

# MATEMATIČKI UVJET ZA STABILNOST PLANETA

Datum prijave: 4.3.2013.

UDK 531.2:531.5

Datum prihvatanja: 31.5.2013.

Izvorni znanstveni rad

dr. sc. Vlado Halusek, viši predavač  
Visoka škola za menadžment u turizmu i informatici u Virovitici  
Matije Gupca 78, Virovitica, Hrvatska  
Telefon: 00-385-981882717  
E-mail: vlado.halusek@vsmti.hr

**SAŽETAK** - U radu se razmatraju neka fizička svojstva planeta na temelju izračunatog omjera njihove gravitacijske i centrifugalne sile. Iz tog omjera je određen matematički uvjet za stabilnost planeta. Uspoređivanjem perioda rotacije svakog planeta Sunčeva sustava s kritičnim periodom rotacije donosi se zaključak o njihovoj stabilnosti te se postavljaju nove hipoteze koje bi trebalo dalje istražiti.

**Ključne riječi:** stabilnost planeta, matematički uvjet, gravitacijska sila, centrifugalna sila, rotacija.

## 1. UVOD

O postanku planeta i njihovih satelita postoje razne hipoteze (McNab i Younger, 1999, Ross Taylor, 1992), ali nijedna od njih nije potpuna, nijedna ne rješava sve nepoznanice. Zbog toga su važni doprinosi koji mogu upotpuniti postojeće teorije. U tu svrhu se promatra odnos gravitacijske i centrifugalne sile unutar svemirskog tijela.

Gravitacijska sila na točkastu masu  $m$  unutar homogenog kuglastog svemirskog tijela na udaljenosti  $r$  od centra iznosi

$$F_g = 4\pi G \rho m r / 3, \quad (1)$$

gdje je  $G$  opća gravitacijska konstanta ( $6.672 \cdot 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$ ) i  $\rho$  gustoća tijela.

Zbog rotacije tijela na istu masu djeluje centrifugalna inercijalna sila iznosa

$$F_c = 4\pi^2 m r / T^2, \quad (2)$$

gdje je  $T$  period rotacije.

S obzirom da centrifugalna sila djeluje u suprotnom smjeru od gravitacijske, to gravitacijska sila mora biti veća od centrifugalne da bi svemirsko tijelo bilo stabilno. Pri tome isključujemo druge oblike sila, npr. kohezionu. Ovaj rad istražuje kritičnu granicu za centrifugalnu silu pri kojoj tijelo postaje nestabilno.

## 2. KRITIČNA GRANICA ZA PERIOD ROTACIJE PLANETA

Omjer gravitacijske (1) i centrifugalne sile (2) unutar homogenog tijela postaje

$$F_g / F_c = (G \rho / 3) / (\pi / T^2). \quad (3)$$

Uvjet stabilnosti tijela je  $F_g > F_c$ , a kritična granica je u slučaju  $F_g = F_c$ , odnosno

$$F_g / F_c = 1. \quad (4)$$

Iz relacije (4) i (3) slijedi

$$G \rho / 3 = \pi / T^2, \quad (5)$$

odnosno

$$T = (3\pi / G)^{1/2} \rho^{-1/2}. \quad (6)$$

U izrazu (6) veličina  $(3\pi / G)^{1/2}$  je konstanta pa nalazimo

$$T = k \rho^{-1/2}, \quad (7)$$

gdje je  $k = 375\,843,93 \text{ s kg}^{1/2} \text{ m}^{-3/2}$ .

Vidimo da kritična granica za period rotacije svemirskih tijela ovisi samo o gustoći tijela, a za stabilnost tijela vrijedi uvjet  $T > k \rho^{-1/2}$ .

Iz izraza (7) također se nalazi kritična gustoća svemirskih tijela

$$\rho = k^2 / T^2, \quad (8)$$

kao i uvjet stabilnosti tijela  $\rho > k^2 / T^2$ .

Na temelju polučjenih izraza načinjena je tablica omjera stvarnog i kritičnog perioda rotacije za planete Sunčevog sustava (tablica 1.).

TABLICA 1: OMJER STVARNOG I KRITIČNOG PERIODA ROTACIJE ZA PLANETE SUNČEVOG SUSTAVA

PLANET	$\rho / \text{kg m}^{-3}$	$T / \text{d}$	$T_{kr} / \text{d}$	$T / T_{kr}$
Merkur	5430	58.646	0.0590	994
Venera	5240	243.02	0.0600	4050
Zemlja	5515	0.997	0.0586	17
Mars	3940	1.026	0.0693	15
Jupiter	1330	0.413	0.1193	3.5
Saturn	690	0.446	0.1656	2.7
Uran	1260	0.721	0.1225	5.9
Neptun	1640	0.669	0.1074	6.2

U tablici 1.  $\rho$  je gustoća planeta,  $T$  period rotacije planeta oko svoje osi izražen u danima i  $T_{kr}$  kritičan period rotacije prema relaciji (7) izražen u danima.

### 3. ZNAČAJ DOBIVENOG MATEMATIČKOG UVJETA ZA STABILNOST PLANETA

Fizička svojstva planeta Sunčevog sustava kao masa, gustoća i period rotacije su poznata i općeprihvaćena (McNab i Younger, 1999, Murray, 1990), ali se i dalje vrše istraživanja za poboljšanje rezultata (Milani i dr., 2001). Također se istražuje unutrašnjost planeta (Magni i Coradini, 2004, Dragoni i Piombo, 2003) da bi se bolje shvatile pojave kao vulkani i slično. Tako je uočeno da se unutrašnji slojevi Saturna gibaju različito od vanjskih slojeva zbog čega podatak za brzinu rotacije Saturna nije siguran (Bagenal, 2007).

U ovom radu se povezuje gravitacijska sila unutar homogenog tijela i centrifugalna inercijalna sila koja ovisi o rotaciji tijela. Upotreba izraza za gravitacijsku silu unutar homogenog tijela ima prednost u tome da je proporcionalan s radijusom kao i izraz za centrifugalnu silu pa omjer tih sila ne ovisi ni o masi ni o radijusu. Prema relaciji (7), kritična granica za period rotacije svemirskih tijela ovisi samo o gustoći tijela. Iako je relacija izvedena za homogeno tijelo može se primijeniti na bilo koje svemirsko tijelo u blizini njegove površine. Pri tome za gustoću u početnom izrazu (1) uzima se srednja gustoća tijela, a sila poprima maksimalnu vrijednost jednaku iznosu gravitacijske sile ( $F$ ) na površini tijela

$$F = G M m / r^2. \quad (9)$$

Znanje o rotaciji planeta stalno se proširuje kombinacijom povijesnih i suvremenih podataka (Hughes, 2003). Tako najnovija mjerenja pokazuju da je 2006. godine Saturnov dan bio šest do osam minuta dulji u odnosu na mjerenja Voyagerove misije 1980. godine (Bagenal, 2007). Kritična granica rotacije uglavnom se veže za asteroide asimetričnih oblika. Na njih djeluje YORP efekt (Yarkovski-O'Keefe-Radzievskii-Paddack) koji može uzrokovati akceleraciju rotacije. YORP efekt nastaje anizotropnom refleksijom i termalnom reemisijom sunčeve svjetlosti od površine asteroida što djeluje kao motor koji uzrokuje promjenu spina. Za asteroid 1862 Apollo izmjerena je promjena perioda rotacije  $dP / dT = (-1.2 \pm 0.3) \cdot 10^{-6} \text{ h god}^{-1}$  (Kaasalainen i dr., 2007). Akceleracija perioda rotacije može dovesti do kritične granice rotacije odnosno do rotacijskog raspada tijela, «rotational bursting» (Botke, 2007). Ovaj rad razmatra stabilnost planeta sunčeva sustava u odnosu na tu kritičnu granicu rotacije.

Relacije (7) i (8), iako jednostavne, mogu dovesti do boljeg shvaćanja nekih fizičkih svojstava svemirskih tijela (McNab i Younger, 1999, Murray, 1990) kao i njihova nastanka (McNab i Younger, 1999, Ross Taylor, 1992), a naročito u usporedbi s otkrivenim drugim planetarnim sustavima (McNab i Younger, 1999, Chambers, 2004, Littman, 1998). Tako se na temelju tablice 1. može postaviti nova hipoteza vezana uz mogućnost izbacivanja materije iz svemirskog tijela. Hipoteza se sastoji u tome da je nestabilnijim tijelima lakše izbacivati materiju iz svoje unutrašnjosti, bilo u obliku vulkana ili nekih drugih mehanizama. Prema tome, teže izbacuju materiju iz svoje unutrašnjosti terestrički planeti<sup>1</sup>, a mnogo lakše jovijanski<sup>2</sup>. Pritom najteže izbacuje materiju Venera, a najlakše Saturn. U skladu s tim može se postaviti daljnja hipoteza da prsteni jovijanskih planeta potiču od izbacivanja materije iz unutrašnjosti matičnog planeta.

Iako su to samo hipoteze koje bi trebalo daljnjim istraživanjima potvrditi, što prelazi okvire ove radnje, ipak se mogu povezati s nekim poznatim znanstvenim činjenicama. Tako je za Saturn poznato da je zbog brze rotacije diska plazme centrifugalna sila u blizini satelita Enceladus manja od Saturnove gravitacijske sile (Gurnett i dr., 2007). Enceladus se nalazi na 3.95 Saturnovih radijusa. Nadalje, najviši vulkan Sunčevog sustava je otkriven na Marsu koji prema ovim hipotezama najlakše izbacuje materiju među terestričkim planetima. S druge strane, Venera ima najniže vulkane, a najteže izbacuje materiju. Također je dokazano da je materija Saturnovih i Jupiterovih prstena mlađa od samih planeta (Fix, 2001). Poznate teorije za Saturnove prstene to objašnjavaju raspadom nekog satelita koji je došao preblizu matičnom planetu i ušao unutar Rocheove granice pri kojoj se satelit raspada zbog gravitacijske sile matičnog planeta (McNab i Younger, 1999). Za Jupiterov prsten se smatra da bi mogao nastati od raznih međuplanetarnih otpadaka ili od vulkana njegovog satelita Io (Fix, 2001). Saturnov satelit Enceladus također izbacuje vodenu paru i čestice leda u orbitu oko Saturna (Gurnett i dr., 2007). Ipak svi autori napominju da postoje druge mogućnosti nastanka tih prstena. Zbog toga su i postavljene ove hipoteze koje nemaju dokazanu znanstvenu podlogu, ali mogu usmjeriti daljnja razmišljanja u nekom drugom smjeru od postojećih teorija. To može dovesti do čvršćih teorija o nastanku planetarnih prstena.

Iako ovaj rad sadrži dosta hipoteza, osnovna ideja da odnos gravitacijske i centrifugalne sile utječe na stabilnost svemirskih tijela potvrđuje se najnovijim istraživanjima. Tako je potvrđen i izmjerena YORP efekt (Kaasalainen i dr., 2007) koji može dovesti do rotacijskog raspada tijela (Botke, 2007), pronađena su područja u kojima je centrifugalna sila veća od gravitacijske sile matičnog planeta (Gurnett i dr., 2007) te je potvrđena mogućnost izbacivanja materije satelita u orbitu matičnih planeta (Gurnett i dr., 2007).

<sup>1</sup> Skupina manjih planeta s krutom površinom i većom gustoćom: Merkur, Venera, Zemlja i Mars.

<sup>2</sup> Skupina velikih planeta s malom gustoćom: Jupiter, Saturn, Uran i Neptun.

#### 4. ZAKLJUČAK

Promatrajući omjer gravitacijske i centrifugalne inercijalne sile, odnosno omjer stvarnog i kritičnog perioda rotacije za planete Sunčevog sustava, vidimo da terestrički planeti imaju mnogostruko veću vrijednost tog omjera od jovijanskih planeta. Prema tome terestrički planeti su mnogo stabilniji od jovijanskih pri čemu je najstabilnija Venera, a najnestabilniji Mars. Od jovijanskih planeta najstabilniji je Neptun, a najnestabilniji Saturn.

#### LITERATURA

1. Bagenal, F. (2007): A New Spin on Saturn's Rotation, *Science* 316: 380-381.
2. Botke, W.F. (2007): Spun in the sun, *Science* 316: 382-383.
3. Chambers, J.E. (2004): Planetary accretion in the inner Solar System, *Earth and Planetary Science Letters* 223: 241-252.
4. Dragoni, M. and Piombo, A. (2003): A model for the formation of wrinkle ridges in volcanic plains on Venus, *Physics of The Earth and Planetary Interiors* 135: 161-171.
5. Fix, J.D. (2001): *Astronomy: journey to the cosmic frontier*, McGraw-Hill, New York.
6. Gurnett, D.A. et al. (2007): The Variable Rotation Period of the Inner Region of Saturn's Plasma Disk, *Science* 316: 442-445.
7. Hughes, D.W. (2003): Planetary spin, *Planetary and Space Science* 51: 517-523.
8. Kaasalainen, M. et al. (2007): Acceleration of the rotation of asteroid 1862 Apollo by radiation torques, *Nature* 446: 420-422.
9. Littman, M. (1998): *Planets Beyond: Discovering the Outer Solar System*, John Wiley & Sons.
10. Magni, G. and Coradini, A. (2004): Formation of Jupiter by nucleated instability, *Planetary and Space Science* 52: 343-360.
11. McNab, D., Younger, J. (1999): *The Planets*, BBC Worldwide.
12. Milani, A. et al. (2001): Gravity field and rotation state of Mercury from the BepiColombo Radio Science Experiments, *Planetary and Space Science* 49: 1579-1596.
13. Murray, B. (1990): *Journey Into Space: The first Thirty Years of Space Exploration*, Norton.
14. Taylor, S.R. (1992): *Solar System Evolution: A New perspective*, Cambridge University Press.