ISSN (print): 2421-6798
ISSN (on line): 2421-7158

Consiglio Nazionale delle Ricerche

IRCrES

ISTITUTO DI RICERCA SULLA CRESCITA ECONOMICA SOSTENIBILE
RESEARCH INSTITUTE ON SUSTAINABLE ECONOMIC GROWTH

Working Paper

Numero 14/2017

La correlazione tra PD ed LGD nell'analisi del rischio di credito

Franco Varetto

Direttore Secondo Rolfo

Direzione CNR-IRCRES
Istituto di Ricerca sulla crescita economica sostenibile
Via Real Collegio 30, 10024 Moncalieri (Torino), Italy
Tel. +39 011 6824911 / Fax +39 011 6824966
segreteria@ircres.cnr.it
www.ircres.cnr.it

Sede di Roma Via dei Taurini 19, 00185 Roma, Italy
Tel. +39 06 49937809 / Fax +39 06 49937808

Sede di Milano Via Bassini 15, 20121 Milano, Italy
Tel. +39 02 23699501 / Fax +39 02 23699530

Sede di Genova Università di Genova Via Balbi, 6 - 16126 Genova
Tel. +39 010 2465459 / Fax +39 010 2099826

WORKING PAPER CNR-IRCRES, anno 3, numero 14, dicembre 2017

Working Paper IRCrES 14/2017

La correlazione tra PD ed LGD nell’analisi del rischio di credito

The correlation between probability of default and loss given default in the credit risk analysis

FRANCO VARETTO

CNR-IRCRES, National Research Council, Research Institute on Sustainable Economic Growth, via Real Collegio 30, Moncalieri (TO) – Italy

corresponding author: francoww@tin.it

ABSTRACT
The international regulation on banking developed by Basel Committee on Banking Supervision has set a simplified link between default probabilities and loss given default, avoiding to introduce the correlation. The scientific literature ha proposed many models that try to improve the Basel framework. This article examines the most important models proposed in the literature and apply two of them to aggregate data from the Bank of Italy.

KEYWORDS:
Default probability, loss given default, correlation, credit risk, credit portfolio model, credit VaR

JEL CODES: G21, G28, G33, C18

DOI: 10.23760/2421-7158.2017.014

HOW TO CITE THIS ARTICLE
Varetto F., 2017. “La correlazione tra PD ed LGD nell’analisi del rischio di credito”, *Working Paper IRCrES*, n. 14, pp. 1-47.

INDICE/CONTENTS

La correlazione tra PD ed LGD nell'analisi del rischio di credito

FRANCO VARETTO

1 INTRODUZIONE

La valutazione del requisito prudenziale di capitale degli enti creditizi è alla base del rafforzamento dei sistemi finanziari per renderli più resilienti alle situazioni di tensione dei mercati ed alle crisi economiche. Com'è noto il calcolo del requisito per il rischio di credito si basa su una normativa assai articolata che ha richiesto un lungo periodo di messa a punto e che tutt'ora appare soggetta ad ulteriori aggiustamenti. Il lungo processo che ha portato all'attuale versione della regolamentazione ha visto il passaggio da Basilea I a Basilea II a Basilea III ed è ormai alle viste Basilea IV.

Com'è noto la regolamentazione sul rischio di credito prevede il ricorso al Metodo Standardizzato o al Metodo basato sui Rating Interni, quest'ultimo nella versione Base od in quella Avanzata. In questa sede si farà riferimento esclusivamente a quest'ultima. Può essere opportuno richiamare gli aspetti essenziali della regolamentazione riguardante le imprese del segmento corporate quale premessa alle sezioni successive del lavoro:

1) Le attività ponderate per il rischio (RWA) sono uguali a K*12.5*EAD, ove EAD indica l'esposizione al rischio (Exposure At Default) e 12.5 è 1/0.08, in cui 0.08 è il coefficiente da applicare alle RWA per determinare il capitale regolamentare necessario all'assorbimento dei rischi
2) K è il requisito patrimoniale ed è calcolato come:
$$K=\left[LGD*\Phi\left[\frac{\Phi^{-1}(PD)+\sqrt{\rho}*\Phi^{-1}(0.999)}{\sqrt{1-\rho}}\right]-PD*LGD\right]*\frac{1+(M-2.5)*b}{(1-1.5*b)}$$
ove LGD = Loss Given Default, PD = Probability of Default, M = scadenza effettiva del credito, Φ = funzione di distribuzione cumulativa normale standard, Φ^{-1} = funzione di distribuzione cumulativa inversa normale standard, b = aggiustamento in funzione della scadenza = $(0.11852-0.05478*Ln(PD))^2$, ρ = coefficiente di correlazione (asset correlation).
3) Il coefficiente di correlazione è specificato in funzione della PD
$$\rho=0.12*\frac{1-e^{-50*PD}}{1-e^{-50}}+0.24*\left[1-\frac{1-e^{-50*PD}}{1-e^{-50}}\right]$$

L'aggiustamento per la durata è calibrato sulla scadenza di un anno, infatti ponendo M=1 il termine finale moltiplicativo della funzione regolamentare diventa pari all'unità.

A parte l'aggiustamento per la durata, il requisito patrimoniale è calcolato come differenza tra la perdita attesa condizionata alla realizzazione di uno scenario avverso, corrispondente al quantile del 99.9% della probabilità normale standard, e la perdita attesa non condizionata

(PD*LGD)[1]. La probabilità di default condizionata allo scenario avverso è calcolata come probit di un argomento complesso ricavato dal modello di Vasicek, su cui si tornerà tra poco.

Anche la LGD deve essere valutata in modo prudenziale: la regolamentazione stabilisce che "Una banca deve stimare per ciascuna operazione una LGD che rifletta le condizioni recessive del ciclo economico, ove ciò sia necessario per una corretta quantificazione dei rischi"[2]; lo stesso principio è ripreso nel Regolamento UE che ha recepito la regolamentazione emanata dal Comitato di Basilea: "gli enti impiegano stime della LGD adatte per una fase recessiva se queste sono più prudenti della media di lungo periodo"[3]. La LGD calcolata con questo orientamento è definita LGD downturn[4].

Anche la determinazione della EAD è calcolata con criteri analoghi: "gli enti impiegano stime dei fattori di conversione adatte per una fase recessiva se queste sono più prudenti della media di lungo periodo"[5] e "nel caso delle esposizioni le cui stime di EAD presentano una sensibile variabilità nell'arco del ciclo economico, la banca deve impiegare stime appositamente concepite per una fase recessiva se queste sono più prudenti della media di lungo periodo"[6].

Il punto essenziale intorno al quale si impernia questo lavoro riguarda l'assenza di una correlazione tra PD ed LGD nella formula regolamentare: il ricorso alla LGD downturn, ovvero ad un valore prudenziale della LGD, è stato adottato per poter ignorare la connessione tra perdite ed eventi di insolvenza ed introdurre una notevole semplificazione nel calcolo del requisito regolamentare.

Lo stesso vale per l'assenza di correlazione tra PD ed EAD: anche in questo caso il modello regolamentare ha rinunciato ad introdurre un parametro di difficile quantificazione, che avrebbe notevolmente complicato i calcoli, sostituendone la presenza con il riferimento alla misura della EAD in condizioni di stress.

L'obiettivo di questo lavoro consiste nell'esaminare le maggiori proposte emerse nella letteratura in materia per includere nello schema regolamentare l'interazione tra PD ed LGD e successivamente l'interazione con l'EAD.

Rispetto alle PD, sviluppare un modello di stima della LGD appare più complesso: mentre le PD sono modellabili con una distribuzione che considera solo valori binari (default/non default), la LGD è una variabile continua sull'intervallo 0-1 (ma può essere superiore ad 1 nel caso in cui la perdita su crediti riguardi l'intero capitale, interessi, interessi di mora e spese per le azioni di recupero[7]); inoltre le LGD sono osservabili per le società insolventi, che sono una minoranza rispetto al totale dei crediti in portafoglio. Le problematiche riguardanti la stima dei valori delle LGD sono fuori dal contesto di questo lavoro. Inoltre si farà riferimento solo a PD point-in-time, trascurando il problema delle PD through-the-cycle, su cui si ritornerà in un successivo lavoro. In particolare i modelli che vengono presi in considerazione sono specificati in un contesto statico (come nella maggior parte della letteratura sul rischio di credito) e astraggono da considerazioni sulla dinamica del rischio (cioè escludono la dimensione temporale del modello, come le time-varying correlations tra PD e LGD).

---

[1] In altri termini, trascurando l'aggiustamento per la durata, il capitale di vigilanza è pari alla differenza tra unexpected loss ed expected loss (UL-EL), ovvero (UPD-PD)*LGD*EAD, ove UPD è la unexpected PD.

[2] Si veda il punto 468 del documento su Convergenza Internazionale della Misurazione del Capitale e dei Coefficienti Patrimoniali, giugno 2004, Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (BCBS). Si veda anche "Guidance on Paragraph 468 of the framework document", luglio 2005, Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (BCBS).

[3] Si veda art.181 b) del Regolamento UE n. 575/2013.

[4] Negli Stati Uniti la regolamentazione bancaria (Department of the Treasury, FED e FDIC) consente alle banche che non hanno una sufficiente base statistica per stimare la LGDdownturn di calcolarla come: LGDdownturn=0.08+0.92*ELGD, ove ELGD indica il valore atteso della LGD e 0.08 è il floor della stima mentre il cap è uguale ad 1.

[5] Si veda art.182 b) del Regolamento UE n. 575/2013.

[6] Si veda il punto 475 del documento su Convergenza Internazionale della Misurazione del Capitale e dei Coefficienti Patrimoniali, giugno 2004, Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (BCBS).

[7] Valori negativi della LGD si possono avere nei rari casi in cui il debitore paga tutti i debiti, incluse le spese e le sanzioni, il cui ammontare totale attualizzato eccede il valore dell'esposizione.

2 IL MODELLO DI VASICEK

Come si è visto il punto cardine della valutazione del requisito patrimoniale è il calcolo della PD condizionale. La formulazione deriva direttamente dai risultati analitici proposti da Oldrich Vasicek, un matematico ceco emigrato negli USA che si è dedicato allo studio dei rischi finanziari e della dinamica dei tassi di interesse e fondatore insieme a Stephen Kealhofer e John McQuown della società di consulenza finanziaria KMV, specializzata nell'analisi dei rischi di credito, successivamente acquisita da Moody's.

Per introdurre adeguatamente le successive analisi considerate in questo lavoro è opportuno riassumere brevemente il modello di Vasicek[8], che viene spesso etichettato con ASRF (Asymptotic Single Risk Factor).

Il punto di partenza consiste nell'assumere l'esistenza di un portafoglio perfettamente granulare composto da N prestiti identici di uguale ammontare (unitario, per semplicità), con identica PD ed LGD. La perdita su crediti del portafoglio è pari a X(1-RR)*EAD, ove RR=recovery rate=(1-LGD) ed X=numero di insolvenze nel portafoglio. L'evento default è modellabile con la distribuzione bernoulliana che assume due possibili valori 0/1 (default/non default). Se gli eventi default sono indipendenti la probabilità di avere esattamente n default nel portafoglio vale:

$$P[X = n] = \binom{N}{n} PD^n (1-PD)^{N-n} = \frac{N!}{n!(N-n)!} PD^n (1-PD)^{N-n}$$

mentre la probabilità di avere fino ad n insolvenze è

$$P[X \le n] = \sum_{s=0}^{n} \binom{N}{s} PD^s (1-PD)^{N-s}$$

Nel caso opposto in cui gli eventi siano perfettamente correlati, si hanno solo due eventi possibili nel portafoglio: o falliscono tutti i prestiti, con probabilità PD, o non fallisce nessuno, con probabilità (1-PD).

Il problema si pone quando gli eventi default sono correlati ma meno che perfettamente, ovvero la correlazione si colloca ad un livello intermedio rispetto ai casi estremi visti sopra. La base di partenza adottata da Vasicek è il modello di Merton, che rappresenta l'insolvenza delle imprese ricorrendo alla valutazione di opzioni europee: un'impresa va in default quando il valore di mercato delle sue attività è inferiore all'ammontare del debito da rimborsare ad un certo orizzonte temporale (qui per semplicità assunto pari ad un anno). Ovvero l'evento default si verifica quando AT<=BT, ove AT = valore di mercato delle attività all'orizzonte temporale T e BT = ammontare del debito da rimborsare in T.

Seguendo Merton la dinamica del valore economico delle attività è descrivibile con un moto browniano geometrico $dA_i = \mu_i A_i dt + \sigma_i A_i d\varepsilon_i$ per la i-esima impresa, in cui μi è il rendimento istantaneo delle attività, σi è la volatilità istantanea ed εi è una v.c. normale standard. Partendo dalla situazione inziale (t=0), applicando il lemma di Ito si ottiene il valore di AT:

$$A_{iT} = A_{i0}\, e^{\left(\mu_i - \frac{\sigma_i}{2}\right)T + \sigma_i \sqrt{T}\varepsilon_i}, \textit{ ovvero in termini logaritmici}$$

$$LnA_{iT} = LnA_{i0} + \left(\mu_i - \frac{\sigma_i}{2}\right)T + \sigma_i \sqrt{T}\varepsilon_i$$

La probabilità di default, P[AiT<=BiT], scritta in termini logaritmici, P[LnAiT<=LnBiT], vale:

[8] Si veda Vasicek 1987, 1991 e 2004. Si veda anche Schonbucher 2000. Il modello di Vasicek è stato adottato anche per lo sviluppo del modello CreditMetrics: si veda Finger 1999.

$$P\left[LnA_{i0}+\left(\mu_i-\frac{\sigma_i}{2}\right)T+\sigma_i\sqrt{T}\varepsilon_i-LnB_{iT}\leq 0\right]=P\left[\varepsilon_i\leq-\frac{LnA_{i0}-LnB_{iT}+\left(\mu_i-\frac{\sigma_i}{2}\right)T}{\sigma_i\sqrt{T}}\right]=$$

$$=\Phi\left[-\frac{Ln\left(\frac{A_{i0}}{B_{iT}}\right)+\left(\mu_i-\frac{\sigma_i}{2}\right)T}{\sigma_i\sqrt{T}}\right]=\Phi(R_i)$$

ove Ri indica sinteticamente la barriera che se viene superata comporta l'insolvenza dell'i-esima impresa[9].

Invertendo il calcolo della relazione precedente si può scrivere $R_i=\Phi^{-1}(PD_i)$

I valori delle attività delle diverse imprese che compongono il portafoglio sono tra di loro correlati tramite una matrice di coefficienti di correlazione10.

Senza perdita di generalità si ridefinisca AiT come normale standard. Partendo da questo modello di Merton, Vasicek ha proposto di far dipendere i valori delle attività da due variabili fondamentali: un fattore (Y) comune a tutte le imprese, che sintetizza il determinante sistematico del valore delle imprese ed un fattore specifico (εi) che rappresenta la componente idiosincratica (specifica) dell'impresa. Sia Y che εi sono variabili normali standard i.i.d. (identical and independent distributed). Il valore AiT è quindi esprimibile come

$$A_{iT}=\sqrt{\rho_i}\,Y+\sqrt{1-\rho_i}\,\varepsilon_i$$

in cui ρ indica la correlazione tra il valore delle attività ed il fattore sistematico comune Y. Un basso valore della correlazione indica in sostanza che la prosperità di un'impresa è poco connessa con quella delle altre imprese; un alto valore della correlazione vuol dire che quando il sistema economico ha una fase negativa, tale situazione influenza la prosperità dell'impresa con effetti che sono proporzionali all'entità del downturn del sistema.

In un portafoglio ampio le componenti idiosincratiche possono essere eliminate con un'attenta diversificazione e quindi il rischio di credito residuo è pilotato dalla sola componente sistematica, comune a tutti i prestiti. Il punto cruciale che deve essere considerato nella proposta metodologica di Vasicek riguarda il fatto che condizionatamente alla realizzazione del fattore sistematico Y i valori delle attività e gli eventi di insolvenza sono indipendenti: ovvero data la realizzazione Y=y, solo i fattori idiosincratici, che sono per ipotesi tra loro indipendenti, determinano l'insolvenza.

Nello schema di portafoglio perfettamente omogeneo le barriere di insolvenza Ri sono tutte uguali e di conseguenza sono uguali anche le PDi. Quindi condizionatamente alla realizzazione (y) del fattore sistematico (Y) la probabilità di avere esattamente n insolvenze vale

$$P[X=n\,|\,Y=y]=\binom{N}{n}(PD(y))^n(1-PD(y))^{N-n}$$

in cui PD(y) indica la PD condizionale alla realizzazione Y=y, ovvero la probabilità che le attività dell'impresa abbiano un valore inferiore al debito nel caso in cui si realizzasse uno scenario in cui Y=y. Quindi si può scrivere, ignorando il pedice i data l'omogeneità del portafoglio:

---

[9] Modi equivalenti di definire tale barriera sono $-d_2$ della nota formula risolutiva di Black-Scholes-Merton per le opzioni europee, oppure distance-to-default.

[10] Si rammenta che la correlazione tra i logrendimenti dei valori delle attività non va confusa con la default correlation.

$$PD(y)=P[A_T \le R \mid Y=y]=P\left[\sqrt{\rho}Y+\sqrt{1-\rho}\varepsilon \le R \mid Y=y\right]=$$
$$=P\left[\varepsilon \le \frac{R-\sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right]=\Phi\left[\frac{R-\sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right]$$
$$da\ cui\ P[X=n \mid Y=y]=\binom{N}{n}\left(\Phi\left(\frac{R-\sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{n}\left(1-\Phi\left(\frac{R-\sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{N-n}$$

Per avere la probabilità non condizionale di n insolvenze occorre considerare la media di tutte le probabilità condizionali, in base a tutte le possibili realizzazioni di Y:

$$P[X=n]=\int_{-\infty}^{+\infty}\binom{N}{n}\left(\Phi\left(\frac{R-\sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{n}\left(1-\Phi\left(\frac{R-\sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{N-n}\phi(y)dy,$$

in cui $\phi(y)$ *indica la funzione di densità della probabilità normale standard di Y*

Mentre la probabilità che il numero delle insolvenze arrivi fino ad n vale:

$$P[X\le n]=\sum_{s=0}^{n}\binom{N}{s}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\Phi\left(\frac{R-\sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{s}\left(1-\Phi\left(\frac{R-\sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{N-s}\phi(y)dy.$$

Vasicek ha dimostrato che tali formule possono essere fortemente semplificate se si adotta l'assunzione di un portafoglio infinitamente granulare, ovvero se N tende all'infinito. In un tale portafoglio, condizionatamente alla realizzazione del fattore comune Y=y, la legge dei grandi numeri assicura che la frazione dei prestiti in insolvenza corrisponda alla probabilità di insolvenza individuale, ovvero X/N=PD(y). La dimostrazione e lo sviluppo analitico del modello sono fuori dalle finalità di questo lavoro e si rinvia alle pubblicazioni di Vasicek per i dettagli.

Ciò che importa invece mettere in luce è l'utilizzo di questo modello ai fini della formulazione della regolamentazione bancaria, sulla base della proposta di M.Gordy[11], recepita dal Comitato di Basilea.

Il VaR creditizio è definito come la quota dei prestiti in un portafoglio ben diversificato e perfettamente granulare che saranno insolventi in un certo orizzonte temporale (un anno), con un certo intervallo di confidenza statistica. Nella regolamentazione bancaria tale intervallo è definito al 99.9%, ovvero, ponendo q=0.999, VaR→Prob(X>xq)=1-q. Con riferimento alla formulazione della PD condizionata vista sopra, si può fissare il valore di y tale da riprodurre lo scenario peggiore al 99.9% di probabilità, tale da lasciare fuori solo 1-0.999 scenari peggiori[12]. Poiché Y è una variabile casuale normale standard si può scrivere

$y=\Phi^{-1}(1-q)=-\Phi^{-1}(q)=-\Phi^{-1}(0.999)=circa\ -3.0902$.

Quindi la PD(y) diventa

$$PD(y)=\Phi\left[\frac{R-\sqrt{\rho}\left[-\Phi^{-1}(q)\right]}{\sqrt{1-\rho}}\right]=\Phi\left[\frac{R+\sqrt{\rho}\Phi^{-1}(q)}{\sqrt{1-\rho}}\right]$$

Si osservi inoltre che la barriera che identifica l'evento default (R) corrisponde all'inversa della normale standard della PD non condizionale, come si è visto sopra. Quindi la PD condizionata allo scenario di stress può essere scritta come:

$$PD(q)=\Phi\left[\frac{\Phi^{-1}(PD)+\sqrt{\rho}\,\Phi^{-1}(q)}{\sqrt{1-\rho}}\right]$$

[11] Si veda Gordy 2003.

[12] Poiché la perdita di portafoglio è crescente con l'aumentare di Y (valori elevati di Y corrispondono a scenari peggiori), la ricerca del quantile della perdita si riduce al calcolo del quantile di Y.

che è esattamente la quantità che entra nella formula regolamentare. Per l'i-esimo credito si può porre, mantenendo uguale per tutti i prestiti del portafoglio il coefficiente di correlazione con il fattore comune:

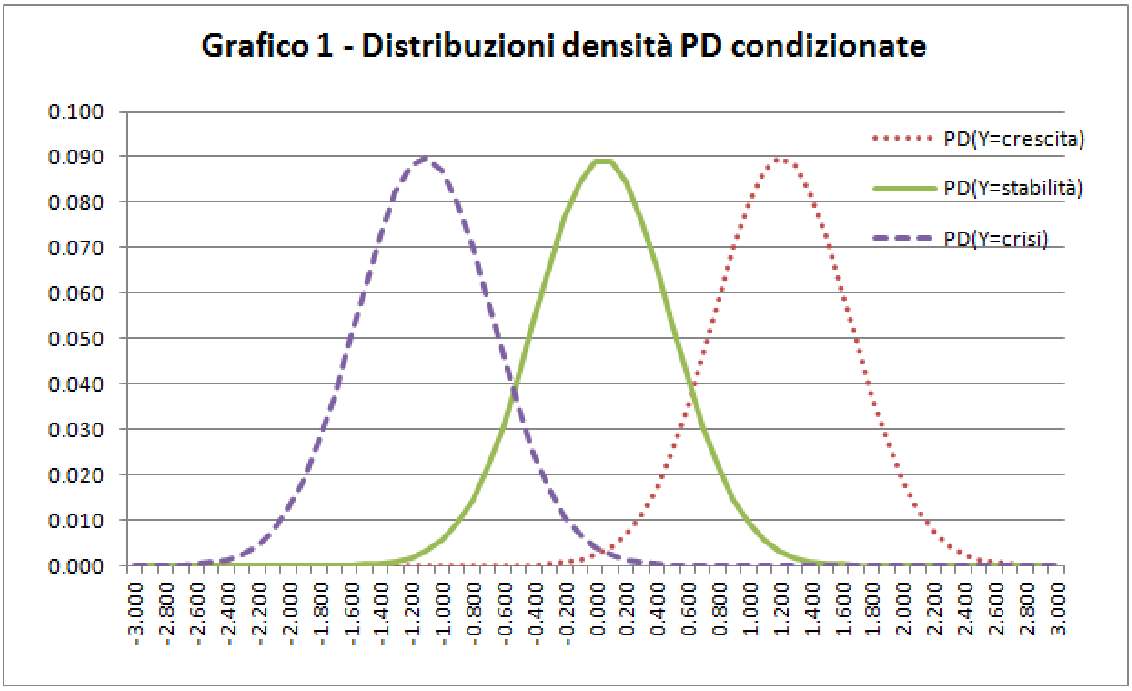
$$PD_i(q) = \Phi\left[\frac{\Phi^{-1}(PD_i) + \sqrt{\rho}\,\Phi^{-1}(q)}{\sqrt{1-\rho}}\right]$$

Il requisito patrimoniale, K, per un prestito con durata di un anno è quindi indicabile anche come

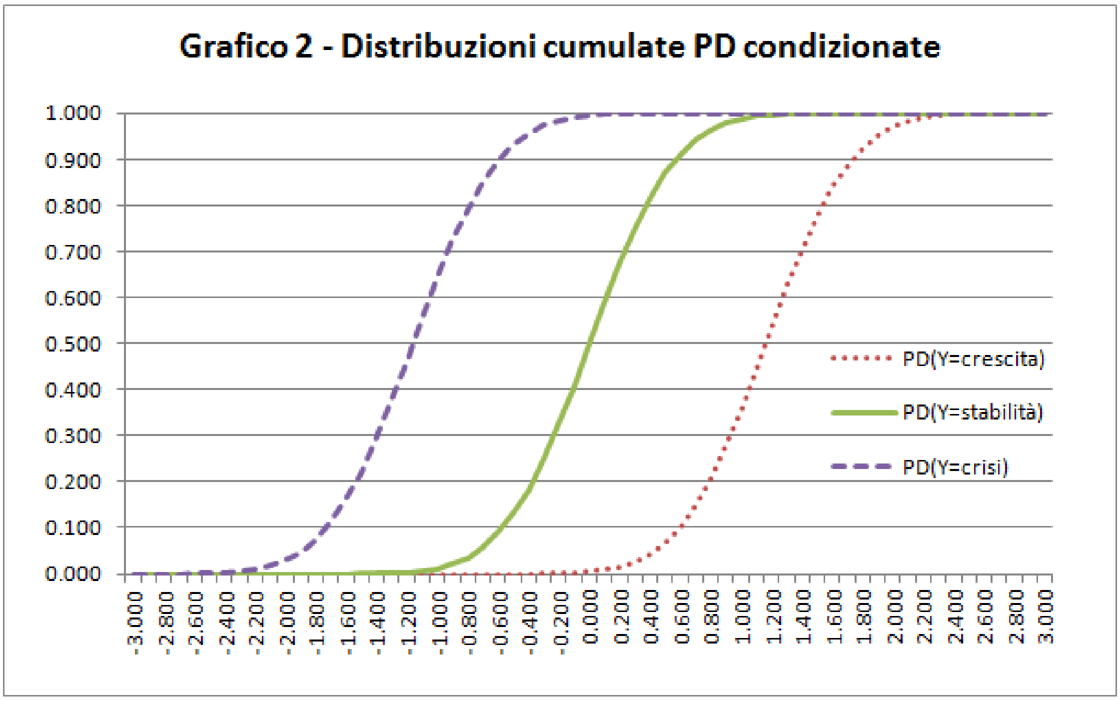
$$K_i = EAD_i * [PD_i(q) - PD_i] * LGD_i$$

essendo PDi(q) e PDi rispettivamente la PD condizionata e non condizionata del prestito i-esimo. Gordy ha infatti dimostrato che in un portafoglio perfettamente granulare, con crediti identici ed identica correlazione, il requisito regolamentare complessivo corrisponde alla semplice somma dei requisiti individuali dei singoli prestiti[13].

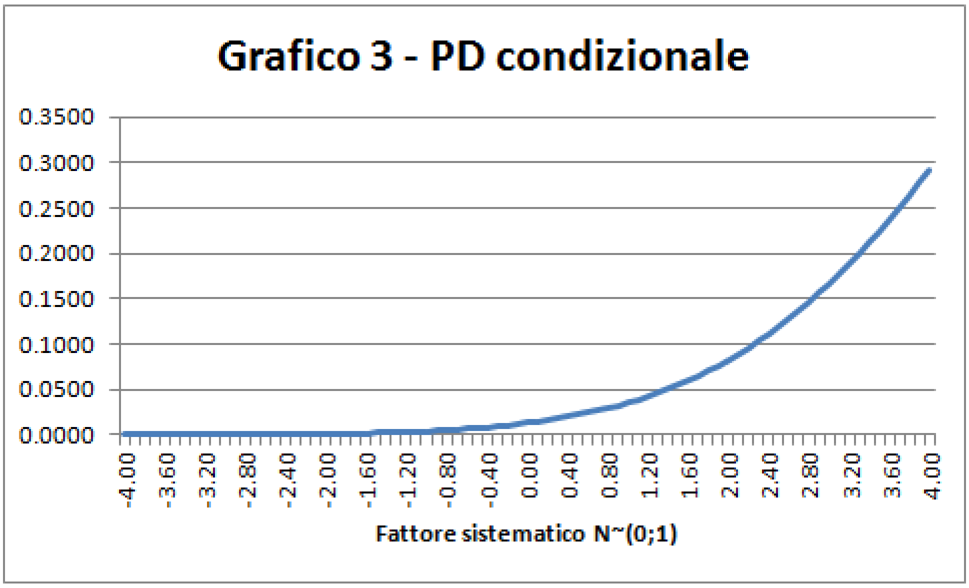
Per osservare meglio l'effetto del condizionamento delle PD si vedano i grafici 1 e 2. Nel primo sono riportate le distribuzioni di densità di tre PD condizionate a tre stati del ciclo economico: crescita, stabilità e crisi; nel secondo sono riprodotte le distribuzioni cumulate delle PD condizionate. Come si vede la realizzazione della variabile sistematica Y pilota lo spostamento delle probabilità che si verifichi l'evento insolvenza verso livelli di maggiore o minore severità. L'entità degli spostamenti dipende dall'intensità della correlazione con il fattore sistematico: tanto maggiore la correlazione, tanto maggiori sono gli spostamenti verso l'aggravamento o l'attenuazione delle PD; se la correlazione è nulla, le tre curve si sovrappongono perfettamente e coincidono con le PD non condizionate.



[13] Due sono le condizioni per l'additività dei requisiti regolamentari: a) il portafoglio è di grandi dimensioni ed infinitamente granulare, in cui ciascun credito ha un peso minimo sul totale; b) vi è un solo fattore sistematico che determina tutte le correlazioni.



Il grafico 3 invece illustra il comportamento della PD condizionata al variare del fattore sistematico, a partire da una PD incondizionata del 2% e di un coefficiente di correlazione del 15%:



Nella formula regolamentare la EAD e la LGD sono trattate come parametri a parte, sia pure con esplicita prescrizione di valutarli con riferimento ad uno scenario di stress (imprecisato, genericamente definito come fase recessiva del ciclo economico), mentre la specificazione della PD si è giovata dei risultati analitici di Vasicek. Peraltro nella letteratura vi sono numerosi contributi che hanno approfondito gli effetti del rischio della LGD sulla valutazione delle perdite su crediti di portafoglio; ulteriori contributi scientifici hanno considerato anche il rischio sulla EAD. Di seguito vengono presi sinteticamente in esame i principali modelli proposti dagli autori che si sono occupati della materia.

3 IL MODELLO DI FRYE

J. Frye[14] ha modellato il rischio sulla LGD in termini di rischio sul valore delle garanzie (collateral) rilasciate dai debitori a protezione delle banche. Il valore economico dei collaterali fluttua in base alle condizioni del ciclo economico, come qualunque altra attività: una fase recessiva (downturn) non ha solo effetti sull'entità delle PD, ma anche sulla capacità di copertura delle garanzie ed è quindi importante tenere conto esplicitamente anche di questa componente di rischio.

Mantenendo l'ipotesi di una EAD unitaria, Frye definisce il valore delle garanzie (G_j) come variabile casuale in funzione del loro ammontare (μ_j), della volatilità (σ_j) e della sensitività al fattore comune sistematico in base al coefficiente di correlazione (q_j):

$$G_j = \mu_j(1+\sigma_j C_j),\ ove\ C_j = q_j Y + \sqrt{1-q_j^2}\, z_j,\ in\ cui\ z_j\ \grave{e}\ il\ ter\min e\ idio\sin cratico$$

$$e\ q_j = corr(C_j;Y)$$

Il fattore idiosincratico influisce solo sulle garanzie dell'impresa j-esima, mentre Y impatta sulle garanzie di tutti i prestiti in portafoglio. Questo è il modello iniziale di Frye, successivamente modificato, come si dirà in seguito.

Come nel modello di Vasicek il valore delle attività dell'impresa è funzione delle due componenti sistematica e specifica[15]:

$$A_j = \rho_j Y + \sqrt{1-\rho_j^2}\,\varepsilon_j,\ ove\ \rho_j = corr(A_j;Y).$$

La correlazione tra le attività di due imprese dipende dalla loro connessione con il fattore sistematico:

$$Corr(A_j, A_k) = \mathrm{cov}\left[\rho_j Y + \sqrt{1-\rho_j^2}\,\varepsilon_j;\ \rho_k Y + \sqrt{1-\rho_k^2}\,\varepsilon_k\right] = \rho_j \rho_k$$

Come nel modello di Merton, l'impresa diventa insolvente nel caso in cui il valore delle sue attività sia inferiore alla barriera di default; l'evento default è rappresentato dalla variabile indicatrice D_j, che vale 1 se si verifica il default e 0 negli altri casi:

$$D_j = \begin{cases} 1\ se\ A_j < \Phi^{-1}(PD_j) \\ 0\ negli\ altri\ casi \end{cases}$$

ove la probabilità che D_j sia pari ad 1 è uguale a PD_j, ovvero $E(D_j)=PD_j$.

Se si verifica il default la banca ottiene un valore di recupero pari a:

$$\mathrm{Re}cupero_j = \min(1;G_j),\ \ da\ cui\ LGD_j = \max(0;\,1-G_j).$$

La perdita per insolvenza[16] sul prestito all'impresa j-esima vale pertanto $L_j = D_j * LGD_j$

Sommando rispetto a j si ottiene la perdita a livello di portafoglio; con la simulazione Monte Carlo si può generare facilmente (ma con costi in termini di tempo di elaborazione) la distribuzione delle perdite in funzione di estrazioni casuali del fattore sistematico Y e di quelli idiosincratici z ed ε.

[14] Si veda Frye 2000, 2010, 2014 e Frye-Jacobs 2012.

[15] A seconda di come sono formulati i diversi modelli, la connessione con il fattore sistematico viene definita come coefficiente ρ o con il suo quadrato: nel corso del testo si farà riferimento indifferentemente alle due espressioni. Nel caso in cui la definizione sia espressa in termini del quadrato la PD condizionata di Vasicek diventa $PD_i(q) = \Phi\left[\frac{\Phi^{-1}(PD_i) + \rho\,\Phi^{-1}(q)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right]$

[16] Non si considerano perdite connesse al downgrade del credito, come in CreditMetrics.

Come si vede la variabile D dipende da Y ed ε, mentre la LGD dipende da Y e da z; condizionatamente alla realizzazione y del fattore comune le due variabili sono indipendenti e quindi

$$E[L_j \mid Y = y] = E[D_j \mid Y = y] * E[LGD_j \mid Y = y],$$

in altri termini, condizionatamente al fattore sistematico, il valore atteso della perdita corrisponde al prodotto della PD condizionata per la LGD condizionata[17].

L'assunzione che il rischio sulla LGD sia puramente idiosincratico equivale ad azzerare il factor loading q_j, mentre la LGD puramente deterministica si ottiene azzerando la volatilità σ_j. Un caso particolare si ha quando le connessioni con il fattore sistematico sono identiche sia per i valori delle attività che per quelli delle garanzie, ovvero $q_j=\rho_j$, come quando le garanzie sono rappresentate dalle stesse attività in uso nell'impresa.

Nel caso in cui il valore di recupero sia modellato con una distribuzione beta si ha:

$$\mathrm{Re}cupero_j = Betainversa\left\lfloor \Phi(C_j);\ media = \mu;\ sqm = \sigma \right\rfloor.$$

Considerando quindi i rischi sulla LGD, il requisito regolamentare aumenta rispetto al calcolo definito dalla formula standard della regulation.

In una versione successiva del suo modello, Frye ha lavorato direttamente sul valore di recupero e non più su quello delle garanzie, date le limitazioni delle osservazioni empiriche disponibili su queste ultime. Coerentemente con il modello iniziale, il valore di recupero viene fatto dipendere dal fattore sistematico e dalle componenti idiosincratiche:

$$\mathrm{Re}cupero_j = \mu_j + \sigma_j q_j Y + \sigma_j \sqrt{1-q_j^2}\, z_j$$

Il valore di recupero ha una distribuzione normale con media μ e varianza σ^2. Nel caso in cui l'impresa abbia diverse emissioni di passività finanziarie, verso banche, verso obbligazionisti o verso terzi creditori, subordinate, non subordinate o garantite, la definizione della funzione Recupero può essere specificata per le diverse emissioni, in cui la dipendenza dal fattore sistematico dovrebbe essere uguale per tutte le emissioni, mentre differenziate per ciascuna emissione dovrebbero essere le componenti idiosincratiche.

La connessione tra PD ed LGD può essere formalizzata con una copula[18], ma le evidenze empiriche spesso non ne consentono una identificazione statistica robusta.

Successivamente Frye e Frye e Jacobs[19] hanno sviluppato una proposta che, invece di trattare separatamente PD ed LGD, lavora direttamente sulla perdita attesa condizionale (conditional expected credit loss), definita come:

$$cLoss = \Phi\left[\frac{\Phi^{-1}(PD * ELGD) + \sqrt{\rho}\, y}{\sqrt{1-\rho}}\right]$$

ove ELGD indica la LGD attesa; assumendo che la PD condizionale segua il modello di Vasicek, la LGD condizionale può essere ricavata a partire dalla funzione di perdita e da quella della PD con:

---

17 Come è stato sottolineato da Frye, la LGD di un singolo prestito, essendo condizionata rispetto al default del prestito stesso è indipendente da esso, ma può dipendere dal default di altre imprese o dalla loro LGD: questa dipendenza può produrre una correlazione a livello di portafoglio tra LGD e tasso di default.

18 Frye e Jacobs utilizzano la copula comonotonica per combinare PD ed LGD correlate positivamente tra loro. Lo stesso tipo di copula è usata dai due autori per combinare PD ed EL. Si osservi che l'assunzione che maggiori PD si accompagnano a maggiori EL è più generale rispetto all'affermazione che maggiori PD si accompagnano a maggiori LGD.

19 Si veda Frye 2010 e 2014 e Frye-Jacobs 2012.

$$cLGD = \frac{\Phi\left[\dfrac{\Phi^{-1}(PD * ELGD) + \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right]}{\Phi\left[\dfrac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right]}.$$

Più in dettaglio data la PD condizionale al quantile q-esimo vista in precedenza,

$$PD(q) = \Phi\left[\frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho}\,\Phi^{-1}(q)}{\sqrt{1-\rho}}\right],$$

si può ricavare il valore del parametro q:

$$q = \Phi\left[\frac{\Phi^{-1}(PD(q)) * \sqrt{1-\rho} - \Phi^{-1}(PD)}{\sqrt{\rho}}\right].$$

Assumendo che PD(q) e cLoss siano comonotoniche e che la perdita condizionata (cLoss) sia descrivibile con la distribuzione di Vasicek con lo stesso parametro di correlazione delle PD, allora l'espressione della cLoss vale

$$cLoss = \Phi\left[\frac{\Phi^{-1}(EL) + \sqrt{\rho}\Phi^{-1}(q)}{\sqrt{1-\rho}}\right]$$

sostituendo in questa formula l'espressione di $\Phi^{-1}(q)$ si ottiene:

$$cLoss = \Phi\left[\frac{\Phi^{-1}(EL) + \Phi^{-1}(PD(q)) * \sqrt{1-\rho} - \Phi^{-1}(PD)}{\sqrt{1-\rho}}\right] = \Phi\left[\Phi^{-1}(PD(q)) - \frac{\Phi^{-1}(PD) - \Phi^{-1}(EL)}{\sqrt{1-\rho}}\right]$$

e dividendo questa espressione per la PD condizionata si ottiene la LGD condizionata:

$$cLGD = \frac{\Phi\left[\Phi^{-1}(PD(q)) - \dfrac{\Phi^{-1}(PD) - \Phi^{-1}(EL)}{\sqrt{1-\rho}}\right]}{\Phi\left[\dfrac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho}\Phi^{-1}(q)}{\sqrt{1-\rho}}\right]}$$

Si sottolinea che questo risultato si basa sulle seguenti assunzioni:

a) Comonotonicità di PD ed EL
b) Le distribuzioni di PD ed EL sono tipo Vasicek[20], con due parametri
c) Il valore del coefficiente di correlazione con il fattore sistematico è identico per le PD e le EL.

Per una specificazione econometrica della forma funzionale che collega PD condizionate e LGD condizionate si veda Giese (2005).

[20] L'uso di distribuzioni tipo beta o lognormali sono più complesse da trattare e generano risultati simili a quelli delle distribuzioni tipo Vasicek.

4 IL MODELLO DI PYKHTIN

Il modello di M. Pykhtin è forse il più rigoroso nel derivare il collegamento tra PD ed LGD. Pykhtin ha preso spunto dal modello originale di Frye ma ha introdotto elementi di novità:

1) Il valore del collateral non dipende solo dal fattore sistematico, ma anche dalla componente idiosincratica del rendimento dell'attivo dell'impresa debitrice, in modo da tenere conto del fatto che quando l'impresa si trova in difficoltà finanziarie tende a tagliare le spese di manutenzione e controllo delle attività a garanzia
2) Mentre Frye ha usato la distribuzione normale per modellare il valore delle garanzie, Pykhtin ha adottato la distribuzione lognormale, in modo da ottenere valori delle garanzie sempre positivi
3) Infine Pykhtin ha ottenuto un'espressione in forma chiusa per la perdita attesa e per il requisito patrimoniale nel caso di portafoglio infinitamente granulare

Dato un portafoglio di N crediti con ammontare dato da B_i per l'impresa i-esima, il peso del prestito sul totale è dato da

$$w_i = \frac{B_i}{\sum_{j=1}^{N} B_j}.$$

L'impresa fallisce entro un orizzonte temporale di un anno con probabilità PD_i; l'evento si verifica quando la variabile continua normale standard A_i (valore dell'attivo, come nel modello di Merton, oppure il rendimento standardizzato delle attività dell'impresa, ovvero ancora un generico score creditizio, nel caso più generale) diminuisce al di sotto di una specifica barriera, il cui valore è dato da

$$\Phi^{-1}(PD_i).$$

A_i dipende dal fattore comune Y e da componenti idiosincratiche ε_i, entrambe normali standard, in base al coefficiente di correlazione ρ_i:

$$A_i = \rho_i Y + \sqrt{1-\rho_i^2}\,\varepsilon_i.$$

La perdita (Q) in caso di default è data dal valore del collateral C, che si suppone abbia una distribuzione lognormale:

$$Q_i = \max(0;\, 1 - C_i),\ ove\ C_i = e^{\mu_i + \sigma_i S_i},$$

ove S è una variabile casuale normale standard interpretabile come rendimento continuo del collateral e Q e C sono espressi in unità di B.

Il valore del collateral dipende sia dallo stato dell'economia, sintetizzato dal fattore Y, sia dalla situazione specifica dell'impresa, sintetizzata dalla variabile A; quindi il rendimento continuo standardizzato del collateral può essere scritto

$$S_i = \beta_i Y + \gamma_i \varepsilon_i + \sqrt{1-\beta_i^2-\gamma_i^2}\,\eta_i, \text{ ove } \eta$$

è una variabile normale standard che cattura le componenti indipendenti dal fattore comune e dalla variabile A[21].

La perdita su crediti del portafoglio vale quindi

[21] Pykhtin ha giustamente sottolineato che quell'equazione è economicamente significativa solo se $\beta_i^2 + \gamma_i^2 \le 1\ e\ \gamma_i \le \frac{\rho_i}{\sqrt{1-\rho_i^2}}\beta_i$

$$L = \sum_{i=1}^{N} w_i L_i ,\ ove\ L_i = D_{A_i < \Phi^{-1}(PD_i)} Q_i ,$$

in cui D è una variabile indicatrice che vale 1 se si verifica l'evento default e 0 negli altri casi.

La simulazione Monte Carlo è lo strumento solitamente usato per generare la distribuzione delle perdite di portafoglio in base all'equazione precedente, ma nel caso in cui il portafoglio sia infinitamente granulare si può ottenere una soluzione in forma chiusa per qualsiasi percentile della distribuzione. Pykhtin ha calcolato la perdita attesa di portafoglio usando la legge delle aspettative iterate, condizionando rispetto al rendimento standardizzato del collateral S:

$$E(L_i) = E[E(L_i \mid S_i)] = \int_{-\infty}^{-\mu_i/\sigma_i} \Pr ob[A_i < \Phi^{-1}(PD_i) \mid S_i = s] * [1 - e^{\mu_i + \sigma_i s}] \phi(s) ds$$

$$ove\ \phi(s)\ è\ la\ densità\ di\ probabilità\ normale\ s\tan dard$$

La PD condizionale alla realizzazione di S_i è ricavabile dalla relazione tra A_i e S_i, in base al coefficiente di correlazione combinato (ρ^{AS}) che collega i singoli factor-loading:

$$\rho_i^{AS} = \rho_i \beta_i + \sqrt{1-\rho_i^2}\, \gamma_i ,$$

da cui A_i può essere espresso come combinazione lineare di S_i e di un termine indipendente ν:

$$A_i = \rho_i^{AS} S_i + \sqrt{1-(\rho_i^{AS})^2}\, \upsilon_i$$

e quindi la PD condizionata a S_i è:

$$PD_i(s) = \Pr ob\left[A_i < \Phi^{-1}(PD_i) \mid S_i\right] = \Phi\left[\frac{\Phi^{-1}(PD_i) - \rho_i^{AS} S_i}{\sqrt{1-(\rho_i^{AS})^2}}\right]$$

Sostituendo l'espressione della PD condizionata in quella della perdita attesa e calcolando l'integrale si ottiene:

$$E(L_i) = \Phi_2\left[\Phi^{-1}(PD_i); -\frac{\mu_i}{\sigma_i}; \rho_i^{AS}\right] - e^{\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}} * \Phi_2\left[\Phi^{-1}(PD_i) - \sigma_i \rho_i^{AS}; -\frac{\mu_i}{\sigma_i} - \sigma_i; \rho_i^{AS}\right]$$

ove Φ_2 indica la funzione cumulativa bivariata normale standard, calcolabile con un algoritmo numerico[22].

La distribuzione della perdita di un portafoglio infinitamente granulare, in cui la diversificazione elimina tutti i rischi idiosincratici, è calcolabile come limite per N che tende ad infinito e si riduce al tasso di perdita atteso condizionato al fattore sistematico:

$$L^{\infty} = E[L \mid Y] = \sum_{i}^{N} w_i E[L_i \mid Y] ,$$

ove la perdita i-esima condizionata ad Y è

$$E(L_i \mid Y) = \Phi_2\left[\frac{\Phi^{-1}(PD_i) - \rho_i Y}{\sqrt{1-\rho_i^2}}; \frac{-\mu_i/\sigma_i - \beta_i Y}{\sqrt{1-\beta_i^2}}; \frac{\gamma_i}{\sqrt{1-\beta_i^2}}\right] - e^{\mu_i + \sigma_i \beta_i Y + \frac{\sigma_i^2}{2}(1-\beta_i^2)} *$$

$$* \Phi_2\left[\frac{\Phi^{-1}(PD_i) - \rho_i Y}{\sqrt{1-\rho_i^2}} - \sigma_i \gamma_i; \frac{-\mu_i/\sigma_i - \beta_i Y}{\sqrt{1-\beta_i^2}} - \sigma_i \sqrt{1-\beta_i^2}; \frac{\gamma_i}{\sqrt{1-\beta_i^2}}\right]$$

[22] Si veda Vasicek 1998.

Sostituendo questa espressione nella sommatoria delle perdite individuali si ottiene in forma chiusa la perdita del portafoglio infinitamente granulare, da valutare con approssimazione numerica. Peraltro lo stesso Pykhtin ha ammesso che la calibrazione del modello è complessa e difficile.

Infine Pykhtin ha sottolineato una differenza importante tra la LGD attesa e il valore atteso della LGD potenziale: la variabile Q è in effetti la LGD potenziale che determina quale sarebbe la perdita su crediti nel caso si verificasse l'evento default, indipendentemente dal fatto che l'evento si sia verificato; come tale la LGD potenziale va accostata a tutte le imprese, sane ed insolventi. La LGD potenziale attesa vale:

$$E(Q_i) = \int_{-\infty}^{-\mu_i/\sigma_i} \left[1 - e^{\mu_i + \sigma_i s}\right] \phi(s)\,ds = \Phi\left(-\frac{\mu_i}{\sigma_i}\right) - e^{\mu_i + \frac{\sigma_i^2}{2}} * \Phi\left(-\frac{\mu_i}{\sigma_i} - \sigma_i\right)$$

Tale valore quindi non va interpretato come LGD attesa: quest'ultima invece è il valore atteso delle LGD potenziali condizionate al fatto che l'impresa sia diventata insolvente[23], ovvero:

$$\lambda_i = E\left[Q_i \mid A_i < \Phi^{-1}(PD_i)\right] = E\left[L_i \mid A_i < \Phi^{-1}(PD_i)\right] = \frac{E(L_i)}{PD_i}$$

Se Q_i è indipendente dai default le due equazioni danno lo stesso risultato, ma nel caso in cui vi sia una correlazione tra i fattori determinanti dei default e dei valori di recupero, le due equazioni forniscono risultati diversi.

Z.Wan e A.Dev[24] hanno proposto una variante del modello di Pykhtin, in cui la distribuzione del tasso di recovery è normale e la correlazione tra PD ed LGD viene definita con uno specifico parametro.

5 IL MODELLO DI TASCHE

D.Tasche[25] ha sviluppato un modello alternativo a quello di Pykhtin, critico sull'introduzione del concetto di LGD potenziale e sul ricorso alla correlazione aggiuntiva a quella già prevista dalla regulation di Basilea, resa necessaria per tenere conto della connessione tra PD ed LGD. Nel suo modello Tasche evita sia la LGD potenziale, sia l'uso di nuovi coefficienti di correlazione.

Tasche specifica la funzione di distribuzione di probabilità delle perdite (per unità di exposure) come segue:

$$F_L = \Pr ob[L \le t] = 1 - PD + PD * F_D(t)$$
$$ove\ L = perdita\ per\ unità\ di\ EAD$$
$$PD = \Pr ob[L > 0] = probabilità\ di\ default$$
$$1 - PD = probabilità\ di\ non\ avere\ perdite$$
$$F_D(t) = \Pr ob[L \le t \mid L > 0] = \frac{\Pr ob[0 < L \le t]}{PD}$$

[23] Ovvero è la media delle LGD osservate nel caso di default. In concreto è questo il caso che si verifica, infatti le LGD non sono osservabili per le società in bonis; la LGD potenziale è quindi una stima delle LGD applicabile alle società sane, calcolata a partire dalle uniche LGD osservabili, che sono quelle delle imprese andate in default.
[24] Si veda Wan, Dev 2007-2008.
[25] Si veda Tasche 2004.

Invertendo il calcolo della funzione di probabilità si ottiene il valore della perdita, espressa ricorrendo al noto framework di Basilea:

$$L = F_L^*(\Phi(\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\varepsilon)),$$
$$ove\ F_L^*\ è\ l'inversa\ generalizzata\ (ovvero\ la\ funzione\ quantile)\ di\ F_L,\ che\ nel\ caso$$
$$di\ \text{var}iabili\ continue\ e\ strettamente\ crescenti\ concide\ con\ F_L^* = F_L^{-1}$$
$$quindi\ L\ diventa$$
$$L = \begin{cases} 0 & se\ \sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\,\varepsilon \le \Phi^{-1}(1-PD) \\ F_D^*\left(\dfrac{\Phi(\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\varepsilon) - 1 + PD}{PD}\right) & negli\ altri\ casi \end{cases}$$
$$ovvero\ L = \left[\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\varepsilon > \Phi^{-1}(1-PD)\right] * \left[F_D^*\left(\frac{\Phi(\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\varepsilon) - 1 + PD}{PD}\right)\right]$$

in cui il primo termine rappresenta la PD ed il secondo la LGD.

La perdita attesa è pertanto uguale a

$$E(L) = PD * E(L \mid L > 0) = PD * \int_0^\infty t * F_D dt,$$

ove t è la variabile di integrazione.

Per la stima della F_D Tasche suggerisce il ricorso alla distribuzione Beta, i cui parametri sono ricavati dalla media e varianza delle LGD osservate sulle le società andate in default.

Con questa formulazione Tasche ha incorporato gli effetti della correlazione nello schema concettuale della regulation di Basilea utilizzando un solo parametro aggiuntivo: la volatilità della LGD. Peraltro, come ha messo in luce Hillebrand (2006) l'applicazione del modello di Tasche a dati empirici conduce ad una sottostima dei rischi a causa della relazione funzionale troppo debole tra PD ed LGD.

6 IL MODELLO DI HILLEBRAND

M.Hillebrand[26] ha sviluppato un modello che parte da alcuni risultati delle osservazioni empiriche sulle relazioni tra PD ed LGD e che incorpora l'idea che PD ed LGD, condizionate allo stato del ciclo economico, sono dipendenti ma non comonotoniche: la loro dipendenza dovrebbe quindi essere stocastica e non deterministica.

Il modello di Hillebrand si articola sui seguenti punti:

a) Sia dato un portafoglio omogeneo di N prestiti con EAD unitaria
b) La perdita sull'i-esimo credito, L_i, è funzione dell'evento default $D_i = I_{L_i > 0}$, ove I=funzione indicatrice, con PD_i=Prob(D_i=1), e della LGD_i, ove $LGD_i = L_i | D_i = 1$; quindi $L_i = LGD_i * I_{D_i=1}$
c) La perdita attesa sul singolo credito vale $E(L_i) = PD_i * E(LGD_i)$
d) Essendo il portafoglio omogeneo, con PD_i=PD e $E(LGD_i)$=E(LGD), la perdita a livello di portafoglio è pari a

   $$L^{(N)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} L_i$$

   e la perdita attesa è uguale a $E(L^{(N)}) = PD * \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} E(L_i \mid D = 1) = PD * E(LGD)$

[26] Si veda Hillebrand 2006.

e) PD ed LGD dipendono entrambe dal ciclo economico, sintetizzato dal fattore comune Y; nell'ambito dell'ipotesi di omogeneità del portafoglio $PD_i|Y=PD|Y$ e $LGD_i|Y=LGD|Y$. Pertanto E(L|Y=y) = Prob(D=1|Y=y) * E(L|D=1,Y=y) = PD(y)*E(LGD|Y=y) e quindi E(L|Y)=PD(Y)*E(LGD|Y)

f) Applicando il modello di Merton e utilizzando Vasicek,

$$PD(Y) = \Pr ob(\rho Y + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon \le \Phi^{-1}(PD)) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD)-\rho Y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right),$$

ove Φ^{-1}(PD) è la soglia di insolvenza, e ponendo $c = \frac{\Phi^{-1}(PD)}{\sqrt{1-\rho^2}}$ ed $e = \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}}$

si può scrivere PD(Y)=Φ(c-eY)

g) La variabile Y può a sua volta essere considerata come una combinazione lineare di k fattori sistematici: $Y = \sum_{j=1}^{k} w_j Y_j$, $con \sum_{j=1}^{k} w_j^2 = 1$

h) Come la PD, la LGD è fatta dipendere da una combinazione lineare di fattori sistematici, sintetizzati dalla variabile $Z = \sum_{j=1}^{k} v_j Y_j$, $con \sum_{j=1}^{k} v_j^2 = 1$.

Come per le PD, condizionatamente alle variabili Y e Z, le LGD sono indipendenti per tutti i crediti (per i=1,…, N).

i) Quindi si può esprimere con una funzione di Z la E(L|Y,Z)=PD(Y)*G(Z); se si applica anche a G(Z) la funzione probit Φ^{-1} si ottiene una funzione lineare come nel caso delle PD: G(z)=Φ(a-bz)[27]

j) I singoli k fattori Y_j sono considerati fattori latenti e quindi non osservabili, ma si può lavorare con le variabili aggregate Y e Z, collegandole tra loro tramite una ulteriore variabile X normale standard che rappresenta l'influenza aggregata del fattore sistematico su E(LGD|Z):

definendo d=cov(Y,Z) e $X = 1/\sqrt{1-d^2}(Z-dY)$, si può scrivere $Z = dY + \sqrt{1-d^2}X$

k) Quindi sostituendo G(Z) si ha $\Phi^{-1}(E(LGD\,|\,Z)) = a - bdY - b\sqrt{1-d^2}X$

l) Utilizzando la relazione tra PD ed Y si può ricavare $Y = \frac{c-\Phi^{-1}(PD(Y))}{e}$,

che sostituita nella trasformata probit della E(LGD|Z) ne determina la seguente espressione

$$\Phi^{-1}(E(LGD\,|\,Z)) = a - \frac{bdc}{e} + \frac{bd\Phi^{-1}(PD(Y))}{e} - b\sqrt{1-d^2}X.$$

Stimata econometricamente tale relazione lineare con esogena Φ^{-1}(PD(Y)) ha l'intercetta uguale ad [a-bdc/e], il coefficiente della esogena uguale a [bd/e], i residui X e lo scarto quadratico medio dei residui pari a $b\sqrt{1-d^2}$ [28]

m) Le stime del punto precedente possono essere impiegate nell'ambito di una simulazione Monte Carlo per la ricostruzione numerica della distribuzione delle perdite di portafoglio.

7 IL MODELLO DI SANCHEZ

Sanchez, Ordova, Martinez e Vega[29] hanno sviluppato il collegamento tra PD ed LGD utilizzando l'approccio della varianza condizionale, senza formulare ipotesi a priori sulla forma delle distribuzioni delle due variabili.

---

[27] Il valore della LGD downturn è calcolabile come E(LGD|Z=q)=Φ(a-bq), ove q è il quantile della normale standard corrispondente ad un intervallo di confidenza coerente con il valore del punto di downturn del ciclo.

[28] La sequenza della stima econometria è la seguente: prima si stimano c ed e, poi a, b e d.

[29] Si veda Sanchez et al. 2008.

Come nei modelli precedenti la PD condizionata è ottenuta dal riferimento ai modelli di Merton e Vasicek:

a) L'evento default è identificato con una variabile binaria indicatrice D che vale 1 se il logaritmo del valore delle attività è inferiore ad una certa soglia R (barriera di default): $D = 1_{A<R}$, *ove* $R = \Phi^{-1}(PD)$ e PD = probabilità di default non condizionata, che può essere espressa come $PD = E\left(I_{A<\Phi^{-1}(PD)}\right)$
b) La variabile A, normale standard, dipende da un fattore sistematico ed uno idiosincratico: $A = \rho Y + \sqrt{1-\rho^2}\,\varepsilon$
c) La PD condizionata è
$$PD(Y) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) - \rho Y}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$
che com'è noto genera il modello di copula gaussiana delle correlazioni tra i default
d) La PD non condizionata può quindi essere espressa in funzione di Y, come valore atteso rispetto al tutte le realizzazioni del fattore comune Y, ovvero
$$PD = E_Y[PD(Y)] = \int PD(y)\, f(y)dy$$
e) La perdita in caso di insolvenza è
$$L = EAD * LGD * I_{\rho Y + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon < \Phi^{-1}(PD)}$$
f) Anche per la LGD si fa riferimento ad un modello simile, con dipendenza da un fattore sistematico Z:
$E(LGD \mid Z) = \int_0^1 E(LGD) * g(LGD \mid Z)\, dE(LGD)$, ove g(LGD|Z) è la densità di probabilità della LGD rispetto ad un punto del fattore sistematico normale standard Z.
g) La LGD non condizionata è il valore atteso attraverso il ciclo e quindi vale $E(LGD) = E_Z\left[E[LGD \mid Z]\right] = \int E(LGD(z)) * f(z)\, dz$
h) Per semplicità l'EAD non ha dipendenza da Y o Z e quindi non è correlato con PD ed LGD
i) Per riprodurre lo stesso framework concettuale delle PD sulle LGD si suppone che esista un processo A^ che viene generato una volta che l'impresa sia andata in default, con $\hat{A} = \tau Z + \sqrt{1-\tau^2}\,\hat{\varepsilon}$ (tutte le variabili sono normali standard e la componente idiosincratica ε^ è ortogonale all'analoga componente ε delle PD. Quindi si può ottenere $E(LGD \mid Z) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(E(LGD)) - \tau Z}{\sqrt{1-\tau^2}}\right)$
j) Si può anche stabilire un certo grado di correlazione tra Y e Z con $Z = \eta Y + \sqrt{1-\eta^2}\,\varepsilon_Z$, ove la componente idiosincratica ε_Z è ortogonale rispetto a tutte le altre variabili
k) La perdita inattesa su crediti nel caso di variabili non correlate corrisponde alla varianza di L:
$$UL^2_{no\ correl} = \sigma^2_L = [E(EAD)]^2 * [E(LGD)]^2 * PD * (1-PD) + [E(EAD)]^2 * \sigma^2_{LGD} * PD$$
, ove PD(1-PD) è la varianza della variabile bernoulliana che descrive le PD.
l) Per considerare gli effetti della correlazione tra PD ed LGD si può far ricorso alla formula della varianza condizionale che consente di scomporre la varianza in due componenti: $\sigma^2_L = V(L) = E_X[V(L \mid X)] + V_X[E(L \mid X)]$, ove X è un generico fattore sistematico ed E_X[.] e V_X[.] sono il valore atteso e la varianza rispetto alla distribuzione

del fattore X. Nel caso specifico le variabili sistematiche sono Y per le PD e Z per le LGD e quindi la varianza condizionale della perdita inattesa è:

$$UL^2_{corr} = \sigma^2_L = E_{Z,Y}\left[E[LGD(Z)]^2 * PD(Y) * (1 - PD(Y)) + \sigma^2_{LGD(Z)} * PD(Y)\right] + $$
$$+ V_{Z,Y}\left[E(LGD(Z)) * PD(Y)\right]$$

in cui l'EAD è stata posta per semplicità uguale all'unità. Il primo termine è il valore atteso rispetto al ciclo economico della perdita inattesa in assenza di correlazioni, mentre il secondo termine (che si annulla in caso di assenza di correlazione tra PD ed LGD) rappresenta l'incertezza sulla media dovuta alle variazioni della perdita attesa rispetto ai fattori sistematici[30] $[\mu_{L(Z,Y)}]$.

m) Sommando i due termini e rendendone espliciti i calcoli, tenendo conto che si tratta di variabili normali standard, si ottiene la formula risolutiva finale seguente[31]:

$$\sigma^2_L = V(L) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\eta^2}} \int e^{-\frac{1}{2(1-\eta^2)}(z^2+y^2-2\eta zy)} \sigma^2_{L(z,y)} dzdy +$$
$$+ \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\eta^2}} \int e^{-\frac{1}{2(1-\eta^2)}(z^2+y^2-2\eta zy)} \mu^2_{L(z,y)} dzdy -$$
$$- \left[\frac{1}{2\pi\sqrt{1-\eta^2}} \int e^{-\frac{1}{2(1-\eta^2)}(z^2+y^2-2\eta zy)} \mu^2_{L(z,y)} dzdy\right]^2$$

ove gli integrali vanno valutati per via numerica. Si osservi che questo risultato è stato ottenuto senza aver specificato alcuna forma della distribuzione delle LGD, facendo ricorso solo alla loro media e varianza.

8 Il modello di Kim e Kim

J. Kim e K. Kim[32] hanno proposto un modello semplificato di connessione tra PD ed LGD che si basa sull'ipotesi che la LGD dipenda direttamente dalla PD tramite una specifica forma funzionale.

Come nei modelli precedenti, nell'ambito del framework di Basilea-Merton-Vasicek, il requisito regolamentare corrisponde a E(L|Y=q), ove L è la perdita su crediti, Y è il fattore sistematico e q è il quantile della normale standard corrispondente ad un intervallo di confidenza del 99.9%. Quindi ricorrendo alla PD condizionale si ha $E(L \mid Y = q) = \Pr ob(D = 1 \mid Y = q) * E(L \mid D = 1, Y = q)$, in cui il primo termine è la PD condizionale ed il secondo è la LGD condizionata allo stesso stato di stress del sistema economico (LGD downturn). La PD condizionale è come sempre uguale a $PD(Y = q) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho}\Phi^{-1}(q)}{\sqrt{1-\rho}}\right)$

Facendo un passo indietro, il rendimento delle attività dell'impresa è espresso come una variabile latente scritta in funzione della componente sistematica e di quella idiosincratica: AA=μ-bY+wε, in cui Y ed ε sono normali standard e $b^2 + w^2 = \sigma^2$. Se si ragiona invece in

[30] Il valore atteso non condizionato è il valore atteso calcolato sull'intero ciclo economico; la varianza non condizionata incorpora un termine extra che tiene conto dell'incertezza sulla media.
[31] Per l'estensione di quella formula all'intero portafoglio si rinvia al citato articolo.
[32] Si veda Kim, Kim 2006.

termini di rendimento standardizzato si ha $A = \frac{AA-\mu}{\sigma} = -\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\varepsilon,\ ove\ \sqrt{\rho} = \frac{b}{\sigma}$.
La PD può quindi essere intesa come probabilità che il rendimento standardizzato scenda al di sotto della barriera d'insolvenza (R): $PD = P(A \le R) = \Pr ob(-\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\varepsilon \le R)$; ponendo la barriera pari a Φ^{-1}(PD) e specificando Y=q si ottiene l'espressione consueta riportata sopra.

L'assunzione essenziale dei due studiosi riguarda l'interpretazione di A: non solo gioca un ruolo nel determinare se l'impresa diventerà insolvente, ma può anche essere considerata come una variabile che incorpora la capacità dell'impresa di rimborsare i debiti, dato il default (ability to pay debts given default); quindi minore è la ability-to-pay (A), maggiore è la perdita e quindi si può porre L=f(A). La perdita attesa può essere scritta come:
$E(L \mid Y = q) = \Pr ob(A \le R \mid Y = q) * E(f(A) \mid A \le R, Y = q)$, a sua volta la aspettativa condizionale della LGD può essere espressa come:
$E(f(-\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\varepsilon \mid -\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\varepsilon \le R,\ Y = q)$

Per calcolare il valore atteso della LGD condizionale quando si verifica l'evento default ed il fattore sistematico assume il valore regolamentare pari a q, occorre specificare la probabilità congiunta Prob(L=t, D=1, Y=q), che a sua volta può essere espressa in funzione del fattore sistematico e di quello specifico:
$E(f(-\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\varepsilon = f^{-1}(t),\ -\sqrt{\rho}Y + \sqrt{1-\rho}\varepsilon \le R,\ Y = q)$
E la probabilità condizionale P(L=t|D=1, Y=q) è pari a[33]:

$$P(A = f^{-1}(t) \mid A \le R,\ Y = q) = \frac{\phi\left(\frac{f^{-1}(t) + \sqrt{\rho}q}{\sqrt{1-\rho}}\right)}{\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho}q}{\sqrt{1-\rho}}\right)} \frac{1}{\sqrt{1-\rho}},\ per\ -\infty < f^{-1}(t) \le \Phi^{-1}(PD)$$

Quindi il valore atteso condizionale della LGD, dato Y=q, è:

$$E[f(A) \mid A \le R,\ Y = q] = \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(PD)} f(u) \frac{\phi\left(\frac{u + \sqrt{\rho}q}{\sqrt{1-\rho}}\right)}{\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + \sqrt{\rho}q}{\sqrt{1-\rho}}\right)} \frac{1}{\sqrt{1-\rho}} du$$

L'ultimo passo è la specificazione della forma funzionale della funzione f(A): i due studiosi propongono di ricorrere alla funzione Beta:

$$L = f(A) = Beta^{-1}\left(\frac{\Phi(R) - \Phi(A)}{\Phi(R)}\right),\ per\ A < R,\ essendo\ R = \Phi^{-1}(PD)$$

$e\ Beta^{-1}\ \text{è}\ l'inversa\ della\ funzione\ di\ distribuzione\ cumulativa\ della\ Beta$

[33] Per la dimostrazione si rinvia al w.p.

9 IL MODELLO DI MIU E OZDEMIR

P.Miu e B.Ozdemir[34] hanno messo in luce l'esistenza di più correlazioni tra PD e LGD: vi è una correlazione tra PD ed LGD sulla singola impresa ed una correlazione tra LGD (pairwise correlation) di un gruppo di imprese.

In generale si possono ritenere plausibili i seguenti punti:

1) Le LGD di diversi portafogli possono essere guidate da diversi fattori di rischio che seguono propri cicli e quindi l'entità della diversificazione sulle LGD può essere differente per diversi portafogli e diversi paesi [correlazione tra LGD di diverse imprese]
2) PD e LGD possono essere guidate da diversi fattori di rischio e quindi possono seguire propri cicli e quindi la loro correlazione può variare nel tempo [correlazione tra PD e LGD]
3) PD e LGD possono avere una relazione sfasata (lagging relationship), che dipende dai processi di recupero crediti della banca: alte PD possono pertanto non accompagnarsi a LGD elevate [correlazione tra PD e LGD]

Possono pertanto essere identificati quattro diversi elementi di correlazione:

a) Correlazione tra componenti sistematiche di PD e LGD per una data impresa
b) Correlazione tra componenti idiosincratiche di PD e LGD per una data impresa
c) Correlazione tra i risk drivers di PD tra diverse imprese
d) Correlazione tra i risk drivers di LGD tra diverse imprese

Siano P_t e L_t i fattori di rischio sistematici delle PD e delle LGD al tempo t, pilotati dal fattore comune Y_t in base alle seguenti relazioni:

$$\begin{cases} P_t = \beta_{PD} Y_t + \varepsilon_{PD,t} \\ L_t = \beta_{LGD} Y_t + \varepsilon_{LGD,t} \end{cases}$$

ove ε_{PD} e ε_{LGD} rappresentano i residui distribuiti normalmente, indipendenti da Y e tra di loro indipendenti; il loro scarto quadratico medio è tale che anche P_t e L_t seguono una normale. Tale framework è estensibile ad una struttura multifattoriale.

Per la i-esima impresa il driver dell'insolvenza (default driver) è funzione del fattore di rischio sistematico P_t e di una componente idiosincratica (fattore specifico) $e_{PD,t}$. Nell'ambito del modello di Merton il default driver (A_t) è interpretabile come variabile latente che è una funzione normalizzata del valore economico delle attività dell'impresa: $A_t^i = \rho_{PD} P_t + \sqrt{1-\rho_{PD}^2}\, e_{PD,t}^i$ ove ρ_{PD} misura la sensitività del rischio dell'impresa i-esima al rischio di credito sistematico; ρ_{PD}^2 rappresenta la pairwise correlation delle PD tra le imprese come risultato del fattore di rischio sistematico. L'impresa fallisce nel caso in cui la variabile latente A_t^i scenda al di sotto del punto di default (barriera R_i).

Nel caso della LGD si può impostare un modello simile: $LL_t^i = \rho_{LGD} L_t + \sqrt{1-\rho_{LGD}^2}\, e_{LGD,t}^i$, *in cui* ρ_{LGD}^2 è la pairwise correlation tra i rischi di LGD tra le imprese come risultato del fattore di rischio sistematico. LL_t^i è una trasformata normalizzata della distribuzione empirica delle LGD; gli autori utilizzano la distribuzione Beta per rappresentare la distribuzione empirica delle LGD[35].

[34] Si veda Miu, Ozdemir 2006.

[35] Ovvero

$LGD_t^i = BETAINV\left(\Phi(LL_t^i);\, a;\, b\right)$

Nell'ambito di uno schema semplificato, i coefficienti di correlazione ρ_{PD} e ρ_{LGD} sono uniformi tra le imprese.

La correlazione tra i rischi di default e quelli sulle LGD è quindi esprimibile come $corr(A_t^i, LL_t^i) = \beta_{PD}\beta_{LGD}\rho_{PD}\rho_{LGD}$

Come i due studiosi sottolineano, la correlazione tra PD ed LGD a livello di singola impresa non deriva solo da fattori sistematici, ma può provenire anche dalle componenti specifiche (fattori che influenzano il rischio della singola impresa e che non hanno nulla a che vedere con fattori comuni): nell'ambito del framework adottato dai due autori questa influenza è modellata consentendo che $e_{PD,t}$ e $e_{LGD,t}$ non siano indipendenti a livello d'impresa (ma siano invece indipendenti tra diverse imprese). Se x_t sono i fattori di rischio idiosincratici a livello delle singole imprese, per ipotesi normali standard, si può scrivere:

$\begin{cases} e_{PD,t}^i = \theta_{PD}^i x_t^i + \varepsilon_{PD,t}^i \\ e_{LGD,t}^i = \theta_{LGD}^i x_t^i + \varepsilon_{LGD,t}^i \end{cases}$, ove θ_{PD} e θ_{LGD} pilotano il grado di influenza di x_t su $e_{PD,t}$ e $e_{LGD,t}$, mentre ε_{PD} e ε_{LGD} sono residui indipendenti da x_t ed indipendenti tra loro, con distribuzione normale e con scarto quadratico medio tale da rendere distribuite normalmente anche le variabili $e_{PD,t}$ e $e_{LGD,t}$.

Considerando anche l'impatto delle componenti specifiche, la correlazione tra i rischi di default e delle LGD a livello della singola i-esima impresa diventa:

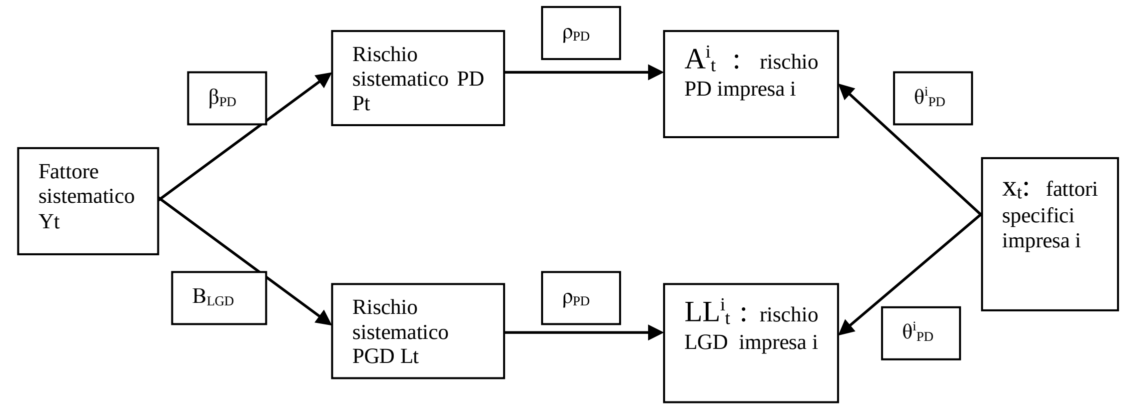
$corr(A_t^i, LL_t^i) = \beta_{PD}\beta_{LGD}\rho_{PD}\rho_{LGD} + \theta_{PD}^i\theta_{LGD}^i\sqrt{1-\rho_{PD}^2}\sqrt{1-\rho_{LGD}^2}$, in cui il primo termine rappresenta l'effetto delle componenti sistematiche, mentre il secondo individua l'effetto di quelle idiosincratiche[36].

Lo schema delle correlazioni del modello di Miu ed Ozdemir è riprodotto nel seguente grafico 4:

ove a e b sono i parametri della Beta ricavati dalla media e varianza della distribuzione delle LGD, e BETAINV è l'inversa della distribuzione cumulata della Beta. Da quella relazione deriva $LL_t^i = \Phi^{-1}[BETA(LGD_t^i;\, a;\, b)]$.

[36] Tanto maggiori i coefficienti di correlazione (ρ) dei fattori sistematici, tanto minore è l'impatto dei fattori specifici. Indipendentemente dai coefficienti di correlazione sui fattori macro vi è una correlazione nulla tra PD e LGD a livello d'impresa se uno od entrambi i β o θ sono nulli; ma ciò non implica che vi sia correlazione nulla tra le LGD di diverse imprese (che è governata da ρ_{LGD}).

Grafico 4: Struttura delle correlazioni



Dal punto di vista della struttura delle correlazioni il modello di Miu-Ozdemir è quello più articolato tra i molti proposti nella letteratura.

L'intero modello può essere simulato con i consueti metodi Monte Carlo dopo averne stimato i parametri.

10 IL MODELLO DI ROSCH ED AL

D.Rösch con altri studiosi[37] ha messo a punto un gruppo di modelli prevalentemente orientato alla stima econometria dei parametri che consentono di identificare la connessione tra PD e LGD.

Partendo dal modello di Frye, assumendo un portafoglio di imprese omogenee per quanto riguarda i parametri che regolano l'evento default, la PD condizionale alla realizzazione y_t del fattore comune Y_t è come al solito:

$$PD(y_t) = \Pr ob(D_{it} = 1 \mid Y_t = y_t) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) - \rho y_t}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$, con D = variabile indicatrice.

Il modello per il recovery rate (RR) fa riferimento ad un processo di tipo logistico $RR_{it} = \frac{e^{W_{it}}}{1+e^{W_{it}}}$, con $W_{it} = \mu + bX_t + Z_{it}$, ove X_t è un fattore sistematico normale standard ed i fattori idiosincratici Z_{it} hanno distribuzione normale con media nulla e varianza v^2 e sono indipendenti da X_t. W_{it} è la trasformata lineare del recovery rate coerente con il processo logistico. In un portafoglio omogeneo si ha $W_t = \frac{1}{N_t}\sum_{i=1}^{N_t} W_{it} = \mu + bX_t + \frac{1}{N_t}\sum_{i=1}^{N_t} Z_{it}$, *in cui* $Z_t = \frac{1}{N_t}\sum_{i=1}^{N_t} Z_{it}$ ha distribuzione normale con

[37] Si veda Rösch, Scheule 2005 e 2009 e Bade, Rösch, Scheule 2011.

media nulla e varianza $\frac{v^2}{N_t^2}$. Per N_t molto grande la varianza tende ad annullarsi[38] e quindi si può approssimare la trasformata del recovery rate medio $W_t \approx \mu + bX_t$.

W_t ha distribuzione normale con media μ e varianza b^2.

Il collegamento tra il processo di recovery e quello di default è formalizzato modellando la dipendenza dei due fattori sistematici: poiché Y_t e X_t hanno distribuzioni normali la dipendenza può essere modellata assumendo che congiuntamente essi abbiano una distribuzione normale bivariata[39] con correlazione $\rho_{PD,RR}$. Tale coefficiente è uguale ad 1 nel caso in cui il fattore sistematico sia comune alle PD ed al recovery rate (Y_t=X_t).

Questo primo modello si basa su fattori comuni latenti non direttamente osservabili. Per ridurre l'incertezza intorno alle stime tale modello può essere esteso ad una versione multifattoriale in cui alcuni fattori sistemici sono osservabili. Nella versione multifattoriale Rösch assume che la soglia di default fluttui nel tempo con il ciclo (ovvero il valore medio del fattore comune varia nel tempo). Tale variazione è introdotta con k fattori macroeconomici $(z_{t-1,j}^D \ \ per \ \ j = 1,..,k)$, osservati nei periodi precedenti. Quindi la PD condizionale diventa:

$$PD(z_{t-1}, y_t) = \Pr ob(D_{it} = 1 \mid z_{t-1}, y_t) = \Phi\left(\frac{\gamma_0 + \gamma' z_{t-1}^D - \hat{\rho} y_t}{\sqrt{1-\hat{\rho}^2}}\right)$$

$$ove \ \gamma_0 = \cos\tan te, \ \gamma' = vettore \ di \ sensitività \ ai \ k \ \ fattori \ osservabili \ (vettore \ z_{t-1}^D)$$
$$y_t = \ fattore \ latente, \ \hat{\rho} = correlazione \ tra \ \ fattore \ latente \ sistematico \ e \ default.$$

Il valore atteso non condizionale di questa PD condizionata al fattore Y non osservabile vale:

$$PD(z_{t-1}^D) = \int_{-\infty}^{+\infty} PD(z_{t-1}^D, y_t) d\Phi(y_t) = \Phi(\Phi^{-1}(\hat{P}\hat{D}) + \gamma' z_{t-1}^D)$$

$$in \ cui \ \Phi^{-1}(\hat{P}\hat{D}) \ è \ la \ nuova \ soglia \ di \ default \ calcolata \ rispetto \ al \ \mathrm{mod} ello \ multifattoriale$$

Allo stesso modo il processo dei recovery rate in chiave multifattoriale è esprimibile con:

$$\hat{W}_t = \beta_0 + \beta' z_{t-1}^{RR} + \hat{b} X_t, \ in \ cui \ \beta_0 = \cos\tan te \ e$$
$$\beta' = vettore \ di \ sensitività \ ai \ k \ \ fattori, \ che \ \ possono \ essere \ diversi \ da \ quelli$$
$$connessi \ al \ \ processo \ di \ default, \ \hat{b} = nuova \ sensitività \ al \ \ fattore \ latente \ X_t$$

A differenza della versione con un solo fattore non osservabile, il modello multifattoriale mette in luce valori medi del default e dei valori di recupero che fluttuano con le variazioni del sistema economico. Se il modello multifattoriale è corretto, il modello ad un fattore è mal specificato dal punto di vista econometrico.

La stima dei modelli con e senza variabili macroeconomiche osservabili può essere effettuata con la massima verosimiglianza:

[38]

$$\lim_{N_t \to \infty} \mathrm{var} ianza\left(\frac{1}{N_t}\sum_{i=1}^{N_t} Z_{it}\right) = 0$$

[39] Oppure si può ricorrere ad una copula.

a) Data la realizzazione del fattore $Y_t=y_t$ gli eventi di insolvenza sono indipendenti ed il numero dei default $D_t = \sum_{i=1}^{n_t} D_{it}$ è condizionalmente distribuito come una binomiale:

$$\Pr ob(D_t = d_t \mid y_t) = \begin{cases} \binom{n_t}{d_t}[PD(y_t)]^{d_t}[1-PD(y_t)]^{n_t-d_t}, \ per\ d_t = 0,1,..,n_t \\ 0\ altrimenti \end{cases}$$

b) Il vettore casuale (Y_t, W_t) è distribuito normalmente con:

$$\begin{pmatrix} Y_t \\ W_t \end{pmatrix} \approx \Phi\left[\begin{pmatrix} 0 \\ \mu \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & b\rho \\ b\rho & b^2 \end{pmatrix}\right]$$

c) Dalla legge delle aspettative condizionate, W_t ha una media condizionale di: $\mu(y_t)=E(W_t|y_t)=\mu+b\rho y_t$ ed una varianza condizionale di:

$$\sigma(y_t) = \sqrt{\sigma^2(W_t \mid y_t)} = b\sqrt{1-\rho^2}$$

d) Essendo condizionate, le variabili sono indipendenti e vale il prodotto delle probabilità e quindi la densità congiunta g(.) di d_t insolvenze ed un recovery rate trasformato w_t, dato y_t, è pari al prodotto della densità di w_t e della probabilità di d_t:

$$g(d_t, w_t \mid y_t) = \frac{1}{\sigma(y_t)\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{[w_t-\mu(y_t)]^2}{2[\sigma(y_t)]^2}\right]} * \binom{n_t}{d_t}[PD(y_t)]^{d_t}[1-PD(y_t)]^{n_t-d_t}$$

e) Poiché il fattore comune non è osservabile occorre valutare la densità non condizionale:

$$g(d_t, w_t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma(y_t)\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{[w_t-\mu(y_t)]^2}{2[\sigma(y_t)]^2}\right]} * \binom{n_t}{d_t}[PD(y_t)]^{d_t}[1-PD(y_t)]^{n_t-d_t}\ d\Phi(y_t)$$

f) La funzione di log-verosimiglianza non condizionata su T periodi è quindi:

$$l = \sum_{t=1}^{T} Ln\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma(y_t)\sqrt{2\pi}} e^{\left[-\frac{[w_t-\mu(y_t)]^2}{2[\sigma(y_t)]^2}\right]} * \binom{n_t}{d_t}[PD(y_t)]^{d_t}[1-PD(y_t)]^{n_t-d_t}\ d\Phi(y_t)\right)$$

g) Lo stesso approccio vale per il modello con i fattori macro con $PD(z_{t-1}^{D}, y_t)$ al posto di $PD(y_t)$ e $\beta_0 + \beta' z_{t-1}^{RR} + b\rho y_t$ al posto di $\mu(y_t)$.

In un modello successivo Rösch (2009) ha adottato una specificazione con distribuzione normale del recovery rate condizionale: $RR_t(X_t) = \Phi(\beta_0 + \beta z_{t-1}^{RR} + bX_t)$. Il tasso condizionale di LGD è pertanto $LGD_t(X_t) = 1 - \Phi(\beta_0 + \beta z_{t-1}^{RR} + bX_t)$. La LGD non condizionata è invece:

$$LGD_t = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\beta_0 + \beta z_{t-1}^{RR} + bx_t)\, d\Phi(x_t) = 1 - \Phi\left((\beta_0 + \beta z_{t-1}^{RR}) * \sqrt{\frac{1}{1+b^2}}\right)$$

A partire da quella relazione è possibile stimale la LGDdownturn adottando lo stesso quantile (q=0.999) specificato nella regolamentazione bancaria per la PD condizionata:

a) La LGDdownturn è $DLGD_t(y_t) = 1 - \Phi\left(\mu(y_t) * \sqrt{\frac{1}{1+[\sigma(y_t)]^2}}\right)$ in cui la media condizionata del tasso di recovery trasformato è $\mu(y_t) = \beta_0 + \beta z_{t-1}^{RR} + b\rho_{PD,RR} y_y$ e lo scarto quadratico medio condizionato è $\sigma(y_t) = b\sqrt{1-\rho_{PD.RR}^2}$

b) Quindi ponendo $y_t=\Phi^{-1}(0.999)$ si ha:
$$DLGD_t(y_t = \Phi^{-1}(0.999)) = \Phi\left((\Phi^{-1}(LGD_t) * \sqrt{1+b^2} + b\rho_{PD,RR}\Phi^{-1}(0.999)) * \sqrt{\frac{1}{1+b^2(1-\rho_{PD,RR}^2)}}\right)$$
in cui $\rho_{PD,RR}$
indica la correlazione tra i fattori sistematici che pilotano le PD ed i Recovery Rates.

Da ultimo Rösch, insieme a B.Bade, ed H.Scheule (2011), ha ripreso il modello di Pykhtin estendendolo per renderlo empiricamente stimabile. Il valore dell'attivo è come sempre modellato con una distribuzione log-normale che determina log-rendimenti normalmente distribuiti, esprimibili come:
$$A_{it} = -\left(\beta_0 + \beta' x_{it}^A + \sqrt{\rho^A} Y_t + \sqrt{1-\rho^A} Z_{it}^A\right),$$
ove x_{it}^A sono k fattori deterministici osservabili di tipo macroeconomico, settoriale o specifici della i-esima impresa, le cui sensitività sono quantificate dai parametri β; β_0 è una costante, Y è un fattore sistematico casuale che pilota i rendimenti delle attività di tutte le imprese e Z_{it}^A è una variabile casuale idiosincratica; ρ^A è la asset correlation. Y e Z sono normali standard ed anche A è distribuita normalmente con varianza unitaria. L'evento default si manifesta quando il rendimento delle attività scende al di sotto di una soglia, che in questo modello è posta uguale a zero, ovvero è assorbita nel parametro $-\beta_0$.

La PD_{it} è uguale alla $\Pr ob(D_{it} = 1 | x_{it}^A) = \Pr ob(A_{it} < 0 | x_{it}^A) = \Phi(\beta_0 + \beta' x_{it}^A)$, mentre la PD condizionata alla realizzazione del fattore comune Y è:
$$PD_{it}(y_t) = \Pr ob(D_{it} = 1 | x_{it}^A, y_t) = \Pr ob(A_{it} < 0 | x_{it}^A, y_t) = \Phi\left(\frac{\beta_0 + \beta' x_{it}^A + \sqrt{\rho^A} y_t}{\sqrt{1-\rho^A}}\right)$$

Il processo di recovery, come nel caso di Pykhtin, è espresso come:
$$W_{it} = \gamma_0 + \gamma' x_{it}^W - \sqrt{\rho^W} Y_t + \sigma U_{it},$$
ove x_{it}^W sono fattori deterministici osservabili che pilotano il tasso di recovery, con sensitività date dai coefficienti γ, mentre U_{it} è un termine di errore normale standard specifico e σ è un parametro costante. Il recovery rate è dato da $RR_{it} = e^{W_{it}}$ con distribuzione lognormale (si veda anche Pykhtin) e quindi $W_{it}=Ln(RR_{it})$.

La correlazione tra eventi di insolvenza e valori di recupero dipende dalla esposizione congiunta al fattore sistematico Y. Introducendo la correlazione aggiuntiva tramite il termine errore si ha:
$$U_{it} = \rho^U Z_{it}^A + \sqrt{1-(\rho^U)^2} Z_{it}^W,$$
in cui Z_{it}^W è una variabile casuale normale standard indipendente dalle altre variabili. Pertanto il recovery rate diventa:
$$W_{it} = \gamma_0 + \gamma' x_{it}^W - \sqrt{\rho^W} Y_t + \sigma\rho^U Z_{it}^A + \sigma\sqrt{1-(\rho^U)^2} Z_{it}^W.$$

Da tale equazione si può derivare la correlazione tra due log-recovery rates:

$\rho^{Ln(RR)} = \dfrac{\rho^W}{\rho^W + \sigma^2}$, mentre la correlazione tra recovery rates è $\rho^{RR} = \dfrac{e^{\rho^W} - 1}{e^{\rho^W + \sigma^2} - 1}$;
inoltre la correlazione tra rendimenti dell'attivo e log-recovery rate vale:

$$\rho^{AW} = \frac{\sqrt{\rho^A \rho^W} - \sigma\rho^U \sqrt{1-\rho^A}}{\sqrt{\rho^W + \sigma^2}}$$

e la correlazione tra i rendimenti dell'attivo ed i recovery rates è uguale a

$$\rho^{ARR} = \frac{\sqrt{\rho^A \rho^W} - \sigma\rho^U \sqrt{1-\rho^A}}{\sqrt{e^{\rho^W + \sigma^2} - 1}}$$

Sempre seguendo la metodologia di Pykhtin, Rösch ed i suoi coautori derivano in forma chiusa il calcolo del valore della perdita (L) attesa non condizionata:

$$EL_{it} = E(L_{it} \mid x_{it}^A, x_{it}^W) = \Phi_2\left(\beta_0 + \beta' x_{it}^A,\ -\frac{\gamma_0 + \gamma' x_{it}^W}{\sigma},\ \rho^{AW}\right) - e^{\gamma_0 + \gamma' x_{it}^W + \frac{\sigma^2}{2}} *$$

$$* \Phi_2\left(\beta_0 + \beta' x_{it}^A - \sigma\rho^{AW},\ -\frac{\gamma_0 + \gamma' x_{it}^W}{\sigma} - \sigma,\ \rho^{AW}\right)$$

ove $\Phi_2(.,.,.)$ indica la funzione di distribuzione della normale bivariata.

La perdita attesa condizionata al fattore di rischio sistematico, nel caso di portafoglio infinitamente granulare, è uguale a:

$$EL_{it}(Y = y_t) = E(L_{it} \mid x_{it}^A, x_{it}^W, y_t) = \Phi_2\left(\frac{\beta_0 + \beta' x_{it}^A + \sqrt{\rho^A} y_t}{\sqrt{1-\rho^A}},\ -\frac{\gamma_0 + \gamma' x_{it}^W - \sqrt{\rho^W} y_t}{\sigma},\ \rho^U\right) -$$

$$- e^{\gamma_0 + \gamma' x_{it}^W - \sqrt{\rho^W} y_t + \frac{\sigma^2}{2}} * \Phi_2\left(\frac{\beta_0 + \beta' x_{it}^A + \sqrt{\rho^A} y_t}{\sqrt{1-\rho^A}} + \sigma\rho^U,\ -\frac{\gamma_0 + \gamma' x_{it}^W - \sqrt{\rho^W} y_t}{\sigma} - \sigma,\ \rho^U\right)$$

Il VaR creditizio coerente con la regolamentazione bancaria si ha ponendo y_t pari al 99.9esimo percentile della normale standard.

Sotto il profilo econometrico la stima della correlazione tra default e recovery rate è complicata dal fatto che i valori di recupero sono empiricamente osservabili solo per le società andate in insolvenza; la stima isolata dell'equazione del recovery rate conduce quindi a stime distorte di γ_0 e del vettore γ'. La strategia migliore consiste nella stima congiunta delle due equazioni dei processi di default e di recovery. La procedura di stima che tiene conto della non osservabilità dei tassi di recovery per le impresa che non sono andate in default si rifà alla metodologia di J.Heckman[40].

Un modello molto simile a questo, con le stesse problematiche di stima econometrica congiunta di PD ed LGD, è stato sviluppato da A.Hamerle, M.Knapp e N.Wildenauer[41]. In tale modello i fattori esplicativi delle PD e delle LGD sono più articolati per quanto riguarda i fattori osservabili: in sintesi la PD condizionata è la solita specificazione probit scritta come

$$PD_{it}(y_t) = \Phi\left(\frac{\beta_0 + \beta' x_{i,t-1} + \gamma' z_{i,t-1} - \rho y_t}{\sqrt{1-\rho^2}}\right),$$

in cui y_t è il fattore comune non osservabile, x è un vettore di variabili specifiche dell'impresa (dimensione, forma legale,..) e z è un vettore di variabili macroeconomiche osservabili

[40] Si veda Heckman 1979 ed anche Bierens 2007.
[41] Si veda Hamerle ed al. 2007 e 2005.

(componenti osservabili del rischio di credito sistematico), come tassi di interesse, crescita PIL,..

La trasformata logit della LGD è

$$W_{jt} = Ln\frac{LGD_{jt}}{1-LGD_{jt}} = Ln\frac{1-RR_{jt}}{RR_{jt}} = -Ln\frac{RR_{jt}}{1-RR_{jt}},$$

la cui equazione è espressa come

$$W_{jt} = \alpha_0 + \alpha' v_{j,t-1} + \gamma_2' z_{2,t-1} + b_1 X_t + b_2 U_{jt},$$

ove v è un vettore di fattori specifici osservabili (rating, seniority, garanzie, scadenza,..), z_2 è un vettore di variabili macroeconomiche, che possono essere tutte diverse da quelle include nel processo che pilota le PD, X è un fattore di rischio sistematico ed U indica la componente specifica della LGD del credito j-esimo (X ed U sono normali standard indipendenti tra di loro; le U sono indipendenti tra i diversi crediti).

La stima separata della sola equazione della LGD conduce ad una sovrastima del tasso di perdita; tale sovrastima non si verifica solo se i fattori sistematici Y e X sono indipendenti. Per una valutazione corretta occorre procedere ad una stima congiunta dei due processi di insolvenza e di perdita in caso di default. Si rinvia all'articolo dei tre studiosi per i dettagli della costruzione della funzione di log-verosimiglianza.

Anche J.Witzany[42] ha sviluppato un modello di analisi della correlazione tra PD e LGD a partire da quello di Rösch e Scheule (2009). L'evento insolvenza è pilotato dalla dinamica della variabile A_{it} (logrendimenti dell'attivo oppure score creditizio o altra variabile descrittiva della situazione dell'impresa) distribuita secondo una normale:

$$A_{it} = -\gamma_0 - \gamma z_{i,t-1} + \rho Y_t + \sqrt{1-\rho^2}\,\varepsilon_{it}^D,$$

ove z è un vettore di variabili esplicative, Y è il fattore latente sistematico, ε è il fattore latente idiosincratico e ρ è la asset correlation. Condizionatamente alla realizzazione Y=y la PD condizionata vale:

$$PD(y_t) = \Phi\left(\frac{\gamma_0 + \gamma z_{i,t-1} - \rho y_t}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)$$

La PD condizionale ai fattori esplicativi ma non al fattore latente Y è data da:

$$PD(z_{i,t-1}) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\frac{\gamma_0 + \gamma z_{i,t-1} - \rho y_t}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)\phi(y_t)\,dy_t = \Phi\left[\frac{\left(\frac{\gamma_0 + \gamma z_{i,t-1}}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)}{\left(\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)}\right] = \Phi\left(\gamma_0 + \gamma z_{i,t-1}\right)$$ [43]

Pertanto la PD attesa è $PD = \Phi(\gamma_0 + \gamma z_{i,t-1})$, da cui $(\gamma_0 + \gamma z_{i,t-1}) = \Phi^{-1}(PD)$.

---

[42] Si veda Witzany 2013.

[43] *In generale, poichè* $\Phi(a+bx) = \Pr ob(Z < a+bx)$ *ove Z è una v.c. normale standard, l'integrale*

$\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(a+bx)\phi(x)dx$ *è uguale a* $\Pr ob(Z < a+bX)$ *ove X e Z sono normali standard indipendenti,*

e quindi $\int_{-\infty}^{\infty} \Phi(a+bx)\phi(x)dx = \Pr ob(Z < a+bX) = \Pr ob\left(\frac{Z-bX}{\sqrt{1+b^2}} < \frac{a}{\sqrt{1+b^2}}\right) = \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{1+b^2}}\right)$

essendo $\frac{Z-bX}{\sqrt{1+b^2}}$ *una normale standard*

Se si pone il fattore sistematico pari al quantile (1-α)=0.1%, ovvero $y_t = \Phi^{-1}(1-\alpha) = -\Phi^{-1}(\alpha)$, si ottiene la formula regolamentale della PD inattesa valutata al quantile q:

$$UPD(q=\alpha) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + \rho\Phi^{-1}(q)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right).$$

Il modello del recovery rate si basa sulla trasformata probit $RR_{it} = \Phi(W_{it})$, in cui la variabile (normalmente distribuita) W è scomposta in un vettore di fattori esplicativi ed in fattori latenti sistematico e idiosincratico:

$$W_{it} = \left(\beta_0 + \beta z_{i,t-1}^{RR} + bX_t\right)\sqrt{1+\sigma^2} + \sigma\varepsilon_{it}^{RR}.$$

Quindi il tasso di recupero condizionato al fattore sistematico è dato da:

$$RR(X_t) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left[\left(\beta_0 + \beta z_{i,t-1}^{RR} + bX_t\right)\sqrt{1+\sigma^2} + \sigma\varepsilon_{it}^{RR}\right]\phi(\varepsilon)d\varepsilon = \Phi(\beta_0 + \beta z_{i,t-1}^{RR} + bX_t).$$

Integrando rispetto al fattore sistematico si ottiene il tasso di recupero atteso:

$$E(RR) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\beta_0 + \beta z_{i,t-1}^{RR} + bX_t\right)\phi(X_t)dX_t = \Phi\left(\frac{\beta_0 + \beta z_{i,t-1}^{RR}}{\sqrt{1+b^2}}\right),$$

da cui si ricava il valore atteso della LGD:

$$1 - E(LGD) = \Phi\left(\frac{\beta_0 + \beta z_{i,t-1}^{RR}}{\sqrt{1+b^2}}\right), \textit{ ovvero } \left(\beta_0 + \beta z_{i,t-1}^{RR}\right) = -\Phi^{-1}(E(LGD))\sqrt{1+b^2}.$$

La LGDdownturn è calcolabile ponendo la realizzazione del fattore latente $X_t = x_t = \Phi^{-1}(1-\alpha)$,essendo α=99.9%:

$$LGDdownturn = 1 - \Phi\left(-\Phi^{-1}(E(LGD)) + b\Phi^{-1}(1-\alpha)\right) = \Phi\left(\Phi^{-1}(E(LGD)) + b\Phi^{-1}(\alpha)\right)$$

Questa LGDdownturn è definibile come LGD stand-alone.

Witzany sottolinea che sarebbe inconsistente moltiplicare la UPD (unexpected PD) per la LGDdownturn stand-alone: se i due fattori sistematici non fossero correlati, la scelta giusta sarebbe quella di moltiplicare la UPD per la E(LGD), mentre se i fattori sistematici fossero perfettamente correlati allora sarebbe giusto moltiplicare la UPD per la LGDdownturn stand-alone; per correlazioni intermedie si può procedere come proposto da Rösch e Scheule introducendo una correlazione tra i due fattori sistematici, definendo la perdita di portafoglio stressata (CL) come prodotto del tasso di default e della LGD condizionati solo al fattore sistematico degli eventi di insolvenza Y=y, ovvero $CL(y_t) = UPD(y_t) * LGDdownturn(y_t)$. Quindi se $\rho^{PD,RR}$ indica la correlazione tra i fattori sistematici Y ed X allora si può scrivere che il fattore X è esprimibile in funzione di Y e di una variabile normale standard (H) indipendente da Y: $X_t = \rho^{PD,RR}Y_t + \sqrt{1-\left(\rho^{PD,RR}\right)^2}H$.

Pertanto si ha:

$$LGDdownturn(y_t) = 1 - \int_{-\infty}^{\infty} \Phi\left(\beta_0 + \beta z_{t-1} + b\rho^{PD,RR}y_t + b\sqrt{1-\left(\rho^{PD,RR}\right)^2}h\right)\phi(h)dh =$$

$$= 1 - \Phi\left[\left(\beta_0 + \beta z_{t-1} + b\rho^{PD,RR}y_t\right)\sqrt{\frac{1}{1+b^2\left(1-\left(\rho^{PD,RR}\right)^2\right)}}\right]$$

Ponendo $y_t = -\Phi^{-1}(\alpha)$ si ottiene:

$$LGDdownturn(q=\alpha)=\Phi\left[\left(\Phi^{-1}(E(LGD))\sqrt{1+b^2}+b\rho^{PD,RR}\Phi^{-1}(\alpha)\right)\sqrt{\frac{1}{1+b^2\left(1-\left(\rho^{PD,RR}\right)^2\right)}}\right]$$

Tendo conto di questa espressione in forma chiusa della LGD downturn la formula regolamentare diventa[44]:

$$CL(\alpha)=\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD)+\rho\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)*$$

$$*\,\Phi\left[\left(\Phi^{-1}(LGD)\sqrt{1+b^2}+b\rho^{PD,RR}\Phi^{-1}(\alpha)\right)\sqrt{\frac{1}{1+b^2\left(1-\left(\rho^{PD,RR}\right)^2\right)}}\right]$$

Witzany, per la stima econometria congiunta delle due equazioni di PD e LGD, suggerisce di ricorrere all'approccio bayesiano, per i cui dettagli si rinvia al working paper dell'autore.

11 Il modello di Moody's

Moody's[45] ha sviluppato un approccio semplificato per tenere conto della correlazione tra PD ed LGD, modellando i processi che generano il rendimento sulle attività e il tasso di recupero come moti browniani geometrici correlati:

$$\frac{dA_t}{A_t}=\mu_A dt+\sigma_A dW_{A,t}$$

$$\frac{dRR_{T,t}}{RR_{T,t}}=\mu_{RR}dt+\sigma_{RR}dW_{RR,t}$$

ove T è tempo in cui si verifica l'insolvenza.

La correlazione istantanea tra W_A e W_{RR} è uguale a $\rho_{A,RR}$.

Le componenti casuali W_A e W_{RR} dei due processi sono determinate da fattori macroeconomici Y_A e Y_{RR} e da shock idiosincratici (ε_A e ε_{RR}) specifici delle singole imprese (ρ_A^2 *e* ρ_{RR}^2 sono i quadrati dei coefficienti di correlazione):

$$W_A=\rho_A Y_A+\sqrt{1-\rho_A^2}\,\varepsilon_A$$

$$W_{RR}=\rho_{RR}Y_{RR}+\sqrt{1-\rho_{RR}^2}\left(\rho_\varepsilon\varepsilon_A+\sqrt{1-\rho_\varepsilon^2}\,\varepsilon_{RR}\right)$$

Con tale formulazione lo shock idiosincratico sul rendimento delle attività ε_A genera un impatto anche sul processo del tasso di recupero.

I due processi sono correlati tra di loro in base ai fattori macroeconomici ed a quelli idiosincratici, ovvero[46]:

[44] In generale si ha che la perdita di portafoglio condizionata alla realizzazione dei fattori sistematici vale CL(Y,X)=UPD(Y)*LGDdownturn(X), data una struttura di correlazione tra Y ed X; la valutazione di tale perdita al quantile q=α richiede il ricorso alla simulazione Monte Carlo, non esistendo una formula in forma chiusa.

[45] Si veda Meng ed al. 2010 e Levy ed al. 2007.

[46] Le varianze di W_A e W_{RR} sono uguali ad 1, infatti:
$\sigma_{W_A}^2=E\left[\rho_A Y_A+\sqrt{1-\rho_A^2}\varepsilon_A-\rho_A E(Y_A)-\sqrt{1-\rho_A^2}E(\varepsilon_A)\right]^2=\rho_A^2+(\sqrt{1-\rho_A^2})^2=1$, essendo le due variabili macro ed idiosincratica normali standard con media nulla e varianza unitaria, tra di loro indipendenti; similmente:

$$\rho_{A,RR} = \rho_A * \rho_{RR} * corr(Y_A, Y_{RR}) + \sqrt{1-\rho_A^2} * \sqrt{1-\rho_{RR}^2} * \rho_\varepsilon$$

I logaritmi dei due processi hanno media e varianza rispettivamente pari a:

$\mu_A - \dfrac{\sigma_A}{2}$; σ_A; $\mu_{RR} - \dfrac{\sigma_{RR}}{2}$; σ_{RR}..

I due processi hanno la funzione di densità di probabilità normale bivariata uguale a:

$$PDF(A_T, RR_T) = \frac{1}{A_T}\frac{1}{RR_T}\frac{1}{2\pi\sigma_{RR}\sigma_A t\sqrt{1-\rho_{A,RR}^2}} e^{-z/2(1-\rho_{A,RR}^2)}, \textit{ ove}$$

$$z = \frac{\left(Ln\left(\frac{RR_T}{RR_0}\right) - \left(\mu_{RR}T - \frac{\sigma_{RR}^2 T}{2}\right)\right)^2}{\sigma_{RR}^2 T} -$$

$$-\frac{2\rho_{RR}\left(Ln\left(\frac{RR_T}{RR_0}\right) - \left(\mu_{RR}T - \frac{\sigma_{RR}^2 T}{2}\right)\right)\left(Ln\left(\frac{A_T}{A_0}\right) - \left(\mu_A T - \frac{\sigma_A^2 T}{2}\right)\right)}{\sigma_{RR}\,\sigma_A T} +$$

$$+\frac{\left(Ln\left(\frac{A_T}{A_0}\right) - \left(\mu_A T - \frac{\sigma_A^2 T}{2}\right)\right)^2}{\sigma_A^2 T}$$

La densità di probabilità del tasso di recupero condizionata all'evento che il rendimento delle attività tocchi il punto di default (DP) è pari a:

$$PDF\left(RR_T \mid A_T = DP\right) = \frac{PDF(RR_T, A_T = DP)}{PDF(A_T = DP)} = \frac{1}{RR_T}\frac{1}{\sigma_{RR}\sqrt{t}\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho_{A,RR}^2}} e^{-w/2}, \textit{ ove}$$

$$w = \frac{Ln\left(\frac{RR_T}{RR_0}\right) - \left(\mu_{RR}T - \frac{\sigma_{RR}^2 T}{2}\right) - \rho_{A,RR}\left(Ln\left(\frac{DP}{A_0}\right) - \left(\mu_A T - \frac{\sigma_A^2 T}{2}\right)\right)\sigma_{RR}/\sigma_A}{\sigma_{RR}\sqrt{T}\sqrt{1-\rho_{A,RR}^2}}$$

Il valore atteso del tasso di recupero è pertanto:

$$E\left(RR_t \mid A_t = DP\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\sigma_{RR}\sqrt{T}\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho_{A,RR}^2}} e^{-w/2}\,\partial RR_t, \textit{ ove}$$

$$w = \frac{Ln\left(\frac{RR_t}{RR_0}\right) - \left(\mu_{RR}T - \frac{\sigma_{RR}^2 T}{2}\right) - \rho_{A,RR}\left(Ln\left(\frac{DP}{A_0}\right) - \left(\mu_A T - \frac{\sigma_A^2 T}{2}\right)\right)\sigma_{RR}/\sigma_A}{\sigma_{RR}\sqrt{T}\sqrt{1-\rho_{A,RR}^2}}$$

L'integrale rappresenta il valore atteso di una variabile casuale lognormale con media e varianza uguali a:

$$\sigma_{W_{RR}}^2 = E\begin{bmatrix}\rho_{RR}Y_{RR} + \sqrt{1-\rho_{RR}^2}\,\rho_\varepsilon\,\varepsilon_A + \sqrt{1-\rho_{RR}^2}\sqrt{1-\rho_\varepsilon^2}\,\varepsilon_{RR} - \rho_{RR}E(Y_{RR}) - \sqrt{1-\rho_{RR}^2}\,\rho_\varepsilon E(\varepsilon_A) - \\ \sqrt{1-\rho_{RR}^2}\sqrt{1-\rho_\varepsilon^2}\,E(\varepsilon_{RR})\end{bmatrix}^2 =$$

$$\rho_{RR}^2 + (\sqrt{1-\rho_{RR}^2})^2\rho_\varepsilon^2 + (1-\rho_{RR}^2)(1-\rho_\varepsilon^2) = 1$$

Quindi il coefficiente di correlazione tra W_A e W_{RR}, calcolabile come rapporto tra covarianza e prodotto degli scarti quadratici medi, coincide con la covarianza tra W_A e W_{RR}, ovvero:

$$\mathrm{cov}(W_A, W_{RR}) = E\left[\left(\rho_A Y_A + \sqrt{1-\rho_A^2}\,\varepsilon_A\right)\left(\rho_{RR}Y_{RR} + \sqrt{1-\rho_{RR}^2}\,\rho_\varepsilon\varepsilon_A + \sqrt{1-\rho_{RR}^2}\sqrt{1-\rho_\varepsilon^2}\,\varepsilon_{RR}\right)\right] =$$

$= \rho_A\rho_{RR}\,\mathrm{cov}(Y_A, Y_{RR}) + \sqrt{1-\rho_A^2}\sqrt{1-\rho_{RR}^2}\,\rho_\varepsilon$, *essendo nulli i valori attesi, nulle le* $\mathrm{cov}(Y_A, \varepsilon_A)$, $\mathrm{cov}(Y_A, \varepsilon_{RR})$, $\mathrm{cov}(Y_{RR}, \varepsilon_A)$, $\mathrm{cov}(\varepsilon_A, \varepsilon_{RR})$.

Poichè le varianze *di* Y_A *e* Y_{RR} *sono uguali ad* 1, *la* $\mathrm{cov}(Y_A, Y_{RR})$ *è uguale alla* $corr(Y_A, Y_{RR})$

$$media = Ln(RR_0) + \left(\mu_{RR}T - \frac{\sigma_{RR}^2 T}{2}\right) + \rho_{A,RR}\left(Ln\left(\frac{DP}{A_0}\right) - \left(\mu_A T - \frac{\sigma_A^2 T}{2}\right)\right)\sigma_{RR}/\sigma_A$$

$$\mathrm{var}ianza = \sigma_{RR}\sqrt{T}\sqrt{1-\rho_{A,RR}^2}$$

Quindi il valore dell'integrale è:

$$\exp\left[Ln(RR_0) + \left(\mu_{RR}T - \frac{\sigma_{RR}^2 T}{2}\right) + \rho_{A,RR}\left(Ln\left(\frac{DP}{A_0}\right) - \left(\mu_A T - \frac{\sigma_A^2 T}{2}\right)\right)\sigma_{RR}/\sigma_A + \sigma_{RR}^2 T(1-\rho_{A,RR}^2)/2\right]$$

e pertanto calcolando gli esponenziali dei logaritmi e riscrivendo si ha:

$$E(RR_T \mid A_T = DP) = RR_0\left(\frac{DP}{A_0}\right)^{\rho_{A,RR}\sigma_{RR}/\sigma_A} \exp\left[\begin{array}{l}\left(\mu_{RR}T - \frac{\sigma_{RR}^2 t}{2}\right) - \rho_{A,RR}\left(\mu_A t - \frac{\sigma_A^2 T}{2}\right)\sigma_{RR}/\sigma_A + \\ + \sigma_{RR}^2 T(1-\rho_{A,RR}^2)/2\end{array}\right]$$

12 L'INSERIMENTO DELLA EAD STOCASTICA: I MODELLI DI KUPIEC, ECKERT E DI KAPOSTY

La naturale evoluzione dei modelli sulla connessione tra PD e LGD è stata quella di considerare anche la esposizione creditizia (EAD) come variabile non deterministica, alla stessa stregua delle altre due variabili. Com'è messo in luce nella letteratura scientifica in materia, la mancata considerazione della stocasticità dell'EAD conduce ad una sottostima dell'effettivo rischio di credito. Il trattamento di EAD non deterministiche è stato studiato da P. Kupiec (2008), il quale assume che EAD, PD e LGD siano pilotate simultaneamente da un fattore sistematico macroeconomico comune; oltre a Kupiec in questa sede vengono considerate due proposte recenti del 2016 e del 2017 di altri ricercatori.

P.Kupiec[47] ha esteso il modello a fattore singolo per incorporare una struttura di connessioni che collega PD, LGD ed EAD sia con riferimento a distribuzioni continue che discrete[48]; qui si considera solo il caso di distribuzioni continue.

Come nel modello ad un fattore, lo stato dell'impresa è descritto dalla variabile latente

$$A_i = \sqrt{\rho_A}Y + \sqrt{1-\rho_A}\varepsilon_{i,D},$$

scomposta come di consueto in un fattore sistematico ed uno idiosincratico, mentre la correlazione tra i fattori latenti delle imprese i e j è uguale a

$$\rho_A = \frac{\mathrm{cov}(A_i, A_j)}{\sigma(A_i)\sigma(A_j)}.$$

L'evento default si verifica quando il fattore latente A_i scende al di sotto della soglia R_i, che definisce la PD non condizionata: PD=Φ(Ri). La variabile indicatrice l_{Ri} vale 1 se $A_i<R_i$.

Per quanto riguarda l'EAD, all'inizio del periodo si ha una esposizione di $M_i d_{i,0}$, ove M = livello massimo di credito concesso e d = quota iniziale del credito utilizzato; 1-d indica quindi la quota di credito inutilizzato. L'EAD può essere espressa pertanto come

$$EAD_i = M(d_{i,0} + (1-d_{i,0})\delta_i)$$

ove δ, compreso tra 0 ed 1, definisce la quota del credito residuo disponibile che viene attinto dall'impresa nel corso del periodo; la funzione cumulativa di densità di δ è Ω(δ).

[47] Si veda Kupiec 2008.

[48] Può essere utile rammentare anche la proposta di R. Sen (2008) di utilizzare un approccio discreto per connettere PD ed LGD, con una descrizione non parametrica multi-stato del profilo della LGD. In questa sede non viene approfondita la metodologia di R. Sen.

La dipendenza sistematica tra i tassi di utilizzo del credito è implicitamente definita dall'assunzione che i tassi di utilizzo siano pilotati dal fattore normale Z:

$$Z_i = \sqrt{\rho_Z}Y + \sqrt{1-\rho_Z}\,\varepsilon_{i,Z} ,$$

ove la correlazione tra le variabili latenti dei tassi di utilizzo è

$$\rho_Z = \frac{\mathrm{cov}(Z_i, Z_j)}{\sigma(Z_i)\sigma(Z_j)},$$

mentre la correlazione tra default e tassi di utilizzo del credito è data da

$$\sqrt{\rho_A \rho_Z} = \frac{\mathrm{cov}(A_i, Z_j)}{\sigma(A_i)\sigma(Z_j)}.$$

Kupiec adotta l'ipotesi che vi sia una correlazione positiva tra default e tassi di utilizzo del credito (a maggiori tassi di utilizzo si accompagnano minori realizzazioni della variabile latente Z). La mappatura uno-a-uno tra Z e δ è $\delta_i = \Omega^{-1}[1-\Phi(Z_i)]$, a partire dalla $\Omega(\delta_i) = 1-\Phi(Z_i)$ che eguaglia le trasformazioni integrali di probabilità dei tassi di utilizzo e della variabile latente Z.

La LGD stocastica è modellata con la variabile λ_i compresa tra 0 ed 1 che rappresenta il tasso di perdita sul credito i-esimo. La $\Theta(\lambda_i)$ è la funzione di densità cumulata di λ_i. Come per le variabili precedenti la dipendenza sistematica tra i tassi di perdita è incorporata nella variabile latente normale $W_i = \sqrt{\rho_W}Y + \sqrt{1-\rho_W}\,\varepsilon_{i,W}$.
La correlazione tra i fattori latenti che pilotano gli eventi default e la LGD è $\sqrt{\rho_A \rho_W} > 0$,
mentre quella tra i fattori latenti della LGD e dell'EAD è $\sqrt{\rho_Z \rho_W} > 0$.
La mappatura tra λ e W usando la trasformazione integrale inversa è

$$\lambda_i = \Theta^{-1}[1-\Phi(W_i)],\ a\ \ partire\ \ da\ \ \Theta(\lambda_i) = 1-\Phi(W_i).$$

Il tasso di perdita per il credito i-esimo calcolato rispetto all'ammontare concesso M_i è:

$$\Lambda(A_i, Z_i, W_i) = l_{R_i}(A_i) * (d_{i,0} + (1-d_{i,0})\delta_i) * \lambda_i =$$
$$= l_{R_i}(A_i) * \left(d_{i,0} + (1-d_{i,0})\Omega^{-1}[1-\Phi(Z_i)]\right) * \Theta^{-1}[1-\Phi(W_i)]$$

La perdita condizionale alla realizzazione del fattore comune Y=y è:

$$\Lambda(A_i, Z_i, W_i \mid y) = l_{R_i}(A_i \mid y) * \left(d_{i,0} + (1-d_{i,0})\Omega^{-1}[1-\Phi(Z_i \mid y)]\right) * \Theta^{-1}[1-\Phi(W_i \mid y)],\ \text{ove}$$

$$E[l_{R_i}(A_i \mid y)] = \Phi\left(\frac{R_i - \sqrt{\rho_A}\,y}{\sqrt{1-\rho_A}}\right)$$

$$Z_i \mid y = tasso\ utilizzo\ condizionato\ a\ Y = y,\ con\ distribuzione\ normale$$
$$con\ media\ E(Z_i \mid y) = \sqrt{\rho_Z}\,y\ e\ \mathrm{var}ianza\ \sigma^2(Z_i \mid y) = 1-\rho_Z$$
$$W_i \mid y = LGD\ latente\ condizionata\ a\ Y = y,\ con\ distribuzione\ normale$$
$$con\ media\ E(W_i \mid y) = \sqrt{\rho_W}\,y\ e\ \mathrm{var}ianza\ \sigma^2(W_i \mid y) = 1-\rho_W$$

Le distribuzioni di probabilità cumulative condizionate alla realizzazione del fattore comune Y sono rispettivamente per Z e W:

$$\Phi(Z_i \mid y) = \Phi\left(\frac{Z_i - \sqrt{\rho_Z}\,y}{\sqrt{1-\rho_Z}}\right);\ \Phi(W_i \mid y) = \Phi\left(\frac{W_i - \sqrt{\rho_W}\,y}{\sqrt{1-\rho_W}}\right)$$

La perdita su crediti in un portafoglio asintotico di N crediti omogenei[49], condizionata alla realizzazione Y=y, è calcolabile come segue:

$$\Lambda_P(A,Z,W \mid y) = \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} \Lambda(A_i, Z_i, W_i \mid y)}{N} \right);$$

poiché condizionatamente a Y=y le perdite del credito i-esimo e di quello j-esimo sono indipendenti e che le distribuzioni delle perdite condizionate dei singoli crediti sono identiche, la legge dei grandi numeri richiede che

$$\lim_{N\to\infty} \Lambda_P(A,Z,W \mid y) = \lim_{N\to\infty} \left(\frac{\sum_{i=1}^{N} \Lambda(A_i, Z_i, W_i \mid y}{N} \right) \to E[\Lambda(A_i, Z_i, W_i \mid y], \; con \;\; probabilità \; 1$$

L'indipendenza tra le funzioni condizionali determina che

$$\lim_{N\to\infty} \Lambda_P(A,Z,W \mid y) = \Phi\left(\frac{R - \sqrt{\rho_A}\, y}{\sqrt{1-\rho_A}} \right) * \left[d_0 + (1-d_0) E\left(\Omega^{-1}(1-\Phi(Z_i \mid y))\right)\right] * E\left[\Theta^{-1}(1-\Phi(W_i \mid y))\right]$$

Tale equazione valutata per y = $\Phi^{-1}(1-\alpha) = -\Phi^{-1}(\alpha)$ e ponendo R = $\Phi^{-1}(PD)$ diventa:

$$\lim_{N\to\infty} \Lambda_P(A,Z,W \mid y = \Phi^{-1}(1-\alpha)) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) - \sqrt{\rho_A}\,\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1-\rho_A}} \right) *$$

$$* \left[d_0 + (1-d_0) E\left(\Omega^{-1}(1-\Phi(Z_i \mid y = -\Phi^{-1}(\alpha)))\right)\right] * E\left[\Theta^{-1}(1-\Phi(W_i \mid y = -\Phi^{-1}(\alpha)))\right]$$

J. Ecker, K. Jacob e M. Fischer[50] hanno esteso i modelli di Pykhtin e di Miu e Ozdemir inserendo la EAD stocastica nello schema concettuale comprendente già PD e LGD stocastiche.

Seguendo l'impostazione indicata nella regolamentazione di Basilea, la EAD corrisponde alla somma dell'importo utilizzato (drawn amount) del credito concesso e di una quota della parte non utilizzata (undrawn amount); la quota è definita credit conversion factor (CCF)[51]. La seconda componente è essenziale per tenere conto che l'effettiva esposizione al momento del default non è nota a priori e che va stimata in modo prudenziale alla luce dei potenziali ulteriori prelievi che l'impresa debitrice potrà ancora effettuare. È esperienza comune infatti che l'impresa che di lì a poco andrà in default preleva più massicciamente dalle linee di credito rispetto ad un'impresa in condizioni di normale funzionamento: l'impresa in difficoltà attinge a tutte le risorse disponibili con l'intento di scongiurare o ritardare l'insolvenza.

EAD=drawn amount + CCF*undrawn amount

In alternativa, considerando l'intero ammontare del credito concesso, l'EAD può essere definito come: EAD=whole commitment*utilization rate at default = Com*URD

Gli autori usano la variabile URD come driver stocastico per rendere non deterministica l'EAD.

[49] Con lo stesso valore di M, d_0, R, δ, λ, PD e $\rho_{A,Z,W}$.
[50] Si veda Eckert, Jakob, Fischer 2016.
[51] Oppure usage-given-default (UGF).

Per la LGD[52] gli autori adottano lo schema di Pykhtin relativo al concetto di LGD potenziale, ovvero perdita che potenzialmente riguarda anche le imprese non andate in default, anche se è osservabile solo in quelle insolventi. Questo approccio conduce a far dipendere la LGD anche dalla PD; tale dipendenza, com'è stato anticipato in precedenza, può essere individuata con stime econometriche alla Heckman.

Il default driver è (come negli altri modelli)

$$A_{it} = \Phi^{-1}(PD_{it}) - (\rho Y_t^A + \sqrt{1-\rho^2}\varepsilon_{it}^A)$$

con Y e ε variabili normali standard; $\Phi^{-1}(PD_{it})$ è la soglia deterministica dell'evento insolvenza; il termine nella seconda parentesi è il logrendimento standardizzato dell'attivo. Con questa formulazione viene posta pari a zero la soglia di insolvenza e quindi l'impresa fallisce se A_{it} supera lo zero. La variabile indicatrice D_{it} assume il valore 1 se $A_{it}>0$ e 0 altrimenti. La PD condizionata alla realizzazione $Y=y_t^A$ è uguale a:

$$PD_{it}(y_t^A) = \Pr ob(D_{it} = 1 \mid Y_t^A = y_t^A) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD_{it}) - \rho y_t}{\sqrt{1-\rho^2}}\right).$$

Il fattore sistematico è a sua volta scomposto in un fattore sistematico X_t che influenza i fattori sistematici di tutti i parametri di rischio ed un fattore sistematico Z_t^A che influenza solo il fattore sistematico del rischio di insolvenza:

$$Y_t^A = \theta_A X_t + \sqrt{1-\theta_A^2} Z_t^A,$$

in cui θ cattura la sensitività del fattore sistematico Y al fattore sistematico X. I fattori X e Z sono normali standard indipendenti e quindi anche Y ha distribuzione normale standard.

Lo stesso schema è applicato anche alla variabile URD che determina la EAD:

$B_{it} = \beta Y_t^B + \sqrt{1-\beta^2} I_{it}^B$, ove Y_t^B

è fattore sistematico e I_{it}^B è il fattore idiosincratico; entrambi i fattori sono normali standard indipendenti. La variabile B è interpretabile come la trasformazione dell'URD in una variabile normale standard: ponendo F_{URD} la funzione di distribuzione cumulativa dell'URD dell'impresa i al tempo t, l'URD può essere espressa come

$$URD_{it} = F^*_{URD_{it}}(\Phi(B_{it})),$$

ove F* è la funzione quantile. Il fattore sistematico Y^B è suddiviso in due componenti:

$$Y_t^B = \theta_B X_t + \sqrt{1-\theta_B^2} Z_t^B.$$

Il primo fattore X è quello comune a tutti i fattori sistematici dei rischi, mentre Z^B è il fattore sistematico che influisce solo sulle EAD. Il fattore idiosincratico I^B può essere a sua volta scomposto in

$$I_{it}^B = \rho_B \varepsilon_{it}^A + \sqrt{1-\rho_B^2} \varepsilon_{it}^B:$$

il parametro ρ_B governa quanta parte del fattore idiosincratico I^B è influenzato dal fattore idiosincratico ε_A che è pervasivo su tutti i fattori idiosincratici.

Il recovery rate[53] è modellato con la trasformata C del tasso di recupero con lo stesso approccio visto sopra:

[52] Gli autori distinguono in modo più articolato rispetto a Pykhtin tra secured recovery rate (che riguarda il recupero dalle garanzie) e l'unsecured recovery rate.
[53] In questa sede il modello di Eckert ed al. viene semplificato, non distinguendo tra recovery rate secured ed unsecured.

$$C_{it} = \gamma Y_t^C + \sqrt{1-\gamma^2} U_{it}^C$$
$$Y_t^C = \theta_C X_t + \sqrt{1-\theta_C^2} Z_t^C$$
$$U_{it}^C = \rho_C \varepsilon_{it}^A + \sqrt{1-\rho_C^2} \varepsilon_{it}^C$$

I risk drivers A, B e C seguono una distribuzione normale multivariata con media $(\Phi^{-1}(PD_{it}),0,0,0)$ e covarianze tratte dalle combinazioni delle correlazioni tra le variabili.

Il procedimento per la stima econometrica dei parametri suggerita dai tre autori si rifà all'approccio di Bade, Rösch e Scheule.

F. Kaposty, M. Löderbusch e J. Maciag[54] hanno esteso i risultati di Miu-Ozdemir e di Kupiec nell'ambito di un modello multifattoriale di variabili latenti. Come sempre la variabile indicatrice dell'evento default (D_i) vale 1 se la variabile latente (A_i) che descrive la situazione dell'impresa (interpretabile come rendimenti standardizzati delle attività) è uguale o scende al di sotto della soglia di insolvenza (R_i) ad un orizzonte predefinito:

$$D_i = \begin{cases} 1 \; se \; A_{i,PD} \le R_i \\ 0 \; negli \; altri \; casi \end{cases},$$

ove R_i è definito in modo che la probabilità di superare soglia di insolvenza sia uguale a PD_i, ovvero $R_i = \Phi^{-1}(PD_i)$

Seguendo Miu e Ozdemir, i tre studiosi specificano la variabile latente che descrive il processo di insolvenza come:

$$A_{i,PD} = \rho_{i,PD}\left(\beta_{PD} Y + \sqrt{1-\beta_{PD}^2} X_{PD}\right) + \sqrt{1-\rho_{i,PD}^2}\left(\theta_{i,PD} I_i + \sqrt{1-\theta_{i,PD}^2}\varepsilon_{i,PD}\right),$$

ove tutte le variabili sono normali standard tra loro indipendenti. Il termine all'interno della prima parentesi è il fattore sistematico, scomposto in un fattore sistematico generale (pervasivo) (Y) che influenza anche i rischi su LGD ed EAD ed un fattore sistematico (X) che è rilevante solo per i rendimenti standardizzati sull'attivo di tutte le imprese (influenza solo i processi di insolvenza). La seconda parentesi riguarda il termine idiosincratico, specifico della singola impresa, ed è scomposto in un fattore (I) che influisce sia sulla PD che su LGD e EAD ed un secondo fattore (ε) che è specifico dei rendimenti che governano il processo di default.

I parametri ρ, β e θ (compresi tra 0 ed 1) sono le sensitività che collegano direttamente od indirettamente i diversi fattori alla variabile latente A.

Con la stessa impostazione, la LGD è modellata con la variabile latente:

$$A_{i,LGD} = \rho_{i,LGD}\left(\beta_{LGD} Y + \sqrt{1-\beta_{LGD}^2} X_{LGD}\right) + \sqrt{1-\rho_{i,LGD}^2}\left(\theta_{i,LGD} I_i + \sqrt{1-\theta_{i,LGD}^2}\varepsilon_{i,LGD}\right),$$ in cui le variabili tra parentesi svolgono un ruolo analogo a quello descritto per le PD.

La distribuzione della LGD è modellata con una Beta tramite la quantile-transformation (o Beta inversa). Come in Pykhtin, i tre autori adottano il concetto di LGD potenziale, applicabile a tutte le imprese e non solo a quella insolventi. Se si ipotizza che vi sia una correlazione non nulla tra $A_{i,PD}$ e $A_{i,LGD}$ la media e varianza della LGD delle imprese che sono andate in default non coincide con media e varianza della LGD potenziale: la media e varianza delle LGD condizionate al default sono

[54] Si veda Kaposty, Löderbusch, Maciag 2017.

$$\begin{cases} E(A_{i,LGD} \mid D_i = 1) = -corr(A_{i,PD}; A_{i,LGD}) \dfrac{\phi(R_i)}{PD_i} \\ VAR(A_{i,LGD} \mid D_i = 1) = 1 - corr(A_{i,PD}; A_{i,LGD})^2 \left(R_i \dfrac{\phi(R_i)}{PD_i} + \left(\dfrac{\phi(R_i)}{PD_i} \right)^2 \right) \end{cases},$$

ove $\phi(.)$ è la densità della distribuzione normale standard. Per evitare di usare LGD distorte gli autori standardizzano la variabile latente per la LGD con i primi due momenti condizionati al default, così che la LGD^ è data da:

$$\hat{L}\hat{G}\hat{D} = B^{-1}\left(1 - \Phi\left(\frac{A_{i,LGD} - E(A_{i,LGD} \mid D_i = 1)}{\sqrt{VAR(A_{i,LGD} \mid D_i = 1)}}\right); a_{i,LGD}; b_{i,LGD}\right),$$

ove a e b sono i parametri della distribuzione Beta e B^{-1} indica la Beta inversa.

L'EAD stocastica è modellata utilizzando una variabile casuale: il loan equivalent factor (LEQ), che consente di individuare la quota del margine inutilizzato del credito che potrebbe essere prelevato dall'impresa in un certo orizzonte temporale; come proposto da Kupiec:

$$EAD_i = M_i (G_i + (1 - G_i) LEQ_i),$$

ove M = ammontare complessivo del credito concesso, G = quota del credito utilizzata, 1-G = quota inutilizzata.

L'equazione che specifica i fattori sistematici ed idiosincratici dell'EAD è la seguente, analoga alle precedenti riguardanti PD e LGD:

$$A_{i,LEQ} = \rho_{i,LEQ}\left(\beta_{LEQ} Y + \sqrt{1 - \beta_{LEQ}^2} X_{LEQ}\right) + \sqrt{1 - \rho_{i,LEQ}^2}\left(\theta_{i,LEQ} I_i + \sqrt{1 - \theta_{i,LEQ}^2} \varepsilon_{i,LEQ}\right)$$

Anche la variabile LEQ è modellata con la distribuzione Beta, con media e varianza specifiche delle singole imprese pari a $\mu_{i,LEQ}$ e $\sigma_{i,LEQ}^2$. Usando la trasformata quantile (ovvero Beta inversa) si può ricavare la variabile LEQ aggiustata:

$$\hat{L}\hat{E}\hat{Q} = B^{-1}\left(1 - \Phi\left(\frac{A_{i,LEQ} - E(A_{i,LEQ} \mid D_i = 1)}{\sqrt{VAR(A_{i,LEQ} \mid D_i = 1)}}\right); a_{i,LEQ}; b_{i,LEQ}\right).$$

Con questa definizione la variabile LEQ è compresa tra 0 ed 1, ovvero non sono considerati sconfinamenti oltre la soglia massima del credito concesso (caso LEQ=1), mentre il valore minimo dell'EAD corrisponde all'utilizzo già attinto (caso LEQ=0).

La perdita sul credito i-esimo è quindi $L_i = EAD_i * LGD_i * D_i$, mentre la perdita di portafoglio è

$$L_P = \sum_{i=1}^{N} L_i .$$

Se si fa riferimento alla regolamentazione bancaria il VaR al quantile q=α è calcolabile come segue nel caso di portafoglio eterogeneo:

$$VaR_{q=\alpha} = \sum_{i=1}^{N} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD_i) + \rho_{i,PD}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1 - \rho_{i,PD}^2}}\right) * LGDdownturn_i * EADdownturn_i$$

e nel caso di portafoglio omogeneo, con crediti identici:

$$VaR_{q=\alpha} = N * \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD) + \rho_{PD}\Phi^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1 - \rho_{PD}^2}}\right) * LGDdownturn * EADdownturn$$

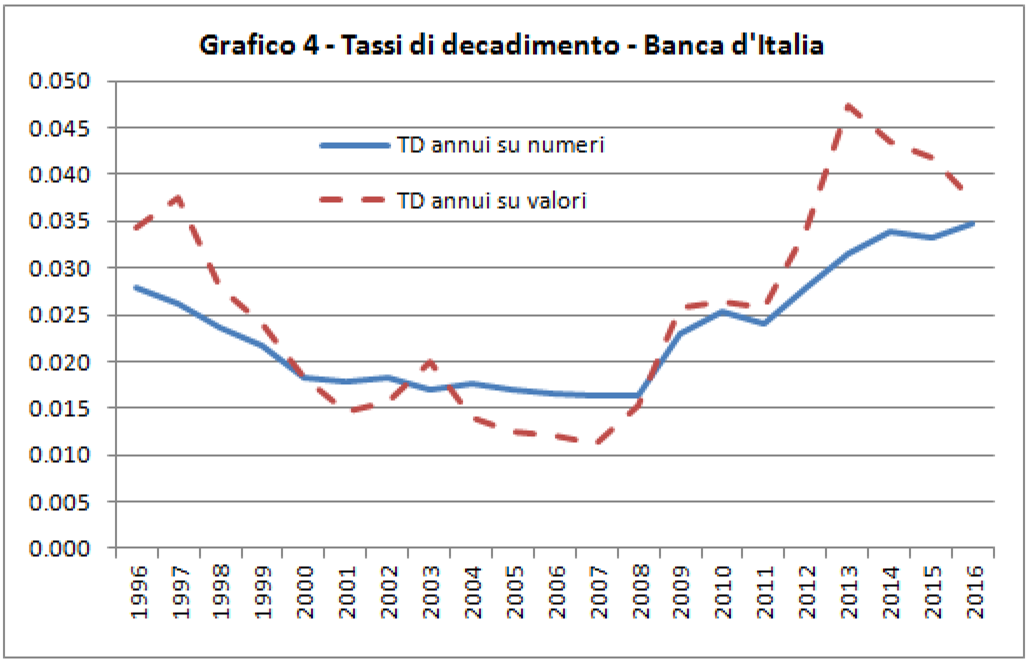
Kaposty, Löderbusch e Maciag non hanno tentato di stimare econometricamente il sistema di equazioni ma hanno utilizzato la simulazione Monte Carlo per valutare l'impatto delle tre tipologie di rischi che influiscono sulle perdite, utilizzando valori dei parametri tratti da altre ricerche.

13 PD ED LGD NELLE STATISTICHE DELLA BANCA D'ITALIA

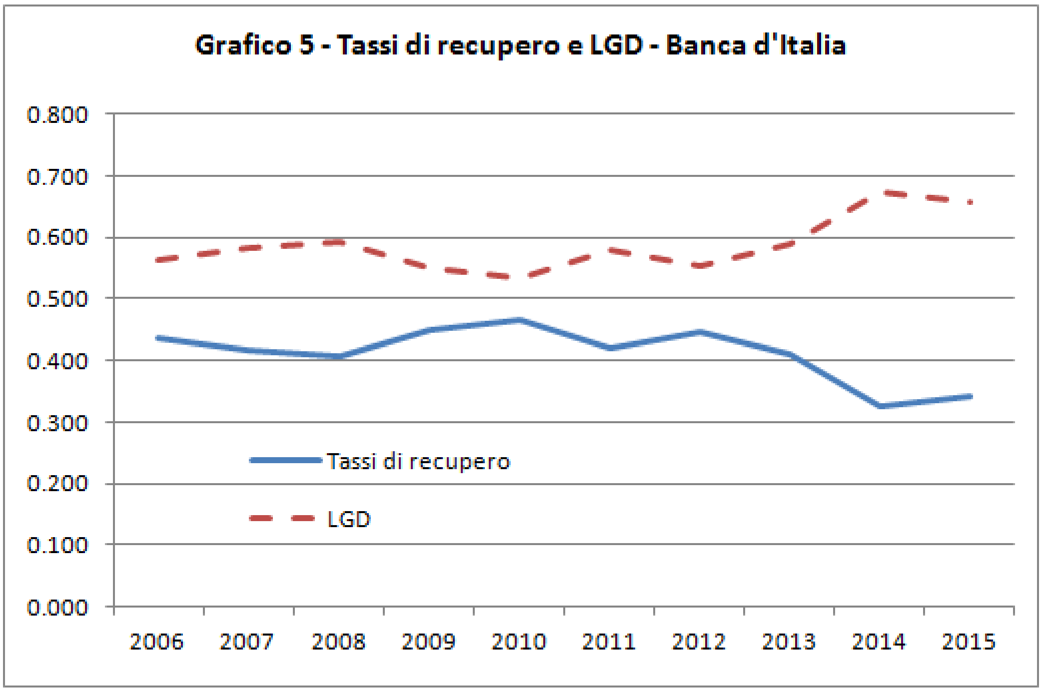
I dati ufficiali resi disponibili dalla Banca d'Italia riguardano informazioni aggregate sui tassi di decadimento trimestrali sui finanziamenti per cassa[55], ma non si estendono a fornire la situazione analitica del portafoglio crediti complessiva del sistema bancario (per classi di rischio, ad esempio). La tabella 1 riporta i tassi di decadimento[56] annui, ricostruiti dai tassi trimestrali, sia sul numero dei soggetti censiti, sia sul valore dei finanziamenti. Il grafico 4 ne riproduce gli andamenti. Come si vede chiaramente dal grafico i tassi dei primi anni della serie sono molto elevati, con ordini di grandezza confrontabili con gli anni della recente doppia crisi: è molto probabile che agli inizi della rilevazione dei tassi di decadimento le banche segnalanti abbiano considerato i dati di consistenza delle sofferenze al posto di dati sui flussi di nuove sofferenze del periodo, facendo emergere tassi di insolvenza non strettamente di competenza dell'arco di tempo considerato.

[55] Esplorabili per aree geografiche, settori di attività e classi dimensionali dei fidi.
[56] Calcolati come rapporto tra nuove sofferenze rettificate e popolazione dei soggetti, o ammontare dei crediti utilizzati, di inizio del periodo di riferimento.

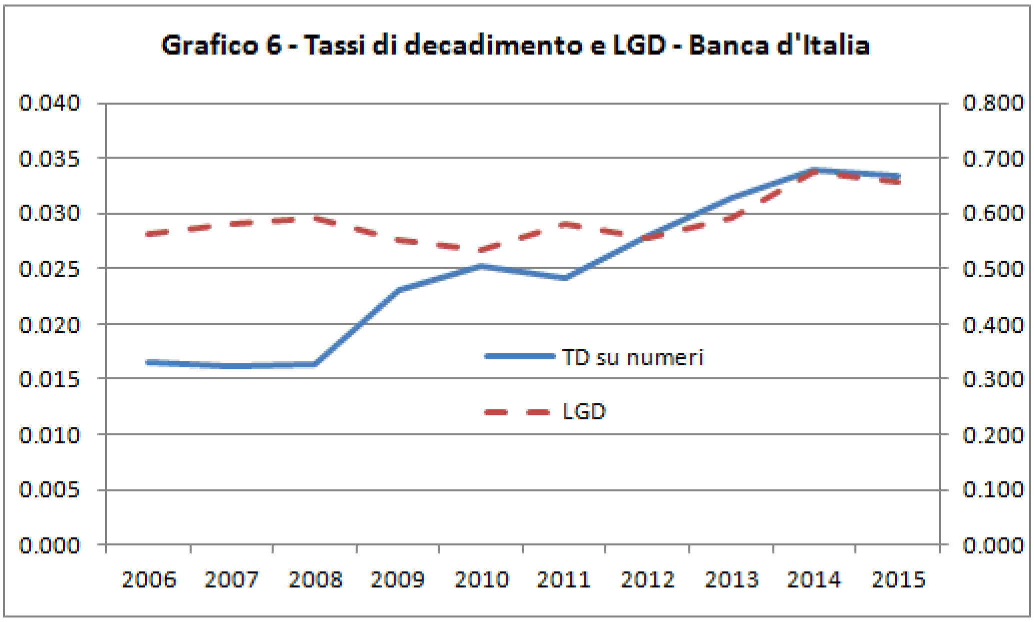
Tabella 1				
Tassi di decadimento e Tassi di recupero				
anno	TD annui su numeri	TD annui su valori	Recovery Rates Imprese	LGD imprese
1996	0.0278	0.0342		
1997	0.0262	0.0375		
1998	0.0237	0.0280		
1999	0.0217	0.0241		
2000	0.0183	0.0183		
2001	0.0179	0.0146		
2002	0.0182	0.0158		
2003	0.0169	0.0199		
2004	0.0177	0.0139		
2005	0.0170	0.0126		
2006	0.0166	0.0122	0.437	0.563
2007	0.0162	0.0113	0.418	0.582
2008	0.0164	0.0153	0.408	0.592
2009	0.0230	0.0257	0.449	0.551
2010	0.0253	0.0263	0.465	0.535
2011	0.0241	0.0257	0.419	0.581
2012	0.0279	0.0341	0.446	0.554
2013	0.0314	0.0473	0.410	0.590
2014	0.0339	0.0436	0.325	0.675
2015	0.0333	0.0418	0.343	0.657
2016	0.0348	0.0373		
Fonte: Banca d'Italia				



Le informazioni sui tassi di recupero sono invece molto più scarne. I dati utilizzati in questa sede sono tratti dalla Nota di Stabilità Finanziaria e Vigilanza[57] n.7: sono stati considerati i tassi di recupero riguardanti le imprese e per complemento ad 1 sono state ricavate le LGD. Le serie, riportate sulla tabella 1 e sul grafico 5, sono molto più corte di quelle dei tassi di decadimento e coprono un arco di soli 10 anni. I tassi comprendono sia posizioni di crediti non performing cedute sul mercato sia posizioni trattenute all'interno delle banche e non cedute.



Il grafico 6 infine accosta i tassi di decadimento sui numeri e i tassi di LGD per il decennio di osservazione comune.



[57] Vedi Ciocchetta ed al. 2017.

La ridotta disponibilità di informazioni limita le stime che possono essere fatte in questa sede. I calcoli riportati in questo paragrafo riguardano esclusivamente la valutazione del requisito regolamentare stimabile con dati aggregati, riferiti ad una controparte rischiosa con esposizione (EAD) unitaria. A fini comparativi sono considerati solo i modelli di Frye, il primo ad essere proposto, e quelli di Rösch ed altri e di Witzany, sia pure in forma semplificata, che rappresentano delle rielaborazioni delle proposte di Frye e di Pykhtin; gli altri modelli illustrati nei paragrafi precedenti vengono al momento tenuti in sospeso. A titolo di confronto si utilizza lo schema adottato nella regulation di Basilea.

A) Requisito prudenziale secondo lo schema di Basilea: il requisito patrimoniale prescritto nella regulation di Basilea si basa sulla indipendenza tra PD e LGD, entrambe calcolate in condizioni di mercati stressati. La tabella 2 riporta i parametri di lungo periodo dei tassi di decadimento (TD, numeri) e di LGD; con riferimento a queste ultime nella tabella sono indicati anche i parametri alfa e beta della distribuzione Beta coerente con la media e la varianza di lungo periodo; lo scarto quadratico medio dei TD è riferito alla distribuzione bernoulliana[58], che si suppone sia la generatrice del processo stocastico degli eventi default.

Tabella 2		
Parametri di lungo periodo		
	TD annui su numeri	LGD imprese
media	0.0248	0.5880
s.q.m.	0.1556	0.0429
Parametri distribuzione Beta:		
alfa		76.8538
beta		53.8500

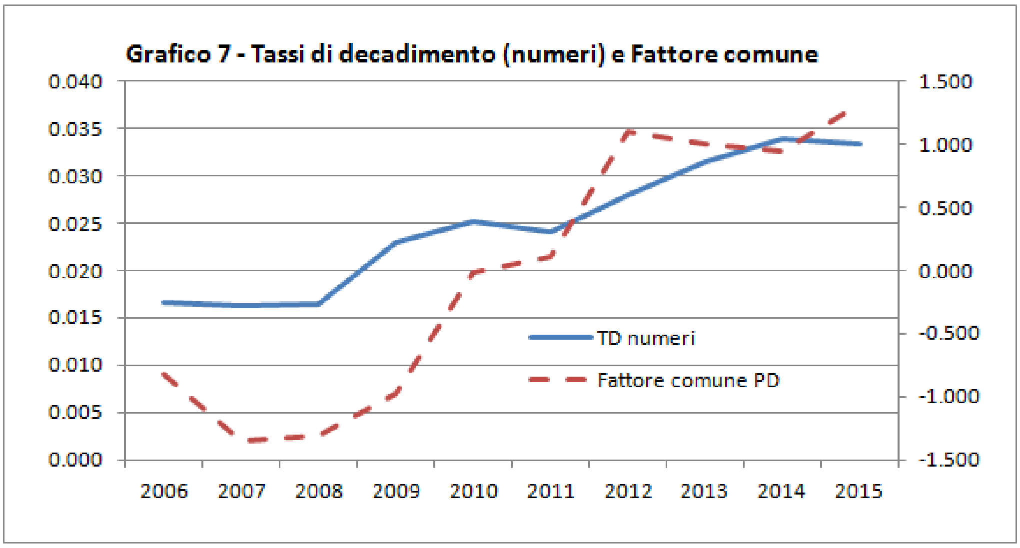
Per le elaborazioni successive sono stati costruiti due fattori macroeconomici, uno per le PD ed un secondo per le LGD, approssimandoli con la prima componente principale estratta da alcune variabili macroeconomiche, diverse nei due casi, scelte tra quelle più connesse rispettivamente con i tassi di decadimento e con i tassi di recupero; la tabella 3 riporta le variabili utilizzate ed i coefficienti da applicare alle variabili macro per ottenere le componenti principali di PD ed LGD:

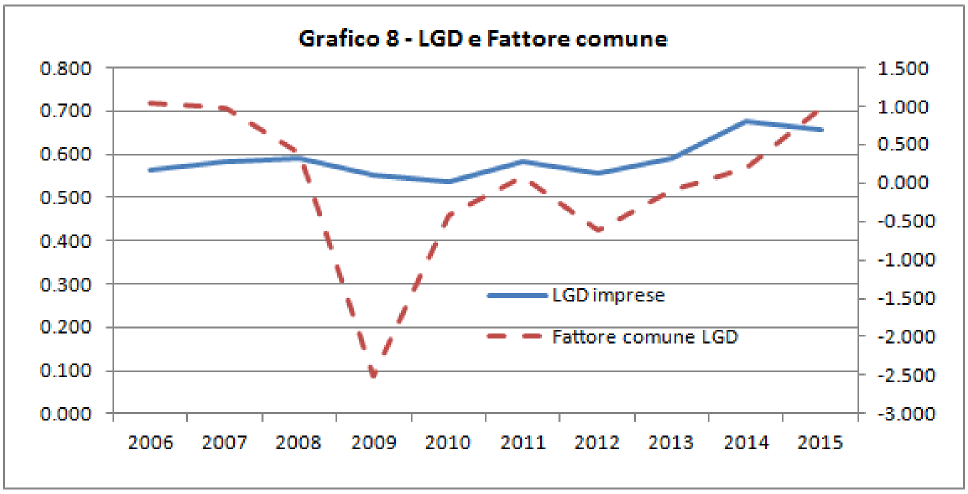
[58] È importante distinguere tra lo sqm bernoulliano $\left(\sigma_{bernoulliano} = \sqrt{PD(1-PD)}\right)$ e la volatilità seriale dei tassi di default: il primo riguarda la stima della volatilità del processo stocastico che genera gli eventi di default mentre il secondo misura l'instabilità della serie storica del numero dei default rispetto alla numerosità della popolazione creditizia osservata all'inizio di ciascun periodo.

Tabella 3		
Coefficienti fattoriali		
	Fattore comune PD	Fattore comune LGD
Tasso disoccupazione	0.3919	
Competitività	-0.3528	
Risultato lordo/VA	0.3584	
Var%PIL reale		0.3525
Utlizzo CP		0.3358
Var%VA reale		0.3549

La componente principale per le PD, che riveste il ruolo, semplificato in questa sede, di fattore comune, spiega l'82.0% delle variabili originali mentre la componente per le LGD spiega il 91.8%; entrambe sono state standardizzate per riportarle a media nulla e varianza unitaria per i calcoli successivi.

I grafici 7 e 8 accostano gli andamenti dei TD e delle LGD a quello dei rispettivi Fattori comuni:





La determinazione della PD condizionata ad un intervallo di confidenza del 99.9% richiede la stima del coefficiente di asset correlation, cioè la correlazione tra la variabile che pilota l'evento default ed il fattore comune macroeconomico. Non potendo osservare la variabile che riguarda la dinamica delle attività (logrendimenti degli asset oppure score generale sul merito di credito dell'impresa) si è fatto ricorso alla formula regolamentare per stimare la asset correlation (che nella regulation è specificata in funzione della PD): usando la PD media di lungo periodo si ottiene una asset correlation uguale al 15.5% circa.

Su questa base è stato calcolata la PD stressata al 99.9%: la PD condizionata (PD|0.999) alla realizzazione del quantile del 99.9% del Fattore comune, calcolata con l'approccio di Vasicek, ammonta a 0.2081.

La stima della LGD in condizioni di mercato stressato, LGDdownturn, è stata calcolata in due modi: nel primo caso è stata usata la formula regolamentare adottata negli Stati Uniti per le banche che hanno carenze di informazioni attendibili (si veda nota 4); nel secondo caso la stima è stata posta uguale al 99.9 percentile della distribuzione Beta specificata dai parametri di lungo periodo della serie dei LGD. La LGDdownturn stimata nei due casi ammonta rispettivamente al 62.1% ed al 71.5%. Moltiplicando la PD|0.999 per le due LGDdownturn si ottengono le perdite inattese (UL|0.999) di 0.1292 e di 0.1488, da cui deducendo la perdita attesa (EL) di 0.0178 si hanno gli ammontari del requisito regolamentare unitario, pari rispettivamente a 0.1115 e 0.1310 (per 1 € di EAD).

B) <u>Requisito prudenziale secondo Frye</u>: adottando una versione semplificata dello schema di Frye la LGD viene fatta dipendere dallo stesso Fattore comune che guida la dinamica delle PD. La stima di una regressione lineare tra LGD e Fattore comune fornisce i seguenti risultati, non pienamente soddisfacenti, date le limitazioni delle fonti disponibili:

Tabella 4	
LGD=a+b*Fattore comune PD:	
Costante	0.5880
(t test costante)	43.6754
Coefficiente	0.0197
(t test coefficiente)	1.4657
R2	0.2117

La stima della LGD condizionata alla realizzazione del Fattore comune pari al quantile del 99.9%, assumendo una distribuzione normale della LGD, vale 0.6490. Condizionatamente alle realizzazioni del Fattore comune, PD ed LGD sono indipendenti e quindi il requisito regolamentare può essere calcolato a partire dal prodotto delle due variabili. Con quel valore della LGDdownturn si ottiene un requisito unitario pari a 0.1173.

C) <u>Requisito prudenziale secondo Rösch ed altri</u>: Rösch ed i suoi coautori si sono ispirati sia alle proposte metodologiche di Frye, sia a quelle di Pykhtin. In questa sede il calcolo del requisito prudenziale in base al modello di Rösch e Scheule è stato sviluppato considerando solo il fattore comune (definito nel loro schema fattore latente) e trascurando i fattori macro osservabili (per semplicità). I risultati che seguono sono ugualmente ottenibili con l'approccio di Witzany. Il coefficiente angolare della regressione tra la trasformata inversa dei tassi di recupero ed il fattore comune per le LGD è pari a 0.04887 (con t test 1.3688, anch'esso non pienamente soddisfacente) ed il coefficiente di correlazione tra i due fattori comuni è uguale al 4.7% circa. Sulla base di questi parametri la stima della LGDdownturn al 99.9% è pari al 59.08%. Condizionatamente alla realizzazione del fattore comune PD ed PGD sono indipendenti e quindi la perdita inattesa vale 0.1229, da cui detraendo la perdita attesa si ottiene un requisito regolamentare di 0.1052. Si osservi che la LGDdowturn calcolata con questo modello incorpora la correlazione tra PD ed LGD.

La tabella 3 riporta il confronto dei valori dei requisiti regolamentari sviluppati con i tre approcci indicati sopra.

Tabella 5

Requisiti regolamentari

	Basilea (a)	Basilea (b	Frye	Rösch ed al.
TD|0.999	0.2081	0.2081	0.2081	0.2081
LGDdownturn	0.6210	0.7151	0.6490	0.5908
UL|0.999	0.1292	0.1488	0.1350	0.1229
EL	0.0178	0.0178	0.0178	0.0178
Requisito	0.1115	0.1310	0.1173	0.1052

(a): LGDdownturn calcolata con modello FED

(b): LGDdownturn calcolata con distribuzione Beta

14 CONCLUSIONI

In questo lavoro si sono presi in esame i principali modelli proposti nella letteratura sulla connessione tra le probabilità di insolvenza e le perdite in caso di insolvenza (oppure il loro complemento, i tassi di recupero). È un tema di assoluta importanza, che è stato in qualche modo sterilizzato nella regolamentazione sul capitale di vigilanza che le banche devono detenere a fronte dei rischi assunti.

Come si è visto gran parte dei modelli si rifanno alle idee iniziali di Frye e di Pykhtin che per primi hanno affrontato il problema. Per mantenere abbordabile la complessità del problema la maggior parte delle proposte ha adottato l'ipotesi di portafogli di crediti omogenei ed infinitamente granulari in modo da ricondurre i calcoli sulle probabilità di insolvenza stressate al modello di Vasicek, a sua volta basato su quello di Merton.

Per quantificare le differenze che possono emergere da varie proposte metodologiche, due di esse ritenute tra le più rilevanti sono state applicate ai dati aggregati resi pubblici dalla Banca d'Italia e sono state messe a confronto con i risultati della formula regolamentare, ottenendo differenze in una certa misura significative tra i valori dei requisiti patrimoniali: la scelta del modello di connessione tra PD e LGD non è pertanto irrilevante ai fini dell'assorbimento di capitale delle banche.

Nonostante i notevoli passi in avanti effettuati in materia, è opinione di chi scrive che non sia ancora stato raggiunto un consenso sul modo più appropriato per combinare PD e LGD non indipendenti. Questo aspetto non è secondario perché una volta che l'industria bancaria e l'accademia abbiano concordato sul modello più adeguato per connettere PD e LGD occorrerà, per coerenza, intervenire sul dettato della regolamentazione ed introdurre i necessari cambiamenti nella formula di calcolo del requisito patrimoniale: tenendo conto delle grandi difficoltà affrontate per giungere alla attuale versione di Basilea III e di quelle che stanno ostacolando il passaggio a Basilea IV e della conclamata ostilità dell'industria bancaria ai continui cambiamenti regolamentari è molto probabile che il tema della connessione tra PD ed LGD resterà confinato al campo della ricerca scientifica sul rischio di credito ancora per vario tempo.

15 BIBLIOGRAFIA

Bade B., Rösch D., Scheule H., 2011. "Default and recovery risk dependencies in a simple credit risk model", in European Financial Management, vol. 17 n. 1.

H. Bierens, 2007. "Maximum likelihood estimation of Hechman's sample selection model", w.p., http://www.personal.psu.edu/hxb11/EasyRegTours/HECKMAN_Tourfiles/HECKMAN.PDF

Ciocchetta F., Conti F., De Luca R., Guida I., Rendina A., Santini G., 2017. "I tassi di recupero delle sofferenze", Note di Stabilità Finanziaria e Vigilanza n. 7, gennaio.

Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (BCBS), 2004. "Convergenza Internazionale della Misurazione del Capitale e dei Coefficienti Patrimoniali", giugno [bcbs107ita. pdf in sito www. bis. org].

Comitato di Basilea per la Vigilanza Bancaria (BCBS), 2005. "Guidance on Paragraph 468 of the framework document", luglio [bcbs115. pdf in sito www. bis. org].

Eckert J., Jakob K., Fischer M., 2016. "A credit portfolio framework under dependent risk parameters: probability of default, loss given default and exposure at default", in *The Journal of Credit Risk*, vol. 12 n. 1.

Finger C., 1999. "Conditional approaches for CreditMetrics portfolio distributions", in *CreditMetrics Monitor*, aprile.

Frye J., 2000. "Collateral Damage", in *Risk*, aprile.

Frye J., 2000. "Depressing Recoveries", w.p., ottobre.

Frye J., 2010. "Modest Means", in *Risk*, gennaio.

Frye J., 2014. "The simple link from default to LGD", in *Risk*, marzo.

Frye J., Jacobs M., 2012. "Credit loss and systematic loss given default", in *The Journal of Credit Risk*, primavera.

Giese G., 2005. "The impact of PD/LGD correlations on credit risk capital", in *Risk*, aprile.

Gordy M., 2003. "A risk-factor model foundation for rating-based bank capital rules", in *The Journal of Financial Intermediation*, vol. 12, luglio.

Hamerle A., Knapp M., Liebig T., Wildenauer N., "Incorporating prediction and estimation risk in point-in-time credit portfolio models", Deutsche Bundesbank discussion paper n. 13, 2005

Hamerle A., Knapp M., Wildenauer N., 2007. "Default and recovery correlations: a dynamic econometric approach", in *Risk*, gennaio.

Heckman J., 1979. "Sample selection bias as a specification error", in *Econometrica*, vol. 47 n. 1.

Hillebrand M., 2006. "Modelling and estimating dependent loss given default", in *Risk*, settembre.

Kaposty F., Löderbusch M., Maciag J., 2017. "Stochastic loss given default and exposure at default in a structural model of portfolio credit risk", in *The Journal of Credit Risk*, vol. 13 n. 1

Kim J., Kim K., 2006. "Loss diven default modeling under the asymototic single risk factor assumption", w.p., novembre.

Kupiec P., 2008. "A generalized single common factor model of portfolio credit risk", in *The Journal of Derivatives*, vol. 15 n. 3.

Levy A., Hu Z., 2007. "Incorporating systematic risk in recovery: theory and evidence" w. p. Moody's KMV, 20 aprile.

Liu S., Lu J., Kolpin D., Meeker W., 1997. "Analysis of environmental data with censored observations", in *Environmental Science & Technology*, vol. 31, n. 12.

Meng Q., Levy A., Kaplin A., Wang Y., Hu Z., 2010."Implications of PD-LGD correlation in a portfolio setting" w.p. *Moody's Analytics*, 5 febbraio.

Miu P., Ozdemir B., 2006. "Basel requirements of downturn loss given default: modeling and estimating probability of default and loss given default correlations", in *The Journal of Credit Risk*, vol. 2 n. 2, estate.
Pykhtin M., 2003 "Unexpected recovery risk", in *Risk*, agosto.
Regolamento UE, 2013. N. 575
Rösch D., Scheule H., 2005. "A multi-factor approach for systematic default and recovery risk", in *The Journal of Fixed Income,* vol. 15 n. 2.
Rösch D., Scheule H., 2009. "Credit portfolio loss forecasts for economic downturns", in *Financial Markets, Institutions & Instruments*, vol. 18 n. 1.
Sanchez F., Ordovas R., 2008. Martinez E., Vega M., "Uncovering PD/LGD liaisons", in *Risk*, gennaio.
Schonbucher P., 2000. "Factor models for portfolio credit risk", w.p. dicembre.
Seidler J., Jakubik P., 2009. "The Merton approach to estimating Loss Given Default: application to the Czech Republic" w.p.
Sen R., 2008. "A multi-state Vasicek model for correlated default rate and loss severity", in *Risk*, giugno.
Tasche D., 2004. "The single risk factor approach to capital charges in case of correlated loss given default rates", w.p., febbraio.
Vasicek O., 1987, "Probability of loss on loan portfolio", w.p. dicembre.
Vasicek O., 1991. "Limiting loan loss probability distribution", w.p., settembre.
Vasicek O., 2004. "Il valore di un portafoglio di prestiti", in Risk Italia, primavera.
Vasicek O., 1998. "A series expansion for the bivariate normal integral", in *The Journal of Computational Finance*, estate.
Wan Z., Dev A., 2007-2008. "Correlation between default events and loss given default and downturn loss given default in Basel II", in *The Journal of Credit Risk*, vol. 3 n. 4, inverno.
Witzany J., 2013. "Estimating default and recovery rate correlations", w.p.

16 APPENDICE: LGD NEL MODELLO DI MERTON

Il default nel modello di Merton si verifica se al tempo T il valore delle attività dell'impresa è inferiore all'ammontare del debito da rimborsare. Il recovery rate pertanto è dato da quanto i creditori riescono a recuperare dalla vendita a valori di mercato delle attività nel caso dell'evento default, ovvero:

$$RR = E\left(\frac{A_T}{B_T} \mid A_T < B_T\right) = \frac{1}{B_T} E\left(A_T \mid A_T < B_T\right)$$

Poiché A_T ha distribuzione lognormale, il tasso di recupero viene a dipendere dal valore atteso di una lognormale troncata, la cui espressione può essere ricavata come segue[59]:

Sia la variabile A distribuita secondo una lognormale, $Ln(A)$ ha distribuzione normale e $Z = \frac{Ln(A) - \mu}{\sigma}$ ha distribuzione normale standard.

La media di A condizionata a $A < x$ vale

$$E(A \mid A < x) = E\left(e^{\sigma Z + \mu} \mid e^{\sigma Z + \mu} < x\right)$$

la condizione $e^{\sigma Z + \mu} < x$ può essere scritta come $Ln\left(e^{\sigma Z + \mu}\right) < Ln(x)$, ovvero

$\sigma Z + \mu < Ln(x)$, da cui $Z < \frac{Ln(x) - \mu}{\sigma}$ e quindi

$$E(A \mid A < x) = E\left(e^{\sigma Z + \mu} \mid Z < \frac{Ln(x) - \mu}{\sigma}\right)$$

[59] Si veda anche Seidler, Jakubik 2009 e Liu ed altri 1997 per la derivazione della media di una lognormale troncata.

Sostituendo con $g = \dfrac{Ln(x)-\mu}{\sigma}$ *e* $h = \Phi(g)$, *ove* $\Phi(.)$ *indica la normale standard cumulata, si ha*

$$E(A \mid A < x) = \frac{\int_{-\infty}^{g} e^{\sigma Z + \varpi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}{h} = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \frac{\int_{-\infty}^{g} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-\sigma)^2}{2}} dz}{h} = e^{\mu + \frac{\sigma^2}{2}} \frac{\Phi\left(\frac{Ln(x)-\mu}{\sigma} - \sigma\right)}{\Phi\left(\frac{Ln(x)-\mu}{\sigma}\right)}$$

Sostituendo ai termini A e x le variabili del modello di Merton si ha

$$E\left(A_T \mid A_T < B_T\right) = e^{\mu_A^* + \frac{\sigma_A^*}{2}} \frac{\Phi\left(\frac{Ln(B_T)-\mu_A^*}{\sigma_A^*} - \sigma_A^*\right)}{\Phi\left(\frac{Ln(B_T)-\mu_A^*}{\sigma_A^*}\right)}$$

ove $\mu_A^* = Ln(A_0) + \left(\mu_A - \dfrac{\sigma_A^2}{2}\right)T$ = *valore atteso del logaritmo delle attività*

e $\sigma_A^* = \sigma_A \sqrt{T}$ = *volatilità del logaritmo delle attività*

$$e \text{ quindi } E(A_T \mid A_T < B_T) = e^{Ln(A_0)+\mu_A T} \frac{\Phi\left(-\dfrac{Ln\left(\frac{A_0}{B_T}\right) + \left(\mu_A + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right)}{\Phi\left(-\dfrac{Ln\left(\frac{A_0}{B_T}\right) + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A\sqrt{T}}\right)} =$$

$= A_0 e^{\mu_A T} \dfrac{\Phi\left(-d_1^*\right)}{\Phi\left(-d_2^*\right)}$, *ove* d_1 *e* d_2 *sono i consueti termini della formula di calcolo delle opzioni europee di Black – Scholes – Merton*

Pertanto il recovery rate è uguale a $RR = \dfrac{A_0}{B_T} e^{\mu_A T} \dfrac{\Phi(-d_1^*)}{\Phi(-d_2^*)} = E\left(\dfrac{A_T}{B_T}\right) \dfrac{\Phi(-d_1^*)}{\Phi(-d_2^*)}$

Quella è l'espressione del tasso di recupero utilizzando le probabilità reali (fisiche); se si sostituisce il rendimento effettivo delle attività (μ_A) con il tasso di interesse risk-free si ottiene il tasso di recupero risk-neutral:

$$RR = \frac{A_0}{B_T} e^{iT} \frac{\Phi(-d_1)}{\Phi(-d_2)} = E\left(\frac{A_T}{B_T}\right) \frac{\Phi(-d_1)}{\Phi(-d_2)}$$

e la LGD risk – neutral vale $1 - E\left(\dfrac{A_T}{B_T}\right) \dfrac{\Phi(-d_1)}{\Phi(-d_2)}$

Moltiplicando tale LGD per la PD si ottiene la perdita attesa unitaria (per unità di EAD) risk-neutral:

$$ELunitaria = PD * LGD = \Phi(-d_2) * \left[1 - E\left(\frac{A_0 e^{iT}}{B_T}\right) \frac{\Phi(-d_1)}{\Phi(-d_2)}\right] = \Phi(-d_2) - E\left(\frac{A_0 e^{iT}}{B_T}\right) \Phi(-d_1)$$

Assumendo che l'ammontare del debito in T sia deterministico e considerabile come EAD e risolvendo il valore atteso delle attività in un mondo neutrale al rischio, si ottiene che la perdita attesa rispetto all'esposizione creditizia è pari a valore di una opzione PUT europea valutata in T:

$$EL_T = PD * LGD * B_T = B_T \Phi(-d_2) - A_0 e^{iT} \Phi(-d_1) = PUT_T$$

che in t_0 *vale* $EL_0 = PD * LGD * B_T e^{-iT} = B_T e^{-iT} \Phi(-d_2) - A_0 \Phi(-d_1) = PUT_0$