明されたか理解している学生が 7 人 (14%) しかいなかったことから、e の導入は、理解が困難であることが推測される。

表 11 の結果より、B,D グループが多かったことから、高校での数学の授業においては e の極限式の指導だけを行なっているか、もしくは e の導入を指導しているとしても定着が低いと考えられる。

4.4 授業後アンケートの結果と考察

4.4.1 結果

(質問 4.1)「e の存在の実感の有無」の質問に対し、「実感できた」と見受けられる回答をした学生は 41 人と全体の 82%を占めた。

表 12: 授業後アンケート結果 (n=50)

	質問 4.1 結果	
	実感できた	実感できなかった
人数 (人)	41	9
割合 (%)	82.0	18.0

次に、実感できた理由を明らかにするために 41 人の回答を分析した。その中で 32 人の回答内容か

ら具体的な用語を抽出した。抽出方法は実践研究 I と同様な方法をとった。

表 13: 回答が多かった抽出用語 (n=32)

	抽出用語			
	面積	グラフ	数式	図
個数 (個)	21	18	3	2

表 13 より、e の存在を実感できた理由として視覚的な要因が多いことがわかる。

4.4.2 考察

e を「実感できた」と回答した学生は全体の 82%いたことからこの授業は e の導入において有用性があるといえる。

「実感できた」という理由の多くが「面積」や「グラフ」であったことから、視覚的に e を捉えることができたことにより e を実感することができたと推測される。

4.5 研究の成果

まず、本研究の事前調査において、e の極限式を記憶しているが、e について教科書（授業）でどのように説明されたか理解していない人や e の極限式も記憶しておらず、e について教科書（授業）でどのように説明されたか理解していない人が多い傾向にあることを示すことができた。

次に、3 回の実践研究の結果から、本論文が提案する e の導入に関する授業は、先にあげた 3 つの課題を解決することができると考える。加えて、この e の導入を行うことで、学習者が視覚的に e を捉えることができ、e の存在を実感できるという有用性を見いだすことができた。

4.6 今後の課題

I. 実践研究を通して、e の存在を実感できなかったと要因として学習内容が多く、授業についていけないなどの意見が見られた。そのため、復習の時間を設けるなどの途中で内容をふりかえり、整理するといった指導の工夫が必要である。

II. 3 回の実践研究の対象が既に e について学習しており、e を全く知らない生徒に対して研究授業を行うことができなかった。今後は、e を知らない生徒に対して本研究で考案した授業を実践し、授業を通しての結果の分析を行い、より良い e の導入について検討していくことにする。

参考文献

[1] 河合伸昭 (2006) 「e の導入 1/x の積分を探る」日本数学教育学会誌. 臨時増刊, 総会特集号 88, p.391.

[2] 文部科学省 (2009) 「高等学校学習指導要領解説数学編理数編」実教出版.

[3] 大島利雄 (2016) 「数学 Ⅲ」数研出版.

[4] 島田敏寿 (2007) 「解析学の基礎と高等学校数学」平成 19 年度 兵庫教育大学 修士論文.