

UNIVERSIDAD DE CANTABRIA

PROGRAMA DE DOCTORADO EN CIENCIA Y  
TECNOLOGÍA



TESIS DOCTORAL  
EL PROBLEMA DE LA DISTRIBUCIÓN DE  
PUNTOS EN LA ESFERA

Realizada por: *Ujué Etayo Rodríguez*

Dirigida por: *Carlos Beltrán Álvarez*

Escuela de Doctorado de la Universidad de Cantabria  
Santander, 2019



---

# Agradecimientos institucionales

- Esta tesis se ha desarrollado en el marco de un contrato predoctoral FPI (Formación del Personal Investigador) asociado a los proyectos MTM2014-57590-P y MTM2017-83499-P del *Ministerio de Economía y Competitividad, Gobierno de España*.



- Mi participación en congresos durante este periodo ha sido cofinanciada por los proyectos anteriormente citados, el proyecto del convenio *Banco Santander y Universidad de Cantabria* (21.SI01.64658) y la *Red Temática de Cálculo Simbólico, Álgebra Computacional y Aplicaciones*.



- La formación específica de este periodo ha sido proporcionada por el *Departamento de Matemáticas, Estadística y Computación de la Universidad de Cantabria*. Al que he de agradecer también la posibilidad que me brindó de participar de la docencia de varios grados de la Universidad de Cantabria.



- The *Institute for Computational and Experimental Research in Mathematics*, associated to Brown University, subsidized my stay in their institution for three months.



- El *Institut de Matemàtica de la Universitat de Barcelona* me acogió como profesora visitante durante dos meses.



Institut de Matemàtica

- The universities *Technische Universität Graz*, *Universität Wien* and *University of Michigan* have welcomed me in short stays during these three years.



---

# Agradecimientos

Durante estos años de doctorado han sido varias las ocasiones en las que he pensado: “A esta persona tengo que nombrarla en los agradecimientos”. Ahora que por fin me encuentro escribiéndolos, creo que estos agradecimientos deben comprender dos grupos: los matemáticos y los incondicionales. Hablo de los “matemáticos” en un sentido bastante amplio de la palabra, refiriéndome a todas esas personas que he conocido gracias a las matemáticas y que han sabido ser soporte o motivación cuando lo necesitaba. Los “incondicionales” han permanecido a mi lado incluso ante noticias tan alarmantes como que quería estudiar matemáticas, quería hacer el máster en investigación, y ... ¡Quería hacer la tesis en matemáticas!

Comencemos por los incondicionales. A mi familia, a la grande y a la pequeña, aunque podría decirse que no tengo familia pequeña. Gracias *Ángela Ariznavarreta*, *Rebeca Mañero*, *Ana Cantera*, *Blanca Piquer*, *María Ansó*, *Inés Ávila*, *Pilar Merino*, *Marta di Stefano* y *Rocío Diego* por el apoyo constante durante estos años de tesis. Y porque es sano hablar de cosas que no sean matemáticas. Gracias *Fernando* y *Laura* por seguir mis andanzas con detalle, sois de las pocas personas con las que he podido hablar con tecnicismos de lo que aquí presento. Gracias *Pablo* por nuestras veladas musicales durante estos tres años y *Javi*, por nuestros paseos por el Sardinero. *Miguel*, gracias por tus conversaciones sobre cualquier tema interesante y *Rafa*, por cubrir los temas no interesantes. Gracias a *mis padres*, por haceros siempre presentes y combinar vuestro (a veces muy mal contenido) orgullo paterno con las reflexiones sobre lo que es realmente importante. *José* y *Almudena*, gracias por vuestras frecuentes visitas a Santander y nuestras cenas furtivas en Madrid.

*Ángela Arellano*, *Andrea Gutierrez* e *Isabel Ibañez* habéis sido un constante apoyo, demostrando una confianza ciega, en ocasiones demasiado ciega... augurando siempre un buen final a cada proyecto que comenzaba. *Mercedes Collantes*, gracias por los paseos, las excursiones, las rabas,... por compartir tanto los momentos felices como los tristes. Gracias por los fantásticos dibujos que has elaborado para esta tesis. Gracias también a *Estrella Muñoz* y *Carmen Laita* porque parece que solo tenéis palabras de ánimo y siempre encontráis otro día para quedar cuando aparezco con mi agenda de ministra. *Montse Sing* contigo he tocado más que hablado, y eso que hemos hablado mucho. Gracias por compartir tan buenos momentos.

Vayamos ahora con la parte matemática. Si pienso en las personas que han colaborado para que esté hoy aquí, me viene a la cabeza *Mercedes Gómez*, mi profesora de matemáticas del instituto Santa Clara. Gracias porque, al menos para mi, fuiste una estupenda profesora y un empuje decisivo en la elección de esta carrera. En la universidad de Valladolid tuve muy buenos profesores, recuerdo con especial cariño las clases de *Amador García*, *Maripaz*

*Calvo* y *Manuel Nuñez*. Gracias *Philippe Giménez* por acompañarme en mis primeros pasos en la investigación y seguir de cerca mi recorrido posterior. Y la carrera no habría sido lo mismo sin *Ana Not*, *Cristina Rubio*, *Bea Alonso*, *Dani Carpio*, *Diego Rojo* y *Ana Isabel Pérez*, gracias por las eternas tardes de estudio, los desayunos en Teleco y las al menos 15 fantásticas versiones de mi nombre que creasteis. Recuerdo con mucho cariño a mis compañeros de la asociación de astronomía de Valladolid *Gua-Syrma*, en especial a *Juan Carbajo* y *Víctor González*. No descarto que mi vocación a la investigación provenga, en cierta medida, de las estupendas tardes de los viernes en la asociación. Y también en cierta medida de *Mar Simonet*, mi amiga geóloga, gracias por llevarme a desenterrar un dientes de sable y conseguir que casi me mate en la montaña unas cuantas veces. Un último agradecimiento castellano para *Mariángeles García*, física reconvertida en matemática, gracias por todos las conversaciones y paseos por Valladolid y Santander.

Durante el tercer año de carrera tuve la suerte de disfrutar de una beca Erasmus. Ese año los pagos tardaron mucho, mucho en llegar. Que finalmente pudiera disfrutar de la beca entera solo fue posible por *Manuel Domínguez* en la Universidad de Valladolid y *Guillermo Moreno-Socias* en la Universidad de Versailles. Soy consciente de vuestros desvelos y me hace muy feliz agradecerlos ahora. Toute mon expérience Erasmus a été formidable, mais j'ai un engagement particulier à remercier ici trois professeurs avec lesquels j'ai pu partager les mathématiques soit au dedans qu'au dehors de la salle de classe: *Muhammad Dauhoo*, *Vincent Sécherre* et *Aurélien Greuet*. *Tanouir Aloui* a été la première personne à me parler quand j'ai débarqué à l'Université de Versailles et dès ce moment-là nous n'avons pas cessé de le faire. Je suis heureuse de te remercier ici avec une grande admiration. *Thessalie Daumen*: un jour, tu as écrit mon nom dans la dédicace d'un travail auquel j'ai bien peu contribué. Maintenant c'est à mon tour de faire de même en te nommant ici. Tu más toujours soutenue, merci beaucoup.

*Carlos Beltrán* empezaste en el grupo de los matemáticos pero ya puedes considerarte todo un incondicional. Gracias por acompañarme en todo momento, señalando el objetivo, pero sin sobreproteger, me siento muy afortunada por haber trabajado contigo. Gracias *Juan G. Criado del Rey* por cumplir el cometido más importante del hermano mayor: estar siempre presente cuando te necesito, ya sea tomando unas cañas en París o pasando una noche en el hospital en Providence. En palabras de Carlos, eres un super campeón. Gracias *Luis Miguel Pardo* por las conversaciones compartidas durante estos años en el Departamento y por haber aceptado la carga que supone ser tribunal de esta tesis. Durante mis años de doctorado he compartido docencia con *José Manuel Bayod*, *Cristina Pérez* y *Luis Alberto Fernández*. He aprendido mucho de vosotros, muchísimas gracias. Gracias *Maitane Pérez* por tu compañía constante, por hacer encaje de bolillos para cuadrar los horarios y tomarnos al menos un café a la semana juntas. Has sido una compañera de despacho ejemplar, he aprendido mucho de ti. Quiero agradecer también al resto de compañeros

doctorandos del departamento (mención especial para *Paula Navarro* y *Óscar Iglesias*, compañeros de café), a los profesores del mismo y a las secretarias. Este es un departamento en el que se trabaja muy a gusto, muchas gracias a todos. Gracias a *Belén Lázaro*, *Ramón Gandarillas* y *Jesús Covarrubias*, bibliotecarios de Ciencias, por vuestra comprensión, aún dada mi afición a secuestrar libros. El grupo de matemáticos no matemáticos también merecen un sitio en estos agradecimientos, por todas las veces que hemos comido juntos, *Yael Gutierrez*, *Alfonso de la Vega*, *Andrea Fernández*, *David García* y *Diego García*. Gracias *Ana Pando* por los cafés en las distintas facultades de la UC.

En estos tres años he tenido la suerte de participar en muchos congresos y conocer a mucha gente impresionante. Para cumplir con la brevedad del texto solo puedo nombrar a unos pocos, pero tengo claro por quien voy a empezar. Gracias *Laura Colmenarejo*, viniste en mi rescate en mi primer congreso (EACA 2014), y desde entonces no nos hemos separado cada vez que mi pequeña vertiente algebraica nos une. Brindo por mas congresos juntas. Merci *Adrien Hardy* pour tes conseils sur la façon dont je devais concentrer ma thèse y a *Nacho Garcia* por sus recomendaciones sobre charlas. *Dmitry Bilyk*, thank you for your patience listening to my ideas and your enthusiasm for my research. It's something that I really appreciate. *Sasha Vlasiuk*, my office brother, thanks for the support with my English and my nefarious attempts to speak Ukrainian: Djakobo! El congreso de Castro Urdiales en 2017 fue una oportunidad única para hablar de matemáticas con mucha gente a la que admiro, no puedo nombraros a todos, pero quiero hacerlo con *Laurent Bétermin*, tu suis de près chacune de mes petites réalisations, C'est quelque chose que j'apprécie pour de vrai. *Andrei Martínez-Firkenstein*, soy consciente de que has apostado por mi cuando no había por qué hacerlo, muchas gracias. Danke an die wunderbaren Leute der Universitäten Wien, Linz und Graz, die ich sowohl in Strobl als auch in Linz getroffen habe (nach dem Kongress in Castro Urdiales waren sie die besten Kongresse, die ich jemals besucht habe). Ich möchte mich auch ausdrücklich bei *David Rottensteiner* und *Shristi Rajbamshi* bedanken: bei Euch habe ich mich von Anfang an wie zu Hause gefühlt.

No llevaba ni un año de doctorado cuando *Joaquim Ortega-Cerdà* y *Jordi Marzo* me acogieron para hacer una estancia en Barcelona. Gracias a ambos por dedicarme vuestro tiempo y a Jordi y *Daniel Seco* por el tour turístico por los cafés del Ensanche. Quim, tienes respuestas para todo, espero poder aprovecharlo planteándote muy buenas preguntas. Gracias familia *Gimeno-Xipell* por hacerme un hueco en cada visita a Barcelona. The second stay was a bit more moved. Thank you *Edward Saff*, for helping me to endorse the stay in Brown University and be my mentor during those months. When it seemed that luck had left me, my friends did not. Thank you very much to *Eva* and *Gary Anderson*, *Stephanie O'Neil* and *Irra Vlasiuk* for taking care of me during those months of illness. I would not have done it without you. Gracias *Miguel Rodríguez* y *Ana Rumí*, por ser médico y enfermera en la distancia durante largos meses, pese a las inconveniencias del cambio horario. *Guillerhme*

*Silva* é o anfitrião perfeito. Eu só espero saber como receber pessoas como você fez comigo em Michigan, em uma pequena estadia onde eu aprendi matemática, gastronomia, geografia ... Eu mantenho um profundo apreço. Ich möchte auch einen besonderen Dank an **Peter Grabner** richten. Er war mein inoffizieller Mentor während meines Aufenthalts in Brown. Außerdem war er mein Gastgeber in Graz sowie Mitglied der Bewertungskommission meiner Doktorarbeit. Ich möchte mich auch bei Herrn Professor **Martin Ehler** herzlich bedanken. Mit ihm habe ich im letzten Jahr lange parallel zusammengearbeitet. ank ihm trafen sich unsere Wege noch einmal in Wien. Seinen Besuch dort behalte ich in schöner Erinnerung. Finalmente quiero agradecer al tercer miembro del tribunal que no he nombrado todavía, gracias **Paco Marcellán** por aceptar esta carga, me siento muy honrada por ello.

---

# Índice general

<b>Presentación</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>3</b>
1.1. Introducción . . . . .	5
1.1.1. Nuestros espacios ambiente . . . . .	7
1.1.2. Puntos asintóticamente uniformemente distribuidos . . . . .	12
1.2. Caracterizaciones de una buena distribución . . . . .	13
1.2.1. Energías de Riesz en $\mathbb{S}^d$ . . . . .	13
1.2.2. Energía logarítmica en $\mathbb{S}^2$ . . . . .	16
1.2.3. Energía de Green . . . . .	17
1.2.4. Otros potenciales . . . . .	19
1.2.5. Puntos de Fekete . . . . .	20
1.2.6. Empaquetamientos y recubrimientos óptimos en $\mathbb{S}^d$ . . . . .	20
1.2.7. Discrepancia en $\mathbb{S}^d$ . . . . .	22
1.2.8. Designs . . . . .	23
1.3. Conjuntos de puntos conocidos . . . . .	26
1.3.1. Conjuntos deterministas en $\mathbb{S}^2$ . . . . .	27
1.3.2. Conjuntos aleatorios . . . . .	29
1.3.3. Raíces de polinomios aleatorios . . . . .	29
1.3.4. Procesos determinantaes. . . . .	30
1.3.5. El spherical ensemble . . . . .	34
1.3.6. El harmonic ensemble . . . . .	41
<b>2. t-designs en variedades algebraicas</b>	<b>43</b>
2.1. Definiciones y resultado principal . . . . .	45
2.1.1. Notas y corolarios del Teorema 2.1.5 . . . . .	48
2.2. Particiones regulares . . . . .	50
2.3. Desigualdades de Marcinkiewicz-Zygmund . . . . .	50
2.4. Demostración del Teorema 2.1.5 . . . . .	55
2.5. Sobre las condiciones de la variedad . . . . .	58
2.5.1. Subvariedades de una variedad algebraica . . . . .	58
2.5.2. Variedades algebraicas con singularidades . . . . .	59
2.5.3. Variedades no conexas . . . . .	59

<b>3. Generalizaciones del spherical ensemble</b>	<b>65</b>
3.1. El spherical ensemble	68
3.2. Un proceso determinantal en $\mathbb{C}^d$	69
3.2.1. Un primer acercamiento a un proceso determinantal en $\mathbb{S}^{2d}$	73
3.3. Un proceso determinantal en $\mathbb{S}^{2d}$	76
3.4. Un proceso determinantal en $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$	86
3.5. Un proceso de puntos en $\mathbb{S}^{2d+1}$	88
3.6. Nuevas cotas para la energía de Riesz	88
3.6.1. Esferas de dimensión par	89
3.6.2. Energía de Green en $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$	101
3.6.3. Esferas de dimensión impar	105
3.7. Nomenclatura del capítulo	110
<b>4. La estructura de diamante</b>	<b>111</b>
4.1. Una construcción general	114
4.2. Elección de los paralelos	119
4.3. El número de puntos apropiado por paralelo	125
4.3.1. El conjunto modelo	126
4.4. La estructura de diamante	133
4.4.1. Un ejemplo sencillo	135
4.4.2. Un ejemplo algo más elaborado	136
4.5. Energía logarítmica de la estructura de diamante	138
4.5.1. Energía logarítmica de ejemplos concretos	142
<b>Apéndices</b>	<b>149</b>
<b>A. Funciones especiales</b>	<b>151</b>
<b>B. El jacobiano normal en variedades diferenciales</b>	<b>157</b>
<b>C. Regla del Trapecio</b>	<b>163</b>
<b>D. Programas en Maxima</b>	<b>167</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>177</b>

---

# Presentación

Los puntos bien distribuidos en un espacio aparecen de forma natural en problemas de muy diversa índole. Necesitamos puntos bien distribuidos para la integración numérica, la aproximación e interpolación, el estudio de las funciones radiales, los métodos cuasi Montecarlo o los métodos de elementos finitos para ecuaciones diferenciales. Además de estar relacionados con problemas clásicos en matemáticas, presentan muchas aplicaciones en la vida real, como la modelización del fondo cósmico de microondas, la cristalografía y el estudio de las estructuras víricas. Cada una de estas aplicaciones requiere una definición diferente y precisa del concepto “bien distribuidos”. A lo largo de las páginas de esta tesis estudiamos distintas definiciones que responden a este concepto, así como distintos conjuntos de puntos que verifican esas definiciones. En particular, los resultados de esta tesis han dado origen a cuatro artículos: [Etayo et al., 2018], [Beltrán and Etayo, 2018a], [Beltrán and Etayo, 2018b] y [Beltrán and Etayo, 2018c].

El Capítulo 1 es una extensa introducción en la cual presentamos varios problemas abiertos y, en el caso de que las haya, las soluciones parciales que existen hasta la fecha. En el Capítulo 2 damos solución a varios de los problemas planteados en la introducción demostrando la existencia de  $t$ -designs en variedades algebraicas con un número de puntos comparable a la dimensión del espacio de polinomios de grado menor o igual que  $t$  en la variedad. Este resultado generaliza el obtenido por Bondarenko, Radchenko y Viazovska para la esfera  $\mathbb{S}^d$ , véase [Bondarenko et al., 2013]. El Capítulo 3 está dedicado al estudio de diferentes procesos determinantaes derivados de un proceso determinantal en  $\mathbb{S}^2$  invariante por rotaciones llamado el *spherical ensemble*. Nuestras generalizaciones a  $\mathbb{S}^d$  y  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$  producen puntos muy bien distribuidos en los sentidos de minimizar las energías de Riesz y Green, respectivamente. En el Capítulo 4 definimos una estructura en la esfera  $\mathbb{S}^2$  a la que denominamos estructura de diamante y que depende de varios parámetros. Para cualquier elección de parámetros, obtenemos familias de puntos aleatorios en la esfera. La propiedad principal de esas familias es que podemos calcular la asintótica de la esperanza de su energía logarítmica y además, esta toma valores muy pequeños, lo más cercanos que se conoce hasta la fecha del valor conjeturado para ser mínimo.

En la primera página de cada capítulo el lector encontrará un dibujo de un matemático junto con uno de sus resultados. Los resultados no están necesariamente relacionados con el contenido del capítulo, sino que son una selección personal y responden principalmente a un criterio estético: son resultados que me parecen muy bonitos. Los fantásticos dibujos han sido elaborados por Mercedes Collantes, a la que agradezco de nuevo su colaboración en esta tesis.

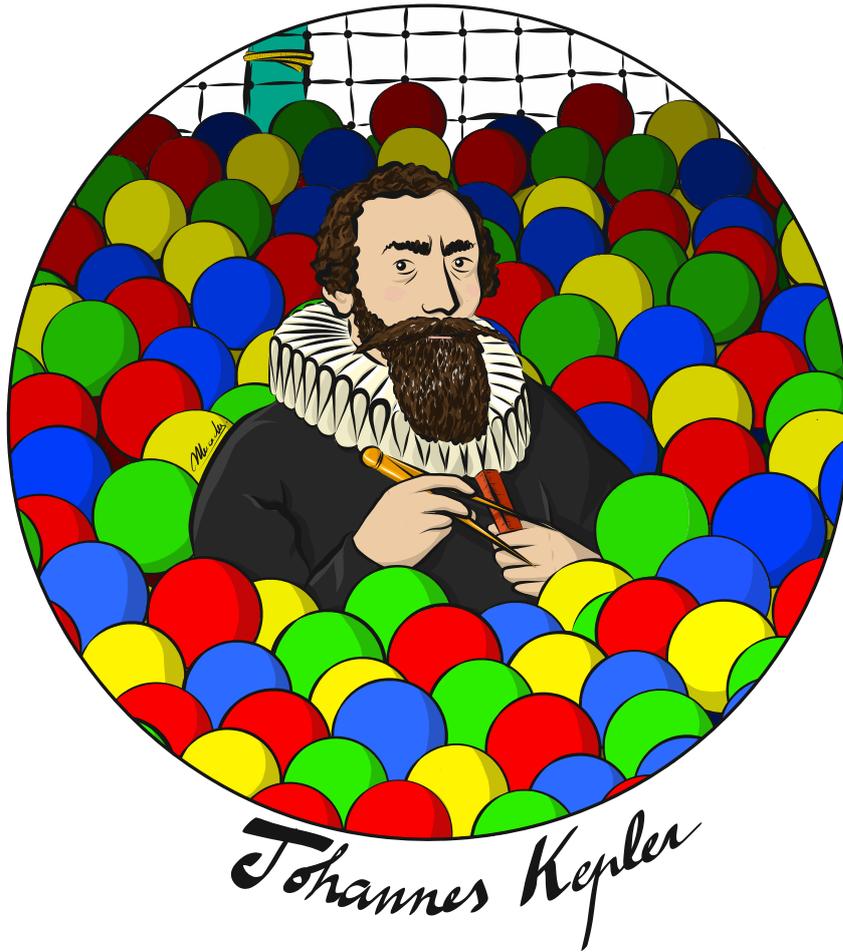


---

## CAPÍTULO 1

---

# Preliminares



*Posteriori modo praeterquam quod quilibet globus a quatuor circumstantibus in eodem plano tangitur, etiam a quatuor infra se et a quatuor supra se, et sic in universum a duodecim tangetur, fientque compressione ex globosis rhombica. Ordo hic magis assimilabitur octaedro et pyramidi.*

**Conjetura de Kepler**, demostrada por T. Hales en 2014.

J. Kepler (1611).

*Strena seu de nive sexangula.*



## Contenido

---

<b>1.1. Introducción</b>	<b>5</b>
1.1.1. Nuestros espacios ambiente	7
1.1.2. Puntos asintóticamente uniformemente distribuidos	12
<b>1.2. Caracterizaciones de una buena distribución</b>	<b>13</b>
1.2.1. Energías de Riesz en $\mathbb{S}^d$	13
1.2.2. Energía logarítmica en $\mathbb{S}^2$	16
1.2.3. Energía de Green	17
1.2.4. Otros potenciales	19
1.2.5. Puntos de Fekete	20
1.2.6. Empaquetamientos y recubrimientos óptimos en $\mathbb{S}^d$	20
1.2.7. Discrepancia en $\mathbb{S}^d$	22
1.2.8. Designs	23
<b>1.3. Conjuntos de puntos conocidos</b>	<b>26</b>
1.3.1. Conjuntos deterministas en $\mathbb{S}^2$	27
1.3.2. Conjuntos aleatorios	29
1.3.3. Raíces de polinomios aleatorios	29
1.3.4. Procesos determinantes.	30
1.3.5. El spherical ensemble	34
1.3.6. El harmonic ensemble	41

---

### 1.1. Introducción

Es común que los preliminares de una tesis sean el capítulo más costoso de escribir. Mi caso no resulta excepcional en este sentido y esto se debe, esencialmente, a dos problemas. El primero consiste en que los problemas aquí tratados pertenecen a distintas ramas de las matemáticas. Así, el lector encontrará en estas páginas resultados de distribución de puntos en esferas y en variedades algebraicas compactas y lisas; problemas propios de la teoría del potencial y problemas relacionados con la integración numérica.

Por supuesto, siempre podemos encontrar un ambiente que incluya como propios todos los resultados, pero el ambiente será, entonces, muy general. Es por esto que hemos optado por no presentar todos los problemas en su definición más general, sino que hemos variado nuestro grado de concreción dependiendo de la sección. Así, por ejemplo, cuando hablamos de puntos óptimos para la integración numérica, presentamos el problema en su contexto

más general: espacios topológicos conexos por caminos; y sin embargo cuando hablamos de la energía logarítmica restringimos nuestra definición al caso de la esfera  $\mathbb{S}^2$ .

El segundo problema tiene que ver con la autocontención. Es una virtud de cualquier documento que se pueda comenzar y terminar de leer sin haber tenido que consultar ninguna otra fuente externa. Pero a lo largo de las páginas de esta tesis utilizamos técnicas de análisis funcional, geometría diferencial e incluso pruebas asistidas por ordenador. La gran cantidad (que no implica refinamiento) de técnicas provoca la disyuntiva entre un texto no autocontenido o un texto sumamente extenso. Hemos intentado dar solución al problema a través de una introducción densa en definiciones y unos apéndices que cubran la parte más técnica de las pruebas.

Varios de los resultados de esta tesis conciernen al tema “distribuir puntos en esferas”. El artículo *Distributing points on spheres*, [Kuijlaars and Saff, 1997] supone un punto de partida para el estudio de esta disciplina. Parafraseando el título, el artículo *Distributing points on spheres: minimal energy and designs*, [Brauchart and Grabner, 2015] enfoca esa búsqueda de puntos bien distribuidos en esferas en dos direcciones muy concretas: puntos que minimizan ciertos potenciales llamados a veces energías y puntos óptimos para la integración numérica o designs.

Tras el estudio de las esferas, las generalizaciones a otro tipo de espacios no tardaron en llegar: los espacios proyectivos tan parecidos a las esferas en cierto sentido; los elipsoides, tan parecidos en otro sentido, etc. Además del mero gusto por la generalización, las múltiples aplicaciones han forzado la aparición de una gran cantidad de resultados nuevos cada año: puntos bien distribuidos en superficies para hacer posible la integración por métodos tipo Montecarlo, el estudio de potenciales para modelizar nuevas estructuras moleculares de tipo cuasi-cristalinas,... Las referencias en este sentido son muchas e intentaremos cubrir un número significativo de ellas a través de los distintos apartados de estos preliminares.

Terminamos estas líneas con unas breves palabras sobre la notación. Denotamos por  $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\}$  al conjunto de puntos con el que estemos trabajando independientemente del espacio al que pertenezcan. Llamamos familia a una sucesión de conjuntos de puntos  $(\omega_N)$ , con  $N \rightarrow \infty$ . Para ser completamente rigurosos, deberíamos denotar  $x_{1_N}, \dots, x_{N_N}$  a los elementos de  $\omega_N$  para un  $N$  fijo, incluyendo así en la notación de los puntos la dependencia del conjunto al que pertenecen. Sin embargo, en un abuso de notación, les llamaremos simplemente  $x_1, \dots, x_N$  asumiendo, claro está, que  $x_1 \in \omega_i$  no tiene porqué ser el mismo punto que  $x_1 \in \omega_j$  si  $i \neq j$ . A continuación explicaremos brevemente en qué espacios estamos interesados en distribuir puntos y qué significa que su distribución sea asintóticamente uniforme.

### 1.1.1. Nuestros espacios ambiente

A lo largo de esta tesis, trabajamos con diferentes variedades algebraicas lisas y compactas. De forma especial, en el Capítulo 3 trabajamos con la esfera de dimensión real  $d$ ,  $\mathbb{S}^d$  y el espacio proyectivo complejo de dimensión compleja  $d$ ,  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$  y en el Capítulo 4 trabajamos con la esfera usual  $\mathbb{S}^2$ . Así que vamos a estudiar estas últimas variedades con un poco más de profundidad.

#### Esferas

Definimos la esfera unidad de dimensión  $d$  como

$$\mathbb{S}^d = \left\{ (x_1, \dots, x_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1} : x_1^2 + \dots + x_{d+1}^2 = 1 \right\}.$$

Dotamos a  $\mathbb{S}^d$  de la medida de Lebesgue, que denotamos por  $\mu(x)$  cuando no está normalizada y  $\mu_{\mathbb{S}^d}$  cuando la normalizamos para que  $\mu_{\mathbb{S}^d}(\mathbb{S}^d) = 1$ . Cuando trabajamos con la medida de Lebesgue sin normalizar no escribiremos su dependencia en la dimensión, aunque siempre quedará claro por el contexto.

La siguiente propiedad establece una relación entre la esfera de dimensión  $d$  y la esfera de dimensión  $d - 1$ .

**Lema 1.1.1.** *Sea  $f : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable o una función medible y no negativa. Si  $f(q) = g(\langle p, q \rangle)$ , para algún  $p \in \mathbb{S}^d$  y alguna función  $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces*

$$\int_{p \in \mathbb{S}^d} f(p) dp = \text{Vol}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_{-1}^1 g(t) (1 - t^2)^{\frac{d}{2}-1} dt.$$

*Demostración.* Fijamos el ecuador  $x_{d+1} = 0$  y consideramos la aplicación  $\varphi : \mathbb{S}^d \rightarrow \mathbb{S}^{d-1} \times (-1, 1)$  que lleva  $(x_1, \dots, x_{d+1}) \mapsto \left( \frac{x_1}{\|(x_1, \dots, x_d)\|}, \dots, \frac{x_d}{\|(x_1, \dots, x_d)\|}, x_{d+1} \right)$ . Por el Teorema de cambio de variables (Teorema B.0.3 en nuestra notación) tenemos:

$$\int_{\mathbb{S}^d} f(x) dx = \int_{y \in \mathbb{S}^{d-1} \times (-1, 1)} \frac{f(\varphi^{-1}(y))}{\text{Jac } \varphi(\varphi^{-1}(y))} dy$$

Así que calculamos el jacobiano de  $\varphi(x)$ , esto es el volumen de la imagen de una base ortonormal de  $T_x \mathbb{S}^d$  a través de  $D\varphi(x)$ , en la Sección B encontramos un algoritmo para el cálculo del jacobiano. Tomamos el punto  $x = (x_1, \dots, x_d, x_{d+1}) = (\hat{x}, x_{d+1})$  y consideramos los vectores  $\hat{x}^1, \dots, \hat{x}^{d-1}$  que son ortonormales dos a dos entre sí y ortonormales a  $(\hat{x}, 0)$  y cuya última coordenada es 0. Completamos la base con el vector  $\hat{x}^d = (a, b) = (\hat{x}, *)$  tal que  $\langle (\hat{x}, *), (\hat{x}, x_{d+1}) \rangle = 0$ . Este último vector entonces está dado por  $\hat{x}^d = \left( \hat{x}, \frac{-\|\hat{x}\|^2}{x_{d+1}} \right)$ . Si normalizamos este último vector para que  $\|\hat{x}^d\| = 1$ , concluimos que el conjunto

$$\left\{ \hat{x}^1, \dots, \hat{x}^{d-1}, \sqrt{\frac{1 - \|\hat{x}\|^2}{\|\hat{x}\|^2}} \left( \hat{x}, \frac{-\|\hat{x}\|^2}{x_{d+1}} \right) \right\}$$

es una base de  $T_x \mathbb{S}^d$ . Como  $\varphi(\hat{x}, x_{d+1}) = \left( \frac{\hat{x}}{\|\hat{x}\|}, x_{d+1} \right)$ , tenemos que

$$\begin{aligned} D\varphi(\hat{x}, x_{d+1})(\dot{\hat{x}}, \dot{x}_{d+1}) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi \left( (\hat{x}, x_{d+1}) + t(\dot{\hat{x}}, \dot{x}_{d+1}) \right) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \left( \frac{\hat{x} + t\dot{\hat{x}}}{\|\hat{x} + t\dot{\hat{x}}\|}, x_{d+1} + tx_{d+1} \right) \\ &= \left( \frac{\dot{\hat{x}}\|\hat{x} + t\dot{\hat{x}}\| - (\hat{x} + t\dot{\hat{x}}) \frac{\langle \hat{x}, \dot{\hat{x}} \rangle}{\|\hat{x} + t\dot{\hat{x}}\|}}{\|\hat{x} + t\dot{\hat{x}}\|^2}, x_{d+1} + tx_{d+1} \right) \Big|_{t=0} \\ &= \left( \frac{\dot{\hat{x}}\|\hat{x}\| - \hat{x} \frac{\langle \hat{x}, \dot{\hat{x}} \rangle}{\|\hat{x}\|}}{\|\hat{x}\|^2}, x_{d+1} \right). \end{aligned}$$

Calculamos ahora el valor de la aplicación diferencial de  $\varphi$  en nuestra base.

$$D\varphi(\hat{x}, x_{d+1})(\dot{x}^i) = \frac{\dot{x}^i}{\|\hat{x}\|}$$

para todo  $1 \leq i \leq d-1$ . Y para el último vector tenemos

$$D\varphi(\hat{x}, x_{d+1}) \left( \sqrt{\frac{1 - \|\hat{x}\|^2}{\|\hat{x}\|^2}} \left( \hat{x}, \frac{-\|\hat{x}\|^2}{x_{d+1}} \right) \right) = \left( 0, \frac{-\|\hat{x}\|}{x_{d+1}} \sqrt{1 - \|\hat{x}\|^2} \right).$$

Así que concluimos

$$|\text{Jac}\varphi(x)| = \left( \prod_{i=1}^{d-1} \left\| \frac{\dot{x}^i}{\|\hat{x}\|} \right\| \right) \frac{\|\hat{x}\|}{x_{d+1}} \sqrt{1 - \|\hat{x}\|^2} = \frac{1}{\|\hat{x}\|^{d-2}} = \frac{1}{(1 - x_{d+1}^2)^{\frac{d}{2}-1}}$$

y tenemos

$$\int_{\mathbb{S}^d} g(x_{d+1}) dx = \int_{y \in \mathbb{S}^{d-1} \times (-1, 1)} g(y_{d+1}) (1 - y_{d+1}^2)^{\frac{d}{2}-1} dy = \text{Vol}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_{-1}^1 g(t) (1 - t^2)^{\frac{d}{2}-1} dt.$$

□

Gracias al Lema 1.1.1 podemos calcular, por ejemplo, el volumen de la esfera de dimensión  $d$ .

$$\text{Vol}(\mathbb{S}^d) = \int_{\mathbb{S}^d} 1 dp = \text{Vol}(\mathbb{S}^{d-1}) \int_{-1}^1 (1 - t^2)^{\frac{d}{2}-1} dt = \text{Vol}(\mathbb{S}^{d-1}) 2^{d-1} B\left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right),$$

con lo que

$$\text{Vol}(\mathbb{S}^d) = 2^{d-1} B\left(\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right) 2^{d-2} B\left(\frac{d-1}{2}, \frac{d-1}{2}\right) \dots \text{Vol}(\mathbb{S}^1)$$

y podemos concluir que

$$\text{Vol}(\mathbb{S}^d) = \frac{2\pi^{\frac{d+1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}. \quad (1.1)$$

Otro objeto recurrente en esta tesis serán los casquetes esféricos, que definimos de la siguiente forma. Dado un punto  $x \in \mathbb{S}^d$  y un número  $t \in [-1, 1]$ ,

$$C(x, t) = \{y \in \mathbb{S}^d : \langle x, y \rangle \geq t\}. \quad (1.2)$$

Podemos acotar el volumen de un casquete esférico gracias a la siguiente proposición.

**Proposición 1.1.2.** *Sea  $r > 0$  y sea  $\vartheta\left(\frac{\pi}{2} + r\right)$  el volumen de cualquier casquete esférico de radio  $\frac{\pi}{2} + r$  en  $\mathbb{S}^d$ , entonces*

$$\vartheta\left(\frac{\pi}{2} + r\right) \geq \text{Vol}(\mathbb{S}^d) \left(1 - \frac{e^{-\frac{r^2(d-1)}{2}}}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{d-1}}\right)$$

*Demostración.* Seguimos el esquema de la prueba de [Milman and Schechtman, 1986, Corollary 2.2],

$$\frac{\vartheta\left(\frac{\pi}{2} + r\right)}{\text{Vol}(\mathbb{S}^d)} = \frac{\int_{-\frac{\pi}{2}}^r \cos^{d-1} \theta d\theta}{\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{d-1} \theta d\theta}.$$

El mismo resultado prueba que

$$1 - \frac{\vartheta\left(\frac{\pi}{2} + r\right)}{\text{Vol}(\mathbb{S}^d)} \leq \frac{e^{-\frac{r^2(d-1)}{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}}{2\sqrt{d-1}I_{d-1}},$$

donde  $I_{d-1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{d-1} \theta d\theta = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)}$ . Aplicamos la desigualdad de Gautschi (Proposición A.0.3 en este texto) y obtenemos que  $\frac{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right)} \geq \sqrt{\frac{2}{d}}$ , así que concluimos

$$1 - \frac{\vartheta\left(\frac{\pi}{2} + r\right)}{\text{Vol}(\mathbb{S}^d)} \leq \frac{e^{-\frac{r^2(d-1)}{2}}}{2} \sqrt{1 + \frac{1}{d-1}}.$$

□

Recordamos ahora una última propiedad para las esferas que nos será útil más adelante.

**Lema 1.1.3.** *Sean  $x, y \in \mathbb{C}^n$ , entonces*

$$|1 - \langle x, y \rangle|^2 = 1 + |\langle x, y \rangle|^2 - 2\text{Re}(\langle x, y \rangle).$$

**Lema 1.1.4.** *Para todo  $v, u \in \mathbb{C}^d$  de norma 1 se verifica:*

$$|\langle v, u \rangle|^2 \geq 1 - \|v - u\|^2.$$

*Demostración.* Sea  $\epsilon = v - u$ , entonces, utilizando el Lema 1.1.3 tenemos que

$$|\langle v, u \rangle|^2 = |\langle v, v - \epsilon \rangle|^2 = |1 - \langle v, \epsilon \rangle|^2 = 1 + |\langle v, \epsilon \rangle|^2 - 2\text{Re} \langle v, \epsilon \rangle.$$

Por otro lado tenemos:

$$\|\epsilon\|^2 = \|v - u\|^2 = 1 + 1 - 2\operatorname{Re}\langle v, u \rangle = 2(1 - \operatorname{Re}\langle v, v - \epsilon \rangle) = 2\operatorname{Re}\langle v, \epsilon \rangle.$$

Si unimos las dos desigualdades obtenemos:

$$|\langle v, u \rangle|^2 = 1 + |\langle v, \epsilon \rangle|^2 - \|v - u\|^2.$$

Como  $|\langle v, \epsilon \rangle|^2$  siempre es no negativo, tenemos

$$|\langle v, u \rangle|^2 \geq 1 - \|v - u\|^2.$$

□

### Espacio proyectivo complejo

El espacio proyectivo complejo de dimensión  $d$ , al que denotamos por  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$ , es una variedad riemanniana compleja compacta y conexa. Se puede construir a partir de  $\mathbb{C}^{d+1}$  por la aplicación cociente

$$[x] = \left\{ y \in \mathbb{C}^{d+1} : \lambda y = x, \forall \lambda \in \mathbb{C} \right\}.$$

Una de sus interpretaciones geométricas consiste en verlo como el espacio de las líneas complejas de  $\mathbb{C}^{d+1}$  que pasan por el origen. Está dotado de la métrica de Fubini-Study, cuya distancia viene dada por

$$\begin{aligned} d_{FS}(p, q) &= \arcsin \left( \sqrt{1 - \frac{|\langle p_{\mathbb{C}^{d+1}}, q_{\mathbb{C}^{d+1}} \rangle|^2}{\|q_{\mathbb{C}^{d+1}}\|^2 \|p_{\mathbb{C}^{d+1}}\|^2}} \right) \\ &= \arcsin \left( \sqrt{1 - \left| \left\langle \frac{p_{\mathbb{C}^{d+1}}}{\|p_{\mathbb{C}^{d+1}}\|}, \frac{q_{\mathbb{C}^{d+1}}}{\|q_{\mathbb{C}^{d+1}}\|} \right\rangle \right|^2} \right), \end{aligned}$$

donde  $p_{\mathbb{C}^{d+1}}$  y  $q_{\mathbb{C}^{d+1}}$  son dos representantes cualesquiera en  $\mathbb{C}^{d+1}$  de los puntos  $p$  y  $q$ . Así mismo, definimos la norma de Fubini-Study de un vector  $\dot{p}$  tangente a  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$  en el punto  $p \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$  por

$$\|\dot{p}_p\|_{FS} = \frac{\|\Pi_{p^\perp} \dot{p}\|}{\|p\|}.$$

Dependiendo del problema en el que trabajemos, utilizaremos la distancia de Fubini-Study o la distancia proyectiva, definida por

$$d_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}(p, q) = \sqrt{1 - \left| \left\langle \frac{p_{\mathbb{C}^{d+1}}}{\|p_{\mathbb{C}^{d+1}}\|}, \frac{q_{\mathbb{C}^{d+1}}}{\|q_{\mathbb{C}^{d+1}}\|} \right\rangle \right|^2}.$$

Muchas veces nos resultará útil considerar la siguiente inyección.

**Definición 1.1.5.** Denotamos por  $\psi_d$  la aplicación:

$$\begin{aligned}\psi_d: \mathbb{C}^d &\rightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1}). \\ z &\mapsto (z, 1)\end{aligned}$$

**Lema 1.1.6.** La aplicación diferencial de  $\psi_d$  en  $z$  es

$$D\psi_d(z)\dot{z} = (\dot{z}, 0)_{(z,1)}.$$

*Demostración.*

$$D\psi_d(z)\dot{z} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} D\psi_d(z + t\dot{z}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (z + t\dot{z}, 1) = (\dot{z}, 0)_{(z,1)}.$$

□

El jacobiano normal generaliza la noción de jacobiano, está definido en el Apéndice B.

**Lema 1.1.7.** El jacobiano normal de  $\psi_d$  es:

$$\text{NJac}(\psi_d)(z) = \left( \frac{1}{1 + \|z\|^2} \right)^{d+1}. \quad (1.3)$$

*Demostración.* Escogemos una base ortonormal de  $T_z\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1}) \approx \mathbb{C}^d$ , concretamente

$$\left\{ \frac{z}{\|z\|}, w_1, \dots, w_{d-1} \right\},$$

donde los  $w_1, \dots, w_{d-1}$  no están definidos explícitamente pero son un complemento ortonormal a  $\frac{z}{\|z\|}$ . Por la fórmula (B.2) y usando que  $D\psi_d(z)$  preserva la ortogonalidad de esa base, basta con calcular:

$$\begin{aligned}\text{NJac}\psi_d(z) &= \frac{\det \left( \langle D\psi_d(z)w_i, D\psi_d(z)w_j \rangle_{i,j} \right)}{\det \left( \langle w_i, w_j \rangle_{i,j} \right)} \\ &= \left\langle D\psi_d(z) \frac{z}{\|z\|}, D\psi_d(z) \frac{z}{\|z\|} \right\rangle \prod_{i=1}^{d-1} \langle D\psi_d(z)w_i, D\psi_d(z)w_i \rangle \\ &= \left\| D\psi_d(z) \frac{z}{\|z\|} \right\|_{FS}^2 \prod_{i=1}^{d-1} \|D\psi_d(z)w_i\|_{FS}^2.\end{aligned}$$

Por el Lema 1.1.6 conocemos el valor de  $D\psi_d(z)\dot{z}$ :

$$\|(w_i, 0)_{(z,1)}\|_{FS} = \frac{\|\Pi_{(z,1)^\perp}(w_i, 0)\|}{\sqrt{1 + \|z\|^2}} = \frac{\|(w_i, 0)\|}{\sqrt{1 + \|z\|^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \|z\|^2}}.$$

$$\begin{aligned}
\left\| \left( \frac{z}{\|z\|}, 0 \right)_{(z,1)} \right\|_{FS}^2 &= \frac{\left\| \Pi_{(z,1)^\perp} \left( \frac{z}{\|z\|}, 0 \right) \right\|^2}{1 + \|z\|^2} = \frac{\left\| \left( \frac{z}{\|z\|}, 0 \right) - \frac{\langle \left( \frac{z}{\|z\|}, 0 \right), (z,1) \rangle}{\|(z,1)\|^2} (z,1) \right\|^2}{1 + \|z\|^2} \\
&= \frac{\left\| \left( \frac{z}{\|z\|}, 0 \right) \right\|^2 + \frac{|\langle \left( \frac{z}{\|z\|}, 0 \right), (z,1) \rangle|^2}{\|(z,1)\|^4} \|(z,1)\|^2 - 2\operatorname{Re} \left\langle \left( \frac{z}{\|z\|}, 0 \right), \frac{\langle \left( \frac{z}{\|z\|}, 0 \right), (z,1) \rangle}{\|(z,1)\|^2} (z,1) \right\rangle}{1 + \|z\|^2} \\
&= \left( \frac{1}{1 + \|z\|^2} \right)^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\left\| \left( \frac{z}{\|z\|}, 0 \right)_{(z,1)} \right\|_{FS} = \frac{1}{1 + \|z\|^2}.$$

Podemos concluir que

$$\operatorname{NJac}\psi_d(z) = \left( \frac{1}{1 + \|z\|^2} \right)^2 \left( \frac{1}{1 + \|z\|^2} \right)^{d-1} = \left( \frac{1}{1 + \|z\|^2} \right)^{d+1}.$$

□

Los espacios proyectivos complejos y las esferas de dimensión impar están relacionados de la siguiente forma. Consideramos la composición de funciones

$$\mathbb{S}^{2d+1} \subset \mathbb{R}^{2d+2} \setminus \{0\} \approx \mathbb{C}^{d+1} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1}),$$

donde primero tenemos la identidad que lleva a cada punto de la esfera  $\mathbb{S}^{2d+1}$  a  $\mathbb{R}^{2d+2}$  y luego el isomorfismo  $(x, y) \mapsto z = x + iy$  nos permite pasar de  $\mathbb{R}^{2d+2}$  a  $\mathbb{C}^{d+1}$ . Finalmente, la aplicación cociente  $[z] = \{\lambda z : \lambda \in \mathbb{C}\}$  lleva puntos de  $\mathbb{C}^{d+1}$  a  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$ . Para el caso  $d = 1$ , la aplicación  $\mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^2) \approx \mathbb{S}^2$ , se conoce como *Fibración de Hopf* y describe  $\mathbb{S}^3$  con circunferencias como fibras y una esfera ordinaria como espacio base. Este fibrado se puede generalizar a  $\mathbb{S}^{2d+1} \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$  manteniendo las circunferencias como fibras. A través del fibrado y el Teorema de Fubini podemos calcular el volumen de  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$  ya que  $\operatorname{Vol}(\mathbb{S}^{2d+1}) = \operatorname{Vol}(\mathbb{S}^1)\operatorname{Vol}(\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1}))$  y por lo tanto,

$$\operatorname{Vol}(\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})) = \frac{\operatorname{Vol}(\mathbb{S}^{2d+1})}{2\pi} = \frac{\pi^d}{d!},$$

para todo  $d \in \mathbb{N}$ .

### 1.1.2. Puntos asintóticamente uniformemente distribuidos

Vamos a presentar la definición de puntos asintóticamente uniformemente distribuidos en un contexto muy general, como aparece en [Kuipers and Niederreiter, 2012, Capítulo 3]. Consideramos un espacio Hausdorff compacto  $X$ ,  $\mu$  una medida no negativa regular de Borel

en  $X$  renormalizada tal que  $\mu(X) = 1$ . En los espacios en los que vamos a trabajar basta con que tomemos  $\mu$  la medida de Lebesgue del espacio. Consideramos también el subálgebra de Banach formado por todas las funciones continuas en  $X$ . Recordamos que un conjunto de Borel  $C \subset X$  es  $\mu$ -continuo si  $\mu(\delta C) = 0$ , donde  $\delta C$  es la frontera de  $C$ . Entonces decimos que una familia de puntos  $(\omega_N)$ , con  $\omega_N \subset X \forall N \in \mathbb{N}$  está asintóticamente uniformemente distribuida si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N f(x_j) = \int_X f(x) d\mu. \quad (1.4)$$

para toda función  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Esta definición es equivalente a decir que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \chi(x_j) = \mu(C) \quad (1.5)$$

donde  $\chi$  es la función indicatriz del conjunto  $C$ , para todo conjunto  $\mu$ -continuo  $C$ . Que una familia de puntos sea asintóticamente uniformemente distribuida está considerada una de las condiciones fundamentales para tener una buena distribución.

## 1.2. Caracterizaciones de una buena distribución

Hay muchas maneras de definir un conjunto de puntos bien distribuido. Como mencionamos en la introducción, podemos encontrar una buena presentación de las principales en el estudio [Brauchart and Grabner, 2015].

### 1.2.1. Energías de Riesz en $\mathbb{S}^d$

La energía de Riesz continua o  $s$ -energía continua de  $\mathbb{S}^d$  es

$$V_s(\mathbb{S}^d) = \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^d)^2} \int_{\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d} \frac{1}{\|p - q\|^s} dpdq. \quad (1.6)$$

Vamos a calcular el valor de esa energía.

**Proposición 1.2.1.** *Para todo  $s < d$  se verifica:*

$$V_s(\mathbb{S}^d) = \frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^d)^2} \int_{\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d} \frac{1}{\|p - q\|^s} dpdq = \frac{2^{d-s-1} \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{d+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{d-s}{2}\right)}{\Gamma\left(d - \frac{s}{2}\right)}.$$

*Demostración.* Por el Teorema de Fubini tenemos que:

$$\int_{\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d} \frac{1}{\|p - q\|^s} dpdq = \int_{\mathbb{S}^d} \left( \int_{\mathbb{S}^d} \frac{1}{\|p - q\|^s} dq \right) dp.$$

Consideremos ahora la isometría

$$\begin{aligned} \theta_p : \mathbb{S}^d &\longrightarrow \mathbb{S}^d. \\ p &\mapsto (1, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

que no es más que la isometría considerada en la Proposición B.0.7, restringida a la esfera. La inversa de esa isometría será de la forma:

$$\begin{aligned} \theta_p^t : \mathbb{S}^d &\longrightarrow \mathbb{S}^d \\ (1, 0, \dots, 0) &\mapsto p \end{aligned}$$

Por el Lema B.0.4 sabemos además que su jacobiano normal vale 1, así que podemos aplicar el Teorema de cambio de variable (Teorema B.0.3 en nuestra notación) a la integral interior obteniendo:

$$\int_{\mathbb{S}^d} \left( \int_{\mathbb{S}^d} \frac{1}{\|p - q\|^s} dq \right) dp = \int_{\mathbb{S}^d} \left( \int_{\mathbb{S}^d} \frac{1}{\|p - \theta_p^t q\|^s} dq \right) dp.$$

Como las isometrías no varían la norma de los vectores, podemos aplicarla dentro de la norma y tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^d} \left( \int_{\mathbb{S}^d} \frac{1}{\|p - \theta_p^t q\|^s} dq \right) dp &= \int_{\mathbb{S}^d} \left( \int_{\mathbb{S}^d} \frac{1}{\|\theta_p p - \theta_p \theta_p^t q\|^s} dq \right) dp \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} \left( \int_{\mathbb{S}^d} \frac{1}{\|\theta_p p - q\|^s} dq \right) dp \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} \left( \int_{\mathbb{S}^d} \frac{1}{\|(1, 0, \dots, 0) - q\|^s} dq \right) dp \\ &= \int_{\mathbb{S}^d} \left( \int_{\mathbb{S}^d} (2 - 2q_1)^{-\frac{s}{2}} dq \right) dp. \end{aligned}$$

Gracias a la Proposición 1.1.1 y al Teorema de Fubini podemos hacer el siguiente cambio de variables:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^d} \left( \int_{\mathbb{S}^d} (2 - 2q_1)^{-\frac{s}{2}} dq \right) dp &= \int_{\mathbb{S}^d} \text{Vol}(\mathbb{S}^{d-1}) \left( \int_{-1}^1 (2 - 2t)^{-\frac{s}{2}} (1 - t^2)^{\frac{d}{2}-1} dt \right) dp \\ &= \text{Vol}(\mathbb{S}^d) \text{Vol}(\mathbb{S}^{d-1}) \left( \int_{-1}^1 (2 - 2t)^{-\frac{s}{2}} (1 - t^2)^{\frac{d}{2}-1} dt \right) \\ &= \text{Vol}(\mathbb{S}^d) \text{Vol}(\mathbb{S}^{d-1}) 2^{-\frac{s}{2}} \left( \int_{-1}^1 (1 + t)^{d-1} (1 - t)^{\frac{d}{2}-1-\frac{s}{2}} dt \right). \end{aligned}$$

De nuevo hacemos un cambio de variables  $u = \frac{1+t}{2}$ :

$$\begin{aligned} &\text{Vol}(\mathbb{S}^d) \text{Vol}(\mathbb{S}^{d-1}) 2^{-\frac{s}{2}} \left( \int_{-1}^1 (1 + t)^{\frac{d}{2}-1} (1 - t)^{d-1-\frac{s}{2}} dt \right) \\ &= \text{Vol}(\mathbb{S}^d) \text{Vol}(\mathbb{S}^{d-1}) 2^{-\frac{s}{2}} 2^{d-1-\frac{s}{2}} \left( \int_0^1 u^{\frac{d}{2}-1} (1 - u)^{\frac{d}{2}-1-\frac{s}{2}} du \right) \\ &= \text{Vol}(\mathbb{S}^d) \text{Vol}(\mathbb{S}^{d-1}) 2^{d-1-s} B\left(\frac{d}{2}, \frac{d-s}{2}\right) \\ &= \frac{2^{d-s+1} \pi^{2d+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2}) \Gamma(\frac{d+1}{2})} B\left(\frac{d}{2}, \frac{d-s}{2}\right) \\ &= \frac{2^{2d-s} \pi^d}{\Gamma(d)} B\left(\frac{d}{2}, \frac{d-s}{2}\right). \end{aligned}$$

Basta ahora con multiplicar por  $\frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{S}^d)^2}$  y concluimos la demostración.  $\square$

Si  $d$  es la dimensión de la esfera en la que estamos trabajando y  $s$  es el parámetro de la energía de Riesz, vemos que solo tiene sentido preguntarnos por la energía de Riesz continua en el caso  $s < d$ , ya que si no, la integral (1.6) vale  $\infty$ .

De igual manera a como hemos definido la energía de Riesz continua podemos definir la energía de Riesz de un conjunto de puntos  $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\}$  en la esfera  $\mathbb{S}^d$  (o cualquier conjunto compacto) por

$$\mathcal{E}_s(\omega_N) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{\|x_i - x_j\|^s}. \quad (1.7)$$

Podemos observar que la familia de energías de Riesz discretas engloba muchos potenciales conocidos, algunos de ellos con claras interpretaciones físicas, como el potencial de Coulomb para  $s = 1$  o el potencial de Newton para  $s = d - 2$  ( $d \geq 3$ ). Además, resulta muy interesante el comportamiento de la energía de Riesz para los valores límites de  $s$ . Así, veremos que cuando  $s \rightarrow 0$  obtenemos la energía logarítmica (Sección 1.2.2) y cuando  $s \rightarrow \infty$  nos encontramos con el problema del empaquetamiento óptimo en la esfera (Sección 1.2.6).

### Energía de Riesz mínima

El valor mínimo de la energía de Riesz cuando  $s > 0$  y su comportamiento asintótico han sido estudiados en profundidad, especialmente en el caso en que  $X = \mathbb{S}^d \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$  es la esfera  $d$ -dimensional. En [Wagner, 1989; Wagner, 1990] se demuestra que las familias de puntos que minimizan la energía de Riesz en  $\mathbb{S}^d$  para  $0 \leq s \leq d$  están asintóticamente uniformemente distribuidas. En cuanto a la expansión asintótica de la energía de Riesz mínima, en [Brauchart, 2006; Kuijlaars and Saff, 1998] los autores prueban que para  $d \geq 2$  y  $0 < s < d$  existen constantes  $c > C > 0$  (dependiendo únicamente de  $d$  y  $s$ ) tales que

$$cN^{1+\frac{s}{d}} \leq V_s(\mathbb{S}^d)N^2 - \min_{\omega_N} (\mathcal{E}_s(\omega_N)) \leq CN^{1+\frac{s}{d}}, \quad (1.8)$$

donde  $V_s(\mathbb{S}^d)$  es la  $s$ -energía continua para la medida normalizada de Lebesgue (definida en la ecuación (1.6)). Dar cotas finas para las constantes en (1.8) es un problema abierto importante en el área. Podemos consultar [Brauchart et al., 2012; Sandier and Serfaty, 2015; Bétermin and Sandier, 2018; Rakhmanov et al., 1994] para algunas conjeturas precisas y [Brauchart and Grabner, 2015] o [Borodachov et al., ] para conocer el estado actual del problema, que se puede enunciar de la siguiente forma

**Problema 1.2.2.** Para  $s \in (0, d)$ , sea  $C_{s,d,N}$  la constante:

$$0 < C_{s,d,N} = \frac{V_s(\mathbb{S}^d)N^2 - \min_{\omega_N} (\mathcal{E}_s(\omega_N))}{N^{1+\frac{s}{d}}}.$$

Encontrar valores asintóticos para  $C_{s,d,N}$  cuando  $N \rightarrow \infty$ . En particular, probar que el límite existe.

Análogamente a la energía de Riesz mínima para  $s > 0$  se plantea el problema de la energía de Riesz máxima para  $s < 0$ . Tal vez el problema más conocido de esta familia es el de maximizar la suma de las distancias, el lector puede consultar [Alexander, 1972; Beck, 1984].

### El caso hipersingular

Llamamos energía hipersingular de Riesz a la energía de Riesz cuando el parámetro  $s$  es mayor o igual que la dimensión del espacio en el que estamos distribuyendo puntos. En [Hardin and Saff, 2005] los autores demuestran que los conjuntos de puntos que minimizan la energía hipersingular de Riesz están asintóticamente uniformemente distribuidos. Este resultado se conoce popularmente como el *Poppy seed bagel theorem*. Se puede consultar [Hardin and Saff, 2005, Theorem 2.1] para el caso  $s > d$  y [Götz and Saff, 2001, Main Theorem] para el caso  $s = d$ .

#### 1.2.2. Energía logarítmica en $\mathbb{S}^2$

Como adelantamos en la sección anterior, la energía de Riesz para el parámetro  $s = 0$  se define por

$$\mathcal{E}_{\log}(\omega_N) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \mathcal{E}_s(\omega_N) = \sum_{i \neq j} \log \|x_i - x_j\|^{-1},$$

recibe el nombre de energía logarítmica y está relacionada con el diámetro transfinito de un conjunto, véase por ejemplo [Doohovskoy and Landkof, 2011].

Aunque esta energía se ha estudiado en esferas de cualquier dimensión, el caso  $d = 2$  ha recibido especial atención por el siguiente hecho. En el artículo [Shub and Smale, 1993] los autores describen una relación entre el número de condición de un polinomio complejo en una variable (una cantidad que mide la sensibilidad a la hora de encontrar raíces de polinomios) y la energía logarítmica de sus puntos esféricos asociados. Dichos puntos se obtienen proyectando en la esfera unidad a través de la proyección estereográfica las raíces del polinomio. Inspirados por esta relación, Shub y Smale propusieron el siguiente problema, hoy conocido como Problema 7 de la lista de Smale.

**Problema 1.2.3** ([Smale, 2000]). *Para cada  $N \in \mathbb{N}$  encontrar una manera constructiva (un algoritmo de números reales en el sentido Blum-Cucker-Smale, [Blum et al., 1998]) y rápida (polinomial en  $N$ ) de producir  $N$  puntos en la esfera unidad que verifiquen*

$$\mathcal{E}_{\log}(\omega_N) - m_N \leq c \log N,$$

donde  $c$  es una constante universal y  $m_N$  es el valor mínimo de  $\mathcal{E}_{\log}$  entre todas las colecciones de  $N$  puntos en  $\mathbb{S}^2$ .

Tal vez una de las mayores dificultades para dar solución al Problema 1.2.3 consiste en que no conocemos el valor de  $m_N$  con precisión  $\log N$ . Una serie de artículos: [Wagner, 1989; Rakhmanov et al., 1994; Dubickas, 1996; Brauchart, 2008] prueban cotas, tanto superiores como inferiores para  $m_N$ . El mejor resultado hasta la fecha está propuesto en [Bétermin and Sandier, 2018]. En este artículo los autores relacionan la energía logarítmica en  $\mathbb{S}^2$  con una energía renormalizada definida en el plano en [Sandier and Serfaty, 2015], a partir de lo cual prueban la existencia de un término  $O(N)$  en la expansión asintótica de la energía logarítmica mínima. Dicha expresión resulta entonces:

$$m_N = W_{\log}(\mathbb{S}^2) N^2 - \frac{1}{2} N \log N + C_{\log} N + o(N), \quad (1.9)$$

donde

$$W_{\log}(\mathbb{S}^2) = \frac{1}{(4\pi)^2} \int_{x,y \in \mathbb{S}^2} \log \|x - y\|^{-1} d(x, y) = \frac{1}{2} - \log 2$$

es la energía continua y  $C_{\log}$  es una constante. Combinando los resultados de [Dubickas, 1996] y [Bétermin and Sandier, 2018] podemos acotar esa constante de la siguiente forma

$$-0.2232823526 \dots \leq C_{\log} \leq 2 \log 2 + \frac{1}{2} \log \frac{2}{3} + 3 \log \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/3)} = -0.0556053 \dots$$

**Conjetura 1.** [Brauchart et al., 2012; Bétermin and Sandier, 2018] *El valor de la constante  $C_{\log}$  para la energía logarítmica mínima en la esfera  $\mathbb{S}^2$  es:*

$$C_{\log} = 2 \log 2 + \frac{1}{2} \log \frac{2}{3} + 3 \log \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(1/3)} = -0.0556053 \dots$$

En la literatura se denota normalmente por puntos elípticos de Fekete a los conjuntos de puntos  $\omega_N$  tales que

$$\mathcal{E}_{\log}(\omega_N) = m_N.$$

### 1.2.3. Energía de Green

Ya sea por sus aplicaciones físicas o por la sencillez de su definición, las energías de Riesz parecen potenciales naturales a la esfera. Sin embargo, si nos preguntamos por los potenciales naturales a una variedad diferencial compacta cualquiera entonces la respuesta no resulta tan evidente. En [Beltrán et al., 2019], los autores definen el potencial de Green y argumentan que en cualquier variedad compacta que presente una función de Green tiene sentido considerar la siguiente energía.

**Definición 1.2.4.** Sea  $\mathcal{G} : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  la función de Green de la variedad compacta  $\mathcal{M}$ , esto es,  $\mathcal{G}(x, \cdot)$  tiene media cero para todo  $x$ ,  $\mathcal{G}$  es simétrica y  $\Delta_y \mathcal{G} = \delta_x(y) - \text{Vol}(\mathcal{M})^{-1}$ , con  $\delta_x$  la función delta de Dirac, en el sentido de las distribuciones. Entonces la energía de Green de un conjunto de  $r$  puntos  $\omega_r = (x_1, \dots, x_r) \in \mathcal{M}^r$  se define por

$$\mathcal{E}_{\mathcal{G}}(\omega_r) = \sum_{i \neq j} \mathcal{G}(x_i, x_j).$$

Los puntos que minimizan la energía de Green están asintóticamente uniformemente distribuidos en cualquier variedad riemanniana compacta, véase [Beltrán et al., 2019, Main Theorem].

El cálculo de la función de Green es complicado y para muchas variedades no se conoce una fórmula explícita. Aquí hemos desarrollado esos cálculos para el espacio proyectivo complejo de dimensión  $d$  (compleja).

**Proposición 1.2.5.** *La función de Green de dos puntos  $x, y \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$  está dada por la siguiente fórmula.*

$$\mathcal{G}(x, y) = \frac{(d-1)!}{2\pi^d} \left[ \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{(d-k)(\sin r)^{2d-2k}} \right) - \log(\sin r) \right] - \frac{(d-1)!}{4\pi^d} \left( \frac{1}{d} + 2 \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{k} \right),$$

donde  $r = d_{FS}(x, y) = \arcsin \sqrt{1 - \left| \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \right|^2}$ .

*Demostración.* Haremos la demostración siguiendo el algoritmo propuesto en [Beltrán et al., 2019]. La función de Green de  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$  está dada por  $\mathcal{G} = \phi(r)$ , donde  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$  tiene diámetro  $\frac{\pi}{2}$ , volumen dado por  $\text{Vol}(\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})) = \frac{\pi^d}{d!}$ , distancia de Riemann dada por  $r = d_{FS}(x, y) = \arcsin \sqrt{1 - \left| \left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle \right|^2}$  y

$$\phi'(r) = -\frac{1}{\text{Vol}(\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1}))} \frac{\int_r^{\pi/2} \sin^{2d-1} t \cos t dt}{\sin^{2d-1} r \cos r} = -\frac{1}{2d \text{Vol}(\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1}))} \frac{1 - \sin^{2d} r}{\sin^{2d-1} r \cos r}.$$

Si integramos esta fórmula (utilizando [Gradshteyn and Ryzhik, 2015, 2.517–1]) tenemos:

$$\phi(r) = \frac{1}{2d \text{Vol}(\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1}))} \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{(d-k)(\sin r)^{2d-2k}} - \log(\sin r) \right] + C.$$

Para calcular la constante, solo tenemos que imponer que la media de  $\mathcal{G}(x, \cdot)$  sea 0 para todo (o lo que es equivalente, para algún)  $x \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$ . Sea  $x = (1, 0)$ , hacemos un cambio de variables usando la función  $\psi_d$  definida en la Definición 1.1.5 cuyo jacobiano está calculado en la Proposición 1.1.7 y calculamos:

$$C = -\frac{1}{2d \text{Vol}(\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1}))^2} \left[ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d-1} \int_{z \in \mathbb{C}^d} \frac{(1 + \|z\|^2)^{-k-1}}{(d-k)\|z\|^{2d-2k}} dz - \frac{1}{2} \int_{z \in \mathbb{C}^d} \frac{\log\left(\frac{\|z\|^2}{1 + \|z\|^2}\right)}{(1 + \|z\|^2)^{d+1}} dz \right].$$

Integramos en coordenadas polares,

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{2\text{Vol}(\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1}))} \left( \int_0^\infty \frac{t^{2d-1} \log\left(\frac{t^2}{1+t^2}\right)}{(1+t^2)^{d+1}} dt - \sum_{k=1}^{d-1} \int_0^\infty \frac{t^{2k-1}}{(d-k)(1+t^2)^{k+1}} dt \right) \\ &= -\frac{d!}{4\pi^d} \left( \frac{1}{d^2} + \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{k(d-k)} \right) = -\frac{(d-1)!}{4\pi^d} \left( \frac{1}{d} + 2 \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{k} \right). \end{aligned}$$

Para calcular estas integrales hemos hecho un cambio de variables con  $s = t^2/(1+t^2)$  y hemos utilizado la fórmula de [Gradshteyn and Ryzhik, 2015, 4.272–6]. Podemos concluir que para  $r = d_{FS}(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(x, y) &= \frac{(d-1)!}{2\pi^d} \left[ \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{(d-k)(\sin r)^{2d-2k}} \right) - \log(\sin r) \right] \\ &\quad - \frac{(d-1)!}{4\pi^d} \left( \frac{1}{d} + 2 \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{k} \right). \end{aligned}$$

□

#### 1.2.4. Otros potenciales

En general podemos considerar cualquier potencial de la forma

$$E_{K,Q}(\omega_N) = \sum_{i \neq j} (K(x_i, x_j) + Q(x_i) + Q(x_j))$$

con  $\omega_N \subset X$  y ciertas condiciones en  $K$  y  $Q$ . Es común suponer que  $K$  y  $Q$  son semicontínuos inferiormente y además  $K$  es simétrico. Estas dos hipótesis implican que entonces el problema de minimizar la expresión anterior tiene una solución para cada  $N \geq 2$  en cualquier conjunto infinito compacto  $X$ , vease [Brauchart and Grabner, 2015]. Esta definición más general de potenciales engloba muchos problemas conocidos, nombraremos dos de ellos. El primero consiste en describir el estado de equilibrio de un sistema de partículas (típicamente gaseoso) que se relacionan entre ellas con repulsiones dadas por el potencial de Coulomb y está confinado en un área concreta gracias a un potencial externo. El hamiltoniano que modela el comportamiento es

$$H(\omega_N) = \sum_{i \neq j} K(x_i - x_j) + N \sum_{i=1}^N V(x_i),$$

donde  $K(x) = -\log(x)$  si  $d = 2$  y  $K(x) = \|x\|^{2-d}$  si  $d \geq 3$ . Recomendamos al lector la lectura de [Nodari and Serfaty, 2015] para avances recientes en este sentido.

Otro ejemplo interesante lo conforman los FNTFs (finite normalized tight frames) introducidos en [Benedetto and Fickus, 2003], que son puntos que minimizan el potencial

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N |\langle x_i, x_j \rangle|^2.$$

En dicho artículo los autores prueban que en  $\mathbb{R}^3$ , los puntos que minimizan esos potenciales son los vértices de los sólidos platónicos y las configuraciones de hexágonos y pentágonos en la esfera unidad. En [Ehler and Okoudjou, 2012] los autores estudian los FNTFs restringiendo el espacio de definición a la esfera unidad.

Otro conjunto de puntos óptimos en la esfera lo forman las polarizaciones, a saber, el conjunto de puntos que es solución de este problema:

$$\max_{\omega_N \subset \mathbb{S}^d} \min_{x \in \mathbb{S}^d} \sum_{j=1}^N K(x, x_j). \quad (1.10)$$

En el artículo [Borodachov et al., 2018] los autores demuestran que las de soluciones de ese problema están asintóticamente uniformemente distribuidas.

### 1.2.5. Puntos de Fekete

Los puntos de Fekete (no confundir con los puntos *elípticos* de Fekete), véase [Sloan and Womersley, 2004], son las soluciones al problema de maximizar un determinante de tipo Vandermonde que aparece en la fórmula de la interpolación de Lagrange en la esfera  $\mathbb{S}^2$ . En [Marzo and Ortega-Cerdà, 2010] los autores prueban que los puntos de Fekete están asintóticamente uniformemente distribuidos. Cuando consideramos este problema en el intervalo unidad  $[-1, 1]$ , los puntos de Fekete son exactamente los puntos que minimizan la energía logarítmica. La solución en este caso es el conjunto de puntos  $\omega_N$  formado por los puntos  $\{-1, 1\}$  y los ceros del polinomio de Gegenbauer  $C_{N-2}^{3/2}$ , véase [Fejér, 1932]. En general, el comportamiento asintótico de los ceros de polinomios (en especial polinomios ortogonales) ha sido concienzudamente estudiado. Recomendamos al lector el artículo [Marcellán et al., 2007] donde los autores estudian las repulsión que muestran las raíces de diferentes familias de polinomios, así como referencias ahí contenidas.

### 1.2.6. Empaquetamientos y recubrimientos óptimos en $\mathbb{S}^d$

El problema del empaquetamiento óptimo en la esfera se atribuye a Tammes, un botánico y genetista holandés que en el artículo [Tammes, 1930] realiza un estudio sobre la estructura de los granos de polen. Uno de los problemas propuestos en el citado artículo se puede reformular de la siguiente manera.

**Problema 1.2.6** (Problema del empaquetamiento óptimo). *Dar un conjunto  $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\}$  de  $N$  puntos en la esfera  $\mathbb{S}^d$  tal que la distancia mínima entre dos puntos*

$$\delta(\omega_N) = \min_{1 \leq i < j \leq N} \|x_i - x_j\|$$

*sea máxima.*

Decimos que un conjunto de puntos  $\omega_N$  está bien separado si  $\|x_i - x_j\| \geq \frac{C}{N^{\frac{1}{d}}}$  para todo  $i, j \in \{1, \dots, N\}$  con  $i \neq j$ , donde  $C$  es una constante que solo depende de  $d$ , la dimensión de la esfera. En el artículo [Borodachov et al., 2007] los autores prueban que todas las soluciones al problema de minimizar la energía de Riesz cuando el parámetro  $s \rightarrow \infty$  son soluciones para el problema del empaquetamiento óptimo en la esfera  $\mathbb{S}^d$ . Un problema similar al empaquetamiento óptimo es el siguiente.

**Problema 1.2.7** (Problema del recubrimiento óptimo). *Dar un conjunto  $\omega_N = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{S}^d$  tal que si centramos un casquete esférico de radio  $r$  en cada punto  $x_i$ , la esfera quede cubierta por completo y se minimize  $r$ . Equivalentemente, minimizar la cantidad*

$$\rho(\omega_N) = \max_{y \in \mathbb{S}^d} \min_{1 \leq i \leq N} \|y - x_i\|.$$

Normalmente llamamos a  $\rho(\omega_N)$  el radio recubridor de la esfera. Si consideramos una polarización (ecuación (1.10)) con  $K$  igual al núcleo de Riesz entonces todas las soluciones cuando  $s \rightarrow \infty$  son soluciones del problema del recubrimiento óptimo, véase [Borodachov et al., ].

En muchos problemas de distribución de puntos en la esfera lo que buscamos es una relación equilibrada entre las dos cantidades anteriores. Es lo que se conoce como el mesh-separation ratio,

$$\gamma(\omega_N) = \frac{\rho(\omega_N)}{\delta(\omega_N)}.$$

Decimos que una sucesión de conjuntos de puntos es quasi-uniforme si la sucesión

$$\left\{ \gamma(\omega_N) = \frac{\rho(\omega_N)}{\delta(\omega_N)} \right\}_{N \geq 2}$$

está acotada para todo  $N \in \mathbb{N}$ . En [Bondarenko et al., 2014] los autores prueban que

$$\gamma(\omega_N) \geq \frac{1}{2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right)} + o(1) = \frac{\sqrt{5}-1}{2} + o(1)$$

para todo  $N \in \mathbb{N}$  y para cualquier familia de puntos  $(\omega_N)$  en  $\mathbb{S}^2$ .

### 1.2.7. Discrepancia en $\mathbb{S}^d$

Si tenemos una familia de puntos asintóticamente uniformemente distribuidos, es decir, que convergen hacia la distribución uniforme, nos podemos preguntar por su velocidad de convergencia. La fórmula (1.5) con  $\mu_{\mathbb{S}^d}$  la medida de Lebesgue normalizada en  $\mathbb{S}^d$  nos dice que una familia  $(\omega_N)$  de puntos esta asintóticamente uniformemente distribuida en  $\mathbb{S}^d$  si

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \chi_C(x_j) = \mu_{\mathbb{S}^d}(C)$$

para todo  $C \in \mathfrak{C}$ , una familia de subconjuntos de Borel de  $\mathbb{S}^d$ . Así que lo que queremos es estudiar la cantidad

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \chi_C(x_j) - \mu_{\mathbb{S}^d}(C) \right).$$

La discrepancia mide esa velocidad de convergencia. Así pues, seleccionamos una familia  $\mathfrak{C}$  de subconjuntos de  $\mathbb{S}^d$  (normalmente serán casquetes esféricos) y definimos la discrepancia del conjunto  $\omega_N$  respecto de  $\mathfrak{C}$  por

$$D_{\mathfrak{C}}(\omega_N) = \sup_{C \in \mathfrak{C}} \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \chi_C(x_j) - \mu_{\mathbb{S}^d}(C) \right|. \quad (1.11)$$

Podríamos pensar en tomar la norma  $L^2$  en vez del supremo. Si tomamos  $\mathfrak{C}$  el conjunto de casquetes esféricos de  $\mathbb{S}^d$  (la definición se puede consultar en la fórmula (1.2)), la discrepancia  $L^2$  se puede describir de la siguiente forma.

$$D_{L^2, cap}(\omega_N) = \left( \int_{\mathbb{S}^d} \int_{-1}^1 \left| \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \chi_C(x_j) - \mu_{\mathbb{S}^d}(C(x, t)) \right|^2 dt d\mu_{\mathbb{S}^d} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

La fórmula de invarianza de Stolarsky, demostrada en [Stolarsky, 1973], establece una relación entre la  $(-1)$ -energía de Riesz y la discrepancia  $L^2$  respecto a los casquetes esféricos.

**Teorema 1.2.8.** [Stolarsky, 1973] Sea  $\omega_N \subset \mathbb{S}^d$ , entonces

$$c_d \left( D_{L^2, cap}(\omega_N) \right)^2 = \int_{\mathbb{S}^d} \int_{\mathbb{S}^d} \|x - y\| d\mu_{\mathbb{S}^d}(x) d\mu_{\mathbb{S}^d}(y) - \frac{1}{N^2} \sum_{i, j=1}^N \|x_i - x_j\|,$$

donde  $c_d$  es una constante que depende solo de la dimensión.

*Demostración.* Se puede consultar el artículo original: [Stolarsky, 1973] o estos artículos posteriores que ofrecen pruebas más sencillas: [Brauchart and Dick, 2013] y [Bilyk et al., 2018].  $\square$

Otro concepto que mide cómo se asemeja una familia de puntos a la distribución uniforme es la hiperuniformidad. Estudiada desde hace años en física estadística, en [Brauchart et al., 2017] los autores proponen una adaptación de la definición para espacios euclídeos dada en [Torquato and Stillinger, 2003] a la esfera  $\mathbb{S}^d$ .

### 1.2.8. Designs

Llamamos designs, fórmulas de cuadratura o nodos de cuadratura de Chebyshev a un conjunto finito de puntos  $\omega_N$  en un espacio  $X$  con la propiedad de integrar exactamente un conjunto de funciones definidas en dicho espacio. Los resultados sobre la cuadratura de Chebyshev en intervalos de la recta real son un tema clásico en la teoría de la aproximación. Una buena recopilación de ellos se encuentra en el estudio de Gautschi, comentado en esta edición por Korevaar, [Gautschi, 2014]. Vamos presentar los diferentes tipos de designs siguiendo el orden cronológico de su definición. Comencemos con el caso de las esferas.

**Definición 1.2.9.** Un conjunto de puntos  $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{S}^d$  es un  $t$ -design esférico si para cualquier polinomio  $P(x)$  definido en la esfera de grado menor o igual que  $t$  se verifica

$$\int_{\mathbb{S}^d} P(x) d\mu(x) = \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^d)}{N} \sum_{i=1}^N P(x_i),$$

donde  $d\mu(x)$  es la medida de Lebesgue en la esfera.

El concepto de  $t$ -design esférico fue introducido por Delsarte, Goethals y Seidel en su artículo [Delsarte et al., 1977] donde consideran problemas de combinatoria algebraica en esferas. A partir de ese momento, los  $t$ -designs esféricos han resultado ser una herramienta útil en ramas de las matemáticas tan distintas como la geometría, la combinatoria algebraica y geométrica y el análisis numérico. Además del ya citado estudio de Brauchart y Grabner [Brauchart and Grabner, 2015], Banai y Banai tiene otro [Bannai and Bannai, 2009] dedicado exclusivamente a los  $t$ -designs esféricos. De entre todas las propiedades que presentan los  $t$ -designs esféricos, vamos a destacar la siguiente. Si los puntos están bien separados, como definimos en la Sección 1.2.6, entonces se encuentran cercanos al óptimo de otros problemas, como la minimización del potencial de Coulomb [Hesse and Leopardi, 2008], o en general, la minimización de las energías de Riesz, [Hesse, 2009].

Poco después de la definición de los  $t$ -designs esféricos comenzaron las generalizaciones a otros espacios distintos a la esfera. Así, inspirado por los trabajos de Neumaier en espacios de Delsarte, véase [Neumaier, 1981], Hoggar en su artículo [Hoggar, 1982] definió y dotó de las primeras propiedades a los  $t$ -designs en espacios proyectivos. Lyubich y Shatalova, se dieron cuenta que los  $t$ -designs proyectivos eran una herramienta que permitía crear un embebimiento isométrico de  $\ell^2(\mathbb{R}^n)$  en  $\ell^{2t}(\mathbb{R}^m)$  (véase [Lyubich and Shatalova, 2004]), lo cual supuso una de las primeras aplicaciones de los  $t$ -designs, aparte de la integración numérica. La existencia de designs en un contexto más general fue demostrada por Seymour y Zaslavsky en [Seymour and Zaslavsky, 1984] y Arias de Reyna en [Arias de Reyna, 1988].

**Definición 1.2.10.** Sea  $X$  un espacio topológico conexo por caminos dotado de una medida  $\mu$  finita y positiva con soporte en todo  $X$ . Sean

$$f_1, \dots, f_m : X \longrightarrow \mathbb{R}^d$$

funciones continuas e integrables que generan un subespacio lineal finito dimensional  $F$ . Un design en  $X$  con respecto a  $F$  es un conjunto de puntos  $x_1, \dots, x_N \in X$  tales que

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_j(x_i) = \frac{1}{\mu(X)} \int_X f_j d\mu,$$

para  $1 \leq j \leq m$ .

**Teorema 1.2.11.** *Sean  $X, \mu, f_1, \dots, f_m$  como en la Definición 1.2.10. Entonces existen designs en  $X$  con respecto a  $F$ . Es más,  $N \in \mathbb{N}$  puede ser cualquier número natural salvo una cantidad finita de excepciones.*

*Demostración.* Véase [Seymour and Zaslavsky, 1984, Main Theorem]. □

Un espacio de particular interés son las variedades grassmannianas, ya que los designs definidos ahí tienen propiedades importantes para la teoría de códigos. En este contexto, Bachoc, Coulangéon y Nebe realizan un estudio sobre los designs en grassmannianas, ver [Bachoc et al., 2002]. Los autores no consideran los polinomios de grado acotado como en las definiciones anteriores, sino que toman los  $t$  primeros autovectores del operador laplaciano de la grassmanniana. En el artículo [Breger et al., 2017] Breger, Ehler y Gräf realizan un estudio numérico de problemas de aproximación en grassmannianas y consideran, esta vez sí, designs para los polinomios de grado menor o igual que  $t$ . Además, en su artículo observan que estas dos posibles definiciones de  $t$ -designs están, de hecho, relacionadas, véase [Breger et al., 2017, Section 4.2].

Un tema que ha cobrado bastante interés recientemente son los  $t$ -designs en grafos, donde se toma como espacio de funciones algunas autofunciones del laplaciano discreto en el grafo y se buscan los nodos que verifiquen las reglas de cuadratura, véase [Steinerberger, 2018] para una introducción al tema. Otro espacio en el que tiene sentido considerar las primeras  $t$  autofunciones del operador laplaciano son las variedades riemannianas compactas.

### Desings con un número mínimo de puntos

Una vez demostrada su existencia en muchos y variados contextos, nos cuestionamos sobre la existencia de designs formados por muy pocos puntos. El primer paso consiste en conocer el número mínimo de puntos que hacen falta para una familia de funciones dada.

**Proposición 1.2.12.** *Si  $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{S}^d$  es un  $t$ -design, entonces*

$$N \geq \binom{d+s}{d} + \binom{d+s-1}{d} = \dim \mathcal{P}_s(\mathbb{S}^d), \quad N \geq 2 \binom{d+s}{d}$$

para  $t = 2s$  y  $t = 2s + 1$  respectivamente, donde  $\mathcal{P}_s(\mathbb{S}^d)$  es el espacio de polinomios de grado menor o igual que  $s$  en  $\mathbb{S}^d$ .

*Demostración.* Se puede consultar, por ejemplo, [de la Harpe and Pache, 2005].  $\square$

Los  $t$ -designs formados por este número de puntos reciben el nombre de *tight designs*. En [Bannai and Damerell, 1979], [Bannai and Damerell, 1980] se demuestra que los *tight designs* sólo existen para  $d = 1$  y todo  $t$ , o un conjunto finito de valores de  $t$  si  $d \geq 2$ . En la esfera  $\mathbb{S}^d$  conocemos la existencia de unos pocos *tight designs*. Los *tight designs* para un número grande de puntos son el kissing *tight 4-design* para  $\mathbb{S}^{21}$  con  $275 = \dim \mathcal{P}_2(\mathbb{S}^{21})$  puntos y el 11–design en  $\mathbb{S}^{23}$  formado por 196560 puntos provenientes del retículo de Leech.

Korevaar y Meyers en sus artículos [Korevaar and Meyers, 1993; Korevaar and Meyers, 1994] conjeturan que existen  $t$ -designs en la esfera  $\mathbb{S}^d$  con el número de puntos igual a una constante por  $t^d$ . Es decir, que el orden mínimo para tener un  $t$ -design (por la Proposición 1.2.12) se alcanza. El artículo de Bondarenko, Radchenko y Viazovska [Bondarenko et al., 2013] demuestra que la conjetura de Korevaar y Meyers es cierta.

**Teorema 1.2.13.** *Existen  $t$ -designs con  $O(t^d)$  puntos en la esfera de dimensión  $d$ .*

En el mismo artículo donde Korevaar y Meyers exponen su conjetura (demostrada en el Teorema 1.2.13), realizan esta otra sobre las elipses en dimensión 1.

**Conjetura 2.** [Korevaar and Meyers, 1994, Remark 3.2] *Existen  $t$ -designs en elipses con un número de puntos  $N = Ct$  para todo  $t \in \mathbb{N}$ .*

Por la Proposición 1.2.12 y el Teorema 1.2.13 podemos concluir que  $O(t^d)$  es asintóticamente el mejor orden posible. La prueba del Teorema 1.2.13 sin embargo, no es constructiva, así que seguimos sin conocer muchos ejemplos de  $t$ -designs con ese número de puntos. Además, la prueba es bastante flexible, lo que permitió a los autores refinarla en [Bondarenko et al., 2015] demostrando que existen designs con el mismo número de puntos que además están bien separados tal como definimos en la Sección 1.2.6.

En contextos más generales se ha demostrado poco sobre el número mínimo de puntos para tener un  $t$ -design. En el caso de espacios topológicos conexos por caminos (Definición 1.2.9), Kane propone en [Kane, 2015] una cota para la asintótica que depende de muchos parámetros, entre ellos la dimensión del espacio. Si particularizamos este resultado al caso de la variedad grassmanniana  $G(k, \mathbb{R}^n)$  con polinomios de grado menor o igual que  $t$ , se demuestra que existen  $t$ -designs formados por un número de puntos del orden  $O(t^{2k(n-k)})$ , [Kane, 2015, Corollary 16].

**Conjetura 3.** [Kane, 2015, Conjecture 5.2] *Existen  $t$ -designs en la Grassmanniana  $G(n, k)$  con un número de puntos  $N = Ct^{k(n-k)}$  para todo  $t \in \mathbb{N}$ .*

Las conjeturas 2 y 3 afirman que el número de puntos debe ser (salvo multiplicación por una constante) la dimensión del espacio de polinomios en la variedad.

Para variedades riemannianas compactas junto con autofunciones del operador laplaciano el número de puntos mínimo es al menos lineal en el número de autofunciones que queramos interpolar, véase [Steinerberger, 2017]. Recientemente, [Gariboldi and Gigante, 2018] trabajando en una generalización de [Bondarenko et al., 2013] y de [Etayo et al., 2018] han demostrado que ese número, de hecho, se alcanza.

### Casi designs

En algunas ocasiones no necesitamos que un conjunto de puntos  $\omega_N$  integre exactamente un espacio de funciones, sino que nos basta con que el error

$$E(X, \{f_j\}, \omega_N) = \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_j(x_i) - \frac{1}{\mu(X)} \int_X f_j d\mu \right|$$

sea suficientemente pequeño. En [Damelin and Grabner, 2003] los autores demuestran que para la esfera  $\mathbb{S}^d$  y los polinomios esféricos ese error está acotado, entre otros términos, por la energía de Riesz de  $\omega_N$ . Los métodos quasi-Montecarlo aproximan integrales

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f_j(x_i) \approx \frac{1}{\mu(X)} \int_X f_j d\mu,$$

por lo que, entre otras cosas, se dedican a estudiar el error  $E(X, \{f_j\}, \omega_N)$  definido anteriormente. Recomendamos al lector el libro [Lemieux, 2009] sobre los métodos Montecarlo y quasi-Montecarlo y [Brauchart et al., 2014] para los métodos quasi-Montecarlo en la esfera  $\mathbb{S}^d$ .

## 1.3. Conjuntos de puntos conocidos

El conjunto de puntos que optimiza cualquiera de los problemas que hemos planteado en la sección anterior en  $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}$  son las raíces de la unidad o cualquier rotación de estas en  $\mathbb{S}^1$ . Dicho de otra forma, para cualquier número  $N \in \mathbb{N}$  existe un polígono regular circunscrito en  $\mathbb{S}^1$  y sus vértices son solución de los problemas de minimización propuestos anteriormente. Sin embargo, basta con subir una dimensión para ver que en la esfera de dimensión 2 no tenemos un poliedro regular con un número  $N$  de vértices para cada  $N \in \mathbb{N}$ , sino que solo existen 5: los sólidos platónicos. Este hecho dificulta mucho la búsqueda de soluciones a los problemas anteriores ya que, de alguna forma, niega la existencia de candidatos naturales. Tenemos el mismo problema en  $\mathbb{S}^d$  para  $d > 2$ : la falta de candidatos naturales dificulta mucho el estudio de los puntos óptimos.

El caso más estudiado con mucha diferencia es el de  $\mathbb{S}^2$ . Así pues, en el apartado de conjuntos deterministas presentaremos únicamente conjuntos de puntos en  $\mathbb{S}^2$ . Aunque podamos

describir explícitamente estas familias de puntos, solo se han conseguido resultados analíticos sobre las asintóticas respecto a los distintos potenciales de Riesz, potenciales logarítmicos, discrepancia o problemas de empaquetamiento para casos realmente aislados.

Ante la falta de resultados analíticos para conjuntos deterministas, una estrategia que ha resultado exitosa en varias ocasiones consiste en tomar familias de puntos aleatorios en  $\mathbb{S}^d$  y luego calcular la esperanza del potencial que estamos analizando. Si consideramos por ejemplo el Problema 1.2.2, la esperanza de la energía de Riesz evaluada en un conjunto de puntos aleatorio será mayor o igual que el valor mínimo que alcanza, así que podemos proporcionar una cota superior para la constante  $C_{s,d,N}$ . Este procedimiento ha sido empleado en [Marzo and Ortega-Cerdà, 2018] para el toro plano, en [Alishahi and Zamani, 2015] para la esfera  $\mathbb{S}^2$  y en [Beltrán et al., 2016] para la esfera  $\mathbb{S}^d$ .

Si tomamos simplemente  $N$  puntos con la distribución uniforme en la esfera  $\mathbb{S}^d$  ya obtenemos el primer término de la asintótica correcto  $V_s(\mathbb{S}^d)N^2$ . Si en vez de la distribución uniforme tomamos distribuciones con buenas propiedades de separación entre puntos podemos alcanzar más términos correctos en la asintótica. Resulta revelador el hecho de que las mejores cotas conocidas para  $C_{s,d,N}$  provienen de conjuntos de puntos aleatorios. Entre los distintos procesos aleatorios que presentamos en esta sección, destacan los procesos determinantes cuya estructura algebraica proporciona las condiciones de separación entre puntos deseadas.

Un caso muy particular es el de las configuraciones óptimas para un número pequeño de puntos en  $\mathbb{S}^2$ . El menor número para el cual el problema no está completamente resuelto es  $N = 5$  (se puede ver un resumen de resultados en [Schwartz, 2018]). Los vértices de los sólidos platónicos  $N = 4, 6, 12$  y la configuración antipodal y equilateral son las soluciones conocidas. Remitimos al lector a [Cohn and Kumar, 2007, Table 1] para las soluciones conocidas en  $\mathbb{S}^d$ ,  $d \geq 3$ .

### 1.3.1. Conjuntos deterministas en $\mathbb{S}^2$

Encontramos un muy buen resumen del estado de la cuestión en el artículo [Hardin et al., 2016], donde los autores presentan diferentes familias conocidas (algunas deterministas y otras probabilistas) y aportan cálculos numéricos para evidenciar las buenas propiedades de las familias. Dichos cálculos (cálculos de las energías logarítmica y potencial, principalmente) se han realizado para un total de hasta  $N = 50.000$  puntos. Todas las familias que forman esta sección están asintóticamente uniformemente distribuidas (véase [Hardin et al., 2016]).

#### Puntos espirales de Fibonacci y generalizados

Una espiral en la esfera  $\mathbb{S}^2$  queda definida por la ecuación

$$\theta = L\phi$$

donde  $\phi$  es el ángulo polar y  $\theta$  es el ángulo azimutal. Los puntos espirales generalizados propuestos por Bauer en [Bauer, 2000] se definen por los valores

$$L = \sqrt{N\pi}, \quad \phi_k = \arccos \left( 1 - \frac{2k-1}{N} \right),$$

donde  $N$  es el número de puntos, con  $1 \leq k \leq N$ . Entre los puntos espirales más conocidos se encuentran los de Fibonacci. Hay dos definiciones muy parecidas para estos puntos, una dada en [Coxeter, 1972] y otra en [Swinbank and Purser, 2006]. La definición de Coxeter parte de una malla cuadrada en  $[0, 1]^2$  formada por los puntos  $(x_j, y_k)_{1 \leq j, k \leq m}$ . Los puntos espirales de Fibonacci se obtienen al proyectar la malla en la esfera  $\mathbb{S}^2$  a través de la proyección de Lambert, o lo que es lo mismo, definiendo los ángulos en función de dos parámetros:

$$\phi_k = \arccos(2y_k - 1), \quad \theta_j = 2\pi x_j$$

donde  $(x_j, y_k)$  con  $1 \leq j, k \leq M$  son una malla cuadrada en el cuadrado  $[0, 1]^2$ . En [Aistleitner et al., 2012], los autores calculan una cota para la discrepancia  $D_{L^2, cap}$  de los puntos espirales de Fibonacci y demuestran que

$$D_{L^2, cap}(F_N) \leq O(N^{-\frac{1}{2}}),$$

donde  $F_N$  es el conjunto de  $N$  puntos de Fibonacci. Es decir, demuestran la misma cota que sabemos que existe para puntos i.i.d. en la esfera. Aun así, es el único conjunto de puntos de los que aquí presentamos para el que se ha podido calcular una cota analíticamente. Además, numericamente, estos puntos muestran una discrepancia  $D_{L^2, cap}(F_N)$  del orden  $N^{-\frac{3}{4}} \log(N)^c$ . No hay ningún resultado analítico para la asintótica de la energía de Riesz o logarítmica.

### Puntos proyectados desde un sólido platónico

Una idea sencilla consiste en inscribir la esfera  $\mathbb{S}^2$  en alguno de los sólidos platónicos, definir una malla regular en cada una de las caras del poliedro y luego proyectar radialmente los puntos. Así, dependiendo de qué poliedro partamos, podemos obtener los Radial Icosahedral Nodes, [Teanby, 2006], los Cubed Sphere Nodes, [Loft et al., 2005], los Octahedral Points, [Holhoş and Roşca, 2014] y los Mesh Icosahedral Equal Area Points, [Hardin et al., 2016]. También carecemos de resultados analíticos para las asintóticas de la energía de Riesz o la discrepancia para estas familias.

### Particiones de área regular

Decimos que una familia de conjuntos cerrados  $R_1, \dots, R_N \subset \mathbb{S}^2$  es una partición regular de  $\mathbb{S}^2$  si

$$\mu_{\mathbb{S}^2}(R_i) = 1/N, \quad \bigcup_{i=1}^N R_i = \mathbb{S}^2, \quad \text{y} \quad \mu_{\mathbb{S}^2}(R_i \cap R_j) = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j.$$

Existen muchas familias de puntos que se pueden obtener a partir de una partición regular de una esfera. Por ejemplo, si tomamos una partición regular de  $\mathbb{S}^2$  y en cada celda tomamos un punto independiente uniformemente, el conjunto de puntos obtenido se conoce como jittered sampling. El jittered sampling tiene discrepancia casi óptima en esperanza [Beck, 1984] y energía de Riesz casi óptima [Wagner, 1989; Rakhmanov et al., 1994], también en esperanza.

En [Rakhmanov et al., 1994], los autores proponen una partición regular formada por dos casquetes esféricos, situados uno en el polo norte y otro en el polo sur y celdas rectangulares situadas en franjas de paralelos, permitiendo una rotación arbitraria en cada franja. Si tomamos el punto central de cada una de estas celdas obtenemos un conjunto de puntos en la esfera conocido como Zonal Equal Area Nodes. Aunque carecemos de resultados analíticos, los Zonal Equal Area Nodes, junto con los puntos en espiral generalizada, tienen la menor energía logarítmica numéricamente de entre todas las familias de puntos deterministas conocidas (véase [Hardin et al., 2016]).

El último ejemplo de puntos que provienen de una partición regular que daremos está formado por los HEALPix Nodes, una familia de puntos desarrollada por un equipo de la NASA en [Banday et al., 2005] para el estudio de la radiación de fondo de microondas. La obtención de los puntos pasa por la definición de una partición regular cuyas celdas forman una estructura jerárquica. No tenemos resultados analíticos sobre el comportamiento asintótico de estos puntos respecto a ninguno de los potenciales presentados en el apartado anterior.

### 1.3.2. Conjuntos aleatorios

En esta sección presentamos varias familias de puntos aleatorios. En primer lugar vamos a presentar unos puntos en la esfera  $\mathbb{S}^2$  definidos en [Armentano et al., 2011] que tienen la peculiaridad de ser el conjunto de puntos fácilmente constructible que producen la mejor asintótica conocida para la energía logarítmica (la más cercana a la asintótica de la energía logarítmica mínima, hasta la elaboración de esta memoria). A continuación presentamos un tipo muy particular de puntos aleatorios que reciben el nombre de proceso determinantal. Tras presentar las propiedades básicas de estos procesos, introduciremos dos ejemplos concretos que dan lugar a puntos muy bien distribuidos en las esferas  $\mathbb{S}^2$  y  $\mathbb{S}^d$  respectivamente. El primero es el spherical ensemble estudiado en [Krishnapur, 2009] y el segundo el harmonic ensemble presentado en [Beltrán et al., 2016].

### 1.3.3. Raíces de polinomios aleatorios

En el artículo [Armentano et al., 2011] los autores definen un conjunto de puntos aleatorios en  $\mathbb{S}^2$  de la siguiente forma. Consideramos un polinomio de grado  $N$  con coeficientes complejos aleatorios normales gaussianos y calculamos sus  $N$  raíces. Generalmente, las  $N$  raíces serán  $N$  números complejos distintos. Situamos las raíces en el plano complejo y las proyectamos

en la esfera de Riemann mediante la proyección estereográfica. Los puntos obtenidos en la esfera son aleatorios y verifican que la esperanza de la energía logarítmica evaluada en ellos es

$$W_{\log}(\mathbb{S}^2) N^2 - \frac{1}{2} N \log N + c_2 N + o(N), \quad (1.12)$$

donde  $c_2 = -W_{\log}(\mathbb{S}^2) = 0.1931471805\dots$ . Como mencionamos anteriormente, este es, hasta la fecha y el Capítulo 3, el conjunto de puntos que produce la energía logarítmica más baja en esperanza.

### 1.3.4. Procesos determinatales.

Durante esta sección, remitimos al lector a [Hough et al., 2009] para estudiar las propiedades teóricas de los procesos determinatales.

**Definición 1.3.1.** Sea  $\Lambda$  un espacio topológico localmente compacto, polaco, dotado de una medida de Radón  $\mu$ . Un proceso simple de  $N$  puntos en  $\Lambda$  es un punto aleatorio en  $\Lambda^N$  (o lo que es equivalente,  $N$  puntos aleatorios elegidos simultáneamente en  $\Lambda$ ).

Hay algunos aspectos delicados en esta definición, como puede verse en [Hough et al., 2009, Section 1.2]. Nosotros trabajaremos solo con procesos de puntos simples, que se caracterizan por estar formados por un número fijo y finito de puntos. Para algunos procesos de puntos existen las llamadas funciones de intensidad, que verifican la siguiente definición.

**Definición 1.3.2.** Sean  $\Lambda$  e  $\mathfrak{X}$  un espacio y un proceso de puntos como en la Definición 1.3.1. Las funciones de intensidad son funciones (si existen)  $\rho_k : \Lambda^k \Rightarrow [0, \infty)$ ,  $k \geq 1$  tales que para cualquier familia de subconjuntos  $D_1, \dots, D_k$  de  $\Lambda$  disjuntos dos a dos tenemos

$$\mathbb{E}_{x \sim \mathfrak{X}} \left[ \left( \prod_{i=1}^k \#(x \cap D_i) \right) \right] = \int_{\prod D_i} \rho_k(x_1, \dots, x_k) d\mu(x_1, \dots, x_k).$$

Aquí,  $\mathbb{E}$  denota la esperanza y por  $x \sim \mathfrak{X}$  entendemos que  $x$  es un subconjunto de  $\Lambda$  con  $N$  elementos, obtenido del proceso de puntos  $\mathfrak{X}$ .

Se sigue de la expresión anterior que para cualquier función medible  $\phi : \Lambda^k \rightarrow [0, \infty)$  la siguiente desigualdad se verifica.

$$\mathbb{E}_{x \sim \mathfrak{X}} \left[ \sum_{i_1 \dots i_k \text{ distintos}} \phi(x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \right] = \int_{y_1, \dots, y_k \in \Lambda} \phi(y_1, \dots, y_k) \rho_k(y_1, \dots, y_k) d\mu(y_1, \dots, y_k). \quad (1.13)$$

A veces las funciones de intensidad se pueden escribir como

$$\rho_k(x_1, \dots, x_k) = \det(K(x_i, x_j)_{1 \leq i, j \leq k})$$

para alguna función medible  $K : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ . En este caso, decimos que  $\mathfrak{X}$  es un proceso de puntos determinantal o, para no hacer tan cargante la notación, simplemente un proceso determinantal. Entre las buenas propiedades de los procesos determinantaes están el hecho de que los puntos se pueden generar mediante un algoritmo y que muestran repulsión local (véase [Scardicchio et al., 2009]).

Una colección especialmente buena de procesos determinantaes se puede obtener a partir de subespacios  $N$ -dimensionales del espacio de Hilbert  $L^2_{\mathbb{C}}(\Lambda)$  (el conjunto de funciones complejas cuadrado-integrables en  $\Lambda$ ). Recordamos que el núcleo reproductor de  $H \subset L^2_{\mathbb{C}}(\Lambda)$  es la única función continua, hermítica, positiva definida  $K_H : \Lambda \times \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$  tal que

$$f(x) = \langle f, K_H(\cdot, x) \rangle = \int_{y \in \Lambda} f(y) K_H(x, y) dy, \quad x \in \Lambda, f \in H.$$

Dada una base ortonormal  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  de  $H$ , entonces

$$K_H(x, y) = \sum_{i=1}^N \varphi_i(x) \overline{\varphi_i(y)}. \quad (1.14)$$

El núcleo  $K_H$  suele recibir el nombre de núcleo de proyección de traza  $N$ . Recomendamos al lector el capítulo [Istratescu, 1987, Chapter 11] donde se presentan algunas propiedades de los espacios de Hilbert con núcleo reproductor.

**Teorema 1.3.3** (Teorema de Macchi-Shosnikov). *Sea  $\Lambda$  como en la Definición 1.3.1 y sea  $H \subset L^2_{\mathbb{C}}(\Lambda)$  de dimensión  $N$ . Entonces existe un proceso de puntos  $\mathfrak{X}_H$  en  $\Lambda$  de  $N$  puntos con funciones de intensidad asociadas*

$$\rho_k(x_1, \dots, x_k) = \det(K_H(x_i, x_j)_{i,j=1,\dots,k}).$$

En particular para cualquier función medible  $f : \Lambda \times \Lambda \rightarrow [0, \infty)$  tenemos

$$\mathbb{E}_{x \sim \mathfrak{X}_H} \left[ \sum_{i \neq j} f(x_i, x_j) \right] = \int_{p, q \in \Lambda} (K_H(p, p) K_H(q, q) - |K_H(p, q)|^2) f(p, q) d\mu(p, q),$$

y decimos que  $\mathfrak{X}_H$  es un proceso determinantal con núcleo asociado  $K_H$ .

*Demostración.* Podemos encontrar sendas pruebas del Teorema en [Macchi, 1975; Soshnikov, 2000], y con un enunciado más parecido al nuestro en [Hough et al., 2009, Theorem 4.5.5].  $\square$

**Corolario 1.3.4.** *Bajo las hipótesis del Teorema 1.3.3,*

$$N = \mathbb{E}_{x \sim \mathfrak{X}_H} [N] = \int_{p \in \Lambda} K_H(p, p) d\mu(p),$$

En particular, si  $K_H(p, p)$  es constante entonces necesariamente  $K_H(p, p) = \frac{N}{\text{Vol}(\Lambda)}$ .

*Demostración.* Tomamos  $\phi \equiv 1$  y sustituimos en la fórmula (1.13).  $\square$

El Teorema de Macchi-Soshnikov (Teorema 1.3.3 en nuestra notación) propone un método efectivo para obtener cotas para las energías de Riesz y logarítmicas en  $\mathbb{S}^d$ . No tenemos más que considerar un subespacio de dimensión finita de  $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{S}^d)$ , calcular su núcleo reproductor y entonces

$$E_{x \sim \mathfrak{X}} [\mathcal{E}_s(\omega_N)] = E_{x \sim \mathfrak{X}} \left[ \sum_{i \neq j} \frac{1}{\|x_i - x_j\|} \right] = \int_{\mathbb{S}^d \times \mathbb{S}^d} \frac{1}{\|p - q\|} \begin{vmatrix} K(p, p) & K(p, q) \\ K(q, p) & K(q, q) \end{vmatrix} dpdq.$$

Así que la cuestión ahora se reduce a escoger buenos subespacios. Para ello jugará un papel fundamental el siguiente lema.

**Lema 1.3.5.** Sean  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$  dos variedades riemannianas y  $\phi : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$  un difeomorfismo  $C^1$ . Sea  $H \subset L^2(\Omega_1, \mathbb{C})$  un subespacio  $N$ -dimensional. Entonces el conjunto

$$\begin{aligned} H_* &= \left\{ f : \Omega_2 \rightarrow \mathbb{C} : \sqrt{|\text{NJac}(\phi)(\cdot)|} (f \circ \phi)(\cdot) \in H \right\} \\ &= \left\{ g \circ \phi^{-1}(\cdot) \sqrt{|\text{NJac}(\phi^{-1})(\cdot)|} : g \in H \right\} \end{aligned}$$

es un subespacio  $N$ -dimensional  $L^2_{\mathbb{C}}(\Omega_2)$ . Su proceso determinantal asociado  $\mathfrak{X}_{H_*}$  tiene núcleo asociado

$$\begin{aligned} K_{H_*}(a, b) &= \frac{K_H(\phi^{-1}(a), \phi^{-1}(b))}{\sqrt{|\text{NJac}(\phi)(\phi^{-1}(a)) \text{NJac}(\phi)(\phi^{-1}(b))|}} \\ &= K_H(\phi^{-1}(a), \phi^{-1}(b)) \sqrt{|\text{NJac}(\phi^{-1})(a) \text{NJac}(\phi^{-1})(b)|}. \end{aligned}$$

donde por  $\text{NJac}$  denotamos el jacobiano normal, véase el Apéndice B.

*Demostración.* Primero probamos que  $H_* \subset L^2_{\mathbb{C}}(\Omega_2)$ . De hecho, para  $f \in H_*$  tenemos

$$\int_{y \in \Omega_2} |f|^2 dy = \int_{y \in \Omega_2} |g \circ \phi^{-1}(y)|^2 |\text{NJac}(\phi^{-1})(y)| dy,$$

para algún  $g \in H$ , por lo que  $H_* \subseteq L^2_{\mathbb{C}}(\Omega_2)$ . Como  $H_*$  está en correspondencia lineal uno a uno con  $H$ , la dimensión de  $H_*$  es también  $N$ . Por el Teorema del cambio de variables esto es igual a la norma  $L^2$  al cuadrado de  $g$  que es finita, ya que  $H \subset L^2_{\mathbb{C}}(\Omega_1)$ .

Ahora probamos la fórmula de  $K_{H_*}$ . Sea  $\varphi_1, \dots, \varphi_N$  una base ortonormal de  $H$ , entonces,  $\varphi_{i,*} = \varphi_i \circ \phi^{-1}(\cdot) \sqrt{|\text{NJac}(\phi^{-1})(\cdot)|}$ ,  $1 \leq i \leq N$ , son elementos de  $H_*$  y usando el Teorema del cambio de variables tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{y \in \Omega_2} \varphi_{i,*}(y) \overline{\varphi_{j,*}(y)} dy &= \int_{y \in \Omega_2} \varphi_i \circ \phi^{-1}(y) \overline{\varphi_j \circ \phi^{-1}(y)} |\text{NJac}(\phi^{-1})(y)| dy \\ &= \int_{x \in \Omega_1} \varphi_i(x) \overline{\varphi_j(x)} dx = \delta_{ij}, \end{aligned}$$

donde hemos usado la notación de la delta de Kronecker. Entonces  $\{\varphi_{i,*}\}$  es una base ortonormal y tenemos

$$\begin{aligned} K_{H_*}(a, b) &= \sum_{i=1}^N \varphi_{i,*}(a) \overline{\varphi_{i,*}(b)} \\ &= \sum_{i=1}^N \varphi_i \circ \phi^{-1}(a) \overline{\varphi_i \circ \phi^{-1}(b)} \sqrt{|\text{NJac}(\phi^{-1})(a) \text{NJac}(\phi^{-1})(b)|} \\ &= K_H(\phi^{-1}(a), \phi^{-1}(b)) \sqrt{|\text{NJac}(\phi^{-1})(a) \text{NJac}(\phi^{-1})(b)|}. \end{aligned}$$

La otra fórmula para  $K_{H_*}$  se deduce a partir de esta última, usando que

$$\text{NJac}(\phi)(\phi^{-1}(a)) = \text{NJac}(\phi^{-1})(a)^{-1}.$$

□

### Propiedades de los núcleos

Cuando trabajamos con esferas, o más generalmente, con espacios que presentan un grupo de simetrías rico, nos conviene que los núcleos asociados a los procesos determinantaes tengan ciertas propiedades. De hecho, la propiedad fundamental que nos gustaría tener es que los núcleos fueran invariantes bajo el grupo de simetrías del espacio en el que estamos trabajando, pero propiedades más débiles también pueden resultar de gran ayuda. Como no hay uniformidad en la literatura en cuanto a la terminología para referirnos a estas propiedades, definimos aquí la nuestra propia.

**Definición 1.3.6.** Decimos que el núcleo  $K(p, q)$  asociado a un proceso determinantal de  $N$  puntos en  $X$  es isotrópico si existe una función  $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$|K(p, q)| = f(\|p - q\|)$$

para todo  $p, q \in X$ .

Normalmente cuando el núcleo de un proceso determinantal en la esfera es isotrópico se dice que el proceso determinantal es invariante por rotaciones.

**Definición 1.3.7.** Decimos que el núcleo  $K(p, q)$  asociado a un proceso determinantal de  $N$  puntos en  $X$  es homogéneo si  $K(p, p)$  es constante para todo  $p \in X$ . Por el Corolario 1.3.4 sabemos que esa constante es

$$K(p, p) = \frac{N}{\text{Vol}(X)}.$$

Dado un proceso determinantal de  $N$  puntos con núcleo asociado  $K(p, q)$  en  $X$  entonces el número de puntos medio contenido en un subconjunto de Borel  $A \subset X$  está dado por

$$\int_A \rho_1 dp = \int_A K(p, p) dp = \text{Vol}(A) K(p, p),$$

donde  $\rho_1$  es la primera función de intensidad. Así que si tenemos un proceso determinantal con núcleo homogéneo entonces la esperanza del número de puntos contenido en cualquier subconjunto de Borel depende solo de su volumen.

### 1.3.5. El spherical ensemble

En el artículo [Alishahi and Zamani, 2015] los autores demuestran que un proceso determinantal en  $\mathbb{S}^2$  conocido como spherical ensemble produce puntos bien distribuidos en el sentido de que las esperanzas de sus energías logarítmica y de Riesz son muy pequeñas. El proceso había sido estudiado previamente por Krishnapur en [Krishnapur, 2009] donde demuestra que el spherical ensemble es equivalente a tomar los autovalores de la función  $A^{-1}B$  donde tanto  $A$  como  $B$  tienen entradas gaussianas complejas y luego proyectarlos en la esfera mediante la proyección estereográfica. Esta caracterización proporciona una forma muy rápida de producir puntos para ese conjunto. En esta sección repetimos algunos de los cálculos realizados en [Alishahi and Zamani, 2015] con nuestra notación, no hay ninguna aportación original.

Consideramos el espacio de los números complejos  $\Lambda = \mathbb{C}$  dotado de la medida de Lebesgue usual  $dz$  y  $H = \text{span}\{f_k(z) = \frac{z^k}{(1+|z|^2)^{\frac{N}{2}+\frac{1}{2}}} : 0 \leq k \leq N-1\}$  un subespacio de  $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$  de dimensión  $N$ .

**Proposición 1.3.8.** *Los  $f_k : 0 \leq k \leq N-1$  forman una base ortogonal de  $H$ .*

*Demostración.* Suponemos que  $j < k$  y calculamos:

$$\langle f_j, f_k \rangle = \int_{\mathbb{C}} f_j \overline{f_k} dz = \int_{\mathbb{C}} \frac{z^j}{(1+|z|^2)^{\frac{N}{2}+\frac{1}{2}}} \frac{\overline{z}^k}{(1+|z|^2)^{\frac{N}{2}+\frac{1}{2}}} dz = \int_{\mathbb{C}} \frac{|z|^{2j}}{(1+|z|^2)^{N+1}} \overline{z}^{(k-j)} dz.$$

Pasamos a coordenadas polares  $\left\{ \begin{array}{l} z = \rho e^{i\theta} \\ \text{NJac}(\phi) = \rho \end{array} \right\}$  y obtenemos

$$\langle f_j, f_k \rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho^{2j}}{(1+\rho^2)^{N+1}} \rho^{k-j+1} e^{-i\theta(k-j)} d\rho d\theta.$$

Vamos a calcular

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho^{2j}}{(1+\rho^2)^{N+1}} \rho^{k-j+1} d\rho d\theta &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\infty \frac{\rho^{k+j}}{(1+\rho^2)^{N+1}} \rho d\rho = \\ &= \pi \int_0^\infty \frac{\rho^{2\frac{k+j}{2}}}{(1+\rho^2)^{N+1}} 2\rho d\rho. \end{aligned}$$

Aplicamos el siguiente cambio de coordenadas  $\left\{ \begin{array}{l} \rho^2 = t \\ 2\rho d\rho = dt \end{array} \right\}$  y obtenemos

$$\pi \int_0^\infty \frac{t^{\frac{k+j}{2}}}{(1+t)^{N+1}} dt = \pi B\left(\frac{k+j}{2} + 1, N - \frac{k+j}{2}\right)$$

donde tanto  $\frac{k+j}{2} + 1$  como  $N - \frac{k+j}{2}$  son positivos, y por lo tanto,  $B$  tiene un valor finito. Entonces estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Fubini y tenemos que:

$$\begin{aligned} \langle f_j, f_k \rangle &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho^{2j}}{(1+\rho^2)^{N+1}} \rho^{k-j+1} e^{-i\theta(k-j)} d\rho d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} e^{-i\theta(k-j)} d\theta \int_0^\infty \frac{\rho^{2j}}{(1+\rho^2)^{N+1}} \rho^{k-j+1} d\rho = 0. \end{aligned}$$

Luego podemos concluir que los  $\{f_k\}_{k=0}^{N-1}$  forman una base ortogonal. □

**Corolario 1.3.9.**  $\left\{ \frac{z^k}{(1+|z|^2)^{\frac{N+1}{2}}} \sqrt{\binom{N}{k} \frac{\pi}{N-k}} \right\}_{0 \leq k \leq N-1}$  es una base ortonormal de  $H$ .

*Demostración.* Como hemos visto que los  $f_k$  forman una base ortogonal, solo nos falta comprobar que su norma es  $\sqrt{\binom{N}{k}^{-1} \frac{\pi}{N-k}}$ . Calculamos, pues

$$\|f_k\|^2 = \int_{\mathbb{C}} f_k \bar{f}_k dz = \int_{\mathbb{C}} \frac{z^k}{(1+|z|^2)^{\frac{N+1}{2}}} \frac{\bar{z}^k}{(1+|z|^2)^{\frac{N+1}{2}}} dz = \int_{\mathbb{C}} \frac{|z|^{2k}}{(1+|z|^2)^{N+1}} dz.$$

Pasamos a coordenadas polares  $\left\{ \begin{array}{l} z = \rho e^{i\theta} \\ \text{NJac}(\phi) = \rho \end{array} \right\}$  y obtenemos

$$\|f_k\|^2 = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\rho^{2k}}{(1+\rho^2)^{N+1}} \rho d\rho d\theta = \pi \int_0^\infty \frac{\rho^{2k}}{(1+\rho^2)^{N+1}} 2\rho d\rho$$

Aplicamos el siguiente cambio de coordenadas  $\left\{ \begin{array}{l} \rho^2 = t \\ 2\rho d\rho = dt \end{array} \right\}$  y obtenemos

$$\pi \int_0^\infty \frac{t^k}{(1+t)^{N+1}} dt = \pi B(k+1, N-k) = \pi \frac{\Gamma(k+1)\Gamma(N-k)}{\Gamma(N+1)}$$

donde  $B$  es la función beta y  $\Gamma$  es la función gamma. Como todos los números son enteros tenemos

$$\pi \frac{k!(N-k-1)!}{N!} = \frac{\pi}{N-k} \binom{N}{k}^{-1}.$$

Las integrales son finitas, así que queda justificado el uso del Teorema de Fubini y como además la integral de la función coincide con la integral del valor absoluto de la función,

$$\|f_k\|^2 = \frac{\pi}{N-k} \binom{N}{k}^{-1} \Rightarrow \|f_k\| = \sqrt{\frac{\pi}{N-k} \binom{N}{k}^{-1}}.$$

□

**Proposición 1.3.10.** El núcleo reproductor de  $H$  es

$$K(z, w) = \frac{N(1+z\bar{w})^{N-1}}{\pi(1+|z|^2)^{\frac{N+1}{2}}(1+|w|^2)^{\frac{N+1}{2}}}.$$

*Demostración.* Como conocemos una base ortonormal de  $H$ , basta con calcular

$$\begin{aligned} K(z, w) &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{z^k}{(1 + |z|^2)^{\frac{N}{2} + \frac{1}{2}}} \sqrt{\binom{N}{k} \frac{N-k}{\pi}} \frac{\bar{w}^k}{(1 + |w|^2)^{\frac{N}{2} + \frac{1}{2}}} \sqrt{\binom{N}{k} \frac{N-k}{\pi}} \\ &= \frac{1}{\pi(1 + |z|^2)^{\frac{N}{2} + \frac{1}{2}}(1 + |w|^2)^{\frac{N}{2} + \frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{N-1} z^k \bar{w}^k \binom{N}{k} (N-k). \end{aligned}$$

Por el binomio de Newton, sabemos que

$$(1 + z\bar{w})^{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N-1}{k} z^k \bar{w}^k = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N-k}{N} \binom{N}{k} z^k \bar{w}^k.$$

Tenemos entonces que

$$N(1 + z\bar{w})^{N-1} = \sum_{k=0}^{N-1} \binom{N}{k} (N-k) z^k \bar{w}^k,$$

que sustituyendo en la fórmula del núcleo nos da

$$K(z, w) = \frac{N(1 + z\bar{w})^{N-1}}{\pi(1 + |z|^2)^{\frac{N}{2} + \frac{1}{2}}(1 + |w|^2)^{\frac{N}{2} + \frac{1}{2}}}.$$

□

Para trasladar nuestros resultados desde  $\mathbb{C}$  hasta la esfera, vamos a utilizar la aplicación inversa a la proyección estereográfica. Recordemos que dicha proyección viene dada por la aplicación:

$$\begin{aligned} \pi^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} \\ (z_1, z_2) &\mapsto \left( \frac{2z_1}{\|z\|^2 + 1}, \frac{2z_2}{\|z\|^2 + 1}, \frac{\|z\|^2 - 1}{\|z\|^2 + 1} \right) \\ \left( \frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3} \right) &\leftarrow (x_1, x_2, x_3) \end{aligned} \tag{1.15}$$

**Lema 1.3.11.** *El jacobiano normal de la aplicación  $\pi^{-1}$  definida en (1.15) es*

$$\text{NJac}\pi^{-1}(z) = \frac{4}{(1 + \|z\|^2)^2}.$$

*Demostración.* Para calcular el jacobiano normal de la aplicación  $\pi^{-1}$  seguimos el algoritmo propuesto en el Apéndice B. Comenzamos calculando la aplicación diferencial de  $\pi^{-1}$  en un

punto  $z \in \mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} D\pi^{-1}(z)w &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dz_1} \left( \frac{2z_1}{\|z\|^2+1} \right) & \frac{d}{dz_2} \left( \frac{2z_1}{\|z\|^2+1} \right) \\ \frac{d}{dz_1} \left( \frac{2z_2}{\|z\|^2+1} \right) & \frac{d}{dz_2} \left( \frac{2z_2}{\|z\|^2+1} \right) \\ \frac{d}{dz_1} \left( \frac{\|z\|^2-1}{\|z\|^2+1} \right) & \frac{d}{dz_2} \left( \frac{\|z\|^2-1}{\|z\|^2+1} \right) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2(1+z_2^2-z_1^2)}{(\|z\|^2+1)^2} & \frac{-4z_1z_2}{(\|z\|^2+1)^2} \\ \frac{-4z_1z_2}{(\|z\|^2+1)^2} & \frac{2(1+z_1^2-z_2^2)}{(\|z\|^2+1)^2} \\ \frac{4z_1}{(\|z\|^2+1)^2} & \frac{4z_2}{(\|z\|^2+1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Calculamos el núcleo de la aplicación diferencial:

$$\begin{pmatrix} \frac{2(1+z_2^2-z_1^2)}{(\|z\|^2+1)^2} & \frac{-4z_1z_2}{(\|z\|^2+1)^2} \\ \frac{-4z_1z_2}{(\|z\|^2+1)^2} & \frac{2(1+z_1^2-z_2^2)}{(\|z\|^2+1)^2} \\ \frac{4z_1}{(\|z\|^2+1)^2} & \frac{4z_2}{(\|z\|^2+1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff w_1 = w_2 = 0.$$

Tomamos pues, una base de  $\ker(D\pi^{-1}(z))^\perp = \mathbb{R}^2$ , a saber,  $\left\{ \frac{z}{\|z\|}, \frac{z^\perp}{\|z\|} \right\} = \left\{ \frac{z}{\|z\|}, i \frac{z}{\|z\|} \right\}$ . Si evaluamos la aplicación diferencial en los elementos de nuestra base, obtenemos:

$$\begin{aligned} \bullet & \begin{pmatrix} \frac{2(1+z_2^2-z_1^2)}{(\|z\|^2+1)^2} & \frac{-4z_1z_2}{(\|z\|^2+1)^2} \\ \frac{-4z_1z_2}{(\|z\|^2+1)^2} & \frac{2(1+z_1^2-z_2^2)}{(\|z\|^2+1)^2} \\ \frac{4z_1}{(\|z\|^2+1)^2} & \frac{4z_2}{(\|z\|^2+1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{z_1}{\|z\|} \\ \frac{z_2}{\|z\|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2z_1(\|z\|^2-1)}{\|z\|(1+\|z\|^2)^2} \\ \frac{-2z_2(\|z\|^2-1)}{\|z\|(1+\|z\|^2)^2} \\ \frac{4\|z\|}{\|z\|(1+\|z\|^2)^2} \end{pmatrix}. \\ \bullet & \begin{pmatrix} \frac{2(1+z_2^2-z_1^2)}{(\|z\|^2+1)^2} & \frac{-4z_1z_2}{(\|z\|^2+1)^2} \\ \frac{-4z_1z_2}{(\|z\|^2+1)^2} & \frac{2(1+z_1^2-z_2^2)}{(\|z\|^2+1)^2} \\ \frac{4z_1}{(\|z\|^2+1)^2} & \frac{4z_2}{(\|z\|^2+1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{z_1}{\|z\|} \\ \frac{iz_2}{\|z\|} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2iz_1(\|z\|^2-1)}{\|z\|(1+\|z\|^2)^2} \\ \frac{-2iz_2(\|z\|^2-1)}{\|z\|(1+\|z\|^2)^2} \\ \frac{4i\|z\|}{\|z\|(1+\|z\|^2)^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Luego el jacobiano normal vendrá dado por:

$$\begin{aligned} \text{NJac}\pi^{-1}(z) &= \sqrt{\begin{vmatrix} \left\langle D\pi^{-1}(y) \frac{z}{\|z\|}, D\pi^{-1}(y) \frac{z}{\|z\|} \right\rangle & \left\langle D\pi^{-1}(y) \frac{z}{\|z\|}, D\pi^{-1}(y) \frac{iz}{\|z\|} \right\rangle \\ \left\langle D\pi^{-1}(y) \frac{iz}{\|z\|}, D\pi^{-1}(y) \frac{z}{\|z\|} \right\rangle & \left\langle D\pi^{-1}(y) \frac{iz}{\|z\|}, D\pi^{-1}(y) \frac{iz}{\|z\|} \right\rangle \end{vmatrix}} \\ &= \sqrt{\begin{vmatrix} \left\langle \frac{z}{\|z\|}, \frac{z}{\|z\|} \right\rangle & \left\langle \frac{z}{\|z\|}, i \frac{z}{\|z\|} \right\rangle \\ \left\langle i \frac{z}{\|z\|}, \frac{z}{\|z\|} \right\rangle & \left\langle i \frac{z}{\|z\|}, i \frac{z}{\|z\|} \right\rangle \end{vmatrix}} \\ &= \sqrt{\begin{vmatrix} \frac{4}{(1+\|z\|^2)^2} & 0 \\ 0 & \frac{4}{(1+\|z\|^2)^2} \end{vmatrix}} \\ &= \frac{4}{(1+\|z\|^2)^2}. \end{aligned}$$

□

**Proposición 1.3.12.** *Existe un proceso determinantal  $\mathfrak{X}_*$  de  $N$  puntos en  $\mathbb{S}^2$  con núcleo*

$$K_*(\pi(z), \pi(w)) = \frac{N}{4\pi} \frac{(1 + z\bar{w})^{N-1}}{(1 + |z|^2)^{\frac{N-1}{2}} (1 + |w|^2)^{\frac{N-1}{2}}}.$$

*Demostración.* No tenemos más que aplicar el Lema 1.3.5 a nuestro caso y tenemos:

$$K_*(\pi(z), \pi(w)) = \frac{K(z, w)}{\sqrt{|\text{NJac}(\pi(z))\text{NJac}(\pi(w))|}}.$$

Sustituimos el valor del jacobiano  $\text{NJac}\pi(z) = \frac{4}{(1+|z|^2)^2}$  que hemos calculado en el Lema 1.3.11 y tenemos:

$$K_*(\pi(z), \pi(w)) = \frac{N}{4\pi} \frac{(1 + z\bar{w})^{N-1}}{(1 + |z|^2)^{\frac{N-1}{2}} (1 + |w|^2)^{\frac{N-1}{2}}}.$$

□

**Lema 1.3.13.** *El proceso determinantal  $\mathfrak{X}_*$  definido en la Proposición 1.3.12 tiene núcleo isotrópico. Más concretamente,*

$$(K_*(p, q))^2 = \frac{N^2}{16\pi^2} \left( \frac{1 + \langle p, q \rangle}{2} \right)^{N-1}.$$

*Demostración.* Partimos de que

$$K_*(\varphi(z), \varphi(w)) = \frac{N}{4\pi} \frac{(1 + z\bar{w})^{N-1}}{(1 + |z|^2)^{\frac{N-1}{2}} (1 + |w|^2)^{\frac{N-1}{2}}}$$

por lo tanto,

$$(K_*(\varphi(z), \varphi(w)))^2 = \frac{N^2}{16\pi^2} \left( \frac{(1 + z\bar{w})^2}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)} \right)^{N-1}.$$

La identidad notable, para el caso de números complejos, se resuelve de la siguiente manera

$$(K_*(\varphi(z), \varphi(w)))^2 = \frac{N^2}{16\pi^2} \left( \frac{1 + |z|^2|w|^2 + 2\text{Re}(z\bar{w})}{(1 + |z|^2)(1 + |w|^2)} \right)^{N-1}.$$

Utilizamos la proyección estereográfica para escribir  $z$  y  $w$  en función de  $p = (p_1, p_2, p_3)$  y  $q = (q_1, q_2, q_3)$ :

$$1 + |z|^2 = \frac{2}{1 - p_3} \Rightarrow |z|^2|w|^2 = \frac{(1 + p_3)(1 + q_3)}{(1 - p_3)(1 - q_3)} \Rightarrow \text{Re}(z\bar{w}) = \frac{p_1q_1 + p_2q_2}{(1 - p_3)(1 - q_3)}.$$

Sustituimos en la fórmula anterior y obtenemos:

$$(K_*(p, q))^2 = \frac{N^2}{16\pi^2} \left( \frac{1 + \langle p, q \rangle}{2} \right)^{N-1}.$$

□

**Corolario 1.3.14.** *El proceso determinantal  $\mathfrak{X}_*$  definido en la Proposición 1.3.12 tiene núcleo homogéneo, es decir,  $K_*(p, p)$  siempre toma el valor  $\frac{N}{4\pi}$ .*

**Proposición 1.3.15.** *Sea  $\mathfrak{X}_*$  el proceso determinantal en  $\mathbb{S}^2$  definido en la Proposición 1.3.12, entonces  $\mathfrak{X}_*$  verifica que*

$$E_{x \sim \mathfrak{X}_*} [\mathcal{E}_s(\omega_N)] = \frac{N^2 2^{-s}}{3} \left( B\left(1, 1 - \frac{s}{2}\right) - B\left(N, 1 - \frac{s}{2}\right) \right)$$

para  $0 < s < 2$  y  $N \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* El proceso determinantal  $\mathfrak{X}_*$  verifica que

$$\begin{aligned} E_{x \sim \mathfrak{X}_*} [\mathcal{E}_s(\omega_N)] &= \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} \frac{1}{\|p - q\|^s} |K_*(p, p)K_*(q, q) - |K_*(p, q)|^2| dpdq \\ &= \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} \frac{1}{\|p - q\|^s} \left| \frac{N^2}{16\pi^2} - \frac{N^2}{16\pi^2} \left( \frac{1 + \langle p, q \rangle}{2} \right)^{N-1} \right| dpdq \\ &= \frac{N^2}{16\pi^2} \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} \frac{1}{\|p - q\|^s} \left| 1 - \left( \frac{1 + \langle p, q \rangle}{2} \right)^{N-1} \right| dpdq. \end{aligned}$$

Así que solo tenemos que calcular esa integral. Como sabemos que

$$\|p - q\| = \sqrt{2(1 - \langle p, q \rangle)}$$

tenemos que

$$E_{x \sim \mathfrak{X}_*} [\mathcal{E}_s(\omega_N)] = \frac{N^2}{16\pi^2} \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} \frac{1}{(2(1 - \langle p, q \rangle))^{\frac{s}{2}}} \left| 1 - \left( \frac{1 + \langle p, q \rangle}{2} \right)^{N-1} \right| dpdq.$$

Fijémonos en que la integral de arriba no varía si fijamos uno de los puntos. Para ello, consideremos la isomorfía  $\theta : \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  que envía el punto  $(0, 0, 1)$  a  $p$ . Podemos aplicar el Teorema del cambio de variable (en nuestra notación Teorema B.3) teniendo en cuenta que el jacobiano de una isometría es 1 (Proposición B.0.4).

$$\begin{aligned} E_{x \sim \mathfrak{X}_*} [\mathcal{E}_s(\omega_N)] &= \frac{N^2}{16\pi^2} \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} \frac{1}{(2(1 - \langle p, q \rangle))^{\frac{s}{2}}} \left| 1 - \left( \frac{1 + \langle p, q \rangle}{2} \right)^{N-1} \right| dpdq \\ &= \frac{N^2}{16\pi^2} \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} \frac{1}{(2(1 - \langle p, \theta q \rangle))^{\frac{s}{2}}} \left| 1 - \left( \frac{1 + \langle p, \theta q \rangle}{2} \right)^{N-1} \right| dpdq, \end{aligned}$$

donde, por las propiedades del producto interno, tenemos que

$$\begin{aligned} E_{x \sim \mathfrak{X}_*} [\mathcal{E}_s(\omega_N)] &= \frac{N^2}{16\pi^2} \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} \frac{1}{(2(1 - \langle p, \theta q \rangle))^{\frac{s}{2}}} \left| 1 - \left( \frac{1 + \langle p, \theta q \rangle}{2} \right)^{N-1} \right| dpdq \\ &= \frac{N^2}{16\pi^2} \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} \frac{1}{(2(1 - \langle \theta^t p, q \rangle))^{\frac{s}{2}}} \left| 1 - \left( \frac{1 + \langle \theta^t p, q \rangle}{2} \right)^{N-1} \right| dpdq \\ &= \frac{N^2}{16\pi^2} \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} \frac{1}{(2(1 - \langle \mathbf{n}, q \rangle))^{\frac{s}{2}}} \left| 1 - \left( \frac{1 + \langle \mathbf{n}, q \rangle}{2} \right)^{N-1} \right| dpdq \end{aligned}$$

donde, por  $\mathbf{n}$  denotamos al polo norte  $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$ . Estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Fubini y separar la integral en dos partes:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x \sim \mathfrak{X}_*} [\mathcal{E}_s(\omega_N)] &= \frac{N^2}{16\pi^2} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{(2(1 - \langle \mathbf{n}, q \rangle))^{\frac{s}{2}}} \left| 1 - \left( \frac{1 + \langle \mathbf{n}, q \rangle}{2} \right)^{N-1} \right| \left( \int_{\mathbb{S}^2} dp \right) dq \\ &= \frac{N^2 \text{Vol}(\mathbb{S}^2)}{16\pi^2} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{(2(1 - \langle \mathbf{n}, q \rangle))^{\frac{s}{2}}} \left| 1 - \left( \frac{1 + \langle \mathbf{n}, q \rangle}{2} \right)^{N-1} \right| dq \\ &= \frac{N^2}{12\pi} \int_{\mathbb{S}^2} \frac{1}{(2(1 - \langle \mathbf{n}, q \rangle))^{\frac{s}{2}}} \left| 1 - \left( \frac{1 + \langle \mathbf{n}, q \rangle}{2} \right)^{N-1} \right| dq. \end{aligned}$$

Resolvemos esta integral utilizando el Lema 1.1.1,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x \sim \mathfrak{X}_*} [\mathcal{E}_s(\omega_N)] &= \frac{N^2 \text{Vol}(\mathbb{S}^1)}{12\pi} \int_{-1}^1 (2(1-t))^{\frac{-s}{2}} \left( 1 - \left( \frac{1+t}{2} \right)^{N-1} \right) dt \\ &= \frac{N^2}{6} \left[ \int_{-1}^1 (2(1-t))^{\frac{-s}{2}} dt - \int_{-1}^1 (2(1-t))^{\frac{-s}{2}} \left( \frac{1+t}{2} \right)^{N-1} dt \right]. \end{aligned}$$

Tenemos ahora dos integrales que dependen de una sola variable, aplicamos el Teorema del cambio de variable con  $u = \frac{1+t}{2}$  y obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{x \sim \mathfrak{X}_*} [\mathcal{E}_s(\omega_N)] &= \frac{N^2}{6} \left[ \int_0^1 (4-4u)^{\frac{-s}{2}} du - \int_0^1 (4-4u)^{\frac{-s}{2}} (u)^{N-1} 2du \right] \\ &= \frac{N^2 2^{-s}}{3} \left[ \int_0^1 (1-u)^{\frac{-s}{2}} du - \int_0^1 (1-u)^{\frac{-s}{2}} (u)^{N-1} 2du \right] \\ &= \frac{N^2 2^{-s}}{3} \left[ B\left(1, 1 - \frac{s}{2}\right) - B\left(N, 1 - \frac{s}{2}\right) \right]. \end{aligned}$$

Tenemos entonces una cota para  $\mathbb{E}_{x \sim \mathfrak{X}_*} [\mathcal{E}_s(\omega_N)]$ , siempre que  $0 \leq s \leq 2$ .  $\square$

**Corolario 1.3.16.** *Sea  $\mathfrak{X}_*$  el proceso determinantal en  $\mathbb{S}^2$  definido en la Proposición 1.3.12, entonces  $\mathfrak{X}_*$  verifica que*

$$\mathbb{E}_{x \sim \mathfrak{X}_*} [\mathcal{E}_s(\omega_N)] = \frac{B\left(1, 1 - \frac{s}{2}\right)}{2^{s/3}} N^2 - \frac{\Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right)}{2^{s/3}} N^{1+\frac{s}{2}} + o\left(N^{1+\frac{s}{2}}\right),$$

para  $0 < s < 2$ .

*Demostración.* Basta con escribir

$$B\left(N, 1 - \frac{s}{2}\right) = \Gamma\left(1 - \frac{s}{2}\right) N^{\frac{s}{2}-1} + o\left(N^{\frac{s}{2}-1}\right) \quad (1.16)$$

y desarrollar la fórmula de la Proposición 1.3.15.  $\square$

**Corolario 1.3.17.** *Sea  $\mathfrak{X}_*$  el proceso determinantal en  $\mathbb{S}^2$  definido en la Proposición 1.3.12, entonces  $\mathfrak{X}_*$  verifica que*

$$\mathbb{E}_{x \sim \mathfrak{X}_*} [\mathcal{E}_{\log}(\omega_N)] = \frac{1 - 2 \log(2)}{6} N^2 - \frac{1}{6} N \log(N) + \frac{\log(2)}{3} N.$$

*Demostración.* Resulta sencillo ver que  $\mathcal{E}_0(\omega_r) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \mathcal{E}_s(\omega_r)$ . En particular, si cambiamos el orden de la esperanza y la derivada (queda justificado, por ejemplo, por [Jost, 2005, Theorem 16.11]) entonces por la Proposición 1.3.15 tenemos

$$E_{x \sim \tilde{x}_*} [\mathcal{E}_{\log}(\omega_N)] = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \left( \frac{N^2 2^{-s}}{3} \left( B\left(1, 1 - \frac{s}{2}\right) - B\left(N, 1 - \frac{s}{2}\right) \right) \right).$$

Calculamos la derivada de  $B\left(N, 1 - \frac{s}{2}\right)$  utilizando la función digamma, véase el apéndice A.

$$B\left(N, 1 - \frac{s}{2}\right) = -\frac{1}{2} B\left(N, 1 - \frac{s}{2}\right) \sum_{j=0}^{N-1} \frac{1}{1 - \frac{s}{2} + j}.$$

Utilizando la expansión asintótica de la función beta definida en la ecuación (1.16) y la aproximación como serie del logaritmo natural podemos concluir la demostración.  $\square$

### 1.3.6. El harmonic ensemble

El harmonic ensemble es un proceso determinantal formado por  $N = \frac{2L+d}{d} \binom{d+L+1}{L}$  puntos, para todo  $L \in \mathbb{N}$ , en  $\mathbb{S}^d$  propuesto en [Beltrán et al., 2016]. Para definirlo, consideramos el espacio vectorial de los polinomios esféricos armónicos de grado menor o igual a  $L$ . Podemos escribir el núcleo reproductor de ese subespacio en función de los polinomios de Jacobi  $P_L^{(1+\frac{d-2}{2}, \frac{d-2}{2})}$ ,

$$K_L(x, y) = \frac{N}{\binom{L+\frac{d}{2}}{L}} P_L^{(1+\frac{d-2}{2}, \frac{d-2}{2})}(\langle x, y \rangle), \quad x, y \in \mathbb{S}^d.$$

En [Beltrán et al., 2016] los autores demuestran que los conjuntos de puntos obtenidos del harmonic ensemble tienen las esperanzas de las distintas energías de Riesz muy bajas. En particular, con la notación del Problema 1.2.2 prueban que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} C_{s,d,n} \geq 2^{s-s/d} V_s(\mathbb{S}^d) \frac{d \Gamma\left(1 + \frac{d}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1+s}{2}\right) \Gamma\left(d - \frac{s}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(1 + \frac{s}{2}\right) \Gamma\left(1 + \frac{s+d}{2}\right) (d!)^{1-\frac{s}{d}}}, \quad 0 < s < d. \quad (1.17)$$

Además, si  $d-1 < s < d$ ,  $\limsup$  se puede cambiar por  $\liminf$  en (1.17) (véase [Beltrán et al., 2016, Cor. 2]). La cota propuesta en (1.17) es la mejor cota propuesta hasta la fecha (y hasta el Capítulo 3) para un  $d$  general. Los autores también demuestran que ese proceso determinantal es el óptimo (al menos para  $s = 2$ ) de entre una clase de procesos determinantaes obtenidos a partir de subespacios de funciones reales definidas en  $\mathbb{S}^d$ . Sin embargo, para  $d = 2$ , el spherical ensemble (que involucra un subespacio de funciones con valores complejos) da cotas mejores.



---

---

## CAPÍTULO 2

---

### t-designs en variedades algebraicas



*Si superficies curva in quacunque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturae in singulis punctis invariata manet.*

**Theorema Egregium.**

C. F. Gauß (1827).

*Disquisitiones Generales circa Superficies Curvas.*



## Contenido

---

<b>2.1. Definiciones y resultado principal</b> . . . . .	<b>45</b>
2.1.1. Notas y corolarios del Teorema 2.1.5 . . . . .	48
<b>2.2. Particiones regulares</b> . . . . .	<b>50</b>
<b>2.3. Desigualdades de Marcinkiewicz-Zygmund</b> . . . . .	<b>50</b>
<b>2.4. Demostración del Teorema 2.1.5</b> . . . . .	<b>55</b>
<b>2.5. Sobre las condiciones de la variedad</b> . . . . .	<b>58</b>
2.5.1. Subvariedades de una variedad algebraica . . . . .	58
2.5.2. Variedades algebraicas con singularidades . . . . .	59
2.5.3. Variedades no conexas . . . . .	59

---

### 2.1. Definiciones y resultado principal

Sea  $\mathcal{M}$  una variedad algebraica afín real lisa conexa y compacta de dimensión  $d$  en  $\mathbb{R}^n$  que podemos definir como el conjunto de ceros de un conjunto de polinomios con coeficientes reales.

$$\mathcal{M} = \{x \in \mathbb{R}^n : p_1(x) = \cdots = p_r(x) = 0\}, \quad (2.1)$$

donde  $p_1, \dots, p_r \in \mathbb{R}[X]$ . Por ser lisa podemos afirmar que el espacio normal a todo  $x \in \mathcal{M}$  tiene dimensión  $n - d$ . Para cada  $x \in \mathcal{M}$ , dicho espacio está generado por los vectores  $\nabla p_1(x), \dots, \nabla p_r(x)$ , donde  $\nabla p$  es el gradiente del polinomio  $p$  en  $\mathbb{R}^n$ . Consideramos la medida  $d$ -dimensional de Hausdorff en  $\mathcal{M}$ , es decir, la medida de Lebesgue  $\mu_{\mathcal{M}}$  normalizada tal que  $\mu_{\mathcal{M}}(\mathcal{M}) = 1$  y denotamos por  $d(x, y)$  a la distancia geodésica entre  $x, y \in \mathcal{M}$ .

Sea  $X \subset \mathbb{C}^n$  la complejificación de  $\mathcal{M}$ , es decir, el conjunto de ceros complejos de los polinomios  $p_1(x), \dots, p_r(x)$  que definen la variedad  $\mathcal{M}$  (véase (2.1)). Consideramos también la medida de Lebesgue en  $X$  y la denotamos por  $\mu_X$ .

El espacio de polinomios en  $\mathcal{M}$  con coeficientes reales de grado menor o igual que  $t$ , que denotamos  $\mathcal{P}_t = \mathcal{P}_t(\mathcal{M})$ , es la restricción a  $\mathcal{M}$  del espacio de polinomios con coeficientes reales en  $n$  variables. La dimensión del espacio  $\mathcal{P}_t(\mathcal{M})$  viene dada por el polinomio de Hilbert y verifica

$$\dim \mathcal{P}_t(\mathcal{M}) = \deg(\mathcal{M})t^d + O(t^{d-1}).$$

**Definición 2.1.1.** Denotamos por  $\mathcal{P}_t^0$  al espacio de Hilbert formado por los polinomios de  $\mathcal{P}_t$  con media nula en la variedad. Es decir,  $P \in \mathcal{P}_t$  tales que

$$\int_{\mathcal{M}} P(x) d\mu_{\mathcal{M}}(x) = 0,$$

junto con el producto interno usual:

$$\langle P, Q \rangle = \int_{\mathcal{M}} P(x)Q(x)d\mu_{\mathcal{M}}(x).$$

$\mathcal{P}_t^0$  tiene un núcleo reproductor, por lo tanto para cada  $x \in \mathcal{M}$  existe un único polinomio  $K_x \in \mathcal{P}_t^0$  tal que

$$\langle Q, K_x \rangle = Q(x),$$

para todo  $Q \in \mathcal{P}_t^0$ .

Definimos un  $t$ -design en  $\mathcal{M}$  de forma análoga a como están definidos en las esferas (véase la Definición 1.2.9).

**Definición 2.1.2.** Dada una variedad real afín lisa algebraica compacta y conexa  $\mathcal{M}$  dotada de su medida de Lebesgue normalizada  $\mu_{\mathcal{M}}$ , una colección de puntos  $x_1, \dots, x_N \in \mathcal{M}$  es un  $t$ -design si

$$\int_{\mathcal{M}} P(x) d\mu_{\mathcal{M}}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(x_i),$$

para todo polinomio  $P \in \mathcal{P}_t$ .

Además de la definición, tenemos la siguiente caracterización.

**Proposición 2.1.3.**  $x_1, \dots, x_N \in \mathcal{M}$  es un  $t$ -design si, y solo si

$$\sum_{i=1}^N K_{x_i} = 0. \quad (2.2)$$

*Demostración.* Sea  $x_1, \dots, x_N \in \mathcal{M}$  un  $t$ -design y  $Q \in \mathcal{P}_t^0$ , entonces por la Definición 2.1.2 y la linealidad del producto interno real,

$$0 = \int_{\mathcal{M}} Q(x) d\mu_{\mathcal{M}}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N Q(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle Q, K_{x_i} \rangle = \frac{1}{N} \langle Q, \sum_{i=1}^N K_{x_i} \rangle.$$

Es decir, que para todo  $Q \in \mathcal{P}_t^0$  se verifica

$$\langle Q, \sum_{i=1}^N K_{x_i} \rangle = 0.$$

Esto solo es cierto si  $\sum_{i=1}^N K_{x_i} = 0$ .

Para demostrar el recíproco, utilizamos un argumento muy parecido: dado  $P \in \mathcal{P}_t$ , podemos escribir

$$P(x) = A(x) + C$$

donde  $A(x) \in \mathcal{P}_t^0$  y  $C = \int_{\mathcal{M}} P(x)d\mu_{\mathcal{M}}(x)$ . Como  $\sum_{i=1}^N K_{x_i} = 0$ , tenemos

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^N K_{x_i}, A \right\rangle = \sum_{i=1}^N \langle K_{x_i}, A \rangle = \sum_{i=1}^N A(x_i)$$

Así que

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A(x_i) + C = C = \int_{\mathcal{M}} P(x) d\mu_{\mathcal{M}}(x).$$

□

Hemos definido y caracterizado los  $t$ -designs en  $\mathcal{M}$ . Además, su existencia queda garantizada por los resultados de [Seymour and Zaslavsky, 1984] en contextos mucho más generales (véase el Teorema 1.2.11). Nos preguntamos entonces por el número mínimo de puntos que necesitamos para tener un  $t$ -design en  $\mathcal{M}$  y también en cómo depende el número de puntos del espacio de polinomios  $\mathcal{P}_t$ .

**Proposición 2.1.4.** *Si  $x_1, \dots, x_N \in \mathcal{M}$  es un  $t$ -design en  $\mathcal{M}$ , entonces  $N \gtrsim t^d$ .*

*Demostración.* Este resultado puede entenderse como un caso particular de [de la Harpe and Pache, 2005, Proposition 1.7]. Sin embargo, en este contexto podemos elaborar una prueba más sencilla y es esto lo que proponemos al lector.

Sea  $s$  tal que  $2s = t$  si  $t$  es par, y tal que  $2s + 1 = t$  si es impar. Entonces tenemos

$$\int_{\mathcal{M}} P^2(x) d\mu_{\mathcal{M}}(x) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P^2(x_i), \text{ para } P \in \mathcal{P}_s.$$

Suponemos que  $N < \dim \mathcal{P}_s = O(t^d)$ . Entonces, para  $P_1, \dots, P_N \in \mathcal{P}_s$  linealmente independientes tenemos que

$$\det(P_j(x_i))_{i,j=1,\dots,N} \neq 0.$$

De hecho, si el determinante anterior se anula, entonces existe una combinación lineal no trivial tal que

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j P_j(x_i) = 0, \quad i = 1, \dots, N,$$

y tenemos una contradicción, ya que

$$0 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j(x_i) \right)^2 = \int_{\mathcal{M}} \left( \sum_{j=1}^N \alpha_j P_j(x) \right)^2 d\mu_{\mathcal{M}}(x).$$

Y si la integral de un polinomios al cuadrado se anula, entonces el polinomio tiene que ser el polinomio nulo

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j P_j(x) = 0, \quad i = 1, \dots, N, \Rightarrow P_1, \dots, P_N \text{ son linealmente dependientes.}$$

Como  $\det(P_j(x_i))_{i,j=1,\dots,N} \neq 0$ , entonces existen  $Q_1, \dots, Q_N \in \mathcal{P}_s$  tales que  $Q_j(x_i) = \delta_{ij}$ , para  $i, j = 1, \dots, N$ , y  $Q \in \text{span}\{Q_1, \dots, Q_N\}^\perp$ . Luego

$$0 = \int_{\mathcal{M}} Q(x) Q_j(x) d\mu_{\mathcal{M}}(x) = \frac{1}{N} Q(x_j), \quad j = 1, \dots, N$$

y como  $\int_{\mathcal{M}} Q(x)^2 d\mu_{\mathcal{M}}(x) = 0$  obtenemos que  $Q(x) = 0$ . Luego necesitamos  $N \geq \dim \mathcal{P}_s = O(t^d)$ .  $\square$

Tras esta demostración resulta fácil ver que si  $x_1, \dots, x_N \in \mathcal{M}$  es un  $t$ -design en  $\mathcal{M}$ ,  $t$  es par, y  $N = \dim \mathcal{P}_{t/2}(\mathcal{M})$ , entonces el conjunto de núcleos reproductores del espacio  $\mathcal{P}_{t/2}(\mathcal{M})$  en  $x_1, \dots, x_N$ ,

$$K_{t/2}(\cdot, x_j), \quad j = 1, \dots, N,$$

constituye una base ortogonal de  $\mathcal{P}_{t/2}(\mathcal{M})$  y

$$K_{t/2}(x_j, x_j) = \|K_{t/2}(\cdot, x_j)\|_{L^2(\mathcal{M})}^2 = N,$$

para todo  $j = 1, \dots, N$ .

Nuestro resultado principal es el siguiente teorema en el que demostramos la existencia de  $t$ -designs con cardinalidad  $N$  para todo  $N \gtrsim \dim \mathcal{P}_t(\mathcal{M})$ .

**Teorema 2.1.5.** *Existe una constante  $C_{\mathcal{M}}$  que depende solamente de  $\mathcal{M}$  tal que para cada  $N \geq C_{\mathcal{M}} t^d$  existen  $t$ -designs en  $\mathcal{M}$  con  $N$  puntos.*

*Demostración.* La demostración sigue el esquema propuesto por Bondarenko, Radchenko y Viazovska en [Bondarenko et al., 2013]. Dedicaremos a la demostración de este teorema la Sección 2.4, pero antes tenemos que introducir varios conceptos.  $\square$

### 2.1.1. Notas y corolarios del Teorema 2.1.5

#### El Teorema en variedades conocidas

El resultado demostrado en el Teorema 2.1.5 se conocía para algunas variedades algebraicas. Bondarenko, Radchenko y Viazovska lo habían demostrado en [Bondarenko et al., 2013] para la esfera  $\mathbb{S}^d$  y Kuijlaars en [Kuijlaars, 1995] para el toro contenido en  $\mathbb{R}^3$ .

#### Teorema recíproco

Podemos observar que una suerte de resultado recíproco del Teorema 2.1.5 también se verifica.

**Teorema 2.1.6.** *Sea  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  una variedad real diferenciable conexa compacta de dimensión  $d$ . Si  $\mathcal{M}$  admite  $t$ -designs de orden  $t^d$  para todo  $t \in \mathbb{N}$  entonces es una subvariedad de una variedad algebraica de la misma dimensión  $d$ .*

*Demostración.* La existencia en  $\mathcal{M}$  de un  $t$ -design de orden  $t^d$  implica que la dimensión del espacio de polinomios en  $n$  variables de grado menor o igual que  $t/2$ , restringido a  $\mathcal{M}$ , es de orden  $t^d$ . Esto implica que  $\mathcal{M}$  está definida por un sistema de ecuaciones polinomiales.  $\square$

Retomaremos este estudio de subvariedades de una variedad algebraica en la Sección 2.5.1.

### Esquema de la demostración

Para probar el Teorema 2.1.5, seguiremos la estrategia de [Bondarenko et al., 2013]. Los ingredientes principales de la prueba son un teorema de punto fijo, resultado clásico de topología; las particiones regulares en variedades diferenciales, estudiadas recientemente en [Gigante and Leopardi, 2017], y la existencia de desigualdades de tipo sampling o Marcinkiewicz-Zygmund para espacios de polinomios  $\mathcal{P}_t(\mathcal{M})$ . En [Bondarenko et al., 2013] los autores usan unas desigualdades de Marcinkiewicz-Zygmund para polinomios esféricos que ya se conocían en el momento de la demostración, ver [Mhaskar et al., 2001, Theorem 3.1] o [Dai and Xu, 2013, Theorem 6.4.4]. Sin embargo, dichas desigualdades no estaban demostradas en variedades algebraicas generales y su demostración es una de las partes fundamentales de este trabajo.

### Sobre las conjeturas existentes

El Teorema 2.1.5 da respuesta afirmativa a dos conjeturas sobre el orden asintótico de los  $t$ -designs con número mínimo de puntos. En particular, confirmamos la Conjetura 3 de [Kane, 2015] para las Grassmanniana demostrando que existen  $t$ -designs de orden  $N = Ct^{k(n-k)}$  para todo  $t \in \mathbb{N}$ . También confirmamos el orden correcto de las fórmulas de cuadratura definidas en elipses expresada en la Conjetura 2 de [Korevaar and Meyers, 1994].

### Extensiones del Teorema 2.1.5

Recientemente, Gigante, Ehler y Peter han demostrado una extensión del Teorema 2.1.5 para fórmulas de cuadratura con pesos positivos basándose en nuestras técnicas, véase [Ehler et al., 2018]. Una fórmula de cuadratura con pesos positivos en  $\mathcal{M}$  es un conjunto de puntos  $\{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathcal{M}$  y un conjunto de pesos  $w_1, \dots, w_N \in \mathbb{R}_+$  que verifican

$$\int_{\mathcal{M}} P(x) d\mu_{\mathcal{M}}(x) = \sum_{i=1}^N w_i P(x_i),$$

para todo  $P \in \mathcal{P}_t$ . Los  $t$ -designs son un caso particular de las fórmulas de cuadratura donde todos los pesos son iguales,  $w_i = \frac{1}{N}$  para todo  $1 \leq i \leq N$ . En [Ehler et al., 2018] los autores demuestran que existe una constante  $C_{\mathcal{M}}$  que depende solamente de  $\mathcal{M}$  tal que para cada  $N \geq C_{\mathcal{M}}t^d$  y  $w_i \in \mathbb{R}_+$  (y algunas condiciones técnicas más para los pesos), entonces existen fórmulas de cuadratura en  $\mathcal{M}$  asociadas a dichos pesos con  $N$  puntos.

De igual forma, Gariboldi y Gigante han desarrollado las desigualdades del tipo Marcinkiewicz-Zygmund necesarias para extender el Teorema 2.1.5 a variedades no algebraicas, véase [Gariboldi and Gigante, 2018]. En este caso, en vez de considerar el espacio de funciones formado por los polinomios de grado acotado, consideran las primeras autofunciones del operador laplaciano asociado a la variedad y utilizan las desigualdades desarrolladas por Mhaskar y Filbir

en [Filbir and Mhaskar, 2011] para estos espacios de funciones. Para ordenar las autofunciones basta con ordenar sus autovalores asociados de mayor a menor.

## 2.2. Particiones regulares

Hemos estudiado las particiones regulares en la esfera  $\mathbb{S}^2$  en la Sección 1.3.1. Esa misma noción se puede extender a nuestra variedad  $\mathcal{M}$ . Decimos que una familia de conjuntos cerrados  $R_1, \dots, R_N \subset \mathcal{M}$  es una partición regular de  $\mathcal{M}$  si

$$\mu_{\mathcal{M}}(R_i) = 1/N, \quad \bigcup_{i=1}^N R_i = \mathcal{M}, \quad \text{y} \quad \mu_{\mathcal{M}}(R_i \cap R_j) = 0 \quad \text{para} \quad i \neq j.$$

El diámetro de la partición  $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$  viene dado por

$$\|\mathcal{R}\| = \max_{i=1, \dots, N} \max_{x, y \in R_i} d(x, y). \quad (2.3)$$

En [Alexander, 1972] y [Rakhmanov et al., 1994] podemos encontrar ejemplos de particiones regulares en la esfera. Partiendo de esas construcciones, no resulta difícil deducir la existencia de particiones regulares con diámetro comparable a  $N^{-\frac{1}{d}}$  en cualquier variedad compacta y conexa algebraica lisa. La existencia de particiones en nuestro caso también puede deducirse de un resultado reciente de Gigante y Leopardi para espacios métricos de medida Ahlfors regular, véase [Gigante and Leopardi, 2017].

**Proposición 2.2.1.** *Para todo  $N \geq N_0 = N_0(\mathcal{M}) \in \mathbb{N}$  existe una partición regular  $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$  de  $\mathcal{M}$  tal que*

$$B(c_1 N^{-1/d}) \subset R_i \subset B(c_2 N^{-1/d}), \quad (2.4)$$

donde  $B(r)$  es una bola geodésica en  $\mathcal{M}$  con radio  $r > 0$  y las constantes  $c_1, c_2$  dependen solo de  $\mathcal{M}$ .

*Demostración.* Este resultado es una consecuencia inmediata de [Gigante and Leopardi, 2017, Theorem 2]. Debido a su larga extensión, no reproduciremos aquí la prueba.  $\square$

## 2.3. Desigualdades de Marcinkiewicz-Zygmund

Vamos a comenzar esta sección enunciando un resultado de Berman y Ortega-Cerdà en [Berman and Ortega-Cerdà, 2018] sobre desigualdades de tipo Bernstein para polinomios en variedades algebraicas. Este resultado es análogo a la desigualdad de Plancherel-Polya para funciones enteras de tipo exponencial, véase [Young, 2001].

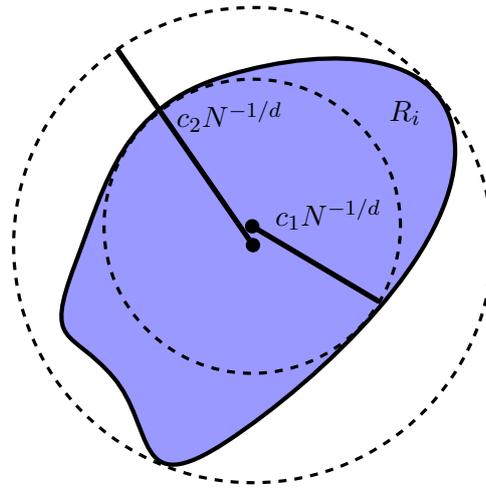


Figura 2.1: Elemento de una partición regular con diámetro acotado como en la Proposición 2.2.1.

**Lema 2.3.1.** *Existe una constante  $C = C_{\mathcal{M}} > 0$  tal que para todo polinomio  $P \in \mathcal{P}_t$  la siguiente desigualdad es cierta:*

$$\int_{U(\frac{1}{t})} |P(x)| d\mu_X(x) \leq \frac{C}{t^d} \int_{\mathcal{M}} |P(x)| d\mu_{\mathcal{M}}(x),$$

donde  $U(\frac{1}{t}) = \{x \in X : d(x, \mathcal{M}) \leq \frac{1}{t}\}$ .

*Demostración.* Se puede encontrar la prueba en [Berman and Ortega-Cerdà, 2018, Theorem 10].  $\square$

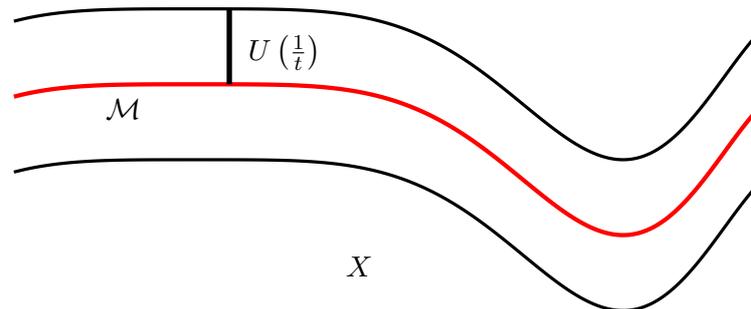


Figura 2.2: Representación del entorno tubular  $U(\frac{1}{t})$  de una variedad algebraica real.

Nuestro resultado sobre desigualdades de Marcinkiewicz-Zygmund es el siguiente.

**Teorema 2.3.2.** *Existe una constante  $A = A(\mathcal{M}) > 0$  tal que si  $N \geq At^d$  y  $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$  es la partición regular de  $\mathcal{M}$  dada por la Proposición 2.2.1. Entonces para todo  $P \in \mathcal{P}_t$*

$$\frac{1}{2} \int_{\mathcal{M}} |P(x)| d\mu_{\mathcal{M}}(x) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |P(x_i)| \leq \frac{3}{2} \int_{\mathcal{M}} |P(x)| d\mu_{\mathcal{M}}(x), \quad (2.5)$$

para cualquier elección de  $x_i \in R_i$ , con  $1 \leq i \leq N$ .

*Demostración.* A lo largo de esta demostración, denotamos por  $C$  cualquier constante que dependa de  $\mathcal{M}$ . Fijamos el grado  $t \in \mathbb{N}$ , sea  $N = t^d/a^d \geq At^d$ , donde  $A = A(\mathcal{M}) > 0$  es alguna constante aún por determinar. Consideramos la partición regular con  $N$  puntos dada por la Proposición 2.2.1. Por hipótesis, para cada elemento de la partición se verifica

$$B(ac_1 t^{-1}) \subset R_i \subset B(ac_2 t^{-1}),$$

y por lo tanto el diámetro de  $\mathcal{R}$  verifica

$$\frac{2ac_1}{t} \leq \|\mathcal{R}\| \leq \frac{2ac_2}{t}.$$

Comparamos entonces las siguientes cantidades:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |P(x_i)| - \int_{\mathcal{M}} |P(x)| d\mu_{\mathcal{M}}(x) \right| &\leq \sum_{i=1}^N \left| \int_{R_i} |P(x_i)| - |P(x)| d\mu_{\mathcal{M}}(x) \right| \\ &\leq \frac{\|\mathcal{R}\|}{N} \sum_{i=1}^N |\nabla_{\mathcal{M}} P(x'_i)|, \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde  $x'_i$  es tal que  $|\nabla_{\mathcal{M}} P(x'_i)| \geq |\nabla_{\mathcal{M}} P(x)|$  para todo  $x \in R_i$ . Observemos que podemos tomar  $x'_i$  en la bola  $B(ac_2 t^{-1})$  que contiene a  $R_i$ . Consideramos ahora cada  $x'_i$  como un punto de  $X$ , la variedad compleja, y aplicamos la fórmula de integración de Cauchy.

$$|\nabla_{\mathcal{M}} P(x'_i)| \leq \frac{C}{(\frac{1}{t})^{2d+1}} \int_{B_X(x'_i, \frac{1}{t})} |P(z)| d\mu_X(z),$$

donde  $B_X(x'_i, t^{-1})$  es una bola en cualquier métrica hermítica de  $X$ . Observamos que cualquier métrica hermítica en  $X$  sigue siendo una métrica cuando la restringimos a  $\mathcal{M}$  y como  $\mathcal{M}$  es una variedad compacta, toda métrica es equivalente. Para  $i = 1, \dots, N$ , el número de bolas  $B_X(x'_i, t^{-1})$  con intersección no vacía está acotado independientemente de  $t$ . De hecho, si  $I \subset \{1, \dots, N\}$  existe  $C$  tal que si

$$\bigcap_{j \in I} B_X(x'_j, t^{-1}) \neq \emptyset, \text{ entonces}$$

$$\bigcap_{j \in I} B(x'_j, Ct^{-1}) \neq \emptyset, \text{ y } R_j \subset B(x'_j, Ct^{-1}) \text{ para cada } j \in I.$$

Como cada  $R_j$  contiene una bola disjunta de radio  $ac_1t^{-1}$ , tenemos entonces

$$\text{card}(I)a^d \leq C.$$

Podemos acotar la suma en la expresión (2.6) por la suma de las integrales en las correspondientes bolas y usando la acotación en el número de bolas que intersecan, pasar a un entorno tubular de  $\mathcal{M}$  definido como en Lema 2.3.1,

$$\sum_{i=1}^N \int_{B_X(x'_i, \frac{1}{t})} |P(z)| d\mu_X(z) \leq \frac{C}{a^d} \int_{U(\frac{1}{t})} |P(z)| d\mu_X(z).$$

Finalmente, aplicamos el Lema 2.3.1 y obtenemos que la expresión (2.6) está acotada por

$$\frac{\|\mathcal{R}\|}{N} \sum_{i=1}^N |\nabla_{\mathcal{M}} P(x'_i)| \leq C \frac{\|\mathcal{R}\| t^{d+1}}{a^d N} \int_{\mathcal{M}} |P(x)| d\mu_{\mathcal{M}}(x).$$

Usando el hecho de que  $N = t^d/a^d$  y la cota superior para  $\|\mathcal{R}\|$  deducimos que hay que tomar  $A = (4Cc_2)^d$ .  $\square$

Resultados parecidos al Teorema 2.3.2 han sido probados por Filbir y Mhaskar para [Filbir and Mhaskar, 2010; Filbir and Mhaskar, 2011] en variedades de Riemann compactas y espacios de polinomios de difusión (autofunciones de operadores elípticos diferenciales), en particular, para el operador de Laplace-Beltrami.

**Definición 2.3.3.** Dada una función diferenciable  $f$  en  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ , el gradiente tangencial de  $f$  en el punto  $x \in \mathcal{M}$ , que denotamos por  $\nabla_{\mathcal{M}} f(x)$ , es la proyección ortogonal del gradiente de  $f$  en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\nabla f(x)$ , en el espacio tangente a  $\mathcal{M}$  en el punto  $x$ .

Para demostrar la desigualdad de Marcinkiewicz-Zygmund para el gradiente tangencial (Corolario 2.3.5) usamos la siguiente desigualdad para vectores de polinomios.

**Corolario 2.3.4.** Sea  $k \in \mathbb{N}$  una constante fija. Existe una constante  $A = A(\mathcal{M}, k) > 0$  tal que si  $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$  con  $N \geq At^d$ , es la partición regular dada por la Proposición 2.2.1 entonces para todo vector de polinomios  $Q(x) = (Q_1(x), \dots, Q_m(x))$  con  $m \leq 2d$  y  $Q_j(x) \in \mathcal{P}_{t+k}(\mathcal{M})$  tenemos

$$\frac{1}{3\sqrt{d}} \int_{\mathcal{M}} |Q(x)| d\mu_{\mathcal{M}}(x) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |Q(x_i)| \leq 3\sqrt{d} \int_{\mathcal{M}} |Q(x)| d\mu_{\mathcal{M}}(x), \quad (2.7)$$

para cualquier elección de  $x_i \in R_i$ , donde por  $|v|$  denotamos a la norma del vector  $v$ .

*Demostración.* Sea  $A$  la constante dada por el Teorema 2.3.2 cuando reemplazamos  $t+k$  por  $t$ . Usamos el hecho de que

$$|Q(x)| \leq \sum_{j=1}^m |Q_j(x)| \leq \sqrt{m} |Q(x)|,$$

y aplicamos el resultado anterior para cada  $Q_j(x)$ .  $\square$

En [Bondarenko et al., 2013] el Corolario 2.3.4 es suficiente para tener una desigualdad de Marcinkiewicz-Zygmund con los gradientes tangenciales de los polinomios, ya que el gradiente tangencial de un polinomio esférico en la esfera puede escribirse como un vector de polinomios esféricos. Este no es nuestro caso y necesitamos este segundo corolario.

**Corolario 2.3.5.** *Existe una constante  $A = A(\mathcal{M}) > 0$  tal que si  $N \geq At^d$  y  $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$  es la partición regular de  $\mathcal{M}$  dada por la Proposición 2.2.1, entonces para todo  $P \in \mathcal{P}_t$*

$$\frac{1}{K_{\mathcal{M}}} \int_{\mathcal{M}} |\nabla_{\mathcal{M}} P(x)| d\mu_{\mathcal{M}}(x) \leq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\nabla_{\mathcal{M}} P(x_i)| \leq K_{\mathcal{M}} \int_{\mathcal{M}} |\nabla_{\mathcal{M}} P(x)| d\mu_{\mathcal{M}}(x), \quad (2.8)$$

donde  $K_{\mathcal{M}} = 3\sqrt{d} \binom{r}{n-d} C_{\mathcal{M}}$  para  $C_{\mathcal{M}} > 0$  dependiendo solamente de  $\mathcal{M}$  y para cualquiera elección de  $x_i \in R_i$ , con  $1 \leq i \leq N$ . De nuevo, denotamos por  $|v|$  a la norma del vector  $v$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{M}$  dada como el conjunto de ceros del conjunto de polinomios con coeficientes reales  $p_1(x), \dots, p_r(x)$ . Como  $\mathcal{M}$  es lisa y de dimensión  $d$ , para todo  $x \in \mathcal{M}$  el espacio normal a  $\mathcal{M}$  en  $x$  está generado por

$$\nabla p_{i_1}(x), \dots, \nabla p_{i_{n-d}}(x),$$

donde el índice  $i_1 < \dots < i_{n-d}$  (que puede depender de  $x$ ) es un subespacio de  $\{1, \dots, r\}$ . Asumimos, para simplificar la notación, que  $i_j = j$  para  $j = 1, \dots, n-d$ . Sea  $u_i(x)$  una base ortogonal del espacio normal a  $\mathcal{M}$  en  $x$ .  $u_i(x)$  puede obtenerse por la siguiente fórmula del tipo determinante de Gram-Schmidt,

$$u_i(x) = \begin{vmatrix} \langle \nabla p_1(x), \nabla p_1(x) \rangle & \langle \nabla p_2(x), \nabla p_1(x) \rangle & \dots & \langle \nabla p_i(x), \nabla p_1(x) \rangle \\ \langle \nabla p_1(x), \nabla p_2(x) \rangle & \langle \nabla p_2(x), \nabla p_2(x) \rangle & \dots & \langle \nabla p_i(x), \nabla p_2(x) \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle \nabla p_1(x), \nabla p_{i-1}(x) \rangle & \langle \nabla p_2(x), \nabla p_{i-1}(x) \rangle & \dots & \langle \nabla p_i(x), \nabla p_{i-1}(x) \rangle \\ \nabla p_1(x) & \nabla p_2(x) & \dots & \nabla p_i(x) \end{vmatrix}.$$

Para calcular  $u_i(x)$ , no tenemos más que desarrollar por la última fila. Como cada  $\nabla p_i(x)$  es un vector de polinomios, el producto  $\langle \nabla p_i(x), \nabla p_j(x) \rangle$  es también un polinomio y entonces  $u_i(x)$  es también un vector de polinomios de grado total acotado por una constante que depende solo de  $\mathcal{M}$ . El gradiente tangencial de  $P$  en  $x \in \mathcal{M}$  es

$$\nabla_{\mathcal{M}} P(x) = \nabla P(x) - \sum_{i=1}^{n-d} \frac{\langle \nabla P(x), u_i(x) \rangle u_i(x)}{|u_i(x)|^2}.$$

Si hay  $n-d$  polinomios que definen el espacio normal a  $\mathcal{M}$  en toda la variedad, como en la esfera y cualquier otra hipersuperficie algebraica, el resultado es inmediato porque podemos

aplicar el Corolario 2.3.4 al vector de polinomios

$$\left( \prod_{i=1}^{n-d} |u_i(x)|^2 \right) \nabla_{\mathcal{M}} P(x),$$

y como  $\mathcal{M}$  es lisa,

$$0 < C_{\mathcal{M}}^{-1} \leq \prod_{i=1}^{n-d} |u_i(x)|^2 \leq C_{\mathcal{M}},$$

para algún  $C_{\mathcal{M}} > 0$ . En el caso más general, para cualquier  $I \subset \{1, \dots, r\}$  con  $|I| = n - d$  podemos definir los vectores de polinomios  $u_j^I(x)$  para  $j = 1, \dots, n - d$  (algunos de los polinomios pueden ser el polinomio nulo) y por el Corolario 2.3.4 las desigualdades de Marcinkiewicz-Zygmund se verifican para

$$\left( \prod_{i=1}^{n-d} |u_i^I(x)|^2 \right) \nabla P(x) - \sum_{i=1}^{n-d} \langle \nabla P(x), u_i^I(x) \rangle u_i^I(x) \prod_{j \neq i} |u_j^I(x)|^2. \quad (2.9)$$

Claramente, las desigualdades de Marcinkiewicz-Zygmund también se verifican tomando el supremo de los subconjuntos  $I \subset \{1, \dots, r\}$  con  $|I| = n - d$ . De hecho, como

$$C_{\mathcal{M}}^{-1} |\nabla_{\mathcal{M}} P(x)| \leq \sup_{\substack{I \subset \{1, \dots, r\} \\ |I|=n-d}} \prod_{i=1}^{n-d} |u_i^I(x)|^2 |\nabla_{\mathcal{M}} P(x)| \leq C_{\mathcal{M}} |\nabla_{\mathcal{M}} P(x)|,$$

para alguna constante  $C_{\mathcal{M}} > 0$ , concluimos que para  $v_I(x)$  definido en la fórmula (2.9)

$$\left( \binom{r}{n-d} \right)^{-1} \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, r\} \\ |I|=n-d}} |v_I(x)| \leq \sup_{\substack{I \subset \{1, \dots, r\} \\ |I|=n-d}} |v_I(x)| \leq \sum_{\substack{I \subset \{1, \dots, r\} \\ |I|=n-d}} |v_I(x)|,$$

para todo  $x \in \mathcal{M}$ . □

## 2.4. Demostración del Teorema 2.1.5

Al igual que en [Bondarenko et al., 2013], el último ingrediente de la prueba del Teorema 2.1.5 es el siguiente teorema.

**Teorema 2.4.1.** *Sea  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  una función continua y  $\Omega$  un subconjunto abierto y acotado, con frontera  $\partial\Omega$ , y tal que  $0 \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Si  $\langle x, f(x) \rangle > 0$  para todo  $x \in \partial\Omega$ , entonces existe  $x \in \Omega$  tal que  $f(x) = 0$ .*

*Demostración.* Es un resultado conocido. Podemos consultar una prueba en [Chen and Cho, 2006, Theorem 1.2.9]. □

Fijamos  $t \in \mathbb{N}$  e identificamos el espacio  $\mathbb{R}^n$  del Teorema 2.4.1 con  $\mathcal{P}_t^0$ . Definimos

$$\Omega = \left\{ P \in \mathcal{P}_t^0 : \int_{\mathcal{M}} |\nabla_{\mathcal{M}} P(x)| d\mu_{\mathcal{M}}(x) < 1 \right\},$$

que es claramente un subconjunto abierto y acotado de  $\mathcal{P}_t^0$  tal que  $0 \in \Omega \subset \mathcal{P}_t^0$ . Definimos una función  $f : \mathcal{P}_t^0 \rightarrow \mathcal{P}_t^0$  como composición de dos funciones:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_t^0 &\longrightarrow \mathcal{M}^N &&\longrightarrow \mathcal{P}_t^0 \\ P &\mapsto (x_1(P), \dots, x_N(P)) &&\mapsto \sum_{i=1}^N K_{x_i(P)} \end{aligned}$$

Entonces  $\langle P, f(P) \rangle = \left\langle P, \sum_{i=1}^N K_{x_i(P)} \right\rangle = \sum_{i=1}^N P(x_i(P))$ . Sea  $A = A(\mathcal{M}) > 0$  definida como en el Corolario 2.3.5. Sea  $N \geq At^d$  y  $\mathcal{R} = \{R_1, \dots, R_N\}$  la partición regular de  $\mathcal{M}$  dada por la Proposición 2.2.1. Dado un polinomio  $P$ , definimos en  $\mathcal{M}$  el campo de vectores  $X_P = \nabla_{\mathcal{M}} P / U_{\epsilon}(|\nabla_{\mathcal{M}} P|)$ , donde  $U_{\epsilon} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$  es una función  $C^2$  creciente tal que  $U_{\epsilon}(x) = \epsilon/2$  si  $0 \leq x \leq \epsilon/2$  y  $U_{\epsilon}(x) = x$  si  $x \geq \epsilon$  para algún  $\epsilon$  fijo. Como  $U_{\epsilon}(x)$  es  $C^2$ , el campo de vectores  $X_P$  es  $C^2$  en  $\mathcal{M}$  y depende continuamente de  $P$ . Ahora para cada  $1 \leq i \leq N$  consideramos la función  $y_i : [0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}$  que verifica la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial s} y_i(s) = X_P(y_i(s)) \\ y_i(0) = x_i \end{cases} \quad (2.10)$$

donde  $x_i \in R_i$ . La ecuación diferencial es distinta para cada  $P \in \mathcal{P}$ , por lo que a veces denotaremos por  $y_i(P, s)$  a  $y_i(s)$  para enfatizar su dependencia de  $P$ . Fijémonos en que la cantidad  $\sum_{i=1}^N P(x_i)$  es pequeña ya que  $\int_{\mathcal{M}} P(x) d\mu(x) = 0$ . Como queremos que  $\sum_{i=1}^N P(x_i)$  sea positiva, nos movemos desde el punto  $x_i$  en la dirección de mayor crecimiento de  $P(x_i)$ , esto es, la dirección dada por el vector  $\nabla_{\mathcal{M}} P(x_i)$ . Como el campo de vectores  $X_P$  es  $C^2$ , cada  $y_i$  está bien definida y es continua en  $P$  y  $s$ . Para un  $s_0 > 0$  fijo, todavía por determinar, definimos la función continua

$$\mathcal{P}_t^0 \ni P \mapsto (x_1(P), \dots, x_N(P)) = (y_1(P, s_0), \dots, y_N(P, s_0)). \quad (2.11)$$

Siguiendo [Bondarenko et al., 2013] separamos

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(x_i(P)) &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(x_i) + \int_0^{s_0} \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(y_i(P, s)) \right] ds \\ &\geq \int_0^{s_0} \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(y_i(P, s)) \right] ds - \left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(x_i) \right|. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Podemos modificar la partición regular sin perder sus propiedades esenciales. De hecho, si  $x'_i$  pertenece a la bola  $B(C_{\mathcal{M}}\|\mathcal{R}\|)$  que contiene a  $R_i$ , donde  $C_{\mathcal{M}} > 0$  es una constante que depende solo de  $\mathcal{M}$ , entonces definimos

$$R'_i = (R_i \setminus \cup_{j=1}^N \{x'_j\}) \cup \{x'_i\},$$

obteniendo una partición regular con las mismas propiedades, es decir

$$B(c'_1 N^{-1/d}) \subset R'_i \subset B(c'_2 N^{-1/d}), \quad (2.13)$$

para algunas constantes  $c'_1, c'_2$  que dependen solo de  $\mathcal{M}$ . Como en (2.6) y usando que  $P \in \mathcal{P}_t^0$  tiene media cero, obtenemos

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(x_i) \right| \leq \frac{\|\mathcal{R}\|}{N} \sum_{i=1}^N |\nabla_{\mathcal{M}} P(x'_i)|,$$

donde  $x'_i$  es un punto en la bola  $B(c'_2 N^{-1/d})$  que contiene a  $R_i$  en el que  $|\nabla_{\mathcal{M}} P(x)|$  alcanza su máximo. Aplicando la parte derecha de la desigualdad en (2.8) y la modificación de la partición regular mencionada anteriormente obtenemos

$$\left| \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(x_i) \right| \leq K_{\mathcal{M}} \|\mathcal{R}\|. \quad (2.14)$$

Para cualquier  $0 < s < C_{\mathcal{M}}\|\mathcal{R}\|$  fijo aplicamos la parte izquierda de la desigualdad (2.8) y de nuevo la modificación de la partición regular obteniendo

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(y_i(P, s)) \right] &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|\nabla_{\mathcal{M}} P(y_i(P, s))|^2}{U_{\epsilon}(|\nabla_{\mathcal{M}} P(y_i(P, s))|)} \\ &\geq \frac{1}{N} \sum_{i: |\nabla_{\mathcal{M}} P(y_i(P, s))| \geq \epsilon} |\nabla_{\mathcal{M}} P(y_i(P, s))| \geq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\nabla_{\mathcal{M}} P(y_i(P, s))| - \epsilon \\ &\geq \frac{1}{K_{\mathcal{M}}} - \epsilon. \end{aligned}$$

Finalmente tomamos  $s_0 = 3K_{\mathcal{M}}^2\|\mathcal{R}\|$  y  $\epsilon = \frac{1}{2K_{\mathcal{M}}}$  y por la desigualdad (2.12) concluimos que

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N P(x_i(P)) \geq \frac{K_{\mathcal{M}}\|\mathcal{R}\|}{2} > 0.$$

Aplicando el Teorema 2.4.1 obtenemos la existencia de  $Q \in \Omega$  verificando  $\sum_{i=1}^N K_{x_i(Q)} = 0$ . Por la Caracterización 2.1.3 podemos concluir que  $x_1(Q), \dots, x_N(Q)$  es un  $t$ -design.

## 2.5. Sobre las condiciones de la variedad

En esta sección, que no pertenece al artículo [Etayo et al., 2018], repasamos las características de  $\mathcal{M}$  y estudiamos cuáles de entre ellas son necesarias para utilizar una prueba tipo [Bondarenko et al., 2013] y cuales podrían no serlo.

Recordamos que tomamos  $\mathcal{M}$  variedad algebraica real afín y lisa, compacta y conexa. En cuanto a la compacidad, es una condición necesaria: o bien la variedad es compacta, o bien consideramos en ella una medida compacta, ya que si no no tiene sentido considerar

$$\int_{\mathcal{M}} P(x) d\mu_{\mathcal{M}}(x) = \infty.$$

Así pues, queda considerar el resto de condiciones. Si no pedimos que  $\mathcal{M}$  sea algebraica real y lisa, tenemos dos opciones:

- O bien la variedad no es algebraica, pero sigue siendo lisa, con lo que tendríamos una variedad diferenciable conexa.
- O bien la variedad deja de ser lisa, con lo que tendríamos una variedad algebraica real y conexa con singularidades.

Además, está el caso de que  $\mathcal{M}$  esté formada por varias componentes conexas.

### 2.5.1. Subvariedades de una variedad algebraica

Un caso particular del anterior es el de una variedad diferencial no algebraica contenida en una variedad algebraica de la misma dimensión. Por ejemplo, podemos considerar la variedad algebraica dada por

$$V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 - b^4 = 0, \quad b < a\}. \quad (2.15)$$

Esta variedad algebraica real irreducible, conocida como los óvalos de Cassini, presenta dos componentes conexas lisas de dimensión 1 donde cada componente verifica todas las condiciones que exigíamos a  $\mathcal{M}$  salvo la de ser algebraica. Para este caso tenemos el siguiente Teorema.

**Teorema 2.5.1.** *Sea  $\mathcal{M}$  una variedad diferenciable conexa y compacta de dimensión  $d$  en  $\mathbb{R}^n$  y tal que su clausura de Zariski también tiene dimensión  $d$ . Existe una constante  $C_{\mathcal{M}}$  que depende solamente de  $\mathcal{M}$  tal que para cada  $N \geq C_{\mathcal{M}} t^d$  existen  $t$ -designs en  $\mathcal{M}$  con  $N$  puntos.*

*Demostración.* Fijémonos en que el espacio de polinomios de grado menor o igual que  $t$  en una componente conexa de la variedad es igual al espacio de polinomios de grado menor o igual que  $t$  en su clausura de Zariski. Además, aunque tomemos solo una componente

conexa  $\mathcal{M}_1$  de una variedad algebraica  $\mathcal{M}$ , al considerar la complejificación  $X$  tenemos que tomar la complejificación de toda la variedad. Teniendo en cuenta estas consideraciones, la demostración del Teorema 2.1.5 se puede reproducir paso por paso, obteniendo  $t$ -designs del orden esperado. □

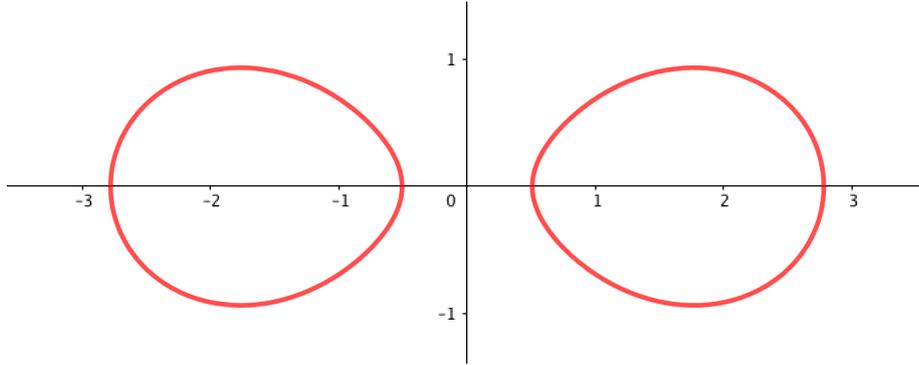


Figura 2.3: Óvalos de Cassini para  $a = 2$  y  $b = 1.93$ .

### 2.5.2. Variedades algebraicas con singularidades

No conozco ninguna referencia a un estudio semejante, lo que está claro es que el argumento de [Bondarenko et al., 2013] todavía no puede extenderse a este caso, ya hasta la fecha no se conoce ningún teorema de existencia de particiones regulares en variedades algebraicas con singularidades.

### 2.5.3. Variedades no conexas

La conexión es una de las condiciones más críticas de la variedad. Incluso en sus definiciones en los contextos más generales, la condición de la conexión está siempre presente, véase [Seymour and Zaslavsky, 1984] o [Kane, 2015]. Supongamos que tenemos una variedad  $\mathcal{M}$  tal como está descrita en 2.1 pero formada por varias componentes conexas. Claramente, las distintas componentes tienen que tener la misma dimensión para que tenga sentido la integración respecto a una única medida y tenga sentido considerar resultados asintóticos. Así pues, en esta sección todas las componentes conexas de una variedad tendrán la misma dimensión. Además, en esta sección no consideramos la medida de Lebesgue normalizada,  $\mu_{\mathcal{M}}(x)$ , sino la medida de Lebesgue usual  $dx$ . Por eso la Definición 2.1.2 de  $t$ -design en  $\mathcal{M}$  pasa a ser

$$\int_{\mathcal{M}} P(x) dx = \frac{\text{Vol}(\mathcal{M})}{N} \sum_{i=1}^N P(x_i).$$

Consideramos una variedad  $\mathcal{M}$  algebraica real afín lisa y compacta formada por (veámos el caso más simple) dos componentes conexas. Sirva de ejemplo de nuevo los óvalos de Cassini descritos en la ecuación (2.15). Sabemos que existen  $t$ -designs del orden correcto en cada uno de los dos óvalos (veáse el Teorema 2.5.1), pero ¿Cómo debemos definir un  $t$ -design en la variedad general? Si denotamos por  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  a las dos componentes conexas y consideramos la medida de Lebesgue sin normalizar podríamos definir  $\{\{x_1, \dots, x_{N_1}\} \in \mathcal{M}_1\} \cup \{\{y_1, \dots, y_{N_2}\} \in \mathcal{M}_2\}$  son un  $t$ -design en  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$  si

$$\text{a) } \int_{\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2} P(x) dx = \frac{\text{Vol}(\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2)}{N} \left( \sum_{i=1}^{N_1} P(x_i) + \sum_{i=1}^{N_2} P(y_i) \right), \quad (2.16)$$

o bien

$$\text{b) } \int_{\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2} P(x) dx = \frac{\text{Vol}(\mathcal{M}_1)}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} P(x_i) + \frac{\text{Vol}(\mathcal{M}_2)}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} P(y_i). \quad (2.17)$$

para todo  $P \in \mathcal{P}_t$ . Si consideramos la Definición (2.17), entonces tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 2.5.2.** *Sea  $\mathcal{M}$  una variedad algebraica real afín y compacta de dimensión  $d$  en  $\mathbb{R}^n$  formada por  $m$  componentes conexas. Existe una constante  $C_{\mathcal{M}}$  que depende solamente de  $\mathcal{M}$  tal que para cada  $N \geq C_{\mathcal{M}} t^d$  existen  $t$ -designs siguiendo la Definición (2.17) en  $\mathcal{M}$  con  $N$  puntos.*

*Demostración.* Es una consecuencia inmediata de los Teoremas 2.1.5 y 2.5.1,

$$\int_{\mathcal{M}} P(x) dx = \int_{\mathcal{M}_1} P(x) dx + \dots + \int_{\mathcal{M}_m} P(x) dx = \sum_{i=1}^m \frac{\text{Vol}(\mathcal{M}_i)}{N_i} \sum_{j=1}^{N_i} P(x_j^i).$$

□

Esta es la definición que utilizan Ehler y Gräf en [Ehler and Gräf, 2018, Definition 6.4], donde consideran  $t$ -designs en uniones de variedades Grassmannianas. De hecho, como permiten que las distintas componentes tengan distinta dimensión, su definición es:

$$\int_{\mathcal{M}_1} P(x) d\mu_{\mathcal{M}_1}(x) + \int_{\mathcal{M}_2} P(x) d\mu_{\mathcal{M}_2}(x) = \frac{\text{Vol}(\mathcal{M}_1)}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} P(x_i) + \frac{\text{Vol}(\mathcal{M}_2)}{N_2} \sum_{i=1}^{N_2} P(y_i).$$

Si consideramos la Definición (2.16), entonces el problema se complica y los resultados que obtenemos son más débiles.

**Proposición 2.5.3.** *Sea  $\mathcal{M}$  una variedad algebraica afín real y lisa, compacta, formada por  $m$  componentes conexas  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_m$ . Si*

$$\frac{\text{Vol}(\mathcal{M}_j)}{\text{Vol}(\mathcal{M}_1)} \in \mathbb{Q}$$

*para todo  $1 \leq j \leq m$ , entonces existe un  $t$ -design  $\{x_1, \dots, x_N\}$  en  $\mathcal{M}$  según la Definición (2.16) que es unión de  $t$ -designs en las distintas componentes conexas.*

*Demostración.* Sea  $\{x_1^i, \dots, x_{N_1^i}\}$  un  $t$ -desing en  $\mathcal{M}_i$  para  $1 \leq i \leq m$ . Su existencia viene dada por el Teorema 2.1.5 o 2.5.1, Entonces, se verifica

$$\begin{aligned} \frac{\text{Vol}(\mathcal{M}_1)}{N_1} \sum_{i=1}^{N_1} P(x_i) + \dots + \frac{\text{Vol}(\mathcal{M}_m)}{N_m} \sum_{i=1}^{N_2} P(y_i) &= \int_{\mathcal{M}_1} P(x)dx + \dots + \int_{\mathcal{M}_m} P(x)dx \\ &= \int_{\mathcal{M}_1 \cup \dots \cup \mathcal{M}_m} P(x)dx. \end{aligned}$$

Si las relaciones entre los  $\text{Vol}(\mathcal{M}_1), \dots, \text{Vol}(\mathcal{M}_2)$  son racionales, entonces por el Teorema 2.1.5 o 2.5.1 podemos aumentar el número de puntos de  $N_j$  hasta tener todos los coeficientes de las sumas iguales.  $\square$

Observamos que aunque garantizamos la existencia de  $t$ -designs en este caso, no podemos asegurar que sean del orden  $t^d$ .

El recíproco también es cierto si añadimos la hipótesis de que las distintas subvariedades  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_m$  no tengan la misma clausura de Zariski.

**Proposición 2.5.4.** *Sea  $\mathcal{M}$  una variedad algebraica afín real y lisa, compacta, formada por  $m$  componentes conexas  $\mathcal{M}_1, \dots, \mathcal{M}_m$ . Supongamos además que ninguna componente tiene la misma clausura de Zariski. Si existe un  $t$ -design  $\{x_1, \dots, x_N\}$  en  $\mathcal{M}$  según la Definición (2.16) que sea unión de  $t$ -designs en las distintas componentes conexas, entonces*

$$\frac{\text{Vol}(\mathcal{M}_j)}{\text{Vol}(\mathcal{M}_1)} \in \mathbb{Q}$$

para todo  $1 \leq j \leq m$ .

*Demostración.* Como las componentes no comparten clausura de Zariski, existe  $t_0 \in \mathbb{N}$  tal que para todo  $t \geq t_0$  existe  $P_j \in \mathcal{P}_t$  tal que se anula todas las componentes salvo en  $\mathcal{M}_j$  para cada  $1 \leq j \leq m$ . Esto es posible ya que las componentes no comparten clausura. Supongamos que existe un  $t$ -design en  $\mathcal{M}$  que sea unión de  $t$ -designs en las distintas componentes conexas. Entonces,

$$\frac{\text{Vol}(\mathcal{M})}{N} \sum_{i=1}^{N_j} P_j(x_i) = \int_{\mathcal{M}} P_j(x)dx = \int_{\mathcal{M}_j} P_j(x)dx = \frac{\text{Vol}(\mathcal{M}_j)}{N_j} \sum_{i=1}^{N_j} P_j(x_i).$$

Luego,

$$\frac{N_j}{N} = \frac{\text{Vol}(\mathcal{M}_j)}{\text{Vol}(\mathcal{M})}.$$

Como  $\frac{N_j}{N} \in \mathbb{Q}$ , entonces necesariamente  $\frac{\text{Vol}(\mathcal{M}_j)}{\text{Vol}(\mathcal{M})} \in \mathbb{Q}$ .  $\square$

Finalizamos el capítulo con este curioso ejemplo.

**Ejemplo 2.5.5.** Consideremos las variedades:

$$\begin{aligned} V_1 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 = 0\}, \\ V_3 &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - \frac{1}{3} = 0\}, \\ V_\pi &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - \frac{1}{\pi} = 0\}. \end{aligned}$$

Y la unión de las anteriores

$$\begin{aligned} V_{1,3} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 1) \left(x^2 + y^2 - \frac{1}{3}\right) = 0\}, \\ V_{1,\pi} &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x^2 + y^2 - 1) \left(x^2 + y^2 - \frac{1}{\pi}\right) = 0\}. \end{aligned}$$

Los volúmenes de las variedades vienen dados por

$$\text{Vol}(V_1) = 2\pi \quad \text{Vol}(V_3) = \frac{2\pi}{3} \quad \text{Vol}(V_\pi) = 2$$

Para  $N_1, N_3$  y  $N_\pi \in \mathbb{N}$  consideramos los correspondientes  $t$ -designs en cada una de las variedades:  $\{x_1, \dots, x_{N_1}\}$  en  $V_1$ ;  $\{y_1, \dots, y_{N_3}\}$  en  $V_3$  y  $\{z_1, \dots, z_{N_\pi}\}$  en  $V_\pi$ . Por [Korevaar and Meyers, 1994, Theorem 3.1] sabemos que los  $t$ -designs son precisamente las  $t + 1$  raíces de la unidad del círculo permitiendo una rotación por cualquier ángulo  $\theta \in [0, 2\pi)$  Evaluamos ahora el polinomio

$$P(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

en  $V_{1,3}$  y  $V_{1,\pi}$ . Siguiendo la Definición (2.17), suponemos que

$$\frac{\text{Vol}(V_1) + \text{Vol}(V_3)}{N_1 + N_3} \sum_{i=1}^{N_3} y_i = \int_{V_{1,3}} P(x, y) dx dy = \int_{V_3} P(x, y) dx dy = \frac{\text{Vol}(V_3)}{N_3} \sum_{i=1}^{N_3} y_i.$$

Así que,

$$\frac{\text{Vol}(V_1) + \text{Vol}(V_3)}{N_1 + N_3} = \frac{\text{Vol}(V_3)}{N_3} \iff \frac{8\pi}{3(N_1 + N_3)} = \frac{2\pi}{3N_3} \iff 4 = \frac{N_1 + N_3}{N_3}.$$

No tenemos más que fijar, por ejemplo,  $N_3$  y tomar en  $V_1$  un  $t$ -design con  $N_1 = 3N_3$  puntos para obtener un  $t$ -design en  $V_{1,3}$ .

Veamos ahora el otro caso. Suponemos que

$$\frac{\text{Vol}(V_1) + \text{Vol}(V_\pi)}{N_1 + N_\pi} \sum_{i=1}^{N_\pi} z_i = \int_{V_{1,\pi}} P(x, y) dx dy = \int_{V_\pi} P(x, y) dx dy = \frac{\text{Vol}(V_\pi)}{N_\pi} \sum_{i=1}^{N_\pi} z_i.$$

Entonces,

$$\frac{\text{Vol}(V_1) + \text{Vol}(V_\pi)}{N_1 + N_\pi} = \frac{\text{Vol}(V_\pi)}{N_\pi} \iff \frac{2\pi + 2}{N_1 + N_\pi} = \frac{2}{N_\pi} \iff \pi + 1 = \frac{N_1 + N_\pi}{N_\pi}$$

Como  $N_1, N_\pi \in \mathbb{N}$ , la última igualdad no se verifica nunca, así que no podemos tener un  $t$ -design en  $V_{1,\pi}$  que sea unión de  $t$ -designs en  $V_1$  y  $V_\pi$ .

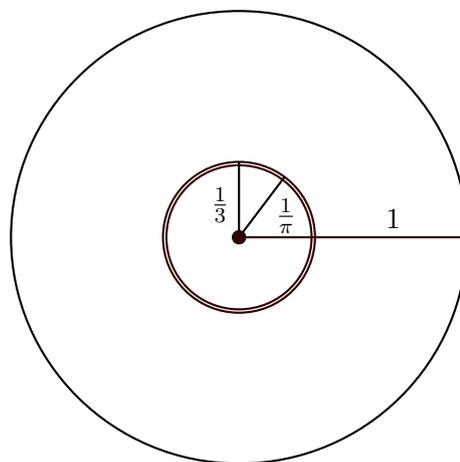


Figura 2.4: Variedad del Ejemplo 2.5.5.

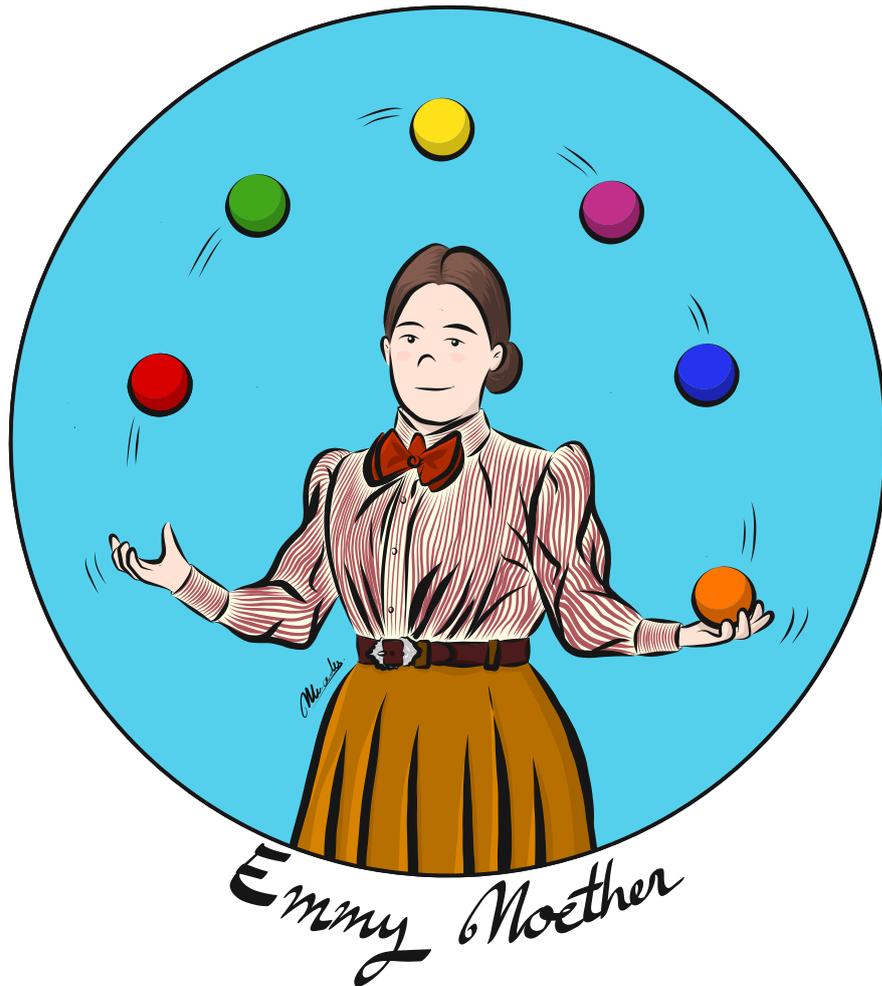


---

## CAPÍTULO 3

---

# Generalizaciones del spherical ensemble



*Zu jeder kontinuierlichen Symmetrie eines physikalischen Systems gehört eine Erhaltungsgröße.*

**Teorema de Noether.**

A. E. Noether (1918).

*Invariante Variationsprobleme.*



## Contenido

---

<b>3.1. El spherical ensemble</b> . . . . .	<b>68</b>
<b>3.2. Un proceso determinantal en <math>\mathbb{C}^d</math></b> . . . . .	<b>69</b>
3.2.1. Un primer acercamiento a un proceso determinantal en $\mathbb{S}^{2d}$ . . . . .	73
<b>3.3. Un proceso determinantal en <math>\mathbb{S}^{2d}</math></b> . . . . .	<b>76</b>
<b>3.4. Un proceso determinantal en <math>\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})</math></b> . . . . .	<b>86</b>
<b>3.5. Un proceso de puntos en <math>\mathbb{S}^{2d+1}</math></b> . . . . .	<b>88</b>
<b>3.6. Nuevas cotas para la energía de Riesz</b> . . . . .	<b>88</b>
3.6.1. Esferas de dimensión par . . . . .	89
3.6.2. Energía de Green en $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$ . . . . .	101
3.6.3. Esferas de dimensión impar . . . . .	105
<b>3.7. Nomenclatura del capítulo</b> . . . . .	<b>110</b>

---

En la Sección 1.3.5 hemos presentado el spherical ensemble, un proceso de puntos determinantal definido por Krishnapur en [Krishnapur, 2009]. Algunas de las propiedades más relevantes del spherical ensemble han sido probadas por Alishahi y Zamani en [Alishahi and Zamani, 2015]. Entre ellas destacan los pequeños valores que toman las esperanzas de las distintas energías de Riesz evaluadas en los puntos que provienen del proceso. De esta forma, los conjuntos de puntos que provienen del spherical ensemble nos proporcionan varias de las mejores cotas que se conocen a día de hoy para los valores mínimos de las  $s$ -energías. En este capítulo proponemos varias generalizaciones de este proceso determinantal a diferentes espacios:  $\mathbb{S}^{2d}$ ,  $\mathbb{S}^{2d+1}$  y  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$ ,  $d \in \mathbb{N}$ . Dado que el spherical ensemble utiliza la estructura compleja de  $\mathbb{S}^2$  (más concretamente, la identificación de  $\mathbb{S}^2$  con  $\mathbb{C}$  mediante la proyección estereográfica), nuestra generalización será distinta para las esferas de dimensión par (con proyección estereográfica a  $\mathbb{C}^d$ ) y las de dimensión impar. Dependiendo de la generalización que tomemos nos será posible calcular la esperanza de las energías de Riesz y de Green para los distintos conjuntos de puntos obtenidos en este capítulo. Los resultados aquí presentados están recogidos en los artículos [Beltrán and Etayo, 2018b] y [Beltrán and Etayo, 2018c].

A lo largo del capítulo haremos referencia a distintos procesos de puntos determinantes. Para no volver demasiado engorrosa la notación, hemos adjuntado una tabla al final del capítulo donde aparece un resumen con la nomenclatura asociada a cada proceso determinantal. Además, durante este capítulo trabajaremos indistintamente con  $\mathbb{C}^d$  y  $\mathbb{R}^{2d}$ , obviando, siempre que sea posible, el isomorfismo que hay entre estos dos espacios vectoriales.

### 3.1. El spherical ensemble

Comenzamos este capítulo recordando brevemente en qué consiste el spherical ensemble presentado en la Sección 1.3.5. Sean  $A, B$  matrices de talla  $N \times N$  con entradas aleatorias gaussianas complejas, es decir, cada entrada de  $A$  y  $B$  es independiente idénticamente distribuida tomando sus partes real e imaginaria siguiendo la distribución real gaussiana con media 0 y varianza 1/2. Si calculamos los autovalores  $\lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{C}$  del haz de matrices  $(A, B)$  y los enviamos a la esfera  $\mathbb{S}^2$  a través de la proyección estereográfica, obtenemos el spherical ensemble. Fijémonos en que los  $\lambda_i$  son números complejos tales que  $\det(\lambda_i A - B) = 0$  y que existen (para  $A, B$  genéricos)  $N$  soluciones para esta ecuación.

Krishnapur en [Krishnapur, 2009] demostró que este proceso es determinantal y que el núcleo asociado al proceso determinantal en el plano complejo es el núcleo reproductor del subespacio  $N$ -dimensional de  $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{C})$  generado por

$$\left\{ \sqrt{\frac{N}{\pi}} \binom{N-1}{k} \frac{z^k}{(1+|z|^2)^{\frac{N+1}{2}}} : 0 \leq k \leq N-1 \right\},$$

donde consideramos la medida de Lebesgue  $\mu$  en  $\mathbb{C}$  que hace que este conjunto sea ortonormal. Dada una base ortonormal del espacio, podemos calcular fácilmente su núcleo reproductor con la fórmula (1.14) y tenemos

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{C}}^{(N)}(z, w) &= \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N}{\pi} \binom{N-1}{k} \frac{(z\bar{w})^k}{(1+|z|^2)^{\frac{N+1}{2}} (1+|w|^2)^{\frac{N+1}{2}}} \\ &= \frac{N}{\pi} \frac{(1+z\bar{w})^{N-1}}{(1+|z|^2)^{\frac{N+1}{2}} (1+|w|^2)^{\frac{N+1}{2}}}. \end{aligned}$$

Consideramos la proyección estereográfica

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\mapsto \left( \frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right). \end{aligned}$$

Como dicha aplicación establece un difeomorfismo entre  $\mathbb{C}$  y  $\mathbb{S}^2 \setminus \{(0, 0, 1)\}$ , podemos aplicar la Proposición 1.3.5 y concluimos que existe un proceso de puntos determinantal en  $\mathbb{S}^2$  cuyo núcleo viene dado por:

$$K_{\mathbb{S}^2}^{(N)}(p, q) = \frac{N}{4\pi} \frac{(1+z\bar{w})^{N-1}}{(1+|z|^2)^{\frac{N-1}{2}} (1+|w|^2)^{\frac{N-1}{2}}},$$

donde  $z = \pi(p)$  y  $w = \pi(q)$ . Fijémonos en que el núcleo verifica

$$K_{\mathbb{S}^2}^{(N)}(p, p) = \frac{N}{4\pi},$$

lo cual implica, en nuestra notación, que el proceso es homogéneo; e incluso más, es isotrópico (véase la Sección 1.3.4), ya que

$$\left| K_{\mathbb{S}^2}^{(N)}(p, q) \right| = \frac{N}{4\pi} \left( \frac{1 + \langle p, q \rangle}{2} \right)^{\frac{N-1}{2}}.$$

Es por esta propiedad (la isotropía del núcleo) que se pueden calcular explícitamente y son pequeñas tanto la esperanza de la  $s$ -energía, como otras cantidades interesantes de un conjunto de puntos provenientes del spherical ensemble, véase [Alishahi and Zamani, 2015].

### 3.2. Un proceso determinantal en $\mathbb{C}^d$

Vamos a intentar generalizar este proceso determinantal partiendo de un proceso de puntos determinantal en  $\mathbb{C}^d$  y trasladándolo después a  $\mathbb{S}^{2d} \setminus \{(0, 0, 1)\}$  o  $\mathbb{S}^{2d+1} \setminus \{(0, 0, 1)\}$ .

**Definición 3.2.1.** Sea  $L \geq 0$ , consideramos el conjunto de las siguientes funciones definidas en  $\mathbb{C}^d$ :

$$I = \left\{ \sqrt{C_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}^L} \frac{z_1^{\alpha_1} \dots z_d^{\alpha_d}}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}}} \right\}_{\alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq L} \quad (3.1)$$

donde los coeficientes multinomiales son de la forma

$$C_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}^L = \frac{(d+L)!}{\pi^d L!} \binom{L}{\alpha_1, \dots, \alpha_d, L - (\alpha_1 + \dots + \alpha_d)} = \frac{1}{\pi^d} \frac{(d+L)!}{\alpha_1! \dots \alpha_d! (L - (\alpha_1 + \dots + \alpha_d))!}.$$

Denotemos por  $\mathcal{H}$  el espacio que generan en  $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^d)$ .

**Proposición 3.2.2.**  $\mathcal{H}$  tiene dimensión  $N = \binom{d+L}{d}$  compleja.

*Demostración.* Tenemos que

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{H} &= \dim \left( \begin{array}{l} \text{Polinomios en } d \\ \text{variables de grado} \\ \text{igual o menor que } L \end{array} \right) = \sum_{i=0}^L \dim \left( \begin{array}{l} \text{Polinomios en } d \\ \text{variables de grado } i \end{array} \right) = \\ &= 1 + \sum_{i=1}^L \left( \begin{array}{l} \text{Combinaciones de } d \\ \text{elementos en grupos de } i \\ \text{elementos con repetición} \end{array} \right) = 1 + \sum_{i=1}^L \binom{d+i-1}{i}. \end{aligned}$$

Ahora vamos a demostrar por inducción en  $L$  que

$$1 + \sum_{i=1}^L \binom{d+i-1}{i} = \binom{d+L}{d}.$$

Vemos que para  $L = 1$  se verifica:

$$1 + \binom{d}{1} = d + 1 = \binom{d+1}{d}.$$

Supongamos que se verifica para  $L - 1$  y veamos que entonces es cierto también para  $L$ :

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{i=1}^L \binom{d+i-1}{i} &= 1 + \sum_{i=1}^{L-1} \binom{d+i-1}{i} + \binom{d+L-1}{L} \\ &=_{Hip.} \binom{d+L-1}{d} + \binom{d+L-1}{L} = \\ &= \frac{(d+L-1)!}{(d)!(L-1)!} + \frac{(d+L-1)!}{(L)!(d-1)!} \\ &= \frac{(d+L-1)!}{(d-1)!(L-1)!} \frac{(d+L)}{dL} = \frac{(d+L)!}{d!L!} = \binom{d+L}{d}. \end{aligned}$$

□

**Proposición 3.2.3.** *La colección  $I$  propuesta en la Definición 3.2.1 es una base ortonormal de  $\mathcal{H}$  en  $L^2_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^d)$  y el núcleo reproductor  $K_{\mathbb{C}^d}^{(N)} : \mathbb{C}^d \times \mathbb{C}^d \rightarrow \mathbb{C}$  de  $\mathcal{H}$  asociado a la medida de Lebesgue usual en  $\mathbb{C}^d$  es:*

$$K_{\mathbb{C}^d}^{(N)}(z, w) = \frac{Nd!}{\pi^d} \frac{(1 + \langle z, w \rangle)^L}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}} (1 + \|w\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}}}.$$

*Demostración.* Comenzamos demostrando que es una base ortonormal.

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{C}^d} \left( \sqrt{C_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}^L} \frac{z_1^{\alpha_1} \dots z_d^{\alpha_d}}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}}} \right) \overline{\left( \sqrt{C_{\alpha'_1, \dots, \alpha'_d}^L} \frac{z_1^{\alpha'_1} \dots z_d^{\alpha'_d}}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}}} \right)} dz_1 \dots dz_d \\ &= \sqrt{C_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}^L C_{\alpha'_1, \dots, \alpha'_d}^L} \int_{\mathbb{C}^d} \frac{z_1^{\alpha_1} \bar{z}_1^{-\alpha'_1} \dots z_d^{\alpha_d} \bar{z}_d^{-\alpha'_d}}{(1 + \|z\|^2)^{d+L+1}} dz_1 \dots dz_d \\ &= \sqrt{C_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}^L C_{\alpha'_1, \dots, \alpha'_d}^L} \int_{\mathbb{C}^d} \frac{\|z_1\|^{2\alpha_1} \bar{z}_1^{\alpha'_1 - \alpha_1} \dots \|z_d\|^{2\alpha_d} \bar{z}_d^{\alpha'_d - \alpha_d}}{(1 + \|z\|^2)^{d+L+1}} dz_1 \dots dz_d. \end{aligned}$$

Usamos ahora el siguiente cambio de variables:  $z = (z_1, \dots, z_d) \mapsto (\rho_1 e^{i\theta_1}, \dots, \rho_d e^{i\theta_d})$ , que tiene jacobiano normal  $NJac = \rho_1 \dots \rho_d$  (para una definición de jacobiano normal, véase el apéndice B), y calculamos la integral

$$\begin{aligned} &\int_{(0, \infty)^d} \int_{[0, 2\pi)^d} \frac{\rho_1^{2\alpha_1} \rho_1^{\alpha'_1 - \alpha_1} e^{i\theta_1(\alpha'_1 - \alpha_1)} \dots \rho_d^{2\alpha_d} \rho_d^{\alpha'_d - \alpha_d} e^{i\theta_d(\alpha'_d - \alpha_d)}}{(1 + \rho_1^2 + \dots + \rho_d^2)^{d+L+1}} \rho_1 \dots \rho_d d\rho_1 \dots d\rho_d d\theta_1 \dots d\theta_d \\ &= \int_{(0, \infty)^d} \int_{[0, 2\pi)^d} \frac{\rho_1^{\alpha_1 + \alpha'_1 + 1} e^{i\theta_1(\alpha'_1 - \alpha_1)} \dots \rho_d^{\alpha_d + \alpha'_d + 1} e^{i\theta_d(\alpha'_d - \alpha_d)}}{(1 + \rho_1^2 + \dots + \rho_d^2)^{d+L+1}} d\rho_1 \dots d\rho_d d\theta_1 \dots d\theta_d. \end{aligned}$$

Estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Fubini

$$\int_{(0, \infty)^d} \frac{\rho_1^{\alpha_1 + \alpha'_1 + 1} \dots \rho_d^{\alpha_d + \alpha'_d + 1}}{(1 + \rho_1^2 + \dots + \rho_d^2)^{d+L+1}} d\rho_1 \dots d\rho_d \int_{[0, 2\pi)^d} e^{i\theta_1(\alpha'_1 - \alpha_1)} \dots e^{i\theta_d(\alpha'_d - \alpha_d)} d\theta_1 \dots d\theta_d.$$

De aquí podemos deducir que si  $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) \neq (\alpha'_1, \dots, \alpha'_d)$  entonces

$$\int_{[0, 2\pi]^d} e^{i\theta_1(\alpha'_1 - \alpha_1)} \dots e^{i\theta_d(\alpha'_d - \alpha_d)} d\theta_1 \dots d\theta_d = 0,$$

Con lo cual las funciones son ortogonales. En cambio, si  $(\alpha_1, \dots, \alpha_d) = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_d)$  entonces calculamos:

$$\int_{(0, \infty)^d} \frac{\rho_1^{\alpha_1 + \alpha'_1 + 1} \dots \rho_d^{\alpha_d + \alpha'_d + 1}}{(1 + \rho_1^2 + \dots + \rho_d^2)^{d+L+1}} d\rho_1 \dots d\rho_d = \int_{(0, \infty)^d} \frac{\rho_1^{2\alpha_1 + 1} \dots \rho_d^{2\alpha_d + 1}}{(1 + \rho_1^2 + \dots + \rho_d^2)^{d+L+1}} d\rho_1 \dots d\rho_d.$$

De nuevo utilizamos el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned} & \int_{(0, \infty)^d} \frac{\rho_1^{2\alpha_1 + 1} \dots \rho_d^{2\alpha_d + 1}}{(1 + \rho_1^2 + \dots + \rho_d^2)^{d+L+1}} d\rho_1 \dots d\rho_d \\ &= \int_0^\infty \rho_d^{2\alpha_d + 1} \int_0^\infty \rho_d^{2\alpha_{d-1} + 1} \dots \int_0^\infty \frac{\rho_1^{2\alpha_1 + 1}}{(1 + \rho_1^2 + \dots + \rho_d^2)^{d+L+1}} d\rho_1 \dots d\rho_d. \end{aligned}$$

Donde:

$$\int_0^\infty \frac{\rho_1^{2\alpha_1 + 1}}{(1 + \rho_1^2 + \dots + \rho_d^2)^{d+L+1}} d\rho_1 = \frac{\alpha_1!(d+L-1-\alpha_1)!}{2(d+L)!(1 + \rho_2^2 + \dots + \rho_d^2)^{d+L-\alpha_1}},$$

véase por ejemplo [Gradshteyn and Ryzhik, 2015, Fórmula 3.251, 5]. Luego:

$$\begin{aligned} & \int_{(0, \infty)^d} \frac{\rho_1^{2\alpha_1 + 1} \dots \rho_d^{2\alpha_d + 1}}{(1 + \rho_1^2 + \dots + \rho_d^2)^{d+L+1}} d\rho_1 \dots d\rho_d \\ &= \frac{\alpha_1!(d+L-1-\alpha_1)!}{2(d+L)!} \int_0^\infty \rho_d^{2\alpha_d + 1} \int_0^\infty \rho_d^{2\alpha_{d-1} + 1} \dots \int_0^\infty \frac{\rho_2^{2\alpha_2 + 1} d\rho_2 \dots d\rho_d}{(1 + \rho_2^2 + \dots + \rho_d^2)^{d+L-\alpha_1}} \\ &= \frac{\alpha_1! \alpha_2!(d+L-2-\alpha_1-\alpha_2)!}{4(d+L)!} \int_0^\infty \rho_d^{2\alpha_d + 1} \int_0^\infty \rho_d^{2\alpha_{d-1} + 1} \dots \int_0^\infty \frac{\rho_3^{2\alpha_3 + 1} d\rho_3 \dots d\rho_d}{(1 + \rho_3^2 + \dots + \rho_d^2)^{d+L-\alpha_1}}. \end{aligned}$$

Con lo que podemos concluir que

$$\begin{aligned} & \int_{(0, \infty)^d} \frac{\rho_1^{2\alpha_1 + 1} \dots \rho_d^{2\alpha_d + 1}}{(1 + \rho_1^2 + \dots + \rho_d^2)^{d+L+1}} d\rho_1 \dots d\rho_d \\ &= \frac{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d! (d+L-1-\alpha_1)! (d+L-2-\alpha_1-\alpha_2)! \dots (L-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_d)!}{2^d (d+L)! (d+L-\alpha_1-1)! \dots (1+L-\alpha_1-\dots-\alpha_d)!} \\ &= \frac{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d! (L-\alpha_1-\alpha_2-\dots-\alpha_d)!}{2^d (d+L)!}. \end{aligned}$$

Por lo que

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{C}^d} \left( \sqrt{C_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}^L} \frac{z_1^{\alpha_1} \dots z_d^{\alpha_d}}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}}} \right) \overline{\left( \sqrt{C_{\alpha'_1, \dots, \alpha'_d}^L} \frac{z_1^{\alpha'_1} \dots z_d^{\alpha'_d}}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}}} \right)} dz_1 \dots dz_d \\
&= C_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}^L \int_{(0, \infty)^d} \frac{\rho_1^{2\alpha_1+1} \dots \rho_d^{2\alpha_d+1}}{(1 + \rho_1^2 + \dots + \rho_d^2)^{d+L+1}} d\rho_1 \dots d\rho_d \int_{[0, 2\pi)^d} d\theta_1 \dots d\theta_d \\
&= C_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}^L \frac{\alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d! (L - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_d)!}{2^d (d+L)!} 2^d \pi^d \\
&= \frac{(d+L)! \alpha_1! \alpha_2! \dots \alpha_d! (L - \alpha_1 - \alpha_2 - \dots - \alpha_d)! 2^d \pi^d}{\pi^d \alpha_1! \dots \alpha_d! (L - (\alpha_1 + \dots + \alpha_d))! 2^d (d+L)!} = 1.
\end{aligned}$$

Así que las funciones tienen norma 1. Como hemos demostrado que  $I$  es una base ortonormal de  $\mathcal{H}$ , entonces el núcleo reproductor de  $\mathcal{H}$  viene dado por

$$\begin{aligned}
K_{\mathbb{C}^d}^{(N)}(z, w) &= \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_d \leq L} C_{\alpha_1, \dots, \alpha_d}^L \frac{(z_1 \bar{w}_1)^{\alpha_1} \dots (z_d \bar{w}_d)^{\alpha_d}}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}} (1 + \|w\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}}} \\
&= \sum_{i=0}^L \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_d = i} \frac{1}{\pi^d} \frac{(d+L)!}{\alpha_1! \dots \alpha_d! (L - (\alpha_1 + \dots + \alpha_d))!} \frac{(z_1 \bar{w}_1)^{\alpha_1} \dots (z_d \bar{w}_d)^{\alpha_d}}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}} (1 + \|w\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}}} \\
&= \frac{(d+L)!}{\pi^d (1 + \|z\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}} (1 + \|w\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}}} \sum_{i=0}^L \frac{1}{i! (L-i)!} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_d = i} \frac{i! (z_1 \bar{w}_1)^{\alpha_1} \dots (z_d \bar{w}_d)^{\alpha_d}}{\alpha_1! \dots \alpha_d!}.
\end{aligned}$$

Por el Teorema multinomial [DLMF, 2015, Formula 2.6.4(ii)],

$$\begin{aligned}
K_{\mathbb{C}^d}^{(N)}(z, w) &= \frac{(d+L)!}{\pi^d (1 + \|z\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}} (1 + \|w\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}}} \sum_{i=0}^L \frac{(z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_d \bar{w}_d)^i}{i! (L-i)!} \\
&= \frac{(d+L)!}{\pi^d (1 + \|z\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}} (1 + \|w\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}}} \frac{(1 + z_1 \bar{w}_1 + \dots + z_d \bar{w}_d)^L}{L!} \\
&= \frac{Nd!}{\pi^d} \frac{(1 + \langle z, w \rangle)^L}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}} (1 + \|w\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}}}
\end{aligned}$$

□

Gracias al Teorema de Macci-Shosnikov (en este documento, Teorema 1.3.3), podemos dar la siguiente definición.

**Definición 3.2.4.** Existe un proceso de puntos determinantal de  $N$  puntos en  $\mathbb{C}^d$  que denotaremos por  $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}^d}^{(N)}$  con núcleo asociado

$$K_{\mathbb{C}^d}^{(N)}(z, w) = \frac{Nd!}{\pi^d} \frac{(1 + \langle z, w \rangle)^L}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}} (1 + \|w\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}}}.$$

### 3.2.1. Un primer acercamiento a un proceso determinantal en $\mathbb{S}^{2d}$

Queremos trasladar el proceso determinantal definido en la Definición 3.2.4 a la esfera  $\mathbb{S}^{2d}$  imitando el método empleado para el spherical ensemble. Para ello, definimos la proyección estereográfica en cualquier dimensión real par y calculamos su jacobiano.

**Lema 3.2.5.** *Consideremos la aplicación estereográfica definida por*

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{S}^{2d} \setminus \underbrace{\{(0, \dots, 0, 1)\}}_{2d} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2d} \\ (p_1, \dots, p_{2d+1}) &\mapsto \left( \frac{p_1}{1-p_{2d+1}}, \dots, \frac{p_{2d}}{1-p_{2d+1}} \right). \end{aligned}$$

Entonces la aplicación diferencial de  $\pi$  en el punto  $p \in \mathbb{S}^{2d}$  es

$$D\pi(p)\dot{p} = \left( \frac{\dot{p}_1}{1-p_{2d+1}} + \frac{p_1\dot{p}_{2d+1}}{(1-p_{2d+1})^2}, \dots, \frac{\dot{p}_{2d}}{1-p_{2d+1}} + \frac{p_{2d}\dot{p}_{2d+1}}{(1-p_{2d+1})^2} \right).$$

*Demostración.* Solo tenemos que calcular una derivada:

$$\begin{aligned} D\pi(p)\dot{p} &= \frac{d}{dt} \pi(p + t\dot{p}) = \\ &= \frac{d}{dt} \left( \frac{p_1 + t\dot{p}_1}{1-p_{2d+1} - t\dot{p}_{2d+1}}, \frac{p_2 + t\dot{p}_2}{1-p_{2d+1} - t\dot{p}_{2d+1}}, \dots, \frac{p_{2d} + t\dot{p}_{2d}}{1-p_{2d+1} - t\dot{p}_{2d+1}} \right) \\ &= \left( \frac{\dot{p}_1}{1-p_{2d+1}} + \frac{p_1\dot{p}_{2d+1}}{(1-p_{2d+1})^2}, \dots, \frac{\dot{p}_{2d}}{1-p_{2d+1}} + \frac{p_{2d}\dot{p}_{2d+1}}{(1-p_{2d+1})^2} \right). \end{aligned}$$

□

**Lema 3.2.6.** *Sea  $\pi^{-1} : \mathbb{R}^{2d} \longrightarrow \mathbb{S}^{2d}$  la aplicación inversa de la proyección estereográfica definida en el Lema 3.2.5, entonces*

$$NJac\pi^{-1}(y) = \left( \frac{2}{\|y\|^2 + 1} \right)^{2d},$$

donde  $NJac$  denota el jacobiano normal. Para una definición de jacobiano normal, véase el apéndice B.

*Demostración.* Calculamos la matriz jacobiana de  $\pi^{-1}(y)$

$$\begin{aligned} D\pi^{-1}(y)v &= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1} \right) & \frac{\partial}{\partial y_2} \left( \frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial y_{2d}} \left( \frac{2y_1}{\|y\|^2 + 1} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial}{\partial y_1} \left( \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right) & \frac{\partial}{\partial y_2} \left( \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right) & \dots & \frac{\partial}{\partial y_{2d}} \left( \frac{\|y\|^2 - 1}{\|y\|^2 + 1} \right) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{2(\|y\|^2 + 1) - 4y_1^2}{(\|y\|^2 + 1)^2} & \frac{-4y_1 y_2}{(\|y\|^2 + 1)^2} & \dots & \frac{-4y_1 y_{2d}}{(\|y\|^2 + 1)^2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{4y_1}{(\|y\|^2 + 1)^2} & \frac{4y_2}{(\|y\|^2 + 1)^2} & \dots & \frac{4y_{2d}}{(\|y\|^2 + 1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_{2d} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \dots \\ v_{2d} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Para cada punto  $y \in \mathbb{R}^{2d}$  tomamos una base ortonormal de  $\mathbb{R}^{2d}$  de la siguiente forma: consideramos el vector  $\frac{y}{\|y\|}$  y una base de vectores ortonormales a  $\frac{y}{\|y\|}$  en  $\mathbb{R}^{2d}$ , que no daremos explícitamente, a la que denotamos por  $(w^{(1)}, w^{(2)}, \dots, w^{(2d-1)})$ . Entonces calculamos:

$$\begin{aligned} D\pi^{-1}(y) \frac{y}{\|y\|} &= \begin{pmatrix} \frac{2(\|y\|^2+1)-4y_1^2}{(\|y\|^2+1)^2} & \frac{-4y_1y_2}{(\|y\|^2+1)^2} & \cdots & \frac{-4y_1y_{2d}}{(\|y\|^2+1)^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{4y_1}{(\|y\|^2+1)^2} & \frac{4y_2}{(\|y\|^2+1)^2} & \cdots & \frac{4y_{2d}}{(\|y\|^2+1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{y_1}{\|y\|} \\ \cdots \\ \frac{y_{2d}}{\|y\|} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2y_1(1-\|y\|^2)}{(\|y\|^2+1)^2\|y\|}, \frac{2y_2(1-\|y\|^2)}{(\|y\|^2+1)^2\|y\|}, \dots, \frac{4\|y\|}{(\|y\|^2+1)^2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{2(1-\|y\|^2)}{(\|y\|^2+1)^2\|y\|} \left( y_1, y_2, \dots, \frac{2\|y\|^2}{(1-\|y\|^2)} \right). \\ \\ D\pi^{-1}(y)w^{(i)} &= \begin{pmatrix} \frac{2(\|y\|^2+1)-4y_1^2}{(\|y\|^2+1)^2} & \frac{-4y_1y_2}{(\|y\|^2+1)^2} & \cdots & \frac{-4y_1y_{2d}}{(\|y\|^2+1)^2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{4y_1}{(\|y\|^2+1)^2} & \frac{4y_2}{(\|y\|^2+1)^2} & \cdots & \frac{4y_{2d}}{(\|y\|^2+1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1^{(i)} \\ \cdots \\ w_{2d}^{(i)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2w_1^{(i)}}{\|y\|^2+1}, \frac{2w_2^{(i)}}{\|y\|^2+1}, \dots, 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{\|y\|^2+1} \left( w_1^{(i)}, w_2^{(i)}, \dots, 0 \right). \end{aligned}$$

Podemos calcular el jacobiano normal utilizando la fórmula (B.1):

$$\text{NJac}\pi^{-1}(y) = \sqrt{\frac{\det \left( \langle D\pi^{-1}(y)(w^{(i)}), D\pi^{-1}(y)w^{(j)} \rangle \right)}{\det \left( \langle w^{(i)}, w^{(j)} \rangle \right)}}_{i,j=1,\dots,2d}$$

donde, para que la notación resulte más sencilla, hemos denotado por  $w^{(2d)}$  al vector  $\frac{y}{\|y\|}$ . Como  $\{w^{(i)}\}_{i=1,\dots,2d}$  es una base ortonormal,  $\det \left( \langle w^{(i)}, w^{(j)} \rangle \right) = 1$  y por lo tanto, sólo tenemos que calcular

$$\begin{aligned} \text{NJac}\pi^{-1}(y) &= \sqrt{\det \left( \langle D\pi^{-1}(y)(w^{(i)}), D\pi^{-1}(y)w^{(j)} \rangle \right)}_{i,j=1,\dots,2d} \\ &= \sqrt{\det \begin{pmatrix} \frac{4}{(\|y\|^2+1)^2} & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{4}{(\|y\|^2+1)^2} \end{pmatrix}} \\ &= \sqrt{\left( \frac{4}{(\|y\|^2+1)^2} \right)^{2d}} \\ &= \left( \frac{2}{\|y\|^2+1} \right)^{2d}. \end{aligned}$$

□

**Proposición 3.2.7.** *Existe un proceso de puntos determinantal en  $\mathbb{S}^{2d}$ , que denotamos por  $\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N)}$  con núcleo*

$$K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N)}(p, q) = \frac{Nd!}{\pi^d 2^{L+d+1}} \frac{(1 + \langle p, q \rangle - p_{2d+1} - q_{2d+1})^L}{(1 - p_{2d+1})^{\frac{L+d}{2}} (1 - q_{2d+1})^{\frac{L+d}{2}}}.$$

*Demostración.* Utilizamos la Proposición 1.3.5 con la proyección estereográfica definida en el Lema 3.2.5 y obtenemos:

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N)}(p, q) &= \frac{Nd!}{\pi^d 2^{2d+1}} \frac{(1 + \langle z, w \rangle)^L}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{L-d}{2}} (1 + \|w\|^2)^{\frac{L-d}{2}}} \\ &= \frac{Nd!}{\pi^d 2^{2d+1}} \frac{(1 + \left\langle \left( \frac{p_1}{1-p_{2d+1}}, \dots, \frac{p_{2d}}{1-p_{2d+1}} \right), \left( \frac{q_1}{1-q_{2d+1}}, \dots, \frac{q_{2d}}{1-q_{2d+1}} \right) \right\rangle)^L}{(1 + \left\| \left( \frac{p_1}{1-p_{2d+1}}, \dots, \frac{p_{2d}}{1-p_{2d+1}} \right) \right\|^2)^{\frac{L-d}{2}} (1 + \left\| \left( \frac{q_1}{1-q_{2d+1}}, \dots, \frac{q_{2d}}{1-q_{2d+1}} \right) \right\|^2)^{\frac{L-d}{2}}} \\ &= \frac{Nd!}{\pi^d 2^{2d+1}} \frac{(1 + \frac{\langle p, q \rangle - p_{2d+1} q_{2d+1}}{(1-p_{2d+1})(1-q_{2d+1})})^L}{(1 + \frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}})^{\frac{L-d}{2}} (1 + \frac{1+q_{2d+1}}{1-q_{2d+1}})^{\frac{L-d}{2}}} \\ &= \frac{Nd!}{\pi^d 2^{L+d+1}} \frac{(1 + \langle p, q \rangle - p_{2d+1} - q_{2d+1})^L}{(1 - p_{2d+1})^{\frac{L+d}{2}} (1 - q_{2d+1})^{\frac{L+d}{2}}}. \end{aligned}$$

□

**Proposición 3.2.8.**  $\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N)}$  es un proceso determinantal con núcleo asociado no homogéneo.

*Demostración.* No tenemos más que calcular

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N)}(p, p) &= \frac{Nd!}{\pi^d 2^{L+d+1}} \frac{(1 + \langle p, p \rangle - 2p_{2d+1})^L}{(1 - p_{2d+1})^{L+d}} \\ &= \frac{Nd!}{\pi^d 2^{2d+1}} \frac{(1 - p_{2d+1})^L}{(1 - p_{2d+1})^{L+d}} \\ &= \frac{Nd!}{\pi^d 2^{2d+1} (1 - p_{2d+1})^d}. \end{aligned}$$

Como  $K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N)}(p, p)$  depende de  $p_{2d+1}$ , no es constante luego el núcleo no es homogéneo. □

El núcleo de  $\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N)}(p, p)$  no es homogéneo, con lo que no puede ser isotrópico. Esta es la principal característica del spherical ensemble y lo que provoca que podamos calcular la esperanza de su  $s$ -energía. Así pues, esta primera generalización que hemos propuesto parece no ser la deseada. Nos planteamos los siguientes problemas.

**Problema 3.2.9.** *¿Cómo modificamos el spherical ensemble en una esfera de dimensión par para que el núcleo sea, por lo menos, homogéneo?*

**Problema 3.2.10.** *¿Qué aplicación podemos definir de  $\mathbb{C}^d$  a  $\mathbb{S}^m$  con  $m$  impar que conserve la buena distribución de los puntos en  $\mathbb{C}^d$  como la proyección estereográfica?*

### 3.3. Un proceso determinantal en $\mathbb{S}^{2d}$

Para solucionar el Problema 3.2.9, vamos a seguir esta estrategia. En vez de utilizar la proyección estereográfica para llevar  $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}^d}^{(N)}$  a un proceso determinantal en  $\mathbb{S}^{2d}$ , vamos a hacer un paso intermedio transformando  $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}^d}^{(N)}$  en otro proceso determinantal distinto en  $\mathbb{C}^d$ . Así, pretendemos dejar invariante la dirección de cada uno de los vectores de  $\mathbb{C}^d$  pero cambiar continuamente su norma para obtener finalmente un proceso en  $\mathbb{S}^{2d}$  con núcleo homogéneo.

**Definición 3.3.1.** Sea

$$g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$$

una aplicación de clase  $\mathcal{C}^\infty$ , creciente, con  $g(0) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$  y

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^{2d} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2d} \\ x &\mapsto g(\|x\|) \frac{x}{\|x\|}. \end{aligned}$$

**Proposición 3.3.2.** La aplicación  $\varphi$  definida en la Definición 3.3.1 es una biyección.

*Demostración.* Claramente  $g : [0, \infty) \longrightarrow [0, \infty)$  es una biyección: la inyectividad viene dada por su monotonía y la sobreyectividad por sus valores en los límites. Para ver que  $\varphi : \mathbb{R}^{2d} \longrightarrow \mathbb{R}^{2d}$  también lo es, vamos a definir su aplicación inversa. Sea

$$\begin{aligned} \tau : \mathbb{R}^{2d} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2d} \\ y &\mapsto \frac{g^{-1}(\|y\|)}{\|y\|} y, \end{aligned}$$

entonces,

- $(\varphi \circ \tau)(y) = \varphi \left( \frac{g^{-1}(\|y\|)}{\|y\|} y \right) = g \left( \frac{g^{-1}(\|y\|)}{\|y\|} \|y\| \right) \frac{\frac{g^{-1}(\|y\|)}{\|y\|} y}{\frac{g^{-1}(\|y\|)}{\|y\|} \|y\|} = y.$
- $(\tau \circ \varphi)(x) = \tau \left( g(\|x\|) \frac{x}{\|x\|} \right) = \frac{g^{-1}(g(\|x\|) \|x\|)}{g(\|x\|) \|x\|} g(\|x\|) \frac{x}{\|x\|} = x.$

Como  $(\varphi \circ \tau)(y) = \text{Id}$  y  $(\tau \circ \varphi)(x) = \text{Id}$ , podemos concluir que  $\tau = \varphi^{-1}$  y por lo tanto, la aplicación  $\varphi$  es biyectiva. □

Tenemos entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2d} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^{2d} \xrightarrow{\pi^{-1}} \mathbb{S}^{2d} \setminus \underbrace{\{(0, \dots, 0, 1)\}}_{2d} \\ x & \longrightarrow & g(\|x\|) \frac{x}{\|x\|} \\ & & y \longrightarrow \left( \frac{2y_1}{\|y\|^2+1}, \dots, \frac{2y_{2d}}{\|y\|^2+1}, \frac{\|y\|^2-1}{\|y\|^2+1} \right). \end{array}$$

Considerando la aplicación  $(\pi^{-1} \circ \varphi)$  entre las variedades riemannianas  $\mathbb{R}^{2d}$  y  $\mathbb{S}^{2d}$ , gracias a la Proposición 1.3.5 podemos concluir que existe un proceso de puntos determinantal en  $\mathbb{S}^{2d}$  con núcleo

$$K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p, q) = \frac{K_{\mathbb{C}^d}^{(N)}((\pi^{-1} \circ \varphi)^{-1}(p), (\pi^{-1} \circ \varphi)^{-1}(q))}{\sqrt{|\text{NJac}((\pi^{-1} \circ \varphi)((\pi^{-1} \circ \varphi)^{-1}(p))) \text{NJac}((\pi^{-1} \circ \varphi)((\pi^{-1} \circ \varphi)^{-1}(q)))|}}.$$

Vamos a calcular explícitamente dicho núcleo. Para hacer más sencillo el cálculo del jacobiano normal, desglosaremos la demostración en diferentes lemas.

**Proposición 3.3.3.** *Para cada  $x \in \mathbb{R}^d$ , la isometría  $\theta_x$  definida en la Proposición B.0.7 hace conmutativo el siguiente diagrama.*

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^d \\ \theta_x \downarrow & & \downarrow \theta_x \\ \mathbb{R}^d & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^d \end{array}$$

*Demostración.* No tenemos más que tomar un punto  $x = (x_1, \dots, x_{2d}) \in \mathbb{R}^d$  y aplicarle, por un lado  $\varphi \circ \theta_x$  y por otro lado  $\theta_x \circ \varphi$  y ver que obtenemos lo mismo.

$$\varphi \circ \theta_x(x) = \varphi(\theta_x(x)) = \varphi(\|x\|, 0, \dots, 0) = g(\|x\|) \frac{(\|x\|, 0, \dots, 0)}{\|x\|}.$$

$$\theta_x \circ \varphi(x) = \theta_x(\varphi(x)) = \theta_x \left( g(\|x\|) \frac{x}{\|x\|} \right) = \frac{g(\|x\|)}{\|x\|} (\|x\|, 0, \dots, 0).$$

Podemos concluir entonces que el diagrama es conmutativo.  $\square$

**Corolario 3.3.4.** *En particular, tenemos que*

$$\text{NJac}\varphi(x) = \text{NJac}\varphi(\theta_x(x)).$$

*Demostración.* Es una consecuencia directa del Teorema B.0.6.  $\square$

**Lema 3.3.5.** *La aplicación diferencial de la aplicación*

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\longmapsto \|x\| \end{aligned}$$

es  $D(\|\cdot\|)(x)\dot{x} = \frac{\langle x, \dot{x} \rangle}{\|x\|}$ .

*Demostración.* Comenzamos calculando

$$\begin{aligned} D(\|\cdot\|^2)(x)\dot{x} &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \|x + t\dot{x}\|^2 \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \langle x + t\dot{x}, x + t\dot{x} \rangle \\ &= \langle \dot{x}, x \rangle + \langle x, \dot{x} \rangle \\ &= 2 \langle x, \dot{x} \rangle. \end{aligned}$$

Como además sabemos que  $D(\|\cdot\|^2)(x)\dot{x} = 2\|x\|D(\|\cdot\|)(x)\dot{x}$ , podemos deducir que

$$2 \langle x, \dot{x} \rangle = 2\|x\|D(\|\cdot\|)(x)\dot{x} \Rightarrow D(\|\cdot\|)(x)\dot{x} = \frac{\langle x, \dot{x} \rangle}{\|x\|}.$$

□

**Lema 3.3.6.** *La aplicación diferencial de la aplicación  $\varphi$  definida en la Definición 3.3.1 en un punto  $x \in \mathbb{R}^{2d}$  es*

$$D\varphi(x)\dot{x} = g'(\|x\|) \frac{x \langle x, \dot{x} \rangle}{\|x\|^2} + g(\|x\|) \frac{\dot{x}\|x\| - x \frac{\langle x, \dot{x} \rangle}{\|x\|}}{\|x\|^2}.$$

*Demostración.* Por la definición de aplicación diferencial tenemos:

$$D\varphi(x)\dot{x} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \varphi(x + t\dot{x}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g(\|x + t\dot{x}\|) \frac{x + t\dot{x}}{\|x + t\dot{x}\|}.$$

Gracias al Lema 3.3.5 tenemos

$$\begin{aligned} D\varphi(x)\dot{x} &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} g(\|x + t\dot{x}\|) \frac{x + t\dot{x}}{\|x + t\dot{x}\|} \\ &= g'(\|x\|) \frac{\langle x, \dot{x} \rangle}{\|x\|} \frac{x}{\|x\|} + g(\|x\|) \frac{\dot{x}\|x\| - x \frac{\langle x, \dot{x} \rangle}{\|x\|}}{\|x\|^2} \\ &= g'(\|x\|) \frac{x \langle x, \dot{x} \rangle}{\|x\|^2} + g(\|x\|) \frac{\dot{x}\|x\| - x \frac{\langle x, \dot{x} \rangle}{\|x\|}}{\|x\|^2}. \end{aligned}$$

□

**Lema 3.3.7.** *Sea  $\varphi : \mathbb{R}^{2d} \longrightarrow \mathbb{R}^{2d}$  la aplicación definida en la Definición 3.3.1, entonces*

$$\text{NJac}\varphi(x) = g'(\|x\|) \left( \frac{g(\|x\|)}{\|x\|} \right)^{2d-1}.$$

*Demostración.* El cálculo de este jacobiano normal es el más difícil del capítulo, ya que vamos a hacer todos los cálculos explícitamente. Por eso recomendamos al lector poco experimentado que lea antes el Apéndice B donde se demuestran las propiedades que utilizamos aquí. Tomamos una base ortonormal del espacio tangente al punto  $x$  en  $\mathbb{R}^{2d}$  (que también es  $\mathbb{R}^{2d}$ ) así que consideramos la base  $\{e_1, \dots, e_{2d}\}$  con  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  donde 1 ocupa la posición  $i$ -ésima. Calculamos:

$$\begin{aligned}
D\varphi(x)e_1 &= g'(\|x\|) \frac{x \langle x, e_1 \rangle}{\|x\|^2} + g(\|x\|) \frac{e_1 \|x\| - x \frac{\langle x, e_1 \rangle}{\|x\|}}{\|x\|^2} \\
&= g'(\|x\|) \frac{(\|x\|, 0, \dots, 0)^t \langle (\|x\|, 0, \dots, 0)^t, e_1 \rangle}{\|x\|^2} \\
&\quad + g(\|x\|) \frac{e_1 \|x\| - (\|x\|, 0, \dots, 0)^t \frac{\langle (\|x\|, 0, \dots, 0)^t, e_1 \rangle}{\|x\|}}{\|x\|^2} \\
&= g'(\|x\|) \frac{(\|x\|, 0, \dots, 0)^t \|x\|}{\|x\|^2} + g(\|x\|) \frac{e_1 \|x\| - (\|x\|, 0, \dots, 0)^t \frac{\|x\|}{\|x\|}}{\|x\|^2} \\
&= g'(\|x\|) e_1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(D\varphi(x)e_i)_{i \neq 1} &= g'(\|x\|) \frac{x \langle x, e_i \rangle}{\|x\|^2} + g(\|x\|) \frac{e_i \|x\| - x \frac{\langle x, e_i \rangle}{\|x\|}}{\|x\|^2} \\
&= g'(\|x\|) \frac{(\|x\|, 0, \dots, 0)^t \langle (\|x\|, 0, \dots, 0)^t, e_i \rangle}{\|x\|^2} \\
&\quad + g(\|x\|) \frac{e_i \|x\| - (\|x\|, 0, \dots, 0)^t \frac{\langle (\|x\|, 0, \dots, 0)^t, e_i \rangle}{\|x\|}}{\|x\|^2} \\
&= g(\|x\|) \frac{e_i \|x\|}{\|x\|^2} \\
&= \frac{g(\|x\|)}{\|x\|} e_i.
\end{aligned}$$

Podemos observar que la imagen de los vectores de la base estándar de  $\mathbb{R}^{2d}$  a través de la diferencial de  $\varphi$  en un punto  $x$  son ellos mismos multiplicados por un escalar. Dicho escalar, además, nunca es nulo, puesto que si  $g'(\|x\|) = 0$  para algún  $x$ , entonces la función  $g$  no sería monótona creciente. Por otro lado,  $g(\|x\|)$  sólo vale 0 en el punto 0. Luego, podemos concluir que  $\ker(D\varphi(x)) = 0$  y podemos tomar como base de  $\ker(D\varphi(x))^\perp$  la base estándar de  $\mathbb{R}^{2d}$ . Tenemos, por el Teorema B.0.6 y el Corolario 3.3.4, que para cada  $x \in \mathbb{R}^{2d}$  podemos escribir

el jacobiano de  $\varphi(x)$  como:

$$\begin{aligned}
\text{NJac}\varphi(x) &= \text{NJac}\varphi(\theta_x(x)) = \sqrt{\det \left( \langle D\varphi(x)e_i, D\varphi(x)e_j \rangle \right)_{i,j=0,\dots,2d}} \\
&= \sqrt{\det \begin{pmatrix} (g'(\|x\|))^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{g(\|x\|)}{\|x\|}\right)^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \left(\frac{g(\|x\|)}{\|x\|}\right)^2 \end{pmatrix}} \\
&= \sqrt{(g'(\|x\|))^2 \left(\frac{g(\|x\|)}{\|x\|}\right)^{2(2d-1)}} \\
&= g'(\|x\|) \left(\frac{g(\|x\|)}{\|x\|}\right)^{2d-1},
\end{aligned}$$

donde  $\theta_x$  es la isometría definida en la Proposición B.0.7. □

**Proposición 3.3.8.** Sean  $L \geq 0$ ,  $d \geq 1$ ,  $g : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$  como en la Definición 3.3.1 y  $N$  de la forma  $N = \binom{d+L}{d}$ . Entonces,  $\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}$  es un proceso de puntos determinantal en  $\mathbb{S}^{2d}$  con núcleo asociado

$$K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p, q) = \frac{Nd!(1 + \langle z, w \rangle)^L R(\|z\|)R(\|w\|)}{\pi^d 2^{2d}}, \quad (3.2)$$

donde  $z = \varphi_g^{-1}(\pi(p))$ ,  $w = \varphi_g^{-1}(\pi(q))$  y

$$R(t) = \frac{(g(t)^2 + 1)^d t^{d-\frac{1}{2}}}{\sqrt{g'(t)g(t)^{d-\frac{1}{2}}(1+t^2)^{\frac{d+L+1}{2}}}}.$$

*Demostración.* Por la regla de la cadena del Jacobiano normal (Lema B.0.5), sabemos que

$$\text{NJac}(\pi^{-1} \circ \varphi)(z) = \text{NJac}(\pi^{-1})(\varphi(z))\text{NJac}(\varphi)(z).$$

Así que, utilizando los resultados de los lemas 3.2.6 y 3.3.7 tenemos

$$\text{NJac}(\pi^{-1} \circ \varphi)(z) = \left( \frac{2}{\|\varphi(z)\|^2 + 1} \right)^{2d} g'(\|z\|) \left( \frac{g(\|z\|)}{\|z\|} \right)^{2d-1}.$$

Nos fijamos en que  $\|\varphi(z)\| = \|g(\|z\|)\frac{z}{\|z\|}\| = \|g(\|z\|)\|$ , por lo tanto, la expresión anterior se reduce a:

$$\text{NJac}(\pi^{-1} \circ \varphi)(z) = \left( \frac{2}{\|g(\|z\|)\|^2 + 1} \right)^{2d} g'(\|z\|) \left( \frac{g(\|z\|)}{\|z\|} \right)^{2d-1}.$$

Por la Proposición 1.3.5,

$$\begin{aligned}
K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N)}(p, q) &= \frac{K_{\mathbb{C}^d}^{(N)}((\pi^{-1} \circ \varphi)^{-1}(p), (\pi^{-1} \circ \varphi)^{-1}(q))}{\sqrt{|\text{NJac}((\pi^{-1} \circ \varphi)((\pi^{-1} \circ \varphi)^{-1}(p)))\text{NJac}((\pi^{-1} \circ \varphi)((\pi^{-1} \circ \varphi)^{-1}(q)))|}} \\
&= \frac{K_{\mathbb{C}^d}^{(N)}(z, w)}{\sqrt{|\text{NJac}((\pi^{-1} \circ \varphi)(z))\text{NJac}((\pi^{-1} \circ \varphi)(w))|}} \\
&= \frac{K_{\mathbb{C}^d}^{(N)}(z, w)}{\sqrt{\left| \left( \frac{2}{\|g(\|z\|)\|^2+1} \right)^{2d} g'(\|z\|) \left( \frac{g(\|z\|)}{\|z\|} \right)^{2d-1} \left( \frac{2}{\|g(\|w\|)\|^2+1} \right)^{2d} g'(\|w\|) \left( \frac{g(\|w\|)}{\|w\|} \right)^{2d-1} \right|}} \\
&= \frac{K_{\mathbb{C}^d}^{(N)}(z, w)(g(\|z\|)^2 + 1)^d \|z\|^{\frac{2d-1}{2}} (g(\|w\|)^2 + 1)^d \|w\|^{\frac{2d-1}{2}}}{2^{2d} \sqrt{g'(\|z\|)g(\|z\|)^{\frac{2d-1}{2}}} \sqrt{g'(\|w\|)g(\|w\|)^{\frac{2d-1}{2}}}} \\
&= \frac{Nd!}{\pi^d 2^{2d}} \frac{(1 + \langle z, w \rangle)^L (g(\|z\|)^2 + 1)^d \|z\|^{\frac{2d-1}{2}} (g(\|w\|)^2 + 1)^d \|w\|^{\frac{2d-1}{2}}}{\sqrt{g'(\|z\|)g(\|z\|)^{\frac{2d-1}{2}}} \sqrt{g'(\|w\|)g(\|w\|)^{\frac{2d-1}{2}}} (1 + \|z\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}} (1 + \|w\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}}}.
\end{aligned}$$

□

Una situación ideal se da con  $g = Id$  y  $d = 1$ , en la cual recuperamos el spherical ensemble original de Krihsnapur y  $|K_{\mathbb{S}^2}^{(N)}(p, q)|^2$  sólo depende de  $\|p - q\|$ . Nos gustaría que  $|K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N)}(p, q)|^2$  dependiera solamente de  $\|p - q\|$ , es decir, que el núcleo sea isométrico para todo  $d \geq 1$ . Y eso motivará nuestra definición de la función  $g$ .

**Proposición 3.3.9.** *Para cada  $d \in \mathbb{N}$  existe una única función  $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  de clase  $\mathcal{C}^\infty$ , creciente, con  $g(0) = 0$  y  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$  que hace  $K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N)}(p, p)$  constante y viene dada por:*

$$I_{\frac{g^2}{1+g^2}}(d, d) = \left( \frac{t^2}{t^2 + 1} \right)^d,$$

donde  $I_x(a, b)$  es la función beta incompleta regularizada. Se puede consultar su definición en el apéndice A.

*Demostración.* Comenzamos demostrando la unicidad. Por el Corolario 1.3.4 sabemos que todo proceso de puntos determinantal en  $\mathbb{S}^{2d}$  definido por un núcleo  $K(p, q)$  homogéneo según la Definición 1.3.7 verifica

$$K(p, p) = \frac{N}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{2d})} = \frac{N\Gamma(d + \frac{1}{2})}{2\pi^{d+\frac{1}{2}}}, \quad (3.3)$$

para todo  $p \in \mathbb{S}^d$ . En nuestro caso podemos calcular  $K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N)}(p, p)$  a través de la fórmula (3.2), gracias a la cual obtenemos:

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N)}(p, p) &= \frac{Nd!}{\pi^d 2^{2d}} \frac{(1 + \langle z, z \rangle)^L (g(\|z\|)^2 + 1)^d \|z\|^{\frac{2d-1}{2}} (g(\|z\|)^2 + 1)^d \|z\|^{\frac{2d-1}{2}}}{\sqrt{g'(\|z\|)} g(\|z\|)^{\frac{2d-1}{2}} \sqrt{g'(\|z\|)} g(\|z\|)^{\frac{2d-1}{2}} (1 + \|z\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}} (1 + \|z\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}}} \\ &= \frac{Nd!}{\pi^d 2^{2d}} \frac{(1 + \|z\|^2)^L (g(\|z\|)^2 + 1)^{2d} \|z\|^{2d-1}}{g'(\|z\|) g(\|z\|)^{2d-1} (1 + \|z\|^2)^{d+L+1}} \\ &= \frac{Nd!}{\pi^d 2^{2d}} \frac{(g(\|z\|)^2 + 1)^{2d} \|z\|^{2d-1}}{g'(\|z\|) g(\|z\|)^{2d-1} (1 + \|z\|^2)^{d+1}}. \end{aligned}$$

Como vemos,  $K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N)}(p, p)$  depende sólo de una variable  $\|z\| \in [0, \infty)$ , para hacer la notación más sencilla, sea  $\|z\| = t$ ,

$$K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N)}(p, p) = \frac{Nd!}{\pi^d 2^{2d}} \frac{(g(t)^2 + 1)^{2d} t^{2d-1}}{g'(t) g(t)^{2d-1} (1 + t^2)^{d+1}}. \quad (3.4)$$

Si igualamos las ecuaciones (3.3) y (3.4) obtenemos

$$K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N)}(p, p) = \frac{Nd!}{\pi^d 2^{2d}} \frac{(g(t)^2 + 1)^{2d} t^{2d-1}}{g'(t) g(t)^{2d-1} (1 + t^2)^{d+1}} = \frac{N\Gamma\left(\frac{2d+1}{2}\right)}{2\pi^{\frac{2d+1}{2}}}.$$

Así que sólo tenemos que resolver la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\sqrt{\pi} d!}{2^{2d-1} \Gamma\left(\frac{2d+1}{2}\right)} \frac{(g(t)^2 + 1)^{2d} t^{2d-1}}{g(t)^{2d-1} (1 + t^2)^{d+1}} = g'(t).$$

Lo primero que vamos a hacer es ocuparnos de las constantes. Aplicamos la fórmula de la duplicación de la función gamma [DLMF, 2015, Formula 5.5.5] (puede consultarse también en el Apéndice A.0.1) y obtenemos:

$$\frac{\sqrt{\pi} d!}{2^{2d-1} \Gamma\left(\frac{2d+1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(d) d!}{\sqrt{\pi} 2^{2d-1} 2^{1-2d} \Gamma(2d)} = \frac{d\Gamma(d)\Gamma(d)}{\Gamma(2d)} = dB(d, d),$$

donde  $B(x, y)$  es la función beta (véase el apéndice A). Ahora continuamos con la resolución de la ecuación diferencial por el método de variables separadas.

$$\begin{aligned} dB(d, d) \frac{(g(t)^2 + 1)^{2d} t^{2d-1}}{g(t)^{2d-1} (1 + t^2)^{d+1}} &= \frac{\partial g}{\partial t} \\ dB(d, d) \frac{t^{2d-1}}{(1 + t^2)^{d+1}} dt &= \frac{g(t)^{2d-1}}{(g(t)^2 + 1)^{2d}} dg \\ \int dB(d, d) \frac{t^{2d-1}}{(1 + t^2)^{d+1}} dt &= \int \frac{g(t)^{2d-1}}{(g(t)^2 + 1)^{2d}} dg. \end{aligned} \quad (3.5)$$

La integral de la izquierda se resuelve:

$$\begin{aligned} \int dB(d, d) \frac{t^{2d-1}}{(1+t^2)^{d+1}} dt &= dB(d, d) \int \frac{t^{2d-1}}{(1+t^2)^{d+1}} dt \\ &= dB(d, d) \frac{t^{2d}}{2d(t^2+1)^d} \\ &= \frac{B(d, d)}{2} \frac{t^{2d}}{(t^2+1)^d}. \end{aligned}$$

Y la de la derecha:

$$\begin{aligned} \int \frac{g^{2d-1}}{(g^2+1)^{2d}} dg &= \int_0^g \frac{s^{2d-1}}{(s^2+1)^{2d}} ds \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{1+g^2}}^1 t^{d-1} (1-t)^{d-1} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[ \int_0^1 t^{d-1} (1-t)^{d-1} dt - \int_0^{\frac{1}{1+g^2}} t^{d-1} (1-t)^{d-1} dt \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ B(d, d) - B_{\frac{1}{1+g^2}}(d, d) \right]. \end{aligned}$$

Así que tenemos

$$\frac{1}{2} \left[ B(d, d) - B_{\frac{1}{1+g^2}}(d, d) \right] = \frac{B(d, d)}{2} \frac{t^{2d}}{(t^2+1)^d}.$$

por [DLMF, 2015, Formula 8.17.4] sabemos que

$$I_x(a, b) = 1 - I_{1-x}(b, a),$$

donde  $I_x(a, b)$  es la función beta incompleta regularizada. Luego,

$$\frac{1}{2} B_{\frac{g^2}{1+g^2}}(d, d) = \frac{B(d, d)}{2} \frac{t^{2d}}{(t^2+1)^d}$$

y podemos concluir que

$$I_{\frac{g^2}{1+g^2}}(d, d) = \left( \frac{t^2}{t^2+1} \right)^d.$$

La existencia resulta trivial, pues toda función beta incompleta regularizada  $I_x(a, b)$  es la función de distribución asociada a una distribución beta, por lo tanto, es biyectiva en el intervalo  $[0, 1]$ . Además,  $\forall t \in (0, \infty)$ ,  $0 \leq \frac{t^2}{t^2+1} \leq 1$  y por lo tanto,  $0 \leq \left( \frac{t^2}{t^2+1} \right)^d \leq 1$ . Como  $I_{\frac{g^2}{1+g^2}}(d, d)$  es biyectiva en  $(0, 1)$  y  $\left( \frac{t^2}{t^2+1} \right)^d \in (0, 1)$ , para cada  $d \in \mathbb{N}$  existe un  $g$  tal que la función  $I_{\frac{g^2}{1+g^2}}(d, d) = \left( \frac{t^2}{t^2+1} \right)^d$ . Vamos a ver que además dicha  $g$  verifica las condiciones que exigimos en la Definición 3.3.1 :

- $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ : si  $t = 0 \Rightarrow I_{\frac{g^2}{1+g^2}}(d, d) = 0 \Rightarrow \frac{g^2}{1+g^2} = 0 \Rightarrow g = 0$ .

▪  $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$ :  $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{\frac{g^2}{1+g^2}}(d, d) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left( \frac{t^2}{t^2+1} \right)^d = 1$ . Ahora bien, si  $\lim_{t \rightarrow \infty} I_{\frac{g^2}{1+g^2}}(d, d) = 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{g^2}{1+g^2} = 1 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} g = \infty$ .

▪  **$g$  es creciente**: hemos visto que  $g$  verifica la siguiente ecuación diferencial

$$\frac{\sqrt{\pi} d!}{2^{2d-1} \Gamma\left(\frac{2d+1}{2}\right)} \frac{(g(t)^2 + 1)^{2d} t^{2d-1}}{g(t)^{2d-1} (1+t^2)^{d+1}} = g'(t),$$

donde podemos ver que cada término de la izquierda es positivo para  $d > 1$  y por lo tanto la derivada es positiva, con lo que la función es creciente.

Luego  $g$  verifica las condiciones de partida y así queda totalmente probada su existencia y unicidad. □

De ahora en adelante, siempre nos referiremos por  $g$  a la función definida en la Proposición 3.3.9. De nuevo en [DLMF, 2015] podemos encontrar una forma de escribir esa beta incompleta regularizada como un polinomio, así, tenemos:

$$I_x(m, n - m + 1) = \sum_{j=m}^n \binom{n}{j} x^j (1-x)^{n-j},$$

con  $n, m$  enteros positivos y  $0 \leq x < 1$ . Si tomamos  $m = d$ ,  $n = 2d - 1$  y  $x = \frac{g^2}{1+g^2}$ , tenemos:

$$I_{\frac{g^2}{1+g^2}}(d, d) = \frac{(2d-1)!}{(1+g^2)^{2d-1}} \sum_{j=d}^{2d-1} \frac{g^{2j}}{j!(2d-j-1)!}.$$

Tenemos así, para los primeros valores de  $d$ .

$$\begin{aligned} d = 2 &\Rightarrow \frac{g^6 + 3g^4}{(g^2 + 1)^3} = \frac{t^4}{(t^2 + 1)^2}. \\ d = 3 &\Rightarrow \frac{g^{10} + 5g^8 + 10g^6}{(g^2 + 1)^5} = \frac{t^6}{(t^2 + 1)^3}. \\ d = 4 &\Rightarrow \frac{g^{14} + 7g^{12} + 21g^{10} + 35g^8}{(g^2 + 1)^7} = \frac{t^8}{(t^2 + 1)^4}. \end{aligned}$$

Hemos representado los 9 primeros casos en la Gráfica 3.1. Como apuntamos anteriormente, para  $d = 1$ , esto es, para la esfera de dimensión 2, la función  $g$  es la función identidad, lo cual convierte al spherical ensemble en un caso particular del proceso aquí descrito.

**Teorema 3.3.10.** Sean  $L \geq 0$ ,  $d \geq 1$  y  $N$  de la forma  $N = \binom{d+L}{d}$ . Entonces,  $\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}$  es un proceso determinantal homogéneo en  $\mathbb{S}^{2d}$  con núcleo

$$K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N)}(p, q) = \frac{N}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{2d})} \frac{(1 + \langle z, w \rangle)^L}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{L}{2}} (1 + \|w\|^2)^{\frac{L}{2}}}$$

donde  $z = \varphi_g^{-1}(\pi(p))$ ,  $w = \varphi_g^{-1}(\pi(q))$ .

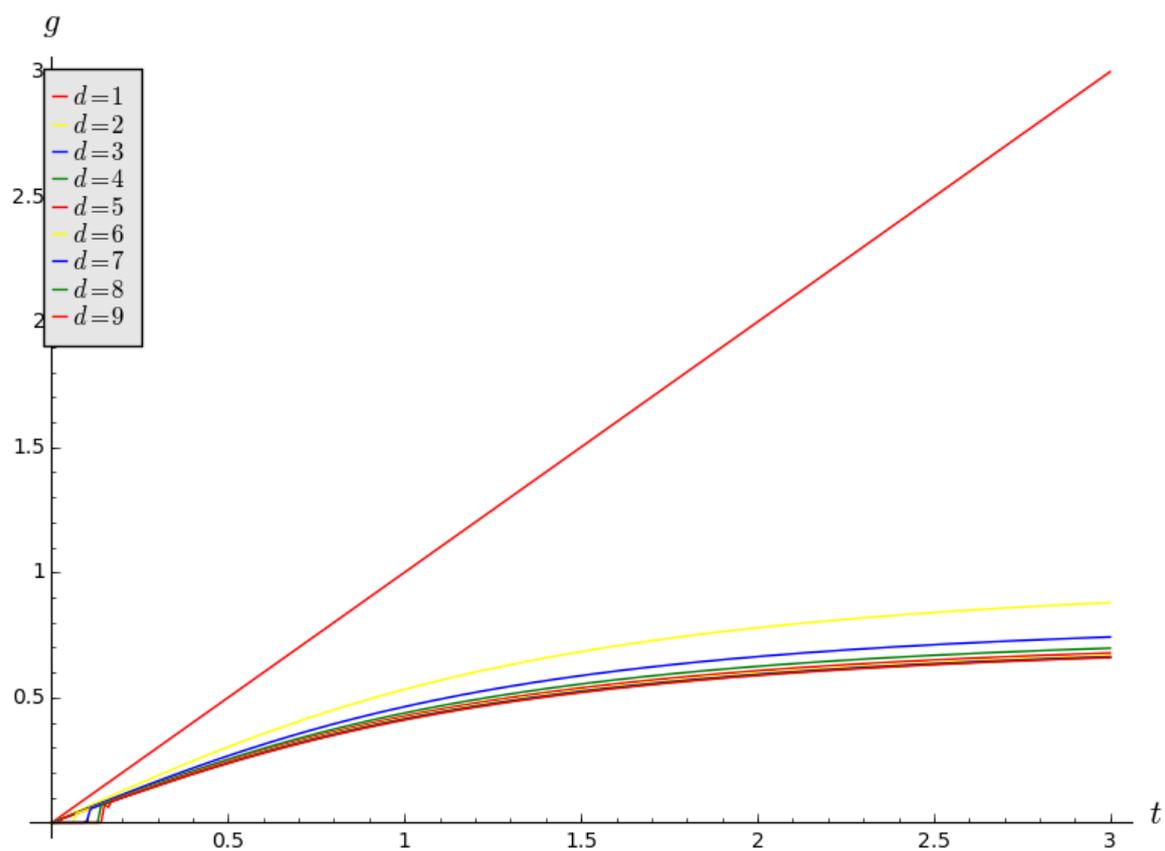


Figura 3.1: Función  $g(t)$  para distintos valores de  $d$ . Obsérvese que conforme crece  $d$  el crecimiento de  $g$  se ralentiza.

*Demostración.* Por la Proposición 3.3.8 sabemos que  $\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}$  es un proceso de puntos determinantal en  $\mathbb{S}^{2d}$  con núcleo

$$K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p, q) = \frac{Nd!(1 + \langle z, w \rangle)^L R(\|z\|)R(\|w\|)}{\pi^d 2^{2d}},$$

donde  $z = \varphi_g^{-1}(\pi(p))$ ,  $w = \varphi_g^{-1}(\pi(q))$  y

$$R(t) = \frac{(g(t)^2 + 1)^d t^{d-\frac{1}{2}}}{\sqrt{g'(t)} g(t)^{d-\frac{1}{2}} (1+t^2)^{\frac{d+L+1}{2}}}.$$

Tomamos la aplicación  $g$  dada en la Proposición 3.3.9, dicha  $g$  verifica:

$$dB(d, d) \frac{(g^2 + 1)^{2d} t^{2d-1}}{g^{2d-1} (1+t^2)^{d+1}} = g'.$$

Luego verifica:

$$\frac{(g(t)^2 + 1)^{2d} t^{2d-1}}{g(t)^{2d-1} g'(t) (1+t^2)^{d+1}} = \frac{1}{dB(d, d)}. \quad (3.6)$$

No tenemos más que sustituir (3.6) en la fórmula (3.2) y obtenemos

$$\begin{aligned} K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N)}(p, q) &= \frac{N\Gamma(d + \frac{1}{2})}{2\pi^{d+\frac{1}{2}}} \frac{(1 + \langle z, w \rangle)^L}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{L}{2}} (1 + \|w\|^2)^{\frac{L}{2}}} \\ &= \frac{N}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{2d})} \frac{(1 + \langle z, w \rangle)^L}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{L}{2}} (1 + \|w\|^2)^{\frac{L}{2}}}. \end{aligned}$$

□

### 3.4. Un proceso determinantal en $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$

A lo largo de este capítulo denotaremos por  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$  al espacio proyectivo complejo de dimensión compleja  $d$ .

Una interpretación natural del spherical ensemble consiste en considerar el problema de los autovalores generalizados del haz de matrices  $(A, B)$  descrito en la Sección 3.1 en el espacio proyectivo complejo. Esto es, considerar los puntos  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$  tales que  $\det(\alpha B - \beta A) = 0$  e identificar  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$  con la esfera de Riemann. Después basta con pasar los puntos a  $\mathbb{S}^2$  a través de una homotecia. Esta manera de enfocar el problema sugiere que el spherical ensemble puede estudiarse como un proceso natural en el espacio proyectivo complejo, lo cual nos lleva a plantearnos una generalización a espacios proyectivos de dimensión mayor. Comenzamos esta sección proponiendo pues un proceso de puntos determinantal en  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$  para cualquier  $d \geq 2$ , al cual llamaremos el conjunto proyectivo. Este proceso también puede verse como un caso específico de una construcción mucho más general propuesta por Berman en [Berman, 2014].

La distancia proyectiva entre dos puntos  $p, q \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$  viene dada por:

$$d_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}(p, q) = \sqrt{1 - \left| \left\langle \frac{p_{\mathbb{C}^{d+1}}}{\|p_{\mathbb{C}^{d+1}}\|}, \frac{q_{\mathbb{C}^{d+1}}}{\|q_{\mathbb{C}^{d+1}}\|} \right\rangle \right|^2}. \quad (3.7)$$

donde  $p_{\mathbb{C}^{d+1}}$  y  $q_{\mathbb{C}^{d+1}}$  son dos representantes cualesquiera en  $\mathbb{C}^{d+1}$  de los puntos  $p$  y  $q$ .

**Proposición 3.4.1.** Sean  $L \geq 0$ ,  $d \geq 1$  y  $r$  de la forma  $r = \binom{d+L}{d}$ . Entonces, la imagen  $\mathfrak{X}_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}^{(r)}$  de  $\mathfrak{X}_{\mathbb{C}^d}^{(r)}$  a través de la aplicación  $\psi_d$  dada en la Definición 1.1.5 es un proceso de puntos determinantal en  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$  con núcleo asociado dado por

$$\left| K_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}^{(r)}(p, q) \right| = \frac{rd!}{\pi^d} \left| \left\langle \frac{p}{\|p\|}, \frac{q}{\|q\|} \right\rangle \right|^L.$$

Llamamos a los puntos obtenidos a partir de este proceso determinantal el conjunto proyectivo.

*Demostración.* Por el Lema 1.3.5, sabemos que  $\mathfrak{X}_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}^{(r)}$  tiene un núcleo reproductor dado por

$$K_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}^{(r)}(p, q) = \frac{K_{\mathbb{C}^d}^{(r)}(\psi_d^{-1}(p), \psi_d^{-1}(q))}{\sqrt{|\text{NJac}(\psi_d)(\psi_d^{-1}(p))\text{NJac}(\psi_d)(\psi_d^{-1}(q))|}}.$$

Como demostramos en el Lema 1.1.7, el jacobiano normal de  $\psi_d$  es:

$$\text{NJac}(\psi_d)(z) = \left( \frac{1}{1 + \|z\|^2} \right)^{d+1}.$$

Así que si denotamos  $p = (1, z)$  y  $q = (1, w)$  y tenemos:

$$\begin{aligned} \left| K_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}^{(r)}(p, q) \right| &= \frac{\frac{rd!}{\pi^d} \frac{|1 + \langle \psi_d^{-1}(p), \psi_d^{-1}(q) \rangle|^L}{(1 + \|\psi_d^{-1}(p)\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}} (1 + \|\psi_d^{-1}(q)\|^2)^{\frac{d+L+1}{2}}}}{\left( \frac{1}{1 + \|\psi_d^{-1}(p)\|^2} \right)^{\frac{d+1}{2}} \left( \frac{1}{1 + \|\psi_d^{-1}(q)\|^2} \right)^{\frac{d+1}{2}}} \\ &= \frac{rd!}{\pi^d} \frac{|1 + \langle z, w \rangle|^L}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{L}{2}} (1 + \|w\|^2)^{\frac{L}{2}}} \\ &= \frac{rd!}{\pi^d} \frac{|\langle p, q \rangle|^L}{\|p\|^L \|q\|^L}. \end{aligned}$$

□

El spherical ensemble es justamente el conjunto proyectivo para  $d = 1$  si identificamos  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$  con la esfera de Riemann y trasladamos el proceso a la esfera unidad.

### 3.5. Un proceso de puntos en $\mathbb{S}^{2d+1}$

A partir del conjunto proyectivo podemos obtener un conjunto de puntos bien distribuido en las esferas de dimensión impar. Para ello no tenemos más que considerar  $r$  puntos del conjunto proyectivo. Después, a cada punto de los anteriores le asociamos  $k$  representantes afines, equiespaciados y de norma 1. Permitimos que cada conjunto de representantes de un mismo punto pueda rotar un ángulo aleatorio. Como resultado, obtenemos  $rk$  puntos en la esfera de dimensión impar  $\mathbb{S}(\mathbb{C}^{d+1}) \cong \mathbb{S}^{2d+1}$ .

**Definición 3.5.1.** Dados los enteros  $d, k \geq 1, L \geq 0$ , sea  $r = \binom{d+L}{d}$  y  $N = kr$ . Sean  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$  puntos del conjunto proyectivo  $\mathfrak{X}_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}^{(r)}$ . Escogemos, para cada  $x_i$ , un representante afín, que denotaremos por la misma letra. Sean  $\theta_1, \dots, \theta_r \in [0, 2\pi)$  un conjunto de números escogidos de forma aleatoria y uniforme, definimos entonces

$$y_i^j = e^{i(\theta_i + \frac{2\pi j}{k})} x_i, \quad 1 \leq i \leq r, 0 \leq j \leq k-1. \quad (3.8)$$

Denotaremos este proceso de puntos por  $\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d+1}}^{(k,r)}$ .

Otra manera de describir este conjunto consiste en identificar cada punto proyectivo con un círculo máximo en la esfera  $\mathbb{S}^{2d+1}$  a través de la fibración de Hopf generalizada. De esta forma, tenemos circunferencias bien repartidas en la esfera  $\mathbb{S}^{2d+1}$  en vez de puntos bien repartidos. Como vimos en la sección 1.1.1, la fibración de Hopf generalizada es un fibrado principal, es decir, cada fibra  $\mathbb{S}^1$  es un grupo de Lie que actúa en  $\mathbb{S}^{2d+1}$  dando como resultado las clases  $\mathbb{S}^{2d+1}/\mathbb{S}^1 \approx \mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$  y por ello no podemos escoger un punto en cada fibra. Si pudieramos elegir un punto en cada fibra, entonces tendríamos una sección  $\sigma : \mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1}) \rightarrow \mathbb{S}^{2d+1}$  y el fibrado sería trivial, es decir, el producto  $\mathbb{S}^{2d+1} \approx \mathbb{S}^1 \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$ , lo cual es imposible, ya que los grupos fundamentales no coinciden:  $\{0\} \neq \mathbb{Z} \times \Pi_1(\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1}))$ . Así que ahora, en cada circunferencia en vez de tomar  $K$  puntos equiespaciados fijos, permitimos que estos roten una fase aleatoria. De esta forma obtenemos el mismo conjunto de puntos. Esta forma de llevar puntos de  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$  a  $\mathbb{S}^{2d+1}$  es una solución al Problema 3.2.10.

Obtenemos los conjuntos de puntos en  $\mathbb{S}^{2d+1}$  a través de un proceso determinantal y otro aleatorio pero con una estructura mucho más rígida: permitimos una rotación aleatoria de las raíces de la unidad. Esta composición de procesos nos hace perder la estructura determinantal del primer proceso, con lo cual los puntos obtenidos en la esfera serán aleatorios pero no determinantaes.

### 3.6. Nuevas cotas para la energía de Riesz

Los procesos de puntos (determinantales o no) que hemos ido describiendo en las secciones anteriores nos proporcionan nuevas cotas para ciertas familias de energías. Como explicamos

en la Sección 1.3.2, el cálculo de la asintótica de la energía asociada a una familia de conjuntos de puntos es una operación extremadamente complicada. Sin embargo, el cálculo de la asintótica de la esperanza de dicha energía puede resultar mucho más sencillo. Así pues, utilizaremos la aleatoriedad de nuestros puntos y (cuando sea posible) su estructura determinantal para calcular varias esperanzas. En particular, para el proceso determinantal en  $\mathbb{S}^{2d}$  descrito en la Proposición 3.3.8 damos una cota para la asintótica de su  $s$ -energía para  $0 < s < 2d$ . Para el conjunto de puntos en las esferas de dimensión impar descrito en la Definición 3.5.1 podemos calcular exactamente su esperanza obteniendo una asintótica para las  $2m$ -energías, con  $m \in \mathbb{N}$  y una cota en el resto de valores positivos de  $s$ . Además, calculamos exactamente la esperanza de la energía de Green de los puntos que forman el conjunto proyectivo. Con estos resultados, colaboramos en la resolución del Problema 1.2.2.

Las mejores cotas para la  $s$ -energía mínima en esferas de dimensión  $d > 2$  están dadas por el harmonic ensemble (véase la Sección 1.3.6). Si comparamos nuestra asintótica con la del harmonic ensemble podemos concluir que para el caso de dimensión par, la asintótica del harmonic ensemble es mejor que nuestra cota, en el sentido de que es más parecida a la energía mínima; sin embargo, para las esferas de dimensión impar, nuestros puntos aportan una cota mejor. Como no hay muchos trabajos sobre la energía discreta de Green en  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$ , no podemos comparar el valor de nuestra asintótica con otra familia de puntos, así que la comparamos con puntos tomados de forma uniforme en  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$ .

### 3.6.1. Esferas de dimensión par

Recordamos que el núcleo del proceso determinantal  $\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}$  descrito en el Teorema 3.3.10 es homogéneo pero no isotrópico, lo cual dificulta mucho el cálculo de las esperanzas. La cota que proponemos es suficientemente fina en el sentido de que el primer término en la asintótica es el correcto y el segundo tiene el orden correcto. Llegar a esa finura en la cota nos exige tener mucho cuidado en los cálculos, por lo que las pruebas que nos llevan al resultado principal (Teorema 3.6.16) son largas y en ocasiones complicadas. De hecho, junto a los cálculos aquí contenidos, hemos tenido que desarrollar una nueva desigualdad que involucra funciones betas incompletas que no hemos encontrado en la literatura y que puede consultarse en el Apéndice A. Comenzamos definiendo la siguiente aplicación.

**Definición 3.6.1.** Llamamos  $\theta$  a la aplicación

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{C}^d &\longrightarrow \mathbb{S}^{2d} \\ x &\mapsto \frac{(x, 1)}{\|(x, 1)\|}, \end{aligned}$$

donde  $\mathbb{C}^d$  y  $\mathbb{S}^{2d}$  tienen dimensión  $2d$  real.

**Proposición 3.6.2.** Sean  $p, q$  puntos de  $\mathbb{S}^{2d}$ , entonces

$$\left( \frac{|K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p, q)|}{K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p, p)} \right)^2 \geq \max \{ (1 - \|\phi(p) - \phi(q)\|^2)^L, 0 \},$$

donde  $\phi(x) = (\theta \circ \varphi^{-1} \circ \pi)(x)$  es una aplicación que lleva  $\mathbb{S}^{2d}$  a su mitad superior y  $K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}$  es el núcleo del proceso  $\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}$ .

*Demostración.* Recordemos que

$$K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p, q) = \frac{N\Gamma(d + \frac{1}{2})}{d\pi^{d+\frac{1}{2}}} \frac{(1 + \langle z, w \rangle)^L}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{L}{2}}(1 + \|w\|^2)^{\frac{L}{2}}}$$

$K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}$  es homogéneo, así que

$$\frac{K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p, q)}{K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p, p)} = \frac{(1 + \langle z, w \rangle)^L}{(1 + \|z\|^2)^{\frac{L}{2}}(1 + \|w\|^2)^{\frac{L}{2}}}.$$

Entonces, utilizando la desigualdad del Lema 1.1.4 obtenemos

$$\begin{aligned} \left( \frac{|K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p, q)|}{K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p, p)} \right)^2 &= \left( \frac{|1 + \langle z, w \rangle|^2}{(1 + \|z\|^2)(1 + \|w\|^2)} \right)^L = \left| \frac{\langle (z, 1), (w, 1) \rangle}{\sqrt{1 + \|z\|^2}\sqrt{1 + \|w\|^2}} \right|^{2L} \\ &= \left| \left\langle \frac{(z, 1)}{\|(z, 1)\|}, \frac{(w, 1)}{\|(w, 1)\|} \right\rangle \right|^{2L} \geq \frac{4}{d^2} \left( 1 - \left\| \frac{(z, 1)}{\|(z, 1)\|} - \frac{(w, 1)}{\|(w, 1)\|} \right\|^2 \right)^L \\ &= \left( 1 - \left\| \frac{((\pi^{-1} \circ \varphi)^{-1}(p), 1)}{\|((\pi^{-1} \circ \varphi)^{-1}(p), 1)\|} - \frac{((\pi^{-1} \circ \varphi)^{-1}(q), 1)}{\|((\pi^{-1} \circ \varphi)^{-1}(q), 1)\|} \right\|^2 \right)^L \\ &= (1 - \|\phi(p) - \phi(q)\|^2)^L. \end{aligned}$$

□

**Lema 3.6.3.** Sean  $p, q \in \mathbb{S}^{2d}$ , entonces la siguiente desigualdad se verifica.

$$\|\phi(p) - \phi(q)\| \leq (\|p - q\| + \|p - q\|^3) \sup \|D\phi(x)\|,$$

donde tomamos el supremo de los  $x$  contenidos en cualquier geodésica entre  $p$  y  $q$ .

*Demostración.* Dados dos puntos  $p, q \in \mathbb{S}^{2d}$ , sea  $\alpha = d_{\mathbb{S}^{2d}}(p, q)$  donde denotamos por  $d_{\mathbb{S}^{2d}}$  la distancia esférica, y sea  $\gamma$  cualquier segmento geodésico entre  $p$  y  $q$ . Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \|\phi(p) - \phi(q)\| &= \|\phi(\gamma(0)) - \phi(\gamma(\alpha))\| \leq \left\| \int_0^\alpha D\phi(\gamma(t))\dot{\gamma}(t) dt \right\| \\ &\leq \int_0^\alpha \|D\phi(\gamma(t))\dot{\gamma}(t)\| dt \leq \alpha \sup \|D\phi(x)\|. \end{aligned}$$

donde  $x$  pertenece a cualquier segmento geodésico entre  $p$  y  $q$ . Nos fijamos en que  $2 \arcsin(x/2) \leq x + x^3$  para  $0 \leq x \leq 2$ . Para demostrarlo basta con ver que ambas funciones se anulan en  $x = 0$ , sus derivadas son positivas en el intervalo  $(0, 2)$  y que la derivada de  $2 \arcsin(x/2)$  es más pequeña que la de  $x + x^3$  en todo el intervalo  $(0, 2)$ . Por lo tanto podemos concluir

$$\alpha = d_{\mathbb{S}^{2d}}(p, q) = 2 \arcsin\left(\frac{\|p - q\|}{2}\right) \leq \|p - q\| + \|p - q\|^3.$$

□

**Lema 3.6.4.** *Consideremos la aplicación*

$$\begin{aligned} \varphi^{-1} : \mathbb{R}^{2d} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2d} \\ y &\mapsto \frac{g^{-1}(\|y\|)}{\|y\|} y \end{aligned}$$

definida en la demostración de la Proposición 3.3.2, entonces su aplicación diferencial viene dada por

$$D\varphi^{-1}(y)\dot{y} = (g^{-1})'(\|y\|) \frac{y \langle y, \dot{y} \rangle}{\|y\|^2} + g^{-1}(\|y\|) \frac{\dot{y} \|y\| - y \frac{\langle y, \dot{y} \rangle}{\|y\|}}{\|y\|^2}.$$

*Demostración.* Para realizar este cálculo, utilizaremos la definición de aplicación diferencial:

$$D\varphi^{-1}(y)\dot{y} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \varphi^{-1}(y + t\dot{y}) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} g^{-1}(\|y + t\dot{y}\|) \frac{y + t\dot{y}}{\|y + t\dot{y}\|}.$$

Como vimos en el Lema 3.3.5,  $D(\|\cdot\|)(y)\dot{y} = \frac{\langle y, \dot{y} \rangle}{\|y\|}$ , luego

$$\begin{aligned} D\varphi^{-1}(y)\dot{y} &= (g^{-1})'(\|y\|) \frac{\langle y, \dot{y} \rangle}{\|y\|} \frac{y}{\|y\|} + g^{-1}(\|y\|) \frac{\dot{y} \|y\| - y \frac{\langle y, \dot{y} \rangle}{\|y\|}}{\|y\|^2} \\ &= (g^{-1})'(\|y\|) \frac{y \langle y, \dot{y} \rangle}{\|y\|^2} + g^{-1}(\|y\|) \frac{\dot{y} \|y\| - y \frac{\langle y, \dot{y} \rangle}{\|y\|}}{\|y\|^2}. \end{aligned}$$

□

**Corolario 3.6.5.** *Si  $y \perp \dot{y}$  entonces la aplicación diferencial de  $\varphi^{-1}$  en el punto  $y$  viene dada por*

$$D\varphi^{-1}(y)\dot{y} = \frac{\|g^{-1}(y)\|}{\|y\|} \dot{y}.$$

**Lema 3.6.6.** *Sea  $\theta$  la aplicación definida en la Definición 3.6.1 entonces su aplicación diferencial en el punto  $x \in \mathbb{R}^{2d}$  viene dada por*

$$D\theta(x)\dot{x} = \frac{(\dot{x}, 0) \|(x, 1)\| - (x, 1) \frac{\langle (x, 1), (\dot{x}, 0) \rangle}{\|(x, 1)\|}}{\|(x, 1)\|^2}.$$

*Demostración.* De nuevo aplicamos la definición de aplicación diferencial.

$$D\theta(x)\dot{x} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \theta(x + t\dot{x}) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{(x + t\dot{x}, 1)}{\|(x + t\dot{x}, 1)\|} = \frac{(\dot{x}, 0)\|(x, 1)\| - (x, 1) \frac{\langle (x, 1), (\dot{x}, 0) \rangle}{\|(x, 1)\|}}{\|(x, 1)\|^2}.$$

□

**Corolario 3.6.7.** *En el caso  $x \perp \dot{x}$ , la aplicación diferencial de  $\theta$  queda reducida a*

$$D\theta(x)\dot{x} = \frac{(\dot{x}, 0)}{\|(x, 1)\|}.$$

**Proposición 3.6.8.** *Sea  $p \neq \mathbf{n} = (0, 0, \dots, 0, 1)$  un punto cualquiera de la esfera  $\mathbb{S}^{2d}$ . Consideremos el conjunto  $\{\dot{p}^i\}_{i=1}^{2d-1}$  de vectores de norma 1, ortogonales entre sí, ortogonales a  $p$  y tales que su coordenada  $\dot{p}_{2d+1}^i = 0$ . Entonces el conjunto  $\left\{ \dot{p}^1, \dots, \dot{p}^{2d-1}, \frac{\mathbf{n} - p_{2d+1}p}{\sqrt{1 - p_{2d+1}^2}} \right\}$  es una base del espacio tangente a  $\mathbb{S}^{2d}$  en el punto  $p$ .*

*Demostración.* Solo hace falta comprobar que  $\frac{\mathbf{n} - p_{2d+1}p}{\sqrt{1 - p_{2d+1}^2}}$  es ortogonal a  $p$  y a cada  $\dot{p}^i$ ,  $1 \leq i \leq 2d - 1$  y que su norma es 1.

$$\begin{aligned} \left\langle p, \frac{\mathbf{n} - p_{2d+1}p}{\sqrt{1 - p_{2d+1}^2}} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1 - p_{2d+1}^2}} (\langle p, \mathbf{n} \rangle - p_{2d+1} \langle p, p \rangle) \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - p_{2d+1}^2}} (p_{2d+1} - p_{2d+1}) = 0, \\ \left\langle \dot{p}^i, \frac{\mathbf{n} - p_{2d+1}p}{\sqrt{1 - p_{2d+1}^2}} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{1 - p_{2d+1}^2}} (\langle \dot{p}^i, \mathbf{n} \rangle - p_{2d+1} \langle \dot{p}^i, p \rangle) = 0, \\ \left\langle \frac{\mathbf{n} - p_{2d+1}p}{\sqrt{1 - p_{2d+1}^2}}, \frac{\mathbf{n} - p_{2d+1}p}{\sqrt{1 - p_{2d+1}^2}} \right\rangle &= \frac{1}{1 - p_{2d+1}^2} \langle \mathbf{n} - p_{2d+1}p, \mathbf{n} - p_{2d+1}p \rangle \\ &= \frac{1 - p_{2d+1}^2 - p_{2d+1}^2 + p_{2d+1}^2}{1 - p_{2d+1}^2} = \frac{1 - p_{2d+1}^2}{1 - p_{2d+1}^2} = 1. \end{aligned}$$

□

**Proposición 3.6.9.** *Dados los  $\dot{p}^i$  definidos en la Proposición 3.6.8 tenemos:*

$$\begin{aligned} \|D\phi(p)\dot{p}^i\| &= \frac{g^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right)}{\sqrt{1 - p_{2d+1}^2} \sqrt{1 + \left( g^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right) \right)^2}}, \quad 1 \leq i \leq 2d - 1 \\ \left\| D\phi(p) \frac{\mathbf{n} - p_{2d+1}p}{\sqrt{1 - p_{2d+1}^2}} \right\| &= \frac{(g^{-1})' \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right)}{\left( 1 + g^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right) \right)^2 (1 - p_{2d+1})}, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{n} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^{2d}$  y la aplicación  $\phi$  está definida en la Proposición 3.6.2.

*Demostración.* Recordamos que  $\phi(x) = (\theta \circ \varphi^{-1} \circ \pi)(x)$ . Consideremos entonces la aplicación

$$D\phi(p) : T_p\mathbb{S}^{2d} \longrightarrow T_{\phi(p)}\mathbb{S}^{2d}$$

donde  $T_p\mathbb{S}^{2d}$  es el espacio tangente a  $\mathbb{S}^{2d}$  en el punto  $p$ . Por la regla de la cadena tenemos que

$$D\phi(p)\dot{p} = D(\theta \circ \varphi^{-1} \circ \pi)(p)\dot{p} = D\theta(\varphi^{-1}(\pi(p)))D\varphi^{-1}(\pi(p))D\pi(p)\dot{p}$$

donde

$$\begin{aligned} p^i(p) &= \frac{1}{1-p_{2d+1}}(p_1, \dots, p_{2d}) \Rightarrow \|\pi(p)\| = \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}}, \\ \varphi^{-1}(\pi(p)) &= \frac{g^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}}\right)}{\sqrt{1-p_{2d+1}^2}}(p_1, \dots, p_{2d}) \Rightarrow \|\varphi^{-1}(\pi(p))\| = g^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}}\right). \end{aligned}$$

Por el Lema 3.2.5 sabemos que:

- $D\pi(p)\dot{p}^i = \frac{1}{1-p_{2d+1}}(\dot{p}_1^i, \dots, \dot{p}_{2d}^i)$ .
- $D\pi(p) \frac{\mathbf{n}-p_{2d+1}p}{\sqrt{1-p_{2d+1}^2}} = \frac{1}{(1-p_{2d+1})\sqrt{1-p_{2d+1}^2}}(p_1, \dots, p_{2d})$ .

Como  $\dot{p}^i$  tiene la última coordenada nula y  $p \perp \dot{p}^i$ , entonces si consideramos los vectores resultantes de la proyección en el subespacio de las primeras  $2d$  coordenadas (o lo que es equivalente, si eliminamos la última coordenada),  $(p_1, \dots, p_{2d})$  sigue siendo ortogonal a  $(\dot{p}_1^i, \dots, \dot{p}_{2d}^i)$ . La aplicación  $\pi$  es precisamente esa proyección modificando la norma de los vectores resultantes y la aplicación diferencial de  $\pi$  en el punto  $p$  vuelve a ser simplemente una modificación de la norma del vector que deja invariable su dirección. Por lo tanto, como  $p \perp \dot{p}^i$  entonces  $\pi(p) \perp D\pi(p)\dot{p}^i$  y estamos en condiciones de aplicar el Corolario 3.6.5 obteniendo:

$$D\varphi^{-1}(\pi(p))D\pi(p)\dot{p}^i = \frac{g^{-1}(\|\pi(p)\|)}{\|\pi(p)\|} D\pi(p)\dot{p}^i = \frac{g^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}}\right)}{\sqrt{1-p_{2d+1}^2}}(\dot{p}_1^i, \dots, \dot{p}_{2d}^i).$$

Para el vector  $\frac{\mathbf{n}-p_{2d+1}p}{\sqrt{1-p_{2d+1}^2}}$  utilizamos directamente el Lema 3.6.4 y obtenemos:

$$D\varphi^{-1}(\pi(p))D\pi(p) \frac{\mathbf{n}-p_{2d+1}p}{\sqrt{1-p_{2d+1}^2}} = \frac{(g^{-1})'\left(\sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}}\right)}{(1-p_{2d+1})\sqrt{1-p_{2d+1}^2}}(p_1, \dots, p_{2d}).$$

Ahora ya sólo nos queda el último cálculo, para el cual utilizaremos el Lema 3.6.6. Por una parte tenemos:

$$D\theta(\varphi^{-1}(\pi(p)))D\varphi^{-1}(\pi(p))D\pi(p)\dot{p}^i = \frac{g^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}}\right)(\dot{p}_1^i, \dots, \dot{p}_{2d}^i, 0)}{\sqrt{1-p_{2d+1}^2}\sqrt{1+\left(g^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}}\right)\right)^2}} \quad (3.9)$$

y por otra:

$$\begin{aligned}
& D\theta(\varphi^{-1}(\pi(p)))D\varphi^{-1}(\pi(p))D\pi(p)\frac{\mathbf{n} - p_{2d+1}\mathbf{p}}{\sqrt{1 - p_{2d+1}^2}} = \\
& \frac{(g^{-1})' \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right) \left( p_1, \dots, p_{2d}, -g^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right) \sqrt{1 - p_{2d+1}^2} \right)}{\sqrt{1 - p_{2d+1}^2} (1 - p_{2d+1}) \sqrt{1 + \left( g^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right) \right)^2}^3}. \tag{3.10}
\end{aligned}$$

Calculamos cada una de las normas:

$$\begin{aligned}
& \bullet \left\| D\phi(p)\dot{p}^i \right\| = \frac{g^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right)}{\sqrt{1 - p_{2d+1}^2} \sqrt{1 + \left( g^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right) \right)^2}}. \\
& \bullet \left\| D\phi(p)\frac{\mathbf{n} - p_{2d+1}\mathbf{p}}{\sqrt{1 - p_{2d+1}^2}} \right\| = \frac{(g^{-1})' \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right)}{\left( 1 + g^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right) \right)^2 (1 - p_{2d+1})}.
\end{aligned}$$

□

**Corolario 3.6.10.** *La aplicación  $D\phi(p)$  evaluada en la base  $\left\{ \dot{p}^1, \dots, \dot{p}^{2d-1}, \frac{\mathbf{n} - p_{2d+1}\mathbf{p}}{\sqrt{1 - p_{2d+1}^2}} \right\}$  conserva la ortogonalidad de los vectores.*

*Demostración.* Es una consecuencia directa de las fórmulas (3.9) y (3.10). □

**Lema 3.6.11.** *Fijamos un  $d \geq 1$ . Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Para todo  $p = (p_1, \dots, p_{2d+1}) \in \mathbb{S}^{2d}$  tenemos*

$$\left\| D\phi(p)\dot{p}^i \right\| \geq \left\| D\phi(p)\frac{\mathbf{n} - p_{2d+1}\mathbf{p}}{\sqrt{1 - p_{2d+1}^2}} \right\|,$$

*donde los  $\dot{p}^i$ ,  $1 \leq i \leq 2d - 1$ , están definidos en la Proposición 3.6.8 y  $\mathbf{n} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^{2d}$ .*

2. *Para todo  $s \in (0, 1)$  se verifica*

$$dB_s(d, d)\sqrt{1 - (\mathbf{I}_s(d, d))^{\frac{1}{d}}} \geq s^d(1 - s)^d,$$

*donde  $B_s(d, d)$  es una beta incompleta (para la definición de beta incompleta, puede consultarse el Apéndice A).*

*Demostración.* Por la Proposición 3.3.9 sabemos que

$$g^{-1}(s) = \left( \frac{I_{\frac{s^2}{1+s^2}}(d, d)^{1/d}}{1 - I_{\frac{s^2}{1+s^2}}(d, d)^{1/d}} \right)^{1/2}.$$

En nuestro caso  $s = \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}}$ , así que

$$\frac{s^2}{1+s^2} = \frac{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}}{1 + \frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} = \frac{1+p_{2d+1}}{2},$$

y por lo tanto,

$$g^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}}\right) = \left( \frac{I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d)^{1/d}}{1 - I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d)^{1/d}} \right)^{1/2}. \quad (3.11)$$

Sustituimos el término de la izquierda de la igualdad (3.11) en las expresiones de la Proposición 3.6.9 y obtenemos:

$$\begin{aligned} \|D\phi(p)\dot{p}^i\| &= \frac{g^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}}\right)}{\sqrt{1-p_{2d+1}^2}\sqrt{1+\left(g^{-1}\left(\sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}}\right)\right)^2}} = \frac{\left(\left(\frac{I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d)^{1/d}}{1 - I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d)^{1/d}}}\right)\right)^{1/2}}{\sqrt{1-p_{2d+1}^2}\sqrt{1+\left(\frac{I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d)^{1/d}}{1 - I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d)^{1/d}}}\right)^2}} \\ &= \frac{\sqrt{I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d)^{1/d}}}{\sqrt{1-p_{2d+1}^2}}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Por otro lado, tomamos la definición de  $g'(t)$  de la ecuación (3.5):

$$\begin{aligned} (g^{-1})' \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right) &= \frac{1}{g' \left( g^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right) \right)} \\ &= \frac{1}{dB(d, d)} \frac{g \left( g^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right) \right)^{2d-1} \left( 1 + \left( g^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right) \right)^2 \right)^{d+1}}{\left( g \left( g^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right) \right) \right)^2 + 1)^{2d} \left( g^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right) \right)^{2d-1}} \\ &= \frac{1}{dB(d, d)} \frac{\sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}}^{2d-1} \left( 1 + \left( g^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right) \right)^2 \right)^{d+1}}{\left( \frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}} + 1 \right)^{2d} \left( g^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right) \right)^{2d-1}}. \end{aligned}$$

Utilizamos de nuevo la expresión (3.11) y obtenemos

$$\begin{aligned} (g^{-1})' \left( \sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}} \right) &= \frac{1}{dB(d, d)} \frac{\sqrt{\frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}}}^{2d-1} \left( 1 + \left( \frac{I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d)^{1/d}}{1 - I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d)^{1/d}} \right) \right)^{d+1}}{\left( \frac{1+p_{2d+1}}{1-p_{2d+1}} + 1 \right)^{2d} \left( \left( \frac{I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d)^{1/d}}{1 - I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d)^{1/d}} \right)^{1/2} \right)^{2d-1}} \\ &= \frac{(1-p_{2d+1})^{d+\frac{1}{2}} (1+p_{2d+1})^{d-1/2}}{dB(d, d) 2^{2d}} I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d)^{\frac{1}{2d}-1}. \end{aligned}$$

Por lo que podemos concluir

$$\left\| D\phi(p) \frac{\mathbf{n} - p_{2d+1}p}{\sqrt{1-p_{2d+1}^2}} \right\| = \frac{(1-p_{2d+1}^2)^{d-\frac{1}{2}} I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d)^{\frac{1}{2d}-1}}{dB(d, d) 2^{2d} \left( 1 - I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d)^{\frac{1}{d}} \right)}. \quad (3.13)$$

Consideramos ahora las expresiones de las ecuaciones (3.12) y (3.13):

$$\begin{aligned} \frac{I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d)^{\frac{1}{2d}}}{\sqrt{1-p_{2d+1}^2}} &\geq \frac{(1-p_{2d+1}^2)^{d-\frac{1}{2}} I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d)^{\frac{1}{2d}-1}}{dB(d, d) 2^{2d} \left( 1 - I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d)^{\frac{1}{d}} \right)} \\ \iff I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d) &\geq \frac{(1-p_{2d+1}^2)^d}{dB(d, d) 2^{2d} \left( 1 - I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d)^{\frac{1}{d}} \right)} \\ \iff dB_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d) \left( 1 - I_{\frac{1+p_{2d+1}}{2}}(d, d)^{\frac{1}{d}} \right) &\geq \frac{(1-p_{2d+1}^2)^d}{2^{2d}}. \end{aligned}$$

Terminamos con el cambio de variables  $s = \frac{1+p_{2d+1}}{2}$ , con lo que  $s^d(1-s)^d = \frac{(1-p_{2d+1}^2)^d}{2^{2d}}$ .  $\square$

**Proposición 3.6.12.** Para todo  $d \geq 1$  y para todo  $p \in \mathbb{S}^{2d}$

$$\|D\phi(p)\dot{p}^i\| \geq \left\| D\phi(p) \frac{\mathbf{n} - p_{2d+1}p}{\sqrt{1-p_{2d+1}^2}} \right\|,$$

donde  $\dot{p}^i$ ,  $1 \leq i \leq 2d-1$ , están definidos en la Proposición 3.6.8 y  $\mathbf{n} = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{S}^{2d}$ .

*Demostración.* Es una consecuencia inmediata del Lema 3.6.11 y el Teorema A.0.5.  $\square$

**Corolario 3.6.13.** Sea  $p, q \in \mathbb{S}^{2d}$ ,  $\|p - q\| \leq \tau$  y  $p_{2d+1} < \epsilon$  donde  $0 < \epsilon + \tau < 1$ . Entonces, para todo  $x \in \mathbb{S}^{2d}$  en un segmento geodésico entre  $p$  y  $q$  tenemos

$$\|D\phi(x)\| \leq \frac{g^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+(\tau+\epsilon)}{1-(\tau+\epsilon)}} \right)}{\sqrt{1-(\tau+\epsilon)^2} \sqrt{1 + \left( g^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+(\tau+\epsilon)}{1-(\tau+\epsilon)}} \right) \right)^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-(\tau+\epsilon)^2}} = M_{\epsilon, \tau}.$$

*Demostración.* La segunda desigualdad es trivial. Para la primera, por el Corolario 3.6.10 podemos concluir que  $\left\{ D\phi(p)\dot{p}_i, D\phi(p) \frac{\mathbf{n} - p_{2d+1}p}{\sqrt{1-p_{2d+1}^2}} \right\}_{1 \leq i \leq 2d-1}$  es una base de  $T_p\mathbb{S}^{2d}$  y por lo tanto,

$$\|D\phi(p)\| = \max_{1 \leq i \leq 2d-1} \left\{ D\phi(p)\dot{p}_i, D\phi(p) \frac{\mathbf{n} - p_{2d+1}p}{\sqrt{1-p_{2d+1}^2}} \right\}.$$

Utilizando ahora la Proposición 3.6.12 tenemos que

$$\|D\phi(x)\dot{x}\| \leq \frac{g^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+x_{2d+1}}{1-x_{2d+1}}} \right)}{\sqrt{1-x_{2d+1}^2} \sqrt{1 + \left( g^{-1} \left( \sqrt{\frac{1+x_{2d+1}}{1-x_{2d+1}}} \right) \right)^2}} \stackrel{(3.11)}{=} \sqrt{\frac{\Gamma^{1/d} \frac{1+x_{2d+1}}{2}}{1-x_{2d+1}^2}}.$$

Esta claro que si consideramos la expresión anterior como una función de  $x_{2d+1}$ , esta es creciente. Ahora solo tenemos que ver que  $p_{2d+1} \leq \epsilon$  y  $\|p-q\| \leq \tau$  implica  $|x_{2d+1} - p_{2d+1}| \leq \tau$  y por lo tanto  $x_{2d+1} \leq \tau + \epsilon$ . □

**Proposición 3.6.14.** Sean  $\epsilon, \tau \in (0, 1)$  con  $\epsilon + \tau < 1$ . Entonces para todo  $p, q \in \mathbb{S}^{2d}$  se verifica

$$\int_{p, q \in \mathbb{S}^{2d}} \frac{\left( \frac{|K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N, g)}(p, q)|}{K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N, g)}(p, p)} \right)^2}{\|p - q\|^s} dpdq \geq \frac{W(\epsilon) \text{Vol}(\mathbb{S}^{2d-1})}{(2d - s)} \left( 1 - \frac{\tau^2}{4} \right)^{d-1} \tau^{2d-s} \left( 1 - \tau^2 \frac{(1 + \tau^2)^2}{1 - (\epsilon + \tau)^2} \right)^L,$$

donde  $W(\epsilon)$  es el volumen del conjunto de  $p \in \mathbb{S}^{2d}$  tales que  $p_{2d+1} \leq \epsilon$ .

*Demostración.* Utilizamos los resultados de los lemas 3.6.2 y 3.6.3 y el Corolario 3.6.13. Como  $\tau, \epsilon > 0$  y  $0 < \tau + \epsilon < 1$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}^{2d} \times \mathbb{S}^{2d}} \frac{\left( \frac{|K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N, g)}(p, q)|}{K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N, g)}(p, p)} \right)^2}{\|p - q\|^s} dpdq &\geq \int_{\|p-q\| \leq \tau, p_{2d+1} \leq \epsilon} \frac{\left( \frac{|K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N, g)}(p, q)|}{K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N, g)}(p, p)} \right)^2}{\|p - q\|^s} dpdq \geq \\ &\int_{\|p-q\| \leq \tau, p_{2d+1} \leq \epsilon} \frac{\left( 1 - \frac{(1+\tau^2)^2 \|p-q\|^2}{1 - (\epsilon + \tau)^2} \right)^L}{\|p - q\|^s} dpdq. \end{aligned}$$

Por el Teorema de Fubini y el Lema 1.1.1, podemos reescribir esta integral como:

$$\begin{aligned}
& \int_{p_{2d+1} \leq \epsilon} \left[ \int_{\|p-q\| \leq \tau} \frac{\left(1 - \frac{(1+\tau^2)^2 \|p-q\|^2}{1-(\epsilon+\tau)^2}\right)^L}{\|p-q\|^s} dq \right] dp \\
&= \int_{p_{2d+1} \leq \epsilon} \left[ \int_{\sqrt{2-2\langle p,q \rangle} \leq \tau} \frac{\left(1 - \frac{(1+\tau^2)^2 (2-2\langle p,q \rangle)}{1-(\epsilon+\tau)^2}\right)^L}{\sqrt{2-2\langle p,q \rangle}^s} dq \right] dp \\
&= \text{Vol}(\mathbb{S}^{2d-1}) \int_{1-\frac{\tau^2}{2}}^1 \frac{\left(1 - \frac{(1+\tau^2)^2 (2-2t)}{1-(\epsilon+\tau)^2}\right)^L}{\sqrt{2-2t}^s} (1-t^2)^{d-1} dt \int_{p_{2d+1} \leq \epsilon} dp \\
&= \frac{W(\epsilon) \text{Vol}(\mathbb{S}^{2d-1})}{2^{\frac{s}{2}}} \int_{1-\frac{\tau^2}{2}}^1 \frac{\left(1 - \frac{(1+\tau^2)^2 (2-2t)}{1-(\epsilon+\tau)^2}\right)^L}{\sqrt{1-t}^s} (1-t^2)^{d-1} dt.
\end{aligned}$$

donde  $W(\epsilon)$  es el volumen del conjunto de puntos de  $\mathbb{S}^{2d}$  que verifican que su última coordenada es menor o igual que  $\epsilon$ . Utilizamos el cambio de variables  $u = 1 - t$  para resolver esa última integral

$$\begin{aligned}
& \int_{1-\frac{\tau^2}{2}}^1 \frac{\left(1 - \frac{(1+\tau^2)^2 (2-2t)}{1-(\epsilon+\tau)^2}\right)^L}{\sqrt{1-t}^s} (1-t^2)^{d-1} dt \geq \\
& \left(2 - \frac{\tau^2}{2}\right)^{d-1} \int_0^{\frac{\tau^2}{2}} \left(1 - 2\frac{(1+\tau^2)^2}{1-(\epsilon+\tau)^2}u\right)^L u^{d-1-\frac{s}{2}} du \geq \\
& \left(2 - \frac{\tau^2}{2}\right)^{d-1} \left(1 - \tau^2 \frac{(1+\tau^2)^2}{1-(\epsilon+\tau)^2}\right)^L \int_0^{\frac{\tau^2}{2}} u^{d-1-\frac{s}{2}} du. \quad (3.14)
\end{aligned}$$

Pues si  $u \leq \frac{\tau^2}{2}$ , entonces  $\left(1 - 2\frac{(1+\tau^2)^2}{1-(\epsilon+\tau)^2}u\right)^L \geq \left(1 - \tau^2 \frac{(1+\tau^2)^2}{1-(\epsilon+\tau)^2}\right)^L$ . Al resolver esta última integral hemos probado la siguiente cota inferior.

$$\frac{W(\epsilon) \text{Vol}(\mathbb{S}^{2d-1})}{(2d-s)} \left(1 - \frac{\tau^2}{4}\right)^{d-1} \tau^{2d-s} \left(1 - \tau^2 \frac{(1+\tau^2)^2}{1-(\epsilon+\tau)^2}\right)^L.$$

□

Podemos reescribir este resultado de la siguiente forma.

**Teorema 3.6.15.** Sean  $L \geq 0$ ,  $d \geq 1$ ,  $0 < s < 2d$  y sea  $N$  de la forma  $N = \binom{d+L}{d}$ . Entonces, para  $\tau > 0$  tal que  $\tau < 1 - 1/\sqrt{d}$  tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x \sim \mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}} [\mathcal{E}_s(\omega_N)] &\leq N^2 V_s(\mathbb{S}^{2d}) - \frac{N^2 \text{Vol}(\mathbb{S}^{2d-1})}{(2d-s) \text{Vol}(\mathbb{S}^{2d})} \times \\
&\left(1 - \frac{\tau^2}{4}\right)^{d-1} \tau^{2d-s} \left(1 - \tau^2 \frac{(1+\tau^2)^2}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{d}} + \tau\right)^2}\right)^L \left(1 - \frac{e^{-1+\frac{1}{2d}}}{2\sqrt{1-\frac{1}{2d}}}\right).
\end{aligned}$$

*Demostración.* Gracias al Teorema 1.3.3 sabemos que la esperanza de la energía de Riesz de un conjunto de  $N$  puntos del proceso determinantal  $\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}$  con  $0 \leq s \leq 2d$  verifica:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x \sim \mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}} [\mathcal{E}_s(x_1, \dots, x_N)] &= \int_{\mathbb{S}^{2d} \times \mathbb{S}^{2d}} \frac{K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p,p)K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(q,q) - |K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p,q)|^2}{\|p-q\|^s} dpdq = \\
&= \int_{\mathbb{S}^{2d} \times \mathbb{S}^{2d}} \frac{K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p,p)^2 - |K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p,q)|^2}{\|p-q\|^s} dpdq \\
&= \frac{N^2}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{2d})^2} \int_{\mathbb{S}^{2d} \times \mathbb{S}^{2d}} \frac{1 - \left( \frac{|K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p,q)|}{K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p,p)} \right)^2}{\|p-q\|^s} dpdq \\
&= K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p,p)^2 \left[ \int_{\mathbb{S}^{2d} \times \mathbb{S}^{2d}} \frac{1}{\|p-q\|^s} dpdq - \int_{\mathbb{S}^{2d} \times \mathbb{S}^{2d}} \frac{\left( \frac{|K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p,q)|}{K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p,p)} \right)^2}{\|p-q\|^s} dpdq \right] \\
&= N^2 V_s(\mathbb{S}^{2d}) - \frac{N^2}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{2d})^2} \int_{\mathbb{S}^{2d} \times \mathbb{S}^{2d}} \frac{\left( \frac{|K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p,q)|}{K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p,p)} \right)^2}{\|p-q\|^s} dpdq.
\end{aligned}$$

La Proposición 3.6.14 nos proporciona una cota para esta integral dependiendo de  $\epsilon$  y  $\tau$ . Comenzamos dando una cota para  $W(\epsilon)$ , para ello, basta con tomar  $n = 2d - 1$  en la fórmula de la Proposición 1.1.2,

$$W\left(\frac{1}{\sqrt{d}}\right) \geq \vartheta\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{d}}\right) \geq \text{Vol}(\mathbb{S}^{2d}) \left(1 - \frac{e^{-1+\frac{1}{2d}}}{2\sqrt{1-\frac{1}{2d}}}\right).$$

Sustituimos la cota en la fórmula de la Proposición 3.6.14 y obtenemos

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x \sim \mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}} [\mathcal{E}_s(\omega_N)] &\leq N^2 V_s(\mathbb{S}^{2d}) - \frac{N^2 \text{Vol}(\mathbb{S}^{2d-1})}{(2d-s)\text{Vol}(\mathbb{S}^{2d})} \times \\
&\quad \left(1 - \frac{\tau^2}{4}\right)^{d-1} \tau^{2d-s} \left(1 - \tau^2 \frac{(1+\tau^2)^2}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{d}} + \tau\right)^2}\right)^L \left(1 - \frac{e^{-1+\frac{1}{2d}}}{2\sqrt{1-\frac{1}{2d}}}\right),
\end{aligned}$$

donde  $0 < \tau < 1 - 1/\sqrt{d}$ . □

**Teorema 3.6.16.** *Sea  $N$  de la forma  $N = \binom{d+L}{d}$ , con  $d \geq 1$  y  $L \geq 0$  y  $0 < s < 2d$ , entonces*

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{x \sim \mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}} [\mathcal{E}_s(\omega_N)] &\leq V_s(\mathbb{S}^{2d}) N^2 \\
&\quad - \frac{\text{Vol}(\mathbb{S}^{2d-1}) \left(\frac{(2d-s)(1-\frac{1}{d})}{2e}\right)^{d-\frac{s}{2}}}{(2d-s)\text{Vol}(\mathbb{S}^{2d})(d!)^{1-\frac{s}{2d}}} \left(1 - \frac{e^{-1+\frac{1}{2d}}}{2\sqrt{1-\frac{1}{2d}}}\right) N^{1+\frac{s}{2d}} + o(N^{1+\frac{s}{2d}}).
\end{aligned}$$

*Demostración.* Por el Teorema 3.6.15,

$$\frac{\mathbb{E}_{x \sim \mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}} [\mathcal{E}_s(\omega_N)] - N^2 V_s(\mathbb{S}^{2d})}{N^{1+\frac{s}{2d}}} \leq -\frac{N^{1-\frac{s}{2d}} \text{Vol}(\mathbb{S}^{2d-1})}{(2d-s) \text{Vol}(\mathbb{S}^{2d})} \times \left(1 - \frac{\tau^2}{4}\right)^{d-1} \tau^{2d-s} \left(1 - \tau^2 \frac{(1+\tau^2)^2}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{d}} + \tau\right)^2}\right)^L \left(1 - \frac{e^{-1+\frac{1}{2d}}}{2\sqrt{1-\frac{1}{2d}}}\right).$$

Fijamos un  $C > 0$  y sea  $\tau = \sqrt{C/L}$  (que verifica  $\tau < 1 - \frac{1}{\sqrt{d}}$  para un  $L$  suficientemente largo). Entonces la expresión anterior se puede escribir como

$$\frac{-N^{1-\frac{s}{2d}} \text{Vol}(\mathbb{S}^{2d-1})}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{2d})(2d-s)L^{d-\frac{s}{2}}} \frac{C^{d-\frac{s}{2}}}{e^{\frac{dC}{d-1}}} \left(1 - \frac{e^{-1+\frac{1}{2d}}}{2\sqrt{1-\frac{1}{2d}}}\right) Q_L,$$

donde  $Q_L$  es una sucesión con  $\lim_{L \rightarrow \infty} Q_L = 1$ . Recordamos que  $N = \binom{d+L}{d}$ , lo que implica

$$\frac{L^d}{d!} \leq \frac{(L+d) \cdots (L+1)}{d!} = \binom{d+L}{d} = N.$$

Así que hemos probado:

$$\frac{\mathbb{E}_{x \sim \mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}} [\mathcal{E}_s(\omega_N)] - N^2 V_s(\mathbb{S}^{2d})}{N^{1+\frac{s}{2d}}} \leq -\frac{N^{1-\frac{s}{2d}} \text{Vol}(\mathbb{S}^{2d-1})}{\text{Vol}(\mathbb{S}^{2d})(2d-s)(Nd!)^{1-\frac{s}{2d}}} \frac{C^{d-\frac{s}{2}}}{e^{\frac{dC}{d-1}}} \left(1 - \frac{e^{-1+\frac{1}{2d}}}{2\sqrt{1-\frac{1}{2d}}}\right) Q_L,$$

lo que es válido para todo  $C > 0$ . Ahora basta con calcular el  $C$  óptimo. Para ello, consideramos la función  $f(C) = \frac{C^{d-\frac{s}{2}}}{e^{\frac{dC}{d-1}}}$  y mediante el cálculo de su derivada, concluimos que el mínimo global se encuentra en:

$$C = d - 1 - \frac{d-1}{2d}s.$$

Concluimos sustituyendo el valor de  $C$  en la fórmula anterior.  $\square$

Como mencionamos en la introducción, la cota proporcionada por el Teorema 3.6.15 es peor que la dada por el harmonic ensemble. Podemos ver un ejemplo con valores concretos para  $s$  y  $d$  en la Figura 3.2. Sin embargo, los puntos obtenidos de esta generalización del spherical ensemble respetan la asintótica de la energía de Riesz mínima, obteniendo el exponente correcto  $(1 + \frac{s}{2d})$  para el segundo término de la expansión.

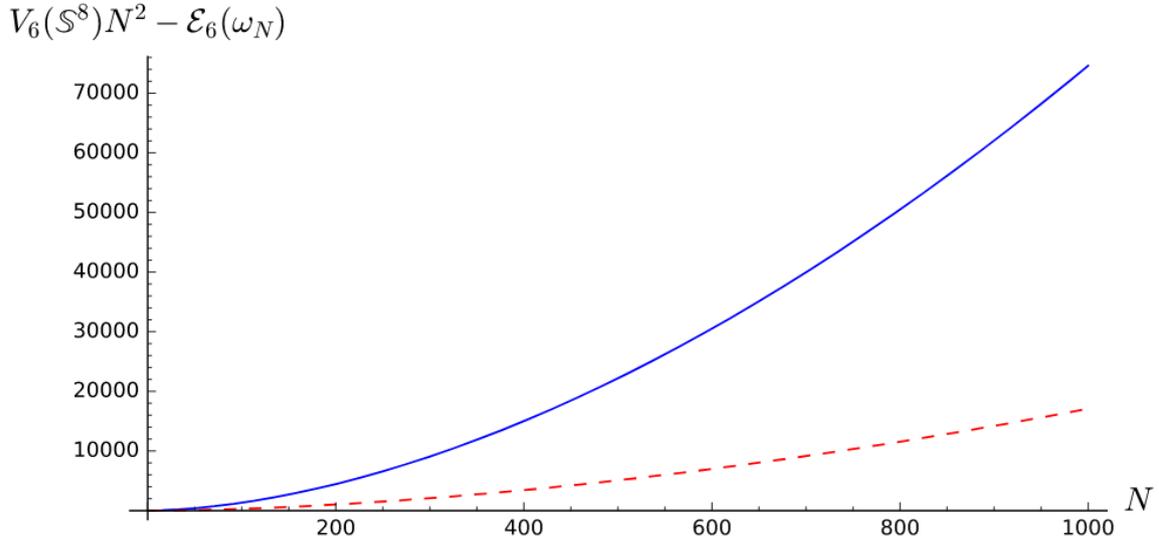


Figura 3.2: Segundo término de la asintótica de la 6-energía del harmonic ensemble (la línea continua azul) y la 6-energía de nuestra generalización del spherical ensemble (línea a trozos roja) en  $S^8$ . El harmonic ensemble muestra un resultado mejor asintóticamente.

### 3.6.2. Energía de Green en $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$

En esta sección calculamos la esperanza de los potenciales análogos a la energía de Riesz en el espacio proyectivo  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$  (Teorema 3.6.17 y Corolario 3.6.18) y de la energía de Green (Teorema 3.6.19) para los puntos del conjunto proyectivo.

**Teorema 3.6.17.** Sean  $L \geq 0$ ,  $d \geq 1$ ,  $r = \binom{d+L}{d}$  y  $\omega_r = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})^r$ . Definimos entonces el potencial de Riesz proyectivo como

$$\mathcal{E}_s^{\mathbb{P}}(\omega_r) = \sum_{i \neq j} \frac{1}{\sin \left( d_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}(x_i, x_j) \right)^s},$$

donde  $d_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}(x_i, x_j)$  es la distancia proyectiva, definida en la ecuación (3.7). Entonces, para  $0 < s < 2d$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathfrak{X}_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}^{(r)}} \left[ \mathcal{E}_s^{\mathbb{P}}(\omega_r) \right] &= \frac{d}{d - \frac{s}{2}} r^2 - r^2 dB \left( d - \frac{s}{2}, L + 1 \right) \\ &= \frac{d}{d - \frac{s}{2}} r^2 - r^{1 + \frac{s}{2d}} \frac{d\Gamma \left( d - \frac{s}{2} \right)}{(d!)^{1 - \frac{s}{2d}}} + o \left( r^{1 + \frac{s}{2d}} \right). \end{aligned}$$

Nos fijamos en que  $d/(d-s/2)$  es precisamente la  $s$ -energía continua para la medida uniforme en  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$ .

*Demostración.* Llamamos  $J$  a la cantidad que queremos calcular. Gracias al Teorema 1.3.3 y a la definición del núcleo  $K_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}^{(r)}$  dada en la Proposición 3.4.1 tenemos que

$$\begin{aligned} J &= \mathbb{E}_{\mathbf{x}_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}^{(r)}} \left[ \sum_{i \neq j} \frac{1}{\sin \left( d_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}(x_i, x_j) \right)^s} \right] \\ &= \int_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1}) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})} \frac{K_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}^{(r)}(p, p)^2 - |K_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}^{(r)}(p, q)|^2}{\sin \left( d_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}(p, q) \right)^s} dpdq \\ &= \frac{r^2 d!^2}{\pi^{2d}} \int_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1}) \times \mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})} \frac{1 - |\langle p, q \rangle|^{2L}}{\left( 1 - |\langle p, q \rangle|^2 \right)^{\frac{s}{2}}} dpdq, \end{aligned}$$

donde escogemos representantes de norma 1 de  $p, q$ . Como el integrando depende solo de la distancia de  $p$  a  $q$  y  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$  es un espacio homogéneo, podemos fijar  $p = e_1 = (1, 0, \dots, 0)$  y obtener:

$$J = \frac{r^2 d!}{\pi^d} \int_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})} \frac{1 - |\langle e_1, q \rangle|^{2L}}{\left( 1 - |\langle e_1, q \rangle|^2 \right)^{\frac{s}{2}}} dq,$$

para lo que también hemos usado que el volumen de  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$  es igual a  $\pi^d/d!$ . Para calcular esta integral, usamos el Teorema del cambio de variables con la función  $\psi_d$ , cuyo jacobiano está dado en el Lema 1.1.7, y obtenemos:

$$\begin{aligned} J &= \frac{r^2 d!}{\pi^d} \int_{\mathbb{C}^d} \frac{1 - \left| \left\langle e_1, \frac{(1, z)}{\sqrt{1+||z||^2}} \right\rangle \right|^{2L}}{\left( 1 - \left| \left\langle e_1, \frac{(1, z)}{\sqrt{1+||z||^2}} \right\rangle \right|^2 \right)^{\frac{s}{2}}} \frac{1}{(1+||z||^2)^{d+1}} dz \\ &= \frac{r^2 d!}{\pi^d} \int_{\mathbb{C}^d} \frac{1 - \left( \frac{1}{1+||z||^2} \right)^L}{\left( 1 - \frac{1}{1+||z||^2} \right)^{\frac{s}{2}}} \left( \frac{1}{1+||z||^2} \right)^{d+1} dz. \end{aligned}$$

Integramos en coordenadas polares,

$$\begin{aligned} J &= \frac{r^2 d!}{\pi^d} \frac{2\pi^d}{(d-1)!} \int_0^\infty \frac{1 - \left( \frac{1}{1+t^2} \right)^L}{\left( 1 - \frac{1}{1+t^2} \right)^{\frac{s}{2}}} \left( \frac{1}{1+t^2} \right)^{d+1} t^{2d-1} dt \\ &= 2r^2 d \left[ \int_0^\infty \frac{t^{2d-1-s}}{(1+t^2)^{d+1-\frac{s}{2}}} dt - \int_0^\infty \frac{t^{2d-1-s}}{(1+t^2)^{d+1-\frac{s}{2}+L}} dt \right] \\ &= 2r^2 d \left[ \frac{B\left(d - \frac{s}{2}, 1\right)}{2} - \frac{B\left(d - \frac{s}{2}, L+1\right)}{2} \right] \\ &= \frac{d}{d - \frac{s}{2}} r^2 - r^2 dB\left(d - \frac{s}{2}, L+1\right). \end{aligned}$$

Para calcular la asintótica, fijémonos en que

$$\begin{aligned} B\left(d - \frac{s}{2}, L + 1\right) &= \frac{\Gamma\left(d - \frac{s}{2}\right)\Gamma(L + 1)}{\Gamma\left(d - \frac{s}{2} + L + 1\right)} = \Gamma\left(d - \frac{s}{2}\right) L^{\frac{s}{2}-d} + o\left(L^{\frac{s}{2}-d}\right), \\ r &= \binom{L+d}{d} = \frac{L^d}{d!} + o\left(L^d\right), \end{aligned} \quad (3.15)$$

y por lo tanto,

$$B\left(d - \frac{s}{2}, L + 1\right) = \Gamma\left(d - \frac{s}{2}\right) (d!r)^{\frac{s}{2d}-1} + o\left(r^{\frac{s}{2d}-1}\right).$$

□

**Corolario 3.6.18.** Sean  $L \geq 0$ ,  $d \geq 1$ ,  $r = \binom{d+L}{d}$  y  $\omega_r = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})^r$ . Definimos la energía logarítmica de un conjunto de puntos en el espacio proyectivo por

$$\mathcal{E}_0^{\mathbb{P}}(\omega_r) = \sum_{i \neq j} \log \frac{1}{\sin\left(d_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}(x_i, x_j)\right)}.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathfrak{X}_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}^{(r)}} \left[ \mathcal{E}_0^{\mathbb{P}}(\omega_r) \right] &= \frac{r^2}{2d} + \frac{r^2 d}{2} B(d, L + 1) \sum_{j=0}^L \frac{1}{d + j} \\ &= \frac{r^2}{2d} + \frac{r \log r}{2d} + o(r \log r). \end{aligned}$$

*Demostración.* Resulta sencillo ver que  $\mathcal{E}_0(\omega_r) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \mathcal{E}_s(\omega_r)$ . En particular, si cambiamos el orden de la esperanza y la derivada (justifica este cambio el Teorema [Jost, 2005, Theorem 16.11]) entonces por el Teorema 3.6.17 tenemos

$$\mathbb{E}_{\mathfrak{X}_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}^{(r)}} \left[ \mathcal{E}_0^{\mathbb{P}}(\omega_r) \right] = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} \left( \frac{d}{d - \frac{s}{2}} r^2 - r^2 dB\left(d - \frac{s}{2}, L + 1\right) \right).$$

Calculamos la derivada de  $B\left(d - \frac{s}{2}, L + 1\right)$  utilizando la función digamma, véase el Apéndice A.

$$\frac{d}{ds} B\left(d - \frac{s}{2}, L + 1\right) = \frac{1}{2} B\left(d - \frac{s}{2}, L + 1\right) \sum_{j=0}^L \frac{1}{d - \frac{s}{2} + j}.$$

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathfrak{X}_{*}^{(r,d)}} \left[ \mathcal{E}_0^{\mathbb{P}}(\omega_r) \right] &= \left( \frac{dr^2}{2\left(d - \frac{s}{2}\right)^2} - \frac{dr^2}{2} B\left(d - \frac{s}{2}, L + 1\right) \sum_{j=0}^L \frac{1}{d - \frac{s}{2} + j} \right) \Big|_{s=0} \\ &= \frac{r^2}{2d} - \frac{dr^2}{2} B(d, L + 1) \sum_{j=0}^L \frac{1}{d + j}. \end{aligned}$$

Utilizando la expansión asintótica de la función beta definida en la ecuación (3.15) y la aproximación como serie del logaritmo natural podemos concluir la demostración.

□

**Teorema 3.6.19.** *Sea  $d \geq 2$ . Entonces,*

$$\liminf_{r \rightarrow \infty} \frac{\min_{\omega_r} (\mathcal{E}_{\mathcal{G}}^{\mathbb{P}}(\omega_r))}{r^{2-\frac{1}{d}}} \leq -\frac{(d!)^{1-\frac{1}{d}}}{4\pi^d(d-1)},$$

donde  $\mathcal{E}_{\mathcal{G}}^{\mathbb{P}}(\omega_r)$  es la energía de Green definida en la Definición 1.2.4.

*Demostración.* Por las definiciones del Teorema 3.6.17, el Corolario 3.6.18 y el cálculo del núcleo de Green para el espacio proyectivo complejo de dimensión  $d$  recogido en la Definición 1.2.4, podemos concluir que la esperanza de la energía de Green de  $r$  puntos del conjunto proyectivo es

$$\begin{aligned} E_{\mathfrak{X}_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}^{(r)}} [\mathcal{E}_{\mathcal{G}}^{\mathbb{P}}(\omega_r)] &= \overbrace{\frac{(d-1)!}{2\pi^d} \left[ \left( \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{d-k} E_{\mathfrak{X}_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}^{(r)}} [\mathcal{E}_{2d-2k}^{\mathbb{P}}(\omega_r)] \right) + E_{\mathfrak{X}_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}^{(r)}} [\mathcal{E}_0^{\mathbb{P}}(\omega_r)] \right]}^A \\ &\quad - \frac{r(r-1)(d-1)!}{4\pi^d} \left( \frac{1}{d} + 2 \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{k} \right). \end{aligned}$$

Cada una de las esperanzas que aparecen en  $A$  ha sido calculada, bien en el Teorema 3.6.17 o en el Corolario 3.6.18, así que tenemos:

$$\begin{aligned} A &= \frac{(d-1)!}{4\pi^d} \left[ \left( \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{d-k} \left( \frac{d}{k} r^2 - r^{2-\frac{k}{d}} \frac{d\Gamma(k)}{(d!)^{\frac{k}{d}}} \right) \right) + \frac{r^2}{d} + \frac{r \log r}{d} \right] + o\left(r^{2-\frac{1}{d}}\right) \\ &= r^2 \frac{d!}{4\pi^d} \left( \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{k(d-k)} + \frac{1}{d^2} \right) - \frac{(d!)^{1-\frac{1}{d}}}{4\pi^d(d-1)} r^{2-\frac{1}{d}} + o\left(r^{2-\frac{1}{d}}\right) \\ &= r^2 \frac{(d-1)!}{4\pi^d} \left( \frac{1}{d} + 2 \sum_{k=1}^{d-1} \frac{1}{k} \right) - \frac{(d!)^{1-\frac{1}{d}}}{4\pi^d(d-1)} r^{2-\frac{1}{d}} + o\left(r^{2-\frac{1}{d}}\right). \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$E_{\mathfrak{X}_{*}^{(r,d)}} [\mathcal{E}_{\mathcal{G}}^{\mathbb{P}}(\omega_r)] = -\frac{(d!)^{1-\frac{1}{d}}}{4\pi^d(d-1)} r^{2-\frac{1}{d}} + o\left(r^{2-\frac{1}{d}}\right).$$

Como esta ecuación se verifica para una sucesión infinita de números (todos los enteros de la forma  $r = \binom{d+L}{d}$ ), el Teorema 3.6.19 queda probado.  $\square$

Si tomamos  $r$  puntos aleatorios independientes con densidad uniforme en  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$ , la esperanza de su energía de Green es exactamente 0, mientras para un conjunto de  $r$  puntos tomados del conjunto proyectivo la energía de Green toma valores negativos. En otras palabras, los puntos del conjunto proyectivo están mejor distribuidos que los puntos uniformes en el sentido de minimizar la energía de Green. El Teorema 3.6.19 nos propone un criterio para decidir cómo de bien distribuido está un conjunto de puntos en el espacio proyectivo complejo: basta con calcular su energía de Green y compararla con la expresión obtenida en el Teorema 3.6.19.

### 3.6.3. Esferas de dimensión impar

El cálculo de la  $s$ -energía en las esferas de dimensión impar resulta más sencillo que su homólogo en dimensión par. Esto se debe a que en el caso par no éramos capaces de calcular exactamente el valor de las integrales que definen la esperanza y nos veíamos abocados a dar una cota superior lo más fina posible. En el caso impar, en cambio, podemos calcular exactamente el valor de las integrales. Consideramos ahora el proceso de puntos  $\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d}}^{(k,r)}$  definido en la Definición 3.5.1. Comenzamos dando un resultado para un caso particular de las energías de Riesz, la 2-energía.

**Proposición 3.6.20.** Sean  $L \geq 0$ ,  $d \geq 1$ ,  $r$  de la forma  $r = \binom{d+L}{d}$  y  $\omega_r = (y_1^0, \dots, \dots, y_r^{k-1}) \in \mathbb{S}^{2d+1}$  definidos en la Definición 3.5.1, entonces

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d+1}}^{(k,r)}} \left[ \mathcal{E}_2(y_1^0, \dots, y_1^{k-1}, \dots, y_r^0, \dots, y_r^{k-1}) \right] \\ = \frac{d}{2d-1} (kr)^2 + \frac{rk^3}{12} - \frac{d\Gamma(d-\frac{1}{2})}{2(d!)^{1-\frac{1}{2d}}} k^2 r^{1+\frac{1}{2d}} + o\left(k^2 r^{1+\frac{1}{2d}}\right). \end{aligned}$$

Para probar la Proposición 3.6.20 usamos el siguiente Lema.

**Lema 3.6.21.** Sea  $y \in (-1, 1)$ , entonces se verifica la siguiente ecuación,

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1-y\cos(\theta)} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-y^2}}. \quad (3.16)$$

*Demostración.* Se puede consultar, por ejemplo, [Gradshteyn and Ryzhik, 2015, 3.792–1].  $\square$

*Demostración de la Proposición 3.6.20.* Tenemos que calcular:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{\theta_1, \dots, \theta_r \in [0, 2\pi]} \mathbb{E}_{\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d+1}}^{(k,r)}} \left[ \mathcal{E}_2(y_1^0, \dots, y_1^{k-1}, \dots, y_r^0, \dots, y_r^{k-1}) \right] d(\theta_1, \dots, \theta_r) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{\theta_1, \dots, \theta_r \in [0, 2\pi]} \mathbb{E}_{\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d+1}}^{(k,r)}} \left[ \sum_{i_1 \neq i_2 \text{ o } j_1 \neq j_2} \frac{1}{\|y_{i_1}^{j_1} - y_{i_2}^{j_2}\|^2} \right] d(\theta_1, \dots, \theta_r) \\ &= J_1 + J_2, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} J_1 &= \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{\theta_1, \dots, \theta_r \in [0, 2\pi]} \mathbb{E}_{\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d+1}}^{(k,r)}} \left[ \sum_{i=1}^r \sum_{j_1 \neq j_2} \frac{1}{\|y_i^{j_1} - y_i^{j_2}\|^2} \right] d(\theta_1, \dots, \theta_r), \\ J_2 &= \frac{1}{(2\pi)^r} \int_{\theta_1, \dots, \theta_r \in [0, 2\pi]} \mathbb{E}_{\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d+1}}^{(k,r)}} \left[ \sum_{j_1, j_2=0}^{k-1} \sum_{i_1 \neq i_2} \frac{1}{\|y_{i_1}^{j_1} - y_{i_2}^{j_2}\|^2} \right] d(\theta_1, \dots, \theta_r). \end{aligned}$$

Por la Definición 3.5.1 tenemos:

$$J_1 = \frac{1}{2\pi} \sum_{i=1}^r \int_{\theta \in [0, 2\pi]} \mathbb{E}_{\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d+1}}^{(k,r)}} \left[ \sum_{j_1 \neq j_2} \frac{1}{\left\| e^{i\left(\theta + \frac{2\pi j_1}{k}\right)} x_i - e^{i\left(\theta + \frac{2\pi j_2}{k}\right)} x_i \right\|^2} \right] d\theta.$$

La integral no depende del ángulo  $\theta$  ni del vector  $x_i \in \mathbb{C}^{n+1}$ , así que tenemos:

$$\frac{J_1}{r} = \sum_{j_1 \neq j_2} \frac{1}{\left\| e^{i\frac{2\pi j_1}{k}} - e^{i\frac{2\pi j_2}{k}} \right\|^2}$$

es la 2-energía de las  $k$  raíces de la unidad. Esta cantidad ha sido estudiada con detalle en [Brauchart et al., 2009]. En particular, por el Teorema [Brauchart et al., 2009, Theorem 1.1] sabemos que su valor es de la forma  $k^3/12 + O(k)$ . Por lo que podemos concluir:

$$J_1 = \frac{rk^3}{12} + O(rk). \quad (3.17)$$

Ahora calcularemos  $J_2$ . Comenzamos cambiando el orden de integración y tenemos:

$$J_2 = \mathbb{E}_{\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d+1}}^{(k,r)}} \left[ \sum_{j_1, j_2=0}^{k-1} \sum_{i_1 \neq i_2} \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_{i_1} d\theta_{i_2}}{\left\| e^{i\left(\theta_{i_1} + \frac{2\pi j_1}{k}\right)} x_{i_1} - e^{i\left(\theta_{i_2} + \frac{2\pi j_2}{k}\right)} x_{i_2} \right\|^2} \right],$$

donde podemos escoger cualquier representante de norma 1 de  $x_{i_1}$  y  $x_{i_2}$ . Para calcular la integral, fijamos  $i_1, i_2$  y asumimos que la elección que hemos hecho verifica  $\langle x_{i_1}, x_{i_2} \rangle \in [0, 1]$  (i.e. es real y no negativa), lo que implica

$$\sin d_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^d)}(x_{i_1}, x_{i_2}) = \sqrt{1 - \langle x_{i_1}, x_{i_2} \rangle^2}. \quad (3.18)$$

Ahora un simple cálculo utilizando la invarianza de la integral por rotaciones nos hace concluir que:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta_{i_1} d\theta_{i_2}}{\left\| e^{i\left(\theta_{i_1} + \frac{2\pi j_1}{k}\right)} x_{i_1} - e^{i\left(\theta_{i_2} + \frac{2\pi j_2}{k}\right)} x_{i_2} \right\|^2} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 - 2\langle x_{i_1}, x_{i_2} \rangle \cos \theta} \stackrel{(3.16)}{=} \frac{1}{2\sqrt{1 - \langle x_{i_1}, x_{i_2} \rangle^2}} \stackrel{(3.18)}{=} \frac{1}{2 \sin d_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}(x_{i_1}, x_{i_2})}, \end{aligned}$$

y este último valor es independiente de  $j_1, j_2$ . Por lo que tenemos:

$$J_2 = \frac{k^2}{2} \mathbb{E}_{\mathfrak{X}_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}^{(r)}} \left[ \sum_{i_1 \neq i_2} \frac{1}{\sin d_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^d)}(x_{i_1}, x_{i_2})} \right].$$

Hemos calculado esta esperanza en el Teorema 3.6.17, luego:

$$J_2 = \frac{d}{2d-1} (kr)^2 - \frac{d\Gamma\left(d - \frac{1}{2}\right)}{2(d!)^{1-\frac{1}{2d}}} k^2 r^{1+\frac{1}{2d}} + o\left(k^2 r^{1+\frac{1}{2d}}\right). \quad (3.19)$$

Concluimos sumando las cantidades de las ecuaciones (3.17) y (3.19). □

Con este mismo tipo de procedimiento, podemos calcular también la esperanza de la  $s$ -energía para  $N$  puntos del proceso  $\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d+1}}^{(k,r)}$  para cualquier  $s \in 2\mathbb{N}$ . Para el resto de valores positivos del parámetro  $s$  podemos calcular una cota superior para la integral y por lo tanto, para la esperanza de la  $s$ -energía.

La Proposición 3.6.20 describe como diferentes elecciones de  $L$  (es decir, de  $r$ ) y  $k$  producen diferentes valores de la 2-energía del conjunto de  $N = rk$  puntos asociado. El siguiente corolario nos presenta la mejor elección.

**Corolario 3.6.22.** *Tomamos el número natural  $k = Ar^{\frac{1}{2d}}$  para algún  $A \in \mathbb{R}$  (por lo tanto  $N = kr$  es también un número natural), entonces:*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d+1}}^{(k,r)}} \left[ \mathcal{E}_2(y_1^0, \dots, y_1^{k-1}, \dots, y_r^0, \dots, y_r^{k-1}) \right] \\ &= \frac{d}{2d-1} N^2 + \left( \frac{A^{2-\frac{2}{2d+1}}}{12} - \frac{d\Gamma\left(d - \frac{1}{2}\right) A^{1-\frac{2}{2d+1}}}{2(d!)^{1-\frac{1}{2d}}} \right) N^{1+\frac{2}{2d+1}} + o\left(N^{1+\frac{2}{2d+1}}\right). \end{aligned} \quad (3.20)$$

*Demostración.* En la Sección 1.8 hemos visto el orden del segundo término en la asintótica de la  $s$ -energía mínima:  $N^{1+2/(2d+1)} = (rk)^{1+2/(2d+1)}$ , así que podemos concluir que los valores óptimos de  $r$  y  $k$  verifican:

$$k \sim r^{\frac{1}{2d}}.$$

Sustituimos este valor en la fórmula de la Proposición 3.6.20 y obtenemos el corolario. □

**Teorema 3.6.23.** *Con la notación anterior,*

$$\begin{aligned} \liminf_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}_{x \sim \mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d+1}}^{(k,r)}} [\mathcal{E}_2(\omega_N)] &\leq V_2(\mathbb{S}^{2d+1}) N^2 \\ &- \frac{3^{1-\frac{2}{2d+1}} (2d-1)^{1-\frac{2}{2d+1}} (2d+1) \Gamma\left(d - \frac{1}{2}\right)^{2-\frac{2}{2d+1}}}{2^{4-\frac{2}{2d+1}} (d!)^{2-\frac{4}{2d+1}}} N^{1+\frac{s}{2d+1}} + o(N^{1+\frac{s}{2d+1}}) \\ &\stackrel{d \rightarrow \infty}{\rightarrow} V_2(\mathbb{S}^{2d+1}) N^2 - \frac{3}{4e} N^{1+\frac{s}{2d+1}} + o(N^{1+\frac{s}{2d+1}}). \end{aligned}$$

*Demostración.* Fijamos  $d \geq 1$  y sea

$$f(A) = \frac{A^{2-\frac{2}{2d+1}}}{12} - \frac{d\Gamma\left(d - \frac{1}{2}\right) A^{1-\frac{2}{2d+1}}}{2(d!)^{1-\frac{1}{2d}}}$$

el coeficiente de  $N^{1+\frac{2}{2d+1}}$  en el Corolario 3.6.22. La función  $f(A)$  tiene un mínimo global estricto en

$$A_d = \frac{3\Gamma\left(d - \frac{1}{2}\right)(2d-1)}{2(d!)^{1-\frac{1}{2d}}}.$$

De hecho,

$$f(A_d) = -\frac{3^{1-\frac{2}{2d+1}}(2d-1)^{1-\frac{2}{2d+1}}(2d+1)\Gamma\left(d - \frac{1}{2}\right)^{2-\frac{2}{2d+1}}}{2^{4-\frac{2}{2d+1}}(d!)^{2-\frac{4}{2d+1}}}$$

nos proporciona una cota para el lím inf dado en el Teorema 3.6.23. No podemos simplemente tomar  $k = A_d r^{\frac{1}{2d}}$  en el Corolario 3.6.22 porque podría ocurrir que  $k \notin \mathbb{Z}$ , pero este problema se puede solucionar de una forma sencilla. Sea  $L \geq 1$  un entero positivo, sea  $r = \binom{d+L}{d}$  y sea  $A$  el único entero en el intervalo:

$$[A_d, A_d + r^{-\frac{1}{2d}})$$

tal que  $k = Ar^{\frac{1}{2d}} \in \mathbb{Z}$ . Finalmente, sea  $N = N_L = rk$ , que depende únicamente de  $d$  y  $L$ , y que verifica  $N_L \rightarrow \infty$  cuando  $L \rightarrow \infty$ . Entonces para cada  $\epsilon > 0$  tenemos:

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{V_2(\mathbb{S}^{2d+1})N_L^2 - \min_{\omega_{N_L}}(\mathcal{E}_2(\omega_{N_L}))}{N_L^{1+\frac{2}{2d+1}}} \geq -f(A) \geq -f(A_d) - \epsilon.$$

La primera desigualdad se cumple por el Corolario 3.6.22 y la segunda desigualdad debido a que  $r \rightarrow \infty$  cuando  $L \rightarrow \infty$ , lo que implica que para alguna constante  $C > 0$ :

$$|f(A) - f(A_d)| \leq Cr^{-\frac{1}{2d}} \rightarrow 0, \quad L \rightarrow \infty.$$

Por lo que hemos probado

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \frac{V_2(\mathbb{S}^{2d+1})N_L^2 - \min_{\omega_{N_L}}(\mathcal{E}_2(\omega_{N_L}))}{N_L^{1+\frac{2}{2d+1}}} \geq -f(A_d).$$

□

La cota del Teorema 3.6.23 es menor que la cota proporcionada por el harmonic ensemble (véase la Sección 1.3.6), lo cual prueba que los puntos obtenidos a través de este proceso son mejores (en el sentido de que su 2-energía media es menor) que los puntos obtenidos del harmonic ensemble. En la Figura 3.3 podemos encontrar una comparación entre ambas cotas.

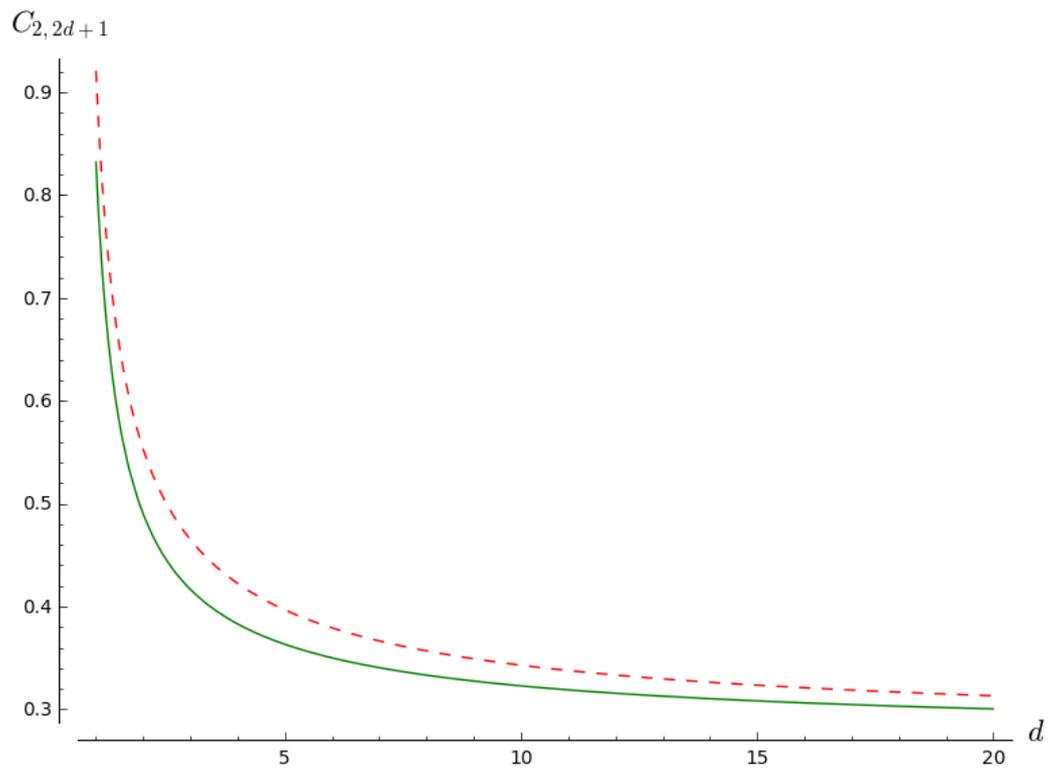


Figura 3.3: Comparación de los valores de las constantes que acompañan al término  $N^{1+\frac{2}{2d+1}}$  en nuestro conjunto (línea discontinua) y el harmonic ensemble (línea continua) para diferentes valores de  $d$ , siguiendo la notación del Problema 1.2.2.

### 3.7. Nomenclatura del capítulo

En esta última sección del capítulo hemos recogido en una tabla los nombres y los núcleos de los distintos procesos puntuales (determinantales o no) definidos.

Proceso		Núcleo
$\mathfrak{X}_{\mathbb{C}^d}^{(N)}$	$\mathbb{C}^d$	$K_{\mathbb{C}^d}^{(N)}(z, w) = \frac{Nd!}{\pi^d} \frac{(1+\langle z, w \rangle)^L}{(1+\ z\ ^2)^{\frac{d+L+1}{2}} (1+\ w\ ^2)^{\frac{L+d+1}{2}}}$ donde $N = \binom{L+d}{d}$ .
$\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N)}$	$\mathbb{C}^d \xrightarrow{\pi^{-1}} \mathbb{S}^{2d}$	$K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N)}(p, q) = \frac{Nd!}{\pi^d 2^{2d+1}} \frac{(1+\langle z, w \rangle)^L}{(1+\ z\ ^2)^{\frac{L-d}{2}} (1+\ w\ ^2)^{\frac{L-d}{2}}}$ donde $z = \pi(p)$ y $w = \pi(q)$ , no es homogéneo.
$\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}$	$\mathbb{C}^d \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}^d \xrightarrow{\pi^{-1}} \mathbb{S}^{2d}$	$K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p, q) = \frac{Nd!}{\pi^d 2^{2d}} \frac{(1+\langle z, w \rangle)^L (1+g(\ z\ )^2)^d \ z\ ^{d-\frac{1}{2}} (1+g(\ w\ )^2)^d \ w\ ^{d-\frac{1}{2}}}{\sqrt{g'(\ z\ )} g(\ z\ )^{d-\frac{1}{2}} \sqrt{g'(\ w\ )} g(\ w\ )^{d-\frac{1}{2}} (1+\ z\ ^2)^{\frac{d+L+1}{2}} (1+\ w\ ^2)^{\frac{L+d+1}{2}}}$ para $g$ óptima $K_{\mathbb{S}^{2d}}^{(N,g)}(p, q) = \frac{N\Gamma(d+\frac{1}{2})}{d\pi^{d+\frac{1}{2}}} \frac{(1+\langle z, w \rangle)^L}{(1+\ z\ ^2)^{\frac{L}{2}} (1+\ w\ ^2)^{\frac{L}{2}}}$ , con $z = \varphi^{-1}(\pi(p))$ y $w = \varphi^{-1}(\pi(q))$ , es homogéneo.
$\mathfrak{X}_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}^{(N)}$	$\mathbb{C}^d \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})$	$ K_{\mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1})}^{(N)}(p, q)  = \frac{Nd!}{\pi^d} \left  \left\langle \frac{p}{\ p\ }, \frac{q}{\ q\ } \right\rangle \right ^L$ .
$\mathfrak{X}_{\mathbb{S}^{2d+1}}^{(k,r)}$	$\mathbb{C}^d \xrightarrow{\psi} \mathbb{P}(\mathbb{C}^{d+1}) \hookrightarrow \mathbb{S}^{2d}$	El proceso no es determinantal.

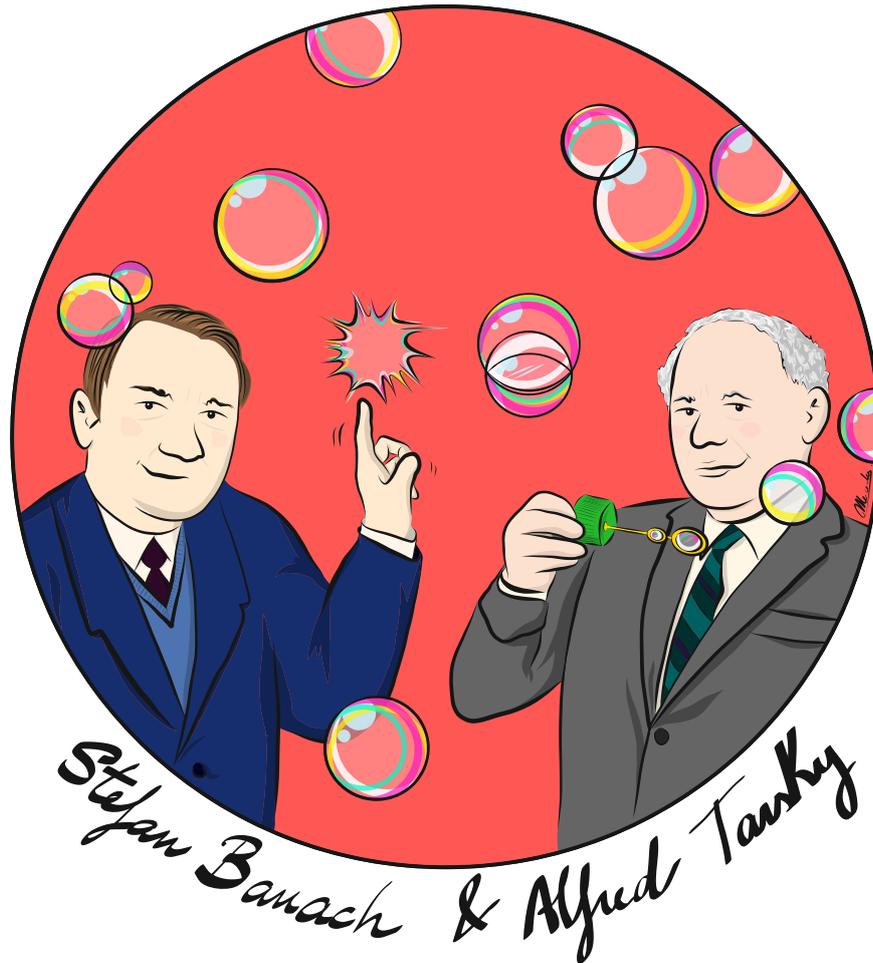
---

---

## CAPÍTULO 4

---

### La estructura de diamante



*Dans un espace euclidien à  $n \geq 3$  dimensions deux ensembles arbitraires, bornés et contenant des points intérieurs (p. ex. deux sphères à rayons différents), sont équivalents par décomposition finie.*

**Paradoja de Banach-Tarski.**

S. Banach et A. Tarski (1924).

*Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes,*

*Fundamenta Mathematicae* **6**: 244-277.



## Contenido

---

<b>4.1. Una construcción general</b> . . . . .	<b>114</b>
<b>4.2. Elección de los paralelos</b> . . . . .	<b>119</b>
<b>4.3. El número de puntos apropiado por paralelo</b> . . . . .	<b>125</b>
4.3.1. El conjunto modelo . . . . .	126
<b>4.4. La estructura de diamante</b> . . . . .	<b>133</b>
4.4.1. Un ejemplo sencillo . . . . .	135
4.4.2. Un ejemplo algo más elaborado . . . . .	136
<b>4.5. Energía logarítmica de la estructura de diamante</b> . . . . .	<b>138</b>
4.5.1. Energía logarítmica de ejemplos concretos . . . . .	142

---

En la Sección 1.3.1 hemos visto la importancia y la dificultad de definir familias de puntos en  $\mathbb{S}^2$  para los que se pueda calcular analíticamente la asíntota de la energía logarítmica y que además esta sea lo más parecida posible a la asíntota de la energía logarítmica mínima (dada en la ecuación (1.9)).

En este capítulo, definimos varias familias de puntos aleatorios en  $\mathbb{S}^2$  que tienen en común la estructura de diamante, definida como Diamond ensemble en [Beltrán and Etayo, 2018a]. El principal interés de estas familias de puntos es que la esperanza de su energía logarítmica puede ser calculada analíticamente. En la Sección 4.5.1 presentamos una elección casi óptima (en el sentido de que minimiza la energía logarítmica) de los parámetros que definen la estructura de diamante. Para ciertas elecciones de parámetros, nuestra estructura produce familias de puntos muy parecidos a algunas familias ya conocidas en la esfera para las cuales la expansión asíntota de la energía logarítmica era, hasta la fecha, desconocida. Entre estas familias encontramos los *octahedral points*, definidos y estudiados en [Holhoş and Roşca, 2014] y los *zonal equal area nodes*, véase [Rakhmanov et al., 1994]. De hecho, el resultado principal de este capítulo, el Teorema 4.5.8, se puede interpretar como la continuación de [Rakhmanov et al., 1994, Theorem 3.2].

La estructura de diamante define familias de puntos constructivas: una vez establecido el valor para los parámetros simplemente tenemos que escoger algunos números aleatorios  $\theta_1, \dots, \theta_p$  uniformemente en  $[0, 2\pi]$  y entonces los  $N$  puntos se obtienen directamente de las fórmulas propuestas en la Sección 4.5.1.

## 4.1. Una construcción general y una fórmula para calcular su energía logarítmica

Podemos definir cualquier paralelo de la esfera  $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$  mediante su altura  $z \in (-1, 1)$  como el conjunto de puntos  $x \in \mathbb{S}^2$  tales que  $\langle x, (0, 0, 1) \rangle = z$ . Utilizando esta definición, consideramos la siguiente familia de puntos:

1. Tomamos un entero positivo  $p$  y  $z_1, \dots, z_p \in (-1, 1)$ . Consideramos los  $p$  paralelos definidos por sus alturas  $z_1, \dots, z_p$ .
2. Para cada  $j$ ,  $1 \leq j \leq p$ , escogemos un número  $r_j$  de puntos que pertenecen al paralelo  $j$ .
3. Distribuimos  $r_j$  puntos en el paralelo  $j$  (que es una circunferencia) simplemente proyectando las  $r_j$  raíces de la unidad en la circunferencia y permitiendo que roten un ángulo aleatorio  $\theta_j$  tomado uniformemente en  $[0, 2\pi]$ .
4. Añadimos los polos Norte y Sur,  $(0, 0, 1)$  y  $(0, 0, -1)$ , al anterior conjunto de puntos.

Denotamos por  $\Omega(p, r_j, z_j)$  al conjunto que acabamos de describir.

Podemos obtener fórmulas explícitas para esta familia de puntos. Si tomamos coordenadas cilíndricas, los puntos que pertenecen al paralelo de altura  $z_j$  son de la forma

$$x = \left( \sqrt{1 - z_j^2} \cos \theta, \sqrt{1 - z_j^2} \sin \theta, z_j \right), \quad (4.1)$$

para algún  $\theta \in [0, 2\pi]$  y por lo tanto, la familia que acabamos de describir se concreta en la siguiente definición.

**Definición 4.1.1.** Sea  $\Omega(p, r_j, z_j)$  el siguiente conjunto de puntos:

$$\Omega(p, r_j, z_j) = \begin{cases} \mathbf{n} = (0, 0, 1) \\ x_j^i = \left( \sqrt{1 - z_j^2} \cos \left( \frac{2\pi i}{r_j} + \theta_j \right), \sqrt{1 - z_j^2} \sin \left( \frac{2\pi i}{r_j} + \theta_j \right), z_j \right) \\ \mathbf{s} = (0, 0, -1) \end{cases} \quad (4.2)$$

donde  $r_j$  es el número de raíces de la unidad que consideramos en el paralelo  $j$ ,  $1 \leq j \leq p$  es el número de paralelos,  $1 \leq i \leq r_j$  y  $\theta_j$  está tomado de forma aleatoria uniformemente en  $[0, 2\pi]$  para todo  $1 \leq j \leq p$ .

Queremos dar una fórmula para la energía logarítmica de  $\Omega(p, r_j, z_j)$ . Para ello, consideramos el siguiente resultado.

**Proposición 4.1.2.** *Sea  $x_i$  un punto aleatorio tomado uniformemente en el paralelo de altura  $z_i$  y sea  $x_j$  un punto aleatorio tomado uniformemente en el paralelo de altura  $z_j$ , con  $z_i \neq z_j$ . Entonces,*

$$\mathbb{E}_{\theta_i, \theta_j} [-\log (\|x_i - x_j\|)] = -\frac{\log (1 - z_i z_j + |z_i - z_j|)}{2}.$$

Antes de demostrar la Proposición 4.1.2, presentamos el siguiente Lema.

**Lema 4.1.3.** *La igualdad*

$$\int_0^\pi \log(a + b \cos(\theta)) d\theta = \pi \log \left( \frac{a + \sqrt{a^2 - b^2}}{2} \right)$$

se verifica si  $a \geq |b| > 0$ .

*Demostración.* Es una igualdad conocida, el lector puede encontrarla, por ejemplo en [Gradshteyn and Ryzhik, 2015, Fórmula 4.224].  $\square$

*Demostración de la Proposición 4.1.2.* Fijémonos en que

$$\begin{aligned} \|x_i - x_j\| &= \left\| \left( \sqrt{1 - z_i^2} \cos \theta_i, \sqrt{1 - z_i^2} \sin \theta_i, z_i \right) - \left( \sqrt{1 - z_j^2} \cos \theta_j, \sqrt{1 - z_j^2} \sin \theta_j, z_j \right) \right\| \\ &= \sqrt{2} \sqrt{1 - z_i z_j - \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} \cos(\theta_i - \theta_j)}. \end{aligned}$$

Calculamos

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}_{\theta_i, \theta_j} [-\log (\|x_i - x_j\|)] \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} -\log \left( \sqrt{2} \sqrt{1 - z_i z_j - \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} \cos(\theta_i - \theta_j)} \right) d\theta_i d\theta_j \\ &= \frac{-\log(2)}{2} - \frac{1}{8\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left( 1 - z_i z_j - \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} \cos(\theta_i - \theta_j) \right) d\theta_i d\theta_j \\ &= \frac{-\log(2)}{2} - \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \log \left( 1 - z_i z_j - \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} \cos(\theta) \right) d\theta \\ &= \frac{-\log(2)}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \log \left( 1 - z_i z_j - \sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2} \cos(\theta) \right) d\theta. \end{aligned}$$

Aplicamos el resultado del Lema 4.1.3 con  $a = 1 - z_i z_j$ ,  $b = -\sqrt{1 - z_i^2} \sqrt{1 - z_j^2}$  y  $z_i \neq z_j$  tenemos que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_i, \theta_j} [-\log (\|x_i - x_j\|)] &= \frac{-\log(2)}{2} - \frac{1}{2\pi} \pi \log \left( \frac{1 - z_i z_j + |z_i - z_j|}{2} \right) \\ &= \frac{-\log(2)}{2} - \frac{1}{2} [\log (1 - z_i z_j + |z_i - z_j|) - \log(2)] \\ &= -\frac{\log (1 - z_i z_j + |z_i - z_j|)}{2}. \end{aligned}$$

$\square$

A partir de la Proposición 4.1.2 obtenemos los siguientes resultados.

**Corolario 4.1.4.** Sean  $x_j^i, x_k^l$  como en la Definición 4.1.1 con  $z_j \neq z_k$ . Entonces,

$$\mathbb{E}_{\theta_j, \theta_k} \left[ - \sum_{l=1}^{r_k} \log \left( \|x_j^i - x_k^l\| \right) \right] = -r_k \frac{\log(1 - z_j z_k + |z_j - z_k|)}{2},$$

donde  $\theta_j, \theta_k$  están distribuidos uniformemente en  $[0, 2\pi]$ .

*Demostración.* Solo tenemos que repetir los cálculos de la Proposición 4.1.2.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_j, \theta_k} \left[ - \sum_{l=1}^{r_k} \log \left( \|x_j^i - x_k^l\| \right) \right] &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^{r_k} -\log \left( \sqrt{2} \sqrt{1 - z_j z_k - \sqrt{1 - z_j} \sqrt{1 - z_k} \cos \left( 2\pi \left( \frac{i}{r_j} - \frac{l}{r_k} \right) + \theta_j - \theta_k \right)} \right) d\theta_j d\theta_k \\ &= \frac{1}{4\pi} \sum_{l=1}^{r_k} \int_0^{2\pi} -\log(2) - \log \left( 1 - z_j z_k - \sqrt{1 - z_j} \sqrt{1 - z_k} \cos \left( 2\pi \left( \frac{i}{r_j} - \frac{l}{r_k} \right) + \theta \right) \right) d\theta \\ &= \frac{-1}{4\pi} \left( r_k 2\pi \log(2) + \sum_{l=1}^{r_k} \int_0^{2\pi} \log \left( 1 - z_j z_k - \sqrt{1 - z_j} \sqrt{1 - z_k} \cos \left( 2\pi \left( \frac{i}{r_j} - \frac{l}{r_k} \right) + \theta \right) \right) d\theta \right) \\ &= \frac{-r_k \log(2)}{2} - \frac{1}{2\pi} \sum_{l=1}^{r_k} \pi \log \left( \frac{1 - z_j z_k + |z_j - z_k|}{2} \right) \\ &= \frac{-r_k \log(2)}{2} - \frac{r_k}{2} \log \left( \frac{1 - z_j z_k + |z_j - z_k|}{2} \right) = -r_k \frac{\log(1 - z_j z_k + |z_j - z_k|)}{2} \end{aligned}$$

□

**Corolario 4.1.5.** Sean  $x_j^i, x_k^l$  como en la Definición 4.1.1 con  $z_j \neq z_k$ . Entonces,

$$\mathbb{E}_{\theta_j, \theta_k} \left[ - \sum_{l=1}^{r_k} \sum_{i=1}^{r_j} \log \left( \|x_j^i - x_k^l\| \right) \right] = -r_j r_k \frac{\log(1 - z_j z_k + |z_j - z_k|)}{2},$$

donde  $\theta_j, \theta_k$  están distribuidos uniformemente en  $[0, 2\pi]$ .

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_j, \theta_k} \left[ - \sum_{l=1}^{r_k} \sum_{i=1}^{r_j} \log \left( \|x_j^i - x_k^l\| \right) \right] &= \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^{r_k} \sum_{i=1}^{r_j} -\log \left( \sqrt{2} \sqrt{1 - z_j z_k - \sqrt{1 - z_j} \sqrt{1 - z_k} \cos \left( 2\pi \left( \frac{i}{r_j} - \frac{l}{r_k} \right) + \theta_j - \theta_k \right)} \right) d\theta_j d\theta_k \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{i=1}^{r_j} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{l=1}^{r_k} -\log \left( \sqrt{2} \sqrt{1 - z_j z_k - \sqrt{1 - z_j} \sqrt{1 - z_k} \cos \left( 2\pi \left( \frac{i}{r_j} - \frac{l}{r_k} \right) + \theta_j - \theta_k \right)} \right) d\theta_j d\theta_k, \end{aligned}$$

que por el Corolario 4.1.4 es igual a

$$\sum_{i=1}^{r_j} -r_k \frac{\log(1 - z_j z_k + |z_j - z_k|)}{2} = -r_k r_j \frac{\log(1 - z_j z_k + |z_j - z_k|)}{2}.$$

□

Gracias al Corolario 4.1.5 podemos demostrar el siguiente resultado, que nos proporciona una expresión para la esperanza de la energía logarítmica del conjunto de puntos  $\Omega(p, r_j, z_j)$ .

**Proposición 4.1.6.** *La esperanza de la energía logarítmica del conjunto de puntos  $\Omega(p, r_j, z_j)$  es*

$$\begin{aligned} E_{\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi]^p} [\mathcal{E}_{\log}(\Omega(p, r_j, z_j))] = \\ - 2 \log(2) - \sum_{j=1}^p r_j \left[ \log(4) + \frac{1}{2} \log(1 - z_j^2) + \log r_j \right] \\ - \sum_{j,k=1}^p r_j r_k \frac{\log(1 - z_j z_k + |z_j - z_k|)}{2}. \end{aligned}$$

*Demostración.* Tenemos que sumar las siguientes cantidades:

- *A:* el logaritmo de la distancia entre cada punto  $x_j^i$ ,  $1 \leq j \leq p$  y  $1 \leq i \leq r_j$  y el polo norte y el polo sur; y el logaritmo de la distancia entre el polo norte y el polo sur.
- *B:* la energía logarítmica de las raíces de la unidad de cada paralelo  $j$  para  $1 \leq j \leq p$ .
- *C:* la esperanza de la suma de los logaritmos de la distancias entre los puntos que pertenecen a diferentes paralelos, como en el Corolario 4.1.5.

Fijémonos en que el componente aleatorio del conjunto  $(\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi])$  solo afecta a la cantidad *C*.

### Cálculo de la cantidad *A*

Sabemos que

$$\begin{aligned} \|(0, 0, 1) - x_j^i\| &= \sqrt{2} \sqrt{1 - z_j}, \\ \|(0, 0, -1) - x_j^i\| &= \sqrt{2} \sqrt{1 + z_j}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, la cantidad *A* viene dada por

$$\begin{aligned} A &= - 2 \log(2) - 2 \sum_{j=1}^p r_j \log \left( \sqrt{2} \sqrt{1 - z_j} \right) - 2 \sum_{j=1}^p r_j \log \left( \sqrt{2} \sqrt{1 + z_j} \right) \\ &= - 2 \log(2) - \sum_{j=1}^p r_j \left( \log(4) + \log(1 - z_j^2) \right). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Multiplicamos por 2 ya que por convenio, para calcular la energía logarítmica contamos la distancia del punto  $p$  a  $q$  y del punto  $q$  a  $p$ .

### Cálculo de la cantidad $B$

Para realizar este cálculo, nos remitimos a [Brauchart et al., 2009].

**Lema 4.1.7.** *La energía logarítmica asociada a las  $N$  raíces de la unidad en la circunferencia unidad es*

$$\mathcal{E}_{\log}(N) = N \sum_{k=2}^N \log \frac{1}{|z_{k,N} - z_{1,N}|} = N \log \frac{1}{2^{N-1} \prod_{k=1}^{N-1} \sin \frac{\pi k}{N}} = -N \log N.$$

*Demostración.* Puede consultarse la prueba en [Brauchart et al., 2009, Pg. 3].  $\square$

**Corolario 4.1.8.** *La energía logarítmica asociada a los  $N$  puntos equidistribuidos en una circunferencia de radio  $R$  es*

$$\mathcal{E}_{\log}^R(N) = -N \log N - N(N-1) \log R.$$

*Demostración.* Seguimos la demostración de [Brauchart et al., 2009, Pg. 3].

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\log}^R(N) &= N \sum_{k=2}^N \log \frac{1}{R|z_{k,N} - z_{1,N}|} = N \sum_{k=2}^N \left( \log \frac{1}{|z_{k,N} - z_{1,N}|} - \log R \right) \\ &= N \left( \sum_{k=2}^N \log \frac{1}{|z_{k,N} - z_{1,N}|} - \sum_{k=2}^N \log R \right) \\ &= -N \log N - \frac{N(N-1)}{2} \log R^2 \\ &= -N \log N + \frac{N(N-1)}{2} \log R^2. \end{aligned}$$

$\square$

Como el paralelo de altura  $z_j$  es una circunferencia de radio  $\sqrt{1 - z_j^2}$ , la cantidad  $B$  es

$$B = - \sum_{j=1}^p r_j \log r_j + \frac{r_j(r_j - 1)}{2} \log(1 - z_j^2). \quad (4.4)$$

### Cálculo de la cantidad $C$

Este cálculo ya ha sido realizado en el Corolario 4.1.5:

$$C = \sum_{k,j=1;k \neq j}^p -r_j r_k \frac{\log(1 - z_j z_k + |z_j - z_k|)}{2}. \quad (4.5)$$

Ahora solo tenemos que sumar las cantidades (4.3), (4.4) y (4.5).

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi]^p} [\mathcal{E}_{\log}(\Omega(p, r_j, z_j))] &= -2 \log(2) - \sum_{j=1}^p r_j (\log(4) + \log(1 - z_j^2)) \\
&- \sum_{j=1}^p \left( r_j \log r_j + \frac{r_j(r_j - 1)}{2} \log(1 - z_j^2) \right) - \sum_{j=1}^p \sum_{k \neq j} r_j r_k \frac{\log(1 - z_j z_k + |z_j - z_k|)}{2} \\
&= -2 \log(2) - \sum_{j=1}^p \left[ r_j \log(4) + r_j \log(1 - z_j^2) + r_j \log r_j + \frac{r_j^2}{2} \log(1 - z_j^2) \right. \\
&\quad \left. - \frac{r_j}{2} \log(1 - z_j^2) + \sum_{k \neq j} r_j r_k \frac{\log(1 - z_j z_k + |z_j - z_k|)}{2} \right] \\
&= -2 \log(2) - \sum_{j=1}^p \left[ r_j \log(4) + \frac{r_j}{2} \log(1 - z_j^2) + r_j \log r_j \right. \\
&\quad \left. + \sum_{k=1}^p r_j r_k \frac{\log(1 - z_j z_k + |z_j - z_k|)}{2} \right].
\end{aligned}$$

□

Una vez definida la estructura general de nuestro conjunto de puntos, podemos definir la estructura de diamante. Para ello, debemos responder a las siguientes preguntas.

**Problema 4.1.9.** *¿Qué paralelos tomamos?*

**Problema 4.1.10.** *¿Cuántos puntos tomamos en cada paralelo?*

**Problema 4.1.11.** *Para unos puntos concretos, ¿la cantidad dada en la Proposición 4.1.6 se puede calcular exactamente hasta el orden  $o(N)$ ?*

Cada una de las siguientes secciones dará respuesta a una de estas preguntas. Las dos primeras preguntas definen la estructura de diamante, y la tercera el cálculo de su energía logarítmica.

## 4.2. Elección de los paralelos

El resultado principal de esta sección consiste en que para cualquier elección de  $r_1, \dots, r_p$  se puede calcular exactamente la elección óptima de alturas  $z_1, \dots, z_p$ . De esta forma, damos respuesta al Problema 4.1.9, siempre que se conozca la respuesta del Problema 4.1.10.

**Proposición 4.2.1.** *Dados  $\{r_1, \dots, r_p\}$  tales que  $r_i \in \mathbb{N}$ , existe un único conjunto de alturas  $\{z_1, \dots, z_p\}$  tales que  $z_1 > \dots > z_p$  y*

$$f(z_1, \dots, z_p) = \mathbb{E}_{\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi]^p} [\mathcal{E}_{\log}(\Omega(p, r_j, z_j))]$$

alcanza su mínimo. Las alturas vienen dadas por:

$$z_l = \frac{\sum_{j=l+1}^p r_j - \sum_{j=1}^{l-1} r_j}{1 + \sum_{j=1}^p r_j} = 1 - \frac{1 + r_l + 2 \sum_{j=1}^{l-1} r_j}{N - 1},$$

donde  $N = 2 + \sum_{j=1}^p r_j$  es el número total de puntos.

*Demostración.* Derivamos la fórmula de la Proposición 4.1.6 respecto de  $z_l$  y obtenemos:

$$\begin{aligned} & \frac{d\mathbf{E}_{\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi]^p} [\mathcal{E}_{\log}(\Omega(p, r_j, z_j))]}{dz_l} \\ &= \frac{\partial}{\partial z_l} \left( - \sum_{j=1}^p \frac{r_j}{2} \log(1 - z_j^2) - \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p r_j r_k \frac{\log(1 - z_j z_k + |z_j - z_k|)}{2} \right) \\ &= \frac{z_l r_l}{1 - z_l^2} + \frac{z_l r_l^2}{1 - z_l^2} + \sum_{j=1}^{l-1} r_j r_l \frac{1 + z_j}{(1 - z_l)(1 + z_j)} - \sum_{j=l+1}^p r_j r_l \frac{1 - z_j}{(1 + z_l)(1 - z_j)} \\ &= \frac{z_l r_l (1 + r_l)}{1 - z_l^2} + \sum_{j=1}^{l-1} \frac{r_j r_l}{1 - z_l} - \sum_{j=l+1}^p \frac{r_j r_l}{1 + z_l} \\ &= \frac{r_l}{1 - z_l^2} \left( (1 + r_l) z_l + (1 + z_l) \sum_{j=1}^{l-1} r_j - (1 - z_l) \sum_{j=l+1}^p r_j \right) \\ &= \frac{r_l}{1 - z_l^2} \left( z_l + \sum_{j=1}^{l-1} r_j - \sum_{j=l+1}^p r_j + z_l \sum_{j=1}^p r_j \right). \end{aligned}$$

Entonces tenemos

$$\frac{d\mathbf{E}_{\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi]^p} [\mathcal{E}_{\log}(\Omega(p, r_j, z_j))]}{dz_l} = 0 \iff z_l \left( 1 + \sum_{j=1}^p r_j \right) = \sum_{j=l+1}^p r_j - \sum_{j=1}^{l-1} r_j.$$

O lo que es lo mismo,

$$z_l = \frac{\sum_{j=l+1}^p r_j - \sum_{j=1}^{l-1} r_j}{1 + \sum_{j=1}^p r_j}.$$

□

A partir de ahora denotaremos por  $\Omega(p, r_j)$  al conjunto  $\Omega(p, r_j, z_j)$  donde los  $z_j$  son los definidos por la Proposición 4.2.1. Con esta elección de  $z_j$  podemos simplificar la fórmula de la Proposición 4.1.6.

**Teorema 4.2.2.** *Sea  $p = 2M - 1$  un número entero impar. Si  $r_j = r_{p+1-j}$  y los  $z_j$  están definidos como en la Proposición 4.2.1 entonces tenemos*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi]^p} [\mathcal{E}_{\log}(\Omega(p, r_j))] \\ &= -(N-1) \log(4) - \sum_{j=1}^p r_j \log r_j - (N-1) \sum_{j=1}^p r_j (1-z_j) \log(1-z_j) \\ &= -(N-1) \log(4) + r_M \log r_M - 2 \sum_{j=1}^M r_j \log r_j \\ &\quad - (N-1) \sum_{j=1}^M r_j (1-z_j) \log(1-z_j) - (N-1) \sum_{j=1}^M r_j (1+z_j) \log(1+z_j). \end{aligned}$$

Para probar el Teorema 4.2.2 utilizaremos el siguiente lema.

**Lema 4.2.3.** *Sea  $r_j = r_{p+1-j}$  y sean  $z_j$  definidos como en la Proposición 4.2.1. Entonces*

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p r_j r_k \log(1 - z_j z_k + |z_j - z_k|) &= (N-1) \sum_{j=1}^p r_j (1-z_j) \log(1-z_j) \\ &\quad - \sum_{j=1}^p r_j \log(1-z_j). \end{aligned}$$

*Demostración.* Sea

$$a_{j,k} = r_j r_k \log(1 - z_j z_k + |z_j - z_k|), \quad b_{j,k} = r_j r_k \log(1 + z_j z_k + |z_j + z_k|),$$

entonces se verifica:

$$a_{j,k} = a_{k,j}, \quad a_{j,p+1-k} = b_{j,k}, \quad a_{p+1-j,k} = b_{j,k}, \quad a_{p+1-j,p+1-k} = a_{j,k}, \quad a_{M,M} = 0.$$

Por lo tanto, tenemos

$$\sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p a_{j,k} = \sum_{j=1}^p a_{j,j} + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^p a_{j,k} = 2 \sum_{j=1}^{M-1} r_j^2 \log(1 - z_j^2) + \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^p a_{j,k}.$$

Es más, como  $p = 2M - 1$ ,

$$\sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^p a_{j,k} = \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^M a_{j,k} + \sum_{j=1}^M \sum_{k=M+1}^{2M-1} a_{j,k} + \sum_{j=M+1}^{2M-1} \sum_{k=1}^M a_{j,k} + \sum_{\substack{j,k=M+1 \\ j \neq k}}^{2M-1} a_{j,k}. \quad (4.6)$$

Las dos sumas del medio del término de la derecha en (4.6) pueden reescribirse como

$$\sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{M-1} b_{j,k} + \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k=1}^M b_{j,k} = 2 \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{M-1} b_{j,k},$$

y como  $z_j \geq 0$  para  $1 \leq j \leq M$  esta última ecuación puede escribirse como

$$\begin{aligned} 2 \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{M-1} b_{j,k} &= 2 \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{M-1} r_j r_k \log(1 + z_j) + 2 \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^{M-1} r_j r_k \log(1 + z_k) \\ &= 2 \left( \sum_{k=1}^{M-1} r_k \right) \sum_{j=1}^M r_j \log(1 + z_j) + 2 \left( \sum_{j=1}^M r_j \right) \sum_{k=1}^{M-1} r_k \log(1 + z_k) \\ &= 2 \left( r_M + 2 \sum_{j=1}^{M-1} r_j \right) \sum_{k=1}^{M-1} r_k \log(1 + z_k), \end{aligned}$$

donde, en el último paso, hemos usado que  $z_M = 0$ . Sustituimos esta última expresión en (4.6) y hemos probado que la suma del lema es

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{M-1} r_j^2 \log(1 - z_j^2) + \left( r_M + 2 \sum_{j=1}^{M-1} r_j \right) \sum_{k=1}^{M-1} r_k \log(1 + z_k) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^M a_{j,k} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=M+1 \\ j \neq k}}^{2M-1} a_{j,k} \\ &= \sum_{j=1}^{M-1} r_j^2 \log(1 - z_j^2) + \left( r_M + 2 \sum_{j=1}^{M-1} r_j \right) \sum_{k=1}^{M-1} r_k \log(1 + z_k) + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^M a_{j,k} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{M-1} a_{j,k}, \end{aligned}$$

para lo cual hemos tenido en cuenta que  $a_{p+1-j,p+1-k} = a_{j,k}$ . Las dos últimas sumas de la expresión anterior tienen muchos términos en común, así que las podemos reagrupar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^M a_{j,k} + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{M-1} a_{j,k} &= \sum_{\substack{j,k=1 \\ j \neq k}}^{M-1} a_{j,k} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M-1} a_{M,k} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{M-1} a_{j,M} \\ &= 2 \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k=1}^{j-1} a_{j,k} + \sum_{k=1}^{M-1} a_{M,k} \\ &= 2 \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k=1}^{j-1} a_{j,k} + \sum_{k=1}^{M-1} r_M r_k \log(1 + z_k), \end{aligned}$$

donde de nuevo estamos usando que  $a_{j,k} = a_{k,j}$  y  $z_M = 0$ . Hasta el momento, tenemos que la suma del lema iguala

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{M-1} r_j^2 \log(1 - z_j^2) + \left( r_M + 2 \sum_{j=1}^{M-1} r_j \right) \sum_{k=1}^{M-1} r_k \log(1 + z_k) \\ &\quad + 2 \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k=1}^{j-1} a_{j,k} + \sum_{k=1}^{M-1} r_M r_k \log(1 + z_k). \end{aligned}$$

A través de pequeñas operaciones algebraicas tenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p r_j r_k \log(1 - z_j z_k + |z_j - z_k|) &= 2 \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k=1}^{j-1} r_j r_k \log(1 - z_j), \\
&+ 2 \sum_{j=1}^{M-1} \sum_{k=1}^{j-1} r_j r_k \log(1 + z_k), \\
&+ \sum_{j=1}^{M-1} r_j^2 \log(1 - z_j^2), \\
&+ 2 \left( \sum_{j=1}^M r_j \right) \sum_{k=1}^{M-1} r_k \log(1 + z_k).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Si cambiamos el orden de suma y el nombre de las variables, el segundo sumando del término de la derecha de (4.7) puede escribirse como

$$\begin{aligned}
2 \sum_{j=1}^{M-2} r_j \log(1 + z_j) \sum_{k=j+1}^{M-1} r_k &= 2 \sum_{j=1}^{M-2} r_j \log(1 + z_j) \left( \sum_{k=1}^{M-1} r_k - r_j - \sum_{k=1}^{j-1} r_k \right) \\
&= 2 \sum_{j=1}^{M-1} r_j \log(1 + z_j) \left( \frac{N - r_M}{2} - 1 - r_j - \sum_{k=1}^{j-1} r_k \right).
\end{aligned}$$

Con lo que hemos probado que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p r_j r_k \log(1 - z_j z_k + |z_j - z_k|) &= 2 \sum_{j=1}^{M-1} r_j \log(1 - z_j) \left( \sum_{k=1}^{j-1} r_k \right) \\
&+ 2 \sum_{j=1}^{M-1} r_j \log(1 + z_j) \left( \frac{N - r_M}{2} - 1 - r_j - \sum_{k=1}^{j-1} r_k \right) + \sum_{j=1}^{M-1} r_j^2 \log(1 - z_j^2) \\
&+ (N - 2 + r_M) \sum_{j=1}^{M-1} r_j \log(1 + z_j).
\end{aligned}$$

Tras simplificar obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p r_j r_k \log(1 - z_j z_k + |z_j - z_k|) &= \sum_{j=1}^{M-1} r_j \left( r_j + 2 \sum_{k=1}^{j-1} r_k \right) \log(1 - z_j) \\
&- \sum_{j=1}^{M-1} r_j \left( r_j + 2 \sum_{k=1}^{j-1} r_k \right) \log(1 + z_j) \\
&+ (2N - 4) \sum_{j=1}^{M-1} r_j \log(1 + z_j).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Nos fijamos ahora en los dos primeros sumandos del término de la derecha de (4.8). Para ello recordamos que

$$z_j = 1 - \frac{1 + r_j + 2 \sum_{k=1}^{j-1} r_k}{N-1} \implies r_j + 2 \sum_{k=1}^{j-1} r_k = (N-1)(1 - z_j) - 1,$$

y por lo tanto la suma del lema es

$$\begin{aligned} & (N-1) \sum_{j=1}^{M-1} r_j (1 - z_j) \log(1 - z_j) - \sum_{j=1}^{M-1} r_j \log(1 - z_j) \\ & - (N-1) \sum_{j=1}^{M-1} r_j (1 - z_j) \log(1 + z_j) + \sum_{j=1}^{M-1} r_j \log(1 + z_j) \\ & + (2N-4) \sum_{j=1}^{M-1} r_j \log(1 + z_j), \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} & (N-1) \sum_{j=1}^{M-1} r_j (1 - z_j) \log(1 - z_j) - \sum_{j=1}^{M-1} r_j \log(1 - z_j) \\ & + (N-1) \sum_{j=1}^{M-1} r_j (1 + z_j) \log(1 + z_j) - \sum_{j=1}^{M-1} r_j \log(1 + z_j). \end{aligned}$$

La simetría  $z_j = z_{p+1-j}$  nos permite escribir que esta última expresión como

$$\begin{aligned} & (N-1) \sum_{j=1}^{M-1} r_j (1 - z_j) \log(1 - z_j) - \sum_{j=1}^{M-1} r_j \log(1 - z_j) \\ & + (N-1) \sum_{j=M+1}^p r_j (1 - z_j) \log(1 - z_j) - \sum_{j=M+1}^p r_j \log(1 - z_j). \end{aligned}$$

Por lo tanto hemos probado (usando que  $z_M = 0$ ) que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p r_j r_k \log(1 - z_j z_k + |z_j - z_k|) &= (N-1) \sum_{j=1}^p r_j (1 - z_j) \log(1 - z_j) \\ & - \sum_{j=1}^p r_j \log(1 - z_j). \end{aligned}$$

□

*Demostración del Teorema 4.2.2.* Escribimos la fórmula de la Proposición 4.1.6 y sustituimos el último sumando por la expresión obtenida en el Lema 4.2.3.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi]^p} [\mathcal{E}_{\log}(\Omega(p, r_j))] &= -2 \log(2) - (N-2) \log(4) - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p r_j \log(1 - z_j^2) \\ &- \sum_{j=1}^p r_j \log r_j - (N-1) \sum_{j=1}^p r_j (1 - z_j) \log(1 - z_j) + \sum_{j=1}^p r_j \log(1 - z_j). \end{aligned}$$

Usamos ahora que  $z_j = -z_{p+1-j}$  y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p r_j \log(1 - z_j^2) &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p r_j \log(1 - z_j) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p r_j \log(1 + z_j) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p r_j \log(1 - z_j) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p r_j \log(1 - z_j) = \sum_{j=1}^p r_j \log(1 - z_j). \end{aligned}$$

Por lo tanto ese término se cancela con el último y obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi]^p} [\mathcal{E}_{\log}(\Omega(p, r_j))] &= -2 \log(2) - (N-2) \log(4) - \sum_{j=1}^p r_j \log r_j \\ &- (N-1) \sum_{j=1}^p r_j (1 - z_j) \log(1 - z_j) \\ &= -(N-1) \log(4) - \sum_{j=1}^p r_j \log r_j - (N-1) \sum_{j=1}^p r_j (1 - z_j) \log(1 - z_j). \end{aligned}$$

□

### 4.3. El número de puntos apropiado por paralelo

El problema que nos ocupa ahora consiste en escoger ciertos números naturales  $r_1, \dots, r_p$  tales que la esperanza de la energía logarítmica asociada a  $r_1, \dots, r_p$  y los correspondientes  $z_1, \dots, z_p$  dados por la Proposición 4.2.1 sea tan pequeña como sea posible. Buscamos, por lo tanto, dar respuesta al Problema 4.1.10.

Para escoger el número correcto de puntos por paralelo, utilizaremos el siguiente argumento heurístico: definimos un conjunto llamado el conjunto modelo que sigue la estructura general de la Definición 4.1.1, pero que no tiene un número natural de puntos en cada paralelo, sino un número real. Es decir, permitimos que  $r_j$  tome cualquier valor real. La estructura de diamante aproxima el conjunto modelo tomando un número entero de puntos en cada paralelo.

### 4.3.1. El conjunto modelo

Sean  $z_1, \dots, z_p$  tales que definen  $p$  paralelos equidistantes en la esfera. La distancia euclídea entre dos paralelos consecutivos es  $\pi/(p+1)$  y los  $z_j$  resultantes son los nodos de Chebyshev:

$$z_j = \cos \frac{j\pi}{p+1}. \quad (4.9)$$

Nos gustaría tomar  $r_j$  de manera que la distancia entre dos puntos consecutivos del mismo paralelo sea aproximadamente igual a una constante por la distancia esférica entre dos paralelos consecutivos:  $2 \sin(\pi/2(p+1))$ . Como el paralelo de altura  $z_j$  es una circunferencia de radio  $\sin(j\pi/(p+1))$ , el número de puntos debe ser parecido a

$$r_j = K_0 \frac{2\pi \sin\left(\frac{j\pi}{p+1}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi}{2(p+1)}\right)} = K_0 \frac{\pi \sin\left(\frac{j\pi}{p+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2(p+1)}\right)}. \quad (4.10)$$

**Proposición 4.3.1.** *El número total de puntos del conjunto  $\Omega(p, r_j, z_j)$  con  $z_j$  definido en la ecuación (4.9) y  $r_j$  definido en la ecuación (4.10) entendido como  $N = 2 + r_1 + \dots + r_p$  es*

$$\#\Omega(p, r_j, z_j) = N = 2 + \frac{K_0 \pi \cos\left(\frac{\pi}{2(p+1)}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2(p+1)}\right)}$$

La asintótica de  $N$  en función de  $p$  viene dada por

$$N = \frac{4K_0(p+1)^2}{\pi} + o(1).$$

Para probar la Proposición 4.3.1 utilizaremos el siguiente Lema.

**Lema 4.3.2.** *La siguiente igualdad se verifica*

$$\sum_{i=1}^p \sin\left(\frac{i\pi}{p+1}\right) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2(p+1)}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2(p+1)}\right)}.$$

*Demostración.* Es un resultado clásico, se puede encontrar por ejemplo en [Gradshteyn and Ryzhik, 2015, Formula 1.344].  $\square$

*Demostración de la Proposición 4.3.1.* Gracias al Lema 4.3.2 tenemos que:

$$N = 2 + K_0 \sum_{i=1}^p \frac{\pi \sin\left(\frac{i\pi}{p+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2(p+1)}\right)} = 2 + K_0 \frac{\pi \cos\left(\frac{\pi}{2(p+1)}\right)}{\sin^2\left(\frac{\pi}{2(p+1)}\right)}.$$

Para la asintótica, utilizamos los desarrollos de Taylor del seno y el coseno en torno al punto 0.

$$N = 2 + K_0 \frac{\pi \left(1 - \frac{\pi^2}{8(p+1)^2} + o((p+1)^{-3})\right)}{\left(\frac{\pi^2}{4(p+1)^2} + o((p+1)^{-3})\right)} = 2 + K_0 \frac{4(p+1)^2}{\pi} - K_0 \frac{\pi}{2} + o(1).$$

$\square$

Olvidémonos por un momento de que esta elección de  $r_j$  no es válida ya que no son números naturales. Lo que sí que podemos hacer es sustituir las expresiones (4.9) y (4.10) en la fórmula de la Proposición 4.1.6.

**Teorema 4.3.3.** *Consideremos el conjunto  $\Omega(p, r_j, z_j)$  con  $z_j$  definido en la ecuación (4.9) y  $r_j$  definido en la ecuación (4.10). Entonces,*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi]} [\Omega(p, z_j, r_j)] \\ &= W_{\log(\mathbb{S}^2)} N^2 - \frac{1}{2} N \log(N) + \left( \frac{K_0 \pi}{6} - \frac{1}{2} \log K_0 - \frac{\log \pi}{2} \right) N + o(N), \end{aligned} \quad (4.11)$$

donde  $N = 2 + r_1 + \dots + r_p$  es el número total de puntos.

**Corolario 4.3.4.** *Consideremos el conjunto  $\Omega(p, r_j, z_j)$  con  $z_j$  definido en la ecuación (4.9) y  $r_j$  definido en la ecuación (4.10). Entonces,*

$$\mathbb{E}_{\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi]^p} [\mathcal{E}_{\log}(\Omega)] \leq -\frac{\log\left(\frac{4}{e}\right)}{2} N^2 - \frac{1}{2} N \log(N) + \frac{1 - \log(3)}{2} N + o(N),$$

donde  $\frac{1 - \log(3)}{2} \approx -0.0493$ .

Dedicaremos el resto de la sección a demostrar el Teorema 4.3.3 y el Corolario 4.3.4. Comenzamos con algunos lemas técnicos.

**Lema 4.3.5.**

$$\int_0^1 \sin(y\pi) \log(1 - \cos(\pi x) \cos(\pi y) + |\cos(\pi x) - \cos(\pi y)|) dy = \frac{2 \log\left(\frac{4}{e}\right)}{\pi}.$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned} \int_0^1 g_j(y) dy &= \int_0^{\frac{j}{p+1}} \sin(y\pi) \left[ \log(1 + \cos(\pi y)) + \log\left(1 - \cos\left(\frac{j\pi}{p+1}\right)\right) \right] dy \\ &+ \int_{\frac{j}{p+1}}^1 \sin(y\pi) \left[ \log\left(1 + \cos\left(\frac{j\pi}{p+1}\right)\right) + \log(1 - \cos(\pi y)) \right] dy, \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{j}{p+1}} \sin(y\pi) \left[ \log(1 + \cos(\pi y)) + \log\left(1 - \cos\left(\frac{j\pi}{p+1}\right)\right) \right] dy \\ &= \int_0^{\frac{j}{p+1}} \sin(y\pi) \log(1 + \cos(\pi y)) dy + \int_0^{\frac{j}{p+1}} \sin(y\pi) \log\left(1 - \cos\left(\frac{j\pi}{p+1}\right)\right) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \left(1 + \cos\left(\frac{j\pi}{p+1}\right)\right) \left(1 - \log\left(1 + \cos\left(\frac{j\pi}{p+1}\right)\right)\right) \\ &- \frac{2 \log\left(\frac{e}{2}\right)}{\pi} + \frac{1}{\pi} \log\left(1 - \cos\left(\frac{j\pi}{p+1}\right)\right) \left(1 - \cos\left(\frac{j\pi}{p+1}\right)\right), \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{j}{p+1}}^1 \sin(y\pi) \left[ \log \left( 1 + \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) + \log(1 - \cos(\pi y)) \right] dy \\
&= \int_{\frac{j}{p+1}}^1 \sin(y\pi) \log \left( 1 + \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) dy + \int_{\frac{j}{p+1}}^1 \sin(y\pi) \log(1 - \cos(\pi y)) dy \\
&= \frac{1}{\pi} \log \left( 1 + \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) \left( 1 + \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) - \frac{2 \log \left( \frac{e}{2} \right)}{\pi} \\
&+ \frac{1}{\pi} \left( 1 - \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) \left( 1 - \log \left( 1 - \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) \right).
\end{aligned}$$

Con lo que tenemos

$$\begin{aligned}
\int_0^1 g_j(y) dy &= \frac{1}{\pi} \left( 1 + \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) \left( 1 - \log \left( 1 + \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) \right) \\
&+ \frac{1}{\pi} \log \left( 1 + \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) \left( 1 + \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) - \frac{2 \log \left( \frac{e}{2} \right)}{\pi} - \frac{2 \log \left( \frac{e}{2} \right)}{\pi} \\
&+ \frac{1}{\pi} \log \left( 1 - \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) \left( 1 - \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) \\
&+ \frac{1}{\pi} \left( 1 - \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) \left( 1 - \log \left( 1 - \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) \right) \\
&= \frac{1}{\pi} \left( 1 + \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) - \frac{4 \log \left( \frac{e}{2} \right)}{\pi} + \frac{1}{\pi} \left( 1 - \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) \\
&= \frac{2 \log \left( \frac{4}{e} \right)}{\pi}.
\end{aligned}$$

□

**Lema 4.3.6.** *Sea  $p \in \mathbb{N}$ , entonces la siguiente desigualdad se verifica,*

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^p \sin \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \sin \left( \frac{k\pi}{p+1} \right) \log \left( 1 - \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \cos \left( \frac{k\pi}{p+1} \right) \right) \\
&+ \left| \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) - \cos \left( \frac{k\pi}{p+1} \right) \right| \\
&\leq \frac{2 \log \left( \frac{4}{e} \right) \cos \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right) (p+1)}{\pi \sin \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)} - \frac{\pi \log(2e) \cos \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)}{6(p+1) \sin \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)} - \frac{\log \left( \frac{2}{e} \right)}{3} + o(1).
\end{aligned}$$

*Demostración.* Denotamos por

$$\begin{aligned}
S &= \sum_{k=1}^p \sin \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \sin \left( \frac{k\pi}{p+1} \right) \log \left( 1 - \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \cos \left( \frac{k\pi}{p+1} \right) \right) \\
&+ \left| \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) - \cos \left( \frac{k\pi}{p+1} \right) \right|,
\end{aligned}$$

y definimos la función

$$g_j(y) = \sin(y\pi) \log \left( 1 - \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \cos(y\pi) + \left| \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) - \cos(y\pi) \right| \right).$$

Finalmente, denotamos por

$$\begin{aligned} S_j &= \sum_{k=1}^p g_j \left( \frac{k}{p+1} \right) \\ &= \sum_{k=1}^p \sin \left( \frac{k\pi}{p+1} \right) \log \left( 1 - \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \cos \left( \frac{k\pi}{p+1} \right) + \left| \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) - \cos \left( \frac{k\pi}{p+1} \right) \right| \right). \end{aligned}$$

La función  $g_j(y)$  está definida por expresiones diferentes en los intervalos  $\left[0, \frac{j}{p+1}\right]$  y  $\left[\frac{j}{p+1}, 1\right]$ . Calculamos las derivadas de  $g_j(y)$  en cada intervalo y obtenemos

- Para  $y \in \left[0, \frac{j}{p+1}\right]$ :
  - $g_j(y) = \sin(y\pi) \left[ \log(1 + \cos(\pi y)) + \log \left( 1 - \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) \right]$ .
  - $g'_j(y) = \pi \left[ \cos(\pi y) \left( 1 + \log(1 + \cos(\pi y)) + \log \left( 1 - \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) \right) - 1 \right]$ .
- Para  $y \in \left[\frac{j}{p+1}, 1\right]$ :
  - $g_j(y) = \sin(y\pi) \left[ \log \left( 1 + \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) + \log(1 - \cos(\pi y)) \right]$ .
  - $g'_j(y) = \pi \left[ \cos(\pi y) \left( 1 + \log \left( 1 + \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) + \log(1 - \cos(\pi y)) \right) + 1 \right]$ .

Aplicamos la regla del trapecio compuesta (véase el Apéndice B) con  $j$  subintervalos en el intervalo  $\left[0, \frac{j}{p+1}\right]$  y  $p+1-j$  subintervalos en el intervalo  $\left[\frac{j}{p+1}, 1\right]$ .

$$\begin{aligned} A) &= \int_0^{\frac{j}{p+1}} g_j(y) dy = \frac{1}{p+1} \left[ \frac{g_j \left( \frac{j}{p+1} \right) + g_j(0)}{2} + \sum_{k=1}^{j-1} g_j \left( \frac{k}{p+1} \right) \right] \\ &\quad - \frac{g'_j \left( \frac{j}{p+1} \right) - g'_j(0)}{12(p+1)^2} + o((p+1)^{-3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B) &= \int_{\frac{j}{p+1}}^1 g_j(y) dy = \frac{1}{p+1} \left[ \frac{g_j(1) + g_j \left( \frac{j}{p+1} \right)}{2} + \sum_{k=j+1}^p g_j \left( \frac{k}{p+1} \right) \right] \\ &\quad - \frac{g'_j(1) - g'_j \left( \frac{j}{p+1} \right)}{12(p+1)^2} + o((p+1)^{-3}) \end{aligned}$$

Sumando A) y B) obtenemos

$$\int_0^1 g_j(y) dy = \frac{1}{p+1} \left[ \frac{g_j(0) + g_j(1)}{2} + \sum_{k=1}^p g_j \left( \frac{k}{p+1} \right) \right] - \frac{g'_j(1) + g'_j \left( \frac{j}{p+1} \right)_- - g'_j \left( \frac{j}{p+1} \right)_+ - g'_j(0)}{12(p+1)^2} + o((p+1)^{-3}), \quad (4.12)$$

donde  $g'_j \left( \frac{j}{p+1} \right)_-$  es la derivada por la izquierda y  $g'_j \left( \frac{j}{p+1} \right)_+$  es la derivada por la derecha. Por el Lema 4.3.5:

$$\int_0^1 g_j(y) dy = \frac{2 \log \left( \frac{4}{e} \right)}{\pi}.$$

Además, sabemos que  $g_j(0) = 0 = g_j(1)$  y

$$\begin{aligned} g'_j(0) &= \pi \left( \log(2) + \log \left( 1 - \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) \right), \\ g'_j \left( \frac{j}{p+1} \right)_- - g'_j \left( \frac{j}{p+1} \right)_+ &= -2\pi, \\ g'_j(1) &= -\pi \left( \log(2) + \log \left( 1 + \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) \right). \end{aligned}$$

Sustituimos estas expresiones en la fórmula (4.12) y obtenemos

$$\frac{2 \log \left( \frac{4}{e} \right)}{\pi} = \frac{1}{p+1} \sum_{k=1}^p g_j \left( \frac{k}{p+1} \right) + \frac{\pi \left( \log(2e) + \log \left( \sin \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) \right)}{6(p+1)^2} + o((p+1)^{-3}).$$

Concluimos que

$$S_j = \sum_{j=1}^p g_j \left( \frac{k}{p+1} \right) = \frac{2 \log \left( \frac{4}{e} \right)}{\pi} (p+1) - \frac{\pi \log \left( \sin \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right)}{6(p+1)} - \frac{\pi \log(2e)}{6(p+1)} + o((p+1)^{-3}).$$

Por lo tanto  $S$  resulta

$$S = \sum_{k=1}^p \sin \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \left( \frac{2 \log \left( \frac{4}{e} \right)}{\pi} (p+1) - \frac{\pi \log \left( \sin \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right)}{6(p+1)} - \frac{\pi \log(2e)}{6(p+1)} + o((p+1)^{-3}) \right)$$

Gracias al Lema 4.3.2 tenemos

$$\begin{aligned} S &= \frac{2 \log \left( \frac{4}{e} \right) \cos \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right) (p+1)}{\pi \sin \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)} - \frac{\pi \log(2e) \cos \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)}{6(p+1) \sin \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)} \\ &\quad - \frac{\pi}{6(p+1)} \sum_{k=1}^p \sin \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \log \left( \sin \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \right) + o((p+1)^{-3}). \end{aligned}$$

Como  $f(x) = \sin(\pi x) \log(\sin(\pi x))$  es una función continua, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p+1} \sin\left(\frac{j\pi}{p+1}\right) \log\left(\sin\left(\frac{j\pi}{p+1}\right)\right) &= \int_0^1 \sin(\pi x) \log(\sin(\pi x)) dx + o(1) \\ \Rightarrow \sum_{k=1}^p \sin\left(\frac{j\pi}{p+1}\right) \log\left(\sin\left(\frac{j\pi}{p+1}\right)\right) &= \frac{2 \log\left(\frac{2}{e}\right)}{\pi} (p+1) + o(p+1). \end{aligned} \quad (4.13)$$

En nuestra fórmula

$$\begin{aligned} -\frac{\pi}{6(p+1)} \sum_{k=1}^p \sin\left(\frac{j\pi}{p+1}\right) \log\left(\sin\left(\frac{j\pi}{p+1}\right)\right) &= -\frac{\pi}{6(p+1)} \left( \frac{2 \log\left(\frac{2}{e}\right)}{\pi} (p+1) + o(p+1) \right) \\ &= -\frac{\log\left(\frac{2}{e}\right)}{3} + o(1). \end{aligned}$$

Si sustituimos este último resultado en  $S$  tenemos

$$S = \frac{2 \log\left(\frac{4}{e}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2(p+1)}\right) (p+1)}{\pi \sin\left(\frac{\pi}{2(p+1)}\right)} - \frac{\pi \log(2e) \cos\left(\frac{\pi}{2(p+1)}\right)}{6(p+1) \sin\left(\frac{\pi}{2(p+1)}\right)} - \frac{\log\left(\frac{2}{e}\right)}{3} + o(1).$$

□

*Demostración del Teorema 4.3.3.* Sustituimos los valores de  $z_j$  y  $r_j$  en la fórmula de la Proposición 4.1.6 y obtenemos:

$$\mathcal{E}_{\log}(\Omega(p, r_j, z_j)) = -2 \log(2) + (I) + (II) + (III). \quad (4.14)$$

donde

$$\begin{aligned} (I) &= \frac{\pi K_0 \left( \log\left(\sin\left(\frac{\pi}{2(p+1)}\right)\right) - \log(4) - \log(K_0 \pi) \right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2(p+1)}\right)} \sum_{j=1}^p \sin\left(\frac{j\pi}{p+1}\right) \\ (II) &= -\frac{2\pi K_0}{\sin\left(\frac{\pi}{2(p+1)}\right)} \sum_{j=1}^p \sin\left(\frac{j\pi}{p+1}\right) \log\left(\sin\left(\frac{j\pi}{p+1}\right)\right) \\ (III) &= -\sum_{j=1}^p \frac{\pi^2 K_0^2}{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{2(p+1)}\right)} \sum_{K_0=1}^p \sin\left(\frac{j\pi}{p+1}\right) \sin\left(\frac{K_0 \pi}{p+1}\right) \times \\ &\quad \log\left(1 - \cos\left(\frac{j\pi}{p+1}\right) \cos\left(\frac{K_0 \pi}{p+1}\right) + \left| \cos\left(\frac{j\pi}{p+1}\right) - \cos\left(\frac{K_0 \pi}{p+1}\right) \right|\right) \end{aligned}$$

**Cálculo de la cantidad (I)**

Por el Lema 4.3.2 tenemos que

$$(I) = \frac{K_0\pi \left( \log \left( \sin \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right) \right) - \log(4) - \log(K_0\pi) \right) \cos \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)}.$$

Como  $N = 2 + K_0 \frac{\pi \cos \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)}$  podemos escribir

$$\begin{aligned} (I) &= K_0 \left( \log \left( \sin \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right) \right) - \log(4) - \log(K_0\pi) \right) \frac{N-2}{K_0} \\ &= \log \left( \sin \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right) \right) N + \log \left( \frac{1}{4K_0\pi} \right) N + o(N). \end{aligned}$$

El comportamiento asintótico de  $\log \left( \sin \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right) \right) N$  es

$$\log \left( \sin \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right) \right) N = \log \left( \sqrt{\frac{K_0\pi}{N}} \right) N + o(N) = \frac{\log K_0\pi}{2} N - \frac{1}{2} N \log N + o(N).$$

Y por lo tanto,

$$(I) = -\frac{1}{2} N \log N + \log \left( \frac{1}{4\sqrt{K_0\pi}} \right) N + o(N). \quad (4.15)$$

**Cálculo de la cantidad (II)**

Usamos el mismo argumento que utilizamos en la ecuación (4.13):

$$(II) = \frac{-2K_0\pi}{\sin \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)} \left( \frac{2 \log \left( \frac{2}{e} \right)}{\pi} (p+1) + o(p+1) \right) = \frac{4K_0 \log \left( \frac{e}{2} \right) (p+1)}{\sin \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)} - o((p+1)^2).$$

Para  $N$  suficientemente grande tenemos  $N = K_0 \frac{4(p+1)^2}{\pi}$  así que,

$$(II) = 2 \log \left( \frac{e}{2} \right) N + o(N). \quad (4.16)$$

### Cálculo de la cantidad (III)

Por el Lema 4.3.6,

$$\begin{aligned}
& - \frac{K_0^2 \pi^2}{2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)} \sum_{j=1}^p \sum_{K_0=1}^p \sin \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \sin \left( \frac{K_0 \pi}{p+1} \right) \log \left( 1 - \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) \cos \left( \frac{K_0 \pi}{p+1} \right) \right. \\
& \quad \left. + \left| \cos \left( \frac{j\pi}{p+1} \right) - \cos \left( \frac{K_0 \pi}{p+1} \right) \right| \right) \\
& \leq - \frac{K_0^2 \pi^2}{2 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)} \left( \frac{2 \log \left( \frac{4}{e} \right) \cos \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right) (p+1)}{\pi \sin \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)} - \frac{\pi \log \left( \frac{2}{e} \right) \cos \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)}{6(p+1) \sin \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)} - \frac{\log \left( \frac{2}{e} \right)}{3} + o(1) \right) \\
& = - \frac{K_0^2 \pi \log \left( \frac{4}{e} \right) \cos \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right) (p+1)}{\sin^3 \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)} + \frac{K_0^2 \pi^3 \log (2e) \cos \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)}{12 \sin^3 \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right) (p+1)} + \frac{K_0^2 \pi^2 \log \left( \frac{2}{e} \right)}{6 \sin^2 \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)} \\
& + o((p+1)^2).
\end{aligned}$$

Describimos la asintótica de  $p$  en términos de  $N$ , y reescribimos (III) como

$$(III) = \frac{\log \left( \frac{e}{4} \right)}{2} N^2 + \left( 2 \log \left( \frac{4}{e} \right) + \frac{K_0 \pi}{6} \right) N + o(N) \quad (4.17)$$

Solo nos queda sumar las cantidades (I), (II) y (III) de las ecuaciones (4.15), (4.16) y (4.17):

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_{\log}(\Omega(p, r_j, z_j)) & \leq \frac{\log \left( \frac{e}{4} \right)}{2} N^2 + \left( 2 \log \left( \frac{4}{e} \right) + \frac{K_0 \pi}{6} \right) N + 2 \log \left( \frac{e}{2} \right) N - \frac{1}{2} N \log N \\
& \quad + \log \left( \frac{1}{4\sqrt{K_0 \pi}} \right) N + o(N) \\
& = \frac{\log \left( \frac{e}{4} \right)}{2} N^2 - \frac{1}{2} N \log N + \left( \frac{K_0 \pi}{6} - \frac{\log(K_0 \pi)}{2} \right) N + o(N)
\end{aligned}$$

□

*Demostración del Corolario 4.3.4.* Consideramos la función

$$f(K) = \frac{K\pi}{6} - \frac{\log(K\pi)}{2}.$$

$f(K)$  presenta un mínimo global en  $K = \frac{3}{\pi}$ , así que basta con tomar  $K_0 = \frac{3}{\pi}$ . □

## 4.4. La estructura de diamante

Inspirados por el argumento heurístico presentado en la Sección 4.3.1, nuestro objetivo ahora consiste en encontrar conjuntos de puntos de la forma  $\Omega(p, r_j, z_j)$ , con  $z_j$  dados por la Proposición 4.2.1 y para los cuales  $r_j$  es un número entero cercano a  $\frac{3 \sin \left( \frac{j\pi}{p+1} \right)}{\sin \left( \frac{\pi}{2(p+1)} \right)}$ . Nuestra

forma de aproximar  $r_j$  consiste en considerar diferentes aproximaciones lineales a trozos para la fórmula (4.10) cuando  $K_0 = 3/\pi$ .

**Definición 4.4.1.** Sean  $p, M$  dos números naturales con  $p = 2M - 1$  impar y sea  $r_j = r(j)$  donde  $r : [0, 2M] \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua lineal a trozos que satisface que  $r(x) = r(2M - x)$  y

$$r(x) = \begin{cases} \alpha_1 + \beta_1 x & \text{si } 0 = t_0 \leq x \leq t_1 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n + \beta_n x & \text{si } t_{n-1} \leq x \leq t_n = M \end{cases}$$

Denotamos por  $[t_0, t_1, \dots, t_n]$  a una partición de  $[0, M]$  y asumimos que todos los  $t_\ell, \alpha_\ell, \beta_\ell$  son números enteros.

Sea  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_\ell, \beta_\ell \geq 0$  y  $\beta_1 > 0$ , y sea  $A \geq 2$  una constante que no depende de  $M$  tal que  $\alpha_\ell \leq AM$  y  $\beta_\ell \leq A$ . Suponemos también que  $t_1 \geq cM$  para algún  $c \geq 0$ . Sean  $z_j$  definidos como en la Proposición 4.2.1.

Decimos que una familia de puntos sigue la estructura de diamante si sus  $z_j$  y  $r_j$  verifican las expresiones anteriores. Denotamos por  $\diamond(N)$  a un conjunto de puntos que presenta la estructura de diamante, omitiendo en la notación su dependencia de los parámetros  $n, t_1, \dots, t_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ . El número total de puntos de la estructura de diamante es

$$N = 2 - (\alpha_n + \beta_n M) + 2 \sum_{\ell=1}^n \sum_{j=t_{\ell-1}+1}^{t_\ell} (\alpha_\ell + \beta_\ell j).$$

Denotamos por  $N_\ell$  el número total de puntos hasta  $t_{\ell-1}$ , esto es,

$$N_\ell = \sum_{j=1}^{t_{\ell-1}-1} r_j.$$

Nos fijamos en que si  $j \in [t_{\ell-1}, t_\ell]$  entonces

$$\begin{aligned} z_j &= 1 - \frac{1 + r_j + 2 \sum_{k=1}^{j-1} r_k}{N - 1} = 1 - \frac{1 + 2N_j - r_j + 2 \sum_{k=t_{\ell-1}}^j (\alpha_\ell + \beta_\ell k)}{N - 1} \\ &= 1 - \frac{1 + 2N_j - (\alpha_\ell + \beta_\ell j) + 2\alpha_\ell(j - t_{\ell-1} + 1) + \beta_\ell(j + t_{\ell-1})(j - t_{\ell-1} + 1)}{N - 1}. \end{aligned}$$

Así que consideramos la función  $z(x)$  definida a trozos por parábolas

$$z_\ell(x) = 1 - \frac{1 + 2N_j - (\alpha_\ell + \beta_\ell x) + 2\alpha_\ell(x - t_{\ell-1} + 1) + \beta_\ell(x + t_{\ell-1})(x - t_{\ell-1} + 1)}{N - 1} \quad (4.18)$$

donde  $z_j = z(j)$ .

### Zonal Equal Area Nodes

En [Rakhmanov et al., 1994] los autores definen una partición regular de  $\mathbb{S}^2$  que consiste en dos casquetes esféricos centrados en el polo norte y el polo sur y celdas rectangulares situadas entre distintos paralelos de  $\mathbb{S}^2$ . Recordamos que en la Sección 2.2 se presentan la definición y algunas de las propiedades de las particiones regulares. El parecido entre el conjunto de puntos que obtenemos si consideramos el centro de cada celda de la partición (llamado Zonal Equal Area Nodes) y la estructura de diamante es notable, y aunque las distintas construcciones no dan lugar a los mismos puntos, estos son muy parecidos. De hecho, tanto los autores de [Rakhmanov et al., 1994] como nosotros mismos intentamos aproximar el valor de  $r_j$  definido en la fórmula (4.10) por un número natural. Las cotas que obtenemos para la energía logarítmica son ligeramente mejores que las cotas numéricas obtenidas en [Hardin et al., 2016] para los Zonal Equal Area Nodes.

La Proposición [Hardin et al., 2016, Proposition 2.3.] demuestra que la sucesión de los Zonal Equal Area Nodes esta equidistribuida y es casi uniforme. Dada la similitud entre nuestra estructura y esta última, deducimos que un resultado similar podría probarse para la estructura de diamante.

A continuación exploramos dos ejemplos diferentes (definidos por diferentes parámetros) de la estructura de diamante. Ilustraremos cada ejemplo con un par de gráficas: un ejemplo de puntos que corresponden al conjunto (véase los gráficas 4.1 y 4.3) y una gráfica que muestra la función  $r_j$  que define el conjunto y la curva original  $r_j$  definida en la fórmula (4.10) con  $K_0 = 3/\pi$  (gráficas 4.2 y 4.4). En las gráficas 4.1 y 4.3 hemos usado diferentes colores para los puntos obtenidos de las diferentes componentes lineales que definen  $r(x)$ .

#### 4.4.1. Un ejemplo sencillo

Tomamos  $n = 1$ ,  $r_j = Kj$  con  $K$  un número natural para  $1 \leq j \leq M$ . Entonces para  $l \in \{1, \dots, M\}$  tenemos

$$z_l = 1 - \frac{1 + Kl^2}{N - 1}.$$

El número total de paralelos es  $2M - 1$  y el número total de puntos del conjunto es

$$N = 2 + \sum_{j=1}^p r_j = 2 - KM + 2 \sum_{j=1}^M Kj = 2 + KM^2.$$

#### La familia de Octahedral points

En [Holhos and Roşca, 2014] se define una aplicación de la esfera unidad al octaedro regular circunscrito en ella que preserva las áreas. En el mismo artículo, los autores definen dos conjuntos de puntos en la esfera usando dicha aplicación en algunas mallas jerárquicas

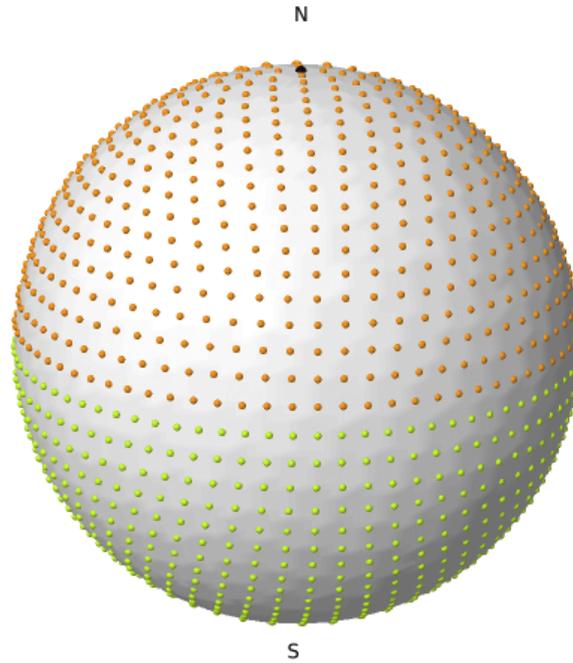


Figura 4.1: Una realización del ejemplo sencillo con  $K = 4$  y  $N = 1602$ . Los diferentes colores de los puntos corresponden a las diferentes componentes lineales que definen  $r(x)$ .

triangulares definidas en las caras del octaedro. El primero de los conjuntos,  $\Omega_N$ , está definido por los vértices de la malla y el segundo,  $\Lambda_N$ , por los centros de los triángulos de la misma.

$\Omega_N$  está formada por  $4M^2 + 2$  puntos en la esfera que son muy similares a una realización concreta (con  $\theta_j = 0 \forall 1 \leq j \leq p$ ) de nuestro ejemplo sencillo para  $K = 4$ .

#### 4.4.2. Un ejemplo algo más elaborado

Sea  $p = 2M - 1$  con  $M = 4m$  y  $m$  un número entero positivo. Sea  $n = 3$  y sea  $r_j = r(j)$  donde

$$r(x) = \begin{cases} 6x & 0 \leq x \leq 2m \\ 6m + 3x & 2m \leq x \leq 3m \\ 12m + x & 3m \leq x \leq 4m \\ 20m - x & 4m \leq x \leq 5m \\ 30m - 3x & 5m \leq x \leq 6m \\ 48m - 6x & 6m \leq x \leq 8m \end{cases}$$

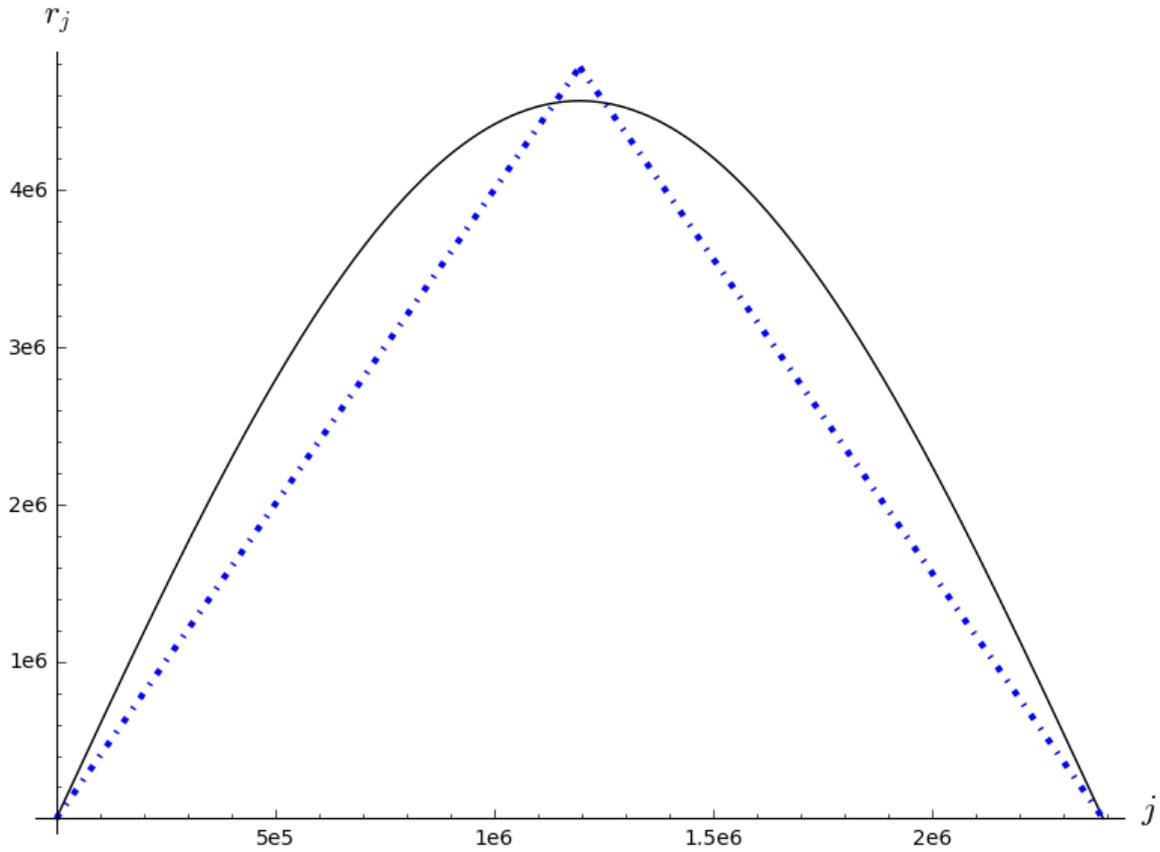


Figura 4.2: Número de puntos por paralelo para la función  $r(j) = \frac{3 \sin\left(\frac{j\pi}{N}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2N}\right)}$  (línea continua) y para un ejemplo sencillo con  $K = 4$  (línea discontinua).

verifica  $r(x) = r(p + 1 - x) = r(8m - x)$ . Sea  $z_j = z(j)$  donde  $z(x)$  está definido por (4.18), esto es,

$$z(x) = \begin{cases} \frac{82m^2 - 6x^2}{82m^2 + 1} & 0 \leq x \leq 2m \\ \frac{94m^2 - 12mx - 3x^2}{82m^2 + 1} & 2m \leq x \leq 3m \\ \frac{112m^2 - 24mx - x^2}{82m^2 + 1} & 3m \leq x \leq 4m \\ \frac{144m^2 - 40mx + x^2}{82m^2 + 1} & 4m \leq x \leq 5m \\ \frac{194m^2 - 60mx + 3x^2}{82m^2 + 1} & 5m \leq x \leq 6m \\ \frac{302m^2 - 96mx + 6x^2}{82m^2 + 1} & 6m \leq x \leq 8m \end{cases}$$

Tenemos  $N = 82m^2 + 2$ .

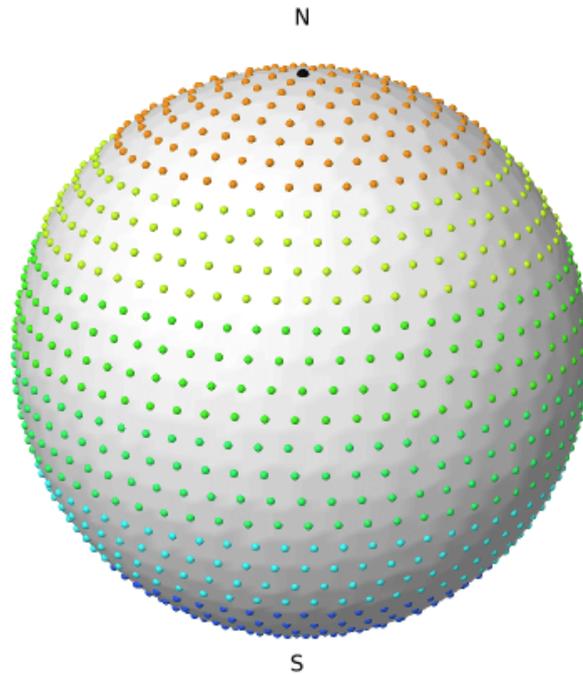


Figura 4.3: Una realización de un ejemplo más elaborado con  $N = 1314$ . Los diferentes colores de los puntos corresponden a las diferentes componentes lineales que definen  $r(x)$ .

## 4.5. Cálculo de la esperanza de la energía logarítmica para la estructura de diamante

Por el Teorema 4.2.2, la esperanza de la energía logarítmica de  $\diamond(N)$  viene dada por

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{E}_{\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi]^p} [\mathcal{E}_{\log}(\diamond(N))] \\
 &= -(N-1) \log(4) + r(M) \log r(M) - 2 \sum_{j=1}^M r(j) \log r(j) \\
 & - (N-1) \sum_{j=1}^M r(j) (1 - z(j)) \log(1 - z(j)) - (N-1) \sum_{j=1}^M r(j) (1 + z(j)) \log(1 + z(j)).
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

Recordamos que dada una función  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  con  $a < b$  enteros, la regla trapezoidal compuesta es

$$T_{[a,b]}(f) = \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=a+1}^{b-1} f(j). \tag{4.20}$$

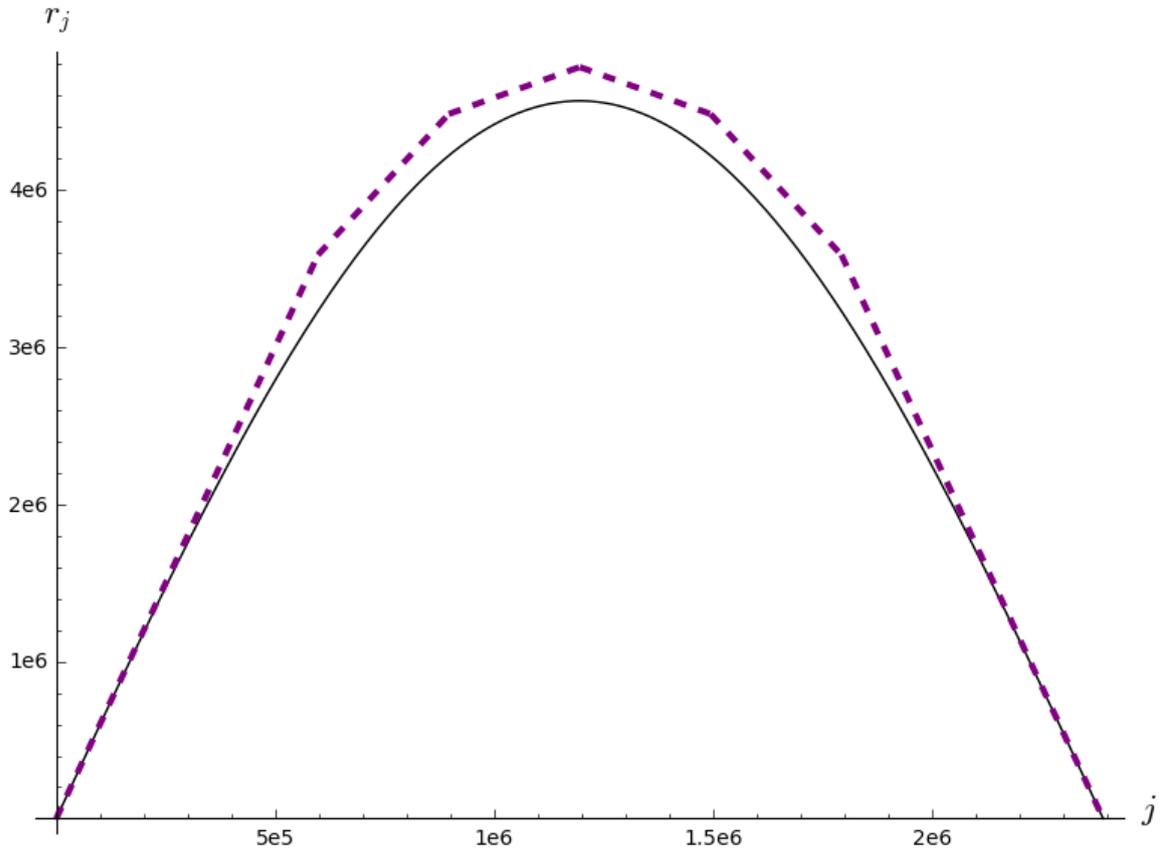


Figura 4.4: Número de puntos de un ejemplo más elaborado.

Para un estudio más detallado sobre la regla del trapecio, véase el Apéndice B. A la vista de la fórmula (4.20), podemos escribir las sumas de la fórmula (4.19) como argumentos de una regla trapezoidal compuesta.

**Corolario 4.5.1.** *La esperanza de la energía logarítmica de puntos definidos por la estructura de diamante es*

$$\begin{aligned} E_{\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi]^p} [\mathcal{E}_{\log}(\diamond(N))] &= -(N-1) \log(4) - 2 \sum_{\ell=1}^n T_{[t_{\ell-1}, t_{\ell}]}(f_{\ell}) \\ &\quad - (N-1) \sum_{\ell=1}^n T_{[t_{\ell-1}, t_{\ell}]}(g_{\ell}) - (N-1) \sum_{\ell=1}^n T_{[t_{\ell-1}, t_{\ell}]}(h_{\ell}), \end{aligned}$$

donde para  $1 \leq \ell \leq n$  las funciones  $f_\ell, g_\ell, h_\ell$  están definidas en el intervalo  $[t_{\ell-1}, t_\ell]$  y verifican

$$\begin{aligned} f_\ell(x) &= (\alpha_\ell + \beta_\ell x) \log(\alpha_\ell + \beta_\ell x) \\ g_\ell(x) &= (\alpha_\ell + \beta_\ell x)(1 - z_\ell(x)) \log(1 - z_\ell(x)) \\ h_\ell(x) &= (\alpha_\ell + \beta_\ell x)(1 + z_\ell(x)) \log(1 + z_\ell(x)) \end{aligned}$$

Como  $f_\ell$  es una función continua para  $1 \leq \ell \leq n$ , la regla del trapecio  $T_{[t_{\ell-1}, t_\ell]}(f_\ell)$  aproxima la integral  $f_\ell$ . Concretamente, su diferencia está acotada de la siguiente forma.

**Lema 4.5.2.** Para  $1 \leq \ell \leq n$  tenemos

$$\left| T_{[t_{\ell-1}, t_\ell]}(f_\ell) - \int_{t_{\ell-1}}^{t_\ell} f_\ell(x) dx \right| \leq (t_\ell - t_{\ell-1})3K \log(2AM) \leq 3AM \log(2AM),$$

para una constante  $A$ .

*Demostración.* Sea  $S$  la cantidad del lema, entonces

$$S \leq \sum_{j=t_{\ell-1}+1}^{t_\ell} \int_{j-1}^j \left| f_\ell(x) - \frac{f_\ell(j-1) + f_\ell(j)}{2} \right| dx.$$

Para  $x \in [j-1, j]$  tenemos

$$|f_\ell(x) - f_\ell(j-1)| \leq \int_{j-1}^j |f'_\ell(t)| dt \leq 1 + A \log(KM + KM) \leq 2A \log(2AM).$$

Donde  $A$  es la constante dada en la Definición 4.4.1. Por lo que concluimos que

$$\begin{aligned} \left| f_\ell(x) - \frac{f_\ell(j-1) + f_\ell(j)}{2} \right| &\leq \\ &|f_\ell(x) - f_\ell(j-1)| + \left| \frac{f_\ell(j-1) - f_\ell(j)}{2} \right| \leq 3A \log(2AM). \end{aligned}$$

□

De hecho, podemos usar la fórmula de Euler-Maclaurin (véase por ejemplo [Kress, 1998, Th. 9.26]) para estimar la diferencia entre la regla del trapecio compuesta y la integral de las funciones  $g_\ell$  y  $h_\ell$ .

**Lema 4.5.3.** La siguiente desigualdad se verifica para  $1 \leq \ell \leq n$ :

$$\left| T_{[t_{\ell-1}, t_\ell]}(g_\ell) - \int_{t_{\ell-1}}^{t_\ell} g_\ell(x) dx - \frac{g'_\ell(t_\ell) - g'_\ell(t_{\ell-1})}{12} \right| \leq \frac{C \log M}{M}$$

para alguna constante  $C > 0$ .

*Demostración.* Gracias al Lema C.0.5 sabemos que es suficiente probar que  $|g_\ell'''(x)| dx \leq \frac{C \log M}{M}$  para alguna constante  $C$ . Ahora bien,  $g_\ell = u(x)v(x)w(x)$  donde  $u$  es una aplicación lineal,  $v$  es un polinomio cuadrático y  $w = \log v$ . La regla de Leibniz para la derivada del producto nos dice que

$$g_\ell''' = uvw''' + 6u'v'w' + 3u'v''w + 3uv''w' + 3u'vw'' + 3uv'w''.$$

Si  $\ell = 1$  entonces  $g_1'''$  tiene una expresión simple y resulta sencillo comprobar que

$$g_1''' \leq \frac{C \log M}{M^2}$$

para alguna constante  $C > 0$ . Para  $\ell > 1$  nos fijamos en que  $u(x) = \alpha_\ell + \beta_\ell x$  verifica

$$|u| \leq CM, \quad |u'| \leq C$$

donde  $C$  es alguna constante. Es más,  $v(x) = 1 - z_\ell(x)$  verifica

$$c \leq |v| < 1, \quad |v'| \leq \frac{C}{M}, \quad |v''| \leq \frac{C}{M^2}$$

para alguna constante positiva  $c$  que no depende de  $M$ . Además,  $w = \log v$  verifica

$$|w| \leq C, \quad |w'| \leq \frac{C}{M}, \quad |w''| \leq \frac{C}{M^2}, \quad |w'''| \leq \frac{C}{M^3}.$$

□

**Lema 4.5.4.** *La siguiente desigualdad se verifica para  $1 \leq \ell \leq n$ :*

$$\left| T_{[t_{\ell-1}, t_\ell]}(h_\ell) - \int_{t_{\ell-1}}^{t_\ell} h_\ell(x) dx - \frac{h'_\ell(t_\ell) - h'_\ell(t_{\ell-1})}{12} \right| \leq \frac{C}{M}$$

para alguna constante  $C > 0$ .

*Demostración.* Basta con seguir paso a paso la demostración del Lema 4.5.3. □

Gracias a los lemas 4.5.3 y 4.5.4 tenemos el siguiente resultado.

**Teorema 4.5.5.** *Los puntos definidos por la estructura del diamante verifican:*

$$\begin{aligned} E_{\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi]^p} [\mathcal{E}_{\log}(\diamond(N))] &= -(N-1) \log(4) - 2 \sum_{\ell=1}^n \int_{t_{\ell-1}}^{t_\ell} f_\ell(x) dx \\ &- (N-1) \sum_{\ell=1}^n \left( \int_{t_{\ell-1}}^{t_\ell} g_\ell(x) dx + \frac{g'_\ell(t_\ell) - g'_\ell(t_{\ell-1})}{12} \right) \\ &- (N-1) \sum_{\ell=1}^n \left( \int_{t_{\ell-1}}^{t_\ell} h_\ell(x) dx + \frac{h'_\ell(t_\ell) - h'_\ell(t_{\ell-1})}{12} \right) + o(M^2), \end{aligned}$$

donde para  $1 \leq \ell \leq n$  las funciones  $f_\ell, g_\ell, h_\ell$  están definidas en el Corolario 4.5.1.

*Demostración.* Por el Lema 4.5.2 tenemos

$$T_{[t_{\ell-1}, t_{\ell}]}(f_{\ell}) = \int_{t_{\ell-1}}^{t_{\ell}} f_{\ell}(x) dx + o(M^2).$$

De igual forma, por los lemas 4.5.3 y 4.5.4 sabemos que

$$T_{[t_{\ell-1}, t_{\ell}]}(g_{\ell}) = \int_{t_{\ell-1}}^{t_{\ell}} g_{\ell}(x) dx + \frac{g'_{\ell}(t_{\ell}) - g'_{\ell}(t_{\ell-1})}{12} + o(M^2),$$

$$T_{[t_{\ell-1}, t_{\ell}]}(h_{\ell}) = \int_{t_{\ell-1}}^{t_{\ell}} h_{\ell}(x) dx + \frac{h'_{\ell}(t_{\ell}) - h'_{\ell}(t_{\ell-1})}{12} + o(M^2).$$

Sustituimos estas expresiones en la fórmula del Corolario 4.5.1 y obtenemos el Teorema 4.5.5.  $\square$

#### 4.5.1. Energía logarítmica de algunas familias que presentan la estructura de diamante

Ahora que tenemos la fórmula proporcionada por el Teorema 4.5.5, podemos calcular la esperanza de la energía logarítmica de las familias definidas en la Sección 4.4.

##### Un ejemplo sencillo

**Teorema 4.5.6.** *La esperanza de la energía logarítmica de un conjunto de puntos definidos por la estructura de diamante con los parámetros de la Sección 4.4.1, llamado un ejemplo sencillo, es*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi]^p} [\mathcal{E}_{\log}(\diamond(N))] &= W_{\log}(\mathbb{S}^2) N^2 - \frac{1}{2} N \log N \\ &\quad + N \left( \frac{\log 2}{6} K - \frac{1}{2} + \log 2 - \frac{\log K}{2} \right) + o(N). \end{aligned}$$

En particular, para  $K = 4$  tenemos

$$\mathbb{E}_{\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi]^p} [\mathcal{E}_{\log}(\diamond(N))] = W_{\log}(\mathbb{S}^2) - \frac{1}{2} N \log N + N \left( \frac{2 \log 2}{3} - \frac{1}{2} \right) + o(N). \quad (4.21)$$

*Demostración.* Podemos escribir las funciones definidas en el Corolario 4.5.1 obteniendo

$$\begin{aligned} f(x) &= Kx \log(Kx). \\ g(x) &= Kx \frac{1 + Kx^2}{N - 1} \log \frac{1 + Kx^2}{N - 1}. \\ h(x) &= Kx \left( 2 - \frac{1 + Kx^2}{N - 1} \right) \log \left( 2 - \frac{1 + Kx^2}{N - 1} \right). \end{aligned}$$

Entonces, la fórmula del Teorema 4.5.5 resulta ser

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi]^p} [\mathcal{E}_{\log}(\diamond(N))] &= -(N-1) \log(4) - 2 \int_0^M f(x) dx \\ &- (N-1) \left( \int_0^M g(x) + h(x) dx + \frac{g'(M) - g(0)}{12} + \frac{h'(M) - h'(0)}{12} \right) + o(M^2). \end{aligned}$$

El cálculo de las derivadas e integrales nos proporciona el resultado.  $\square$

En la Sección 4.4.1 vimos que la estructura de diamante con estos parámetros da lugar a una familia de puntos muy similar a los Octahedral points. En el artículo [Holhoş and Roşca, 2014], los autores aportan algunas simulaciones numéricas para la energía logarítmica de los Octahedral points que son confirmadas por el Teorema 4.5.6. También podemos encontrar nuevas simulaciones numéricas del mismo conjunto de puntos en [Hardin et al., 2016, Figure 2.2], donde el número obtenido es muy similar a la cota aquí encontrada.

Nos fijamos en el coeficiente del término en  $N$  de la fórmula (4.21):

$$\frac{2 \log 2}{3} - \frac{1}{2} = -0.037901879626703 \dots$$

Así que usando este sencillo ejemplo estamos tan solo a 0.0177 unidades de distancia del valor propuesto en la conjetura 1. Por lo tanto, este conjunto nos proporciona una nueva mejor cota para la energía logarítmica.

Ante los buenos resultados obtenidos con la primera elección de parámetros (Sección 4.4.1), calculamos la esperanza de la energía logarítmica para un ejemplo más elaborado (Sección 4.4.2).

### Un ejemplo más elaborado

**Teorema 4.5.7.** *La esperanza de la energía logarítmica de un conjunto de puntos definidos por la estructura de diamante propuesto en la Sección 4.4.2, llamada un ejemplo más elaborado, es*

$$\mathbb{E}_{\theta_1, \dots, \theta_p \in [0, 2\pi]^p} [\mathcal{E}_{\log}(\diamond(N))] = W_{\log}(\mathbb{S}^2) N^2 - \frac{N}{2} \log N + cN + o(N),$$

donde  $c = -0.048033870622806 \dots$  verifica

$$\begin{aligned} 492c &= -113 \log 113 - 982 \log 82 - 210 \log 70 - 51 \log 51 \\ &+ 1638 \log 41 + 900 \log 15 - 36 \log 12 - 1536 \log 8 \\ &+ 144 \log 6 - 492 \log 4 + 1968 \log 2 - 246. \end{aligned}$$

*Demostración.* Al igual que en el Teorema 4.5.6, podemos sustituir las funciones  $f_\ell, g_\ell, h_\ell$  en la fórmula del Teorema 4.5.5. En este caso hemos utilizado el programa Maxima para calcular las integrales y derivadas exactamente, obteniendo el resultado. En el Apéndice D se pueden encontrar los programas utilizados.  $\square$

Usando este ejemplo más elaborado estamos solamente a 0.0076 de distancia del valor propuesto en la Conjetura 1.

### Un ejemplo casi óptimo para la energía logarítmica

Presentamos un último ejemplo de familia de puntos que presenta la estructura de diamante. También aquí ilustraremos el ejemplo con un par de gráficos: un ejemplo de puntos que corresponden al conjunto, Gráfica 4.5 y una gráfica que muestra la función  $r_j$  que define el conjunto y la curva original  $r_j$  definida en la fórmula (4.10) con  $K_0 = 3/\pi$ , en la gráfica 4.6.

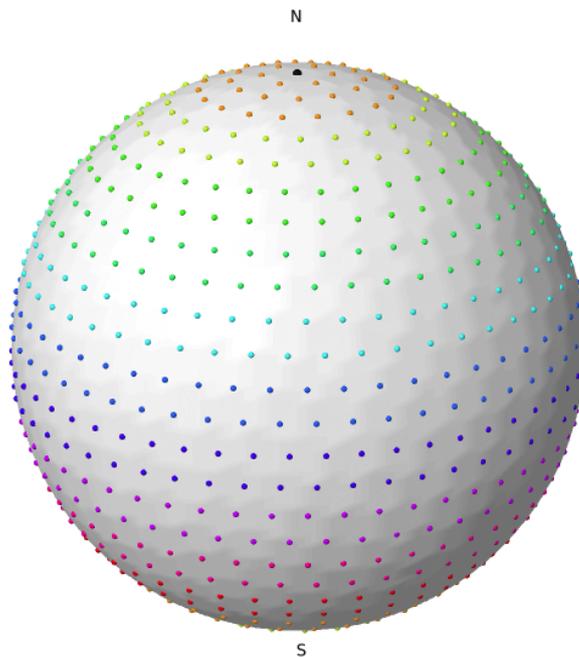


Figura 4.5: Una realización de un modelo casi óptimo para  $N = 958$ . Los diferentes colores de los puntos corresponden a las diferentes componentes lineales que definen  $r(x)$ .

La mejor elección de parámetros para la estructura de diamante (la que minimiza la energía logarítmica) que hemos encontrado se define de la siguiente forma: sea  $M = 7m$  con

$m$  un entero positivo, sea  $p = 2M - 1$  y sea

$$r(x) = \begin{cases} 6x & 0 \leq x \leq 2m \\ 2m + 5x & 2m \leq x \leq 3m \\ 5m + 4x & 3m \leq x \leq 4m \\ 9m + 3x & 4m \leq x \leq 5m \\ 14m + 2x & 5m \leq x \leq 6m \\ 20m + x & 6m \leq x \leq 7m \\ 34m - x & 7m \leq x \leq 8m \\ 42m - 2x & 8m \leq x \leq 9m \\ 51m - 3x & 9m \leq x \leq 10m \\ 61m - 4x & 10m \leq x \leq 11m \\ 72m - 5x & 11m \leq x \leq 12m \\ 84m - 6x & 12m \leq x \leq 14m = p + 1 \end{cases}$$

que verifica  $r(x) = r(p + 1 - x) = r(14m - x)$ . Sea  $z_j = z(j)$  donde  $z(x)$  está definido por la ecuación (4.18), esto es,

$$z(x) = \frac{1}{239m^2 + 1} \times \begin{cases} 239m^2 - 6x^2 & 0 \leq x \leq 2m \\ 243m^2 - 4mx - 5x^2 & 2m \leq x \leq 3m \\ 252m^2 - 10mx - 4x^2 & 3m \leq x \leq 4m \\ 268m^2 - 18mx - 3x^2 & 4m \leq x \leq 5m \\ 293m^2 - 28mx - 2x^2 & 5m \leq x \leq 6m \\ 329m^2 - 40mx - x^2 & 6m \leq x \leq 7m \\ 427m^2 - 68mx + x^2 & 7m \leq x \leq 8m \\ 491m^2 - 84mx + 2x^2 & 8m \leq x \leq 9m \\ 572m^2 - 102mx + 3x^2 & 9m \leq x \leq 10m \\ 672m^2 - 122mx + 4x^2 & 10m \leq x \leq 11m \\ 793m^2 - 144mx + 5x^2 & 11m \leq x \leq 12m \\ 937m^2 - 168mx + 6x^2 & 12m \leq x \leq 14m = p + 1 \end{cases}$$

Tenemos  $N = 239m^2 + 2$ .

**Teorema 4.5.8.** *La esperanza de la energía logarítmica de un conjunto de puntos que presentan el modelo casi óptimo de estructura de diamante es*

$$W_{\log}(\mathbb{S}^2) N^2 - \frac{1}{2} N \log N + c_{\diamond} N + o(N),$$

donde  $c_\diamond = -0.0492220914515784\dots$  verifica

$$\begin{aligned} 14340 c_\diamond = & 19120 \log 239 - 2270 \log 227 - 1460 \log 73 - 265 \log 53 - 1935 \log 43 \\ & - 930 \log 31 - 1710 \log 19 - 1938 \log 17 + 19825 \log 13 + 1750 \log 7 \\ & - 4250 \log 5 - 131307 \log 3 + 56586 \log 2 - 7170. \end{aligned}$$

*Demostración.* Al igual que en el Teorema 4.5.7, basta con sustituir los valores de  $f_\ell, g_\ell, h_\ell$  en la fórmula del Teorema 4.5.5. De nuevo calculamos las derivadas e integrales con el programa Maxima. □

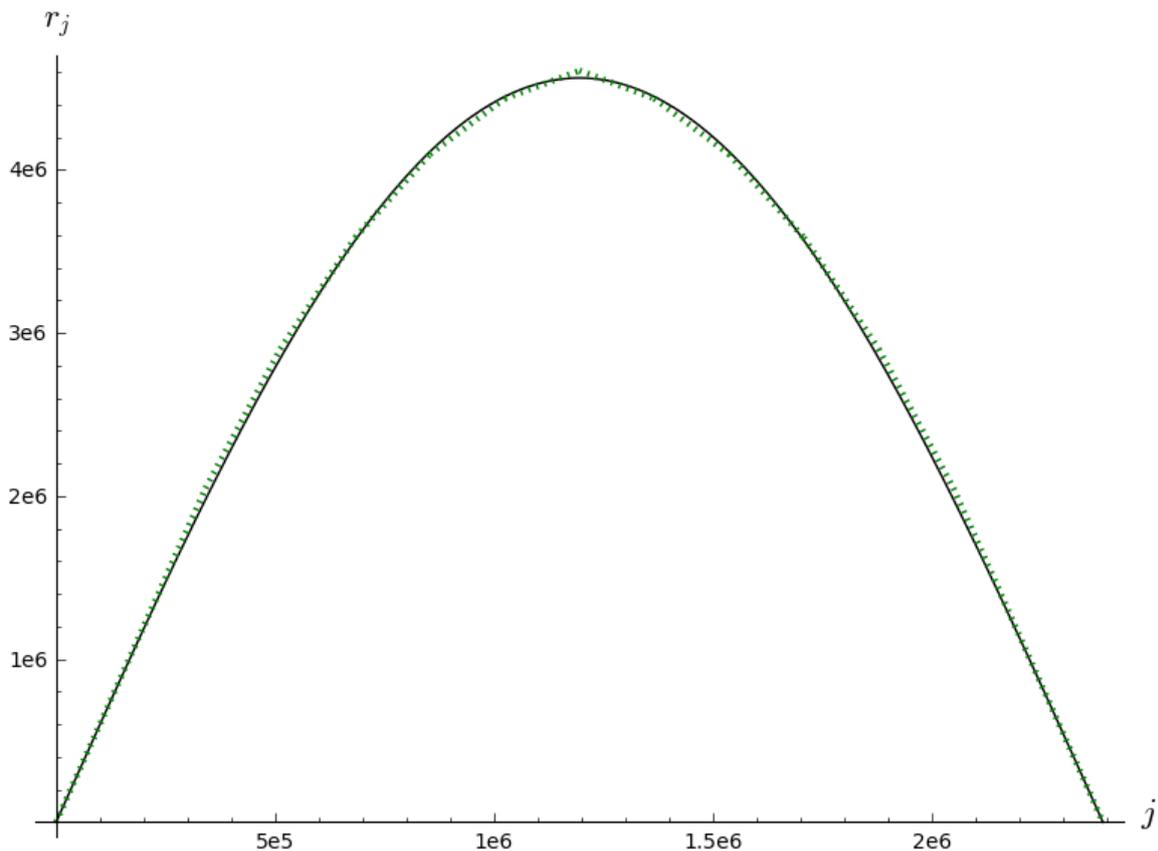


Figura 4.6: Número de puntos para el modelo casi óptimo.

El valor de la constante dista aproximadamente 0.0058 de la constante de la Conjetura 1. Además, el valor del coeficiente de  $N$  en el conjunto modelo es  $-0.0493$ , lo cual nos lleva a pensar que la cota alcanzada en el Teorema 4.5.8 no puede mejorarse demasiado con otra elección de parámetros para la estructura de diamante.

Cerramos el capítulo presentando una gráfica en la que comparamos las distintas opciones de  $r_j$  presentadas en este capítulo frente al  $r_j$  que define el conjunto modelo. Podemos observar cómo el modelo casi óptimo aproxima muy bien a la curva.

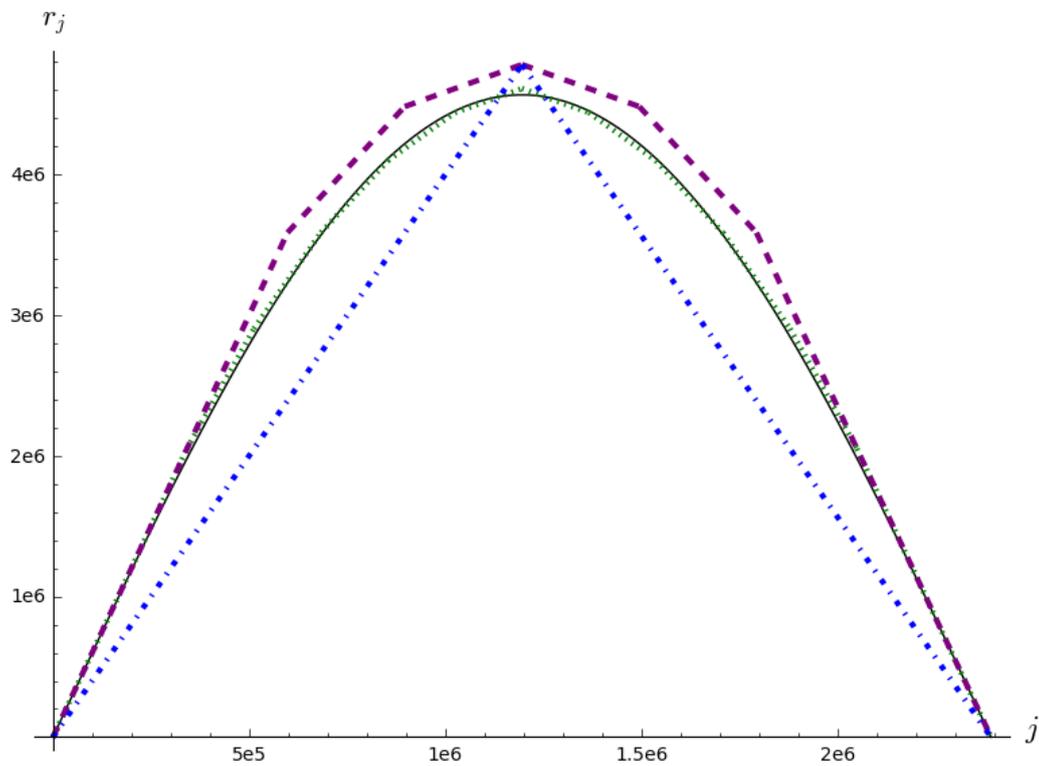


Figura 4.7: Número de puntos para los distintos modelos de la estructura de diamante presentados en este capítulo. Hemos tomado  $2M \approx 2.500.000$  paralelos.



---

# APÉNDICES

---



---

---

## APÉNDICE A

---

# Funciones especiales

En este apéndice recogemos las definiciones y algunas propiedades de las funciones beta y gamma, para lo cual seguimos el libro [Temme, 1996]. También demostramos una desigualdad para funciones betas incompletas que no hemos encontrado en la literatura.

## Definiciones

### Función gamma

Si  $n$  es un entero positivo, entonces definimos la función gamma por

$$\Gamma(n) = (n - 1)!$$

Para el resto de los números complejos  $z$  con parte real positiva el factorial se extiende de la siguiente forma

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Esta integral converge absolutamente y puede ser extendida a todo el plano complejo, excepto a los enteros negativos y al cero, donde la función gamma es singular.

### Algunas propiedades de la función gamma

Presentamos a continuación, aunque sin demostrar, algunas de las principales propiedades de la función gamma.

**Proposición A.0.1** (Fórmula de la duplicación). *La función gamma verifica:*

$$2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(2z)$$

para todo  $z$  tal que  $\Gamma(z)$  y  $\Gamma(2z)$  están definidos.

**Proposición A.0.2** (Fórmula de la reflexión). *La función gamma verifica:*

$$\Gamma(z) \Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

para todo  $z$  tal que  $\Gamma(z)$  y  $\Gamma(1 - z)$  están definidos.

**Proposición A.0.3** (Desigualdad de Gautschi). *La siguiente desigualdad se verifica*

$$(z + s)^{s-1} \leq \frac{\Gamma(z + s)}{\Gamma(z + 1)} \leq z^{s-1}$$

para todo  $z > 0$  y todo  $0 < s < 1$ .

### Derivadas de la función gamma

Podemos considerar la log-derivada de la función  $\Gamma$

$$\Psi(z) = \frac{d}{dz} \log \Gamma(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$$

que es una función meromorfa con polos en los enteros negativos y en 0 y recibe el nombre de función digamma. La función  $\Psi$  verifica

$$\Psi(z+1) = \Psi(z) + \frac{1}{z}$$

para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ . Si consideramos las derivadas sucesivas de la función digamma obtenemos la función poligamma de orden  $n$ . En particular, la función poligamma de orden 2 también es meromorfa y con polos dobles en los enteros negativos y el 0. Podemos escribir esa función como:

$$\Psi'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(z+n)^2}$$

para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ .

### Función beta

La función beta es una función especial estrechamente relacionada con la función gamma, definida por

$$B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{q-1} dt.$$

con  $p, q$  número complejos con parte real positiva. Su relación con la función gamma está dada por

$$\Gamma(x)\Gamma(y) = \Gamma(x+y) B(x, y).$$

De donde podemos deducir que la función beta es simétrica:  $B(x, y) = B(y, x)$ .

### Derivada de la función beta

La derivada de la función beta se puede expresar en términos de la función digamma  $\Psi$  para  $m \in \mathbb{N}$ :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}B(t, m) &= \frac{d}{dt} \frac{\Gamma(t)\Gamma(m)}{\Gamma(t+m)} \\
 &= \frac{\Gamma'(t)\Gamma(m)\Gamma(t+m) - \Gamma(t)\Gamma(m)\Gamma'(t+m)}{\Gamma(t+m)^2} \\
 &= \frac{\Psi(t)\Gamma(t)\Gamma(m) - \Gamma(t)\Gamma(m)\Psi(t+m)}{\Gamma(t+m)} \\
 &= B(t, m)(\Psi(t) - \Psi(t+m)) \\
 &= -B(t, m) \sum_{j=0}^{m-1} \frac{1}{t+j}.
 \end{aligned}$$

### Función beta incompleta

Definimos la función beta incompleta por

$$B_x(p, q) = \int_0^x t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt.$$

Vemos que para  $x = 1$  recuperamos la función beta  $B(p, q)$ . Muchas veces presentamos la función beta incompleta regularizada es decir, normalizada de la siguiente forma

$$I_x(p, q) = \frac{B_x(p, q)}{B(p, q)}.$$

### Caracterización de $B(d, d)$

Sea  $d$  un número real positivo. Por la definición de la función beta tenemos que

$$B(d, d) = \frac{\Gamma(d)\Gamma(d)}{\Gamma(2d)}$$

De la combinación de esa fórmula con la fórmula de la duplicación de la función gamma (Proposición A.0.1) tenemos

$$B(d, d) = \frac{\Gamma(d)\sqrt{\pi}}{\Gamma(d + \frac{1}{2})2^{2d-1}}. \quad (\text{A.1})$$

**Lema A.0.4.** Para todo  $d \geq 2$  se verifica que

$$B(d, d) \geq \frac{2}{4^d} \sqrt{\frac{\pi}{d}}$$

*Demostración.* Por la fórmula A.1 sabemos que

$$B(d, d) = \frac{\Gamma(d)\sqrt{\pi}}{\Gamma(d + \frac{1}{2})2^{2d-1}}.$$

Además, la desigualdad de Gautschi (Proposición A.0.3) nos dice que

$$\frac{\Gamma(d)}{\Gamma(d + \frac{1}{2})} = \frac{\Gamma(d - \frac{1}{2} + \frac{1}{2})}{\Gamma(d - \frac{1}{2} + 1)} \geq \frac{1}{\sqrt{d - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{\sqrt{d}}.$$

Si unimos ambas ecuaciones obtenemos:

$$B(d, d) \geq \frac{2}{4^d} \sqrt{\frac{\pi}{d}}.$$

□

## Una desigualdad para la función beta incompleta

**Teorema A.0.5.** Para todo  $d \geq 1$  y todo  $s \in (0, 1)$  se verifica que

$$\frac{d}{2} B(d, d) \sqrt{1 - I_s(d, d)}^{\frac{1}{d}} \geq s^d (1 - s)^d,$$

y la igualdad se da solo cuando  $s \in \{0, 1\}$ .

Antes de probar el Teorema A.0.5, probaremos el siguiente lema técnico.

**Lema A.0.6.** La función

$$f(s) = dB_s(d, d) + s^d(1 - s)^d \left( d - 2ds - \sqrt{d^2(1 - 2s)^2 + 1 + 2d} \right)$$

verifica que  $f(s) \geq 0$  para  $s \in (0, 1)$ .

*Demostración.* Como  $f(0) = 0$  calculamos  $f'(s) = ds^{d-1}(1 - s)^{d-1}h(s)$  donde

$$h(s) = 1 + (1 - 2s) \left( d - 2ds - \sqrt{d^2(1 - 2s)^2 + 1 + 2d} \right) + s(1 - s) \left( -2 + \frac{2d(1 - 2s)}{\sqrt{d^2(1 - 2s)^2 + 1 + 2d}} \right).$$

Basta con probar que  $h(s) \geq 0$  para  $s \in (0, 1)$ . Llamamos  $u(s) = d^2(1 - 2s)^2 + 1 + 2d$  y tenemos

$$h(s) = 1 + d(1 - 2s)^2 - 2s(1 - s) + (1 - 2s)\sqrt{u(s)} \left( \frac{2ds(1 - s) - u(s)}{u(s)} \right).$$

Como  $2ds(1 - s) < u(s)$  para todo  $s \in (0, 1)$  concluimos que si  $s > 1/2$  entonces todos los términos de  $h(s)$  son positivos y  $h(s) \geq 0$ . Falta probar que  $h(s) \geq 0$  para  $s \in (0, 1/2)$ , lo cual es equivalente a

$$(1 + d(1 - 2s)^2 - 2s(1 - s))^2 \geq (1 - 2s)^2 u(s) \left( \frac{2ds(1 - s) - u(s)}{u(s)} \right)^2,$$

esto es

$$u(s) \left(1 + d(1 - 2s)^2 - 2s(1 - s)\right)^2 - (1 - 2s)^2(2ds(1 - s) - u(s))^2 \geq 0.$$

Si desarrollamos los términos, obtenemos

$$s^2(1 - s)^2(4 + 8d) \geq 0,$$

lo cual es cierto, así que el lema queda demostrado.  $\square$

*Demostración del Teorema A.0.5.* Resulta sencillo comprobar que la desigualdad del teorema es equivalente a

$$f(s) \geq \frac{1}{B(d, d)}, \quad f(s) = Q(s) (1 - Q(s)^2 A(s))^d$$

donde  $Q(s) = B_s(d, d)^{-1}$  y  $A(s) = s^{2d}(1 - s)^{2d}/d^2$ . Fijémonos en que

$$f(1) = \frac{1}{B(d, d)},$$

y por lo tanto basta con demostrar que  $f$  es una función no creciente en  $(0, 1)$ . Para eso calculamos la derivada

$$f'(s) = (1 - Q(s)^2 A(s))^{d-1} (Q'(s) - (1 + 2d)Q'(s)Q(s)^2 A(s) - dQ(s)^3 A'(s)),$$

y entonces basta con ver que

$$Q'(s) - (1 + 2d)Q'(s)Q(s)^2 A(s) - dQ(s)^3 A'(s) \leq 0, \quad s \in (0, 1),$$

o lo que es equivalente

$$dA'(s)B_s(d, d) + s^{d-1}(1 - s)^{d-1}(B_s(d, d)^2 - (1 + 2d)A(s)) \geq 0, \quad s \in (0, 1).$$

Calculamos la derivada  $A'(s)$  y simplificamos la expresión obteniendo que esta última desigualdad es equivalente a

$$B_s(d, d)^2 + 2s^d(1 - s)^d(1 - 2s)B_s(d, d) - \frac{1 + 2d}{d^2}s^{2d}(1 - s)^{2d} \geq 0,$$

y por lo tanto, también es equivalente a

$$\begin{aligned} \left(B_s(d, d) + s^d(1 - s)^d(1 - 2s)\right)^2 &\geq s^{2d}(1 - s)^{2d}(1 - 2s)^2 + \frac{1 + 2d}{d^2}s^{2d}(1 - s)^{2d} \\ &= s^{2d}(1 - s)^{2d} \left( (1 - 2s)^2 + \frac{1 + 2d}{d^2} \right), \end{aligned}$$

gracias al Lema A.0.6 después de tomar raíces cuadradas.  $\square$



---

---

## APÉNDICE B

---

# El jacobiano normal en variedades diferenciales

### Definición

Comenzamos recordando algunos conceptos.

**Definición B.0.1.** Una variedad riemanniana es una terna  $(\mathcal{M}, \{\phi_\alpha\}, g)$  donde:

- $(\mathcal{M}, \{\phi_\alpha\})$  es una variedad diferenciable en la que se ha especificado el conjunto de cartas locales.
- $g : T\mathcal{M} \times T\mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$  es una aplicación bilineal definida positiva.

En particular,  $g$  permite definir en cada espacio tangente una norma  $\|X\| = \sqrt{g(X, X)}$ .

Dada una aplicación entre dos variedades diferenciales, el jacobiano normal mide cómo varía forma de volumen del espacio tangente a la variedad bajo la aplicación diferencial. A continuación damos una definición más rigurosa.

**Definición B.0.2.** Sean  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  variedades diferenciales y

$$\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$$

una aplicación diferencial. Sea

$$D\varphi(x) : T_x\mathcal{M} \longrightarrow T_{\varphi(x)}\mathcal{N}$$

la diferencial de la aplicación  $\varphi$  en el punto  $x$ . Consideremos una base ortonormal de  $\ker(D\varphi(x))^\perp$ ,  $v_1, \dots, v_k$  y su imagen por la aplicación  $D\varphi(x)$ ; entonces el jacobiano normal, denotado por  $\text{NJac}\varphi(x)$  viene dado por el volumen de  $(D\varphi(x)v_1, \dots, D\varphi(x)v_k)$ .

### Cálculo general del jacobiano normal

Sean  $\mathcal{M}$  y  $\mathcal{N}$  dos variedades riemannianas reales de dimensión  $m$  y  $n$  respectivamente. Para calcular el jacobiano normal de  $\varphi : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{N}$  en el punto  $x \in \mathcal{M}$  tal que  $D\varphi(x)$  es sobreyectiva seguimos el siguiente algoritmo:

1. Calculamos la diferencial de  $\varphi$  en el punto  $x$ ,  $D\varphi(x)$ .
2. Tomamos una base  $\{w_1, \dots, w_m\}$  de  $\ker(D\varphi(x))^\perp$ .
3. Calculamos la diferencial de  $\varphi$  en cada uno de los elementos de la base:  $D\varphi(x)w_i$ .

Entonces el jacobiano normal viene dado por la siguiente fórmula:

$$\text{NJac}\varphi(x) = \sqrt{\frac{\det (\langle D\varphi(x)w_i, D\varphi(x)w_j \rangle)}{\det (\langle w_i, w_j \rangle)}}_{1 \leq i, j \leq m}. \quad (\text{B.1})$$

Cuando las variedades son complejas, seguimos el mismo procedimiento solo que la fórmula final resulta

$$\text{NJac}\varphi(x) = \frac{\det (\langle D\varphi(x)w_i, D\varphi(x)w_j \rangle)}{\det (\langle w_i, w_j \rangle)}_{1 \leq i, j \leq m}. \quad (\text{B.2})$$

### Caso particular: $m = n$

En este caso si tomamos una base cualquiera  $\{w_1, \dots, w_m\}$  de  $\ker(D\varphi(x))^\perp$ , siempre podemos obtener a partir de ella una base ortonormal, llamemos  $\{e_1, \dots, e_m\}$  a esa nueva base. Entonces:

$$\text{NJac}\varphi(x) = \sqrt{\frac{\det (\langle D\varphi(x)e_i, D\varphi(x)e_j \rangle)}{\det (\langle e_i, e_j \rangle)}}_{1 \leq i, j \leq m}.$$

Resulta fácil comprobar que:

$$\langle D\varphi(x)e_i, D\varphi(x)e_j \rangle_{i=j=1, \dots, m} = \text{Jac}\varphi(x)^t \text{Jac}\varphi(x)$$

donde  $\text{Jac}\varphi(x)$  es la matriz jacobiana de  $\varphi$ . Así que tenemos:

$$\begin{aligned} \text{NJac}\varphi(x) &= \sqrt{\frac{\det (\langle D\varphi(x)e_i, D\varphi(x)e_j \rangle)}{\det (\langle e_i, e_j \rangle)}} = \sqrt{\frac{\det (\text{Jac}\varphi(x)^t \text{Jac}\varphi(x))}{1}} \\ &= \det (\text{Jac}\varphi(x)). \end{aligned}$$

## El Teorema de cambio de variables

En esta sección estudiamos una versión del Teorema de cambio de variables para jacobianos normales. Comenzamos presentando la versión original del teorema.

**Teorema B.0.3** (Teorema de cambio de variable). *Sean  $\mathcal{M}_1$  y  $\mathcal{M}_2$  dos variedades riemannianas y  $\varphi : \mathcal{M}_1 \rightarrow \mathcal{M}_2$  un difeomorfismo entre ambas.*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_1 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{M}_2 \\ & \searrow f & \swarrow g \\ & & [0, \infty) \end{array}$$

Entonces para toda función  $f : \mathcal{M}_1 \rightarrow [0, \infty)$  medible y para toda función  $g : \mathcal{M}_2 \rightarrow [0, \infty)$  medible se tiene:

$$\int_{\mathcal{M}_1} f(x) |\text{Jac } \varphi(x)| dx = \int_{\mathcal{M}_2} f(\varphi^{-1}(y)) dy. \quad (\text{B.3})$$

$$\int_{\mathcal{M}_1} f(x) dx = \int_{\mathcal{M}_2} \frac{f(\varphi^{-1}(y))}{|\text{Jac } \varphi(\varphi^{-1}(y))|} dy. \quad (\text{B.4})$$

$$\int_{\mathcal{M}_1} g(\varphi(x)) |\text{Jac } \varphi(x)| dx = \int_{\mathcal{M}_2} g(y) dy. \quad (\text{B.5})$$

$$\int_{\mathcal{M}_1} g(\varphi(x)) dx = \int_{\mathcal{M}_2} \frac{g(y)}{|\text{Jac } \varphi(\varphi^{-1}(y))|} dy. \quad (\text{B.6})$$

**Lema B.0.4.** Si  $\mathcal{M}$  es una variedad riemanniana, entonces para toda isometría  $\sigma : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  se verifica

$$\text{NJac}\sigma(x) = 1$$

para todo  $x \in \mathcal{M}$ .

*Demostración.* Sea  $(v_1, \dots, v_n)$  una base de  $\ker(D\sigma(x))^\perp$ , entonces podemos escribir el jacobiano normal como:

$$\text{NJac}\sigma(x) = \frac{\sqrt{|\langle D\sigma(x)v_i, D\sigma(x)v_j \rangle|}}{\sqrt{|\langle v_i, v_j \rangle|}}$$

Como  $\sigma$  es una isometría, tenemos en particular que  $\langle D\sigma(x)v_i, D\sigma(x)v_j \rangle = \langle v_i, v_j \rangle$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Luego tenemos:

$$\text{NJac}\sigma(x) = \frac{\sqrt{|\langle v_i, v_j \rangle|}}{\sqrt{|\langle v_i, v_j \rangle|}} = 1$$

□

**Lema B.0.5.** Sean  $\mathcal{L}, \mathcal{M}, \mathcal{N}$  variedades riemannianas y  $\varphi_1 : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $\varphi_2 : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  dos aplicaciones tales que al menos una de las siguientes condiciones se verifica:

1.  $\varphi_1$  es un difeomorfismo.
2.  $\varphi_2$  es una isometría.

Entonces la regla de la cadena para los jacobianos normales

$$\text{NJac}(\varphi_2 \circ \varphi_1)(x) = \text{NJac}\varphi_2(\varphi_1(x)) \text{NJac}\varphi_1(x)$$

se verifica.

*Demostración.* Calculamos

$$\begin{aligned} \text{NJac}(\varphi_2 \circ \varphi_1)(x)^2 &= \det(\text{Jac}(\varphi_2 \circ \varphi_1)(x)^t \text{Jac}(\varphi_2 \circ \varphi_1)(x)) \\ &= \det([\text{Jac}\varphi_2(\varphi_1(x)) \text{Jac}\varphi_1(x)]^t [\text{Jac}\varphi_2(\varphi_1(x)) \text{Jac}\varphi_1(x)]) \\ &= \det(\text{Jac}\varphi_1(x)^t \text{Jac}\varphi_2(\varphi_1(x))^t \text{Jac}\varphi_2(\varphi_1(x)) \text{Jac}\varphi_1(x)). \end{aligned}$$

Donde Jac es la matriz jacobiana. Ahora bien, si  $\varphi_1$  es un difeomorfismo, la matriz  $\text{Jac}\varphi_1(x)$  es cuadrada, así que

$$\begin{aligned} \text{NJac}(\varphi_2 \circ \varphi_1)(x)^2 &= \det(\text{Jac}\varphi_1(x)^t \text{Jac}\varphi_2(\varphi_1(x))^t \text{Jac}\varphi_2(\varphi_1(x)) \text{Jac}\varphi_1(x)) \\ &= \text{NJac}\varphi_2(\varphi_1(x)) \text{NJac}\varphi_1(x). \end{aligned}$$

Por otro lado, si  $\varphi_2$  es una isometría entonces

$$\text{Jac}\varphi_2(\varphi_1(x))^t \text{Jac}\varphi_2(\varphi_1(x)) = Id$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{NJac}(\varphi_2 \circ \varphi_1)(x)^2 &= \det(\text{Jac}\varphi_1(x)^t \text{Jac}\varphi_2(\varphi_1(x))^t \text{Jac}\varphi_2(\varphi_1(x)) \text{Jac}\varphi_1(x)) \\ &= \det(\text{Jac}\varphi_1(x)^t \text{Jac}\varphi_1(x)) \\ &= \text{NJac}\varphi_1(x)^2 = \text{NJac}\varphi_2(\varphi_1(x)) \text{NJac}\varphi_1(x). \end{aligned}$$

□

**Teorema B.0.6.** Sean  $\mathcal{M}, \mathcal{N}$  variedades diferenciales,  $\varphi : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$  una submersión y  $\sigma_{\mathcal{M}} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ ,  $\sigma_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$  isometrías tales que hacen conmutativo el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{N} \\ \sigma_{\mathcal{M}} \downarrow & & \downarrow \sigma_{\mathcal{N}} \\ \mathcal{M} & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{N} \end{array}$$

Entonces para todo  $x \in \mathcal{M}$ ,  $\text{NJac}\varphi(x) = \text{NJac}\varphi(\sigma_{\mathcal{M}}(x))$ .

*Demostración.* Por la regla de la cadena para jacobianos normales (Lema B.0.5) podemos afirmar que

$$\text{NJac}(\varphi \circ \sigma_{\mathcal{M}})(x) = \text{NJac}\varphi(\sigma_{\mathcal{M}}(x)) \text{NJac}\sigma_{\mathcal{M}}(x).$$

Además, por el Lema B.0.4 sabemos que  $\text{NJac}\sigma_{\mathcal{M}}(x) = 1$ , luego tenemos que:

$$\text{NJac}(\varphi \circ \sigma_{\mathcal{M}})(x) = \text{NJac}\varphi(\sigma_{\mathcal{M}}(x)). \quad (\text{B.7})$$

Podemos razonar de igual forma para ver que

$$\text{NJac}(\sigma_{\mathcal{N}} \circ \varphi)(x) = \text{NJac}\varphi(x), \quad (\text{B.8})$$

además, como el diagrama es conmutativo, tenemos que

$$\text{NJac}(\varphi \circ \sigma_{\mathcal{M}})(x) = \text{NJac}(\sigma_{\mathcal{N}} \circ \varphi)(x). \quad (\text{B.9})$$

Uniendo las igualdades (B.7), (B.8) y (B.9) obtenemos

$$\text{NJac}\varphi(\sigma_{\mathcal{M}}(x)) = \text{NJac}(\varphi \circ \sigma_{\mathcal{M}})(x) = \text{NJac}(\sigma_{\mathcal{N}} \circ \varphi)(x) = \text{NJac}\varphi(x).$$

□

Una isometría muy útil con la que trabajamos varias veces en esta tesis es la siguiente.

**Proposición B.0.7.** *Para cada  $x \in \mathbb{R}^{2d}$  existe una isometría de la forma*

$$\begin{aligned} \theta_x : \mathbb{R}^{2d} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2d} \\ x &\mapsto (\|x\|, 0, \dots, 0). \end{aligned}$$

*Demostración.* Consideremos un vector  $x \in \mathbb{R}^{2d}$ , podemos completarlo con vectores  $(w_2, \dots, w_{2d})$  hasta formar una base de  $\mathbb{R}^{2d}$ . A través de un proceso de Gram-Schmidt obtenemos una nueva base  $\left(\frac{x}{\|x\|}, v_2, \dots, v_{2d}\right)$ , esta vez ortonormal. Consideremos entonces la matriz  $A_x$  cuyas columnas son precisamente los vectores  $\left(\frac{x}{\|x\|}, v_2, \dots, v_{2d}\right)$ . Como  $A_x$  es una matriz ortonormal, tanto ella como su inversa definen una isometría. Además, tenemos que:

$$A_x e_1 = \frac{x}{\|x\|}$$

luego  $x = \|x\| A_x e_1$ . Tomemos entonces la isometría  $\theta_x = A_x^{-1}$ , entonces se verifica:

$$\theta_x x = A_x^{-1} x = A_x^{-1} \|x\| A_x e_1 = \|x\| A_x^{-1} A_x e_1 = \|x\| e_1 = (\|x\|, 0, \dots, 0).$$

□



---

---

## APÉNDICE C

---

# Regla del Trapecio

Resulta sorprendente que un método tan sencillo como la regla del Trapecio siga proporcionando tan buenos resultados cuando se trata de aproximar integrales. En esta sección explicamos como obtener la regla del Trapecio para cualquier función integrable y demostramos unas cuantas cotas para su error.

## Regla del Trapecio simple

Si resolvemos la integral  $\int_a^b f(x)dx$  integrando por partes con  $u = f(x)$ ,  $dv = dx$ ,  $du = f'(x)dx$  y  $v = x + A$ , obtenemos

$$\int_a^b f(x)dx = (f(x)(x + A))\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)(x + A)dx.$$

De nuevo integramos por partes con  $u = f'(x)$ ,  $dv = (x + A)dx$ ,  $du = f''(x)dx$  y  $v = \frac{(x + A)^2}{2} + B$  para resolver

$$\int_a^b f'(x)(x + A)dx = \left( f'(x) \left( \frac{(x + A)^2}{2} + B \right) \right)\Big|_a^b - \int_a^b f''(x) \left( \frac{(x + A)^2}{2} + B \right) dx,$$

tenemos

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= (f(x)(x + A))\Big|_a^b - \left( f'(x) \left( \frac{(x + A)^2}{2} + B \right) \right)\Big|_a^b + \int_a^b f''(x) \left( \frac{(x + A)^2}{2} + B \right) dx \\ &= f(b)(b + A) - f(a)(a + A) - f'(b) \left( \frac{(b + A)^2}{2} + B \right) + f'(a) \left( \frac{(a + A)^2}{2} + B \right) \\ &\quad + \int_a^b f''(x) \left( \frac{(x + A)^2}{2} + B \right) dx. \end{aligned}$$

Tomamos  $A = -\frac{a+b}{2}$  y sustituimos en la ecuación anterior obteniendo

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) - \underbrace{\left( \frac{(b-a)^2}{8} + B \right)}_{\mathcal{I}} (f'(b) - f'(a)) \\ &\quad + \int_a^b f''(x) \left( \frac{\left( x - \frac{a+b}{2} \right)^2}{2} + B \right) dx. \end{aligned}$$

Como queremos que  $\mathcal{I}$  se anule, tomamos  $B = -\frac{(b-a)^2}{8}$  y obtenemos

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) + \int_a^b f''(x) \left( \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{8} \right) dx.$$

**Definición C.0.1.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable, entonces la regla del Trapecio afirma que

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) + \int_a^b f''(x) \left( \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{8} \right) dx.$$

### Una cota para la regla del Trapecio simple

**Teorema C.0.2.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable tal que  $f''(x) > -M \forall x \in [a, b]$ . Entonces

$$\int_a^b f(x)dx < \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) + \frac{(b-a)^3 M}{12}.$$

*Demostración.* Supongamos que  $f''(x) > -M$  para todo  $x \in [a, b]$ . Como  $\frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{8}$  toma valores negativos para  $x \in [a, b]$  tenemos

$$f''(x) \left( \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{8} \right) < -M \left( \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{8} \right),$$

y por lo tanto,

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &< \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) + \int_a^b -M \left( \frac{(x - \frac{a+b}{2})^2}{2} - \frac{(b-a)^2}{8} \right) dx \\ &= \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b)) + \frac{(b-a)^3 M}{12}. \end{aligned}$$

□

### Regla del Trapecio compuesta

Ahora dividimos el intervalo  $[a, b]$  en  $n$  subintervalos de longitud  $h = \frac{b-a}{n}$ . Si aplicamos la Definición C.0.1 en cada subintervalo obtenemos:

$$\begin{aligned} \int_{a+\frac{j(b-a)}{n}}^{a+\frac{(j+1)(b-a)}{n}} f(x)dx &= \frac{(b-a)}{2n} \left( f \left( a + \frac{j(b-a)}{n} \right) + f \left( a + \frac{(j+1)(b-a)}{n} \right) \right) \\ &+ \int_{a+\frac{j(b-a)}{n}}^{a+\frac{(j+1)(b-a)}{n}} f''(x) \left( \frac{(x - a - jh - \frac{h}{2})^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) dx. \end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a+\frac{j(b-a)}{n}}^{a+\frac{(j+1)(b-a)}{n}} f(x)dx \\
&= \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(b-a)}{2n} \left( f\left(a + \frac{j(b-a)}{n}\right) + f\left(a + \frac{(j+1)(b-a)}{n}\right) \right) \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a+\frac{j(b-a)}{n}}^{a+\frac{(j+1)(b-a)}{n}} f''(x) \left( \frac{(x-a-jh-\frac{h}{2})^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) dx \\
&= \frac{(b-a)}{n} \left[ \frac{f(b)+f(a)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f\left(a + \frac{j(b-a)}{n}\right) \right] \\
&\quad + \sum_{j=0}^{n-1} \int_{a+\frac{j(b-a)}{n}}^{a+\frac{(j+1)(b-a)}{n}} f''(x) \left( \frac{(x-a-jh-\frac{h}{2})^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) dx.
\end{aligned}$$

Donde tenemos

$$\begin{aligned}
&\int_{a+\frac{j(b-a)}{n}}^{a+\frac{(j+1)(b-a)}{n}} f''(x) \left( \frac{(x-a-jh-\frac{h}{2})^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) dx \\
&= \int_0^h f''\left(y + a + j\frac{(b-a)}{n}\right) \left( \frac{(y-\frac{h}{2})^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) dy
\end{aligned}$$

a través del cambio de variables  $y = x - a - hj$ .

**Definición C.0.3.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función integrable con el intervalo  $[a, b]$  dividido en  $n$  subintervalos de longitud  $h = \frac{b-a}{n}$ , entonces la regla del Trapecio compuesta afirma que

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \frac{(b-a)}{n} \left[ \frac{f(b)+f(a)}{2} + \sum_{j=1}^{n-1} f\left(a + \frac{j(b-a)}{n}\right) \right] \\
&\quad + \int_0^h \left( \frac{(y-\frac{h}{2})^2}{2} - \frac{h^2}{8} \right) \sum_{j=0}^{n-1} f''\left(y + a + j\frac{(b-a)}{n}\right) dy.
\end{aligned} \tag{C.1}$$

### Una cota para la regla del Trapecio compuesta

El siguiente es un resultado conocido en análisis de Fourier.

**Lema C.0.4.** Sea  $f : [n, n+1] \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^1$  con  $n \in \mathbb{Z}$ . Sea  $C > 0$  y tal que  $|f'| \leq C$ . Entonces para todo  $k \geq 1$ ,

$$\left| \int_n^{n+1} \cos(2\pi kx) f(x) dx \right| \leq \frac{C}{2\pi k}.$$

*Demostración.* Si integramos por partes tenemos

$$\int_n^{n+1} \cos(2\pi kx) f(x) dx = -\frac{1}{2\pi k} \int_n^{n+1} \sin(2\pi kx) f'(x) dx.$$

Podemos acotar  $\sin(2\pi kx) f'(x)$  por  $C$  y concluimos la demostración.  $\square$

**Lema C.0.5.** Sea  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  una función  $C^2$  con  $a < b$  números enteros y asumimos que  $f$  es  $C^3$  en el intervalo abierto con  $|f'''| \leq C$ . Entonces,

$$\left| \frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{j=a+1}^{b-1} f(j) - \int_a^b f(x) dx - \frac{f'(b) - f'(a)}{12} \right| \leq \frac{C(b-a)}{24\pi}.$$

*Demostración.* Sea  $S$  la cantidad que queremos acotar. Por la identidad de Euler-Macalaurin (encontramos una versión en [Kress, 1998, Theorem 9.26]),

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 k^2} \int_a^b \cos(2\pi k(x-a)) f''(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi^2 k^2} \sum_{n=a}^{b-1} \int_n^{n+1} \cos(2\pi k(x-a)) f''(x) dx.$$

Por el Lema C.0.4, la integral vale como mucho  $C\pi/2$ . Entonces,

$$S \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b-a}{2\pi^2 k^2} \frac{C}{2\pi k} \leq \frac{C(b-a)}{24\pi}.$$

$\square$

---

---

## APÉNDICE D

---

# Programas en Maxima

En este apéndice presentamos el código de los programas empleados en el Capítulo 4. El código tiene sus propios comentarios sobre las distintas funciones.

```
/* Comprobación de que se cumplen las cotas de las terceras derivadas */
```

```
u:a+b*x;
z:1-(1+2*n-(a+b*x)+2*a*(x-t+1)+b*(x+t)*(x-t+1))/(N-1);
v:1-z;
w:log(v);
vx:ratsimp(diff(v,x));
vx2:ratsimp(diff(v,x,2));
wx:ratsimp(diff(w,x));
wx2:(diff(w,x,2));
wx3:(diff(w,x,3));
```

```
gx3:ratsimp(substitute([t=0,n=0],diff(u*v*w,x,3)));
```

```
u:a+b*x;
z:1-(1+2*n-(a+b*x)+2*a*(x-t+1)+b*(x+t)*(x-t+1))/(N-1);
v:1+z;
w:log(v);
vx:ratsimp(diff(v,x));
vx2:ratsimp(diff(v,x,2));
wx:ratsimp(diff(w,x));
wx2:(diff(w,x,2));
wx3:(diff(w,x,3));
```

```
gx3:ratsimp(substitute([t=0,n=0,a=0],diff(u*v*w,x,3)));
```

---

```

/* Las integrales correspondientes al diamond ensemble para p=2M-1*/
assume(M>0 and K>0);
/* Cálculo de la energía logarítmica con r=1 */
z:1-(1+K*x^2)/(N-1);
f:K*x*log(K*x);
I1:integrate(f,x,0,M);
g:K*x*(1-z)*log(1-z);
h:K*x*(1+z)*log(1+z);
gx:diff(g,x);
hx:diff(h,x);
extrag:(substitute(x=M,gx)-substitute(x=0,gx))/12;
extrah:(substitute(x=M,hx)-substitute(x=0,hx))/12;
E:-(N-1)*log(4)-2*I1-(N-1)*(extrag+extrah+integrate(g+h,x,0,M));
E:substitute(M=sqrt((N-2)/K),E);
EterminoN:taylor(E+(2*log(2)-1)/2*N^2+N*log(N)/2,N,inf,1);
EterminoN:ratsimp(limit(EterminoN/N,N,inf));

/* Cálculo de la energía logarítmica con r=3 en el caso particular tratado
en el capítulo 4, M=4m, p=8m-1 */
assume(m>1);
alpha1:0;
beta1:6;
alpha2:6*m;
beta2:3;
alpha3:12*m;
beta3:1;
alpha4:20*m;
beta4:-1;
alpha5:30*m;
beta5:-3;
alpha6:48*m;
beta6:-6;
t0:0;
t1:2*m;
t2:3*m;
t3:4*m;
t4:5*m;
t5:6*m;

```

---

```

t6:8*m;
r1:alpha1+beta1*x;
r2:alpha2+beta2*x;
r3:alpha3+beta3*x;
r4:alpha4+beta4*x;
r5:alpha5+beta5*x;
r6:alpha6+beta6*x;
N1:0;
N2:sum(r1,x,1,2*m-1),simpsum;
N2:ratsimp(N2);
N3:sum(r2,x,2*m,3*m-1),simpsum;
N3:ratsimp(N3+N2);
N4:sum(r3,x,3*m,4*m-1),simpsum;
N4:ratsimp(N4+N3);
N5:sum(r4,x,4*m,5*m-1),simpsum;
N5:ratsimp(N5+N4);
N6:sum(r5,x,5*m,6*m-1),simpsum;
N6:ratsimp(N6+N5);
N:sum(r6,x,6*m,8*m-1),simpsum;
N:ratsimp(N+N6)+2;

z1:ratsimp(1-(1+2*N1-(alpha1+beta1*x)+2*alpha1*(x-t0+1)+beta1*(x+t0)
*(x-t0+1))/(N-1));
z2:ratsimp(1-(1+2*N2-(alpha2+beta2*x)+2*alpha2*(x-t1+1)+beta2*(x+t1)
*(x-t1+1))/(N-1));
z3:ratsimp(1-(1+2*N3-(alpha3+beta3*x)+2*alpha3*(x-t2+1)+beta3*(x+t2)
*(x-t2+1))/(N-1));
z4:ratsimp(1-(1+2*N4-(alpha4+beta4*x)+2*alpha4*(x-t3+1)+beta4*(x+t3)
*(x-t3+1))/(N-1));
z5:ratsimp(1-(1+2*N5-(alpha5+beta5*x)+2*alpha5*(x-t4+1)+beta5*(x+t4)
*(x-t4+1))/(N-1));
z6:ratsimp(1-(1+2*N6-(alpha6+beta6*x)+2*alpha6*(x-t5+1)+beta6*(x+t5)
*(x-t5+1))/(N-1));

f1:r1*log(r1);
f2:r2*log(r2);
f3:r3*log(r3);

```

```
g1:r1*(1-z1)*log(1-z1);
g2:r2*(1-z2)*log(1-z2);
g3:r3*(1-z3)*log(1-z3);

h1:r1*(1+z1)*log(1+z1);
h2:r2*(1+z2)*log(1+z2);
h3:r3*(1+z3)*log(1+z3);

G1:g1+h1;
G2:g2+h2;
G3:g3+h3;

G1x:diff(G1,x);
G2x:diff(G2,x);
G3x:diff(G3,x);

I1:integrate(f1,x,0,t1);
I2:integrate(f2,x,t1,t2);
I3:integrate(f3,x,t2,t3);

I:ratsimp(I1+I2+I3);

J1:integrate(G1,x,0,t1);
J2:integrate(G2,x,t1,t2);
J3:integrate(G3,x,t2,t3);

J:ratsimp(J1+J2+J3);

Extra1:ratsimp(substitute(x=t1,G1x)-substitute(x=t0,G1x))/12;
Extra2:ratsimp(substitute(x=t2,G2x)-substitute(x=t1,G2x))/12;
Extra3:ratsimp(substitute(x=t3,G3x)-substitute(x=t2,G3x))/12;

Extra:ratsimp(Extra1+Extra2+Extra3);

E:-(N-1)*log(4)-2*I-(N-1)*(J+Extra);
E:substitute(m=sqrt((NN-2)/82),E);
EterminoN:taylor(E+(2*log(2)-1)/2*NN^2+NN*log(NN)/2,NN,inf,1);
```

```
EterminoN:ratsimp(limit(EterminoN/NN,NN,inf));
float(EterminoN);

/* Cálculo de la energía logarítmica con r=7 en el caso particular M=7m, p=2M-1 */
assume(m>1,K>1);
K:0;
constanteinicial:K;
beta1:6;
beta2:6;
beta3:5;
beta4:4;
beta5:3;
beta6:2;
beta7:1;

t0:0;
t1:m;
t2:2*m;
t3:3*m;
t4:4*m;
t5:5*m;
t6:6*m;
t7:7*m;

alpha1:constanteinicial;
alpha2:alpha1-(beta2-beta1)*t1;
alpha3:alpha2-(beta3-beta2)*t2;
alpha4:alpha3-(beta4-beta3)*t3;
alpha5:alpha4-(beta5-beta4)*t4;
alpha6:alpha5-(beta6-beta5)*t5;
alpha7:alpha6-(beta7-beta6)*t6;

r1:alpha1+beta1*x;
r2:alpha2+beta2*x;
r3:alpha3+beta3*x;
r4:alpha4+beta4*x;
```

---

```

r5:alpha5+beta5*x;
r6:alpha6+beta6*x;
r7:alpha7+beta7*x;

r8:substitute(x=14*m-x,r7);
r9:ratsimp(substitute(x=14*m-x,r6));
r10:ratsimp(substitute(x=14*m-x,r5));
r11:ratsimp(substitute(x=14*m-x,r4));
r12:ratsimp(substitute(x=14*m-x,r3));
r13:ratsimp(substitute(x=14*m-x,r2));
r14:ratsimp(substitute(x=14*m-x,r1));

N1:0;
N2:sum(r1,x,1,t1-1),simpsum;
N2:ratsimp(N2);
N3:sum(r2,x,t1,t2-1),simpsum;
N3:ratsimp(N3+N2);
N4:sum(r3,x,t2,t3-1),simpsum;
N4:ratsimp(N4+N3);
N5:sum(r4,x,t3,t4-1),simpsum;
N5:ratsimp(N5+N4);
N6:sum(r5,x,t4,t5-1),simpsum;
N6:ratsimp(N6+N5);
N7:sum(r6,x,t5,t6-1),simpsum;
N7:ratsimp(N7+N6);
N:sum(r7,x,t6,t7),simpsum;
N:ratsimp(N+N7);
N:ratsimp(2*N+2-substitute(x=7*m,r7));

menfunciondeN:(sqrt(239*NN+49*K^2+239*K-478)-7*K)/239;

z1:ratsimp(1-(1+2*N1-(alpha1+beta1*x)+2*alpha1*(x-t0+1)+beta1*(x+t0)
*(x-t0+1))/(N-1));
z2:ratsimp(1-(1+2*N2-(alpha2+beta2*x)+2*alpha2*(x-t1+1)+beta2*(x+t1)
*(x-t1+1))/(N-1));
z3:ratsimp(1-(1+2*N3-(alpha3+beta3*x)+2*alpha3*(x-t2+1)+beta3*(x+t2)

```

---

```

*(x-t2+1))/(N-1));
z4:ratsimp(1-(1+2*N4-(alpha4+beta4*x)+2*alpha4*(x-t3+1)+beta4*(x+t3)
*(x-t3+1))/(N-1));
z5:ratsimp(1-(1+2*N5-(alpha5+beta5*x)+2*alpha5*(x-t4+1)+beta5*(x+t4)
*(x-t4+1))/(N-1));
z6:ratsimp(1-(1+2*N6-(alpha6+beta6*x)+2*alpha6*(x-t5+1)+beta6*(x+t5)
*(x-t5+1))/(N-1));
z7:ratsimp(1-(1+2*N7-(alpha7+beta7*x)+2*alpha7*(x-t6+1)+beta7*(x+t6)
*(x-t6+1))/(N-1));

z8:ratsimp(-substitute(x=14*m-x,z7));
z9:ratsimp(-substitute(x=14*m-x,z6));
z10:ratsimp(-substitute(x=14*m-x,z5));
z11:ratsimp(-substitute(x=14*m-x,z4));
z12:ratsimp(-substitute(x=14*m-x,z3));
z13:ratsimp(-substitute(x=14*m-x,z2));
z14:ratsimp(-substitute(x=14*m-x,z1));

f1:r1*log(r1);
f2:r2*log(r2);
f3:r3*log(r3);
f4:r4*log(r4);
f5:r5*log(r5);
f6:r6*log(r6);
f7:r7*log(r7);

g1:r1*(1-z1)*log(1-z1);
g2:r2*(1-z2)*log(1-z2);
g3:r3*(1-z3)*log(1-z3);
g4:r4*(1-z4)*log(1-z4);
g5:r5*(1-z5)*log(1-z5);
g6:r6*(1-z6)*log(1-z6);
g7:r7*(1-z7)*log(1-z7);

h1:r1*(1+z1)*log(1+z1);
h2:r2*(1+z2)*log(1+z2);

```

```
h3:r3*(1+z3)*log(1+z3);
h4:r4*(1+z4)*log(1+z4);
h5:r5*(1+z5)*log(1+z5);
h6:r6*(1+z6)*log(1+z6);
h7:r7*(1+z7)*log(1+z7);
```

```
G1:g1+h1;
G2:g2+h2;
G3:g3+h3;
G4:g4+h4;
G5:g5+h5;
G6:g6+h6;
G7:g7+h7;
```

```
G1x:diff(G1,x);
G2x:diff(G2,x);
G3x:diff(G3,x);
G4x:diff(G4,x);
G5x:diff(G5,x);
G6x:diff(G6,x);
G7x:diff(G7,x);
```

```
I1:integrate(f1,x,t0,t1);
I2:integrate(f2,x,t1,t2);
I3:integrate(f3,x,t2,t3);
I4:integrate(f4,x,t3,t4);
I5:integrate(f5,x,t4,t5);
I6:integrate(f6,x,t5,t6);
I7:integrate(f7,x,t6,t7);
```

```
I:ratsimp(I1+I2+I3+I4+I5+I6+I7);
```

```
J1:integrate(G1,x,t0,t1);
J2:integrate(G2,x,t1,t2);
J3:integrate(G3,x,t2,t3);
J4:integrate(G4,x,t3,t4);
J5:integrate(G5,x,t4,t5);
```

---

```
J6:integrate(G6,x,t5,t6);
J7:integrate(G7,x,t6,t7);

J:ratsimp(J1+J2+J3+J4+J5+J6+J7);

Extra1:ratsimp(substitute(x=t1,G1x)-substitute(x=t0,G1x))/12;
Extra2:ratsimp(substitute(x=t2,G2x)-substitute(x=t1,G2x))/12;
Extra3:ratsimp(substitute(x=t3,G3x)-substitute(x=t2,G3x))/12;
Extra4:ratsimp(substitute(x=t4,G4x)-substitute(x=t3,G4x))/12;
Extra5:ratsimp(substitute(x=t5,G5x)-substitute(x=t4,G5x))/12;
Extra6:ratsimp(substitute(x=t6,G6x)-substitute(x=t5,G6x))/12;
Extra7:ratsimp(substitute(x=t7,G7x)-substitute(x=t6,G7x))/12;

Extra:ratsimp(Extra1+Extra2+Extra3+Extra4+Extra5+Extra6+Extra7);

E:-(N-1)*log(4)-2*I-(N-1)*(J+Extra);
E:substitute(m=menfunciondeN,E);
EterminoN:taylor(E+(2*log(2)-1)/2*NN^2+NN*log(NN)/2,NN,inf,1);
EterminoN:ratsimp(limit(EterminoN/NN,NN,inf));
float(EterminoN);
```



---

# Bibliografía

- [Aistleitner et al., 2012] Aistleitner, C., Brauchart, J. S., and Dick, J. (2012). Point Sets on the Sphere  $\mathbb{S}^2$  with Small Spherical Cap Discrepancy. *Discrete & Computational Geometry*, 48(4):990–1024.
- [Alexander, 1972] Alexander, R. (1972). On the sum of distances between points on a sphere. *Acta Mathematica Hungarica*, 23(3-4):443–448.
- [Alishahi and Zamani, 2015] Alishahi, K. and Zamani, M. (2015). The spherical ensemble and uniform distribution of points on the sphere. *Electron. J. Probab.*, 20:23–27.
- [Arias de Reyna, 1988] Arias de Reyna, J. (1988). A generalized mean-value theorem. *Monatsh. Math.*, 106(2):95–97.
- [Armentano et al., 2011] Armentano, D., Beltrán, C., and Shub, M. (2011). Minimizing the discrete logarithmic energy on the sphere: the role of random polynomials. *Transactions of the American Mathematical Society*, 363(6):2955–2965.
- [Bachoc et al., 2002] Bachoc, C., Coulangeon, R., and Nebe, G. (2002). Designs in Grassmannian spaces and lattices. *J. Algebraic Combin.*, 16(1):5–19.
- [Banday et al., 2005] Banday, A. J., Bartelmann, M., Górski, K. M., Hansen, F. K., Hivon, E., Reinecke, M., and Wandelt, B. D. (2005). Healpix: A Framework for High-Resolution Discretization and Fast Analysis of Data Distributed on the Sphere. *The Astrophysical Journal*, 622(2):759.
- [Bannai and Bannai, 2009] Bannai, E. and Bannai, E. (2009). A survey on spherical designs and algebraic combinatorics on spheres. *European Journal of Combinatorics*, 30(6):1392–1425. Association Schemes: Ideas and Perspectives.
- [Bannai and Damerell, 1979] Bannai, E. and Damerell, R. M. (1979). Tight spherical designs. I. *J. Math. Soc. Japan*, 31(1):199–207.
- [Bannai and Damerell, 1980] Bannai, E. and Damerell, R. M. (1980). Tight spherical designs. II. *J. London Math. Soc. (2)*, 21(1):13–30.
- [Bauer, 2000] Bauer, R. (2000). Distribution of points on a sphere with application of star catalogs cite. *Guidance, Navigation, and Control Conference and Exhibit*, 23(1):130–137.
- [Beck, 1984] Beck, J. (1984). Sums of distances between points on a sphere - an application of the theory of irregularities of distribution to discrete Geometry. *Mathematika*, 31(1):33–41.

- [Beltrán and Etayo, 2018a] Beltrán, C. and Etayo, U. (2018a). The Diamond ensemble: a constructive set of points with small logarithmic energy. *Preprint arXiv:1809.09416*.
- [Beltrán and Etayo, 2018b] Beltrán, C. and Etayo, U. (2018b). A generalization of the spherical ensemble to even-dimensional spheres. *Preprint arXiv:1806.10535*.
- [Beltrán and Etayo, 2018c] Beltrán, C. and Etayo, U. (2018c). The Projective Ensemble and Distribution of Points in Odd-Dimensional Spheres. *Constructive Approximation*, 48(1):163–182.
- [Beltrán et al., 2019] Beltrán, C., Corral, N., and del Rey, J. G. C. (2019). Discrete and continuous green energy on compact manifolds. *Journal of Approximation Theory*, 237:160 – 185.
- [Beltrán et al., 2016] Beltrán, C., Marzo, J., and Ortega-Cerdà (2016). Energy and discrepancy of rotationally invariant determinantal point processes in high dimensional spheres. *Journal of Complexity*, 37(3):76–109.
- [Benedetto and Fickus, 2003] Benedetto, J. J. and Fickus, M. (2003). Finite Normalized Tight Frames. *Advances in Computational Mathematics*, 18(2):357–385.
- [Berman, 2014] Berman, R. J. (2014). Determinantal point processes and fermions on complex manifolds: large deviations and bosonization. *Comm. Math. Phys.*, 327(1):1–47.
- [Berman and Ortega-Cerdà, 2018] Berman, R. J. and Ortega-Cerdà, J. (2018). Sampling of real multivariate polynomials and pluripotential theory. *American Journal of Mathematics*, 140(3):789–820.
- [Bétermin and Sandier, 2018] Bétermin, L. and Sandier, E. (2018). Renormalized Energy and Asymptotic Expansion of Optimal Logarithmic Energy on the Sphere. *Constructive Approximation*, 47(1):39–74.
- [Bilyk et al., 2018] Bilyk, D., Dai, F., and Matzke, R. (2018). The Stolarsky Principle and Energy Optimization on the Sphere. *Constructive Approximation*, 48(1):31–60.
- [Blum et al., 1998] Blum, L., Cucker, F., Shub, M., and Smale, S. (1998). *Complexity and Real Computation*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [Boisvert et al., 2010] Boisvert, R. F., Clark, C. W., Lozier, D. W., and Olver, F. W. J., editors (2010). *NIST Handbook of Mathematical Functions*. Cambridge University Press, New York, NY. Print companion to [DLMF, 2015].
- [Bondarenko et al., 2013] Bondarenko, A., Radchenko, D., and Viazovska, M. (2013). Optimal asymptotic bounds for spherical designs. *Annals of mathematics*, 178(2):443–452.

- [Bondarenko et al., 2015] Bondarenko, A., Radchenko, D., and Viazovska, M. (2015). Well-Separated Spherical Designs. *Constructive Approximation*, 41(1):93–112.
- [Bondarenko et al., 2014] Bondarenko, A. V., Hardin, D. P., and Saff, E. B. (2014). Mesh ratios for best-packing and limits of minimal energy configurations. *Acta Mathematica Hungarica*, 142(1):118–131.
- [Borodachov et al., ] Borodachov, S., Hardin, D., and Saff, E. *Minimal Discrete Energy on the Sphere and Other Manifolds*. Springer, Berlin, to appear.
- [Borodachov et al., 2018] Borodachov, S. V., Hardin, D. P., Reznikov, A., and Saff, E. B. (2018). Optimal discrete measures for riesz potentials. *Transactions of the American Mathematical Society*, 370(10):6973–6993.
- [Borodachov et al., 2007] Borodachov, S. V., Hardin, D. P., and Saff, E. B. (2007). Asymptotics of Best-Packing on Rectifiable Sets. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 135(8):2369–2380.
- [Brauchart and Dick, 2013] Brauchart, J. and Dick, J. (2013). A simple proof of Stolarsky’s invariance principle. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 141(6):2085–2096.
- [Brauchart, 2006] Brauchart, J. S. (2006). About the second term of the asymptotics for optimal Riesz energy on the sphere in the potential-theoretical case. *Integral Transforms and Special Functions*, 17(5):321–328.
- [Brauchart, 2008] Brauchart, J. S. (2008). Optimal logarithmic energy points on the unit sphere. *Math. Comp.*, 77(263):1599–1613.
- [Brauchart and Grabner, 2015] Brauchart, J. S. and Grabner, P. J. (2015). Distributing many points on spheres: Minimal energy and designs. *Journal of Complexity*, 31(3):293–326.
- [Brauchart et al., 2017] Brauchart, J. S., Grabner, P. J., and Kusner, W. (2017). Hyperuniform point sets on the sphere: deterministic constructions. *Preprint arXiv:1709.02613*.
- [Brauchart et al., 2009] Brauchart, J. S., Hardin, D. P., and Saff, E. B. (2009). The Riesz energy of the  $n$ th roots of unity: an asymptotic expansion for large  $n$ . *Bulletin of the London Mathematical Society*, 41(4):621–633.
- [Brauchart et al., 2012] Brauchart, J. S., Hardin, D. P., and Saff, E. B. (2012). *The next-order term for optimal Riesz and logarithmic energy asymptotics on the sphere*, volume 578 of *Contemp. Math.* Amer. Math. Soc., Providence, RI.

- [Brauchart et al., 2014] Brauchart, J. S., Saff, E. B., Sloan, I. H., and Womersley, R. S. (2014). QMC designs: Optimal order Quasi Monte Carlo integration schemes on the sphere. *Mathematics of Computation*, 83:2821–2851.
- [Breger et al., 2017] Breger, A., Ehler, M., and Gräf, M. (2017). Quasi Monte Carlo integration and kernel-based function approximation on Grassmannians. In *Frames and Other Bases in Abstract and Function Spaces.*, pages 333–353. Birkhäuser, Cham.
- [Chen and Cho, 2006] Chen, Y. and Cho, Y. (2006). *Topological Degree Theory and Applications*. Mathematical Analysis and Applications. CRC Press.
- [Cohn and Kumar, 2007] Cohn, H. and Kumar, A. (2007). Universally optimal distribution of points on spheres. *Journal of the American Mathematical Society*, 20(1):99–148.
- [Coxeter, 1972] Coxeter, H. (1972). The Role of intermediate convergents in Tait’s explanation for phyllotaxis. *Journal of Algebra*, 20(1):167 – 175.
- [Dai and Xu, 2013] Dai, F. and Xu, Y. (2013). *Approximation theory and harmonic analysis on spheres and balls*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, New York.
- [Damelin and Grabner, 2003] Damelin, S. B. and Grabner, P. J. (2003). Energy functionals, numerical integration and asymptotic equidistribution on the sphere. *Journal of Complexity*, 19(3):231 – 246. Oberwolfach Special Issue.
- [de la Harpe and Pache, 2005] de la Harpe, P. and Pache, C. (2005). *Cubature Formulas, Geometrical Designs, Reproducing Kernels, and Markov Operators*. Birkhäuser Basel, Basel.
- [Delsarte et al., 1977] Delsarte, P., Goethals, J. M., and Seidel, J. J. (1977). Spherical codes and designs. *Geometriae Dedicata*, 6(3):363–388.
- [DLMF, 2015] DLMF (2015). NIST Digital Library of Mathematical Functions. Online companion to [Boisvert et al., 2010].
- [Doohovskoy and Landkof, 2011] Doohovskoy, A. P. and Landkof, N. S. (2011). *Foundations of Modern Potential Theory*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg.
- [Dubickas, 1996] Dubickas, A. (1996). On the maximal product of distances between points on a sphere. *Liet. Mat. Rink.*, 36(3):303–312.
- [Ehler et al., 2018] Ehler, M., Gigante, G., and Peter, T. (2018). On the existence of asymptotically optimal cubature points. *arXiv:1810.01106*.

- [Ehler and Gräf, 2018] Ehler, M. and Gräf, M. (2018). Reproducing Kernels for the Irreducible Components of Polynomial Spaces on Unions of Grassmannians. *Constructive Approximation*.
- [Ehler and Okoudjou, 2012] Ehler, M. and Okoudjou, K. (2012). Minimization of the probabilistic p-frame potential. *Journal of Statistical Planning and Inference*, 142(3):645 – 659.
- [Etayo et al., 2018] Etayo, U., Marzo, J., and Ortega-Cerdà, J. (2018). Asymptotically optimal designs on compact algebraic manifolds. *Monatshefte für Mathematik*, 186(2):235–248.
- [Fejér, 1932] Fejér, L. (1932). Bestimmung derjenigen abschnitte eines intervalles, für welche die quadratsumme der grundfunktionen der lagrangeschen interpolation im intervalle ein möglichst kleines maximum besitzt. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa - Classe di Scienze*, Ser. 2, 1(3):263–276.
- [Filbir and Mhaskar, 2010] Filbir, F. and Mhaskar, H. N. (2010). A quadrature formula for diffusion polynomials corresponding to a generalized heat kernel. *J. Fourier Anal. Appl.*, 16(5):629–657.
- [Filbir and Mhaskar, 2011] Filbir, F. and Mhaskar, H. N. (2011). Marcinkiewicz-Zygmund measures on manifolds. *Journal of Complexity*, 27(6):568–596.
- [Gariboldi and Gigante, 2018] Gariboldi, B. and Gigante, G. (2018). Optimal asymptotic bounds for designs on manifolds. *Preprint arXiv:1811.12676*.
- [Gautschi, 2014] Gautschi, W. (2014). Selected works with commentaries. vol. 2. Edited by Claude Brezinski and Ahmed Sameh.
- [Gigante and Leopardi, 2017] Gigante, G. and Leopardi, P. (2017). Diameter bounded equal measure partitions of ahlfors regular metric measure spaces. *Discrete & Computational Geometry*, 57(2):419–430.
- [Götz and Saff, 2001] Götz, M. and Saff, E. (2001). Note on d-Extremal Configurations for the Sphere in  $\mathbb{R}^{d+1}$ . *Recent Progress in Multivariate Approximation*, pages 159–162.
- [Gradshteyn and Ryzhik, 2015] Gradshteyn, I. S. and Ryzhik, I. M. (2015). *Table of integrals, series, and products*. Elsevier/Academic Press, Amsterdam, eighth edition. Translated from the Russian, Translation edited and with a preface by Daniel Zwillinger and Victor Moll, Revised from the seventh edition.
- [Hardin and Saff, 2005] Hardin, D. and Saff, E. (2005). Minimal Riesz energy point configurations for rectifiable d-dimensional manifolds. *Advances in Mathematics*, 193(1):174 – 204.

- [Hardin et al., 2016] Hardin, D. P., Michaels, T., and Saff, E. B. (2016). A Comparison of Popular Point Configurations on  $\mathbb{S}^2$ . *Dolomites Research Notes on Approximation*, 9(1):16–49.
- [Hesse, 2009] Hesse, K. (2009). The  $s$ -energy of spherical designs on  $\mathbb{S}^2$ . *Adv. Comput. Math.*, 30(1):37–59.
- [Hesse and Leopardi, 2008] Hesse, K. and Leopardi, P. (2008). The Coulomb energy of spherical designs on  $\mathbb{S}^2$ . *Adv. Comput. Math.*, 28(4):331–354.
- [Hoggar, 1982] Hoggar, S. (1982).  $t$ -Designs in Projective Spaces. *European Journal of Combinatorics*, 3(3):233–254.
- [Holhoş and Roşca, 2014] Holhoş, A. and Roşca, D. (2014). An octahedral equal area partition of the sphere and near optimal configurations of points. *Computers & Mathematics with Applications*, 67(5):1092–1107.
- [Hough et al., 2009] Hough, J. B., Krishnapur, M., Peres, Y., and Virág, B. (2009). Zeros of Gaussian analytic functions and determinantal point processes. volume 51 of *University Lecture Series*, pages x+154. American Mathematical Society, Providence, RI.
- [Istratescu, 1987] Istratescu, V. (1987). *Inner Product Structures: Theory and Applications*. Mathematics and Its Applications. Springer Netherlands.
- [Jost, 2005] Jost, J. (2005). *Postmodern Analysis*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [Kane, 2015] Kane, D. M. (2015). Small designs for path-connected spaces and path-connected homogeneous spaces. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 367(9):6387–6414.
- [Korevaar and Meyers, 1993] Korevaar, J. and Meyers, J. L. H. (1993). Spherical Faraday cage for the case of equal point charges and Chebyshev-type quadrature on the sphere. *Integral Transform. Spec. Funct.*, 1(2):105–117.
- [Korevaar and Meyers, 1994] Korevaar, J. and Meyers, J. L. H. (1994). Chebyshev-type quadrature on multidimensional domains. *J. Approx. Theory*, 79(1):144–164.
- [Kress, 1998] Kress, R. (1998). *Numerical analysis*, volume 181 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York.
- [Krishnapur, 2009] Krishnapur, M. (2009). From random matrices to random analytic functions. *Ann. Probab.*, 37(1):314–346.
- [Kuijlaars, 1995] Kuijlaars, A. (1995). Chebyshev-type quadrature and partial sums of the exponential series. *Math. Comp.*, 64(209):251–263.

- [Kuijlaars and Saff, 1997] Kuijlaars, A. B. J. and Saff, E. B. (1997). Distributing many points on a sphere. *The Mathematical Intelligencer*, 19(1):5–11.
- [Kuijlaars and Saff, 1998] Kuijlaars, A. B. J. and Saff, E. B. (1998). Asymptotics for minimal discrete energy on the sphere. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350(2):523–538.
- [Kuipers and Niederreiter, 2012] Kuipers, L. and Niederreiter, H. (2012). *Uniform Distribution of Sequences*. Dover Books on Mathematics. Dover Publications.
- [Lemieux, 2009] Lemieux, C. (2009). *Monte Carlo and Quasi-Monte Carlo Sampling*. Springer-Verlag, New York.
- [Loft et al., 2005] Loft, R. D., Nair, R. D., and Thomas, S. J. (2005). A Discontinuous Galerkin Transport Scheme on the Cubed Sphere. *Monthly Weather Review*, 133(4):814–828.
- [Lyubich and Shatalova, 2004] Lyubich, Y. I. and Shatalova, O. A. (2004). Isometric embeddings of finite-dimensional  $l_p$ -spaces over the quaternions. *Algebra i Analiz*, 16(1):15–32.
- [Macchi, 1975] Macchi, O. (1975). The coincidence approach to stochastic point processes. *Advances in Appl. Probability*, 7:83–122.
- [Marcellán et al., 2007] Marcellán, F., Martínez-Finkelshtein, A., and Martínez-González, P. (2007). Electrostatic models for zeros of polynomials: Old, new, and some open problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207(2):258 – 272. Proceedings of The Conference in Honour of Dr. Nico Temme on the Occasion of his 65th birthday.
- [Marzo and Ortega-Cerdà, 2010] Marzo, J. and Ortega-Cerdà, J. (2010). Equidistribution of fekete points on the sphere. *Constructive Approximation*, 32(3):513–521.
- [Marzo and Ortega-Cerdà, 2018] Marzo, J. and Ortega-Cerdà, J. (2018). Expected riesz energy of some determinantal processes on flat tori. *Constructive Approximation*, 47(1):75–88.
- [Mhaskar et al., 2001] Mhaskar, H. N., Narcowich, F. J., and Ward, J. D. (2001). Spherical Marcinkiewicz-Zygmund inequalities and positive quadrature. *Math. Comp.*, 70(235):1113–1130.
- [Milman and Schechtman, 1986] Milman, V. D. and Schechtman, G. (1986). *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg.
- [Neumaier, 1981] Neumaier, A. (1981). Combinatorial configurations in terms of distances. *Technische Hogeschool Eindhoven*.

- [Nodari and Serfaty, 2015] Nodari, S. R. and Serfaty, S. (2015). Renormalized Energy Equidistribution and Local Charge Balance in 2d Coulomb Systems. *International Mathematics Research Notices*, 2015(11):3035–3093.
- [Rakhmanov et al., 1994] Rakhmanov, E. A., Saff, E. B., and Zhou, Y. M. (1994). Minimal discrete energy on the sphere. *Math. Res. Lett.*, 1(6):647–662.
- [Sandier and Serfaty, 2015] Sandier, E. and Serfaty, S. (2015). 2d Coulomb gases and the renormalized energy. *Annals of Probability*, 43(4):2026–2083.
- [Scardicchio et al., 2009] Scardicchio, A., Zachary, C. E., and Torquato, S. (2009). Statistical properties of determinantal point processes in high-dimensional euclidean spaces. *Phys. Rev. E*, 79:41–108.
- [Schwartz, 2018] Schwartz, R. (2018). Five Point Energy Minimization: A Summary. <https://www.math.brown.edu/res/Papers/TBPsummary.pdf>.
- [Seymour and Zaslavsky, 1984] Seymour, P. D. and Zaslavsky, T. (1984). Averaging sets: a generalization of mean values and spherical designs. *Adv. in Math.*, 52(3):213–240.
- [Shub and Smale, 1993] Shub, M. and Smale, S. (1993). Complexity of Bezout’s theorem. III. Condition number and packing. *Journal of Complexity*, 49(1):4–14.
- [Sloan and Womersley, 2004] Sloan, I. H. and Womersley, R. S. (2004). Extremal systems of points and numerical integration on the sphere. *Advances in Computational Mathematics*, 21(1):107–125.
- [Smale, 2000] Smale, S. (2000). Mathematical problems for the next century. *Mathematics: Frontiers and Perspectives*, pages 271–294.
- [Soshnikov, 2000] Soshnikov, A. (2000). Determinantal random point fields. *Uspekhi Mat. Nauk*, 55(5–335):107–160.
- [Steinerberger, 2017] Steinerberger, S. (2017). Spectral Limitations of Quadrature Rules and Generalized Spherical Designs. *arXiv:1708.08736*.
- [Steinerberger, 2018] Steinerberger, S. (2018). Generalized Designs on Graphs: Sampling, Spectra, Symmetries. *arXiv:1803.02235*.
- [Stolarsky, 1973] Stolarsky, K. B. (1973). Sums of Distances Between Points on a Sphere. II. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 41(2):575–582.
- [Swinbank and Purser, 2006] Swinbank, R. and Purser, J. R. (2006). Fibonacci grids: A novel approach to global modelling. *Quarterly Journal of the Royal Meteorological Society*, 132(619):1769–1793.

- [Tammes, 1930] Tammes, P. (1930). *On the origin of number and arrangement of the places of exit on the surface of pollen-grains*. PhD thesis. Relation: <https://www.rug.nl/> Rights: De Bussy.
- [Teanby, 2006] Teanby, N. (2006). An icosahedron-based method for even binning of globally distributed remote sensing data. *Computers & Geosciences*, 32(9):1442 – 1450.
- [Temme, 1996] Temme, N. (1996). *Special Functions: An Introduction to the Classical Functions of Mathematical Physics*. A Wiley-Interscience Publication. Wiley.
- [Torquato and Stillinger, 2003] Torquato, S. and Stillinger, F. H. (2003). Local density fluctuations, hyperuniformity, and order metrics. *Physical review. E, Statistical, nonlinear, and soft matter physics*, 68(4):41–113.
- [Wagner, 1989] Wagner, G. (1989). On the product of distances to a point set on a sphere. *Journal of the Australian Mathematical Society*, 47(3):466–482.
- [Wagner, 1990] Wagner, G. (1990). On means of distances on the surface of a sphere (lower bounds). *Pacific J. Math.*, 144(2):389–398.
- [Young, 2001] Young, R. M. (2001). *An introduction to nonharmonic Fourier series*. Academic Press, Inc., San Diego, CA, 1 edition.

