SVEUČILIŠTE U ZAGREBU

PRIRODOSLOVNO–MATEMATIČKI FAKULTET

MATEMATIČKI ODSJEK

Eva Karačić

MATEMATIČKO MODELIRANJE DEMOGRAFSKIH PROCESA

Diplomski rad

Voditelj rada:
prof. dr. sc. Igor Pažanin

Zagreb, rujan 2018.

Ovaj diplomski rad obranjen je dana ____________________ pred ispitnim povjerenstvom u sastavu:

1. ____________________________, predsjednik
2. ____________________________, član
3. ____________________________, član

Povjerenstvo je rad ocijenilo ocjenom _______________.

Potpisi članova povjerenstva:

1. ____________________________
2. ____________________________
3. ____________________________

Sadržaj

Uvod

Stanovništvo je cjelina koja se vremenom smanjuje i povećava zbog tri glavna demografska procesa: rađanja, umiranja i migracija. Koristeći mjerljive demografske varijable, izvode se matematički modeli koji umjesto velike količine podataka koriste tek nekoliko osnovnih parametara. Neki od korištenih parametara su stopa rasta te stope nataliteta, fertiliteta, mortaliteta, imigracije i emigracije, a one se najčešće prikazuju u obliku godišnjih stopa. Stvarne populacije uglavnom nemaju konstantnu stopu rasta, pa su matematički modeli koji pretpostavljaju promijenjivu stopu rasta prikladniji za opisivanje stvarnog kretanja stanovništva. Dijeljenjem stanovništva u grupe, primjerice prema dobi, u model se uključuju parametri koji opisuju dobivene grupe te se pomoću takvog modela mogu promatrati neke interakcije među grupama, kao što su prijelazi stanovnika iz jedne grupe u drugu. Modeli koji se koriste za opisivanje demografskih procesa mogu se podijeliti na determinističke i stohastičke. Stohastički modeli sadrže slučajnu komponentu i njima se pokušava predstaviti slučajna priroda stvarnog kretanja stanovništva. S druge strane, deterministički modeli potpuno ovise o ulaznim varijablama i u sebi ne sadrže slučajnosti. Matematički modeli se koriste u svrhu boljeg razumijevanja trenutnog ili prošlog stanja stanovništva, ali i predviđanja budućeg rasta, odnosno pada.

Ovaj rad daje pregled matematičkih modela koji opisuju neke demografske procese. Rad se sastoji od četiri poglavlja, a sadržaj rada pretežito prati reference [3] i [4].
U Poglavlju 1 uvode se osnovni pojmovi vezani za obične diferencijalne jednadžbe i sustave običnih diferencijalnih jednadžbi koji će biti korišteni u kasnijim dijelovima rada.
U Poglavlju 2 predstavljeni su osnovni modeli koji opisuju kretanje stanovništva, a to su Malthusov i logistički model. Ti modeli su bili temelj za razvoj mnogih drugih matematičkih modela u demografiji. Također uvodimo pojam stope rasta stanovništva u diskretnom i neprekidnom vremenu.
U Poglavlju 3 promatramo modele koji opisuju prirodno kretanje stanovništva, odnosno kretanje stanovništva uzrokovano isključivo rađanjem i umiranjem. U Odjeljku 3.1 stanovništvo dijelimo prema spolu, odnosno na muškarce i žene, te proučavamo pod kojim uvjetima stanovništvo može postati stabilno. U Odjeljku 3.2 promatramo stanovništvo podijeljeno prema starosti i njegovu dobnu distribuciju, a zatim i dobne distribucije dvaju

populacija s različitim stopama fertiliteta, odnosno mortaliteta.
U Poglavlju 4 predstavljeni su modeli s obzirom na dobnu strukturu stanovništva koji modeliraju ukupni rast. Na početku poglavlja uvodimo podjelu stanovništva na tri dobne skupine, te zatim u Odjeljku 4.1 uvodimo parametre koji će biti korišteni u modelima. Modeli opisani u ovom poglavlju su linearni deterministički model, linearni stohastički model i lognormalni stohastički model. U Odjeljku 4.5 uspoređujemo rezultate dobivene linearnim determinističkim modelom sa stvarnim podacima o kretanju stanovništva Hrvatske.

Poglavlje 1

Osnovni pojmovi i rezultati

Matematički modeli koji se koriste za opisivanje demografskih procesa najčešće su zadani običnim diferencijalnim jednadžbama. Obična diferencijalna jednadžba n-tog reda je jednadžba oblika

$$F(x, u, u', u'', ..., u^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

odnosno to je relacija koja povezuje varijablu x, nepoznatu funkciju $u = u(x)$ i njezine derivacije $u', u'', ..., u^{(n)}$. Nepoznanica u običnoj diferencijalnoj jednadžbi je realna funkcija realne varijable. Jednadžba (1.1) je zapisana u implicitnom obliku, no može se zapisati i u eksplicitnom obliku:

$$u^{(n)} = f(x, u, u', ..., u^{(n-1)}). \tag{1.2}$$

Promotrimo sada problem

$$u' = f(x, u), \tag{1.3}$$

$$u(x_0) = u_0, \tag{1.4}$$

na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$, pri čemu je $f : \Omega \to \mathbb{R}$ zadana i neprekidna, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ otvoren i $(x_0, u_0) \in \Omega$ zadan. Jednadžba (1.3) je obična diferencijalna jednadžba prvog reda.

Definicija 1.0.1. *Kažemo da je funkcija $u : I \to \mathbb{R}$ rješenje jednadžbe* (1.3) *na intervalu I ako vrijedi*

(i) $u \in C^1(I)$

(ii) $\{(x, u(x)) : x \in I\} \subseteq \Omega$

(iii) *u zadovoljava* (1.3) *za $x \in I$.*

Funkcija u je rješenje Cauchyjevog (inicijalnog) problema (1.3) - (1.4) *na intervalu I ako je u rješenje od* (1.3) *i ako u zadovoljava početni uvjet* (1.4).

Sljedeći teorem daje uvjete za egzistenciju i jedinstvenost rješenja inicijalnog problema (1.3) - (1.4).

Teorem 1.0.2. *Neka su* $\Delta, \eta > 0$ *takvi da za pravokutnik* $P = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (u_0 - \eta, u_0 + \eta)$ *vrijedi* $\bar{P} \subseteq \Omega$ *i neka je* f *neprekidna na* $\bar{P}$ *te Lipschitz-neprekidna po drugoj varijabli na* $\bar{P}$. *Tada postoji* $\delta \in (0, \Delta)$ *takav da problem* (1.3) - (1.4) *ima jedinstveno rješenje na intervalu* $I_\delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Napomena 1.0.3. *Funkcija* f *je Lipschitz-neprekidna ako postoji* $L > 0$ *takav da je*

$$\forall x, y \in D_f, \quad |f(x) - f(y)| \leq L|x - y|.$$

Dokaz Teorema 1.0.2 se može pronaći u [6]. Rješenje Cauchyjevog problema općenito ne možemo pronaći analitički, ali postoje razne numeričke metode za dobivanje diskretne aproksimacije rješenja.

Ako za funkciju f pretpostavimo da je afina po drugoj varijabli, odnosno

$$f(x, u) = a(x)u + b(x), \tag{1.5}$$

onda odgovarajuću diferencijalnu jednadžbu (1.3) zovemo *linearna diferencijalna jednadžba 1. reda*. Za takvu jednadžbu definiramo njenu homogenu jednadžbu s

$$u' = a(x)u,$$

odnosno uzima se $b \equiv 0$. Sljedeći teorem daje formulu za rješenje linearne diferencijalne jednadžbe prvog reda. Dokaz se može pronaći u [6].

Teorem 1.0.4. *Neka je* I *otvoren interval iz* $\mathbb{R}$ *te neka su* $a, b \in C(I)$. *Tada za svaki* $x_0 \in I$ *i svaki* $u_0 \in \mathbb{R}$ *inicijalni problem*

$$u'(x) = a(x)u(x) + b(x), \quad u(x_0) = u_0$$

ima jedinstveno rješenje u na cijelom intervalu I *te je ono dano formulom*

$$u(x) = u_0 U(x, x_0) + \int_{x_0}^{x} b(z)U(x, z)\, dz, \quad x \in I,$$

gdje je funkcija $U : I \times I \to \mathbb{R}$ *definirana sa*

$$U(x, y) = \exp\left\{ \int_{y}^{x} a(z)\, dz \right\}, \quad x, y \in I.$$

Matematički modeli koji opisuju kretanje više populacija između kojih postoji interakcija ili kretanje stanovništva podijeljenog u grupe mogu biti zadani sustavom diferencijalnih jednadžbi. Najčešće su to sustavi običnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda koje zapisujemo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}U_1 &= F_1(x, U_1, ..., U_n), \\ \frac{d}{dx}U_2 &= F_2(x, U_1, ..., U_n), \\ &\vdots \\ \frac{d}{dx}U_n &= F_n(x, U_1, ..., U_n), \end{aligned} \tag{1.6}$$

gdje su $F_1, ..., F_n$ zadane realne funkcije od $n + 1$ varijabli. Sustav kraće možemo zapisati kao

$$\frac{d}{dx}\mathbf{U} = \mathbf{F}(x, \mathbf{U}), \tag{1.7}$$

gdje su za zadani $x \in \mathbb{R}$, $\mathbf{U}(x) = \sum_{i=1}^{n} U_i(x)\mathbf{e}_i$, $\mathbf{F}(x, \mathbf{U}) = \sum_{i=1}^{n} F_i(x, \mathbf{U})\mathbf{e}_i$, pri čemu je $(\mathbf{e}_1, ..., \mathbf{e}_n)$ kanonska baza za $\mathbb{R}^n$.

Jednadžbe oblika $u' = f(u)$, odnosno jednadžbe u kojima se nezavisna varijabla ne pojavljuje eksplicitno zovemo autonomne jednadžbe. Za autonomnu jednadžbu definiramo ravnotežno stanje jednadžbe kao nultočku desne strane $f(u)$. Ako promotrimo sustav linearnih diferencijalnih jednadžbi prvog reda

$$\frac{d}{dx}\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{U} + \mathbf{B}(x), \tag{1.8}$$

pri čemu je $\mathbf{A}$ konstantna matrica, tada je pripadni homogeni sustav $\frac{d}{dx}\mathbf{U} = \mathbf{A}\mathbf{U}$ autonoman sustav. Općenit autonoman sustav diferencijalnih jednadžbi je

$$U' = f(U), \tag{1.9}$$

pri čemu je $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Definicija 1.0.5. *Kažemo da je rješenje* Φ *sustava* (1.9)*:*

a) stabilno *ako za svaki* $\epsilon > 0$ *postoji* $\delta > 0$ *tako da za svako rješenje* U *sustava koje u početnom trenutku zadovoljava*

$$|U(0) - \Phi(0)| < \delta$$

vrijedi

$$|U(x) - \Phi(x)| < \epsilon, \ x > 0.$$

b) asimptotski stabilno *ako je stabilno i ako postoji* $\rho > 0$ *tako da za svako rješenje* U *sustava vrijedi*

$$|U(0) - \Phi(0)| < \rho \;\Rightarrow\; \lim_{x \to +\infty} [U(x) - \Phi(x)] = 0.$$

Pitanje stabilnosti autonomnih sustava je važno jer želimo odrediti je li ravnotežno stanje sustava stabilno. Kao i u slučaju jedne jednadžbe, točku ξ nazivamo ravnotežnim stanjem sustava (1.9) ako je $f(\xi) = 0$. Tada je $U \equiv \xi$ rješenje sustava. Sljedeći teorem govori o stabilnosti ravnotežnog rješenja autonomnog sustava.

Teorem 1.0.6. *Neka je* f *klase* C^2 *i* ξ *ravnotežno stanje autonomnog sustava* (1.9)*. Ako sa* S *označimo spektar Jakobijeve matrice funkcije* f *u točki* ξ*, tada vrijedi*

a) Ako je $S \subset \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z < 0\}$*, onda je* $U \equiv \xi$ *asimptotski stabilno rješenje sustava.*

b) Ako je $S \cap \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Re}\, z > 0\} \neq \emptyset$*, onda je* $U \equiv \xi$ *nestabilno rješenje sustava.*

Poglavlje 2

Osnovni modeli rasta

Malthusov i logistički model rasta populacije predstavljaju najjednostavniju primjenu matematičkih modela u demografiji. Nakon razvoja ovih modela, dinamika stanovništa postala je od posebnog interesa matematičkim demografima i drugim znanstvenicima te su se tijekom 20. stoljeća razvili mnogi modeli koji su, osim veličine stanovništva, uzimali u obzir i njegov sastav prema dobi, spolu, etničkom podrijetlu itd.

2.1 Malthusov model

Prvi značajan matematički model rasta populacije bez migracija predstavio je T. M. Malthus 1798. godine u radu [2]. On je smatrao da će u budućnosti veličina stanovništva nadmašiti raspoložive zalihe hrane jer je smatrao da broj stanovnika raste eksponencijalno, dok količina proizvedene hrane raste linearno. Malthusov model je formuliran kao obična diferencijalna jednadžba prvog reda

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t), \quad P(0) = P_0, \tag{2.1}$$

gdje je $P(t)$ veličina populacije u trenutku t, a r je konstanta koja predstavlja stopu rasta populacije po stanovniku. Rješenje gornje diferencijalne jednadžbe je dano sa

$$P(t) = P_0 e^{rt}. \tag{2.2}$$

Ako je konstantna stopa rasta $r > 0$, populacija raste eksponencijalno i teži u beskonačnost kada $t \to \infty$, ako je $r < 0$, populacija ekponencijalno pada i teži k nuli, a ako je $r = 0$, populacija se nalazi u ravnotežnom stanju, odnosno ne mijenja se. Pokazano je da je u idealnim uvjetima Malthusov model primjenjiv na mnoge populacije, bar u ograničenom vremenu. Međutim, model pretpostavlja konstantnu stopu rasta što, u slučaju da je ona pozitivna, implicira neograničeni rast populacije, a on je moguć samo uz neograničene resurse. Dakle, mora postojati faktor koji će ograničiti taj rast, a po Malthusu je to upravo nedovoljna količina proizvedene hrane.

2.2 Logistički model

Kako populacija ne bi ”eksplodirala” kao u Malthusovom modelu, potrebno je uvesti ograničenje koje će djelovati postupno, u ovisnosti o trenutnoj veličini populacije. Stoga promatramo logistički model populacije kojeg je predstavio P. F. Verhulst 1838. godine kao modifikaciju Malthusovog modela. Zamijenimo konstantu r u (2.1) s funkcijom $h(P)$ i time dobivamo sljedeću jednadžbu

$$\frac{dP}{dt} = h(P)P. \tag{2.3}$$

Želimo odabrati h takav da je $h(P) \cong r > 0$, za male vrijednosti P te takav da se $h(P)$ smanjuje kako se P povećava. Najjednostavnija funkcija koja ima ta svojstva je $h(P) = r - aP$, gdje je a pozitivna konstanta. Koristeći ovu funkciju iz (2.3), nalazimo

$$\frac{dP(t)}{dt} = (r - aP(t))P(t). \tag{2.4}$$

Jednadžba se često zapisuje u ekvivalentnoj formi

$$\frac{dP(t)}{dt} = rP(t)\left(1 - \frac{P(t)}{Q}\right), \quad P(0) = P_0. \tag{2.5}$$

gdje je $Q = r/a$ pozitivna konstanta i naziva se nosivi kapacitet populacije. Konstanta r se naziva intrinzična stopa rasta i predstavlja stopu rasta populacije bez ikakvih ograničenja (vidi [1]). Jednadžbu (2.5) možemo zapisati u obliku

$$\frac{dP}{rP - \frac{r}{Q}P^2} = \frac{\frac{1}{r}dP}{P} + \frac{\frac{1}{Q}dP}{r(1 - \frac{P}{Q})} = dt. \tag{2.6}$$

Integriranjem dobivamo

$$P(t) = \frac{Q}{1 + \frac{Q}{r}e^{-r(t+C)}}, \quad C \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Iz (2.7) te iz početnog uvjeta $P(0) = P_0$ slijedi rješenje difrencijalne jednadžbe (2.5):

$$P(t) = \frac{QP_0}{P_0 + (Q - P_0)e^{-rt}}. \tag{2.8}$$

Funkcija vremena iz gornjeg izraza se naziva logistička funkcija i ona poprima oblik sigmoide, odnosno oblik slova S, a populacija koja raste na ovaj način se naziva logistička populacija. Kada $t \to \infty$, stopa rasta populacije po stanovniku se smanjuje, a populacija teži k nosivom kapacitetu Q. Dakle, u logističkom modelu populacija ne ”eksplodira” kao u Malthusovom modelu, već je odozgo ograničena nosivim kapacitetom Q.

2.3 Stopa rasta stanovništva

Stopa nataliteta predstavlja omjer broja rođene djece i ukupnog broja stanovnika, a stopa mortaliteta označava omjer broja umrlih i ukupnog broja stanovnika u nekom vremenskom periodu. Stopa rasta stanovništva je stopa promjene u veličini stanovništva tijekom nekog perioda vremena zbog prirodnog rasta i migracijskog salda stanovništva. Ona uzima u obzir sve komponente rasta stanovništva, odnosno, broj rođenih, umrlih, iseljenih i useljenih. Ako gledamo samo prirodni rast stanovništa, odnosno ako zanemarimo migracije, stopu rasta stanovništva možemo prikazati kao razliku stope nataliteta i stope mortaliteta. Stopa rasta se obično prikazuje kao postotak i može biti pozitivna ako se stanovništvo povećava, negativna ako se smanjuje te može biti jednaka nuli ako se broj stanovnika ne mijenja. U Hrvatskoj je u zadnjih nekoliko godina procijenjena stopa rasta stanovništva negativna, a zadnji put kada je bila zabilježena pozitivna stopa rasta je 2006. godina.

Neka je r godišnja stopa rasta neke populacije te X_0 početna veličina te populacije. Ako se rast populacije promatra jednom godišnje, tada je veličina populacije nakon t godina dana sa

$$X_t = X_0(1 + r)^t, \tag{2.9}$$

a ako se promatra m puta godišnje, tada je nakon t godina veličina populacije jednaka

$$X_t = X_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}. \tag{2.10}$$

Za broj promatranja m tokom godine se najčešće uzima $m = 2$ (polugodišnje), $m = 4$ (kvartalno), $m = 12$ (mjesečno), $m = 52$ (tjedno) ili $m = 365$ (dnevno). Rješavajući jednadžbu (2.10) po r, dobiva se izraz za stopu rasta

$$r = m\left[\left(\frac{X_t}{X_0}\right)^{\frac{1}{mt}} - 1\right]. \tag{2.11}$$

Ako se stopa rasta smanjuje, to ne mora značiti da se populacija smanjuje, već da raste sporije. Jedan pristup potencijalnom rastu populacije je računanje njenog vremena udvostručenja. Vrijeme udvostručenja t_d je vrijeme koje je potrebno da se veličina populacije udvostruči uz trenutnu stopu rasta r te je ono dano sa

$$t_d = \frac{\ln 2}{\ln(1 + r)}. \tag{2.12}$$

Na primjer, u Hrvatskoj je za 2005. godinu zabilježena stopa rasta od 0.13%, pa bi vrijeme udvostučenja iznosilo 534 godine, odnosno stanovništvo Hrvatske bi se u odnosu na 2005. godinu trebalo udvostručiti do 2539. godine. Iako je računanje vremena udvostručenja jednostavno i njime se može dobiti predodžba o tome koliko brzo stanovništvo raste u

danom trenutku, ne može se koristiti za procjenu veličine stanovništa u nekom budućem trenutku jer pretpostavlja konstantnu stopu rasta.
Ako u (2.10) pustimo limes kada $m \to \infty$, dobivamo neprekidni model u kojem je veličina populacije u trenutku t dana s

$$X_t = X_0 e^{rt}, \tag{2.13}$$

pri čemu smo koristili

$$\lim_{m\to\infty}\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = e^{rt}. \tag{2.14}$$

U neprekidnom modelu se promjene u veličini stanovništa promatraju u svakoj vremenskoj jedinici, no općenito se neprekidni model može shvatiti kao model iz (2.10) u kojem se stopa rasta procijenjuje dnevno, tj. $m = 365$.
Model rasta populacije ima i razne druge primjene osim računanja stope rasta populacije. Na primjer, u financijskoj matematici se vrijednost uloženog novca V_0 po godišnjoj kamatnoj stopi r nakon n godina može prikazati kao

$$V_T = V_0(1 + r)^n, \tag{2.15}$$

pa se godišnja kamatna stopa može izraziti na sljedeći način

$$r = \left(\frac{V_T}{V_0}\right)^{\frac{1}{n}} - 1. \tag{2.16}$$

Poglavlje 3

Modeliranje prirodnog rasta

U ovom poglavlju promatramo prirodno kretanje stanovništva, odnosno u modelima se neće uzeti u obzir migracije stanovništva. U Odjeljku 3.1 promatramo stanovništvo podijeljeno prema spolu, a u Odjeljku 3.2 stanovništvo podijeljeno prema dobi.

3.1 Modeliranje prema spolu

Podijelimo stanovništvo prema spolu, na muškarce i žene. Po Malthusovom modelu stopa rasta po jedinici vremena i po stanovniku je konstantna. Međutim, ukupna stopa rasta ovisi o veličini stanovništva, odnosno o broju muškaraca i o broju žena pa je moguće da će koeficijenti koji predstavljaju ovu ovisnost biti različiti za različite spolove. Najjednostavnije poopćenje Malthusovog modela za dvije sastavnice dano je parom diferencijalnih jednadžbi

$$\frac{dm}{dt} = am + bf, \tag{3.1}$$

$$\frac{df}{dt} = gf + km, \tag{3.2}$$

gdje su m i f broj muškaraca, odnosno broj žena, a a, b, g i k su konstante.
Model se temelji na pretpostavci da su muškarci i žene predstavljeni aproksimativno jednakim udjelima u stanovništvu. Zanemarena je biološka pretpostavka da jedan muškarac može oploditi više žena u kraćem vremenskom periodu, a da jedna žena može zatrudnjeti samo jednom u kraćem vremenskom periodu. Također su u ovom modelu zanemarene migracije stanovništva. Ako su u i v stope nataliteta za muške, odnosno ženske djece po jednom paru, tada su $u/2$ i $v/2$ odgovarajuće stope nataliteta po jednom stanovniku. Neka su μ i ν stope mortaliteta muškaraca, odnosno žena po stanovniku. Tada ako zapišemo

$$a = \frac{u}{2} - \mu, \quad g = \frac{v}{2} - \nu, \tag{3.3}$$

$$b = \frac{u}{2}, \quad k = \frac{v}{2}, \tag{3.4}$$

dobivamo koeficijente iz jednadžbi (3.1) i (3.2). Da bismo riješili sustav, deriviramo jednadžbu (3.1) po t:

$$\frac{d^2m}{dt^2} = a\frac{dm}{dt} + b\frac{df}{dt}, \tag{3.5}$$

pa iz (3.2) nalazimo

$$\frac{d^2m}{dt^2} = a\frac{dm}{dt} + bgf + bkm. \tag{3.6}$$

Rješavanjem jednadžbe (3.1) po bf i uvrštavanjem u (3.6) slijedi

$$\frac{d^2m}{dt^2} = a\frac{dm}{dt} + g\frac{dm}{dt} + (bk - ag)m. \tag{3.7}$$

Jednadžba (3.7) ima sljedeći oblik

$$\frac{d^2m}{dt^2} + p\frac{dm}{dt} + qm = 0, \tag{3.8}$$

pri čemu su p i q konstante. Opće rješenje takve jednadžbe je dano sa

$$m(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}, \tag{3.9}$$

gdje su r_1 i r_2 korijeni kvadratne jednadžbe $x^2 + px + q = 0$, a konstante A i B se određuju iz početnih uvjeta (vidi [1]). U našem slučaju imamo $r_1 = \frac{1}{2}(a + g + h), r_2 = \frac{1}{2}(a + g - h)$, pri čemu je $h = \sqrt{(a - g)^2 + 4bk}$. Dakle, dobili smo $m(t)$ kao funkciju vremena:

$$m(t) = A\exp\left\{\frac{(a + g + h)t}{2}\right\} + B\exp\left\{\frac{(a + g - h)t}{2}\right\}, \tag{3.10}$$

iz koje nalazimo i funkciju $f(t)$:

$$f(t) = \frac{A(-a + g + h)}{2b}\exp\left\{\frac{(a + g + h)t}{t}\right\} + \frac{B(-a + g - h)}{2b}\exp\left\{\frac{(a + g - h)t}{2}\right\}. \tag{3.11}$$

Konstante A i B se određuju iz početnih uvjeta, pa za $t = 0$ dobivamo

$$A + B = m(0), \tag{3.12}$$

$$A(-a + g + h) + B(-a + g - h) = 2bf(0). \tag{3.13}$$

Od posebnog interesa će biti omjer spolova koji je definiran s

$$s(t) = \frac{m(t)}{f(t)} = \frac{1 + Be^{-ht}/A}{(g - a + h)/2b + Be^{-ht}(g - a - h)/2Ab}. \tag{3.14}$$

Kada t teži u beskonačnost, omjer spolova teži u

$$s(\infty) = \frac{2b}{g - a + h}. \tag{3.15}$$

U terminima stopa nataliteta i mortaliteta to je jednako

$$s(\infty) = \frac{2u}{(v - u) + 2(\mu - \nu) + \sqrt{(u + v)^2 + 4(\mu + \nu)^2 - 4(u - v)(\mu - \nu)}}. \tag{3.16}$$

Ako se stope nataliteta, odnosno stope mortaliteta razlikuju za muškarce i žene, omjer spolova može postati značajno veći ili manji od 1. Kada se to dogodi, muškarci ili žene mogu postati *bračno dominantni*. Na primjer, žene su bračno dominantne ako brojčano nadmašuju muškarce, što znači da skoro svaka žena može naći supruga, dok neki muškarci ne mogu naći suprugu. U tom slučaju, ukupna stopa nataliteta će pretežno ovisiti o broju žena. Ako su muškarci bračno dominantni, tada će ukupna stopa nataliteta pretežno ovisiti o broju muškaraca. Da bi se takve situacije izbjegle, jednadžbe (3.1) i (3.2) bi se morale prikladno modificirati.

Možemo promatrati i prag koji dijeli populaciju koja "eksplodira" i populaciju koja izumire. Iz jednadžbi (3.10) i (3.11) slijedi da je taj prag dan uvjetom $a + g = -h$, odnosno kada upotrijebimo definiciju od h dobivamo uvjet

$$(a + g)^2 = (a - g)^2 + 4kb. \tag{3.17}$$

Pojednostavljanjem dobivamo $ag = kb$, odnosno u terminima stopa nataliteta i mortaliteta,

$$(u - 2\mu)(v - 2\nu) = uv. \tag{3.18}$$

Ako su u i v pozitivni, faktori na lijevoj strani jednadžbe (3.18) moraju biti istog predznaka. Međutim, μ i ν će sigurno biti pozitivni pa jednakost neće moći biti zadovoljena ako je $(u - 2\mu) > 0$ i $(v - 2\nu) > 0$. Jednadžba može biti zadovoljena ako je $(u - 2\mu) < -u$ i $0 > (v - 2\nu) > -v$, ili ako je $0 > (u - 2\mu) > -u$ i $(v - 2\nu) < -v$. U prvom slučaju je $u < \mu$ i $v > \nu$, a u drugom je $u > \mu$ i $v < \nu$. Dakle, u svakom slučaju će se barem jedan spol brojčano smanjivati pa će konačno postojati prevelika razlika između brojnosti muškog i ženskog stanovništva, odnosno jednadžbe (3.1) i (3.2) se više neće moći primijeniti. Stoga zaključujemo da stanovništvo reprezentirano jednadžbama (3.1) i (3.2) može postati stabilno, odnosno da je omjer muškaraca i žena u stanovništvu jednak, jedino ako su za oba spola stope nataliteta, odnosno stope mortaliteta jednake.

3.2 Modeliranje prema dobi

U ovom odjeljku promatrat ćemo prirodno kretanje stanovništva koje je podijeljeno prema dobi. Pretpostavljamo da su udjeli muškaraca i žena u stanovništvu aproksimativno jednaki pa možemo promatrati stavnovništvo koje se sastoji samo od žena. Za stanovništvo koje ima konstantnu dobnu distribuciju kažemo da je stabilno. Stabilnost u ovom kontekstu ne mora implicirati konstantnu veličinu stanovništva.

Prvo ćemo promotriti model u kojemu su stope nataliteta i mortaliteta konstantne. Neka je $m(a)$ dobno specifična stopa fertiliteta, odnosno vjerojatnost da žena u dobi od a godina rodi kćer u danoj godini, $\mu(a)$ dobno specifična stopa mortaliteta za a-tu godinu života, odnosno vjerojatnost smrti žene u dobi od a godina te neka je $c(a)$ udio žena u dobi od a godina u ukupnoj populaciji žena. Tada je $c(a)da$ udio žena u dobi između a i $a+da$. Stopu nataliteta b i stopu mortaliteta d (broj rođene ženske djece, odnosno broj umrlih žena po godini na jednu ženu) možemo prikazati kao

$$b = \int_0^\infty c(a)m(a)\,da, \tag{3.19}$$

$$d = \int_0^\infty c(a)\mu(a)\,da. \tag{3.20}$$

Slijedi da je $r = b - d$ stopa rasta stanovništva, odnosno godišnji rast ženskog stanovništva po jednoj ženi.

Označimo s $N(t)$ ukupan broj žena u stanovništvu u trenutku t. Tada je po Malthusovom modelu, za početnu veličinu ženskog stanovništva $N(0)$, broj žena nakon t godina jednak $N(0)e^{rt}$, a broj žena prije a godina je jednak $N(0)e^{-ra}$. Neka je $p(a)$ vjerojatnost da proizvoljno odabrana žena preživi a-tu godinu života. Ona ovisi o broju umrlih žena u dobi između 0 i a godina. Stoga je

$$p(a) = e^{-\int_0^a \mu(x)\,dx}. \tag{3.21}$$

Deriviranjem obje strane u (3.21) po a, dobivamo vezu između stope mortaliteta $\mu(a)$ i vjerojatnost preživljavanja $p(a)$:

$$\mu(a) = -\frac{dp}{da}\frac{1}{p(a)}. \tag{3.22}$$

Sada možemo izračunati distribuciju dobi $c(a)$. Broj rođene ženske djece prije a godina je jednak $bN(0)e^{-ra}$, a broj žena koje su preživjele a-tu godinu života je jednak $bN(0)e^{-ra}p(a)$. Iz ovoga dobivamo

$$c(a) = \frac{bN(0)e^{-ra}p(a)}{N(0)} = be^{-ra}p(a). \tag{3.23}$$

Sada iz (3.23) i $b = \int_0^\infty c(a)m(a)\,da$ slijedi

$$1 = \frac{1}{b}\int_0^\infty c(a)m(a)\,da = \int_0^\infty e^{-ra}p(a)m(a)\,da. \tag{3.24}$$

Ako su $p(a)$ i $m(a)$ poznate, stopu rasta stanovništva r može se odrediti tako da zadovoljava jednadžbu (3.24). Stopa rasta r stabilne populacije može se izračunati numerički tako da prvo za poznate $m(a), p(a)$ i proizvoljni r izračunamo integral iz (3.24). Vrijednost integrala se mora smanjiti ako se r poveća. Stoga, ako je vrijednost integrala manja od 1, r se mora smanjiti, a ako je veća od 1, r se mora povećavati dok vrijednost integrala ne dosegne 1. Stopu rasta r moguće je izračunati i analitički, no za to je potrebno definirati dodatna obilježja stanovništva.
GRR (engl. Gross Reproduction Rate) je bruto stopa reprodukcije, definirana kao očekivani broj rođenih kćeri po ženi, uz pretpostavku da doživi kraj svog reproduktivnog perioda života: $GRR = \int_0^\infty m(a)\,da$.
NRR (engl. Net Reproduction Rate) je neto stopa reprodukcije, definirana kao očekivani broj rođenih kćeri po jednoj ženi: $NRR = \int_0^\infty m(a)p(a)\,da$. Očito je NRR manja od GRR jer neke žene neće preživjeti svoj reproduktivni period života.
Definirajmo

- $\bar{m} = \dfrac{\int_0^\infty am(a)\,da}{\int_0^\infty m(a)\,da}$, prosječna dob reprodukcije.
- $\sigma^2 = \dfrac{\int_0^\infty a^2m(a)\,da}{\int_0^\infty m(a)\,da} - \bar{m}^2$, varijanca dobno specifičnog fertiliteta.
- $T = \dfrac{\ln NRR}{r}$, prosječno generacijsko vrijeme u stabilnoj populaciji.

Aproksimativna formula za $r = \frac{\ln NRR}{T}$ je dana sa

$$r = \frac{\ln (GRR)p(\bar{m})}{\bar{m} - \sigma^2\mu(\bar{m}) + \ln (GRR)p(\bar{m})/2\bar{m}}. \tag{3.25}$$

Svi parametri o kojima ovisi stopa rasta stabilne populacije mogu se izračuati iz $m(a)$ i $\mu(a)$. Parcijalne derivacije od r po svakom od ovih parametara predstavljaju osjetljivost stope rasta na promjene tih parametara. Osjetljivost na promjene parametara ovisi o veličinama tih parametara, a one mogu biti osjetno različite za različite populacije (vidi [3]).

Važnost modela stabilne populacije dolazi iz činjenice da se distribucija dobi i stopa rasta svake populacije s fiksnim stopama dobno specifičnog nataliteta i mortaliteta moraju asimptotski približavati stabilnom stanju. U stvarnim populacijama su stope nataliteta i mortaliteta promijenjive, ali to, kao ni migracije, nije uzeto u obzir u ovom modelu. Međutim, kretanje prema stabilnom stanju, koje je neovisno o početnom stanju, karakterizira brojne dinamičke modele. Na primjer, u logističkom modelu koji je zadan sa (2.5), populacija teži svom nosivom kapacitetu Q koji je neovisan o početnom stanju P_0.

U nastavku promatramo dvije različite populacije i njihove dobne strukture. Omjer dobnih distribucija dvaju populacija dan je sa

$$\frac{c_2(a)}{c_1(a)} = \frac{b_2 p_2(a) e^{-r_2 a}}{b_1 p_1(a) e^{-r_1 a}}, \tag{3.26}$$

pri čemu je $r_2 > r_1$. Ako pretpostavimo da su dobno specifične stope mortaliteta, a otud i vjerojatnosti preživljavanja jednake za obje populacije, tada (3.26) postaje:

$$\frac{c_2(a)}{c_1(a)} = \frac{b_2}{b_1} e^{-\Delta r a}, \tag{3.27}$$

pri čemu je $\Delta r = r_2 - r_1$. Iz (3.27) vidimo da se omjer dobnih distribucija smanjuje kako se dob povećava. Nadalje, kako je $\int_0^\infty c_1(a)\,da = \int_0^\infty c_2(a)\,da = 1$, nijedna krivulja dobne distribucije ne leži potpuno ispod druge. Ako te dvije krivulje nisu identične, one se moraju sijeći za neku dob $\hat{a}$. To znači da će populacija s višom stopom rasta biti "mlađa" od druge populacije, odnosno imat će veću proporciju žena mlađih od $\hat{a}$ godina, a manju proporciju žena starijih od $\hat{a}$ godina. Dob $\hat{a}$ pri kojoj se krivulje sijeku je aproksimativno jednaka srednjoj vrijednosti prosječnih starosti dvaju populacija (vidi [3]).

Pretpostavimo da se dobno specifične stope fertiliteta dvaju populacija razlikuju samo za multiplikativnu konstantu, odnosno da je $m_2(a) = k m_1(a)$. S obzirom da još vrijedi i $p_1(a) = p_2(a)$, tada mora vrijediti i $T_1 = T_2 = T$, pri čemu je T prosječno generacijsko vrijeme definirano sa $e^{rT} = NRR$. Ako pretpostavimo da su početne veličine populacija jednake, vrijedi

$$N_1(T) = N(0) e^{r_1 T}, \quad N_2(t) = N(0) e^{r_2 T}. \tag{3.28}$$

Pošto je $m_2(a)/m_1(a) = k$, u prosjeku se k puta više djece godišnje rodi u populaciji s većom stopom rasta. Zato je

$$k = e^{\Delta r T} \;\Rightarrow\; \Delta r = \frac{\ln k}{T}. \tag{3.29}$$

S $\hat{a}$ je označena dob za koju je $c_1(a) = c_2(a)$ pa vrijedi

$$1 = \frac{c_2(\hat{a})}{c_1(\hat{a})} = \frac{b_2}{b_1} e^{-\Delta r \hat{a}}, \tag{3.30}$$

$$\frac{b_2}{b_1} = e^{\Delta r \hat{a}}. \tag{3.31}$$

Sada iz (3.29) i (3.31) slijedi

$$\ln \frac{b_2}{b_1} = \frac{\hat{a}}{T} \ln \frac{m_2(\hat{a})}{m_1(\hat{a})}, \tag{3.32}$$

$$\ln \frac{c_2(a)}{c_1(a)} = \frac{\hat{a} - a}{T} \ln \frac{m_2(\hat{a})}{m_1(\hat{a})}. \tag{3.33}$$

Ako je u jednadžbi (3.32) $\hat{a} > T$, tada stanovništvo s većim fertilitetom ima "povoljniju" dobnu distribuciju i ima više nego proporcionalno veću stopu nataliteta pa je tada omjer stopa nataliteta veći od omjera stopa fertiliteta. Jednadžba (3.33) predstavlja utjecaj stopa fertiliteta na dobnu distribuciju. Može se reći da u ovom modelu jedna populacija ima veći "efektivni fertilitet", odnosno da ima veću stopu rasta uz iste dobno specifične stope mortaliteta.

Pretpostavimo sada da su dobno specifične stope fertiliteta jednake za obje populacije. Iz jednadžbe (3.23) slijedi da nagib krivulje dobne distribucije ovisi o stopi rasta r i vjerojatnosti preživljavanja $p(a)$. Pretpostavimo da jedna populacija ima "povoljnije" dobno specifične stope mortaliteta, odnosno da ima veću vjerojatnost preživljavanja za sve dobi. Tada se očekuje da ta populacija, uz jednake stope feritliteta, ima veću stopu rasta. Veća stopa rasta vodi do strmijeg pada krivulje $c(a)$, dok veći $p(a)$ vodi do "ravnije" krivulje $c(a)$. Pretpostavimo da se dobno specifične stope mortaliteta dviju populacija razlikuju za konstantu, odnosno da je $\mu_2(a) = \mu_1(a) - k$. Iz jednadžbe (3.21) slijedi

$$p_2(a) = e^{-\int_0^a \mu_2(x)\,dx} = e^{-\int_0^a (\mu_1(x)-k)\,dx} = p_1(a)e^{ka}. \tag{3.34}$$

Zbog

$$\int_0^\infty e^{-r_1 a} p_1(a)m(a)\,da = \int_0^\infty c_1(a)\,da = 1 = \int_0^\infty c_2(a)\,da = \int_0^\infty e^{-r_2 a} p_2(a)m(a)\,da, \tag{3.35}$$

mora vrijediti

$$\frac{c_2(a)}{c_1(a)} = \frac{b_2}{b_1} e^{-ka} e^{ka} = \frac{b_2}{b_1}. \tag{3.36}$$

Međutim, populacije imaju iste dobno specifične stope fertiliteta pa imaju i iste stope nataliteta. Dakle, $b_2 = b_1$ pa dobne distribucije populacija moraju biti jednake.

Kada smo promatrali populacije s različitim stopama fertiliteta, pretpostavili smo da se one razlikuju za multiplikativnu konstantu. Iako ta pretpostavka nije toliko nerealistična, pretpostavka za proporcionalne dobno specifične stope mortaliteta jest nerealistična. Naime, u prošlom stoljeću stopa mortaliteta se značajno smanjila, no stope mortaliteta se nisu jednako smanjile za sve dobi. Najviše su se smanjile stope mortaliteta dojenčadi, dok je puno manji pad stope mortaliteta bio za srednju životnu dob (vidi [3]). Stoga se utjecaji promjene dobno specifičnih stopa mortaliteta ne mogu lako odrediti analitički, već se primjenjuju numeričke metode. Aproksimacija od $\ln x$, za vrijednosti od x blizu 1, je dana sa $(x-1)$. Stoga ako vjerojatnosti preživljavanja i stope rasta dvaju populacija nisu prerazličite, aproksimacija od $\ln \frac{p_2(a)e^{-r_2 a}}{p_1(a)e^{-r_1 a}}$ je dana sa

$$\frac{e^{-r_2 a} p_2(a)}{e^{-r_1 a} p_1(a)} - 1 \tag{3.37}$$

pa vrijedi

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \ln\left(\frac{p_2(a)}{p_1(a)} e^{-\Delta r a}\right) e^{-r_1 a} p_1(a) m(a)\, da \\
&= \int_0^\infty \left(\frac{e^{-r_2 a} p_2(a)}{e^{-r_1 a} p_1(a)} - 1\right) e^{-r_1 a} p_1(a) m(a)\, da \\
&= \int_0^\infty \left(e^{-r_2 a} p_2(a) m(a) - e^{-r_1 a} p_1(a) m(a)\right) da.
\end{aligned} \tag{3.38}$$

Također, vrijedi i

$$\begin{aligned}
b &= \int_0^\infty c(a) m(a)\, da = \int_0^\infty b e^{-ra} p(a) m(a)\, da \\
&\Rightarrow \int_0^\infty e^{-ra} p(a) m(a)\, da = 1,
\end{aligned} \tag{3.39}$$

što vrijedi za obje populacije, pa iz (3.38) i (3.39) slijedi

$$\int_0^\infty \ln\left(\frac{p_2(a)}{p_1(a)} e^{-\Delta r a}\right) e^{-r_1 a} p_1(a) m(a)\, da = 0. \tag{3.40}$$

Supstitucijom $e^{-r_1 a} p_1(a) = c_1(a)/b_1$ u (3.40) i množenjem s b_1 dobivamo

$$\int_0^\infty \left(\ln \frac{p_2(a)}{p_1(a)} - \Delta r a\right) c_1(a) m(a)\, da = 0. \tag{3.41}$$

Uz pretpostavku da su $p_1(a)$, $p_2(a)$, $m_1(a) = m_2(a) = m(a)$ poznate, želimo odrediti Δr. Za područje integracije može se uzeti segment od najmanje do najveće reproduktivne dobi (najčešće se uzima od 15 do 45 godina). Da bismo odredili Δr, prvo uzimamo proizvoljno malu vrijednost od Δr tako da je integral iz (3.41) pozitivan. Povećavanjem Δr se smanjuje vrijednost integrala dok ne postane jednak nuli, a pripadajuća vrijednost od Δr je upravo tražena vrijednost.

Još treba odrediti omjer b_2/b_1. Pod pretpostavkom da dobne distribucije nisu prerazličite, imamo aproksimaciju

$$\ln \frac{c_2(a)}{c_1(a)} \approx \frac{c_2(a)}{c_1(a)} - 1. \tag{3.42}$$

Tada vrijedi

$$\int_0^\infty \ln\Big(\frac{c_2(a)}{c_1(a)}\Big)c_1(a)\,da = 0, \tag{3.43}$$

odnosno

$$\int_0^\infty \Big(\ln\frac{p_2(a)}{p_1(a)} - \Delta ra + \ln\frac{b_2}{b_1}\Big)c_1(a)\,da = 0. \tag{3.44}$$

Sada su sve vrijednosti poznate osim $\ln b_2/b_1$. Kao i prije, za b_2/b_1 uzimamo proizvoljnu vrijednost te ako je vrijednost integrala pozitivna, smanjujemo vrijednost od b_2/b_1, a ako je negativna, povećavamo ju dok integral nije jednak nuli.

Dakle, konstantna razlika između dobno specifičnih stopa mortaliteta dvaju populacija ne uzrokuje različitost dobnih distribucija populacija s jednakim dobno specifičnim stopama fertiliteta.

Poglavlje 4

Modeliranje ukupnog rasta

U ovom poglavlju promatrat ćemo kretanje stanovništva uzrokovano prirodnim kretanjem i migracijama stanovništva. Stanovništvo će biti podijeljeno u tri dobne skupine. Skupina G_1 predstavlja djecu do 14. godine, skupina G_2 se sastoji od svih stanovnika između 15. i 64. godine života, a skupina G_3 se sastoji od stanovnika koji imaju više od 65 godina. Broj stanovnika koji pripada skupini G_j u trenutku t bit će označen s $x_j(t),\ j = 1, 2, 3$.

4.1 Parametri modela

Parametri koje ćemo koristiti u modelima su stopa nataliteta stanovništva te stopa mortaliteta, stopa imigracije i stopa emigracije za svaku dobnu skupinu, a one se najčešće prikazuju u obliku godišnjih stopa. Stopa nataliteta $b(i)$ predstavlja omjer broja rođene djece u vremenskom periodu $[t_{i-1}, t_i]$ i broja stanovnika koji pripadaju dobnoj skupini G_2 u t_{i-1}. Ovdje pretpostavljamo da je stopa plodnosti za dobne skupine G_1 i G_3 zanemariva. Dakle,

$$b(i) = \frac{\text{broj rođenih tijekom } [t_{i-1}, t_i]}{x_2(t_{i-1})}. \tag{4.1}$$

Stopa mortaliteta $d_j(i)$ pretstavlja omjer broja umrlih u dobnoj skupini G_j u periodu $[t_{i-1}, t_i]$ i broja stanovnika skupine G_j u trenutku t_{i-1}:

$$d_j(i) = \frac{\text{broj umrlih iz } G_j \text{ tijekom } [t_{i-1}, t_i]}{x_j(t_{i-1})}. \tag{4.2}$$

Stopa imigracije $\tau_j(i)$ predstavlja omjer broja novih imigranata koji pripadaju dobnoj skupini G_j tijekom vremenskog perioda $[t_{i-1}, t_i]$ i broja stanovnika skupine G_j u trenutku t_{i-1}:

$$\tau_j(i) = \frac{\text{broj iseljenih iz } G_j \text{ tijekom } [t_{i-1}, t_i]}{x_j(t_{i-1})}. \tag{4.3}$$

Stopa emigracije $r_j(i)$ predstavlja omjer broja emigranata koji pripadaju dobnoj skupini G_j tijekom vremenskog perioda $[t_{i-1}, t_i]$ i broja stanovnika skupine G_j u trenutku t_{i-1}:

$$r_j(i) = \frac{\text{broj useljenih iz } G_j \text{ tijekom } [t_{i-1}, t_i]}{x_j(t_{i-1})}. \tag{4.4}$$

Stopa prelaska iz dobne skupine G_1 u dobnu skupinu G_2 se označava s $p_{12}(i)$ i predstavlja broj stanovnika u dobi od 14 godina koji tijekom $[t_{i-1}, t_i]$ prelaze u skupinu G_2, po broju stanovnika skupine G_1 u t_{i-1}. Slično se definira i $p_{23}(i)$. Imamo:

$$p_{12}(i) = \frac{\text{broj stanovnika iz } G_1 \text{ koji tijekom } [t_{i-1}, t_i] \text{ prelaze u } G_2}{x_1(t_{i-1})}, \tag{4.5}$$

$$p_{23}(i) = \frac{\text{broj stanovnika iz } G_2 \text{ koji tijekom } [t_{i-1}, t_i] \text{ prelaze u } G_3}{x_2(t_{i-1})}. \tag{4.6}$$

4.2 Linearni deterministički model

U ovom odjeljku najprije ćemo promatrati diskretni linearni model, a kasnije i neprekidni. Prvo promatramo stanovništvo skupine G_1. Rast broja stanovnika u G_1 ovisi o broju rođene djece čiji roditelji pripadaju skupini G_2 i o broju novih imigranata, dok pad broja stanovnika u G_1 ovisi o broju umrlih, broju emigranata te o broju prelazaka u skupinu G_2. Ako označimo $\Delta x_j(t_i) := x_j(t_i) - x_j(t_{i-1})$, $\Delta t_i := t_i - t_{i-1}$, $j = 1, 2, 3$, stopa rasta stanovništva u dobnoj skupini G_1 će biti jednaka

$$\frac{\Delta x_1(t_i)}{\Delta t_i} = b(i)x_2(t_{i-1}) - d_1(i)x_1(t_{i-1}) - p_{12}(i)x_1(t_{i-1}) - r_1(i)x_1(t_{i-1}) + \tau_1(i)x_1(t_{i-1}). \tag{4.7}$$

Stope rasta za dobne skupine G_2 i G_3 računamo slično:

$$\frac{\Delta x_2(t_i)}{\Delta t_i} = p_{12}(i)x_1(t_{i-1}) - p_{23}(i)x_2(t_{i-1}) - d_2(i)x_2(t_{i-1}) - r_2(i)x_2(t_{i-1}) + \tau_2(i)x_2(t_{i-1}), \tag{4.8}$$

$$\frac{\Delta x_3(t_i)}{\Delta t_i} = p_{23}(i)x_2(t_{i-1}) - d_3(i)x_3(t_{i-1}) - r_3(i)x_3(t_{i-1}) + \tau_3(i)x_3(t_{i-1}). \tag{4.9}$$

Stopa rasta ukupnog stanovništva se dobije zbrajanjem modela iz (4.7), (4.8) i (4.9):

$$\frac{\Delta x_{\text{total}}(t_i)}{\Delta t_i} = [-d_1 - r_1 + \tau_1]x_1(t_{i-1}) + [b - d_2 - r_2 + \tau_2]x_2(t_{i-1}) + [-d_3 - r_3 + \tau_3]x_3(t_{i-1}). \tag{4.10}$$

Definirajmo vektor stanja x kao

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \tag{4.11}$$

Iz diskretnog modela prelazimo u neprekidni tako da pustimo limes kada $\max_i \Delta t_i \to 0$. Sada se matematički modeli dobnih skupina G_1, G_2, G_3 mogu prikazati diferencijalnom jednadžbom

$$\frac{dx(t)}{dt} = A(t)x(t), \quad x(0) = x_0, \quad t \geq 0, \tag{4.12}$$

pri čemu je matrica sustava A kvadratna matrica reda 3 dana sa

$$A = \begin{bmatrix} -(d_1 + p_{12} + r_1 - \tau_1) & b & 0 \\ p_{12} & -(p_{23} + d_2 + r_2 - \tau_2) & 0 \\ 0 & p_{23} & -(d_3 + r_3 - \tau_3) \end{bmatrix}. \tag{4.13}$$

Slijedi da je stopa rasta cijelog stanovništva u neprekidnom vremenu dana sa

$$\begin{aligned} \frac{dx(t)}{dt} &:= \frac{d}{dt}(x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)) \\ &= [-d_1(t) - r_1(t) + \tau_1(t)]x_1(t) + [b(t) - d_2(t) - r_2(t) \\ &\quad + \tau_2(t)]x_2(t) + [-d_3(t) - r_3(t) + \tau_3(t)]x_3(t). \end{aligned} \tag{4.14}$$

Godišnja stopa rasta

U Odjeljku 2.3 stopa rasta stanovništva definirana je kao

$$r = m\left[\left(\frac{X_t}{X_0}\right)^{\frac{1}{mt}} - 1\right],$$

gdje je X_t veličina stanovništva nakon t godina, a X_0 početna veličina stanovništva. Ako pretpostavimo da se stopa rasta procijenjuje jednom godišnje ($m = 1$) te da je vremenski period tijekom kojeg se ona procijenjuje također jedna godina ($\Delta t_i = 1$), tada ju možemo izračunati na sljedeći način

$$r = \frac{X_1 - X_0}{X_0}. \tag{4.15}$$

Sada se r naziva godišnja stopa rasta stanovništva. Iz modela (4.7), (4.8) i (4.9) za $\Delta t_i = 1$ te iz (4.15) slijede godišnje stope rasta dobnih skupina G_1, G_2 i G_3, koje ćemo označavati s R_1, R_2 i R_3, respektivno:

$$R_1 := \frac{x_1(t_i) - x_1(t_{i-1})}{x_1(t_{i-1})} = b\frac{x_2(t_{i-1})}{x_1(t_{i-1})} - (d_1 + p_{12} + r_1 - \tau_1), \tag{4.16}$$

$$R_2 := \frac{x_2(t_i) - x_2(t_{i-1})}{x_2(t_{i-1})} = p_{12}\frac{x_1(t_{i-1})}{x_2(t_{i-1})} - (d_2 + p_{23} + r_2 - \tau_2), \tag{4.17}$$

$$R_3 := \frac{x_3(t_i) - x_3(t_{i-1})}{x_3(t_{i-1})} = p_{23}\frac{x_2(t_{i-1})}{x_3(t_{i-1})} - (d_3 + r_3 - \tau_3). \tag{4.18}$$

Godišnja stopa rasta cijele populacije je dana sa

$$\begin{aligned} R_{\text{total}} &:= \frac{\Delta x_1(t_i) + \Delta x_2(t_i) + \Delta x_3(t_i)}{x_1(t_{i-1}) + x_2(t_{i-1}) + x_3(t_{i-1})} \\ &= \frac{(-d_1 - r_1 + \tau_1)x_1(t_{i-1}) + (b - d_2 - r_2 + \tau_2)x_2(t_{i-1})}{x_1(t_{i-1}) + x_2(t_{i-1}) + x_3(t_{i-1})} \\ &\quad + \frac{(-d_3 - r_3 + \tau_3)x_3(t_{i-1})}{x_1(t_{i-1}) + x_2(t_{i-1}) + x_3(t_{i-1})}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

4.3 Linearni stohastički model

Postoje razni izvori nesigurnosti i slučajnosti koji utječu na dinamičke modele. Stoga u ovom odjeljku promatramo stohastičku modifikaciju determinističkog linearnog modela iz 4.2. Da bismo dobili stohastički model, u deterministički model dodajemo šum koji predstavlja slučajnu grešku koja je posljedica nekih neočekivanih događaja ili zbog nepravilnosti u procjeni veličine i sastava stanovništva (vidi [4]).

Pretpostavimo da broj rođenih, umrlih, useljenih i doseljenih stanovnika te stope prelaska ovise o aditivnom Gaussovom šumu s očekivanjem nula i konačnom varijancom. Tada se slučajni dio cijelog modela može modelirati jednim normalno distribuiranim Gaussovim šumom s očekivanjem nula i varijancom $\sigma^2(t)$ u svakom trenutku t. Nadalje, ako pretpostavimo da je šum bijeli, svaka jednadžba modela uključivat će jedan aditivni član. Stohastički linearni model je dan trima stohastičkim diferencijalnim jednadžbama:

$$\frac{dx_1(t)}{dt} = b(t)x_2(t) - (d_1(t) + p_{12}(t) + r_1(t) - \tau_1(t))x_1(t) + \sigma_1(t)\frac{dW_1(t)}{dt}, \tag{4.20}$$

$$\frac{dx_2(t)}{dt} = p_{12}(t)x_1(t) - (d_2(t) + p_{23}(t) + r_2(t) - \tau_2(t))x_2(t) + \sigma_2(t)\frac{dW_2(t)}{dt}, \tag{4.21}$$

$$\frac{dx_3(t)}{dt} = p_{23}(t)x_2(t) - (d_3(t) + r_3(t) - \tau_3(t))x_3(t) + \sigma_3(t)\frac{dW_3(t)}{dt}. \tag{4.22}$$

Radi jednostavnijeg zapisa, definirajmo $\dot{x}_j(t) := dx_j(t)/dt$ i $\dot{W}_j(t) := dW_j(t)/dt,\ j = 1, 2, 3$. Tada $\dot{x}_j(t)$ označava stopu rasta dobne skupine G_j, a $\dot{W}_j(t) \sim N(0, 1)$ su nezavisne i jednako distribuirane, iz čega slijedi $\sigma_j(t)\dot{W}_j(t) \sim N(0, \sigma_j^2(t)),\ j = 1, 2, 3$. Gornje jednadžbe se mogu zapisati u matričnoj formi

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \Sigma(t)\dot{W}(t), \quad t \geq 0, \tag{4.23}$$

gdje je A matrica definirana s (4.13), $\dot{W}(t) = \begin{bmatrix} \dot{W}_1(t) & \dot{W}_2(t) & \dot{W}_3(t) \end{bmatrix}^T$, a matrica Σ je definirana s

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix}. \tag{4.24}$$

Iz jednadžbi (4.20),(4.21) i (4.22) slijedi izraz za stopu rasta cijelog stanovništva

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) :=& \frac{d}{dt}(x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)) \\ =&(-d_1(t) - r_1(t) + \tau_1(t))x_1(t) + (b(t) - d_2(t) - r_2(t) + \tau_2(t))x_2(t) \\ &+ (-d_3(t) - r_3(t) + \tau_3(t))x_3(t) + \sum_{j=1}^{3} \sigma_j(t)\dot{W}_j(t). \end{aligned} \tag{4.25}$$

Godišnja stopa rasta

Slično kao u Odjeljku 4.2, računamo godišnju stopu rasta stohastičkog modela za dobne skupine te za ukupno stanovništvo. Godišnje stope rasta za G_1, G_2 i G_3 su dane sa

$$R_1 = b\frac{x_2(t_{i-1})}{x_1(t_{i-1})} - (d_1 + p_{12} + r_1 - \tau_1) + \frac{\sigma_1 \dot{W}_1(t)}{x_1(t_{i-1})}, \tag{4.26}$$

$$R_2 = p_{12}\frac{x_1(t_{i-1})}{x_2(t_{i-1})} - (d_2 + p_{23} + r_2 - \tau_2) + \frac{\sigma_2 \dot{W}_2(t)}{x_2(t_{i-1})}, \tag{4.27}$$

$$R_3 = p_{23}\frac{x_2(t_{i-1})}{x_3(t_{i-1})} - (d_3 + r_3 - \tau_3) + \frac{\sigma_3 \dot{W}_3(t)}{x_3(t_{i-1})}. \tag{4.28}$$

Godišnja stopa rasta cijele populacije za stohastički model je dana sa

$$\begin{aligned} R_{\text{total}} =& \frac{(-d_1 - r_1 + \tau_1)x_1(t_{i-1}) + (b - d_2 - r_2 + \tau_2)x_2(t_{i-1})}{x_1(t_{i-1}) + x_2(t_{i-1}) + x_3(t_{i-1})} \\ &+ \frac{(-d_3 - r_3 + \tau_3)x_3(t_{i-1}) + \sigma_1\dot{W}_1(t) + \sigma_2\dot{W}_2(t) + \sigma_3\dot{W}_3(t)}{x_1(t_{i-1}) + x_2(t_{i-1}) + x_3(t_{i-1})}. \end{aligned} \tag{4.29}$$

4.4 Lognormalni stohastički model

Pretpostavimo da stopa nataliteta, stope mortaliteta, emigracije i imigracije za svaku dobnu skupinu te stope prelaska ovise o aditivnim slučajnim procesima, tj.

$$b(t) \;\rightarrow\; b(t) + \dot{W}_b(t),$$

$$\begin{aligned}
d_j(t) &\to d_j(t) + \dot{W}_{d_j}(t),\\
\tau_j(t) &\to \tau_j(t) + \dot{W}_{\tau_j}(t),\\
r_j(t) &\to r_j(t) + \dot{W}_{r_j}(t),\\
p_{12}(t) &\to p_{12}(t) + \dot{W}_{p_{12}}(t),\\
p_{23}(t) &\to p_{23}(t) + \dot{W}_{p_{23}}(t),
\end{aligned}$$

za $j = 1, 2, 3$. Sada ako definiramo:

$$\begin{aligned}
\dot{W}_1 &:= \dot{W}_{d_1} + \dot{W}_{p_{12}} + \dot{W}_{r_1} + \dot{W}_{\tau_1},\\
\dot{W}_2 &:= \dot{W}_{d_2} + \dot{W}_{p_{23}} + \dot{W}_{r_2} + \dot{W}_{\tau_2},\\
\dot{W}_3 &:= \dot{W}_{d_3} + \dot{W}_{r_3} + \dot{W}_{\tau_3},
\end{aligned} \tag{4.30}$$

onda iz (4.12) dolazimo do sljedećih stohastičkih diferencijalnih jednadžbi:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= (b(t) + \dot{W}_b(t))x_2(t) - (d_1(t) + p_{12}(t) + r_1(t) - \tau_1(t) - \dot{W}_1(t))x_1(t),\\
\dot{x}_2(t) &= (p_{12}(t) + \dot{W}_{p_{12}}(t))x_1(t) - (d_2(t) + p_{23}(t) + r_2(t) - \tau_2(t) - \dot{W}_2(t))x_1(t),\\
\dot{x}_3(t) &= (p_{23}(t) + \dot{W}_{p_{23}}(t))x_2(t) - (d_3(t) + r_3(t) - \tau_3(t) - \dot{W}_3(t))x_3(t).
\end{aligned} \tag{4.31}$$

U nastavku promatramo poopćenje gornjeg modela. Prisjetimo se najprije definicije Brownovog gibanja. Pretpostavimo da se nalazimo u vjerojatnosnom prostoru $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Definicija 4.4.1. *Slučajan proces* $W = (W(t), t \geq 0)$ *je* Brownovo gibanje *ako vrijedi:*

(i) *Putovi* $t \mapsto W(t)(\omega)$ *su neprekidne funkcije sa* $\mathbb{R}_+$ *u* $\mathbb{R}$ *(za g.s.* $\omega \in \Omega$*).*

(ii) $W(0) = 0$.

(iii) *Za sve* $0 = t_0 < t_1 < ... < t_m$ *su prirasti*

$$W(t_1) = W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), ..., W(t_m) - W(t_{m-1})$$

nezavisni.

(iv) *Za sve* $0 \leq s < t$ *je prirast* $W(t) - W(s)$ *normalno distribuiran s očekivanjem nula i varijancom* $t - s$ (vidi [5]).

Pretpostavimo da je $S = \begin{bmatrix} S_1 & S_2 & \dots & S_m \end{bmatrix}^T$, pri čemu $S_i : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, ..., m$ označavaju broj rođenih, umrlih, iseljenih, useljenih itd. Tada se pretpostavlja da je za svaki i, S_i lognormalna slučajna varijabla te da zadovoljava sljedeću stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dS_i(t) = f_i(x(t), S(t))S_i(t)dt + g_i(x(t), S(t))S_i(t)dV_i(t), \quad S_i(0) = S_{0,1}, \tag{4.32}$$

pri čemu je $x : \Omega \times [0, T] \to \mathbb{R}^n$ slučajan proces koji opisuje kretanje stanovništva, a $V_i = (V_i(t) : t \geq 0)$ Brownovo gibanje za $i = 1, ..., m$, što znači da je $\frac{dV_i(t)}{dt}$ bijeli šum za $i = 1, ..., m$. Poseban slučaj od (4.32) je dan sa

$$dS_i(t) = Cx(t)S_i(t)dt + DS_i(t)dV_i(t), \quad S_i(0) = S_{0,i}, \tag{4.33}$$

gdje su C i D matrice prikladnih dimenzija. Ako pretpostavimo da je $dy_i(t) := \frac{dS_i(t)}{S_i(t)}$, $i = 1, ..., m$, tada svaki $y_i(t)$ zadovoljava stohastičku diferencijalnu jednadžbu

$$dy_i(t) = Cx(t)dt + DdV_i(t). \tag{4.34}$$

Ovdje $y_i(t)$ predstavlja postotnu promjenu od S_i koja se odnosi na zašumljene podatke dobivene ankiranjem stanovništva, a $dV_i(t)$ je prirast Brownovog gibanja. Slučajan proces $x(t)$ je modeliran pomoću linearne stohastičke diferencijalne jednadžbe

$$dx(t) = Ax(t)dt + BdW(t), \quad x(0) \sim N(m, \Sigma_0), \tag{4.35}$$

gdje su $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $W = (W(t) : t \geq 0)$ je vektorsko Brownovo gibanje takvo da $W(t) \sim N(0, I_{m\times m}t)$ te su $V_i(t)$, $i = 1, ..., m$ i $W(t)$ nezavisni od početnog stanja $x(0)$.

Lognormalni stohastički model (4.32) je prikladniji za modeliranje kretanja stanovništva jer je općenitiji od linearnog stohastičkog modela, a poseban slučaj koji je dan jednadžbama (4.33) i (4.35) se može koristiti u algoritmima koji procjenjuju kretanje stanovništva kako bi se izveli parametri modela za eksperimentalne podatke (vidi [4]).

4.5 Testiranje modela

Promatramo stanovništvo Hrvatske u periodu između 2001. i 2016. godine te je ono podijeljeno u tri dobne skupine G_1, G_2 i G_3 definirane na početku Poglavlja 4. Svi podaci koji će biti ovdje prikazani su objavljeni od strane Državnog zavoda za statistiku Republike Hrvatske [7]. Državni zavod za statistiku svake godine objavljuje procijenjene podatke o ukupnom stanovništvu Hrvatske. Podaci koje ćemo ovdje koristiti su broj stanovnika, broj rođene djece, broj umrlih, useljenih i doseljenih stanovnika po dobnim skupinama te broj stanovnika koji prelaze iz jedne dobne skupine u drugu za svaku godinu. Također, svi podaci ovdje korišteni su godišnje procjene stvarnog stanja stanovništva na datum 31.12. U Tablicama 4.1, 4.2 i 4.3 su prikazani podaci za tri dobne skupine.

U prvoj dobnoj skupini je u promatranom periodu stopa rasta negativna u svakoj godini. Iako se broj umrle djece smanjuje, smanjuje se broj rođene djece, a povećava broj iseljene djece, što je uzrok stalnom padu broja stanovnika dobne skupine G_1. U skupini G_2 je također prisutan pad broja stanovnika, a zadnji put kada je zabilježena pozitivna stopa rasta je bilo 2006. godine. Najviše je na to utjecao broj iseljenih stanovnika koji se u zadnjih nekoliko godina promatranog razdoblja drastično povećao. Jedino je kod dobne skupine G_3 prisutan rast stanovništva tijekom gotovo cijelog promatranog razdoblja.

Godina	Stanovništvo	Rođeni	Umrli	Doseljeni	Iseljeni	Stopa rasta
2002.	706091	40094	509	3059	953	-1.37%
2003.	694854	39668	481	2119	562	-1.59%
2004.	686534	40307	464	2581	451	-1.20%
2005.	680492	42492	400	2474	310	-0.88%
2006.	672444	41446	380	2409	494	-1.18%
2007.	668225	41910	357	2144	432	-0.63%
2008.	664020	43753	346	1924	373	-0.63%
2009.	660698	44577	320	1289	471	-0.50%
2010.	654912	43361	334	634	930	-0.88%
2011.	645167	41197	294	1198	1047	-1.49%
2012.	636539	41771	341	679	796	-1.34%
2013.	627638	39939	281	776	1850	-1.40%
2014.	621050	39566	265	782	1616	-1.05%
2015.	611472	37503	234	812	4283	-1.54%
2016.	603450	37537	245	883	5509	-1.31%

Tablica 4.1: Podaci za dobnu skupinu G_1.

Godina	Stanovništvo	Umrli	Doseljeni	Iseljeni	Prelasci iz G_1	Stopa rasta
2002.	2874756	11322	15595	9805	51829	-0.18%
2003.	2875455	11250	14603	5137	52330	0.02%
2004.	2877177	10590	14375	4879	50432	0.06%
2005.	2876255	10780	10666	3754	50410	-0.03%
2006.	2879008	10381	11475	5463	50973	0.10%
2007.	2875029	10505	11428	6639	47162	-0.14%
2008.	2874829	10798	11514	5513	48672	-0.01%
2009.	2874575	10243	6439	7582	48284	-0.01%
2010.	2874289	10140	3887	7309	48851	-0.01%
2011.	2865462	10085	6649	10077	50847	-0.31%
2012.	2852460	9918	7566	10367	50050	-0.45%
2013.	2836487	9562	8687	11711	47466	-0.56%
2014.	2809119	9371	8789	17378	45003	-0.96%
2015.	2774312	9612	9585	23175	43266	-1.24%
2016.	2736501	8890	11579	28882	40573	-1.36%

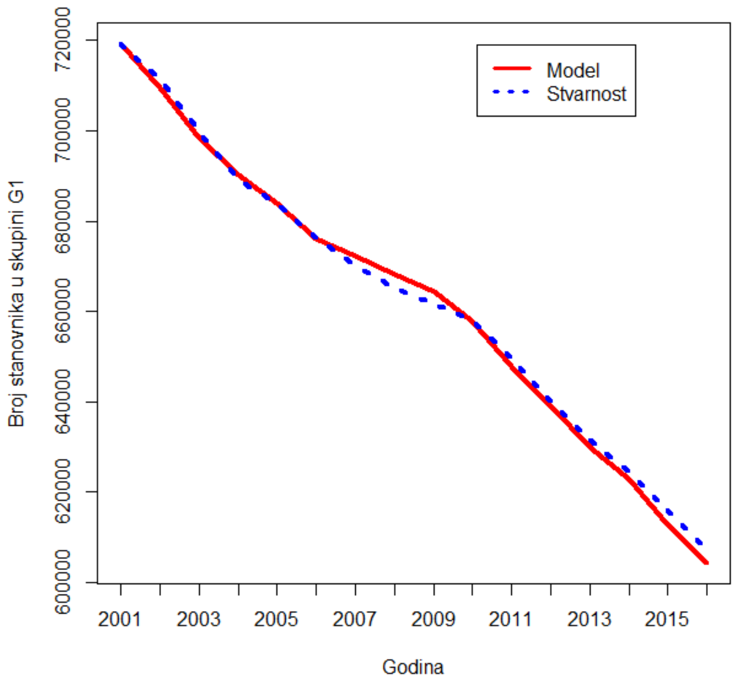
Tablica 4.2: Podaci za dobnu skupinu G_2.

Godina	Stanovništvo	Umrli	Doseljeni	Iseljeni	Prelasci iz G_2	Stopa rasta
2002.	724440	38832	1711	1009	51227	2.09%
2003.	735333	40933	1733	835	50843	1.50%
2004.	747083	38792	1427	1482	50452	1.60%
2005.	755687	40652	1090	1948	46924	1.15%
2006.	762041	39659	1094	1735	49371	0.84%
2007.	768688	41517	1050	1931	44435	0.87%
2008.	770933	41046	1103	1602	39910	0.29%
2009.	767568	41822	740	1887	36194	-0.44%
2010.	760655	41670	464	1621	47137	-0.90%
2011.	765355	40662	687	1575	50686	0.62%
2012.	773141	41550	714	1714	51285	1.02%
2013.	782684	40573	915	1701	54891	1.23%
2014.	795147	41200	1067	1864	55477	1.59%
2015.	804885	44350	1309	2193	52680	1.22%
2016.	814262	42425	1523	2045	56588	1.17%

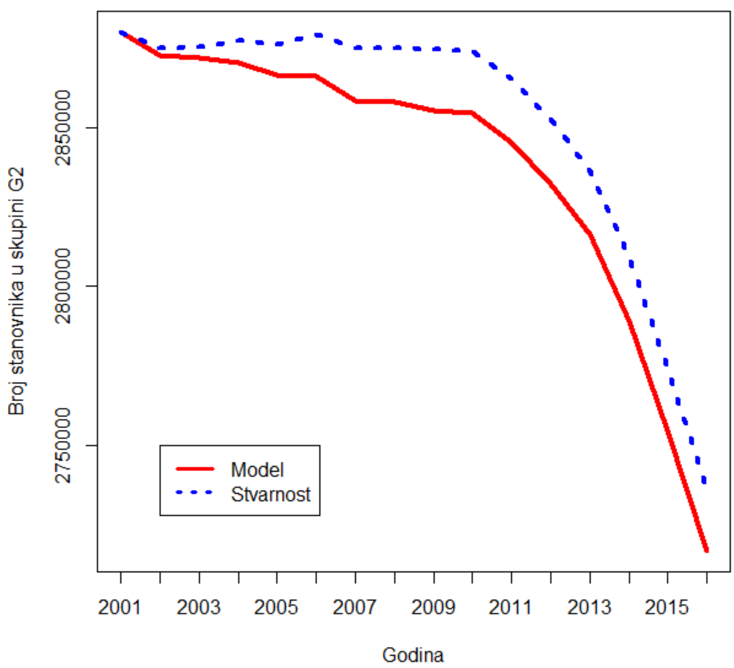
Tablica 4.3: Podaci za dobnu skupinu G_3.

Na temelju danih podataka, ispitat ćemo linearni deterministički model koji je dan jednadžbama (4.7), (4.8), (4.9) i (4.10) te model za godišnju stopu rasta dan jednadžbama (4.16), (4.17), (4.18) i (4.19). Svi parametri modela su određeni iz danih podataka. Na primjer, parametar d_2 (stopa mortaliteta dobne skupine G_2) za 2016. godinu je dobiven dijeljenjem broja umrlih stanovnika iz skupine G_2 u 2016. godini s ukupnim brojem stanovnika skupine G_2 krajem 2015. godine. Za početno stanje, odnosno za broj stanovnika u 2001. godini uzet je stvaran broj stanovnika te godine za svaku dobnu skupinu.

Kako bismo ispitali točnost matematičkih modela u odnosu na stvarne podatke, prikazali smo rezultate modela grafički zajedno sa stvarnim podacima te smo izračunali relativne pogreške za svaku dobnu skupinu i za ukupno stanovništvo. Stanovništvo dobiveno linearnim determinističkim modelom u usporedbi sa stvarnim stanovništvom Hrvatske u periodu od 2001. do 2016. godine prikazano je grafički po dobnim skupinama na Slikama 4.1a, 4.1b, 4.1c te je na Slici 4.1d prikazano ukupno stanovništvo. Također su grafički prikazane i godišnje stope rasta dobivene modelom u usporedbi sa stvarnim stopama rasta po dobnim skupinama i za cijelo stanovništvo na Slikama 4.2a, 4.2b, 4.2c i 4.2d. Punom linijom su prikazani podaci generirani modelom, a isprekidanom linijom prikazani su podaci o stanovništvu procijenjeni od strane Državnog zavoda za statistiku. U Tablici 4.4 prikazane su relativne greške linearnog determinističkog modela u odnosnu na stvarno kretanje ukupnog stanovništva i stanovništva po dobnim skupinama, a prikazane su u postocima.

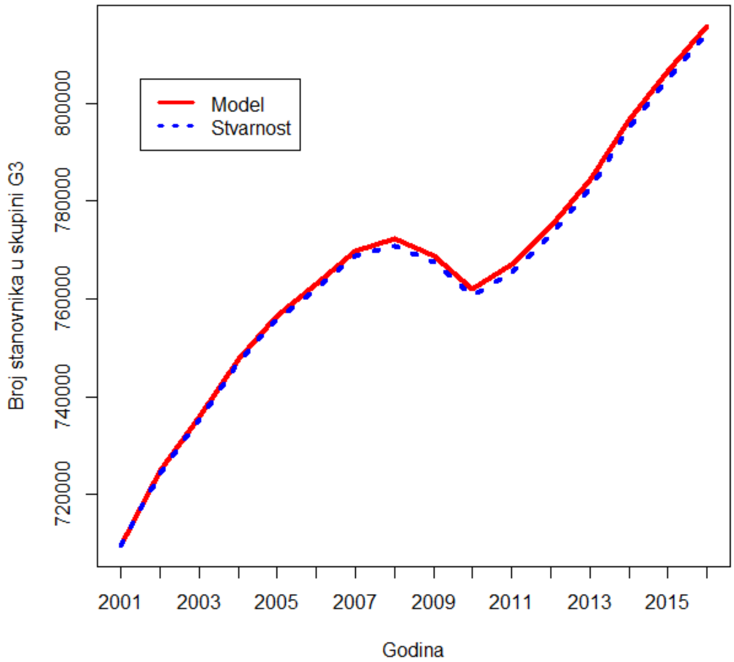


(a) Stanovništvo skupine G_1.

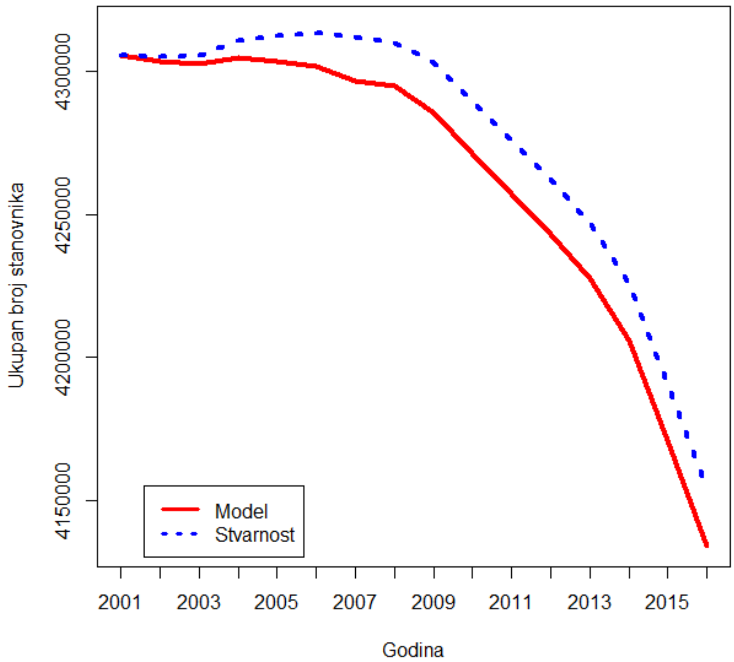


(b) Stanovništvo skupine G_2.

Slika 4.1: Usporedba stvarnog stanovništva i stanovništva dobivenog modelom iz 4.2.

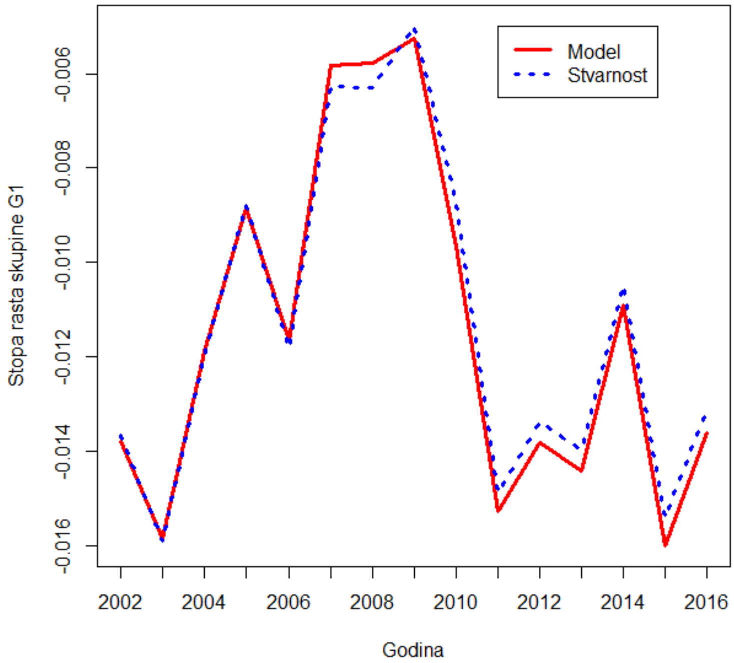


(c) Stanovništvo skupine G_3.

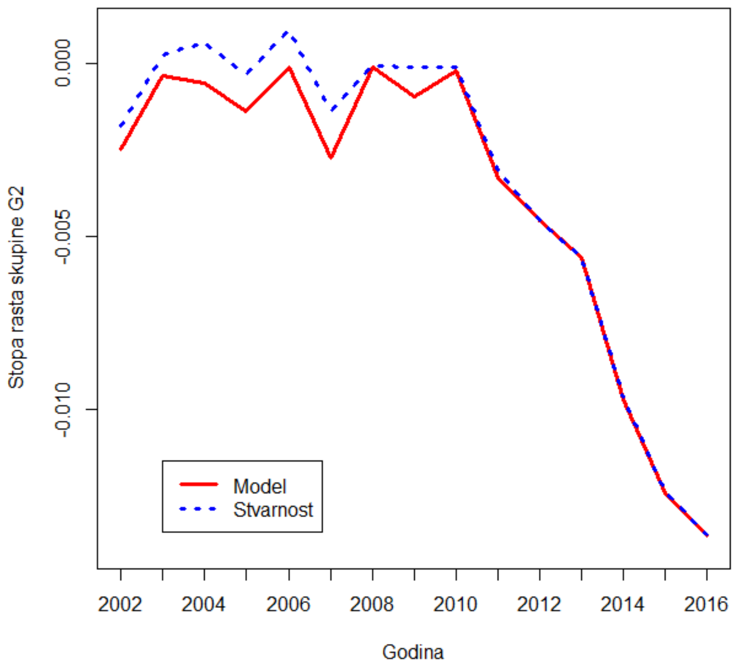


(d) Ukupno stanovništvo.

Slika 4.1: Usporedba stvarnog stanovništva i stanovništva dobivenog modelom iz 4.2.

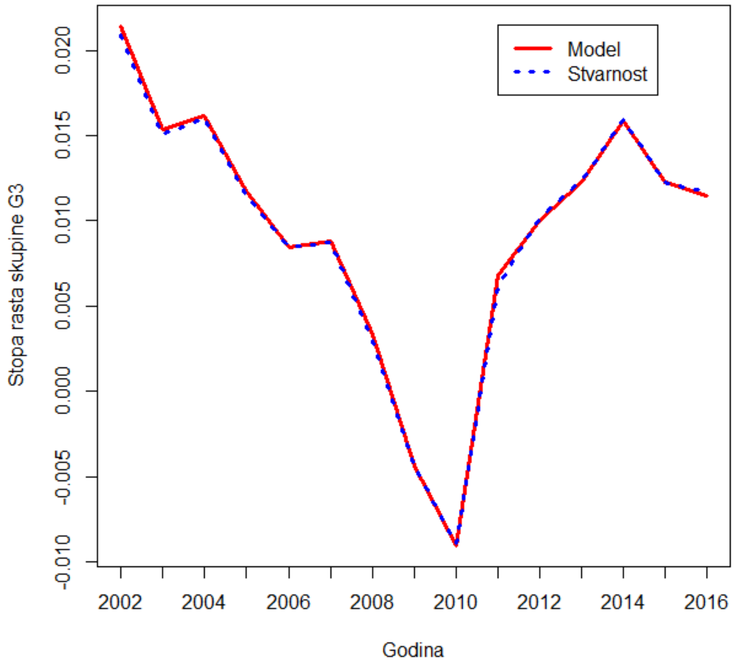


(a) Stopa rasta skupine G_1.

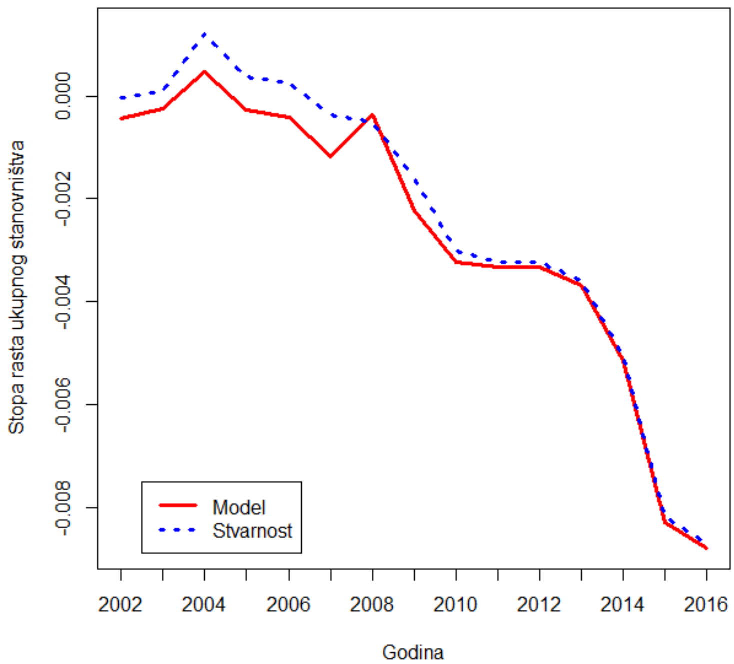


(b) Stopa rasta skupine G_2.

Slika 4.2: Usporedba stvarne stope rasta stanovništva i stope rasta dobivene modelom iz 4.2.



(c) Stopa rasta skupine G_3.



(d) Stopa rasta ukupng stanovništva.

Slika 4.2: Usporedba stvarne stope rasta stanovništva i stope rasta dobivene modelom iz 4.2.

Godina	Skupina G_1	Skupina G_2	Skupina G_3	Ukupno stanovništvo
2002.	0.013%	0.070%	0.047%	0.041%
2003.	0.007%	0.128%	0.080%	0.073%
2004.	0.000%	0.242%	0.098%	0.145%
2005.	0.005%	0.346%	0.121%	0.211%
2006.	0.012%	0.451%	0.127%	0.277%
2007.	0.055%	0.585%	0.133%	0.358%
2008.	0.107%	0.589%	0.175%	0.345%
2009.	0.081%	0.675%	0.175%	0.407%
2010.	0.010%	0.684%	0.172%	0.429%
2011.	0.051%	0.707%	0.235%	0.439%
2012.	0.096%	0.707%	0.219%	0.448%
2013.	0.141%	0.709%	0.207%	0.456%
2014.	0.181%	0.714%	0.198%	0.464%
2015.	0.242%	0.718%	0.198%	0.472%
2016.	0.291%	0.719%	0.183%	0.480%

Tablica 4.4: Relativne greške linearnog determinističkog modela za ukupno stanovništvo i dobne skupine.

Iz Tablice 4.4 vidimo da je najveća relativna greška za dobnu skupinu G_1 izračunata za 2016. godinu te da je jednaka 0.291%. Tada je broj stanovnika do 14 godina prema Državnom zavodu za statistiku bio jednak 603450, a prema modelu je on jednak 601693, pa apsolutna greška iznosi 1757. Za skupinu G_2 najveća relativna greška je također u 2016. godini, a iznosi 0.719%. Procijenjeno stanovništvo skupine G_2 za tu godinu iznosi 2736501, a modelom je dobiveno 2716821 pa apsolutna greška iznosi 19680. Za skupinu G_3 je najveća relativna greška 0.235% i to za 2011. godinu kada je procijenjeno stanovništvo skupine G_3 bilo jednako 765355, a stanovništvo dobiveno modelom 767154, što znači da je apsolutna pogreška za 2011. godinu jednaka 1799. Za ukupno stanovnišvo je najveća relativna greška izmjerena 2016. godine i iznosi 0.48%. Procijenjeno ukupno stanovništvo je tada bilo jednako 4154213, a modelom je dobiveno 4134264, što daje apsolutnu grešku od 19949.

Dobivene greške mogu biti posljedica numeričkih grešaka u izračunu malih stopa iz sirovih podataka ili mogu biti posljedica nelinarnosti stvarnog modela kojeg prati stanovništvo. Također je moguće da se greške javljaju iz nekih razloga nevezanih uz model. Iako greške modela postoje, one i u najgorim slučajevima koje smo promotrili predstavljaju vrlo mala odstupanja od stvarnih podataka, a za neke godine je modelirano stanovništvo identično stvarnom stanovništvu. Dakle, možemo zaključiti da linearni deterministički model opisan u Odjeljku 4.2 dobro reproducira dane podatke te se može koristiti za predviđanje budućeg kretanja stanovništva u Hrvatskoj.

Bibliografija

[1] J. R. Brannan, W. E. Boyce, *Differential equations: An introduction to modern methods and applications*, John Wiley & Sons, 2007.

[2] T. R. Malthus, *An essay on the principle of population: as it affects the future improvement of society, with remarks on the speculations of Mr. Godwin, M*, London, J. Johnson, 1798.

[3] A. Rapoport, *Mathematical models in the social and behavioral sciences*, John Wiley & Sons, 1983.

[4] I. Tzortzis, *Mathematical models for demography and its applications to Cyprus population*, Disertacija, Department of Electrical and Computer Engineering, University of Cyprus, 2009.

[5] Z. Vondraček, *Financijsko modeliranje, skripta*, PMF - MO, 2008., `https://web.math.pmf.unizg.hr/~vondra/2fm18-predavanja.html`, posjećena 15.07.2018.

[6] Z. Tutek, M. Vrdoljak, *Obične diferencijalne jednadžbe, skripta*, PMF - MO, 2009., `https://web.math.pmf.unizg.hr/nastava/odif/predavanja.html`, posjećena 13.07.2018.

[7] Državni zavod za statistiku Republike Hrvatske, `https://www.dzs.hr/`, posjećena 01.07.2018.

Sažetak

U ovom radu predstavljeni su matematički modeli koji opisuju promjene u veličini te u dobnom i spolnom sastavu stanovništva uzrokovane demografskim procesima kao što su rađanje, umiranje i migracije.
Modeli koji opisuju prirodno kretanje stanovništva predstavljaju temelj za razvoj složenijih modela. Analizom modela prirodnog rasta koji dijeli stanovništvo prema spolu zaključujemo da stanovništvo može postati stabilno, odnosno da je omjer muškaraca i žena u stanovništvu jednak, jedino ako su za oba spola stope nataliteta i mortaliteta jednake. U modelima prirodnog rasta dvaju populacija podijeljenih prema dobi promatramo njihove dobne distribucije u slučajevima kada se njihove dobno specifične stope fertiliteta, odnosno mortaliteta razlikuju. Takvi modeli zanemaruju migracije i pretpostavljaju konstantnu stopu rasta pa se često ne mogu primijeniti u stvarnim situacijama.
U posljednjem poglavlju predstavljeni su modeli koji su prikladniji za opisivanje stvarnog kretanja stanovništva. U svrhu modeliranja prema dobi, stanovništvo je podijeljeno u tri dobne skupine te su promatrane interakcije među grupama. Testiranjem linearnog determinističkog modela na stvarnim podacima o kretanju stanovništva Hrvatske, zaključujemo da se testirani model može koristiti za opisivanje kretanja stanovništva u Hrvatskoj.

Summary

The aim of this thesis is to present various mathematical models describing human population changes in size and changes in age and sex composition due to demographic processes such as births, deaths and migrations.
Models of natural growth of the population are the foundation for the development of more complicated models. By analyzing the models of sex composition in which migrations are excluded, we conclude that the only way a population could become stabilized (i.e. to have the same number of males and females) is if the birth and death rates of both sexes are equal. In natural growth models of two populations divided into age groups, we observe their age distributions when their fertility schedules or mortality schedules differ. These models do not take migrations into account and also in these models constant growth rate is assumed, so they often cannot be applied to real populations.
In the last chapter, we present mathematical models which are more convenient for describing the actual changes in population. For the purpose of modeling the age composition, the population is divided into three age groups and interactions between these groups are observed. By comparing the results of linear deterministic model with the actual data of the population of Croatia, we conclude that the tested model can be employed to describe population movement in Croatia.

Životopis

Rođena sam 30. rujna 1994. godine u Zagrebu. Nakon završene Osnovne škole Augusta Šenoe, svoje školovanje nastavila sam u XVI. jezičnoj gimnaziji u Zagrebu. Završetkom srednjoškolskog obrazovanja, 2013. godine upisala sam preddiplomski sveučilišni studij Matematike na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, kojeg sam završila 2016. godine. Potom sam upisala diplomski sveučilišni studij Financijske i poslovne matematike, također na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu. Od 2017. godine sam stipendistica Privredne banke Zagreb d.d.