

Qubit de chats et correction d'erreurs quantiques

par

Lucas St-Jean

Mémoire présenté au département de physique
en vue de l'obtention du grade de maître ès sciences (M.Sc.)

FACULTÉ des SCIENCES
UNIVERSITÉ de SHERBROOKE

Sherbrooke, Québec, Canada, 7 mai 2019

Le 7 mai 2019

le jury a accepté le mémoire de Monsieur Lucas St-Jean dans sa version finale.

Membres du jury

Professeur Alexandre Blais
Directeur de recherche
Département de physique

Professeur David Poulin
Membre interne
Département de physique

Professeur Ion Garate
Président rapporteur
Département de physique

À ma famille et mes amis.

Sommaire

La correction d’erreurs quantiques et les protocoles tolérants aux fautes ont été développés pour protéger l’information quantique d’inévitables erreurs affectant les bits quantiques, les qubits [1, 2]. Ces aspects de l’informatique quantique sont toutefois très coûteux en termes de ressources physiques ce qui représente un grand défi pour la réalisation expérimentale. Plusieurs études ont montré que les qubits présentant un modèle d’erreurs ayant une certaine structure dite asymétrique permettent l’optimisation de la correction d’erreurs et de protocoles tolérants aux fautes [3–6]. Cette optimisation mène à l’amélioration de la performance de la correction d’erreurs et une diminution des ressources nécessaires aux algorithmes tolérants aux fautes.

Dans ce mémoire, nous étudions le qubit de chats composé d’états chats stabilisés dans un résonateur supraconducteur micro-ondes [7] dans l’architecture de l’électrodynamique quantique en circuit [8]. Nous montrons que le modèle d’erreurs du qubit de chats, donné par la perte de photons, possède la propriété d’asymétrie. La performance de la correction d’erreurs est évaluée avec ce modèle d’erreurs et nous montrons qu’il est avantageux en principe d’utiliser le qubit de chats.

Finalement, nous développons une opération quantique importante avec le qubit de chats. Cette opération permet l’intrication entre deux qubits et elle possède la propriété cruciale de préserver le bruit asymétrique, un aspect souvent impossible pour cette opération avec un qubit typique. L’utilisation de cette opération procure des avantages majeurs aux protocoles tolérants aux fautes permettant une protection efficace contre le bruit asymétrique [3–5].

Mots-clés : Informatique quantique, qubits supraconducteurs, optique quantique, états chats, opérations quantiques, perte de photons, bruit asymétrique, correction d'erreurs quantiques.

Remerciements

J'aimerais commencer par remercier Alexandre, mon directeur de recherche, sans qui les travaux de ce mémoire n'auraient pu être réalisés. Je le remercie de m'avoir donné l'opportunité d'explorer ses domaines de recherche, l'électrodynamique quantique en circuit et l'informatique quantique, et d'y contribuer au travers de collaborations et divers événements et rencontres scientifiques. Ses conseils et ces expériences ont été très enrichissants pour mes travaux et mon développement professionnel et personnel.

Thanks to Shruti, who introduced me to her research and guided my project towards meaningful results. I'm grateful for her trust and for sharing her own work with me. Her vision and passion are truly inspiring and a major factor for the great potential of our work.

Thanks to Anirudh and Pavithran, who taught me crucial notions on quantum error correction, their field of specialization, and collaborated on my research project. I'm thankful for their patience and for combining their expertise with my work, which oriented our project in a very decisive manner.

Je remercie aussi tous les membres et anciens membres du groupe d'Alexandre : Agustín, Alexandre, Alexandru, Arne, Baptiste, Catherine, Jérôme, Jonathan, Mathieu, Shruti et Udson. Leur présence a pu enrichir mon expérience à la maîtrise et je suis très reconnaissant envers leur écoute et leur aide.

Du point de vue social, j'aurais un merci spécial pour Benjamin, Jessica, Mathieu et Maxime pour avoir été présents au quotidien et pour avoir créé ensemble une ambiance unique au sein de nos bureaux et à l'extérieur. Leur écoute a été précieuse à plusieurs moments durant mon passage à la maîtrise. Je remercie aussi la gang de Sherbrooke, de même que mes amis d'ailleurs pour tous les beaux moments passés ensemble qui ont agrémenté mes années de maîtrise, tels que soirées de jeux, de

musique, de soccer, ainsi que de discussions autour d'un feu ou d'une bière.

Finalement, je remercie mes parents André et Josée, ainsi que ma soeur Marie-Lou et mon frère Christophe pour l'appui et les encouragements qu'ils ont exprimés tout au long de mon parcours.

Table des matières

Sommaire	vii
Liste des tableaux	xv
Table des figures	xvii
Introduction	1
1 Correction d’erreurs quantiques et tolérance aux fautes	5
1.1 Introduction aux opérations et aux erreurs quantiques	6
1.1.1 Fragilité de l’information quantique	6
1.1.2 Groupe de Pauli	7
1.1.3 Opérateurs, observables et erreurs avec le groupe de Pauli	8
1.1.4 Sphère de Bloch et matrice densité	12
1.2 Représentations d’opérations et d’erreurs quantiques	15
1.2.1 Décomposition de Kraus	15
1.2.2 Matrice χ	16
1.2.3 Matrice de transfert de Pauli	17
1.2.4 Circuits quantiques	19
1.3 Figures de mérite	20
1.3.1 Fidélité d’intrication	20
1.3.2 Fidélité d’une opération quantique	21
1.4 Correction d’erreurs quantiques	21
1.4.1 Code de répétition classique	22
1.4.2 Code de répétition quantique	23
1.4.3 Code à neuf qubits	24
1.4.4 Code de surface	25

1.4.5	Performance de la correction d'erreurs	27
1.5	Espace d'Hilbert en correction d'erreurs quantiques	29
1.5.1	Distance	29
1.5.2	Espace d'Hilbert bosonique	30
1.6	Corrigibilité d'un modèle d'erreurs	30
1.6.1	Conditions de Knill-Laflamme	31
1.6.2	Taux d'erreurs seuil	32
1.7	Ressources requises pour le code de surface	33
1.8	Correction d'erreurs quantiques et structure du bruit	34
1.9	Tolérance aux fautes	35
1.9.1	Ensemble universel de portes logiques	35
1.9.2	Propagation d'erreurs	38
1.9.3	Principe de base de la tolérance aux fautes	39
1.9.4	Ressources requises pour la tolérance aux fautes	40
1.10	Tolérance aux fautes et bruit asymétrique	41
1.10.1	Défis associés au bruit asymétrique en tolérance aux fautes	41
1.10.2	Résumé des points importants et motivation des états chats du résonateur supraconducteur	44
2	Présentation du système physique	47
2.1	Résonateur supraconducteur micro-ondes	47
2.2	États du résonateur	49
2.3	Espace des phases	50
2.3.1	Fonction de Wigner	50
2.3.2	États de Fock	51
2.3.3	État cohérent	53
2.3.4	État chat	54
2.4	Dissipation du résonateur micro-ondes	57
2.4.1	Effet du bruit sur les états cohérents	59
2.4.2	Effet du bruit sur les états chats	59
2.5	Stabilisation d'états dans le résonateur	60
2.5.1	Stabilisation d'un état cohérent	61
2.5.2	Stabilisation des états chats	64
2.5.3	Non-linéarité Kerr	68

2.5.4	Pompe à paires de photons	70
2.6	Modèle d'erreurs du qubit de chats stabilisés	71
2.6.1	Équation maîtresse du qubit de chats	72
2.6.2	Erreurs sur le qubit de chats	73
2.6.3	Validation de la projection	76
3	Performance de la correction d'erreurs quantiques	79
3.1	Codes utilisés	79
3.1.1	États de 0 et 1 photon	80
3.1.2	États chats	80
3.2	Estimation du taux d'erreurs logiques	81
3.2.1	Estimation analytique	81
3.2.2	Résultats analytiques	83
3.2.3	Résultats numériques	85
4	Développement d'un CNOT avec bruit asymétrique	89
4.1	Principe de l'opération	89
4.1.1	Rotation et perte de photons	92
4.2	Stabilisation du résonateur A	93
4.2.1	Couplage avec le résonateur B	93
4.3	Hamiltonien complet du protocole	96
4.4	Performance du CNOT	98
	Conclusion	103
	A Fidélité d'intrication et matrice χ	105
	B Modèle d'erreurs	109
	C Accumulation de phase lors d'une rotation dans l'espace des phases	113
	D Tomographie numérique	117
	Bibliographie	119

Liste des tableaux

4.1 Table de vérité du CNOT 90

Table des figures

1.1	Sphère de Bloch	13
1.2	Exemple de circuit quantique	20
1.3	Fidélité d'intrication	21
1.4	Code de surface	26
1.5	Opération effective de correction d'erreurs quantiques	28
1.6	Taux d'erreurs logiques du code de répétition et taux seuil d'erreurs physiques	33
1.7	Propagation de \hat{X} et \hat{Z} avec la transformée de Hadamard	36
1.8	Symbole du CNOT	37
1.9	Propagation de \hat{X} et \hat{Z} avec le CNOT	38
1.10	CNOT tolérant aux fautes	39
1.11	Circuit complexe du CNOT équivalent au CNOT transversal	44
2.1	Circuit LC	48
2.2	Fonctions de Wigner des états de Fock du vide et d'un photon	52
2.3	Fonctions de Wigner des états cohérents $ \alpha = \pm 2\rangle$	53
2.4	Fonctions de Wigner des états chats $ \mathcal{C}_\alpha^\pm\rangle$	55
2.5	Fonction de Wigner de l'état chat mixte	60
2.6	Circuit LC avec source de tension	62
2.7	Métopotential de la stabilisation des états chats avec non-linéarité Kerr	67
2.8	Jonction Josephson	68
2.9	<i>SQUID</i>	70
2.10	Probabilités d'erreur de Pauli	76
2.11	Comparaison entre les résultats analytiques et numériques	77
3.1	Performance analytique de correction d'erreurs	84

3.2	Performance numérique de correction d'erreurs	86
4.1	CNOT sous la transformée de Hadamard	90
4.2	Rotation d'un état chat	91
4.3	Taux d'erreurs du CNOT	99
4.4	Taux d'erreurs du CNOT	101

Introduction

Le domaine de l'informatique quantique a pour objectif, entre autres, de réaliser l'ordinateur quantique universel. Cette technologie possède le potentiel d'être un outil puissant pour l'exécution de calculs et la résolution de problèmes actuellement impossibles à réaliser avec les ordinateurs et superordinateurs classiques [2]. Par exemple, l'ordinateur quantique devrait avoir la capacité de simuler des systèmes quantiques complexes, comme des molécules et des protéines, et de résoudre des problèmes d'optimisations aux diverses applications.

Pour se faire, il est nécessaire de manipuler l'information quantique, sous forme de bits quantiques ou qubits, avec une très haute précision. En contrepartie, les systèmes physiques qui encodent cette information sont sensibles aux imperfections ainsi qu'aux perturbations provenant de leur environnement. Des erreurs quantiques sont toujours induites sur l'information. Il est donc nécessaire, d'une part, de développer des systèmes quantiques de haute qualité et de bien les protéger de l'environnement. D'autre part, les erreurs présentes dans l'information doivent être corrigées par des méthodes de correction d'erreurs quantiques ainsi qu'en employant des algorithmes quantiques tolérants aux fautes.

Ces différents aspects essentiels pour la création de l'ordinateur quantique universel ont été largement étudiés au cours des dernières décennies. Nous nous approchons à grands pas, maintenant, de l'étape de l'implémentation de processus de correction d'erreurs quantiques et de protocoles tolérants aux fautes dans un système physique. La contribution de ce mémoire vise à répondre à certains besoins manifestés par cette prochaine étape de l'informatique quantique.

Nous étudions les états chats stabilisés du résonateur supraconducteur micro-ondes

en électrodynamique quantique en circuit [7, 9, 10]. Le qubit de chats, ainsi formé, fait partie d'une famille d'états, les codes bosoniques qui ont été étudiés dans les dernières années en raison du potentiel qu'ils présentent au niveau de la correction d'erreurs quantiques et de la tolérance aux fautes [11].

Le chapitre 1 est consacré à la correction d'erreurs quantiques et la tolérance aux fautes. Nous introduisons les concepts d'erreur et d'opération quantiques et nous posons les bases de la correction d'erreurs quantiques et de la tolérance aux fautes. Les défis de ces aspects de l'ordinateur quantique sont présentés, comme la quantité de ressources requises pour la réalisation expérimentale de protocoles tolérants aux fautes. En effet, en correction d'erreurs quantiques, l'information quantique d'un *qubit logique* est protégée par un encodage redondant utilisant plusieurs *qubits physiques*. Il est évalué que l'encodage le plus répandu à ce jour, le *code de surface* utilisé avec un protocole de *distillation d'états magiques*, requiert plusieurs milliers de qubits physiques par qubit logique afin d'obtenir une protection suffisante [12]. L'étude du qubit de chats est motivée par son potentiel succès face à ces défis. La propriété importante du qubit de chats est dans la nature des erreurs quantiques qui l'affecte. Nous présentons certaines études qui montrent la facilité de corriger ce type de modèle d'erreurs dit asymétrique, ainsi qu'une réduction des ressources nécessaires par rapport aux protocoles adaptés au bruit sans structure [3–6].

Le système physique sera introduit au chapitre 2. Nous montrons la méthode de stabilisation des états qui procure une certaine protection contre le processus de dissipation dominé par la perte de photons [7]. La première contribution de ce mémoire vient vers la fin de ce chapitre, où nous décrivons les erreurs quantiques résiduelles présentes dans le système. Nous montrons qu'un modèle d'erreurs asymétrique résulte de la perte de photons du qubit de chats.

Au chapitre 3, nous évaluons la performance d'un cas simple de correction d'erreurs avec les qubits de chats. Nous montrons donc qu'il est avantageux d'utiliser le qubit de chats par rapport à un qubit typique composé d'états plus simples.

Finalement, au chapitre 4, la dernière contribution de ce mémoire est décrite. Nous présentons le développement d'une opération quantique importante avec le qubit de chats, le CNOT. Cette porte logique fait interagir deux qubits et doit être réalisée en respectant la contrainte de préserver la propriété d'asymétrie du bruit, l'un des défis

discutés au chapitre 1. Cette contrainte ne peut toutefois pas être respectée lorsque le CNOT est implémenté avec un qubit typique. L'utilisation de cette opération avec les qubits de chats apporte une grande simplification à certains protocoles tolérants aux fautes [3–5]. Nous montrons donc qu'avec les qubits de chats, cette opération est réalisable en électrodynamique quantique en circuit et qu'elle préserve l'asymétrie du modèle d'erreurs.

Les résultats des chapitres 2 et 4 font l'objet d'une publication [13] et le chapitre 3 contribue à de futurs travaux.

Chapitre 1

Correction d'erreurs quantiques et tolérance aux fautes

Dans ce chapitre, nous décrivons le contexte ainsi que la problématique encadrant le sujet d'étude de ce mémoire. Nous posons donc les bases de la *correction d'erreurs quantiques* et de la *tolérance aux fautes*. Ces deux domaines complémentaires sont essentiels pour la création d'un ordinateur quantique protégé contre les erreurs. Dans les prochains chapitres, ces deux sujets seront appliqués à l'étude d'une implémentation particulière de *qubits*, les états chats d'un résonateur supraconducteur, aussi appelés *qubits de chats*. Nous verrons que ce système présente des avantages pour la correction d'erreurs quantiques de même que pour la tolérance aux fautes. Toutefois, ce présent chapitre ne couvre pas l'entièreté des théories de la correction d'erreurs quantiques et de la tolérance aux fautes. Seuls les aspects nécessaires à l'étude de ce mémoire sont introduits. Pour plus de détails, les références [1, 2] sont des ouvrages reconnus pour introduire les bases du domaine.

1.1 Introduction aux opérations et aux erreurs quantiques

Le calcul quantique est impossible sans la capacité de préserver et manipuler de l'information quantique avec très haute précision. L'obstacle le plus important du domaine de l'informatique quantique provient donc des imperfections et du bruit existant dans tout système quantique. Commençons donc par introduire les concepts de base des opérations et des erreurs en informatique quantique.

1.1.1 Fragilité de l'information quantique

Contrairement aux bits classiques, l'état $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$ d'un qubit où θ et ϕ sont réels, est très sensible aux imperfections en raison du caractère continu des amplitudes et des phases décrivant la superposition quantique. Quelconque effet indésirable agissant sur le qubit résulte inévitablement en une erreur dans l'information qui y est encodée.

Par exemple, une imperfection de contrôle produisant une erreur $\hat{R}_{\delta/2}$ sur la phase ϕ transforme $|\psi\rangle$ vers l'état incorrect $\hat{R}_{\delta/2}|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i(\phi+\delta)}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$, où δ correspond à une petite variation de phase. Quoique petit, ce type de faute peut s'accumuler pendant un calcul quantique et causer d'importantes erreurs. Une deuxième source d'erreurs provient de l'effet de l'environnement, qui agit comme un observateur tentant de mesurer l'état du qubit, un processus appelé *décohérence*. Lorsqu'un observateur mesure l'état $|\psi\rangle$, ce dernier s'effondre vers $|0\rangle$ avec probabilité $\cos^2\frac{\theta}{2}$ ou vers $|1\rangle$ avec probabilité $\sin^2\frac{\theta}{2}$. Nous décrivons les erreurs quantiques plus en détail dans les prochaines sections. Avant de poursuivre cette discussion, il est nécessaire d'introduire le groupe de Pauli et ses propriétés.

1.1.2 Groupe de Pauli

Les matrices de Pauli sont largement utilisées pour décrire les opérations, les erreurs et les observables agissant sur l'état de qubits :

$$\hat{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.1)$$

$$\hat{X} \equiv \hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

$$\hat{Z} \equiv \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.3)$$

$$\hat{Y} \equiv \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = i\hat{X}\hat{Z}, \quad (1.4)$$

représentées dans la base de calcul

$$\left\{ |0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, |1\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \quad (1.5)$$

les états propres de \hat{Z} . Les opérations des types \hat{X} et \hat{Z} produisent respectivement les transformations d'*inversion de bit*, $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$, et d'*inversion de phase* qui ne change pas l'état $|0\rangle$, mais transforme $|1\rangle \rightarrow -|1\rangle$. L'application de \hat{Y} correspond aux deux types précédents agissant l'un à la suite de l'autre avec une phase globale i .

Le groupe de Pauli est généré par les différents produits tensoriels des 4 opérateurs \hat{I} , \hat{X} , \hat{Y} et \hat{Z} . Par exemple, le groupe de Pauli \mathcal{P}_2 agissant sur un ensemble de 2 qubits est formé par $\{\hat{I}_1\hat{I}_2, \hat{I}_1\hat{X}_2, \hat{I}_1\hat{Y}_2, \dots, \hat{Z}_1\hat{Z}_2\}$ avec une phase globale pouvant valoir ± 1 ou $\pm i$, où les indices indiquent le qubit affecté par l'opérateur. Notons que nous omettons les indices et le symbole \otimes , dénotant le produit tensoriel, pour alléger la notation lorsque le contexte ne permet aucune confusion. Remarquons que les éléments du groupe de Pauli ayant une phase globale ± 1 ($\pm i$) ont deux valeurs propres égales à ± 1 ($\pm i$). Dans ce mémoire, nous utilisons uniquement les phases globales ± 1 puisque nous considérons le sous-ensemble hermitien du groupe de Pauli.

Le *poids* d'un opérateur de Pauli est défini comme le nombre d'opérateurs différents de l'identité \hat{I} dans le produit tensoriel qui le compose. Par exemple, $\hat{I}_1\hat{X}_2$ a un poids de 1 et le poids de $\hat{Z}_1\hat{Z}_2$ est 2.

L'algèbre du groupe de Pauli est définie par la propriété d'anticommutation entre chacun des opérateurs \hat{X} , \hat{Y} et \hat{Z} , par exemple $\hat{X}\hat{Z} = -\hat{Z}\hat{X}$. C'est-à-dire qu'une paire d'opérateurs appartenant à \mathcal{P}_n , le groupe de Pauli agissant sur n qubits, ne peuvent seulement commuter ou anticommuer. Par exemple, $(\hat{X}_1\hat{Z}_2)(\hat{Z}_1\hat{X}_2) = ((-1)\hat{Z}_1(-1)\hat{X}_2)(\hat{X}_1\hat{Z}_2) = (\hat{Z}_1\hat{X}_2)(\hat{X}_1\hat{Z}_2)$ et $(\hat{X}_1\hat{Z}_2)(\hat{I}_1\hat{X}_2) = (\hat{I}_1(-1)\hat{X}_2)(\hat{X}_1\hat{Z}_2) = -(\hat{I}_1\hat{X}_2)(\hat{X}_1\hat{Z}_2)$.

De plus, le carré des membres de \mathcal{P}_n est toujours $\pm\hat{I}^{\otimes n}$, puisque dans le cas où $n = 1$, nous avons $\hat{I}^2 = \hat{X}^2 = \hat{Y}^2 = \hat{Z}^2 = \hat{I}$. Les éléments de \mathcal{P}_n utilisés dans ce mémoire auront tous un carré de $+\hat{I}^{\otimes n}$ en raison du choix de phase globale ± 1 . Finalement, on note $\{P_i\}$ l'ensemble des 4^n membres de \mathcal{P}_n ayant une phase globale $+1$. Par exemple, pour $n = 1$, nous avons $\hat{P}_0 = \hat{I}$, $\hat{P}_1 = \hat{X}$, $\hat{P}_2 = \hat{Y}$ et $\hat{P}_3 = \hat{Z}$. Étant donné que $\hat{I}^{\otimes n}$ est le seul membre de $\{P_i\}$ à avoir une trace non nulle, les opérateurs de Pauli possèdent la propriété

$$\frac{\text{Tr}(\hat{P}_i\hat{P}_j)}{\text{Tr}(\hat{I}^{\otimes n})} = \frac{1}{2^n}\text{Tr}(\hat{P}_i\hat{P}_j) = \delta_{ij}. \quad (1.6)$$

1.1.3 Opérateurs, observables et erreurs avec le groupe de Pauli

Les opérateurs de Pauli permettent d'apporter une certaine intuition aux concepts d'opérations, d'observables et d'erreurs quantiques. Poursuivons maintenant la discussion sur ces notions en plus de détails.

Opérateurs

L'une des utilités du groupe de Pauli \mathcal{P}_n est que toute matrice de dimensions $2^n \times 2^n$ peut-être décomposée en combinaison linéaire des éléments de $\{P_i\}$. Par exemple,

l'opération unitaire $\hat{R}_{\delta/2}$ décrite à la section 1.1.1 est représentée par

$$\hat{R}_{\delta/2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\delta} \end{pmatrix} = e^{i\delta/2} \begin{pmatrix} e^{-i\delta/2} & 0 \\ 0 & e^{i\delta/2} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

et peut être décomposée en élément de \mathcal{P}_1

$$\hat{R}_{\delta/2} = e^{i\delta/2} \left(\cos \frac{\delta}{2} \hat{I} - i \sin \frac{\delta}{2} \hat{Z} \right), \quad (1.8)$$

où la phase globale $e^{i\delta/2}$ peut être omise puisqu'une phase globale n'a aucun effet observable. En général, la propriété de l'équation (1.6) permet de décomposer un opérateur arbitraire \hat{O} comme

$$\hat{O} = \sum_i^{4^n} \mathcal{O}_i \hat{P}_i, \quad (1.9)$$

avec

$$\mathcal{O}_i = \text{Tr}(\hat{P}_i \hat{O}) / 2^n, \quad (1.10)$$

parce que l'ensemble $\{\hat{P}_i\}$ forme une base complète de matrices.

Observables

Les éléments de \mathcal{P}_n ayant une phase globale ± 1 sont tous hermitiens, par exemple $\hat{Z} = \hat{Z}^\dagger$. Ils représentent donc des *observables* pouvant être mesurées. La mesure de l'état d'un qubit dans la base des états propres d'une observable de Pauli aura un résultat égal à une de ses valeurs propres, ± 1 . À la suite de la mesure, l'état résultant correspond à l'état propre associé à cette valeur propre. Par exemple, mesurer l'observable \hat{Z} d'un qubit dans l'état $|\psi\rangle = \cos \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \sin \frac{\theta}{2} |1\rangle$ aura $+1$ (-1) comme résultat avec probabilité $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ ($\sin^2 \frac{\theta}{2}$) et l'état se projette vers $|0\rangle$ ($|1\rangle$). Il serait donc utile de

noter que les bases de \hat{X} et \hat{Y} sont

$$|\pm\rangle = \frac{|0\rangle \pm |1\rangle}{\sqrt{2}} \text{ et} \quad (1.11)$$

$$|\pm i\rangle = \frac{|0\rangle \pm i|1\rangle}{\sqrt{2}} \quad (1.12)$$

respectivement, de sorte que $\hat{X}|\pm\rangle = (\pm 1)|\pm\rangle$ et $\hat{Y}|\pm i\rangle = (\pm 1)|\pm i\rangle$.

Erreurs

Lorsque le résultat d'une mesure est inconnu, l'état du qubit est projeté vers un état indéterminé. Par exemple, cette situation se produit lorsque l'environnement acquiert de l'information sur l'observable \hat{Z} de l'état $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$ d'un qubit, par l'intermédiaire d'une interaction indésirable avec ce dernier. Dans ce cas, la description probabiliste de l'état doit être représentée par une matrice densité $\hat{\rho}$ plutôt qu'un ket. Dans le cas de l'état $|\psi\rangle$ ci-haut, avant la mesure, sa matrice densité s'écrit

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = |\psi\rangle\langle\psi| &= \cos^2\frac{\theta}{2}|0\rangle\langle 0| + \sin^2\frac{\theta}{2}|1\rangle\langle 1| \\ &+ e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|0\rangle\langle 1| + e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle\langle 0| \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2\frac{\theta}{2} & e^{-i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} \\ e^{i\phi}\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2} & \sin^2\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Comme une mesure de \hat{Z} ne change pas les probabilités $\cos^2\frac{\theta}{2}$ et $\sin^2\frac{\theta}{2}$ associées aux *populations* de l'état, les éléments diagonaux de $\hat{\rho}$, aucune erreur d'inversion de bit \hat{X} n'est induite par cette interaction. Toutefois, la projection de l'état supprime la *cohérence* de la superposition. L'état subi donc de la *décohérence*, ici sous forme de *déphasage*. C'est-à-dire que l'information sur la différence de phase ϕ entre les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$ est graduellement perdue au fur et à mesure que l'environnement acquiert de l'information sur l'observable \hat{Z} . La perte de cette phase se représente par l'extinction des éléments hors-diagonaux de $\hat{\rho}$.

Cette dynamique correspond à une erreur d'inversion de phase \hat{Z} avec une proba-

bilité p . L'évolution de l'état $\hat{\rho}$ à la suite de ce processus est représentée par [14]

$$\hat{\rho} \rightarrow (1-p)\hat{I}\hat{\rho}\hat{I} + p\hat{Z}\hat{\rho}\hat{Z} \quad (1.14)$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & (1-2p)e^{-i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \\ (1-2p)e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix}. \quad (1.15)$$

On a donc $p = 0$ lorsque l'environnement n'observe pas l'état, et $p = 1/2$ lorsque la phase est complètement aléatoire, ce qui est équivalent à avoir perdu la phase, si l'environnement est parvenu à mesurer \hat{Z} . En pratique, toute autre valeur de p entre 0 et 1 est possible.

L'expression (1.14) montre que l'état du qubit devient un mélange statistique, ou état *mixte*, de deux états *purs* : l'état sans erreur $|\psi\rangle$, représenté par $\hat{I}\hat{\rho}\hat{I}$, et l'état avec erreur $\hat{Z}|\psi\rangle$, représenté par $\hat{Z}\hat{\rho}\hat{Z}$, avec probabilités $(1-p)$ et p respectivement. L'état ne peut donc plus se représenter sous forme de ket. Lorsque $p = 1/2$, $\hat{\rho}$ devient

$$\hat{\rho} \rightarrow \begin{pmatrix} \cos^2 \frac{\theta}{2} & 0 \\ 0 & \sin^2 \frac{\theta}{2} \end{pmatrix} = \cos^2 \frac{\theta}{2} |0\rangle\langle 0| + \sin^2 \frac{\theta}{2} |1\rangle\langle 1|. \quad (1.16)$$

L'état est projeté vers $|0\rangle$ ou $|1\rangle$ avec probabilités $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ et $\sin^2 \frac{\theta}{2}$ respectivement.

Dans le cas où toutes les erreurs de Pauli seraient possibles, nous avons

$$\hat{\rho} \rightarrow (1-p_X - p_Y - p_Z)\hat{I}\hat{\rho}\hat{I} + p_X\hat{X}\hat{\rho}\hat{X} + p_Y\hat{Y}\hat{\rho}\hat{Y} + p_Z\hat{Z}\hat{\rho}\hat{Z}, \quad (1.17)$$

où p_X , p_Y et p_Z sont des probabilités associées à chaque type d'erreur, telles que $p_X + p_Y + p_Z \leq 1$. L'expression (1.17) représente un *modèle d'erreurs de Pauli* à un qubit.

Bien que toute évolution d'un système quantique fermé soit unitaire selon l'équation de Schrödinger, nous voyons qu'aux équations (1.14) et (1.17), l'opération agissant sur l'état n'est pas unitaire puisque le qubit constitue un système ouvert interagissant avec son environnement. Ce phénomène donne lieu à des opérations irréversibles ainsi que des transformations vers des états mixtes.

Notons que la dépendance en temps des transformations (1.14) et (1.17) n'est pas explicitement donnée. Cette dépendance appartient aux probabilités associées

à chaque terme. Dans une prochaine section, nous introduirons l'*équation maîtresse* qui remplacera l'équation de Schrödinger pour la dépendance en temps des matrices densité.

Les sommes présentées aux expressions (1.14) et (1.17) sont des cas particuliers de *décompositions de Kraus* [14], l'une des façons de représenter une opération quantique en présence d'erreurs. Ces deux exemples décrivent des situations où l'opération idéale sans erreur correspond à l'identité \hat{I} , c'est-à-dire ne rien faire sur l'information quantique, et tout autre terme différent de $\hat{I}\hat{\rho}\hat{I}$ contient une erreur. Dans la section 1.2, nous décrivons différentes représentations des opérations quantiques qui, telle la décomposition de Kraus, sont utiles pour divers aspects de l'étude de ce mémoire.

Bruit asymétrique

Il est important pour les prochaines sections d'introduire un cas particulier de modèle d'erreurs de Pauli qu'on nomme le *bruit asymétrique*. Ce modèle de bruit est représenté par l'équation (1.17) avec la particularité que l'une des trois probabilités domine les deux autres de plusieurs ordres de grandeur. Par exemple, un bruit asymétrique en \hat{X} possède la relation $p_X \gg p_Y, p_Z$. Dans les prochaines sections, nous reviendrons sur le cas du bruit asymétrique puisque le système physique étudié dans les chapitres suivants réalise un modèle d'erreurs asymétrique favorisant les erreurs de type \hat{X} .

1.1.4 Sphère de Bloch et matrice densité

Avant d'introduire les descriptions formelles des représentations d'opérations et erreurs quantiques, terminons la discussion sur les opérateurs de Pauli et les matrices densité en introduisant la sphère de Bloch. Elle est une représentation graphique 3D de l'état pur ou mixte d'un qubit [2]. Par exemple, prenons l'état pur $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$. En coordonnées sphériques, θ et ϕ définissent un point, ou *vecteur de Bloch* \vec{r} , sur une sphère de rayon unité tel que montré par la figure 1.1. Selon cette définition, les coordonnées cartésiennes (x, y, z) de \vec{r} correspondent aux moyennes des observables de Pauli $x = \langle\hat{X}\rangle$, $y = \langle\hat{Y}\rangle$ et $z = \langle\hat{Z}\rangle$ respectivement.

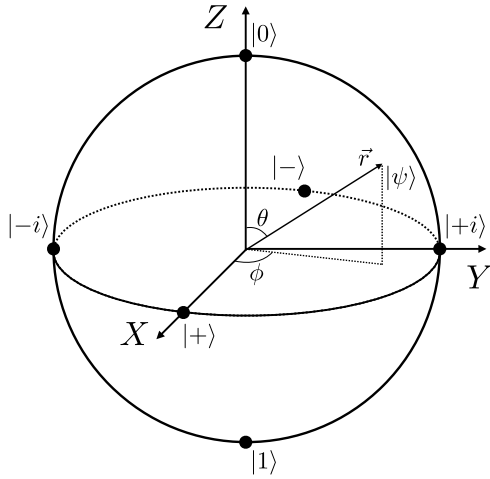


FIGURE 1.1 Sphère de Bloch. Le vecteur \vec{r} représente l'état $|\psi\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|0\rangle + e^{i\phi}\sin\frac{\theta}{2}|1\rangle$. En coordonnées cartésiennes, $\vec{r} = (\langle\hat{X}\rangle, \langle\hat{Y}\rangle, \langle\hat{Z}\rangle)$.

Ainsi, sur la sphère de Bloch, les états propres de ces observables possèdent les positions $(\pm 1, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0)$ et $(0, 0, \pm 1)$ respectivement selon la valeur propre de l'état. On peut généraliser la définition de \vec{r} aux états mixtes $\hat{\rho}$ à un qubit sachant que

$$\langle\hat{O}\rangle = \text{Tr}(\hat{O}\hat{\rho}). \quad (1.18)$$

Pour un état mixte, la norme de \vec{r} est inférieure à l'unité et $|\vec{r}| = 0$ lorsque l'état correspond à un mélange parfait.

La sphère de Bloch est utile pour visualiser les opérations à un qubit. Par exemple, la transformation $\hat{R}_{\delta/2}$ définie par l'équation (1.7) se visualise par une rotation d'un angle δ autour de l'axe z . L'action d'un opérateur de Pauli correspond à une rotation de π autour de son axe correspondant, ce qui induit une inversion des états propres des autres opérateurs de Pauli. De plus, la mesure d'une observable de Pauli projette l'état sur l'axe de l'observable, ce qui préserve l'espérance de l'opérateur mesuré et supprime l'information des autres observables comme nous l'avons constaté aux expressions (1.14) et (1.15) de la section 1.1.3. Ceci est une conséquence du fait que les observables de Pauli ne commutent pas ensemble.

Malheureusement, l'intuition de la sphère de Bloch se généralise mal pour des systèmes à plusieurs qubits. Tel que vu à la section 1.1.3 avec les équations (1.9) et

(1.10), toute matrice $2^n \times 2^n$ peut se décomposer en combinaison linéaire des éléments de $\{\hat{P}_i\}$ à n qubit de sorte que

$$\hat{\rho} = \sum_i \rho_i \hat{P}_i \quad (1.19)$$

$$= \frac{\hat{I} + \vec{r} \cdot \hat{\vec{\sigma}}}{2} \text{ (pour } n=1), \quad (1.20)$$

avec

$$\rho_i = \langle \hat{P}_i \rangle / 2^n, \quad (1.21)$$

où $\hat{\vec{\sigma}} = (\hat{X}, \hat{Y}, \hat{Z})$. L'équation (1.19) permet ainsi une représentation de $\hat{\rho}$ sous sa forme vectorisée

$$\vec{\rho} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_{4^n} \end{pmatrix}, \quad (1.22)$$

où chaque élément est associé à un membre de $\{\hat{P}_i\}$, à ne pas confondre avec \vec{r} qui ne contient pas $\rho_0 = \langle \hat{I} \rangle / 2^n$ et ne s'applique qu'aux états à un seul qubit. Cette nouvelle représentation est utilisée à la section 1.2.3 où nous introduisons la *matrice de transfert de Pauli*.

Finalement, il est utile pour les prochaines sections de définir les propriétés des matrices densité puisqu'elles doivent être préservées par toute opération quantique. Ceci impose donc des propriétés propres aux représentations des opérations quantiques que nous verrons à la section 1.2. Notons simplement que les matrices densité sont hermitiennes ($\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$), ont une trace égale à 1 et sont définies positives ou nulles. Préserver ces propriétés lors d'une transformation requiert que celle-ci préserve la trace et qu'elle soit complètement positive.

Remarquons ainsi que $\rho_0 = 1/2^n$ puisque, par convention, $\hat{P}_0 = \hat{I}^{\otimes n}$, le seul élément de $\{\hat{P}_i\}$ ayant une trace non nulle, et donc $\text{Tr}(\hat{\rho}) = \rho_0 \text{Tr}(\hat{I}^{\otimes n}) = 2^n \rho_0 = 1$.

1.2 Représentations d'opérations et d'erreurs quantiques

De façon formelle, une opération quantique fait interagir un ensemble de qubits avec un environnement, par exemple un second ensemble de qubits. L'évolution totale du système fermé qubit-environnement est unitaire. Pour obtenir une description de l'état des qubits telle que perçue par un(e) expérimentateur(trice) qui n'a pas accès à l'état de l'environnement, on retire l'état inconnu de l'environnement de la description du système à l'aide d'une trace partielle. Toute intrication entre les qubits et l'environnement, c'est-à-dire que l'environnement a pu observer les qubits par une interaction, laisse l'état des qubits dans un état mixte où l'information quantique contient des erreurs. En pratique, ces erreurs ne sont pas restreintes au groupe de Pauli.

1.2.1 Décomposition de Kraus

Comme vu à la section 1.1.3, une opération quantique en présence d'erreurs peut être représentée par une décomposition de Kraus [14]. Ce type de représentation permet de présenter chaque erreur du modèle de bruit sous forme d'un terme de la décomposition. En général, cette représentation s'écrit comme

$$\mathcal{E}(\hat{\rho}) = \sum_i \hat{K}_i \hat{\rho} \hat{K}_i^\dagger, \quad (1.23)$$

où \mathcal{E} désigne l'application linéaire représentant une opération quantique parfaite ou imparfaite agissant sur un état de n qubits $\hat{\rho}$ et $\{\hat{K}_i\}$ est un ensemble d'opérateurs de Kraus de dimensions $2^n \times 2^n$. L'équation (1.23) indique que l'effet de \mathcal{E} sur un état pur $|\psi\rangle\langle\psi|$ est de transformer cet état vers $\hat{K}_i |\psi\rangle\langle\psi| \hat{K}_i^\dagger$ avec probabilité $|\hat{K}_i |\psi\rangle|^2$ [1]. Si $\{\hat{K}_i\}$ ne contient qu'un seul opérateur de Kraus, \mathcal{E} est une transformation unitaire. Notons que la base $\{\hat{K}_i\}$ d'opérateur de Kraus n'est pas unique pour une opération quantique \mathcal{E} donnée. \mathcal{E} est invariant sous changement de base.

Propriétés des opérateurs de Kraus

L'application \mathcal{E} doit préserver les propriétés des matrices densité puisque $\mathcal{E}(\hat{\rho})$ représente l'état résultant suite à l'application de \mathcal{E} . Toute transformation quantique \mathcal{E} doit donc préserver la trace et être complètement positive (CP). La seconde propriété n'impose aucune contrainte sur les opérateurs de Kraus puisqu'une transformation CP générale peut s'écrire selon l'équation (1.23) [14]. En fait, les opérateurs de Kraus ne sont pas contraints d'être unitaires, hermitiens ou inversibles. En contrepartie, ils doivent respecter la *condition de complétude*

$$\sum_i \hat{K}_i^\dagger \hat{K}_i = \hat{I}, \quad (1.24)$$

afin de préserver la trace des matrices densité.

1.2.2 Matrice χ

La représentation d'une opération quantique en *matrice* χ est utile en particulier puisqu'elle utilise l'intuition provenant des matrices de Pauli. Pour obtenir cette nouvelle représentation, réexprimons l'expression (1.23) en décomposant les \hat{K}_i sur la base des matrices de Pauli $\{\hat{P}_i\}$ [14]

$$\mathcal{E}(\hat{\rho}) = \sum_{m,n} \chi_{mn} \hat{P}_m \hat{\rho} \hat{P}_n, \quad (1.25)$$

avec

$$\chi_{mn} = \sum_i k_{im} k_{in}^* \text{ et} \quad (1.26)$$

$$\hat{K}_i = \sum_m k_{im} \hat{P}_m, \quad (1.27)$$

où χ correspond à la matrice χ de cette représentation. Remarquons que la matrice χ d'un modèle d'erreurs de Pauli est diagonale $\chi_{mn} = \delta_{mn} \chi_{mm}$ et que la décomposition de Kraus s'obtient directement à partir de χ et inversement. Dans le cas où la matrice χ ne serait pas diagonale, la conversion vers la représentation de Kraus s'obtient par diagonalisation de la matrice χ [15].

La représentation de la matrice χ permet d'approximer un bruit non-Pauli en un bruit de Pauli en éliminant les termes hors-diagonaux. Cette technique, communément appelée PTA, de l'anglais *Pauli Twirling Approximation*, est l'une des différentes méthodes utilisées pour faire l'approximation d'un modèle non Pauli en erreurs de Pauli [16]. Ce genre d'approximation est utile entre autres pour déterminer l'asymétrie entre \hat{X} , \hat{Y} et \hat{Z} qu'un bruit non Pauli peut présenter.

Propriétés de la matrice χ

Il suit de l'équation (1.26) que $\chi^\dagger = \chi$. On peut aussi montrer que la propriété définie positive ou nulle des matrices densité s'applique également à χ [14]. Finalement, la condition de complétude (1.24) des opérateurs de Kraus se traduit par la relation

$$\sum_{i,j} \chi_{ij} \hat{P}_j \hat{P}_i = \hat{I}. \quad (1.28)$$

1.2.3 Matrice de transfert de Pauli

La matrice de transfert de Pauli $\hat{R}_\mathcal{E}$ constitue une autre représentation très utile d'opérations quantiques imparfaites [14]. Elle est basée sur la représentation vectorisée (1.22) de la matrice densité $\vec{\rho}$

$$\mathcal{E}(\vec{\rho}) = \hat{R}_\mathcal{E} \vec{\rho}, \quad (1.29)$$

où $\mathcal{E}(\vec{\rho})$ est la version vectorisée de $\mathcal{E}(\hat{\rho}) = \mathcal{E}(\sum_j \rho_j \hat{P}_j) = \sum_j \rho_j \mathcal{E}(\hat{P}_j)$, et par définition,

$$\mathcal{E}(\hat{\rho}) = \sum_i [\mathcal{E}(\vec{\rho})]_i \hat{P}_i. \quad (1.30)$$

De l'équation (1.29) nous avons

$$\mathcal{E}(\hat{\rho}) = \sum_i [\hat{R}_\mathcal{E} \vec{\rho}]_i \hat{P}_i, \quad (1.31)$$

$$= \sum_{i,j} [\hat{R}_\mathcal{E}]_{ij} \rho_j \hat{P}_i, \quad (1.32)$$

d'où on peut conclure que

$$\mathcal{E}(\hat{P}_j) = \sum_i [\hat{R}_{\mathcal{E}}]_{ij} \hat{P}_i. \quad (1.33)$$

C'est-à-dire que, selon l'équation générale (1.9), la j -ième colonne de $\hat{R}_{\mathcal{E}}$ contient les coefficients de la décomposition de Pauli de $\mathcal{E}(\hat{P}_j)$. Enfin, l'équation (1.10) permet de déduire la définition des éléments de $\hat{R}_{\mathcal{E}}$ pour une transformation \mathcal{E} donnée

$$[\hat{R}_{\mathcal{E}}]_{ij} = \text{Tr} \left[\hat{P}_i \mathcal{E}(\hat{P}_j) \right] / 2^n. \quad (1.34)$$

La matrice de transfert de Pauli est une représentation très pratique puisque la composition de deux applications \mathcal{E} et \mathcal{E}' se représente simplement par le produit des matrices de transfert [14]

$$\hat{R}_{\mathcal{E}' \circ \mathcal{E}} \vec{\rho} = \mathcal{E}'(\mathcal{E}(\vec{\rho})) = \hat{R}_{\mathcal{E}'} \hat{R}_{\mathcal{E}} \vec{\rho} \implies \hat{R}_{\mathcal{E}' \circ \mathcal{E}} = \hat{R}_{\mathcal{E}'} \hat{R}_{\mathcal{E}}. \quad (1.35)$$

Ceci permet d'exprimer $\hat{R}_{\mathcal{E}}$ comme le produit des matrices de transfert $\hat{R}_{\mathcal{E}_{\text{idéale}}}$ et \hat{R}_{erreur} représentant respectivement l'opération idéale sans erreur et l'erreur affectant l'état quantique à la suite de l'application de \mathcal{E}

$$\hat{R}_{\mathcal{E}} = \hat{R}_{\text{erreur}} \hat{R}_{\mathcal{E}_{\text{idéale}}}. \quad (1.36)$$

Typiquement, $\hat{R}_{\mathcal{E}}$ est déterminée analytiquement ou numériquement à partir d'une équation maîtresse ou expérimentalement par tomographie du processus quantique et le modèle d'erreurs s'obtient en inversant $\hat{R}_{\mathcal{E}_{\text{idéale}}}$

$$\hat{R}_{\text{erreur}} = \hat{R}_{\mathcal{E}} \hat{R}_{\mathcal{E}_{\text{idéale}}}^{-1}. \quad (1.37)$$

Ces méthodes numériques et analytiques sont présentées aux annexes B et D. Notons que $\hat{R}_{\mathcal{E}_{\text{idéale}}}$ est inversible puisque $\mathcal{E}_{\text{idéale}}$ ne contient pas d'erreurs et est unitaire. Par conséquent, nous pouvons montrer que

$$\hat{R}_{\mathcal{E}_{\text{idéale}}}^{-1} = \hat{R}_{\mathcal{E}_{\text{idéale}}}^T, \quad (1.38)$$

à partir de l'équation (1.34), en remplaçant $\mathcal{E}(\hat{P}_j)$ par $\hat{U} \hat{P}_j \hat{U}^\dagger$, où \hat{U} est une transfor-

mation unitaire. Cette méthode sera utilisée dans le chapitre 2 pour extraire le modèle de bruit du système physique étudié. Il est utile ensuite de convertir la matrice \hat{R}_{erreur} vers les autres représentations pour avoir une description plus intuitive des erreurs du modèle. La conversion de la matrice de transfert de Pauli $\hat{R}_{\mathcal{E}}$ en représentation de la matrice χ s'obtient à partir de [15]

$$\chi_{k,l} = \frac{1}{4} \sum_{i,j} [\hat{R}_{\mathcal{E}}]_{i,j} \text{Tr} \left(\hat{P}_i \hat{P}_k \hat{P}_j \hat{P}_l \right). \quad (1.39)$$

Propriétés de la matrice de transfert de Pauli

Pour respecter la propriété de préservation de la trace de $\hat{\rho}$, ρ_0 ne doit pas être modifié puisque nous avons vu à la section 1.1.4 que $\text{Tr}(\hat{\rho}) = 2^n \rho_0$. Ceci s'exprime par la propriété [14]

$$(\hat{R}_{\mathcal{E}})_{0j} = \delta_{0j}, \quad (1.40)$$

c'est à dire que la première rangée de $\hat{R}_{\mathcal{E}}$ est fixé à $(100 \dots 0)$. Par contre, la propriété supplémentaire de $\hat{R}_{\mathcal{E}}$ qui assure que la transformation est complètement positive n'est pas utile pour ce mémoire et n'est donc pas énoncée puisqu'elle ne s'exprime pas de manière simple.

1.2.4 Circuits quantiques

Il est utile de représenter les opérations quantiques visuellement sous forme de *circuits quantiques* lorsqu'une gamme d'opérations agissent sur un ensemble de qubits [2]. La figure 1.2 présente un exemple de circuit quantique. Un circuit quantique se lit de gauche à droite et chaque ligne représente un qubit suivant le passage du temps. Une opération agissant sur un ou plusieurs qubits est représentée par une boîte ou un symbole placé sur les lignes concernées. La figure 1.2 illustre deux qubits subissant différentes opérations. D'abord, l'opération \hat{X} agit sur le qubit du haut et ensuite deux opérations à deux qubits affectent le système. La première opération est le CNOT que nous définissons à la section 1.9.1 suivie d'un opérateur unitaire arbitraire \hat{U} . Mathématiquement, le circuit de la figure 1.2 s'écrit $\hat{U} \text{CNOT}(\hat{X} \otimes \hat{I})$.

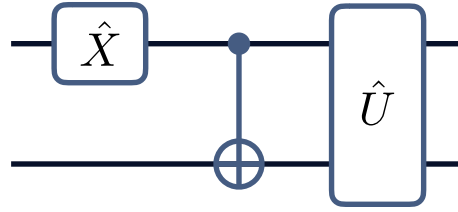


FIGURE 1.2 Exemple de circuit quantique. Chaque ligne représente un qubit. Le premier qubit subit d'abord l'opération \hat{X} . Ensuite, l'opération CNOT (de l'anglais *controlled NOT*, une opération définie à la section 1.9.1 agissant sur deux qubits), dénotée par son symbole, est appliquée sur les deux qubits. Finalement, une deuxième opération à deux qubits \hat{U} agit sur le système.

1.3 Figures de mérite

Dans cette section, nous introduisons deux figures de mérite des opérations quantiques. Ces métriques seront utilisées dans différentes sections du document pour l'évaluation de performances et de précision.

1.3.1 Fidélité d'intrication

La *fidélité d'intrication* est une figure de mérite utilisée pour évaluer le taux d'erreurs affectant un état quantique sous l'effet d'un modèle de bruit représenté par une opération quantique. La fidélité d'intrication d'une telle opération bruitée se visualise par le processus illustré à la figure 1.3 [17]. On fait agir le bruit ou l'opération quantique sur l'un des deux qubits d'une paire maximalement intriquée initialement dans l'état $|\Phi^+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$. La fidélité d'intrication est définie comme la fidélité entre $|\Phi^+\rangle$ et l'état $\hat{\rho}$ à la sortie de l'opération

$$\mathcal{F} = \langle \Phi^+ | \hat{\rho} | \Phi^+ \rangle. \quad (1.41)$$

Le calcul de la fidélité d'intrication se fait simplement à partir de la relation

$$\mathcal{F} = \chi_{00} \quad (1.42)$$

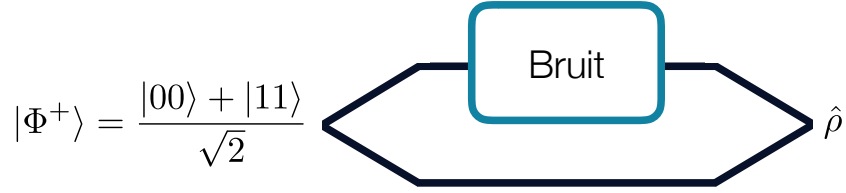


FIGURE 1.3 Visualisation de la fidélité d'intrication \mathcal{F} , définie à l'équation (1.41), d'une opération bruitée.

(voir la preuve à l'annexe A), où χ_{ij} est un élément de la matrice χ définie à la section 1.2.2. C'est-à-dire que la fidélité d'intrication est donnée par le coefficient du terme $\hat{I}\hat{\rho}\hat{I}$ d'une opération bruitée, le terme ne contenant aucune erreur. Nous utiliserons cette métrique pour comparer le taux d'erreurs d'un qubit avec le taux d'erreurs effectif d'un qubit ayant subi un protocole de correction d'erreurs quantiques.

1.3.2 Fidélité d'une opération quantique

Nous utilisons la fidélité $\mathcal{F}_{\mathcal{E}_{\text{idéale}}}(\mathcal{E})$ d'une opération quantique imparfaite \mathcal{E} pour évaluer sa précision par rapport à une opération idéale $\mathcal{E}_{\text{idéale}}$. Nous l'évaluons à partir de la fidélité d'intrication \mathcal{F} du bruit donné par le modèle d'erreurs $\hat{R}_{\text{erreur}} = \hat{R}_{\mathcal{E}}\hat{R}_{\mathcal{E}_{\text{idéale}}}^{-1}$ provenant de \mathcal{E} [18, 19]

$$\mathcal{F}_{\mathcal{E}_{\text{idéale}}}(\mathcal{E}) = \frac{2^n \mathcal{F} + 1}{2^n + 1}. \quad (1.43)$$

En bref, $\mathcal{F}_{\mathcal{E}_{\text{idéale}}}(\mathcal{E})$ prend une valeur entre 0 et 1 avec $\mathcal{F}_{\mathcal{E}_{\text{idéale}}}(\mathcal{E}_{\text{idéale}}) = 1$.

1.4 Correction d'erreurs quantiques

La fragilité de l'information quantique doit nécessairement être compensée par la mise en oeuvre de la correction d'erreurs quantiques, l'aspect central de la tolérance aux fautes dont nous discutons à la section 1.9. Le principe de base est d'encoder l'état d'un qubit *logique* dans l'état collectif de plusieurs qubits *physiques*. Cet encodage est

choisi de sorte que certaines erreurs affectant localement les qubits physiques puissent être détectées et corrigées sans affecter l'information au niveau logique.

1.4.1 Code de répétition classique

L'exemple d'encodage classique le plus simple est le *code de répétition* où l'état de trois bits physiques est utilisé pour représenter l'état d'un bit logique de la façon suivante :

$$0 \rightarrow \bar{0} = 000 \tag{1.44}$$

$$1 \rightarrow \bar{1} = 111, \tag{1.45}$$

où 000 et 111 sont appelés les *mots codes*. Ce code permet de détecter et de corriger l'inversion d'un des bits physiques. Par exemple, l'état 100 est corrigé par majorité vers l'état 000. Toutefois, une erreur d'inversion de bit agissant sur les deux derniers bits de l'état 111 peut aussi produire l'état 100. Dans ce cas, la correction mène à une erreur logique. Ainsi, ce code corrige toute erreur affectant un seul bit, mais une erreur affectant deux bits ou plus cause une erreur logique. Par conséquent, avec un modèle d'erreurs où la probabilité d'erreur sur un qubit physique donné est p , la probabilité d'une erreur logique est réduite à l'ordre de grandeur de p^2 . Plus précisément, la probabilité p_2 qu'une erreur agisse sur deux bits parmi trois bits est

$$p_2 = 3p^2(1 - p), \tag{1.46}$$

où le facteur 3 représente le nombre de paires de bits physiques parmi $n = 3$. Ce facteur illustre le fait que l'augmentation du nombre de bits physiques fait croître le taux d'erreurs physiques du système. Lorsque $p_2 > p$, le taux d'erreurs physiques p de chaque bit est trop élevé pour permettre un taux d'erreurs logiques réduit. À la section 1.6.2, nous introduisons le concept de taux d'erreurs seuil, sous lequel p est suffisamment bas pour obtenir un taux d'erreurs logiques inférieur.

1.4.2 Code de répétition quantique

En quantique, si l'on reprend l'idée de la section 1.4.1, l'état $|\psi\rangle = \sin \frac{\theta}{2} |0\rangle + e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} |1\rangle$ d'un qubit serait encodé par l'état [20]

$$|\bar{\psi}\rangle = \sin \frac{\theta}{2} |\bar{0}\rangle + e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} |\bar{1}\rangle \quad (1.47)$$

$$= \sin \frac{\theta}{2} |000\rangle + e^{i\phi} \cos \frac{\theta}{2} |111\rangle \quad (1.48)$$

de trois qubits de sorte que l'on puisse détecter et corriger les erreurs de type \hat{X} sur un seul qubit. Notons que la notation utilisée omet l'écriture individuelle des kets de chaque qubit et le symbole \otimes du produit tensoriel, par exemple $|000\rangle \equiv |0\rangle \otimes |0\rangle \otimes |0\rangle$. Remarquons que $|\bar{\psi}\rangle \neq |\psi\rangle |\psi\rangle |\psi\rangle$.

Afin d'éviter l'effondrement de la superposition quantique, la détection d'erreurs ne se fait pas par observation directe de l'état des qubits physiques. Pour se faire, on mesure plutôt les *parités jointes* de qubits voisins. Pour le code de répétition, les opérateurs de parité sont $\hat{Z}\hat{Z}\hat{I}$ et $\hat{I}\hat{Z}\hat{Z}$. Ces observables comparent les qubits voisins sans apprendre de l'information sur le qubit logique encodé

$$\hat{Z}\hat{Z}|00\rangle = +1|00\rangle, \quad (1.49)$$

$$\hat{Z}\hat{Z}|11\rangle = +1|11\rangle, \quad (1.50)$$

$$\hat{Z}\hat{Z}|01\rangle = -1|01\rangle, \quad (1.51)$$

$$\hat{Z}\hat{Z}|10\rangle = -1|10\rangle. \quad (1.52)$$

Lorsque les résultats de mesure des deux parités sont $+1$, l'état des qubits physiques appartient au sous-espace du code. Par contre, lorsqu'au moins une des mesures donne un résultat de -1 , l'état contient une erreur qui doit être corrigée. Dans la littérature de la correction d'erreurs quantiques, le terme *stabilisateur* est généralement utilisé plutôt qu'*opérateur de parité*.

Comme dans le cas classique, le code de répétition quantique peut seulement corriger les erreurs d'inversion de bit affectant un seul qubit : $\hat{X}\hat{I}\hat{I}$, $\hat{I}\hat{X}\hat{I}$ et $\hat{I}\hat{I}\hat{X}$. Ceci est possible puisqu'une inversion de bit au niveau logique \hat{X} s'exprime comme $\hat{X} = \hat{X}\hat{X}\hat{X}$, où trois opérations à un qubit sont nécessaires pour créer l'opération logique non

locale. Par contre, l'opération logique \widehat{Z} , telle que $\widehat{Z}|\bar{0}\rangle = |\bar{0}\rangle$ et $\widehat{Z}|\bar{1}\rangle = -|\bar{1}\rangle$, se manifeste par toute opération \widehat{Z} sur un nombre impair de qubits : $\widehat{Z}\widehat{I}\widehat{I}$, $\widehat{I}\widehat{Z}\widehat{I}$, $\widehat{I}\widehat{I}\widehat{Z}$ et $\widehat{Z}\widehat{Z}\widehat{Z}$. Le code de répétition (1.47-1.48) ne peut donc pas corriger les erreurs \widehat{Z} puisqu'une seule erreur de ce type suffit pour produire une erreur au niveau logique. Il en est de même pour les erreurs \widehat{Y} puisqu'elles contiennent l'erreur \widehat{Z} .

Ainsi, pour le modèle d'erreurs présenté par l'expression (1.17), avec probabilités d'erreurs de Pauli p_X , p_Y et p_Z , le taux d'erreurs logiques aura l'ordre de grandeur de $p_X^2 + p_Y + p_Z$. Le code de répétition serait donc avantageux sur un modèle de bruit asymétrique en \widehat{X} , avec p_Y et p_Z ayant un ordre de grandeur comparable ou inférieur à p_X^2 . En revanche, le taux d'erreurs ne diminue pas avec ce code lorsque p_Y ou p_Z sont comparable à p_X . Il faut donc ajouter un certain nombre de qubits physiques au code pour permettre la correction des inversions de phases en plus des inversions de bits. Pour se faire, l'une des façons est bien illustrée par le *code à neuf qubits* que nous introduisons à la section 1.4.3.

Finalement, notons qu'en général, les opérateurs de parité, ou stabilisateurs, mesurés pour détecter les erreurs doivent tous commuter avec les opérateurs logiques pour éviter d'affecter l'information quantique lors de la mesure, en plus de commuter entre eux afin de posséder des états propres communs, les mots codes.

1.4.3 Code à neuf qubits

Remarquons d'abord, le principe du code de répétition peut être utilisé pour corriger les erreurs \widehat{Z} plutôt que \widehat{X} en choisissant l'encodage [20]

$$|0\rangle \rightarrow |\bar{0}\rangle = |+++ \rangle = (|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)(|0\rangle + |1\rangle)/2\sqrt{2} \quad (1.53)$$

$$|1\rangle \rightarrow |\bar{1}\rangle = |-- \rangle = (|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)(|0\rangle - |1\rangle)/2\sqrt{2}. \quad (1.54)$$

Ce code utilise 3 qubits, mais il appartient au sous-espace des états propres de valeur propre +1 des opérateurs de parité $\widehat{X}\widehat{X}\widehat{I}$ et $\widehat{I}\widehat{X}\widehat{X}$, et les opérateurs logiques de Pauli sont générés par $\widehat{X} = \widehat{Z}\widehat{Z}\widehat{Z}$ et $\widehat{Z} = \widehat{X}\widehat{I}\widehat{I}$, $\widehat{I}\widehat{X}\widehat{I}$, $\widehat{I}\widehat{I}\widehat{X}$, ou $\widehat{X}\widehat{X}\widehat{X}$. Ainsi, ce code corrige les erreurs \widehat{Z} à un qubit.

Le code à neuf qubits se construit en ajoutant un second niveau d'encodage. Les

qubits physiques des expressions (1.53) et (1.54) sont encodés à leur tour à la façon du code de répétition des expressions (1.44) et (1.45) de la section 1.4.2 [20]

$$|0\rangle \rightarrow (|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)(|000\rangle + |111\rangle)/2\sqrt{2} \quad (1.55)$$

$$|1\rangle \rightarrow (|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)(|000\rangle - |111\rangle)/2\sqrt{2}. \quad (1.56)$$

Les erreurs \hat{X} sont donc corrigées par ce sous-niveau d'encodage.

Les opérateurs de parité s'obtiennent à partir du code de répétition. Nous avons $\hat{Z}\hat{Z}\hat{I}$ et $\hat{I}\hat{Z}\hat{Z}$ dans chaque sous-bloc de 3 qubits pour détecter les erreurs \hat{X} et les erreurs \hat{Z} sont détectées par $(\hat{X}\hat{X}\hat{X})(\hat{X}\hat{X}\hat{X})(\hat{I}\hat{I}\hat{I})$ et $(\hat{I}\hat{I}\hat{I})(\hat{X}\hat{X}\hat{X})(\hat{X}\hat{X}\hat{X})$. De plus, les erreurs \hat{Y} , qui contiennent les erreurs \hat{X} et \hat{Z} , sont aussi détectées par les deux types de stabilisateur. Les mots codes sont les seuls états propres à avoir la valeur propre +1 avec tous les stabilisateurs. En général, plutôt que d'écrire les mots codes, un code est entièrement défini par ses stabilisateurs.

Avec le code à neuf qubits, les opérations logiques de Pauli peuvent toujours s'écrire sous la forme d'opérations à au moins trois qubits, par exemple $\hat{X} = (\hat{Z}\hat{I}\hat{I})(\hat{Z}\hat{I}\hat{I})(\hat{Z}\hat{I}\hat{I})$ et $\hat{Z} = (\hat{X}\hat{X}\hat{X})(\hat{I}\hat{I}\hat{I})(\hat{I}\hat{I}\hat{I})$. Cette propriété permet la correction de toute erreur de Pauli agissant sur un seul qubit, comme c'était le cas avec le code de répétition. Par contre, la correction des erreurs à deux qubits et plus n'est pas garantie.

Notons aussi que les opérateurs logiques ne sont pas uniques. Nous pouvons obtenir de nouvelles expressions valides de \hat{X} et \hat{Z} en les multipliant par les opérateurs de parité puisque ces derniers agissent comme l'identité \hat{I} sur le code. Par exemple, les expressions $\hat{X} = (\hat{Z}\hat{I}\hat{I})(\hat{I}\hat{Z}\hat{I})(\hat{I}\hat{I}\hat{Z})$ et $\hat{Z} = (\hat{I}\hat{I}\hat{I})(\hat{X}\hat{X}\hat{X})(\hat{I}\hat{I}\hat{I})$ sont tout à fait valides.

1.4.4 Code de surface

Le code de correction d'erreurs quantiques le plus répandu à ce jour est le *code de surface* [12]. Il se visualise sur une surface présentée à la figure 1.4(a), où les points blancs représentent les qubits physiques encodant l'information placés sur un réseau et les points noirs représentent les qubits utilisés pour la mesure des stabilisateurs.

Comme le code à neuf qubits, il y a deux types de stabilisateurs. Les stabilisateurs de type \hat{X} en jaune ont la forme $\hat{X}_a\hat{X}_b\hat{X}_c\hat{X}_d$, où les indices représentent des qubits

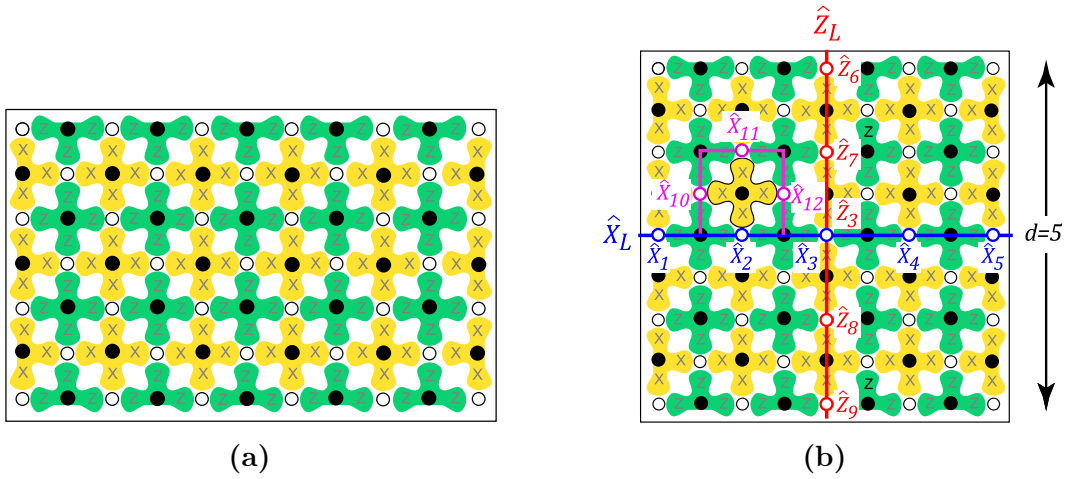


FIGURE 1.4 Les points blancs et noirs représentent respectivement les qubits physiques du code et les stabilisateurs. Les stabilisateurs identifiés en jaune sont du type \hat{X} et ont la forme $\hat{X}_a\hat{X}_b\hat{X}_c\hat{X}_d$. Les stabilisateurs identifiés en vert sont du type \hat{Z} et ont la forme $\hat{Z}_k\hat{Z}_l\hat{Z}_m\hat{Z}_n$. En (b), les opérateurs logiques $\hat{X}_L = \hat{X}_1\hat{X}_2\hat{X}_3\hat{X}_4\hat{X}_5$ en bleu et $\hat{Z}_L = \hat{Z}_6\hat{Z}_7\hat{Z}_8\hat{Z}_9$ en rouge forment des chaînes reliant les extrémités de la surface. Ces chaînes se croisent en un point pour respecter la propriété d'anticommutation des opérateurs de Pauli. La déformation de ces chaînes par la multiplication d'un stabilisateur, comme $\hat{X}_2\hat{X}_{10}\hat{X}_{11}\hat{X}_{12}$, ne change pas l'action sur le code. Illustrations du code de surface tirées de la référence [12].

voisins tels qu'identifiés à la figure 1.4(a). De la même façon, les stabilisateurs de type \hat{Z} en vert ont la forme $\hat{Z}_k\hat{Z}_l\hat{Z}_m\hat{Z}_n$. Cet ensemble d'opérateurs de parité de types \hat{X} et \hat{Z} permet la détection de toute erreur de Pauli différente, bien entendu, des opérateurs logiques et de parité. Toutefois, seules les erreurs de faible poids peuvent être corrigées sans introduire d'erreurs logiques, comme nous l'avons constaté avec les codes précédents.

Les opérateurs logiques \hat{X} et \hat{Z} correspondent chacun à une chaîne de \hat{X} ou de \hat{Z} respectivement s'étendant d'un côté à l'autre de la surface telle que présenté à la figure 1.4(b) par les opérateurs $\hat{X} = \hat{X}_L = \hat{X}_1\hat{X}_2\hat{X}_3\hat{X}_4\hat{X}_5$ en bleu et $\hat{Z} = \hat{Z}_L = \hat{Z}_6\hat{Z}_7\hat{Z}_8\hat{Z}_9$ en rouge respectivement. Les chaînes \hat{X}_L et \hat{Z}_L se croisent en un point pour préserver la propriété d'anticommutation des opérateurs de Pauli au niveau logique. Comme nous l'avons mentionné à la section 1.4.3, il n'y a pas une unique façon de former ces opérateurs, toute chaîne reliant les extrémités du réseau est valide. Par exemple, la multiplication de \hat{X}_L par le stabilisateur $\hat{X}_2\hat{X}_{10}\hat{X}_{11}\hat{X}_{12}$, où les qubits 10, 11 et 12 sont en rose sur la figure 1.4(b), produit une chaîne de \hat{X} différente reliant les extrémités de la surface en passant par les qubits 10, 11 et 12 et excluant le qubit 2 ($\hat{X}^2 = \hat{I}$). L'action de cette chaîne sur le code est identique à celle de \hat{X}_L puisqu'un stabilisateur agit comme l'identité sur le code.

Ainsi, pour un nombre de qubits physique $n = L^2$, où L est la longueur d'un côté de la surface, il faut un minimum de L erreurs à un qubit physiques pour créer une erreur logique. Ce nombre augmente avec la racine carrée de la taille du code de surface, le nombre n de qubits physiques. Ce concept de poids minimal d'une erreur logique revient à la section 1.5.1 où la notion de *distance* d'un code est formellement introduite.

1.4.5 Performance de la correction d'erreurs

Afin d'évaluer la performance d'un protocole de correction d'erreur, nous utilisons la fidélité d'intrication dans le cas où l'opération quantique bruitée utilisée serait un cycle d'exécution de la correction d'erreurs quantiques [17]. Ce processus est illustré à la figure 1.5. Tout d'abord, le qubit logique est encodé dans un code de correction d'erreurs quantiques, puis chaque qubit physique est affecté par un modèle

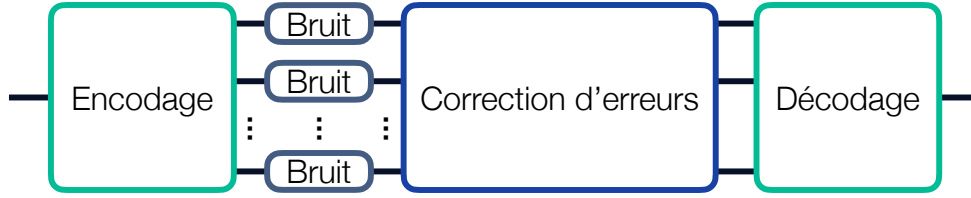


FIGURE 1.5 Opérations quantiques utilisées pour évaluer la fidélité d'intrication de la correction d'erreurs quantiques. L'opération d'encodage encode un qubit logique dans un code de correction d'erreurs quantiques composé de plusieurs qubits physiques. Ensuite, le modèle de bruit s'applique sur chaque qubit physique pour simuler les erreurs quantiques au niveau physique. Par la suite, un protocole de correction d'erreurs est exécuté, ce qui consiste à la détermination des résultats de mesures d'opérateurs de parité ainsi que leur probabilité, puis l'exécution d'une opération de correction optimale. Finalement, l'étape de décodage transforme l'état à plusieurs qubits du code vers l'état d'un qubit logique.

de bruit donné. L'information encodée contient alors des erreurs avec différentes probabilités. L'étape suivante consiste à exécuter la correction d'erreurs. Ceci consiste à la mesure d'opérateurs de parité, ainsi qu'à l'application d'une opération de correction correspondant à l'erreur la plus probable. Finalement, l'état des qubits physiques est décodé vers l'état d'un seul qubit logique. En général, l'état final peut contenir des erreurs en raison d'erreurs incorrigibles de poids trop élevé, mais, idéalement, leurs probabilités sont inférieures à celles des erreurs des qubits physiques sans correction.

Numériquement, ce processus est simulé à l'aide d'une opération effective \mathcal{E}_{eff} constitué de la composition des canaux d'encodage, de bruit, de correction d'erreurs et de décodage [17]

$$\mathcal{E}_{\text{eff}} = \mathcal{E}_{\text{Décodage}} \circ \mathcal{E}_{\text{Correction}} \circ \mathcal{E}_{\text{Bruit}} \circ \mathcal{E}_{\text{Encodage}} \quad (1.57)$$

La transformation \mathcal{E}_{eff} correspond donc au modèle de bruit au niveau logique. Comme discuté à la section 1.3.1, la fidélité d'intrication s'obtient à partir de l'élément χ_{00} de la représentation en matrice χ de \mathcal{E}_{eff} .

1.5 Espace d'Hilbert en correction d'erreurs quantiques

Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, nous pouvons encoder l'information d'un qubit logique dans l'état collectif de plusieurs qubits physiques. En général, un code de correction d'erreurs quantiques encode l'état de k qubits logiques appartenant à un espace d'Hilbert de dimension 2^k vers un espace beaucoup plus large, par exemple de dimension 2^n pour un code de n qubits physique. Ceci permet un encodage redondant ayant des propriétés de symétrie protégeant l'information contre les erreurs. De plus, l'élargissement de l'espace d'Hilbert permet la construction d'opérateurs logiques composés de plusieurs opérations à un qubit ce qui empêche les erreurs à faible poids de créer une erreur logique. Cette propriété présente l'apparition d'une *distance* entre les mots codes, un élément essentiel à la protection contre les erreurs.

1.5.1 Distance

La distance d d'un code correspond au poids minimal d'un opérateur pouvant transformer un état appartenant au sous-espace du code vers un autre état du code. Une telle erreur reliant deux états du code induit une opération logique et ne serait pas détectable. Pour le code à neuf qubits, on a $d = 3$ puisque nous avons vu que les opérateurs logiques de Pauli sont composés d'au moins 3 opérateurs physiques. Cette distance permet au code de protéger l'information contre les erreurs de poids 1. Il n'est donc pas garanti de pouvoir corriger les erreurs de poids supérieur à 1, bien que la correction soit possible pour certaines erreurs. Avec le code de surface ayant $n = L^2$ qubits physiques, où L est la largeur de la surface, nous avons vu que la distance est L ou \sqrt{n} .

En général, toute erreur ayant un poids plus petit que $d/2$ est corrigible. C'est-à-dire que l'on peut corriger les erreurs de poids inférieur ou égal à $t = \lfloor (d-1)/2 \rfloor$. Intuitivement, nous pouvons comprendre cette propriété avec un code classique de répétition utilisant $n = d$ bits physiques. Étant donné que la correction d'erreur se fait par majorité, les erreurs de poids inférieur à $d/2$ sont corrigibles. Par conséquent,

le code de surface peut corriger toute erreur de poids inférieur à $\sim \sqrt{n}/2$. Dans la littérature, un code de correction d'erreurs quantiques encodant k qubits logiques avec n qubits physiques et une distance d est dénoté $[[n, k, d]]$.

1.5.2 Espace d'Hilbert bosonique

L'utilisation d'un espace d'Hilbert de dimensions supérieures à 2^k ne nous limite pas aux systèmes à n qubits de dimensions 2^n . Il est possible d'utiliser l'espace d'Hilbert d'un seul et même système physique pour encoder un ou plusieurs qubits dans le but de fournir une protection particulière à l'information quantique [9]. Ce dernier cas sera étudié dans les prochains chapitres où nous allons considérer un mode d'un résonateur supraconducteur. Nous verrons entre autres que ce mode correspond à un système bosonique. L'étude de cette méthode a permis l'apparition de la famille des *codes bosoniques* [11]. Bien que les états étudiés dans ce mémoire ne fassent pas partie de cette famille de codes, ils présentent des similarités permettant la protection contre les inversions de phase pour ainsi créer un bruit asymétrique en \hat{X} . Nous montrons dans le chapitre 3 que le code de répétition quantique peut corriger efficacement le modèle d'erreurs de ce système physique.

1.6 Corrigibilité d'un modèle d'erreurs

Dans la section 1.4, nous avons vu comment un code peut corriger certaines erreurs de Pauli. Dans la présente section, nous discutons de la capacité d'un code à pouvoir corriger un sous-ensemble d'erreurs d'un modèle d'erreurs général. En plus de devoir être détectable et inversible, chaque erreur du sous-ensemble doit être distinguable des autres erreurs lorsque leur correction correspondante diffère. Si deux erreurs \hat{E} et \hat{F} respectent ces conditions, il est possible de corriger un modèle d'erreurs arbitraires composées de leurs combinaisons linéaires $\alpha\hat{E} + \beta\hat{F}$. Nous pouvons comprendre cette propriété en observant l'effet de cette dernière erreur sur un état $(\alpha\hat{E} + \beta\hat{F})|\psi\rangle = \alpha\hat{E}|\psi\rangle + \beta\hat{F}|\psi\rangle$. En effet, lors de la mesure d'opérateurs de parité, \hat{E} et \hat{F} sont distingués l'un de l'autre et l'état final est projeté vers l'une des deux erreurs selon le résultat de la mesure, ou bien les deux opérateurs ne sont pas distingués et n'ont pas

besoin de l'être, dans le cas où leur correction est la même. Par exemple, le code à neuf qubits peut corriger les erreurs \hat{X} , \hat{Y} et \hat{Z} à un qubit et il peut les distinguer entre eux et l'identité \hat{I} ce qui permet de les détecter. Ceci implique que ce code peut corriger toute erreur à un qubit puisqu'il peut corriger toute combinaison linéaire des éléments de $\{\hat{P}_i\}$. Remarquons toutefois que dans le cas où \hat{E} et \hat{F} se corrigent par la même opération, il n'est pas nécessaire de les distinguer.

1.6.1 Conditions de Knill-Laflamme

Les *conditions de Knill-Laflamme* constituent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble d'erreurs soit corrigible par un code donné [1]. En termes mathématiques, un code de correction d'erreurs ayant la base d'états logiques $\{|\bar{\psi}_i\rangle\}$ peut corriger un modèle d'erreurs composées de combinaisons linéaires d'une base $\{\hat{E}_a\}$ si la propriété suivante est respectée :

$$\langle \bar{\psi}_i | \hat{E}_a^\dagger \hat{E}_b | \bar{\psi}_j \rangle = C_{ab} \delta_{ij}, \quad (1.58)$$

où C_{ab} est une matrice hermitienne indépendante de i et j , ce qui évite qu'une erreur déforme le code en assignant différents poids aux divers mots codes. L'expression (1.58) montre également que δ_{ij} impose que deux états distinguables demeurent distinguables sous l'effet des erreurs. Par conséquent, les erreurs peuvent être inversées par une opération unitaire. Finalement, C_{ab} peut-être diagonalisée. C'est-à-dire qu'il existe une nouvelle base d'erreur $\{\hat{E}'_a\}$ dans laquelle il est possible de distinguer toute paire d'erreurs différentes \hat{E} et \hat{F} [1]

$$\langle \bar{\psi}_i | \hat{E}'^\dagger \hat{F} | \bar{\psi}_i \rangle = 0. \quad (1.59)$$

L'équation (1.58) est donc suffisante pour corriger un modèle d'erreurs données par la base $\{\hat{E}_a\}$ avec les mots codes $\{|\bar{\psi}_i\rangle\}$.

1.6.2 Taux d'erreurs seuil

Il est important de noter que la capacité d'un code à corriger un ensemble d'erreurs n'est pas garantie en général et elle dépend du modèle d'erreurs physiques. À priori, utiliser un grand nombre de qubits pour encoder k qubits logiques augmente la probabilité d'erreurs physiques puisque chaque qubit physique ajoute son propre bruit au système total, comme illustré à l'équation (1.46). Il suit que, si la probabilité d'erreur de chaque qubit est trop élevée, les erreurs de l'ensemble des qubits vont s'accumuler trop rapidement pour que la correction d'erreurs puisse les effacer. Dans ce cas, les erreurs logiques sont plus probables qu'avec un seul qubit physique.

Heureusement, chaque code possède un *taux d'erreurs seuil* [1, 21] sous lequel la probabilité d'erreur logique est réduite par la correction d'erreur. L'exemple le plus simple correspond au cas du code de répétition qui corrige des erreurs d'inversion de bit. Puisque la correction se fait par majorité, le seuil se trouve à 50%. Ce concept est illustré à la figure 1.6, où nous présentons en jaune le taux d'erreurs logiques p_L du code de répétition à $n = 3$ bits, en fonction du taux d'erreurs physiques p , que nous traçons en bleu en guise de comparaison. Le taux d'erreurs logiques est évalué avec la probabilité totale des erreurs incorrigibles agissant sur plus d'un seul bit

$$p_L = 3p^2(1 - p) + p^3. \quad (1.60)$$

Nous constatons que p_L croise p au seuil de 50%. Au-dessus du seuil, l'encodage génère un taux d'erreurs incorrigibles plus élevé que le taux physique, ce qui cause une augmentation du taux d'erreurs logiques. Inversement, sous le seuil, le taux d'erreurs logiques est inférieur au taux d'erreurs physiques. Nous observons aussi que, plus le taux d'erreurs physiques est petit par rapport au seuil, plus le taux d'erreurs logiques diminue par rapport au taux physique. Le taux seuil d'un code est donc une mesure de sa capacité à corriger les erreurs. Le seuil présenté ici est connu sous le nom de *pseudo seuil*. Il existe une seconde notion de seuil, qui ne sera pas utilisée dans ce mémoire, donnée par le taux seuil sous lequel l'augmentation de la taille n , ou la distance d , d'une famille de code, par exemple le code de répétition ou le code de surface, diminue le taux d'erreurs logiques. Ce type de seuil est généralement différent du pseudo seuil, mais il correspond à une notion cruciale pour l'obtention d'un taux d'erreurs logiques arbitrairement petit. Notons finalement que les codes de correction

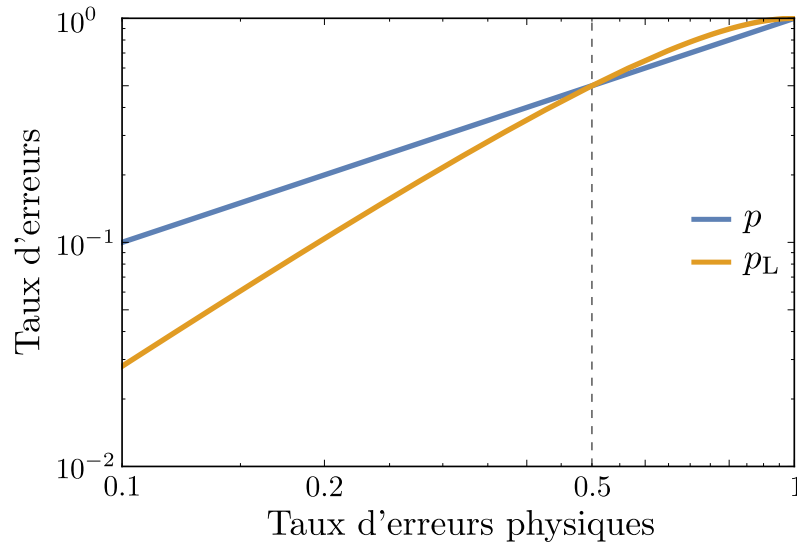


FIGURE 1.6 Le taux d'erreurs logiques p_L , en jaune, du code de répétition à $n = 3$ bits, en fonction du taux d'erreurs physiques p , aussi présenté en bleu. Les courbes se croisent au taux d'erreurs seuil, $p = 50\%$, du code de répétition.

d'erreurs quantiques possèdent typiquement des seuils largement inférieurs à 50% puisque ces codes visent à corriger tous les types d'inversion, contrairement au code de répétition, ce qui entraîne une diminution de leur capacité à corriger les erreurs d'un type en particulier. Par exemple, le code de surface possède un seuil près de 15% [22], et ce dernier diminue sous 1% lorsque l'on considère la présence d'erreurs lors de la détection d'erreurs [12].

Il est donc très important de concevoir des qubits physiques ayant un faible taux d'erreurs et des codes ayant un seuil élevé afin d'atteindre une probabilité d'erreurs logiques suffisamment basse avec un nombre n de qubits physiques raisonnable.

1.7 Ressources requises pour le code de surface

La référence [12] étudie la quantité de ressources nécessaires pour exécuter un algorithme de factorisation d'un nombre à $N = 2\,000$ bits en utilisant l'encodage du code de surface. Lorsque le taux d'erreurs correspond à 10% du seuil, il est estimé que le nombre de qubits physiques par qubit logique devrait s'élever à 14 500 afin

d'assurer un taux d'erreurs logiques suffisamment réduit. Pour ce calcul quantique, le nombre de qubits logiques doit être d'au moins de $2N = 4\,000$ ce qui requiert un total de 58 millions de qubits physiques pour encoder l'information. Ceci constitue un défi considérable en raison de la difficulté de contrôler quelques qubits en laboratoire. Il est donc essentiel d'améliorer les qubits physiques et les codes de corrections d'erreurs afin de diminuer considérablement ce nombre astronomique et rendre l'ordinateur quantique beaucoup plus facilement réalisable. L'étude de ce mémoire apporte une contribution à cet objectif majeur de l'informatique quantique en approfondissant la recherche sur les qubits de chats qui seront introduits au chapitre 2.

1.8 Correction d'erreurs quantiques et structure du bruit

Avant de poursuivre vers le sujet de la tolérance aux fautes, il est important de faire quelques remarques sur la correction d'erreurs quantiques. Jusqu'à présent, ce domaine d'étude a principalement été développé pour corriger des modèles d'erreurs de Pauli sans considérer les détails et la structure du bruit généralement non Pauli présenté par des qubits physiques réalistes. L'avantage de cette méthode est qu'un code donné peut être utilisé sur presque tout système physique. Par contre, peu de travaux traitent de l'optimisation de la correction d'erreurs pour des modèles de bruit propres à des systèmes physiques.

Dans ce mémoire, nous étudions un système physique qui réalise un qubit présentant un modèle d'erreurs asymétrique. Dans les prochains chapitres, des performances prometteuses seront observées en optimisant la correction d'erreurs pour ce système physique. L'étude de ce modèle de bruit est motivée par quelques travaux développés entre autres par Aliferis en 2008-2009 [3, 4] et Tuckett en 2018 [5]. Ces deux références rapportent des évidences que l'optimisation de la correction d'erreurs pour le bruit asymétrique permet d'augmenter le taux d'erreurs seuil. Ceci promet donc de meilleures performances de correction d'erreurs et une diminution potentielle des ressources physiques nécessaires pour y parvenir. De manière simplifiée, nous pouvons comprendre l'avantage du bruit asymétrique puisque nous avons vu qu'un simple code de répétition peut corriger un tel modèle d'erreurs. Dans le cas où seules les erreurs \hat{X} sont présentes,

la correction se fait par majorité ce qui permet un seuil de 50% en principe. Avec un bruit non asymétrique, il serait nécessaire d'ajouter des qubits physiques pour corriger tous les types d'inversion et le seuil diminue largement.

1.9 Tolérance aux fautes

Jusqu'à présent, nous avons discuté des erreurs qui surgissent à la suite d'une opération quantique et comment corriger ces erreurs. Dans cette section, nous discutons des précautions supplémentaires à prendre pour éviter la propagation des erreurs pendant un calcul quantique. Nous verrons que certaines contraintes sur les opérations physiques doivent être respectées afin de préserver la protection contre les erreurs d'un code de correction d'erreurs. Le domaine de la *tolérance aux fautes* étudie ce problème dans le but de créer des protocoles de calculs quantiques tolérants aux fautes [1]. L'objectif est d'exécuter des calculs quantiques aussi long et fiable que désiré lorsque les composantes physiques ont un taux d'erreurs sous un certain seuil.

Dans cette section, nous discutons des idées générales de la tolérance aux fautes qui seront nécessaires à l'étude de ce mémoire, sans s'attarder aux fins détails de cette théorie. Avant de poursuivre avec les bases de la tolérance aux fautes, il est nécessaire de discuter des opérations logiques qu'un ordinateur quantique doit exécuter, l'ensemble universel de portes logiques, afin d'avoir la capacité de réaliser un algorithme arbitraire.

1.9.1 Ensemble universel de portes logiques

L'ensemble universel de portes logiques est constitué des quelques opérations logiques suffisantes pour générer toute autre opération avec précision arbitraire. On dit qu'un ordinateur quantique est universel s'il peut exécuter un tel ensemble. Un

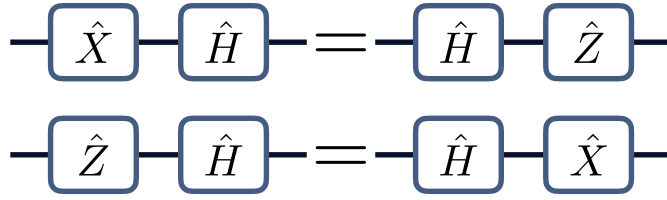


FIGURE 1.7 Les relations de commutation des équations (1.64) et (1.65) sous forme de circuits quantiques. L'opération \hat{Z} se transforme en \hat{X} et vice-versa selon la transformée de Hadamard.

exemple d'ensemble universel est $\{\hat{H}, \text{CNOT}, \hat{T}\}$ [23], où

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1.61)$$

$$\text{CNOT} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (1.62)$$

$$\hat{T} = \hat{R}_{\pi/8} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\pi/4} \end{pmatrix}. \quad (1.63)$$

On appelle \hat{H} la *transformée de Hadamard*. Cette opération transforme la base de \hat{Z} vers la base de \hat{X} et vice-versa de sorte que $|0/1\rangle \leftrightarrow |+/-\rangle$ ce qui revient aux relations

$$\hat{H}\hat{X} = \hat{Z}\hat{H}, \quad (1.64)$$

$$\hat{H}\hat{Z} = \hat{X}\hat{H}, \quad (1.65)$$

qui sont illustré sous forme des circuits quantiques à la figure 1.7.

Le CNOT, de l'anglais *controlled NOT*, est une opération à deux qubits permettant l'intrication. Cette opération effectuée $\hat{I}\hat{I}$ si le premier qubit est dans l'état $|0\rangle$ et $\hat{I}\hat{X}$ si le premier qubit est dans l'état $|1\rangle$. On dit que le premier qubit est un *qubit de*

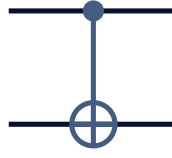


FIGURE 1.8 Symbole du CNOT, où le qubit du haut correspond au qubit de contrôle et le qubit du bas représente le qubit cible.

contrôle puisque son état dans la base \hat{Z} détermine si \hat{X} agit sur le second qubit ou *qubit cible*. Ainsi, l'action du CNOT sur un état général de deux qubits s'écrit

$$\text{CNOT}(\alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \gamma |10\rangle + \delta |11\rangle) \quad (1.66)$$

$$= \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \hat{I}\hat{X}\gamma |10\rangle + \hat{I}\hat{X}\delta |11\rangle \quad (1.67)$$

$$= \alpha |00\rangle + \beta |01\rangle + \gamma |11\rangle + \delta |10\rangle. \quad (1.68)$$

Dans un circuit quantique, le CNOT est représenté par le symbole à la figure 1.8, où un point fermé sur le qubit de contrôle est connecté par une ligne au symbole \oplus sur le qubit cible. Notons deux relations de commutation pertinentes

$$\text{CNOT}(\hat{X}\hat{I}) = (\hat{X}\hat{X})\text{CNOT}, \quad (1.69)$$

$$\text{CNOT}(\hat{I}\hat{Z}) = (\hat{Z}\hat{Z})\text{CNOT}, \quad (1.70)$$

que nous illustrons aux figures 1.9 (a) et (b) respectivement. C'est-à-dire qu'une opération $\hat{X}\hat{I}$ ($\hat{I}\hat{Z}$) précédant un CNOT est équivalente à une opération $\hat{X}\hat{X}$ ($\hat{Z}\hat{Z}$) suivant un CNOT. Nous reviendrons sur cette propriété plus tard dans ce chapitre puisqu'elle est d'une importance cruciale en tolérance aux fautes.

Finalement, l'opération \hat{T} correspond à une rotation de la sphère de Bloch d'un angle $\pi/4$ autour de l'axe z . La relation de commutation de \hat{T} avec les opérateurs de Pauli n'est pas utile pour ce mémoire, mais, notons simplement que \hat{T} transforme les opérateurs de Pauli vers des opérateurs non-Pauli.

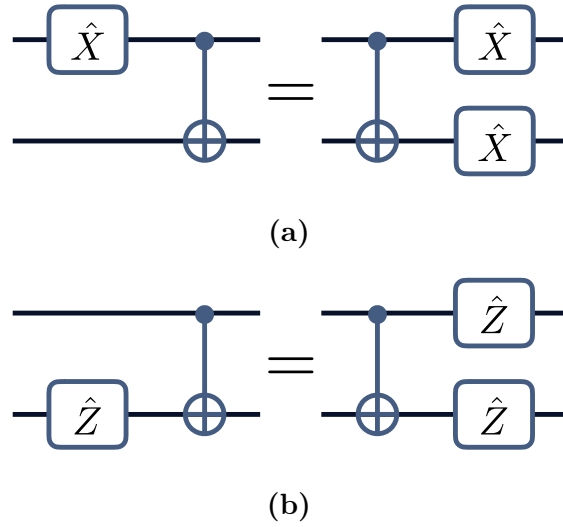


FIGURE 1.9 Les équations (1.69) et (1.70) sont représentées respectivement en (a) et en (b) sous forme de circuits quantiques. (a) Un \hat{X} sur le qubit de contrôle d'un CNOT se transforme en un \hat{X} sur les deux qubits. (b) Un \hat{Z} sur le qubit cible d'un CNOT se transforme en un \hat{Z} sur les deux qubits.

1.9.2 Propagation d'erreurs

Les opérations de l'ensemble universel doivent être implémentées au niveau logique d'un code de correction d'erreurs quantiques. Ces *opérations logiques* ainsi que la correction d'erreurs sont donc réalisées par des *gadgets* agissant sur les qubits physiques. En général, ces gadgets sont composés d'opérations physiques, de préparations d'états de *qubits auxiliaires*, ou auxiliaires, et de mesures de qubits. En plus d'introduire des erreurs sur les qubits physiques, ces différentes composantes agissent sur les erreurs déjà survenues et les transforment potentiellement vers de nouvelles erreurs. Ce phénomène est appelé la *propagation d'erreurs*. En général, lorsqu'on applique une opération unitaire \hat{U} sur un état $\hat{E}|\psi\rangle$ ayant une erreur \hat{E} , on a la relation

$$\hat{U}\hat{E}|\psi\rangle = (\hat{U}\hat{E}\hat{U}^\dagger)\hat{U}|\psi\rangle, \quad (1.71)$$

où nous avons multiplié par l'identité $\hat{U}^\dagger\hat{U} = \hat{I}$. L'erreur \hat{E} se propage à travers \hat{U} vers une erreur différente $\hat{U}\hat{E}\hat{U}^\dagger$ qui agit sur l'état sans erreur $\hat{U}|\psi\rangle$. Par exemple, les relations (1.64) et (1.65) indiquent que \hat{Z} se propage vers \hat{X} et vice-versa à travers \hat{H} . Pour le CNOT, les relations (1.69) et (1.70), illustrées à la figure 1.9, indiquent qu'une

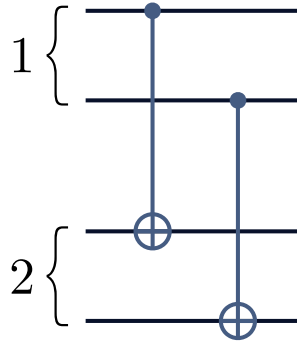


FIGURE 1.10 CNOT tolérant aux fautes entre deux blocs, notés 1 et 2, de deux qubits physiques. Les blocs encodent des qubits logiques différents.

erreur \hat{X} sur le qubit de contrôle induit une erreur supplémentaire de même type, \hat{X} , sur le qubit cible et une propagation de même nature a lieu avec une erreur \hat{Z} où les rôles des qubits sont inversés.

Prenons le code de répétition à trois qubits. Ce code ne peut corriger que des erreurs de poids 1, mais le CNOT peut augmenter le poids de ces erreurs par propagation. Les erreurs de poids 1 pourraient ainsi devenir incorrigibles. Il faut donc éviter d'utiliser tout CNOT agissant sur deux qubits physiques appartenant au même qubit logique. En raison de la propagation d'erreurs, employer un CNOT d'une telle façon ne consisterait pas une méthode *tolérante aux fautes*. En revanche, l'utilisation du CNOT sur des qubits physiques appartenant à des qubits logiques différents pourrait être tolérante aux fautes puisque toute erreur de poids 1 se propage vers une erreur corrigible de poids au plus 1 dans chaque qubit logique. La figure 1.10 montre une telle construction où nous avons deux qubits logiques, identifiés par 1 et 2, composés de deux qubits physiques chaque, affectés de CNOTs physiques de manière tolérante aux fautes. Finalement, il y a d'autres restrictions pour que ces CNOTs soient bien tolérants aux fautes [1], mais ces détails ne seront pas utiles pour ce mémoire.

1.9.3 Principe de base de la tolérance aux fautes

Un critère important pour qu'un protocole soit tolérant aux fautes repose sur le fait que les erreurs ne doivent pas se propager de manière incontrôlable [1]. En bref, dans le cas d'un code $[[n, k, d]]$ pouvant corriger les erreurs de poids t et moins, toute

erreur de poids $s \leq t$ doit se propager vers une erreur ayant un poids d'au plus t par bloc de n qubits physiques du code. C'est-à-dire que le poids peut augmenter par propagation, mais l'erreur doit rester corrigible. Ainsi, comme nous avons vu à la section 1.9.2, une opération quantique agissant sur plusieurs qubits à l'intérieur d'un même bloc peut causer la propagation d'une erreur de poids s dans le bloc vers une erreur de poids supérieur, potentiellement incorrigible. Éviter une telle opération serait suffisant pour la tolérance aux fautes, mais ce n'est pas un critère strictement nécessaire.

La définition de la tolérance aux fautes donnée ici est volontairement incomplète et inexacte par simplicité. La définition rigoureuse, donnée par la référence [1], n'a pas besoin d'être décrite pour la compréhension de ce mémoire.

1.9.4 Ressources requises pour la tolérance aux fautes

Les critères pour qu'un gadget soit tolérant aux fautes imposent de strictes contraintes sur les opérations physiques et la composition des gadgets. Des études ont montré qu'il est inévitable de devoir utiliser des ressources supplémentaires, telles que des qubits ancillaires, afin de créer des gadgets tolérants aux fautes pour chaque opération logique de l'ensemble universel [12, 24]. Ces qubits auxiliaires sont entre autres utilisés pour la préparation d'états particuliers de qubits logiques nommés *états magiques*. Ces états doivent être produits avec une très haute précision ce qui implique le recours à des protocoles hautement coûteux en ressources.

Revenons à l'exemple de la référence [12] décrit à la section 1.7 où les ressources nécessaires pour un algorithme de factorisation sont estimées. Il est évalué que la préparation d'un seul état magique nécessite environ 800 000 qubits physiques, avec un taux d'erreurs correspondant à 10% du seuil. En tenant compte du nombre de fois que ce type d'état devrait être préparé durant l'exécution complète de l'algorithme, il a été calculé qu'un milliard de qubits physiques sont nécessaires pour la préparation d'états magiques. Le nombre de qubits physiques encodant l'information ne correspond qu'à 6% de ce nombre. La tolérance aux fautes impose donc un immense surcoût expérimental à l'ordinateur quantique.

Comme discuté précédemment, le nombre de qubits physiques requis dépend de

la grandeur du taux d'erreurs physiques par rapport au seuil du code. Ainsi, réduire le taux d'erreurs à 1% du seuil plutôt qu'à 10% baisse considérablement le nombre de qubits physique d'un milliard à environ 130 millions [12]. Ceci démontre l'importance de la conception de qubits physiques bien isolés de l'environnement, d'opérations précises ainsi que de codes de correction d'erreurs quantiques ayant un taux seuil d'erreurs élevé.

1.10 Tolérance aux fautes et bruit asymétrique

Plusieurs études ont montré que le bruit asymétrique présente des avantages au niveau de la tolérance aux fautes. En plus de permettre l'augmentation du taux seuil de codes optimisés [3–5], ces codes peuvent bénéficier de gadgets simplifiés pour la préparation d'états magiques grâce à l'exploitation de la structure avantageuse du bruit asymétrique [6]. Le gain exact dépend naturellement des détails des qubits physiques tels que le taux d'erreurs total, la grandeur de l'asymétrie, soit p_X/p_Z par exemple, et le taux d'erreurs logiques visé.

1.10.1 Défis associés au bruit asymétrique en tolérance aux fautes

L'exploitation du bruit asymétrique en tolérance aux fautes ajoute des contraintes supplémentaires sur la construction de gadgets. Les opérations agissant sur les qubits physiques doivent préserver la structure asymétrique du bruit. Par exemple, la transformée de Hadamard \hat{H} propagent l'erreur de type \hat{X} vers l'erreur \hat{Z} et vice-versa selon les équations (1.64) et (1.65). \hat{H} ne préserverait donc pas une asymétrie entre les deux types d'erreur et utiliser une telle opération ne permettrait donc pas d'obtenir les avantages d'un bruit asymétrique.

De plus, bien qu'une opération préserve en principe le bruit asymétrique, son implémentation physique peut quant à elle perdre cette propriété lorsque l'opération ne commute pas avec l'erreur dominante du bruit asymétrique [3–5]. Par exemple, les équations (1.69) et (1.70), illustrées aux figures 1.9 (a) et (b), montrent que le CNOT

ne commute pas avec $\hat{X}\hat{I}$ et $\hat{I}\hat{Z}$, mais ne transforme pas le type d'erreurs \hat{X} en \hat{Z} et inversement. Bien que le CNOT préserve l'asymétrie selon la propagation de ces erreurs, cette propriété peut se perdre lorsqu'une erreur survient durant l'exécution physique du CNOT, comme nous le constatons à la prochaine section. La propagation d'une telle erreur s'évalue avec l'opérateur d'évolution temporelle du CNOT.

CNOT et bruit asymétrique

Avec des qubits constitués de systèmes à deux niveaux, on peut exécuter un CNOT en faisant évoluer les deux qubits sous l'effet d'un hamiltonien proportionnel au CNOT

$$\hat{H}_{\text{CNOT}} = V \cdot \text{CNOT} = \frac{V}{2} \left[\left(\hat{I}_A + \hat{Z}_A \right) \hat{I}_B + \left(\hat{I}_A - \hat{Z}_A \right) \hat{X}_B \right], \quad (1.72)$$

où les indices A et B indiquent les qubits de contrôle et cible respectivement et V est une quantité d'unité de fréquence ($\hbar = 1$). Cet hamiltonien n'implique qu'une interaction du type $\hat{Z}\hat{X}$ entre les qubits A et B en plus des termes sans interaction $\hat{I}\hat{I}$, $\hat{Z}\hat{I}$ et $\hat{I}\hat{X}$, de poids 0 et 1. Le terme en \hat{I}_B s'annule lorsque le qubit A est dans l'état $|1\rangle$ tandis que le terme en \hat{X}_B s'annule pour $|0\rangle$. En effet,

$$\left(\hat{I}_A + \hat{Z}_A \right) |1\rangle = [1 + (-1)] |1\rangle = 0 \text{ et} \quad (1.73)$$

$$\left(\hat{I}_A - \hat{Z}_A \right) |0\rangle = [1 - (+1)] |0\rangle = 0. \quad (1.74)$$

Ainsi, \hat{I}_B ou \hat{X}_B est sélectionné en fonction de l'état du qubit de contrôle. L'opérateur d'évolution correspondant est

$$\hat{U}_{\text{CNOT}}(t) = e^{-i\hat{H}_{\text{CNOT}}t} = \cos(Vt)\hat{I}_A\hat{I}_B - i\sin(Vt)\text{CNOT}, \quad (1.75)$$

où nous avons utilisé $(\text{CNOT})^2 = \hat{I}_A\hat{I}_B$. Il s'en suit qu'au temps $T = \pi/2V$, un CNOT agit sur les qubits $\hat{U}_{\text{CNOT}}(T) = -i\text{CNOT}$, où la phase globale $-i$ peut être ignorée.

Imaginons maintenant qu'une erreur $\hat{X}\hat{I}$ se produit à un temps τ de sorte que $0 \leq$

$\tau \leq T$. L'opération imparfaite $\hat{U}_{\hat{E}\text{CNOT}}(T, \tau)$ prend alors la forme

$$\begin{aligned} \hat{U}_{\hat{E}\text{CNOT}}(T, \tau) &= \hat{U}_{\text{CNOT}}(T - \tau)(\hat{X}_A \hat{I}_B) \hat{U}_{\text{CNOT}}(\tau) \\ &= (\hat{X}_A \hat{I}_B) \exp \left[-iV(T - \tau) \hat{Z}_A (\hat{X}_B - \hat{I}_B) \right] \hat{U}_{\text{CNOT}}(T) \\ &= \hat{E}(\tau)(-i\text{CNOT}). \end{aligned} \tag{1.76}$$

où $\hat{E}(\tau) = (\hat{X}_A \hat{I}_B) \exp \left[-iV(T - \tau) \hat{Z}_A (\hat{X}_B - \hat{I}_B) \right]$ est obtenu à partir de la propriété d'anticommution des opérateurs de Pauli. L'expression (1.76) indique qu'une inversion de bit sur le qubit de contrôle pendant l'exécution de $\hat{U}_{\text{CNOT}}(t)$ est équivalent à exécuter le CNOT parfaitement suivi de l'erreur $\hat{E}(\tau)$. Cette erreur contient l'opération \hat{Z} , c'est-à-dire qu'en présence d'un bruit asymétrique en \hat{X} , $\hat{U}_{\text{CNOT}}(t)$ ne préserve pas l'asymétrie entre les erreurs \hat{X} et \hat{Z} en introduisant l'erreur $\hat{E}(\tau)$ par propagation. Une démarche similaire nous permet aussi de conclure que \hat{U}_{CNOT} ne préserve pas l'asymétrie d'un bruit asymétrique en \hat{Z} .

Nous pouvons ainsi comprendre que certaines opérations telles que la transformée de Hadamard \hat{H} et le CNOT ne peuvent pas être utilisées sur des qubits physiques présentant un bruit asymétrique sans perdre la propriété d'asymétrie. Dans ce contexte, les références [3, 4] étudient un protocole tolérant aux fautes pour le bruit asymétrique en évitant l'utilisation de la transformée de Hadamard \hat{H} et du CNOT au niveau physique. On constate que sans cette dernière opération, le gadget implémentant le CNOT logique devient fort complexe et demande un grand nombre de qubits auxiliaires ainsi que d'opération à deux qubits. Ce gadget, présenté à la figure 1.11, devient donc un élément limitant la performance de cette méthode puisque chaque composante ajoute leurs propres erreurs au système. De plus, le protocole proposé par la référence [5], qui présente une augmentation considérable du taux d'erreurs seuil, requiert l'utilisation de CNOTs physiques qui préservent l'asymétrie. Le CNOT typique présenté ici ne permet donc pas d'obtenir les gains de performances de ce protocole.

Rappelons toutefois que, en principe, le CNOT peut préserver le bruit asymétrique puisque les équations (1.69) et (1.70), illustrées aux figures 1.9 (a) et (b), montre que le CNOT ne transforme pas l'opérateur \hat{X} en \hat{Z} et inversement, contrairement au \hat{H} . Il est donc essentiel de trouver une implémentation alternative au CNOT qui préserve le bruit asymétrique.

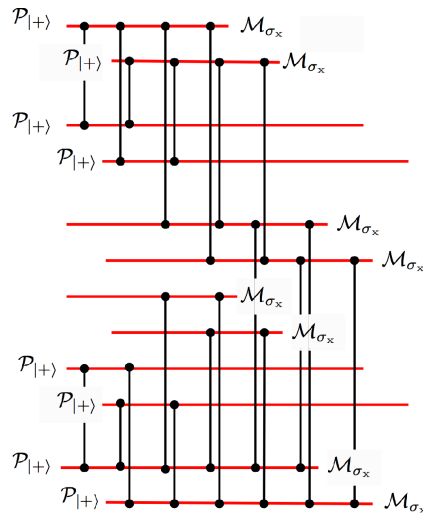


FIGURE 1.11 Figure de la référence [3], décrivant le circuit quantique implémentant un CNOT au niveau logique. Il est composé de préparations $\mathcal{P}_{|+\rangle}$ de l'état $|+\rangle$, de mesures \mathcal{M}_{σ_x} dans la base de \hat{X} , ainsi que d'opérations à deux qubits qu'il n'est pas utile de définir ici. Ce circuit contient une énorme quantité de ressources en termes d'opérations, de préparations d'états, de mesures et de qubits auxiliaires. Ce circuit comporte seulement quatre qubits physiques encodant l'information et qu'un total de douze qubits physiques sont utilisés.

1.10.2 Résumé des points importants et motivation des états chats du résonateur supraconducteur

Dans le prochain chapitre, nous discutons des états chats des résonateurs supraconducteurs. Comme nous l'avons relevé à plusieurs reprises, nous nous intéressons à ce système puisqu'il possède les propriétés du bruit asymétrique, ce qui promet des avantages majeurs en corrections d'erreurs quantiques et en tolérance aux fautes [3–6]. Des études sur ces états [7, 9, 10] ont développé plusieurs opérations physiques, dont celles nécessaires aux protocoles tolérants aux fautes proposés par les références [3, 4, 6]. De plus, dans le cadre de l'étude présentée dans ce mémoire, nous avons développé une implémentation physique du CNOT qui préserve le bruit asymétrique du système, ce qui promet une amélioration considérable du protocole de [3, 4] et est essentiel pour la proposition de [5] ayant un taux seuil très élevé. Dans les prochains chapitres, nous voyons que les propriétés avantageuses des résonateurs supraconducteurs proviennent de l'utilisation stratégique de leur vaste espace d'Hilbert, un concept fondamental en correction d'erreurs quantiques. Nous croyons donc que ce système possède des

avantages majeurs pour la construction de futurs processeurs quantiques.

Chapitre 2

Présentation du système physique

Dans ce chapitre, nous introduisons le système physique étudié dans ce mémoire, les états chats du résonateur supraconducteur micro-ondes. Ces états sont étudiés ici pour l'encodage d'un qubit. Ils font partie d'une famille d'états appelés codes bosoniques qui ont été étudiés dans les dernières années en raison de leur intérêt en correction d'erreurs quantiques [10, 11, 25–30]. Nous discutons des protocoles de stabilisations des états chats [7, 10]. Ensuite, nous décrivons le modèle de bruit présent dans les résonateurs. Finalement, nous présentons des résultats obtenus dans le cadre du projet de ce mémoire. Ces travaux permettent de décrire l'effet du bruit sur les états chats et les erreurs qui sont induites sur le qubit de chats et l'information encodée. Nous montrons que le modèle d'erreurs est asymétrique.

2.1 Résonateur supraconducteur micro-ondes

Dans cette section nous étudions le résonateur supraconducteur micro-ondes, un élément au coeur de l'électrodynamique quantique en circuit (cQED) [8]. Cette architecture reproduit la physique propre à l'optique quantique et à l'électrodynamique quantique en cavité (CQED) [31] dans des circuits électriques supraconducteurs. En CQED, on étudie typiquement l'interaction lumière-matière entre un atome et le champ électromagnétique d'une cavité optique. En cQED, la cavité est remplacée par un résonateur micro-ondes [8].

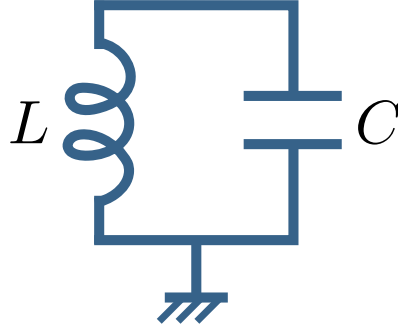


FIGURE 2.1 Schéma du circuit LC modélisant un résonateur supraconducteur. Il contient un inducteur d'inductance L en parallèle avec un condensateur de capacité C .

Un mode résonant d'un résonateur se modélise par un simple circuit LC , illustré à la figure 2.1, où les champs magnétique et électrique proviennent respectivement de l'inducteur L et du condensateur C . L'énergie du circuit LC s'écrit

$$\hat{H} = \frac{\hat{Q}^2}{2C} + \frac{\hat{\Phi}^2}{2L}, \quad (2.1)$$

où les deux termes correspondent à l'énergie du condensateur de charge \hat{Q} et du flux $\hat{\Phi}$ de l'inductance. Il est utile pour les prochaines sections de définir $\hat{Q}(t)$ et $\hat{\Phi}(t)$ en fonction du temps de manière plus rigoureuse à partir de la tension $\hat{V}(t)$ le long du circuit, entre les bornes de l'inducteur et du condensateur,

$$\hat{\Phi}(t) = \int_{-\infty}^t d\tau \hat{V}(\tau), \quad (2.2)$$

$$\hat{Q}(t) = C\hat{V}(t) = C\dot{\hat{\Phi}}(t). \quad (2.3)$$

Les équations de l'énergie (2.1) et de la charge (2.3) indiquent que, par analogie, \hat{Q} correspond à l'impulsion d'un objet, de masse C et de position $\hat{\Phi}$, fixé au bout d'un ressort de constante de rappel $1/L$. Nous avons donc un système résonant à la fréquence $\omega = 1/\sqrt{LC}$ et l'énergie peut s'écrire comme

$$\hat{H} = \frac{\hat{Q}^2}{2C} + \frac{1}{2}C\omega^2\hat{\Phi}^2. \quad (2.4)$$

Définissons les opérateurs sans unités de position \hat{X} et d'impulsion \hat{P} généralisées,

aussi appelés les *quadratures* du champ électromagnétique du résonateur,

$$\hat{X} = \sqrt{\frac{C\omega}{2}} \hat{\Phi}, \quad (2.5)$$

$$\hat{P} = \sqrt{\frac{1}{2C\omega}} \hat{Q}, \quad (2.6)$$

avec la relation de commutation

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i/2. \quad (2.7)$$

L'hamiltonien prend maintenant la forme

$$\hat{H} = \omega(\hat{X}^2 + \hat{P}^2). \quad (2.8)$$

Nous introduisons les opérateurs bosoniques d'annihilation et de création

$$\hat{a} = \hat{X} + i\hat{P} \text{ et} \quad (2.9)$$

$$\hat{a}^\dagger = \hat{X} - i\hat{P} \quad (2.10)$$

respectivement, avec

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1. \quad (2.11)$$

À partir de l'équation (2.8), nous obtenons directement l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique \hat{H}_{OH} de fréquence $\omega = 1/\sqrt{LC}$

$$\hat{H} = \hat{H}_{\text{OH}} \equiv \omega \hat{a}^\dagger \hat{a}, \quad (2.12)$$

où nous omettons un terme constant d'énergie.

2.2 États du résonateur

Les états propres de \hat{H}_{OH} sont les états propres de l'opérateur nombre $\hat{a}^\dagger \hat{a}$, les états de Fock $|n\rangle$ où $\hat{a}^\dagger \hat{a} |n\rangle = n |n\rangle$ et n correspond aux nombres de photons dans le système. Les niveaux d'énergie de \hat{H}_{OH} sont donc également espacés. Un signal résonant avec

la transition entre les deux premiers niveaux est donc résonant avec chaque transition d'un photon. Ceci permet de peupler tous les états propres de l'oscillateur à partir du vide $|0\rangle$.

Un état général $\hat{\rho}$ d'un oscillateur harmonique peut donc s'écrire sous la forme

$$\hat{\rho} = \sum_{m,n} c_{m,n} |m\rangle\langle n|, \quad (2.13)$$

où les coefficients $c_{m,n}$ doivent respecter les propriétés des matrices densité.

2.3 Espace des phases

Il est intuitif de visualiser les états quantiques du résonateur dans l'*espace des phases*, le plan x - p où x et p représentent les valeurs propres des opérateurs \hat{X} et \hat{P} respectivement. Remarquons que, l'espace des phases correspond de manière équivalente au plan complexe des valeurs propres α de $\hat{a} = \hat{X} + i\hat{P}$, puisque $\alpha = x + ip$.

2.3.1 Fonction de Wigner

Dans ce mémoire, nous représentons les états quantiques dans l'espace des phases par leur *fonction de Wigner* [32]

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ipx'} \left\langle x - \frac{x'}{2} \left| \hat{\rho} \right| x + \frac{x'}{2} \right\rangle dx', \quad (2.14)$$

où $|x\rangle$ est un état propre de la position \hat{X} de valeur propre x , et p représente une valeur propre de la quantité de mouvement \hat{P} . Deux exemples de fonctions de Wigner sont présentées à la figure 2.2 que nous décrivons à la section 2.3.2. $W(x, p)$ est une distribution de quasi-probabilité réelle pour une matrice hermitienne $\hat{\rho}$. Elle peut être utilisée pour relier un état quantique $\hat{\rho}$ aux résultats de mesures d'observables. En fait, on peut obtenir la distribution de probabilité pour la position généralisée $\mathbb{P}_{\hat{X}}(x)$

et pour l'impulsion généralisée $\mathbb{P}_{\hat{P}}(p)$ en prenant la *distribution marginale* de $W(x, p)$

$$\mathbb{P}_{\hat{X}}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, p) dp, \quad (2.15)$$

$$\mathbb{P}_{\hat{P}}(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} W(x, p) dx. \quad (2.16)$$

Les quadratures peuvent être mesurées par une détection dite *homodyne* [33].

2.3.2 États de Fock

Les figures 2.2 (a) et (b) montrent les fonctions de Wigner des états de Fock $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Remarquons d'abord que ces fonctions de Wigner sont centrées à l'origine. L'état du vide, $|0\rangle$, est représenté par une distribution gaussienne de variances

$$\langle \Delta X^2 \rangle = \langle \Delta P^2 \rangle = \frac{1}{2}. \quad (2.17)$$

L'incertitude est également répartie entre \hat{X} et \hat{P} et cet état sature le principe d'incertitude de Heisenberg $\langle \Delta X^2 \rangle \langle \Delta P^2 \rangle \geq \frac{1}{4}$. Dans le cas de l'état $|1\rangle$, l'incertitude est supérieure et la distribution est négative en son centre, une signature de l'aspect quantique d'un état. Nous pouvons nous laisser convaincre que les marginales de ces deux fonctions de Wigner donnent les normes au carré des deux premiers *polynômes d'Hermite*, les états propres de \hat{H}_{OH} .

Nous voyons que les états de Fock sont invariants sous toute rotation dans l'espace des phases. En fait, l'opérateur d'évolution $\hat{U}_{\text{OH}}(t)$ de l'hamiltonien \hat{H}_{OH} de l'oscillateur harmonique,

$$\hat{U}_{\text{OH}}(t) = e^{-i\hat{H}_{\text{OH}}t} = e^{-i\hat{a}^\dagger \hat{a} \omega t}, \quad (2.18)$$

correspond au générateur de rotation dans l'espace des phases

$$e^{i\hat{a}^\dagger \hat{a} \theta} \hat{X} e^{-i\hat{a}^\dagger \hat{a} \theta} = (\hat{X} \cos \theta + \hat{P} \sin \theta), \quad (2.19)$$

$$e^{i\hat{a}^\dagger \hat{a} \theta} \hat{P} e^{-i\hat{a}^\dagger \hat{a} \theta} = (-\hat{X} \sin \theta + \hat{P} \cos \theta). \quad (2.20)$$

C'est-à-dire que, sous, \hat{H}_{OH} , l'état de l'oscillateur harmonique est en rotation à la

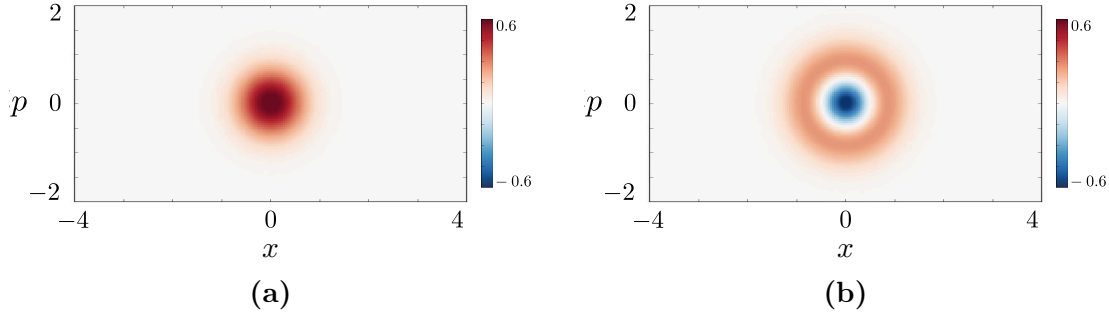


FIGURE 2.2 Fonctions de Wigner des états de Fock (a) du vide $|0\rangle$ et (b) d'un photon $|1\rangle$. (a) Le vide correspond à une distribution gaussienne centrée à l'origine. (b) L'état d'un photon possède aussi une symétrie de rotation, mais la valeur de sa fonction de Wigner est négative et minimale à l'origine et devient positive à partir d'une certaine distance par rapport à l'origine.

fréquence ω en sens horaire dans l'espace des phases comme attendu classiquement.

Référentiel tournant

Plutôt que d'utiliser le *référentiel du laboratoire*, il est pratique de changer de référentiel afin de simplifier l'étude de l'évolution d'un état quantique. Il serait plus utile d'étudier la dynamique du système par rapport au mouvement de rotation en se plaçant dans un *référentiel tournant* à la fréquence ω dans l'espace des phases.

Pour ce faire, on applique une transformation unitaire \hat{U} aux états $\hat{\rho} \rightarrow \hat{U}\hat{\rho}\hat{U}^\dagger$. En général, l'hamiltonien se transforme de la façon suivante sous cette transformation dépendante du temps :

$$\hat{H}' = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger - i\dot{\hat{U}}\hat{U}^\dagger. \quad (2.21)$$

On choisit $\hat{U} = e^{i\hat{a}^\dagger \hat{a} \omega t}$ de sorte que l'hamiltonien devienne $\hat{H}'_{\text{OH}} = 0$. Ainsi, les coordonnées de ce nouveau référentiel sont définies par rapport aux nouvelles quadratures obtenues des équations (2.19) et (2.20) avec $\theta = \omega t$. Le référentiel tournant sera très pratique, dans les prochaines sections, puisque nous ajoutons des termes à l'hamiltonien. L'étude de leur action sur un état quantique sera simplifiée en ignorant la rotation de fréquence ω .

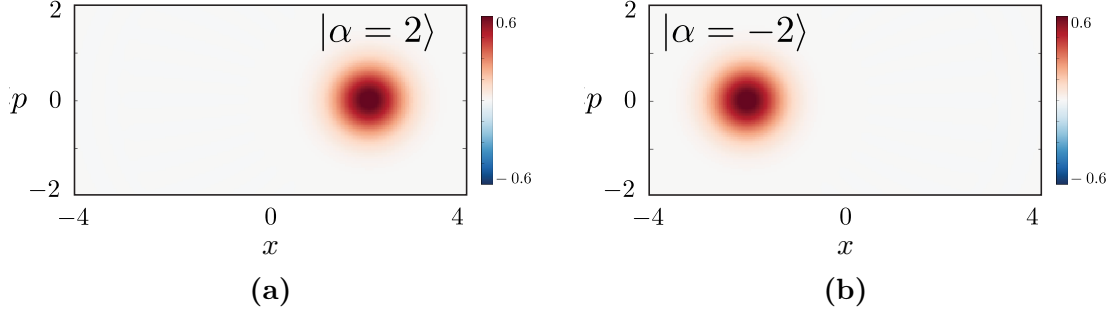


FIGURE 2.3 Fonctions de Wigner des états cohérents $|\alpha = \pm 2\rangle$. Les états cohérents correspondent à l'état du vide déplacé d'une valeur donnée par la phase et l'amplitude de α .

2.3.3 État cohérent

Les *états cohérents* $|\alpha\rangle$ sont grandement utilisés en optique quantique [34]. Comme présenté par la figure 2.3, ils sont définis comme étant l'état du vide déplacé dans l'espace des phases. Ces états prennent la forme

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (2.22)$$

où $\hat{D}(\alpha)$ est l'opérateur de déplacement

$$\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}}, \quad (2.23)$$

avec $\alpha = |\alpha|e^{i\phi}$, le nombre complexe représentant la grandeur, $|\alpha|$, et la direction, ϕ , du déplacement dans le plan complexe de $x + ip$. À la section 2.5.1, nous expliquons comment générer physiquement cet opérateur pour la création et la stabilisation d'un état cohérent.

L'opération de déplacement possède la propriété

$$\hat{D}(\alpha + \beta) = e^{(\alpha^* \beta - \alpha \beta^*)/2} \hat{D}(\alpha) \hat{D}(\beta) = e^{(\beta^* \alpha - \beta \alpha^*)/2} \hat{D}(\beta) \hat{D}(\alpha) \quad (2.24)$$

et il est donc unitaire

$$\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{D}(-\alpha), \quad (2.25)$$

$$\hat{D}^\dagger(\alpha)\hat{D}(\alpha) = \hat{D}(\alpha)\hat{D}^\dagger(\alpha) = \hat{I}. \quad (2.26)$$

L'état cohérent $|\alpha\rangle$ possède la propriété très importante d'être état propre de l'opérateur d'annihilation avec α comme valeur propre

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle. \quad (2.27)$$

De plus, l'opérateur de déplacement et l'opérateur d'annihilation respectent la relation

$$\hat{a}\hat{D}(\alpha) = \hat{D}(\alpha)(\hat{a} + \alpha). \quad (2.28)$$

Puisque l'état cohérent constitue un déplacement du vide, ses distributions en quadratures \hat{X} et \hat{P} possèdent les mêmes variances que celles du vide qui saturent le principe d'incertitude de Heisenberg. Pour cette raison, ces états d'incertitudes minimales sont dits *quasi classiques*. Notons finalement que la moyenne du nombre de photons d'un état cohérent est $\langle\alpha|\hat{a}^\dagger\hat{a}|\alpha\rangle = |\alpha|^2$.

Dans la section 2.5.1, nous discutons de la création d'un état cohérent dans un résonateur, une tâche simple par la nature classique de l'état.

2.3.4 État chat

Par analogie avec le fameux chat de Schrödinger, un *état chat* en optique quantique est une superposition quantique de deux ou plusieurs états classiques, ou quasi classiques, du champ électromagnétique. Dans ce mémoire, nous étudions les états chats formés par la superposition symétrique ou antisymétrique de deux états cohérents $|\pm\alpha\rangle$ de même amplitude, mais de phases opposées

$$|\mathcal{C}_\alpha^\pm\rangle = \mathcal{N}_\alpha^\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle), \quad (2.29)$$

$$\mathcal{N}_\alpha^\pm = \frac{1}{\sqrt{2(1 \pm e^{-2|\alpha|^2})}}. \quad (2.30)$$

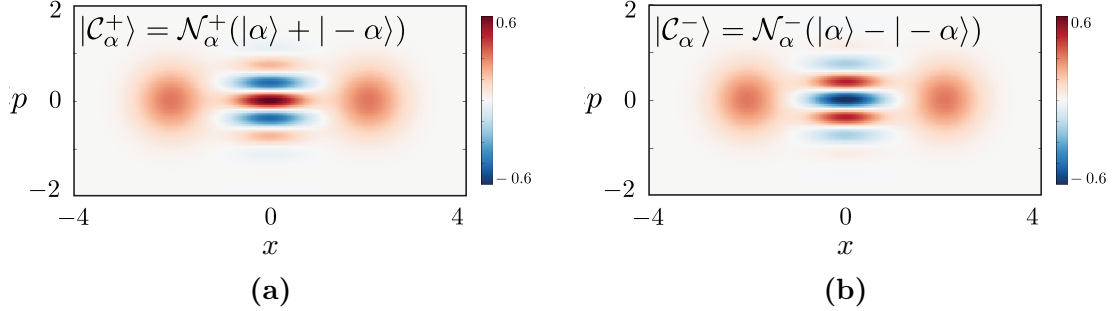


FIGURE 2.4 Fonctions de Wigner des états chats $|\mathcal{C}_\alpha^\pm\rangle$ avec $\alpha = 2$. Les fonctions de Wigner des états chats possèdent les deux états cohérents $|\pm\alpha\rangle$ qui les composent ainsi que des franges d'interférence au centre de l'espace des phases. Nous distinguons les deux fonctions puisque leurs franges ont des signes opposés tels que (a) le chat pair $|\mathcal{C}_\alpha^+\rangle$ possède une frange centrale positive et (b) le chat impair $|\mathcal{C}_\alpha^-\rangle$ a une frange centrale négative.

Remarquons que $\mathcal{N}_\alpha^\pm \approx 1/\sqrt{2}$ dans la limite où α est grand. Cette limite est rapidement valide pour des valeurs de α relativement faibles puisque $e^{-2|\alpha|^2} \sim 10^{-2}$ avec $\alpha = 1.5$ et $e^{-2|\alpha|^2} \sim 10^{-4}$ avec $\alpha = 2$. Cette normalisation particulière est une conséquence du recouvrement exponentiellement faible entre les états cohérents $\langle -\alpha|\alpha\rangle = e^{-2|\alpha|^2}$.

Les figures 2.4 (a) et (b) montrent les fonctions de Wigner des états chats $|\mathcal{C}_\alpha^\pm\rangle$, où nous voyons les deux gaussiennes des états cohérents ainsi qu'une série de franges d'interférence au centre de l'espace des phases. Ces dernières sont la signature de la superposition entre $|\pm\alpha\rangle$. Nous observons que les franges de $|\mathcal{C}_\alpha^+\rangle$ ont leur signe opposé à celles de $|\mathcal{C}_\alpha^-\rangle$ à l'origine de l'espace des phases.

Il est utile de réécrire les états chats dans la base des états de Fock

$$|\mathcal{C}_\alpha^+\rangle = 2\mathcal{N}_\alpha^+ e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{\sqrt{(2n)!}} |2n\rangle \quad (2.31)$$

$$|\mathcal{C}_\alpha^-\rangle = 2\mathcal{N}_\alpha^- e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{2n+1}}{\sqrt{(2n+1)!}} |2n+1\rangle. \quad (2.32)$$

À partir des équations (2.31) et (2.32), nous voyons que $|\mathcal{C}_\alpha^+\rangle$ et $|\mathcal{C}_\alpha^-\rangle$ sont composés d'états de nombre de photons pairs ou impairs, respectivement. Cette propriété a pour conséquence que, dans la limite où $\alpha \rightarrow 0$, nous avons $\mathcal{N}_\alpha^+ \rightarrow 1/2$ et $\mathcal{N}_\alpha^- \rightarrow 1/2|\alpha|$ et

les états chats se réduisent aux états de Fock du vide et d'un seul photon

$$|\mathcal{C}_\alpha^+\rangle \rightarrow |0\rangle, \quad (2.33)$$

$$|\mathcal{C}_\alpha^-\rangle \rightarrow (\arg \alpha) |1\rangle. \quad (2.34)$$

Les états chats ne sont pas états propres de \hat{a} comme le sont les états cohérents. En effet, il résulte des équations (2.27) et (2.29) que

$$\hat{a} |\mathcal{C}_\alpha^\pm\rangle = \alpha \epsilon_\alpha^{\pm 1} |\mathcal{C}_\alpha^\mp\rangle, \quad (2.35)$$

$$\epsilon_\alpha = \frac{\mathcal{N}_\alpha^+}{\mathcal{N}_\alpha^-} = \sqrt{\tanh |\alpha|^2}. \quad (2.36)$$

C'est-à-dire que la perte d'un photon sous l'action de \hat{a} inverse la parité des états chats. Notons que $\epsilon_\alpha \approx 1$ dans la limite des grandes valeurs de α .

L'orthogonalité des états chats, $\langle \mathcal{C}_\alpha^+ | \mathcal{C}_\alpha^- \rangle = 0$, permet de les utiliser pour former la base de calcul d'un qubit telle que

$$|0\rangle \equiv |\mathcal{C}_\alpha^+\rangle, \quad (2.37)$$

$$|1\rangle \equiv |\mathcal{C}_\alpha^-\rangle. \quad (2.38)$$

Notons qu'ici, $|0\rangle$ et $|1\rangle$ correspondent aux états du qubit et non pas aux états de Fock. Cette notation devrait être claire selon le contexte. Dans cette base, les opérateurs de Pauli sont définis comme

$$\hat{X} = |\mathcal{C}_\alpha^-\rangle \langle \mathcal{C}_\alpha^+| + |\mathcal{C}_\alpha^+\rangle \langle \mathcal{C}_\alpha^-|, \quad (2.39)$$

$$\hat{Z} = |\mathcal{C}_\alpha^+\rangle \langle \mathcal{C}_\alpha^+| - |\mathcal{C}_\alpha^-\rangle \langle \mathcal{C}_\alpha^-|, \quad (2.40)$$

$$\hat{Y} = i |\mathcal{C}_\alpha^-\rangle \langle \mathcal{C}_\alpha^+| - i |\mathcal{C}_\alpha^+\rangle \langle \mathcal{C}_\alpha^-|. \quad (2.41)$$

À la section 2.4.2, nous utilisons la propriété de l'équation (2.35) pour montrer que la perte de photons, représentée par l'opérateur d'annihilation \hat{a} , mène à une inversion de bit \hat{X} sur le qubit de chats. Quant à l'inversion de phase \hat{Z} , celle-ci consiste à inverser les états de la base \hat{X} , $|\pm\rangle \leftrightarrow |\mp\rangle$. Ces états correspondent approximativement aux états cohérents $|\pm\rangle = (|0\rangle \pm |1\rangle)/\sqrt{2} \approx |\pm\alpha\rangle$. La distance entre les états cohérents dans l'espace des phases rend l'inversion \hat{Z} très peu probable. En effet, le recouvrement

des états cohérents $\langle -\alpha | \alpha \rangle = e^{-2|\alpha|^2}$ correspond à l'ordre de grandeur de la probabilité d'une telle transition. Ainsi, l'utilisation stratégique du vaste espace d'Hilbert du résonateur permet de diminuer la probabilité de l'erreur \hat{Z} . Dans les prochaines sections, cette faible probabilité se révèle en étudiant en détail le bruit affectant le résonateur.

Lorsque $\alpha = 0$, ce choix de base correspond au cas typique où les niveaux $|0\rangle$ et $|1\rangle$ d'un oscillateur sont utilisés pour encoder un qubit. L'exemple le plus connu de l'utilisation de cette base correspond au *transmon*, un oscillateur anharmonique [35]. L'anharmonicité modifie l'hamiltonien de manière à ce que les niveaux d'énergie ne soient plus également espacés. La fréquence d'excitation du qubit est donc différente de celles des niveaux supérieurs du transmon. Cette propriété donne au transmon un spectre énergétique simulant celui d'un atome, l'objet central en optique quantique pour étudier l'interaction lumière-matière.

Dans le référentiel tournant de l'oscillateur harmonique, les niveaux d'énergie sont dégénérés. Toutefois, pour l'oscillateur anharmonique, seuls les niveaux $|0\rangle$ et $|1\rangle$ sont dégénérés en raison de l'anharmonicité qui déplace les niveaux supérieurs. On a donc la création d'une bande d'énergie interdite, ou *gap*, entre les niveaux du qubit et le reste de l'espace d'Hilbert. Cette particularité est essentielle à la préservation du sous-espace à deux niveaux d'un qubit. Ainsi, un signal résonant avec la première transition du transmon possède un désaccord avec la transition suivante. À la section 2.5.1, nous voyons qu'un signal en présence d'un désaccord n'excite pas la transition lorsque l'amplitude du signal est faible par rapport au désaccord. À la section 2.5.2, nous reviendrons en plus de détails sur l'apparition de cette bande interdite en généralisant avec les états chats, $\alpha \geq 0$. Nous verrons que cette bande interdite s'élargit avec α .

2.4 Dissipation du résonateur micro-ondes

Étudions maintenant l'effet de la dissipation du résonateur micro-ondes sur les états cohérents et les états chats. La source dominante de dissipation dans un résonateur est la perte de photons. Cette perturbation provient de l'inévitable couplage du résonateur avec son environnement pour permettre le contrôle et la mesure du système. Cet échange cause une observation faite par l'environnement qui influence l'état du système de manière non unitaire. Ce phénomène est décrit par une *équation maîtresse*

de Lindblad [36] représentant l'évolution de l'état $\hat{\rho}$ du résonateur en interaction avec l'environnement. Dans le cas où l'environnement serait à température nulle, c'est-à-dire qu'il ne fournit aucun photon thermique au résonateur, on a

$$\dot{\hat{\rho}} = -i[\hat{H}, \hat{\rho}] + \kappa_1 \mathcal{D}[\hat{a}]\hat{\rho}, \quad (2.42)$$

avec

$$\mathcal{D}[\hat{a}]\hat{\rho} = \hat{a}\hat{\rho}\hat{a}^\dagger - \frac{1}{2}(\hat{a}^\dagger\hat{a}\hat{\rho} + \hat{\rho}\hat{a}^\dagger\hat{a}), \quad (2.43)$$

et où \hat{H} est l'hamiltonien du système, κ_1 est le taux de perte de photons et $\mathcal{D}[\hat{a}]$ est le superopérateur de dissipation, ou *dissipateur*. Le premier terme de l'équation (2.42) correspond à l'évolution donnée par l'équation de Schrödinger tandis que le deuxième terme tient compte de l'effet incohérent de la perte de photons vers l'environnement. Le premier terme du dissipateur de l'équation (2.43) représente l'action de l'opérateur d'annihilation de photons, $\hat{a}|n\rangle\langle m|\hat{a}^\dagger \sim |n-1\rangle\langle m-1|$. Il correspond au processus stochastique de *sauts quantiques* survenant lorsqu'un photon est capté par l'environnement. En contrepartie, le second terme de l'équation (2.43), $-(\hat{a}^\dagger\hat{a}|n\rangle\langle m| + |n\rangle\langle m|\hat{a}^\dagger\hat{a})/2 = -(n|n\rangle\langle m| + m|n\rangle\langle m|)/2$, pénalise les éléments de matrice proportionnellement à leur nombre de photons. Contrairement aux sauts quantiques, ce terme représente un processus se produisant en tout temps, spécifiquement lorsqu'aucun saut quantique n'est enregistré par l'environnement. En absence de saut, un état faible en photon devient de plus en plus probable par rapport à un état ayant un grand nombre de photons. Ceci est relié au phénomène d'*extinction* du champ électromagnétique du résonateur qui est discuté à la section 2.4.1.

Les opérateurs de Kraus de la solution de (2.42) ont la forme [11]

$$\hat{K}_l = \left(\frac{\gamma}{1-\gamma} \right)^{l/2} \frac{\hat{a}^l}{\sqrt{l!}} (1-\gamma)^{\hat{a}^\dagger\hat{a}/2}, \quad (2.44)$$

où $\gamma = 1 - e^{-\kappa_1 t}$. On peut obtenir une intuition sur cette représentation en étudiant le cas limite $\kappa_1 t \ll 1$, où seuls \hat{K}_0 et \hat{K}_1 suffisent

$$\hat{\rho}(t) = \left(\hat{I} - \frac{\kappa_1 t}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) \hat{\rho}_0 \left(\hat{I} - \frac{\kappa_1 t}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a} \right) + \kappa_1 t \hat{a} \hat{\rho}_0 \hat{a}^\dagger, \quad (2.45)$$

avec $\hat{\rho}_0 = \hat{\rho}(0)$. Le premier terme donne la redistribution des éléments de matrice suivant l'extinction du champ et le deuxième terme de (2.45) représente un saut quantique avec une probabilité proportionnelle à $\kappa_1 t$.

2.4.1 Effet du bruit sur les états cohérents

Étudions l'effet de la perte de photons sur un état cohérent $|\alpha_0\rangle$ dans le référentiel tournant de l'oscillateur harmonique. Tout d'abord, constatons qu'un état cohérent est invariant lors d'un saut quantique puisqu'il est un état propre de l'opérateur d'annihilation, $\hat{a}|\alpha\rangle\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = |\alpha|^2|\alpha\rangle\langle\alpha|$. Toutefois, le terme d'extinction du dissipateur redistribue le poids des éléments de matrice. Combinant ces deux contributions, l'évolution de l'état cohérent suit

$$|\alpha(t)\rangle = |\alpha_0 e^{-\kappa_1 t/2}\rangle, \quad (2.46)$$

où nous avons toujours un état cohérent, mais l'amplitude moyenne $|\alpha(t)|$ du champ électromagnétique s'atténue exponentiellement vers le vide, $\alpha(t \rightarrow \infty) = 0$.

La perte de photons induit donc un déplacement de l'état cohérent dans l'espace des phases vers l'origine. De plus, la rapidité du déplacement s'obtient à partir de

$$\dot{\alpha}(t) = -\frac{\kappa_1}{2}\alpha(t). \quad (2.47)$$

La vitesse de l'extinction est donc proportionnelle à l'amplitude instantanée de α . Ce comportement s'explique avec le dissipateur $\mathcal{D}[\hat{a}]$ de l'équation maîtresse (2.42), (2.43) qui pénalise plus fortement les états ayant un plus grand nombre de photons. C'est-à-dire que plus le nombre de photons est grand, plus la probabilité d'en perdre s'accroît. Ceci entraîne une plus grande redistribution et une extinction rapide des états ayant beaucoup de photons.

2.4.2 Effet du bruit sur les états chats

Les états chats héritent de l'atténuation exponentielle des états cohérents suivant la perte de photons. De plus, comme nous l'avons constaté à l'équation (2.35), les

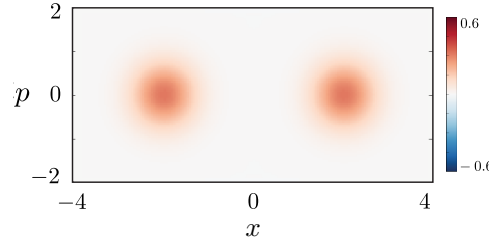


FIGURE 2.5 Fonction de Wigner de l'état chat mixte $|\mathcal{C}_\alpha^+\rangle\langle\mathcal{C}_\alpha^+| + |\mathcal{C}_\alpha^-\rangle\langle\mathcal{C}_\alpha^-| \approx |\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|$. Les deux états cohérents $|\pm\alpha\rangle$ sont toujours présents dans ce mélange, mais les franges d'interférence ne paraissent plus.

états chats effectuent un saut quantique lors de la fuite d'un photon inversant la parité de l'état, $|\mathcal{C}_\alpha^+\rangle \leftrightarrow |\mathcal{C}_\alpha^-\rangle$. Le phénomène des sauts quantiques est un processus aléatoire qui est décrit par l'apparition progressive d'un mélange statistique entre $|\mathcal{C}_\alpha^+\rangle$ et $|\mathcal{C}_\alpha^-\rangle$, au fur et à mesure que $|\alpha|$ décroît. Ce mélange statistique se traduit dans l'espace des phases en une disparition des franges d'interférence de la fonction de Wigner. La figure 2.5 montre l'état mixte $|\mathcal{C}_\alpha^+\rangle\langle\mathcal{C}_\alpha^+| + |\mathcal{C}_\alpha^-\rangle\langle\mathcal{C}_\alpha^-| \approx |\alpha\rangle\langle\alpha| + |-\alpha\rangle\langle-\alpha|$, où les franges d'interférence sont absentes en raison de la perte de la cohérence de la superposition quantique. Dans cette figure, nous supposons une stabilisation des états dans l'espace des phases pour ignorer l'extinction du champ et visualiser la perte des franges. À la section 2.5.2, nous présentons les méthodes de stabilisation des états chats.

2.5 Stabilisation d'états dans le résonateur

Dans la section 2.4, nous avons vu comment l'environnement perturbe le résonateur et détruit les précieux états que nous souhaitons préserver pour le traitement de l'information quantique. Dans la présente section, nous discutons de techniques de stabilisation d'états du résonateur pour leur fournir une certaine protection contre certains types erreurs.

2.5.1 Stabilisation d'un état cohérent

Dissipation et pompe

Avant d'étudier la stabilisation complète du sous-espace à deux niveaux des états chats, concentrons-nous d'abord sur la stabilisation typique d'un seul état cohérent. Pour ce faire, il est nécessaire d'injecter de l'énergie dans le système pour prévenir l'extinction du champ. C'est-à-dire que l'on doit appliquer une opération qui contrebalance le déplacement de l'état vers le vide. L'opération idéale est donc l'opérateur de déplacement $\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$ introduit à la section 2.3.3. Pour induire cette opération, l'hamiltonien doit prendre la forme de la *pompe à photon unique* dans le référentiel tournant

$$\hat{H}_1 = i(\mathcal{E}_1\hat{a}^\dagger - \mathcal{E}_1^*\hat{a}), \quad (2.48)$$

où \mathcal{E}_1 est un nombre complexe représentant l'amplitude et la phase de la pompe. L'opérateur d'évolution $\hat{U}(t)$ prend ainsi la forme d'un déplacement

$$\hat{U}(t) = e^{(\mathcal{E}_1\hat{a}^\dagger - \mathcal{E}_1^*\hat{a})t} = \hat{D}(\mathcal{E}_1t), \quad (2.49)$$

où la phase de \mathcal{E}_1 définit la direction du déplacement dans l'espace des phases.

L'hamiltonien \hat{H}_1 de l'équation (2.48) dans le référentiel tournant s'obtient à partir de

$$\hat{H}_{1,\text{labo}} = \omega_r\hat{a}^\dagger\hat{a} + i(\mathcal{E}_1e^{-i\omega_p t}\hat{a}^\dagger - \mathcal{E}_1^*e^{i\omega_p t}\hat{a}), \quad (2.50)$$

où la fréquence du résonateur ω_r et la fréquence de la pompe ω_p doivent être en résonance $\omega_r = \omega_p = \omega$, dans le référentiel du laboratoire, à l'aide de la transformation de référentiel donnée à l'équation (2.21).

Un tel hamiltonien s'obtient en couplant le résonateur à une source de tension par l'intermédiaire d'une ligne de transmission et d'un condensateur tel que présenté dans la figure 2.6. Le condensateur couple la tension du résonateur à celle de la source permettant l'excitation du champ du résonateur. Ainsi, un signal classique provenant de la source, comme un laser en optique quantique, à la fréquence de résonance ω

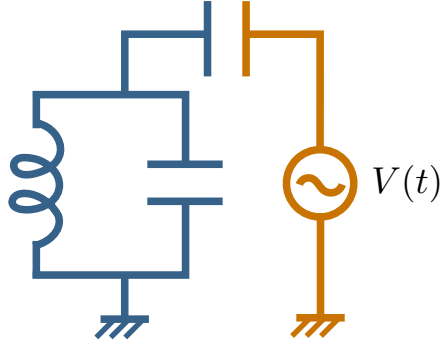


FIGURE 2.6 Une source de tension est couplée au circuit LC par l’intermédiaire d’un condensateur. La source de tension peut représenter, par exemple, une ligne de transmission transportant un pulse pouvant pomper de l’énergie dans le résonateur.

du résonateur produit l’hamiltonien de l’équation (2.50) sous une approximation dite *séculaire* [35], où nous ignorons les termes oscillants à la fréquence 2ω . Le facteur \mathcal{E}_1 est ainsi proportionnel à l’amplitude et la phase du signal. Intuitivement, on comprend l’équation (2.48) comme un terme résonant d’échange de photons entre le résonateur et la source du signal.

Pour stabiliser l’état $\hat{\rho} = |\alpha_o\rangle\langle\alpha_o|$ en utilisant $\hat{H} = \hat{H}_1$ dans l’équation (2.42), on obtient la condition $\mathcal{E}_1 = \kappa_1\alpha_o/2$, qui résulte d’imposer $\dot{\hat{\rho}} = 0$ pour obtenir un état cohérent stationnaire. La pompe doit être proportionnelle à l’amplitude et la phase α_o de l’état cohérent stabilisé en plus d’être proportionnelle au taux κ_1 de perte de photons. Nous nous attendons à une telle relation puisque nous avons vu à l’équation (2.47) que la rapidité $\dot{\alpha}(t)$ de l’extinction du champ grandit avec α_o et κ_1 .

La stabilisation d’un état cohérent est peu complexe puisque cet état est quasi classique. Mathématiquement, la simplicité de la stabilisation est basée sur le fait que l’on stabilise un état propre de \hat{a} déterminé par la valeur propre $\alpha_o = 2\mathcal{E}_1/\kappa_1$. Cette constatation est utile pour la compréhension de la stabilisation des états chats décrite à la section 2.5.2.

Désaccord et pompe

Une approche différente pour stabiliser les états cohérents est indépendante de la dissipation. Cette méthode nécessite un *désaccord* entre la fréquence du résonateur ω

et du signal de la pompe ω_p . Le désaccord remplace la dissipation pour contrebalancer la pompe. Dans le référentiel tournant à la fréquence de la pompe ω_p , l'hamiltonien s'écrit

$$\hat{H}_{1,\delta} = \delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + \hat{H}_1 \quad (2.51)$$

$$= \delta \hat{a}^\dagger \hat{a} + i(\mathcal{E}_1 \hat{a}^\dagger - \mathcal{E}_1^* \hat{a}) \quad (2.52)$$

où le désaccord $\delta = \omega - \omega_p$ correspond à la différence de fréquence entre le résonateur et le signal. Ainsi, un coût en énergie proportionnel au nombre de photons provenant de $\delta \hat{a}^\dagger \hat{a}$ contrebalance la pompe. La factorisation de cet hamiltonien

$$\hat{H}_{1,\delta} = \delta \left(\hat{a}^\dagger - i \frac{\mathcal{E}_1^*}{\delta} \right) \left(\hat{a} + i \frac{\mathcal{E}_1}{\delta} \right) - \frac{|\mathcal{E}_1|^2}{\delta}, \quad (2.53)$$

permet de déduire son état fondamental. Sachant que $|\alpha_o\rangle$ est un état propre de \hat{a} avec valeur propre α_o , nous voyons qu'avec $\mathcal{E}_1 = i\delta\alpha_o$, nous avons $(\hat{a} + i\mathcal{E}_1/\delta)|\alpha_o\rangle = 0$. Nous obtenons

$$\hat{H}_{1,\delta} |\alpha_o\rangle = -\frac{|\mathcal{E}_1|^2}{\delta} |\alpha_o\rangle, \quad (2.54)$$

et donc que $|\alpha_o\rangle$ est un état propre de $\hat{H}_{1,\delta}$.

Afin de développer l'intuition sur cette stabilisation, considérons un nouveau référentiel défini par l'opération de déplacement $\hat{D}(-\alpha_o = i\mathcal{E}_1/\delta)$ et où l'hamiltonien prend la forme

$$\hat{D}(-\alpha_o) \hat{H}_{1,\delta} \hat{D}^\dagger(-\alpha_o) = \delta \hat{a}^\dagger \hat{a} - \frac{|\mathcal{E}_1|^2}{\delta}, \quad (2.55)$$

soit l'hamiltonien de l'oscillateur harmonique avec une constante d'énergie $-|\mathcal{E}_1|^2/\delta$ sans importance. $\hat{H}_{1,\delta}$ correspond donc à l'oscillateur harmonique déplacé de α_o dans l'espace des phases. Il n'est pas surprenant que son état fondamental soit l'état cohérent $|\alpha_o\rangle = \hat{D}(\alpha_o) |0\rangle$.

Finalement, en présence de perte de photons, cette stabilisation est légèrement

perturbée et la valeur de l'état cohérent stabilisé s'écrit

$$\alpha_o = \frac{-i\mathcal{E}_1}{\delta - i\kappa_1/2} \quad (2.56)$$

En fait, le coût en énergie associé au désaccord δ joue un rôle similaire au taux de perte de photons κ_1 dans la stabilisation, puisqu'ils apparaissent tous les deux au dénominateur dans l'équation (2.56). Dans la limite où le désaccord serait beaucoup plus grand que l'amplitude de la pompe, $\delta \gg |\mathcal{E}_1|$, nous avons $\alpha_o \rightarrow 0$. L'état cohérent stabilisé correspond au vide. En pratique, la pompe ne parvient pas à exciter le résonateur puisqu'elle est hors résonance et trop faible. À la section 2.5.3 sur la non-linéarité Kerr, nous revenons sur ce concept très important pour l'isolation et la manipulation d'un sous-espace du résonateur pour la création d'un qubit.

2.5.2 Stabilisation des états chats

La stabilisation des états chats consiste à stabiliser simultanément deux états cohérents de phases opposées $|\pm\alpha_o\rangle$. Utilisons donc l'intuition de la section 2.5.1. La stabilisation de $|\alpha_o\rangle$ est basée sur le fait que les états cohérents sont des états propres de \hat{a} et que nous pouvons sélectionner l'une de ses valeurs propres α_o . Remarquons maintenant que $\hat{a}^2 |\pm\alpha_o\rangle = \alpha_o^2 |\pm\alpha_o\rangle$. C'est-à-dire que deux états cohérents de phases opposées possèdent la même valeur propre avec l'opérateur \hat{a}^2 . Remplacer \hat{a} par \hat{a}^2 dans une technique de stabilisation de $|\alpha_o\rangle$ permet aussi de stabiliser $|\alpha_o\rangle$. De plus, \hat{a}^2 préserve la parité du nombre de photons et rappelons que la parité des états chats est bien définie. La notion de photons uniques est donc remplacée par le concept de paires de photons. En effet, considérons l'opérateur nombre $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ et remplaçons $\hat{a} \rightarrow \hat{a}^2$. Nous obtenons l'opérateur $\hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 = (\hat{a}^\dagger \hat{a})(\hat{a}^\dagger \hat{a} - 1)$ qui est proportionnel au nombre de paires de photons. Nous voyons plus bas que cet opérateur est important pour la stabilisation des états chats puisqu'il joue le même rôle que le désaccord $\delta \hat{a}^\dagger \hat{a}$ qui stabilise un état cohérent.

Dans la présente section, nous décrivons les méthodes de stabilisation des états chats d'un point de vue purement théorique. L'implémentation physique suivra aux sections suivantes.

Dissipation et pompe

Nous obtenons la stabilisation des états chats en transformant $\hat{a} \rightarrow \hat{a}^2$ dans la méthode de la section 2.5.1 pour un seul état cohérent. La stabilisation des états chats par la méthode dissipative dans le référentiel tournant prend la forme [9, 10]

$$\dot{\hat{\rho}} = -i[\hat{H}_2, \hat{\rho}] + \kappa_2 \mathcal{D}[\hat{a}^2] \hat{\rho}, \quad (2.57)$$

$$\hat{H}_2 = \mathcal{E}_2 \hat{a}^{\dagger 2} + \mathcal{E}_2^* \hat{a}^2, \quad (2.58)$$

$$\mathcal{D}[\hat{a}^2] \hat{\rho} = \hat{a}^2 \hat{\rho} \hat{a}^{\dagger 2} - \frac{1}{2} (\hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 \hat{\rho} + \hat{\rho} \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2), \quad (2.59)$$

où κ_2 est le taux de perte de paires de photons et \mathcal{E}_2 correspond à une pompe à paires de photons représentant l'échange de paires de photons entre le résonateur et une source. Ainsi, la pompe à paires de photons est contrebalancée par une dissipation de paires de photons de sorte que les photons sont créés et détruits par paire. L'état stationnaire, $\dot{\hat{\rho}} = 0$, de ce système correspond aux états cohérents $|\pm\alpha_o\rangle$ tels que

$$\alpha_o^2 = -i \frac{2\mathcal{E}_2}{\kappa_2}. \quad (2.60)$$

Ainsi, cette approche stabilise la superposition de $|\alpha_o\rangle$ et $|-\alpha_o\rangle$ et donc les états chats $|\mathcal{C}_{\alpha_o}^\pm\rangle$. Cette technique a été implémentée expérimentalement, où les états chats ont bien été observés [10]. À la section 2.5.4, nous revenons sur l'implémentation de la pompe à paires de photons. Nous n'allons pas décrire davantage la dissipation à paires de photons puisque cette méthode de stabilisation n'est pas utilisée dans ce mémoire.

Non-linéarité Kerr et pompe

Pour la stabilisation d'un état cohérent, nous pouvons remplacer la dissipation par un désaccord $\delta\hat{a}^\dagger\hat{a}$. Avec les états chats, nous convertissons le désaccord par une *non-linéarité Kerr* $K\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2$, où K est le coefficient de Kerr, sous la transformation $\hat{a} \rightarrow \hat{a}^2$. Le terme Kerr remplace donc la dissipation à paires de photons dans la stabilisation des états chats en fournissant un coût en énergie proportionnel au nombre de paires de photons. On dit que ce terme est non linéaire puisqu'il ne croit pas linéairement avec le nombre de photons. L'hamiltonien de cette méthode prend donc

la forme [7]

$$\hat{H}_{2,K} = -K\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 + \hat{H}_2 \quad (2.61)$$

$$= -K\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 + \mathcal{E}_2\hat{a}^{\dagger 2} + \mathcal{E}_2^*\hat{a}^2. \quad (2.62)$$

Puisqu'elle possède l'avantage de ne pas requérir de dissipation, nous choisissons cette méthode de stabilisation pour l'étude des prochaines sections de ce mémoire. Elle est particulièrement importante au chapitre 4, où nous l'utilisons dans le protocole d'une opération quantique.

Aux sections 2.5.3 et 2.5.4, nous expliquons comment créer la non-linéarité Kerr ainsi que la pompe à paires de photons. À nouveau, la factorisation de cet hamiltonien permet de déduire ses états stables [7]

$$\hat{H}_{2,K} = -K \left(\hat{a}^{\dagger 2} - \frac{\mathcal{E}_2^*}{K} \right) \left(\hat{a}^2 - \frac{\mathcal{E}_2}{K} \right) + \frac{|\mathcal{E}_2|^2}{K}. \quad (2.63)$$

Ainsi, avec $\alpha_0^2 = \mathcal{E}_2/K$,

$$\left(\hat{a}^2 - \frac{\mathcal{E}_2}{K} \right) |\pm\alpha_0\rangle = \left(\alpha_0^2 - \frac{\mathcal{E}_2}{K} \right) |\pm\alpha_0\rangle = 0, \quad (2.64)$$

ce qui indique que les états cohérents $|\pm\alpha_0\rangle$ sont des états propres dégénérés de $\hat{H}_{2,K}$ avec valeur propre $|\mathcal{E}_2|^2/K$. Les états chats $|\mathcal{C}_{\alpha_0}^{\pm}\rangle$ sont donc aussi états propres de $\hat{H}_{2,K}$.

Métapotentiel

Il est intuitif de visualiser l'hamiltonien dans l'espace des phases. Comme nous l'avons vu à la section 2.3, l'espace des phases correspond au plan complexe de $\alpha = x + ip$.

Nous obtenons la valeur de l'hamiltonien dans l'espace des phases, connue sous le nom de *métapotentiel*, en remplaçant les opérateurs d'échelle par [37]

$$\hat{a} \rightarrow \alpha = x + ip, \quad (2.65)$$

$$\hat{a}^{\dagger} \rightarrow \alpha^* = x - ip. \quad (2.66)$$

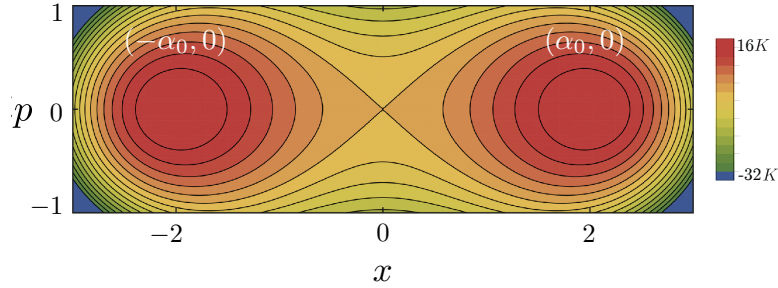


FIGURE 2.7 Méta-potential de la stabilisation des états chats avec non-linéarité Kerr. Le méta-potential correspond à la valeur de l'hamiltonien dans l'espace des phases. Nous voyons que le méta-potential de $\hat{H}_{2,K}$ forme un double-puits, où les points stables correspondent aux positions des deux états cohérents $\pm\alpha_o$ stabilisés.

Le méta-potential de $\hat{H}_{2,K}$ est présenté à la figure 2.7. Il représente un double-puits avec deux points stables centrés en $\pm\alpha_o$ autour desquels les courbes équipotentielles se concentrent. Par conservation d'énergie, une particule classique possède un mouvement suivant les courbes équipotentielles. Nous en déduisons que ce système confine les états près de ces points stables et permet donc la stabilisation de $|\mathcal{C}_{\alpha_o}^{\pm}\rangle$.

Notons que la phase ϕ de la pompe $\mathcal{E}_2 = |\mathcal{E}_2|e^{i\phi}$ définit la phase des états cohérents stabilisés $\alpha_o = |\alpha_o|e^{i\phi/2}$. Il est donc possible de choisir l'orientation du méta-potential et des états chats dans l'espace des phases.

Il a été montré dans [7] qu'en présence de perte de photons avec un taux de perte κ_1 , le sous-espace des états chats est bien préservé avec une légère perturbation. En effet, pour $\kappa \ll 8|K\alpha_o^2|$, les états stabilisés sont, en très bonne approximation, les états cohérents $|\pm\alpha_o\rangle$ avec $\alpha_o = r_o e^{i\theta_o}$, où

$$r_o = \left(\frac{4\mathcal{E}_2^2 - \kappa_1^2/4}{4K^2} \right)^{1/4} \quad \text{et} \quad (2.67)$$

$$\tan 2\theta_o = \frac{-\kappa_1}{\sqrt{16\mathcal{E}_2^2 - \kappa_1^2}}. \quad (2.68)$$

Par simulation numérique de l'équation maîtresse (2.42) avec l'hamiltonien de la stabilisation $\hat{H} = \hat{H}_{2,K}$, nous évaluons qu'une petite fraction de 10^{-7} de l'état du résonateur quitte le sous-espace des états chats. Cette perte de l'état peut être supprimée davantage grâce à l'ajout d'un processus de dissipation à paires de photons [9,

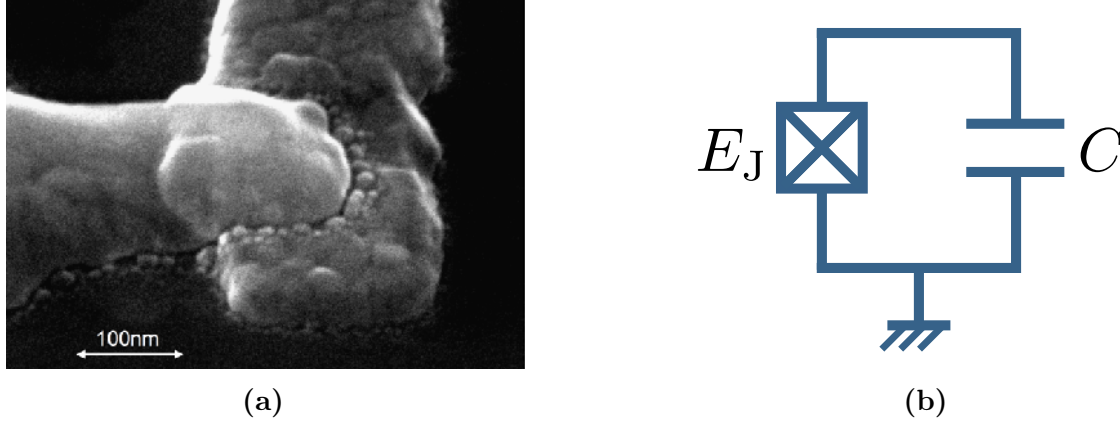


FIGURE 2.8 (a) Une jonction Josephson : deux supraconducteurs séparés d'une mince couche d'oxyde isolant permettant l'effet tunnel des paires de Cooper. Photo : Luigi Frunzio et David Schuster. (b) Circuit de la jonction Josephson avec un condensateur, où le circuit LC a été modifié en remplaçant l'inducteur par une jonction Josephson.

10]. Cette stabilisation prévient donc l'extinction du champ du résonateur et nous nous attendons à ce que l'effet résiduel de la perte de photons soit dominé par l'inversion de la parité des états chats. Au chapitre 3, nous discutons de corriger ces inversions par correction d'erreurs quantiques.

2.5.3 Non-linéarité Kerr

L'ajout de la non-linéarité Kerr nécessite une modification du circuit LC . Un élément non linéaire de circuit supraconducteur doit être introduit. Cet élément est la jonction Josephson composée de deux supraconducteurs séparés d'une mince couche d'oxyde isolant permettant l'effet tunnel des paires de Cooper. La figure 2.8 montre (a) la jonction ainsi que (b) son symbole qui remplace l'inducteur du circuit LC . L'énergie E_{Jonction} de cet élément est [35]

$$E_{\text{Jonction}} = -E_J \cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_o}\right), \quad (2.69)$$

où E_J est l'énergie Josephson, Φ est défini à l'équation (2.2) et $\Phi_o = h/2e$ est le quantum de flux. Remplacer l'inductance d'un circuit LC par la jonction Josephson

crée un oscillateur anharmonique avec un hamiltonien qui n'est plus quadratique en $\hat{\Phi}$

$$\hat{H}_J = \frac{\hat{Q}^2}{2C} - E_J \cos\left(2\pi \frac{\hat{\Phi}}{\Phi_o}\right). \quad (2.70)$$

Pour de faibles fluctuations de $\hat{\Phi}$, nous pouvons développer le cosinus jusqu'au terme $\hat{\Phi}^4$ d'où la non-linéarité Kerr émerge [38]. Nous obtenons l'hamiltonien du résonateur non linéaire Kerr

$$\hat{H}_{\text{RNK}} = \hat{H}_{\text{OH}} - K\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 = \omega\hat{a}^{\dagger}\hat{a} - K\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2, \quad (2.71)$$

avec une approximation séculaire, où ω et K dépendent de C , E_J et Φ_o . Contrairement à \hat{H}_{OH} , l'énergie n'est pas linéaire avec le nombre de photons. C'est-à-dire que l'énergie de transition entre deux niveaux voisins dépend du nombre n de photons

$$[\omega(n+1) - K(n+1)n] - [\omega n - Kn(n-1)] = \omega - 2Kn. \quad (2.72)$$

Un signal à la fréquence ω excite la transition $|0\rangle \leftrightarrow |1\rangle$, mais n'est pas résonant avec les transitions supérieures. Par exemple, la transition $|1\rangle \leftrightarrow |2\rangle$ se trouve à la fréquence $\omega - 2K$. Si l'amplitude d'une pompe est faible par rapport à $2K$, le signal n'excite pas les niveaux supérieurs à $|1\rangle$ en raison du désaccord de $-2K$, comme discuté à la section 2.5.1 sur l'application d'une pompe en présence d'un désaccord. On peut donc comprendre ce $2K$ comme une bande interdite qui protège le sous-espace des deux premiers niveaux de l'oscillateur. C'est le principe de base à partir duquel plusieurs qubits supraconducteurs, comme le transmon, sont fondés pour encoder de l'information quantique et la manipuler dans le sous-espace des niveaux $|0\rangle$ et $|1\rangle$ [38].

Dans le référentiel tournant à la fréquence ω , l'hamiltonien de l'équation (2.71) prend la forme

$$\hat{H}'_{\text{RNK}} = -K\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2. \quad (2.73)$$

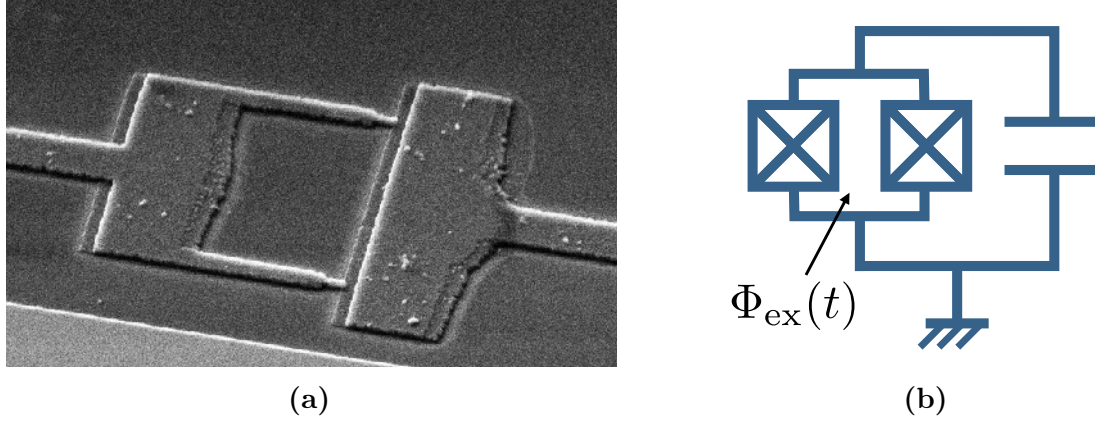


FIGURE 2.9 (a) *SQUID*, où les deux jonctions sont situées à l'extrémité des deux points formant une boucle. Photo : Julien Camirand-Lemyre. Échantillon : ETH Zürich. (b) Circuit d'un *SQUID* en parallèle avec un condensateur. La boucle du *SQUID* permet de coupler un flux magnétique externe Φ_{ex} avec les jonctions et induire une pompe.

2.5.4 Pompe à paires de photons

La pompe à paires de photons \hat{H}_2 de l'équation (2.58) requiert un couplage non linéaire entre le résonateur et une ligne de transmission. Pour ce faire, deux jonctions Josephson en parallèle sont utilisées plutôt qu'une seule. On appelle cet élément *SQUID*, de l'anglais *Superconducting Quantum Interference Device* [39]. La figure 2.9 présente une image réelle du *SQUID* en (a) et son schéma de circuit en parallèle avec un condensateur en (b).

La boucle ainsi créée peut accueillir un flux magnétique externe Φ_{ex} . C'est le principe de la *pompe de flux* [40]. L'énergie du *SQUID* prend une forme semblable à l'énergie d'une seule jonction Josephson

$$E_{\text{SQUID}} = \cos\left(\pi \frac{\Phi_{\text{ex}}}{\Phi_0}\right) E_{\text{Jonction}} = -E_J \cos\left(\pi \frac{\Phi_{\text{ex}}}{\Phi_0}\right) \cos\left(2\pi \frac{\Phi}{\Phi_0}\right), \quad (2.74)$$

ce qui produit un couplage entre le flux externe Φ_{ex} et le degré de liberté Φ du système.

L'ordre ϕ^2 du cosinus permet d'obtenir le terme de pompe à paires de photons de la forme $\mathcal{E}_2 \hat{a}^{\dagger 2} + \mathcal{E}_2^* \hat{a}^2$. Le signal de la pompe de flux doit avoir une fréquence de 2ω ,

le double de la fréquence de résonance du résonateur pour obtenir l'hamiltonien

$$\hat{H}_{2,K,\text{labo}} = \omega \hat{a}^\dagger \hat{a} + K \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2 + \mathcal{E}_2 e^{-i2\omega t} \hat{a}^{\dagger 2} + \mathcal{E}_2^* e^{i2\omega t} \hat{a}^2, \quad (2.75)$$

à l'ordre Φ^4 dans le référentiel du laboratoire avec une approximation séculaire. \mathcal{E}_2 dépend de E_J , Φ_o et de l'amplitude et la phase de Φ_{ex} . Par conservation d'énergie, le signal est ainsi résonant avec les paires de photons du résonateur. Deux photons du résonateur de fréquence ω sont créés à partir d'un seul photon du signal de fréquence 2ω et vice-versa.

Dans le référentiel tournant à la fréquence ω du résonateur, l'hamiltonien prend la forme de $\hat{H}_{2,K}$ de l'équation (2.62). Nous avons ainsi le terme Kerr, $-K \hat{a}^{\dagger 2} \hat{a}^2$, provenant des jonctions du *SQUID*, et la pompe à paires de photons $\mathcal{E}_2 \hat{a}^{\dagger 2} + \mathcal{E}_2^* \hat{a}^2$ induite par la pompe de flux, permettant l'échange de paires de photons du résonateur avec la source de signal.

Comme discuté à la section 2.5.2, cette construction permet la stabilisation des états chats $|\mathcal{C}_{\alpha_o}^\pm\rangle$ avec $\alpha_o = \sqrt{\mathcal{E}_2/K}$. Le cas particulier où la pompe est nulle, $\mathcal{E}_2 = 0$, correspond à un hamiltonien ne contenant que le terme Kerr dont les états propres sont les états chats ayant $\alpha_o = 0$, c'est-à-dire les états du vide $|0\rangle$ et d'un photon $|1\rangle$.

Par diagonalisation exacte de l'hamiltonien $\hat{H}_{2,K}$, nous obtenons une bande interdite entre les états chats stabilisés et le reste de l'espace d'Hilbert d'une valeur égale à $2K$ pour $\alpha_o = 0$ et qui grandit approximativement linéairement avec $|\alpha|^2$, le nombre moyen de photons [41]. La stabilisation procure donc une isolation du reste de l'espace d'Hilbert qui s'accroît avec l'amplitude des états chats.

En plus de décrire cette méthode de stabilisation des états chats, la référence [7] explique comment créer ces états à partir du vide en faisant varier la pompe \mathcal{E}_2 adiabatiquement de 0 vers $\alpha_o^2 K$.

2.6 Modèle d'erreurs du qubit de chats stabilisés

À la section 2.5.2, nous avons vu comment isoler et stabiliser un qubit de chats dans un résonateur supraconducteur micro-ondes. Dans la présente section, nous

études la dynamique du résonateur à l'intérieur du sous-espace stabilisé des états chats $|\mathcal{C}_\alpha^\pm\rangle$. Nous décrivons donc la première contribution de ce mémoire qui consiste à décrire l'effet de la perte de photons dans le sous-espace. Ceci représente le modèle d'erreurs du qubit de chats. Nous montrons que ce modèle d'erreurs présente la propriété d'asymétrie dominée par l'erreur d'inversion de bit, \hat{X} . Dans le chapitre 3, nous utilisons ce modèle de bruit pour évaluer la performance de la correction d'erreurs quantiques optimisée pour ce modèle d'erreurs.

2.6.1 Équation maîtresse du qubit de chats

Rappelons que seulement une fraction de 10^{-7} de $\hat{\rho}$ quitte le sous-espace des chats. Nous avons donc la relation $\hat{\rho} \approx \hat{P}_\alpha \hat{\rho} \hat{P}_\alpha$, où $\hat{P}_\alpha = \hat{P}_\alpha^2 = |\mathcal{C}_\alpha^+\rangle\langle\mathcal{C}_\alpha^+| + |\mathcal{C}_\alpha^-\rangle\langle\mathcal{C}_\alpha^-|$ est le projecteur dans le sous-espace. Il est donc raisonnable de projeter l'équation maîtresse de Lindblad (2.42-2.43) dans le sous-espace des états chats

$$\hat{P}_\alpha \dot{\hat{\rho}} \hat{P}_\alpha = -i \hat{P}_\alpha [\hat{H}_{2,K}, \hat{\rho}] \hat{P}_\alpha + \kappa_1 \hat{P}_\alpha \hat{a} \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{P}_\alpha - \frac{\kappa_1}{2} (\hat{P}_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{\rho} \hat{P}_\alpha + \hat{P}_\alpha \hat{\rho} \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{P}_\alpha), \quad (2.76)$$

où l'hamiltonien $\hat{H}_{2,K}$ est celui de l'équation (2.62) qui stabilise les états chats. En très bonne approximation $\hat{\rho}$ et \hat{P}_α commute donc avec $\hat{H}_{2,K}$ puisqu'ils sont composés des états propres dégénérés de cet hamiltonien. De plus, puisque l'opérateur \hat{a} préserve aussi le sous-espace des chats par la relation (2.35), les propriétés $\hat{a} \hat{P}_\alpha = \hat{P}_\alpha \hat{a} \hat{P}_\alpha$ et $\hat{P}_\alpha \hat{a}^\dagger = \hat{P}_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{P}_\alpha$ sont vérifiées. Par conséquent, nous avons $\hat{P}_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{P}_\alpha = \hat{P}_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{P}_\alpha \hat{P}_\alpha \hat{a} \hat{P}_\alpha$. Ainsi, chaque opérateur de l'équation (2.76) peut être projeté individuellement. C'est-à-dire, $\hat{a} \rightarrow \hat{P}_\alpha \hat{a} \hat{P}_\alpha$, $\hat{a}^\dagger \rightarrow \hat{P}_\alpha \hat{a}^\dagger \hat{P}_\alpha$ et $\hat{\rho} \rightarrow \hat{P}_\alpha \hat{\rho} \hat{P}_\alpha$. L'équation (2.76) se simplifie sous la forme

$$\dot{\hat{\rho}}_\alpha = \kappa_1 \hat{a}_\alpha \hat{\rho}_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger - \frac{\kappa_1}{2} (\hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha \hat{\rho}_\alpha + \hat{\rho}_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha), \quad (2.77)$$

où l'indice α représente l'opérateur projeté, $\hat{\mathcal{O}}_\alpha = \hat{P}_\alpha \hat{\mathcal{O}} \hat{P}_\alpha$. L'équation (2.77) donne l'effet de la perte de photons sur l'état du qubit de chats. Nous vérifions, à la section 2.6.3, la validité de la projection en comparant la solution analytique avec la simulation numérique du résonateur sans projection.

Les opérateurs agissant sur l'état du qubit s'écrivent

$$\hat{a}_\alpha = \alpha \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_\alpha^{-1} \\ \epsilon_\alpha & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.78)$$

$$\hat{a}_\alpha^\dagger = \alpha^* \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_\alpha \\ \epsilon_\alpha^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.79)$$

$$\hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha = |\alpha|^2 \begin{pmatrix} \epsilon_\alpha^2 & 0 \\ 0 & \epsilon_\alpha^{-2} \end{pmatrix}, \quad (2.80)$$

où $\epsilon_\alpha = \mathcal{N}_\alpha^+ / \mathcal{N}_\alpha^- = \sqrt{\tanh |\alpha|^2}$ est défini à l'équation (2.36). Pour les grandes valeurs de α , les opérateurs se simplifient

$$\hat{a}_\alpha \approx \alpha \hat{X}, \quad (2.81)$$

$$\hat{a}_\alpha^\dagger \approx \alpha^* \hat{X}, \quad (2.82)$$

$$\hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha \approx |\alpha|^2 \hat{I}. \quad (2.83)$$

Ces dernières relations indiquent que la perte de photons due à l'opérateur \hat{a} correspond à \hat{X} sur le qubit de chats stabilisés. Ceci est une indication de la propriété d'asymétrie du modèle d'erreurs. Le facteur α devant \hat{X} signifie que la perte de photons s'accroît avec α puisque le nombre de photons moyen grandit avec α . Nous déduisons des équations (2.77), (2.81), (2.82) et (2.83) que le taux de perte de photons des états chats est donné par $|\alpha|^2 \kappa_1$.

2.6.2 Erreurs sur le qubit de chats

Solutionner analytiquement l'équation (2.77) permet d'obtenir la description des erreurs provenant de la perte de photons du qubit de chats. Le modèle d'erreurs obtenu est présenté dans l'annexe B. Par souci de simplicité, nous présentons ici le cas limite où $|\alpha| \gg 1$ et $|\alpha|^2 \kappa_1 t \ll 1$. C'est-à-dire que nous utilisons l'approximation des grandes valeurs de α et des petits temps par rapport au taux de perte de photons. Rappelons toutefois que le régime de grande valeur de α est vérifié pour des valeurs relativement petites, telles que $\alpha = 1.5$ ou 2 par exemple. Sous ces approximations, le

modèle d'erreurs \mathcal{E} prend une forme simple sous sa décomposition de Kraus

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_\alpha(t) = \mathcal{E}(\hat{\rho}_\alpha(0)) = & p_1(\hat{I} + q_1\hat{Z})\hat{\rho}_\alpha(0)(\hat{I} + q_1\hat{Z}) \\ & + p_2(\hat{X} + iq_2\hat{Y})\hat{\rho}_\alpha(0)(\hat{X} - iq_2\hat{Y}), \end{aligned} \quad (2.84)$$

où

$$p_1 \sim \frac{1 + e^{-2|\alpha|^2\kappa_1 t}}{2}, \quad (2.85)$$

$$q_1 \sim e^{-2|\alpha|^2} \frac{1 - e^{-2|\alpha|^2\kappa_1 t}}{2}, \quad (2.86)$$

$$p_2 \sim \frac{1 - e^{-2|\alpha|^2\kappa_1 t}}{2}, \quad (2.87)$$

$$q_2 \sim \frac{e^{-2|\alpha|^2}}{2}. \quad (2.88)$$

p_1 et p_2 sont les probabilités des deux opérateurs de Kraus pouvant affecter le qubit de chats. Les facteurs q_1 et q_2 représente l'asymétrie exponentielle du modèle d'erreurs. Les opérateurs contenant une inversion de phases, \hat{Z} et \hat{Y} , sont exponentiellement supprimé avec α . Le modèle de bruit est donc dominé par l'opérateur sans erreurs \hat{I} et l'erreur d'inversion de bit \hat{X} avec probabilité p_1 et p_2 respectivement. Remarquons que p_2 grandit avec $|\alpha|^2$. Ceci illustre l'augmentation de la probabilité de perdre des photons avec le nombre de photons. Finalement, nous constatons que la probabilité d'erreur augmente avec le temps ce qui est tout à fait attendu.

Au lieu d'utiliser κ_1 et t pour paramétrer le modèle d'erreurs pour une valeur de α donnée, nous utilisons la variable $\gamma = 1 - e^{-\kappa_1 t} \approx \kappa_1 t$ [11]. Ce paramètre prend une valeur entre 0 et 1 et représente la probabilité qu'un photon s'échappe du résonateur lorsqu'on initialise l'état de Fock $|0\rangle$. Ce paramètre est utile dans un modèle d'erreurs puisqu'il s'interprète lui-même comme une probabilité. De plus, γ représente, en quelque sorte, le passage du temps et il sera utilisé pour présenter nos résultats. Nous

réécrivons donc

$$p_1 \sim \frac{1 + (1 - \gamma)^{2|\alpha|^2}}{2}, \quad (2.89)$$

$$q_1 \sim e^{-2|\alpha|^2} \frac{1 - (1 - \gamma)^{2|\alpha|^2}}{2}, \quad (2.90)$$

$$p_2 \sim \frac{1 - (1 - \gamma)^{2|\alpha|^2}}{2}, \quad (2.91)$$

$$q_2 \sim \frac{e^{-2|\alpha|^2}}{2}. \quad (2.92)$$

La méthode PTA de la section 1.2.2 permet d'utiliser un modèle d'erreurs de Pauli approximatif pour représenter le bruit du qubit de chats, en ignorant les éléments hors-diagonaux de la matrice χ . Nous obtenons donc les probabilités d'erreur de Pauli

$$p_X \sim \frac{1 - e^{-2|\alpha|^2 \kappa_1 t}}{2} = \frac{1 - (1 - \gamma)^{-2|\alpha|^2}}{2}, \quad (2.93)$$

$$p_Y \sim e^{-4|\alpha|^2} \frac{1 - e^{-2|\alpha|^2 \kappa_1 t}}{8} = e^{-4|\alpha|^2} \frac{1 - (1 - \gamma)^{-2|\alpha|^2}}{8}, \quad (2.94)$$

$$p_Z \sim e^{-4|\alpha|^2} \frac{1 - e^{-2|\alpha|^2 \kappa_1 t}}{8} = e^{-4|\alpha|^2} \frac{1 - (1 - \gamma)^{-2|\alpha|^2}}{8}. \quad (2.95)$$

La figure 2.10 présente les probabilités des erreurs de Pauli en fonction du paramètre γ . Nous avons utilisé les expressions exactes provenant de l'intégration de l'équation (2.77), valide pour toute valeur de α , κ_1 et t . Nous présentons deux cas : 1) en lignes pointillées, $\alpha = 0$, où les états chats $|\mathcal{C}_\alpha^\pm\rangle$ sont réduits aux états du vide $|0\rangle$ et d'un seul photon $|1\rangle$ et 2) en lignes pleines, $\alpha = 2$, qui correspond au régime des grandes valeurs de α . Les probabilités, p_X , p_Y et p_Z sont en jaune, vert et rouge respectivement. Nous observons d'abord que les probabilités d'erreur augmentent avec le temps ce qui est attendu. Dans le cas des états ayant 0 et 1 photon, les erreurs \hat{X} et \hat{Y} sont équiprobables. Il n'y a donc pas d'asymétrie entre les inversions de bit et de phase avec $\alpha = 0$. Toutefois, pour $\alpha = 2$, l'augmentation de α supprime exponentiellement le taux d'erreur \hat{Y} et \hat{Z} , tel que prédit par les expressions (2.85) à (2.92). Nous observons une asymétrie de l'ordre de $\sim 10^6 - 10^7$ entre les inversions de bit et de phase. En contrepartie, le taux d'erreur \hat{X} s'accroît avec α en raison de l'augmentation du nombre de photons.

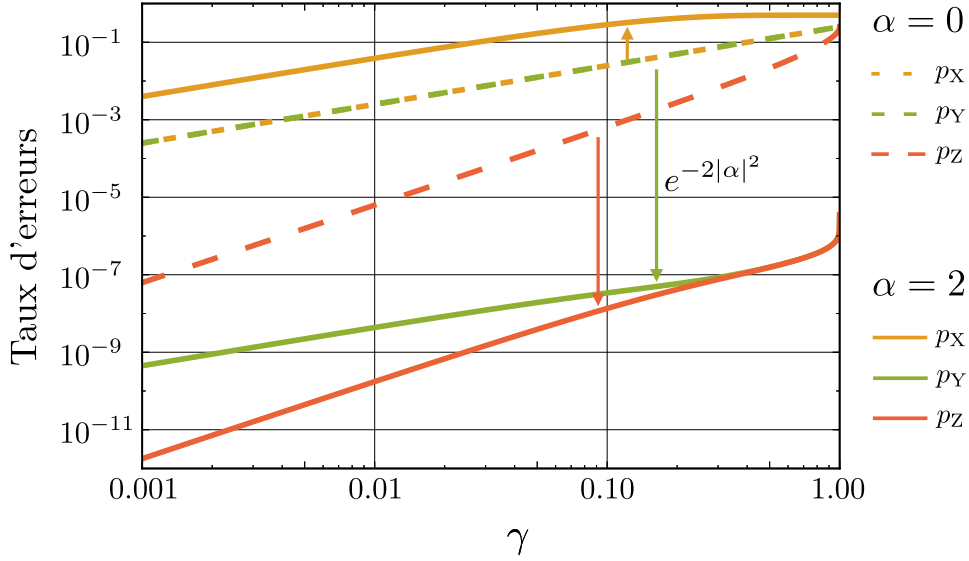


FIGURE 2.10 Modèle d'erreurs du qubit de chats avec la simplification PTA. Les courbes pointillées et pleines présentent respectivement les probabilités d'erreur avec $\alpha = 0$ et 2. Les probabilités correspondent aux erreurs de Pauli \hat{X} , \hat{Y} et \hat{Z} en jaune, vert et rouge respectivement.

Au chapitre 3, nous montrons que la propriété d'asymétrie des erreurs du qubit de chats peut être exploitée, en principe, pour obtenir de meilleures performances en correction d'erreurs qu'avec les états ayant 0 et 1 photon, malgré l'augmentation du taux d'erreur \hat{X} avec α . En fait, selon les références [3–5], on s'attend à un plus grand taux seuil d'erreurs en optimisant un code de correction d'erreurs quantiques à une structure de bruit asymétrique. C'est-à-dire qu'il est possible de tolérer un plus grand taux d'erreurs grâce à cette propriété.

2.6.3 Validation de la projection

Afin de vérifier l'exactitude du modèle d'erreurs obtenu à partir de l'équation (2.77), nous avons comparé nos résultats analytiques $\hat{\rho}_\alpha$ avec des simulations numériques $\hat{\rho}_{\text{sim}}$ du système sans projection. La comparaison a été obtenue en évaluant la fidélité, $\langle \psi | \hat{\rho} | \psi \rangle$, entre un état initial $|\psi\rangle$ et l'état $\hat{\rho}$ résultant après l'évolution du système

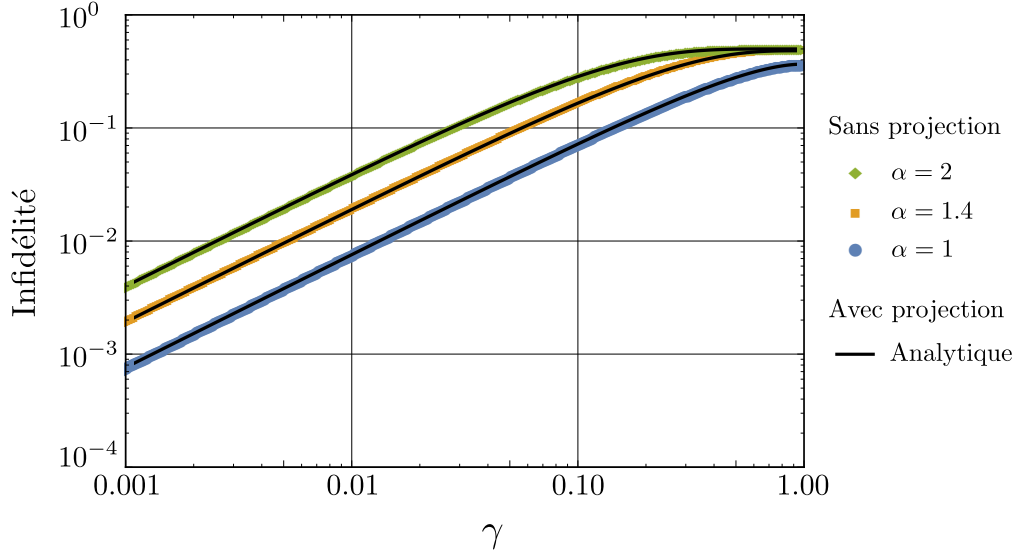


FIGURE 2.11 Comparaison entre les résultats analytiques et numériques. La figure présente l'infidélité $1 - \langle \mathcal{C}_\alpha^+ | \hat{\rho} | \mathcal{C}_\alpha^+ \rangle$ en fonction de γ , où $\hat{\rho}$ est l'état résultant après avoir initialisé $|\mathcal{C}_\alpha^+\rangle$. Les données en bleu, jaune et vert correspondent aux résultats numériques pour $\alpha = 1, 1.4$ et 2 respectivement, et les courbes noires montrent nos prédictions analytiques, dérivées de l'équation maîtresse (2.77) projetée dans le sous-espace des états chats, pour chacune des valeurs de α .

sous l'équation maîtresse (2.42) pour $\hat{\rho}_{\text{sim}}$ ou (2.77) pour $\hat{\rho}_\alpha$. Nous avons évalué cette figure de mérite pour différents états initiaux. À la figure 2.11 nous présentons cette comparaison avec l'état initial $|\mathcal{C}_\alpha^+\rangle$. La figure présente l'infidélité $1 - \langle \mathcal{C}_\alpha^+ | \hat{\rho} | \mathcal{C}_\alpha^+ \rangle$ en fonction de γ , ce qui représente la probabilité des erreurs de types \hat{X} et \hat{Y} , puisque $|\mathcal{C}_\alpha^+\rangle$ est inchangé sous l'erreur \hat{Z} . Les données en bleu, jaune et vert correspondent aux résultats numériques pour $\alpha = 1, 1.4$ et 2 respectivement, et les courbes noires montrent nos prédictions analytiques pour chacune des valeurs de α . Nous voyons un excellent accord entre nos résultats analytiques et numériques. En fait, la différence entre nos données analytiques et numériques est de l'ordre de $\leq 0.1\%$, $\leq 0.01\%$ et $\leq 0.001\%$ pour $\alpha = 1, 1.4$ et 2 respectivement. Nous observons un accord semblable à celui présenté à la figure 2.11 pour tous les états initiaux testés, comme, par exemple, les états propres des opérateurs de Pauli. Ceci nous permet de valider notre modèle d'erreurs analytique et de l'utiliser pour évaluer la performance de la correction d'erreurs quantiques avec le qubit de chats.

Chapitre 3

Performance de la correction d'erreurs quantiques

Dans ce chapitre, nous présentons la seconde contribution de ce mémoire qui consiste à montrer l'avantage d'utiliser les qubits de chats grâce à leur modèle d'erreurs asymétrique. Pour se faire, nous comparons la correction du modèle d'erreurs des états chats avec la correction du modèle d'erreurs des états ayant 0 et 1 photon, $\alpha = 0$. Dans le cas des états chats, nous utilisons un code de correction d'erreurs adapté pour le bruit asymétrique, le code de répétition, tandis que nous employons un code correcteur d'erreurs qui corrige les modèles d'erreurs sans structure pour les états de 0 et 1 photon.

3.1 Codes utilisés

Pour l'évaluation de la performance de la correction d'erreurs quantiques, nous utilisons des codes simples pour montrer qu'en principe il est possible d'obtenir un taux d'erreurs logiques plus petit avec les qubits physiques de chats.

3.1.1 États de 0 et 1 photon

Le code de correction d'erreurs quantiques pouvant corriger tous les types d'erreurs de Pauli, et ayant le plus petit nombre de qubits physiques est le *code à cinq qubits* [42]. Il encode $k = 1$ qubit logique avec $n = 5$ qubits physiques en utilisant les opérateurs de parités $\hat{X}\hat{Z}\hat{Z}\hat{X}\hat{I}$, $\hat{I}\hat{X}\hat{Z}\hat{Z}\hat{X}$, $\hat{X}\hat{I}\hat{X}\hat{Z}\hat{Z}$ et $\hat{Z}\hat{X}\hat{I}\hat{X}\hat{Z}$. Puisque ses opérateurs de Pauli logiques peuvent s'exprimer par des opérateurs de poids 3, $\hat{X} = \hat{I}\hat{Z}\hat{X}\hat{Z}\hat{I}$ et $\hat{Z} = \hat{X}\hat{I}\hat{Z}\hat{I}\hat{X}$, la distance de ce code est $d_{5q} = 3$. Ainsi, ce code peut corriger toutes erreurs de Pauli de poids $t_{5q} = \lfloor (d_{5q} - 1)/2 \rfloor = 1$. Le code à cinq qubits peut donc corriger un modèle d'erreurs ne présentant pas d'asymétrie comme c'est le cas pour les états de 0 et 1 photon.

Naturellement, pour le code à cinq qubits, la valeur optimale de α est 0 puisque le taux d'erreurs physiques total augmente avec α , ce qui cause l'augmentation de la probabilité d'erreurs logiques.

3.1.2 États chats

Nous exploitons le modèle d'erreurs asymétrique du qubit de chats avec le code de répétition à cinq qubits pour comparer sa performance avec le même nombre de qubits physiques que dans le cas précédent. Ce code possède les opérateurs logiques $\hat{X} = \hat{X}\hat{X}\hat{X}\hat{X}\hat{X}$ et $\hat{Z} = \hat{Z}\hat{I}\hat{I}\hat{I}\hat{I}$, comme nous l'avons vu à la section 1.4.2 avec le code de répétition à trois qubits. Ici, le concept de distance n'est pas équivalent pour tous les types d'erreurs physiques. Une erreur logique se produit soit par un opérateur de poids 5 composé d'erreurs physiques \hat{X} ou par un opérateur composé de poids 1 composé d'un \hat{Z} . Nous avons donc une distance associée à chaque type d'erreurs : $d_X = 5$ et $d_Z = 1$. Ainsi, ce code corrige jusqu'à $t_X = 2$ erreurs \hat{X} et aucune erreur du type \hat{Z} , $t_Z = 0$. Ce code peut donc corriger plus d'erreurs \hat{X} que le code à cinq qubits, mais il ne peut pas corriger les inversions de phase. Rappelons qu'une erreur \hat{Y} est composée des erreurs \hat{X} et \hat{Z} . Elle peut donc être détectée par le code de répétition, mais elle cause une erreur logique puisque l'erreur \hat{Z} est incorrigible.

3.2 Estimation du taux d'erreurs logiques

Commençons par comprendre la performance de la correction d'erreurs par une simple estimation analytique du taux d'erreurs au niveau logique après l'exécution d'une correction. Dans la section 3.2.2, nous montrons des résultats numériques plus réalistes pour confirmer ce que nous estimons analytiquement. Nous basons nos résultats analytiques sur le modèle d'erreurs présenté à la figure 2.10, où nous avons utilisé l'approximation de bruit Pauli, PTA, sans d'autres approximations. C'est-à-dire que les probabilités d'erreurs physiques utilisées sont valides pour tout temps t et pour toute valeur de α . Nos résultats numériques utilisent le modèle d'erreurs obtenu par intégration de l'équation maîtresse du qubit de chats (2.77) sans approximation outre la projection dans le sous-espace des états chats.

3.2.1 Estimation analytique

Nos résultats analytiques s'obtiennent en évaluant la probabilité d'erreurs logiques. Nous l'obtenons par la somme des probabilités des erreurs physiques incorrigibles. Par exemple, la somme $S(n, w)$ des probabilités d'erreurs physiques de poids w pour un code de n qubits physiques est

$$S(n, w) = \binom{n}{w} p^w (1-p)^{n-w}, \quad (3.1)$$

où p est la probabilité d'erreurs pour un seul qubit physique. Le facteur binomial représente le nombre d'erreurs possibles de poids w avec n qubits physiques. Les facteurs p^w et $(1-p)^{n-w}$ correspondent aux probabilités associées à avoir w qubits affectés d'une erreur et $n-w$ qubits sans erreur respectivement. La somme

$$\sum_{w>t} S(n, w), \quad (3.2)$$

où $t = \lfloor (d-1)/2 \rfloor$, correspond, en général, à une surestimation du taux d'erreurs logiques p_L puisque, bien que toutes les erreurs de poids t et moins sont corrigibles, certains opérateurs de poids supérieurs à t sont aussi corrigibles ou sont des opérateurs

de parités qui n'affectent pas les mots codes.

Dans le cas des états chats avec le code de répétition, nous utilisons cette surestimation pour obtenir une borne supérieure aux taux d'erreurs logiques. Toutefois, avec les états 0 et 1 photons avec le code à cinq qubits, nous choisissons une borne inférieure. Nous tronquons la somme à $w = 3$ inclusivement parce que les opérateurs de parité du code ont un poids de 4 et les erreurs de poids 2 et 3 sont tous incorrigibles. Ceci nous permet d'évaluer une borne inférieure aux taux d'erreurs logiques. Ces deux bornes sont simples à évaluer et elles permettent de montrer la situation d'intérêt, c'est-à-dire lorsque la borne supérieure du taux d'erreurs logiques des états chats est plus petite à la borne inférieure avec les états 0 et 1 photons. Il est important de noter que nous nous attendons à ce que ces bornes correspondent à de bonnes estimations des vraies valeurs puisque celles-ci sont dominées par les termes de plus faibles poids ayant une petite puissance de p . En effet, lorsque $p \ll 1$, on a $p^w \ll p^{w-1}$.

Code à cinq qubits

La borne inférieure p_{5q} du taux d'erreurs logiques du code à cinq qubits avec les états 0 et 1 photon est donnée par

$$p_{5q} = \sum_{w=t_{5q}+1}^3 \binom{5}{w} p^w (1-p)^{5-w}, \quad (3.3)$$

où $t_{5q} = 1$ et $p = p_X + p_Y + p_Z$. Nous déduisons donc que p_{5q} a une valeur de l'ordre de grandeur de $\sim (p_X + p_Y + p_Z)^2$, tel que l'on s'attend d'un code qui corrige les erreurs de poids 1.

Code de répétition à cinq qubits

La borne supérieure p_{rep} du taux d'erreurs logiques du code de répétitions à cinq qubits avec les états chats est donnée par

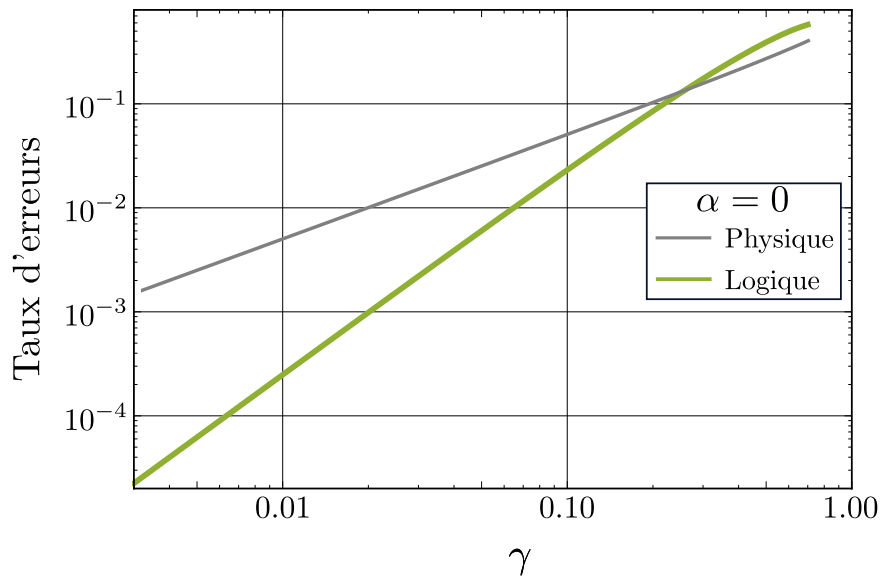
$$p_{\text{rep}} = \sum_{i \in \{X, Y, Z\}} \sum_{w=t_i+1}^5 \binom{5}{w} p_i^w (1-p_i)^{5-w}, \quad (3.4)$$

où nous avons séparé la contribution des erreurs \hat{X} , \hat{Y} et \hat{Z} en différentes sommes pour tenir compte des différentes distances : $t_X = 2$ et $t_Y = t_Z = 0$. Remarquons que, dans cette surestimation, certaines erreurs contribuent plus d'une fois à la somme totale. Par exemple, prenons les termes en $p_X^3(1 - p_X)^2$. Le facteur p_X^3 indique que ces termes proviennent d'opérateurs ayant l'erreur \hat{X} sur 3 qubits physiques. Le facteur $(1 - p_X)^2$ indique que les deux autres qubits physiques sont affectés par n'importe quel opérateur du groupe de Pauli sauf \hat{X} . Ainsi, les termes en $p_X^3(1 - p_X)^2$ incluent entre autres la contribution de l'erreur incorrigible $\hat{Z}\hat{I}\hat{X}\hat{X}\hat{X}$. Avec le même raisonnement, nous pouvons nous convaincre que les termes en $p_Z(1 - p_Z)^4$ incluent aussi la contribution de $\hat{Z}\hat{I}\hat{X}\hat{X}\hat{X}$, la même erreur. Cette technique simplifie le calcul et ne nous empêche pas d'obtenir une borne supérieure au taux d'erreurs logiques avec les qubits de chats. Ainsi, nous constatons que p_{rep} a un ordre de grandeur de $\sim p_X^3 + p_Y + p_Z$, ce qui illustre la capacité du code à corriger seulement les erreurs de types \hat{X} de poids 2.

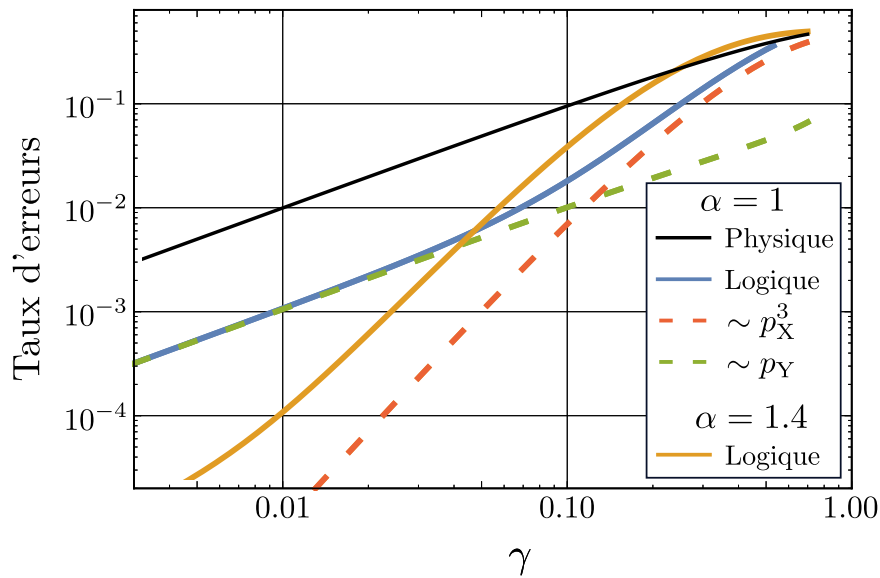
3.2.2 Résultats analytiques

La figure 3.1 a) présente la borne inférieure p_{5q} du taux d'erreurs logiques en fonction de γ , en vert, du code à cinq qubits utilisant les états 0 et 1 photons. Ici, γ correspond au temps écoulé pendant lequel les qubits physiques évoluent avant l'application de la correction d'erreurs quantiques. À des fins de comparaison, nous montrons également en gris le taux d'erreurs physiques $p = p_X + p_Y + p_Z$ de ce qubit pour lequel $\alpha = 0$. Ce taux d'erreurs total p correspond à une borne inférieure aux taux d'erreurs physiques des états chats puisque le taux augmente avec α . La figure 3.1 b) montre la borne supérieure p_{rep} du taux d'erreurs logiques du code de répétition à cinq qubits de chats avec $\alpha = 1$ en bleu et $\alpha = 1.4$ en jaune. Les courbes pointillées rouge et verte représentent respectivement la contribution des erreurs \hat{X} et \hat{Y} aux taux d'erreurs avec $\alpha = 1$. La courbe noire montre le taux d'erreurs d'un seul qubit de chats physique avec $\alpha = 1$ pour comparer avec le taux logique. Nous observons d'abord à partir des figures 3.1 a) et b), que les taux d'erreurs logiques sont inférieurs aux taux physiques lorsque γ n'est pas trop grand. Ceci indique que la correction d'erreurs parvient à réduire le taux d'erreurs comme prévu.

Dans le cas de la figure 3.1 b), il est intéressant de considérer la contribution des erreurs \hat{X} et \hat{Y} au taux d'erreurs logiques avec $\alpha = 1$. Nous constatons qu'avec une



(a)



(b)

FIGURE 3.1 Estimation analytique de la performance de la correction d'erreurs avec (a) les états 0 et 1 photon, $\alpha = 0$, et (b) les états chats $|\mathcal{C}_\alpha^\pm\rangle$, $\alpha > 0$. En (a) gris et en (b) noir, nous montrons le taux d'erreurs total au niveau physique. Les courbes (a) verte, (b) bleue et jaune représentent respectivement le taux d'erreurs logiques total avec $\alpha = 0$ (p_{5q}), $\alpha = 1$ (p_{rep}) et $\alpha = 1.4$ (p_{rep}). En (b), les courbes pointillées rouge et verte montrent la contribution au taux d'erreurs logiques provenant des erreurs \hat{X} et \hat{Y} respectivement.

valeur de γ élevée ($\gamma > 0.1$), le taux d'erreurs logiques est dominé par les erreurs \hat{X} en raison de l'asymétrie au niveau physique. Toutefois, pour un petit γ ($\gamma < 0.1$), la performance de la correction d'erreurs est limitée par les erreurs \hat{Y} incorrigibles. La suppression de cette contribution est illustrée par le taux d'erreurs avec $\alpha = 1.4$ qui possède un taux d'erreurs inférieur au cas $\alpha = 1$ dans la région limitée par \hat{Y} . En contrepartie, nous remarquons que, dans la région $\gamma > 0.1$, où $\alpha = 1$ est dominé par \hat{X} , le taux d'erreurs logiques avec $\alpha = 1.4$ est supérieur puisque le taux d'erreurs physiques de l'erreur \hat{X} augmente avec α . Cette constatation implique qu'il existe une valeur optimale de α correspondant à chaque valeur de γ , ou du temps t . Plus γ est petit, plus la valeur optimale de α est grande. Afin de vérifier cette observation, la comparaison entre les états chats et les états 0 et 1 photon est présentée à la section 3.2.3, où nous montrons les résultats numériques.

3.2.3 Résultats numériques

Les résultats numériques sont obtenus à partir de la méthode décrite à la section 1.4.5. Le modèle d'erreurs utilisé provient de l'intégration analytique de l'équation maîtresse des qubits de chats (2.77) sans approximation outre la projection dans le sous-espace des états chats. Nous présentons, à la figure 3.2, nos résultats numériques de l'infidélité d'intrication $1 - \mathcal{F} = 1 - \chi_{00}$ en fonction de γ .

D'abord, la courbe grise est donnée par le modèle d'erreurs physiques pour $\alpha = 0$, sans correction d'erreurs, comme la courbe grise à la figure 3.1 (a). Cette courbe est utile pour constater que les taux d'erreurs logiques peuvent atteindre des valeurs inférieures grâce à la correction d'erreurs. Rappelons que, puisque le taux d'erreurs grandit avec α , cette courbe grise correspond à une borne inférieure pour les qubits physiques avec $\alpha \geq 0$. Les autres courbes correspondent au modèle d'erreurs logiques du code à cinq qubits pour $\alpha = 0$ et du code de répétition à cinq qubits pour $\alpha > 0$. Dans les cas $\alpha = 1$ et 1.4 avec les courbes bleue et jaune respectivement, nous observons un comportement très semblable à la figure 3.1 b) avec l'estimation analytique. Nous pouvons donc interpréter nos résultats numériques à partir de la discussion sur nos résultats analytiques de la section 3.2.2. Naturellement, les courbes rouge et mauve pour $\alpha = 2$ et $\alpha = 3.2$ respectivement ont une infidélité supérieure lorsque les erreurs \hat{X} dominent le bruit puisque le taux d'erreurs de \hat{X} augmente avec α .

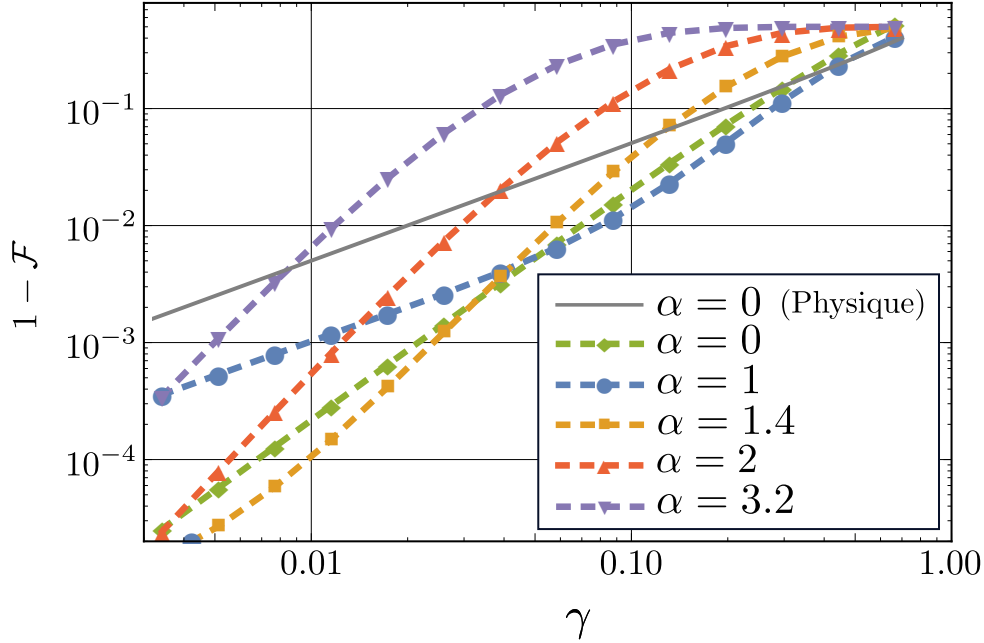


FIGURE 3.2 Résultats numériques de la performance de la correction d'erreurs. La courbe grise correspond au taux d'erreurs physiques total avec $\alpha = 0$. La courbe verte correspond au taux d'erreurs logiques avec $\alpha = 0$ et le code à cinq qubits. Les courbes bleue, jaune, rouge et mauve montrent le taux d'erreurs logiques avec le code de répétition pour $\alpha = 1, 1.4, 2$ et 3 .

Ainsi, nous remarquons que dans la région de γ présentée à la figure 3.2 et parmi les courbes présentées, $\alpha = 1$ performe le mieux pour de grands γ et $\alpha = 1.4$ est avantageux pour des petits γ . De plus, nos résultats indiquent que dans la région de valeur de γ intermédiaires, une valeur de α entre 1 et 1.4 est optimale, ce qui n'est pas présenté ici pour faciliter la visibilité de la figure. Finalement, nous avons aussi observé que les valeurs supérieures de α deviennent optimales pour des valeurs de γ inférieures à ce que nous présentons à la figure 3.2. Nous constatons donc que la courbe verte avec $\alpha = 0$ n'est optimale pour aucune valeur de γ . C'est-à-dire que, pour toute valeur de γ , la valeur optimale de α est supérieure à 0. Ceci implique que l'utilisation des états chats est avantageuse par rapport aux états 0 et 1 photon grâce à l'exploitation de la propriété d'asymétrie du bruit du qubit de chats.

Bien entendu, les résultats présentés aux sections 3.2.2 et 3.2.3 représentent un cas simplifié de correction d'erreurs quantiques. Nous parvenons toutefois à montrer qu'il

est avantageux en principe d'utiliser des qubits physiques de chats pour la correction d'erreurs plutôt que d'utiliser les états à 0 et 1 photon.

Chapitre 4

Développement d'un CNOT avec bruit asymétrique

À la section 1.10, nous avons discuté de l'importance du développement de protocoles tolérants aux fautes qui préservent la propriété d'asymétrie du modèle d'erreurs des qubits de chats afin de tirer profit de la structure du bruit. Toutefois, la préservation de l'asymétrie impose certaines contraintes pouvant nuire aux avantages du bruit asymétrique [3–5]. Nous avons vu qu'avec des qubits physiques formés de simples systèmes à deux niveaux, l'opération unitaire implémentant le CNOT ne peut être utilisée puisqu'elle ne préserve pas l'asymétrie. Cette contrainte complique énormément le protocole des références [3, 4] et elle n'est pas respectée par le protocole au seuil élevé de [5]. Dans le présent chapitre, nous présentons le développement d'un CNOT qui préserve le bruit asymétrique avec les qubits de chats, ce qui constitue la troisième contribution de ce mémoire. La propriété de préservation est possible puisque le résonateur n'est pas un simple système à deux niveaux, ce qui permet l'exploitation d'un plus grand espace d'Hilbert pour l'implémentation de l'opération.

4.1 Principe de l'opération

Comme nous l'avons vu à la section 1.9.1, le CNOT possède la table de vérité présentée à la table 4.1, où les indices a et b correspondent aux qubits A et B. Dans la

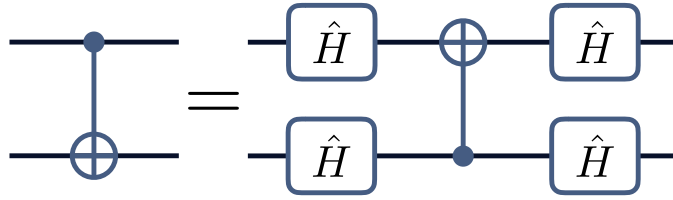


FIGURE 4.1 Sous la transformée de Hadamard \hat{H} , le CNOT inverse les rôles des qubits de contrôle et cible. Dans la base des états propres de \hat{X} , l'état du qubit cible détermine l'opération agissant sur le qubit de contrôle puisque \hat{H} transforme la base de \hat{Z} vers la base de \hat{X} et inversement.

colonne de gauche, une inversion de bit \hat{X} s'applique sur B lorsque A est dans l'état $|1\rangle$. La figure 4.1 montre que les rôles des qubits de contrôle et cible sont inversés sous la

Base \hat{Z}		Base \hat{X}	
Entrée	Sortie	Entrée	Sortie
$ 00\rangle$	$ 00\rangle$	$ ++\rangle$	$ ++\rangle$
$ 01\rangle$	$ 01\rangle$	$ -\+\rangle$	$ -\+\rangle$
$ 10\rangle$	$ 11\rangle$	$ +-\rangle$	$ --\rangle$
$ 11\rangle$	$ 10\rangle$	$ --\rangle$	$ +-\rangle$

Tableau 4.1 Table de vérité du CNOT, où les qubits de contrôle et cible sont respectivement le premier et le deuxième. Dans la base des états propres de \hat{Z} , avec l'état $|0\rangle$ du qubit de contrôle, rien n'affecte le système, tandis qu'avec l'état $|1\rangle$ du qubit de contrôle, \hat{X} agit sur le qubit cible. Dans le cas de la base des états propres de \hat{X} , c'est maintenant l'état du qubit cible qui détermine l'opération sur le qubit de contrôle. L'opération \hat{Z} agit sur le qubit de contrôle seulement avec l'état $|-\rangle$ du qubit de cible.

conjugaison du CNOT avec \hat{H} . À la section 1.9.1, nous avons montré que \hat{H} applique un changement de base entre \hat{Z} et \hat{X} à partir des relations de commutations (1.65) et (1.64) et de la figure 1.7. Ceci implique que le CNOT est équivalent à l'application d'une inversion de phase \hat{Z} sur A lorsque B est dans l'état propre de valeur propre -1 de \hat{X} , $|-\rangle$. Cette propriété est présentée par la colonne de droite de la table 4.1.

Avec des qubits de chats, nous avons

$$|\pm\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|c_\alpha^+\rangle \pm |c_\alpha^-\rangle) \approx |\pm\alpha\rangle, \quad (4.1)$$

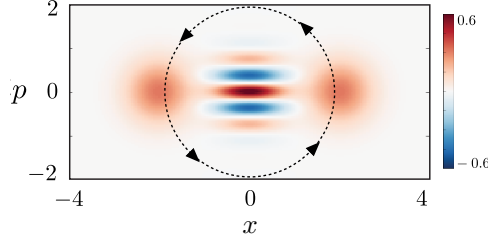


FIGURE 4.2 Rotation de l'état chat pair $|\mathcal{C}_{\alpha(t)}^+\rangle$.

où l'approximation est vérifiée lorsque α est suffisamment grand, ce qui est valide, par exemple pour $\alpha = 1.5$. L'effet du CNOT consiste donc d'inverser les états cohérents du résonateur A, $|\alpha\rangle \leftrightarrow |-\alpha\rangle$, lorsque le résonateur B est dans l'état $|-\beta\rangle$, où nous utilisons $\pm\beta$ pour identifier les états cohérents de B.

L'opération du CNOT présenté dans ce mémoire est induite par une rotation antihoraire d'un angle π de l'état du résonateur A dans l'espace des phases. Cette rotation est illustrée à la figure 4.2, où nous présentons la fonction de Wigner de l'état chat pair $|\mathcal{C}_{\alpha(t)}^+\rangle$ en indiquant la trajectoire des états cohérents dans l'espace des phases. Durant la rotation, l'état du résonateur A quitte le sous-espace du qubit de chats et retourne dans ce sous-espace à la fin de l'évolution, ce qui échange $|\alpha\rangle$ et $|-\alpha\rangle$. Pour correspondre à un CNOT, cette rotation doit se produire selon une interaction avec le résonateur B pour qu'elle se produise uniquement avec $|-\beta\rangle$. Une modification à la stabilisation de A doit être également induite pour qu'elle protège les états chats en rotation et n'empêche pas l'évolution voulue.

On peut trouver l'interaction nécessaire pour arriver à ce résultat à partir de \hat{H}_{CNOT} présenté à l'équation (1.72) que nous réexprimons en réarrangeant les termes

$$\hat{H}_{\text{CNOT}} = \frac{V}{2} \left[\hat{I}_A \left(\hat{I}_B + \hat{X}_B \right) + \hat{Z}_A \left(\hat{I}_B - \hat{X}_B \right) \right]. \quad (4.2)$$

Prenons le terme d'interaction $\hat{Z}_A \hat{X}_B$ et ignorons les autres termes. Nous remplaçons donc l'opérateur \hat{Z}_A par le générateur de rotation du résonateur A, $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ comme nous l'avons vu à la section 2.3

$$\hat{H}_{\text{CNOT,rot}} = g \hat{a}^\dagger \hat{a} \frac{\hat{I}_B - \hat{X}_B}{2}, \quad (4.3)$$

où nous gardons, pour l'instant, les opérateurs de Pauli sur B par simplicité. Notons toutefois que

$$\begin{aligned}\hat{X}_B &= \frac{1}{\beta(\epsilon_\beta + \epsilon_\beta^{-1})} \hat{P}_\beta (\hat{b}^\dagger + \hat{b}) \hat{P}_\beta \\ &= \frac{1}{\beta(\epsilon_\beta + \epsilon_\beta^{-1})} (\hat{b}_\beta^\dagger + \hat{b}_\beta).\end{aligned}\quad (4.4)$$

C'est-à-dire qu'un terme $(\hat{b}^\dagger + \hat{b})$ dans l'hamiltonien implémente \hat{X}_B sur un qubit de chats stabilisé.

Remarquons que $\hat{H}_{\text{CNOT,rot}}$ s'annule lorsque le résonateur B est dans l'état $|+\rangle \approx |\beta\rangle$

$$\hat{H}_{\text{CNOT,rot}} |\psi\rangle \otimes |+\rangle = 0, \quad (4.5)$$

et qu'avec $|-\rangle \approx |-\beta\rangle$ nous avons

$$\hat{H}_{\text{CNOT,rot}} |\psi\rangle \otimes |-\rangle = g\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{I}_B |\psi\rangle \otimes |-\rangle. \quad (4.6)$$

Ainsi, l'opération unitaire $\hat{U}_{\text{CNOT,rot}}(t)$ donnant l'évolution sous cet hamiltonien induit une rotation de π en un temps $T = \pi/g$ uniquement avec l'état $|-\beta\rangle$

$$\hat{U}_{\text{CNOT,rot}}(t) = e^{-i\hat{H}_{\text{CNOT,rot}} t} \quad (4.7)$$

$$= e^{-ig\hat{a}^\dagger \hat{a} \frac{\hat{I}_B - \hat{X}_B}{2} t}. \quad (4.8)$$

4.1.1 Rotation et perte de photons

Afin de vérifier que l'opération $\hat{U}_{\text{CNOT,rot}}(T)$ préserve le bruit asymétrique, nous montrons la propagation de l'opérateur de perte de photons \hat{a} à un temps arbitraire τ pendant l'opération

$$\hat{U}_{\hat{E}\text{CNOT,rot}}(T, \tau) = \hat{U}_{\text{CNOT,rot}}(T - \tau) \left(\hat{a} \hat{I}_B \right) \hat{U}_{\text{CNOT,rot}}(\tau). \quad (4.9)$$

La propagation s'obtient à partir de la relation de commutation des opérateurs bosoniques $\hat{a}\hat{a}^\dagger - \hat{a}^\dagger\hat{a} = 1$ en multipliant par \hat{a} par la droite

$$(\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{a} = (\hat{a}\hat{a}^\dagger - 1)\hat{a} \quad (4.10)$$

$$= \hat{a}(\hat{a}^\dagger\hat{a} - 1). \quad (4.11)$$

Il suit que

$$(\hat{a}^\dagger\hat{a})^n\hat{a} = \hat{a}(\hat{a}^\dagger\hat{a} - 1)^n, \quad (4.12)$$

ce qui se généralise pour une fonction $f(\hat{a}^\dagger\hat{a})$ dépendante de $\hat{a}^\dagger\hat{a}$

$$f(\hat{a}^\dagger\hat{a})\hat{a} = \hat{a}f(\hat{a}^\dagger\hat{a} - 1). \quad (4.13)$$

Nous obtenons donc

$$\hat{U}_{\hat{E}\text{CNOT,rot}}(T, \tau) = \left(\hat{a}\hat{I}_B\right) \hat{E}(\tau) \hat{U}_{\text{CNOT,rot}}(T), \quad (4.14)$$

où $\hat{E}(\tau) = e^{ig\hat{I}_A \frac{\hat{I}_B - \hat{X}_B}{2} \tau}$. Nous constatons que l'erreur additionnelle $\hat{E}(\tau)$ n'agit pas sur le qubit A contrairement au cas des simples systèmes à deux niveaux, où l'erreur introduit l'opération d'inversion de phase \hat{Z}_A . Nous avons donc une méthode d'implémentation du CNOT permettant, en principe, de préserver le bruit asymétrique des qubits de chats. Dans les prochaines sections nous ajoutons la modification de la stabilisation du résonateur A et discutons du protocole complet résultant, ainsi que de son taux d'erreurs.

4.2 Stabilisation du résonateur A

4.2.1 Couplage avec le résonateur B

Nous avons montré à la section 2.5.2 que la phase des états cohérents stabilisés $\alpha_o = |\alpha_o|e^{i\phi/2}$ est définie par la phase de la pompe à paires de photons $\mathcal{E}_2 = |\mathcal{E}_2|e^{i\phi}$. Ainsi, la phase de la pompe doit graduellement augmenter de 2π pour préserver la stabilisation

des états chats instantanés $\left| \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^\pm \right\rangle$ durant la rotation de π dans l'espace des phases.

Nous ajoutons un couplage entre les résonateurs A et B pour que la stabilisation de A dépende de l'état du résonateur B. Appliquons cette modification de la stabilisation de A à partir de la forme factorisée de l'hamiltonien $\hat{H}_{2,K}$ de l'équation (2.63)

$$\hat{H}_{2,K} = -K \left(\hat{a}^{\dagger 2} - \frac{\mathcal{E}_{2,A}^*}{K} \right) \left(\hat{a}^2 - \frac{\mathcal{E}_{2,A}}{K} \right) + \frac{|\mathcal{E}_{2,A}|^2}{K}. \quad (4.15)$$

Rappelons que les états cohérents $|\pm\alpha_o\rangle$ sont des états propres dégénérés de cet hamiltonien puisque $(\hat{a}^2 - \mathcal{E}_{2,A}/K)|\pm\alpha_o\rangle = 0$ avec $\alpha_o^2 = \mathcal{E}_{2,A}/K$.

Ajoutons un facteur \hat{F}_{β_o} devant la pompe $\mathcal{E}_{2,A}$ ainsi que son conjugué hermitien $\hat{F}_{\beta_o}^\dagger$ devant $\mathcal{E}_{2,A}^*$

$$\hat{H}_A = -K \left(\hat{a}^{\dagger 2} - \frac{\mathcal{E}_{2,A}^*}{K} \hat{F}_{\beta_o}^\dagger \right) \left(\hat{a}^2 - \frac{\mathcal{E}_{2,A}}{K} \hat{F}_{\beta_o} \right) + \frac{|\mathcal{E}_{2,A}|^2}{K}. \quad (4.16)$$

Pour que la phase de la stabilisation du résonateur A dépendent correctement de l'état de B, \hat{F}_{β_o} doit avoir la propriété

$$\hat{F}_{\beta_o} |\beta_o\rangle = |\beta_o\rangle, \quad (4.17)$$

$$\hat{F}_{\beta_o} |-\beta_o\rangle = e^{i\phi} |-\beta_o\rangle. \quad (4.18)$$

C'est-à-dire que, en faisant varier ϕ , la stabilisation de A subit une rotation uniquement lorsque le résonateur B est dans l'état $|-\beta_o\rangle$. Nous choisissons alors

$$\hat{F}_{\beta_o} = [(\beta_o + \hat{b})/2\beta_o + e^{i\phi}(\beta_o - \hat{b})/2\beta_o], \quad (4.19)$$

puisque $\hat{b}|\pm\beta\rangle = \pm\beta|\pm\beta\rangle$, et l'hamiltonien prend donc la forme

$$\hat{H}_A = -K \left(\hat{a}^{\dagger 2} - \frac{\mathcal{E}_{2,A}^*}{K} \left[\frac{\beta_o + \hat{b}^\dagger}{2\beta_o} + e^{-i\phi} \frac{\beta_o - \hat{b}^\dagger}{2\beta_o} \right] \right) \quad (4.20)$$

$$\times \left(\hat{a}^2 - \frac{\mathcal{E}_{2,A}}{K} \left[\frac{\beta_o + \hat{b}}{2\beta_o} + e^{i\phi} \frac{\beta_o - \hat{b}}{2\beta_o} \right] \right) + \frac{|\mathcal{E}_{2,A}|^2}{K}, \quad (4.21)$$

où β_o est réel.

Le développement de \hat{H}_A permet de comprendre la forme du couplage entre A et B dans le terme de pompe de A

$$\begin{aligned}
\hat{H}_A = & -K\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 \\
& +\mathcal{E}_{2,A} \left[\hat{a}^{\dagger 2}\frac{\beta_o + \hat{b}}{2\beta_o} + \hat{a}^2\frac{\beta_o + \hat{b}^\dagger}{2\beta_o} \right] \\
& +\mathcal{E}_{2,A} \left[e^{i\phi}\hat{a}^{\dagger 2}\frac{\beta_o - \hat{b}}{2\beta_o} + e^{-i\phi}\hat{a}^2\frac{\beta_o - \hat{b}^\dagger}{2\beta_o} \right] \\
& +i\mathcal{E}_{1,B}(\hat{b}^\dagger - \hat{b}) \\
& +\delta_B\hat{b}^\dagger\hat{b} \\
& +C,
\end{aligned} \tag{4.22}$$

où nous choisissons $\mathcal{E}_{2,A}$ réel de sorte que α_o soit réel dans le sous-espace du qubit de chats au début et à la fin de la rotation et

$$\mathcal{E}_{1,B} = -\frac{\mathcal{E}_{2,A}^2}{2\beta_o K} \sin \phi, \tag{4.23}$$

$$\delta_B = -\frac{\mathcal{E}_{2,A}^2}{\beta_o^2 K} \sin^2(\phi/2), \tag{4.24}$$

$$C = -\frac{\mathcal{E}_{2,A}^2}{K} \sin^2(\phi/2), \tag{4.25}$$

sont respectivement une pompe sur le résonateur B, un désaccord sur B et un terme d'énergie indépendant des résonateurs que nous pouvons omettre.

Le premier terme de l'équation (4.22) correspond à la non-linéarité Kerr inchangée du résonateur A. Remarquons que les deux termes en $\mathcal{E}_{2,A}$ correspondent à la pompe à paires de photons modifiée pour la stabilisation du résonateur A. Les deux termes ont la même forme excepté le signe devant \hat{b} et \hat{b}^\dagger ainsi qu'un facteur de phase $e^{\pm i\phi}$ associée à la phase de la pompe du second terme. À partir de la relation $\hat{b}|\pm\beta_o\rangle = \pm\beta_o|\pm\beta_o\rangle$, nous voyons que le premier terme en $\mathcal{E}_{2,A}$ s'annule avec $|\beta_o\rangle$ ce qui sélectionne le second terme qui prend la forme d'une simple pompe à paire de photons avec une phase variable $\mathcal{E}_{2,A}(e^{i\phi}\hat{a}^{\dagger 2} + e^{-i\phi}\hat{a}^2)$. Inversement, avec l'état $|\beta_o\rangle$, le second terme s'élimine et le premier se réduit à la pompe de base pour la stabilisation $\mathcal{E}_{2,A}(\hat{a}^{\dagger 2} + \hat{a}^2)$.

Comme attendu, le résonateur A est affecté par une pompe stationnaire lorsque le résonateur B est dans l'état $|\beta_o\rangle$ et une pompe avec une phase pouvant évoluer de 0 à 2π avec $|\beta_o\rangle$. Quant au résonateur B, les deux termes en $\mathcal{E}_{2,A}$ lui induisent naturellement une certaine rétroaction. Cet effet est automatiquement annulé par les termes de pompe $\mathcal{E}_{1,B}$ et de désaccord δ_B . Nous pouvons simplement nous convaincre de cette annulation à partir de la forme précédente factorisée de l'hamiltonien \hat{H}_A de l'équation (4.21), où nous pouvons voir que $\hat{H}_A \rightarrow |\mathcal{E}_{2,A}|^2/K$ lorsque les résonateurs A et B sont dans les états chats $|\mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^\pm\rangle$ et $|\mathcal{C}_{\beta_o}^\pm\rangle$ respectivement, de la même façon que $\hat{H}_{2,K} \rightarrow |\mathcal{E}_{2,A}|^2/K$, de l'équation (4.15), lorsque l'état du résonateur A est $|\pm\alpha_o\rangle$.

4.3 Hamiltonien complet du protocole

Nous obtenons l'hamiltonien complet $\hat{H}_{\text{CNOT,chats}}$ du CNOT en combinant les équations (4.3) et (4.22) avec l'hamiltonien de la stabilisation du résonateur B, $\hat{H}_B = -K\hat{b}^\dagger\hat{b}^2 + \mathcal{E}_{2,B}(\hat{b}^\dagger + \hat{b}^2)$,

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{\text{CNOT,chats}} = & -K\hat{b}^\dagger\hat{b}^2 + \mathcal{E}_{2,B}(\hat{b}^\dagger + \hat{b}^2) \\
& -K\hat{a}^\dagger\hat{a}^2 \\
& + \mathcal{E}_{2,A} \left[\hat{a}^\dagger\hat{a}^2 \frac{\beta_o + \hat{b}}{2\beta_o} + \hat{a}^2 \frac{\beta_o + \hat{b}^\dagger}{2\beta_o} \right] \\
& + \mathcal{E}_{2,A} \left[e^{i\phi} \hat{a}^\dagger\hat{a}^2 \frac{\beta_o - \hat{b}}{2\beta_o} + e^{-i\phi} \hat{a}^2 \frac{\beta_o - \hat{b}^\dagger}{2\beta_o} \right] \\
& + i\mathcal{E}_{1,B}(\hat{b}^\dagger - \hat{b}) \\
& + \delta_B \hat{b}^\dagger \hat{b} \\
& - \frac{\dot{\phi}}{2} \hat{a}^\dagger \hat{a} \frac{\beta_o(\epsilon_{\beta_o} + \epsilon_{\beta_o}^{-1}) - \hat{b}^\dagger - \hat{b}}{2\beta_o(\epsilon_{\beta_o} + \epsilon_{\beta_o}^{-1})}, \tag{4.26}
\end{aligned}$$

où le facteur g de (4.3) a été remplacé par $-\dot{\phi}/2$ pour obtenir la bonne rotation en sens horaire (signe $-$) selon la phase de la stabilisation, $\alpha_o(t) = |\alpha_o|e^{i\phi(t)/2}$. De même, \hat{X}_B est ici exprimé en termes d'opérateurs bosoniques et nous omettons les termes indépendants des résonateurs.

En principe la rotation des états chats est possible sans le dernier terme en $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ puisque, si la phase ϕ de la pompe évolue de manière adiabatique, les états chats $|\mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^\pm\rangle$ suivront la rotation puisqu'ils sont des états propres dégénérés de l'hamiltonien. Par contre, si l'on accélère l'opération sans le terme $\hat{a}^\dagger\hat{a}$, l'état ne pourrait pas suivre adéquatement le changement brusque de phase. Il quitterait donc le sous-espace du qubit de chats pour peupler d'autres niveaux d'énergie à la fin de la rotation. Dans le cas limite où la rotation est presque instantanée, l'état n'a pas le temps d'évoluer pendant la rotation rapide de la stabilisation.

L'importance du terme $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ provient en partie du fait que nous souhaitons développer un protocole n'étant pas limité par le régime adiabatique. En fait, il est possible d'obtenir ce terme d'une manière alternative à partir de la méthode proposée par [43], discutant du contrôle de systèmes quantiques en régime non adiabatique. Cette technique consiste à obtenir le terme idéal $\hat{H}_{\text{idéal}}$ de l'hamiltonien nécessaire pour exécuter une opération unitaire $\hat{U}(t)$ à partir de la relation

$$\hat{H}_{\text{idéal}} = i\dot{\hat{U}}(t)\hat{U}^\dagger(t). \quad (4.27)$$

Lorsque nous posons

$$\hat{U}(t) = |\mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^+\rangle\langle\mathcal{C}_{\alpha_o}^+| + |\mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^-\rangle\langle\mathcal{C}_{\alpha_o}^-|, \quad (4.28)$$

avec $\alpha_o(t) = |\alpha_o|e^{i\phi(t)/2}$, pour que $|\mathcal{C}_{\alpha_o}^\pm\rangle$ suive l'évolution de $|\mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^\pm\rangle$, nous obtenons effectivement un terme d'hamiltonien en $\hat{a}^\dagger\hat{a}$.

De plus, nous avons identifié une seconde utilité cruciale du terme en $\hat{a}^\dagger\hat{a}$. En effet, dans la limite adiabatique et lorsque ce terme est omis, les états chats $|\mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^\pm\rangle$ en rotations accumulent un facteur de phase $e^{i\theta_\pm}|\mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^\pm\rangle$. Nous montrons dans l'annexe C que la phase relative $\Delta_\theta = \theta_+ - \theta_-$ entre $|\mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^+\rangle$ et $|\mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^-\rangle$ suite à la rotation de π est donnée par

$$\Delta_\theta = 4\pi|\alpha_o|^2 \frac{e^{-2|\alpha_o|^2}}{1 - e^{-4|\alpha_o|^2}}. \quad (4.29)$$

Dans la limite où $\alpha_o = 0$, nous avons $\Delta_\theta = \pi$ tandis que, lorsque $\alpha \rightarrow \infty$, $\Delta_\theta \rightarrow 0$. Le fait que nous obtenions un terme idéal en $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ à partir de l'équation (4.27), en

imposant l'évolution (4.28) sans accumulation de phase, nous indique que le terme en $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ annule cette phase relative. En effet, la projection de l'opérateur $\hat{a}^\dagger \hat{a}$ s'écrit

$$\hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha = |\alpha|^2 \frac{1 + e^{-4|\alpha_o|^2}}{1 - e^{-4|\alpha_o|^2}} \hat{I} - 4|\alpha|^2 \frac{e^{-2|\alpha_o|^2}}{1 - e^{-4|\alpha_o|^2}} \frac{\hat{Z}}{2}. \quad (4.30)$$

Lors de la rotation de π en sens horaire, l'opérateur d'évolution dans le sous-espace des états chats est donc

$$e^{i\hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha \pi} = e^{-i4\pi|\alpha|^2 \frac{e^{-2|\alpha_o|^2}}{1 - e^{-4|\alpha_o|^2}} \frac{\hat{Z}}{2}}, \quad (4.31)$$

ce qui produit une différence de phase entre $|0\rangle$ et $|1\rangle$ donnée par l'équation (4.29) avec un signe opposé, ce qui permet l'annulation de la phase relative.

Finalement, il est important de savoir que tous les termes de couplage de l'hamiltonien $\hat{H}_{\text{CNOT, chats}}$ de l'équation (4.26) ont tous déjà été implémentés en laboratoire. Les termes en $\hat{a}^\dagger \hat{b}$ et $\hat{a}^2 \hat{b}^\dagger$ sont obtenus aux références [10] et [44] et le terme en $\hat{a}^\dagger \hat{a} (\hat{b}^\dagger + \hat{b})$ est obtenu à la référence [45]. Bien que ces termes de couplage n'aient pas été implémentés tous ensemble, il est possible de les produire expérimentalement.

4.4 Performance du CNOT

La performance du protocole du CNOT développé dans ce chapitre a été déterminée numériquement par tomographie de l'opération. La méthode de tomographie est décrite à l'annexe D et permet de caractériser complètement l'opération imparfaite $\mathcal{E}_{\text{CNOT}}$. Ceci nous permet d'obtenir la fidélité $\mathcal{F}_{\text{CNOT}}(\mathcal{E}_{\text{CNOT}})$ de $\mathcal{E}_{\text{CNOT}}$ par rapport au CNOT idéal. Le calcul de cette fidélité est décrit à la section 1.3.2. Le taux d'erreurs total de l'opération est $p = 1 - \mathcal{F}_{\text{CNOT}}(\mathcal{E}_{\text{CNOT}})$.

Nous présentons, à la figure 4.3, le taux d'erreurs p en fonction du temps total de l'opération en nanosecondes dans le cas où $\alpha_o = \beta_o = 2$ et $K/2\pi = 20$ MHz, sans perte de photons pour observer l'efficacité de l'hamiltonien développé. Nous remarquons d'abord que le taux d'erreurs diminue avec le temps total de l'opération. Nous expliquons ce comportement par la présence d'effets non adiabatiques qui ne sont pas mitigés par le protocole. Ainsi, plus l'opération est rapide, plus ces effets sont

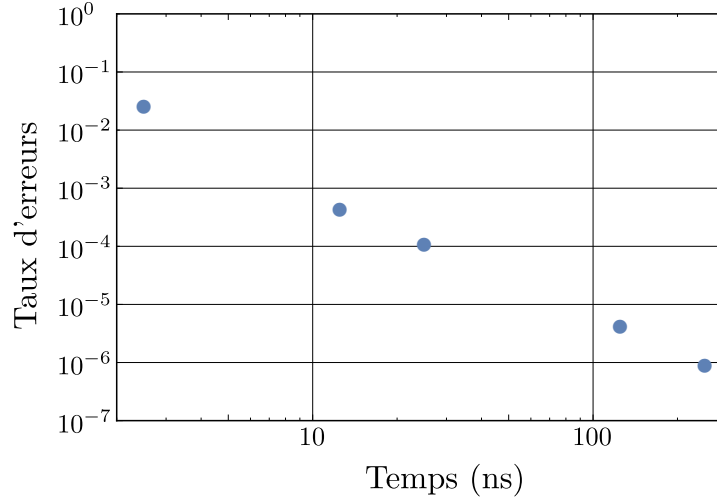


FIGURE 4.3 Taux d'erreurs du CNOT sans pertes de photons pour montrer l'efficacité du protocole donné par l'hamiltonien $\hat{H}_{\text{CNOT, chats}}$ de l'équation (4.26).

importants et le taux d'erreurs augmente. Il est important de noter que les temps typiques d'opérations dans le domaine des circuits supraconducteurs s'étend d'environ 50 ns à environ 700 ns. Dans cet intervalle de temps, nous observons un taux d'erreurs inférieur à 10^{-4} ce qui promet qu'en principe le protocole développé peut atteindre une haute fidélité dans un temps typique.

À la figure 4.4, nous montrons la matrice χ des erreurs introduites par l'opération en présence d'un taux de pertes de photons de $\kappa_1/2\pi = 0.0005K/2\pi = 10\text{kHz}$ pour un temps total de $t = 500\text{ns}$ correspondant à $\gamma \approx 0.03$, avec $\alpha_o = \beta_o = 2$. Les valeurs du taux de pertes de photons κ_1 et du temps t utilisées ici n'ont pas d'importance particulière. Nous les choisissons pour obtenir une valeur d'intérêt de γ et pour montrer la préservation de la propriété d'asymétrie du bruit. Une caractérisation du système expérimental est nécessaire pour connaître les valeurs réalistes du taux d'erreurs et des éléments de la matrice χ .

Dans la figure 4.4, les colonnes sont associées aux termes $\hat{P}_i \hat{\rho}_\alpha \hat{P}_j$ ayant le même opérateur de droite, \hat{P}_j . Par exemple, la première colonne correspond à $\hat{P}_i \hat{\rho}_\alpha (\hat{I}\hat{I})$. Les rangées suivent le même principe avec l'opérateur de gauche, \hat{P}_i . Donc, l'élément $\chi_{0,1}$, par exemple, correspond au terme $(\hat{I}\hat{I}) \hat{\rho}_\alpha (\hat{I}\hat{X})$.

Nous avons retiré l'élément $\chi_{00} = 0.7856$ correspondant au terme $(\hat{I}\hat{I}) \hat{\rho}_\alpha (\hat{I}\hat{I})$

pour permettre la visibilité des éléments de matrice associés aux erreurs dominantes. Nous voyons que les termes contenant uniquement l'erreur \hat{X} dominent le modèle d'erreurs. En effet, les termes d'erreurs dominantes sont $\hat{I}\hat{X}\hat{\rho}_\alpha\hat{I}\hat{X}$, $\hat{X}\hat{I}\hat{\rho}_\alpha\hat{X}\hat{I}$, $\hat{I}\hat{X}\hat{\rho}_\alpha\hat{X}\hat{X}$, $\hat{X}\hat{X}\hat{\rho}_\alpha\hat{I}\hat{X}$ et $\hat{X}\hat{X}\hat{\rho}_\alpha\hat{X}\hat{X}$ avec respectivement $\chi_{11} = 0.1031$, $\chi_{44} = 0.0556$, $\chi_{45} = 0.0275i$, $\chi_{54} = -0.0275i$ et $\chi_{55} = 0.0556$.

L'élément χ_{11} correspond approximativement à la probabilité, au niveau physique, qu'un résonateur subisse l'erreur \hat{X} puisque l'erreur associée à χ_{11} , $\hat{I}\hat{X}$, contient une seule erreur \hat{X} et ne se propage pas vers d'autres erreurs lors du CNOT.

Les erreurs $\hat{X}\hat{I}$ et $\hat{X}\hat{X}$ se propagent l'une vers l'autre durant l'opération. Donc, la somme des probabilités de ces erreurs devrait être dominée par la probabilité qu'une erreur \hat{X} se produise sur un résonateur. En effet, nous avons $\chi_{44} + \chi_{55} = 0.1112$ ce qui est très près de $\chi_{11} = 0.1031$. Nous justifions que $\chi_{44} + \chi_{55}$ soit légèrement plus grand que χ_{11} en raison de la contribution de la probabilité que deux erreurs physiques \hat{X} surviennent, de l'ordre de $\chi_{11}^2 \sim 10^{-2}$. La présence des termes d'erreurs $\hat{I}\hat{X}\hat{\rho}_\alpha\hat{X}\hat{X}$ et $\hat{X}\hat{X}\hat{\rho}_\alpha\hat{I}\hat{X}$ est une signature d'un terme de Kraus de la forme $(\hat{I}\hat{X} \cos \theta + i\hat{X}\hat{X} \sin \theta)\hat{\rho}_\alpha(\hat{I}\hat{X} \cos \theta - i\hat{X}\hat{X} \sin \theta)$ correspondant à la propagation cohérente entre les erreurs $\hat{I}\hat{X}$ et $\hat{X}\hat{X}$.

Ainsi, les probabilités d'erreurs \hat{X} sont de l'ordre de $\sim 10^{-1}$. Bien qu'elles ne soient pas visibles à la figure 4.4, nous observons que les erreurs \hat{Y} et \hat{Z} , ayant une inversion de phase, ont une probabilité de l'ordre de $\sim 10^{-9} - 10^{-8}$. L'asymétrie entre les inversions de bit et de phase est donc de l'ordre de $\sim 10^7 - 10^8$. La structure de bruit observée est donc fortement semblable à celle obtenue au chapitre 2 à la figure 2.10 avec $\gamma \approx 0.03$. La propriété d'asymétrie est donc préservée avec notre protocole de l'opération CNOT.

Nous validons ainsi la possibilité d'utiliser le CNOT avec les qubits de chats dans des protocoles tolérants aux fautes optimisés pour le bruit asymétrique. Ceci permet d'améliorer le protocole déjà avantageux développé dans [3, 4] ainsi que de permettre l'implémentation du protocole de [5] réalisant un taux seuil d'erreurs très élevé.

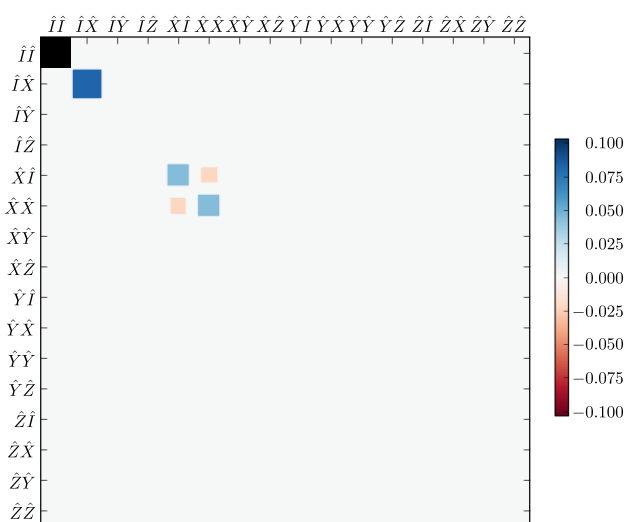


FIGURE 4.4 Matrice χ du CNOT en présence de perte de photons, sans l'élément $\chi_{00} = 0.7856$ pour la visibilité des éléments importants contribuant aux erreurs, $\chi_{11} = 0.1031$, $\chi_{44} = 0.0556$, $\chi_{54} = -0.0275i$, $\chi_{45} = 0.0275i$ et $\chi_{55} = 0.0556$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons montré que le qubit de chats présente un modèle d'erreurs asymétrique. Ce modèle a été obtenu en intégrant analytiquement l'équation maîtresse décrivant la perte de photons, par projection dans le sous-espace stabilisé des états chats. Ces résultats ont été validés par comparaison avec nos résultats de simulations numériques du système sans projection.

Ensuite, le modèle d'erreurs a été utilisé pour l'évaluation de la performance de la correction d'erreurs avec des codes simples et des calculs analytiques et numériques de fidélité d'intrication. Cela a permis de montrer qu'il est avantageux, en principe, d'utiliser les états chats plutôt que les états à 0 et 1 photon pour encoder un qubit. Cet avantage provient de l'exploitation de la propriété d'asymétrie du bruit en optimisant la correction pour le modèle d'erreurs du qubit.

Finalement, nous avons développé une implémentation physique réaliste du CNOT avec les qubits de chats en respectant la préservation de l'asymétrie du bruit. La fidélité du protocole de l'opération sans perte de photons a été évaluée par tomographie de nos simulations numériques. Nous avons montré une fidélité supérieure à 99.99% avec un temps d'opération typique en électrodynamique quantique en circuit. La tomographie des simulations de l'opération en présence de perte de photons a révélé la préservation du modèle d'erreurs asymétrique.

Dans ce mémoire, on montre d'abord la possibilité d'optimiser des codes de correction d'erreurs pour le modèle d'erreurs du qubit de chats à des fins d'amélioration de performance. L'optimisation mène à une meilleure correction des erreurs, une augmentation du taux seuil d'erreurs ainsi qu'une réduction des ressources nécessaires aux protocoles tolérants aux fautes, selon différentes études du domaine de la correction

d'erreurs [3–6].

Le développement du CNOT permet l'amélioration de protocoles tolérants aux fautes optimisés pour le bruit asymétrique [3, 4] ainsi que la possibilité d'implémenter certains protocoles avantageux comme celui de la référence [5] présentant un seuil largement élevé.

La suite de ces travaux consiste d'abord à développer une méthode expérimentale permettant de réaliser tous les termes requis pour le CNOT proposé dans ce mémoire. De plus, il serait pertinent de poursuivre la caractérisation du modèle d'erreurs du qubit de chats par tomographie des autres opérations, mesures et préparations d'états exécutés avec ce qubit. Compléter cet objectif permet une évaluation beaucoup plus réaliste de la performance de la correction d'erreurs quantiques et de protocoles tolérants aux fautes en tenant compte de chaque opération, mesure et préparation d'état imparfaite utilisée dans ces algorithmes. Ces calculs approfondiront nos connaissances quant à l'implémentation en laboratoire de ces constructions. Par exemple, le calcul du taux seuil d'erreurs propre aux protocoles tolérants aux fautes du qubit de chats, en tenant compte d'un maximum d'imperfections, constituera une estimation de la précision expérimentale requise. Cela déterminera les aspects du qubit de chats à améliorer pour atteindre une réalisation expérimentale de protocoles tolérants aux fautes basés sur ce qubit.

Annexe A

Fidélité d'intrication et matrice χ

Dans cette annexe, nous montrons que la fidélité d'intrication \mathcal{F} d'un canal quantique \mathcal{E} présentée à la section 1.3.1 est égale à l'élément χ_{00} de sa représentation en matrice χ .

Tout d'abord, la fidélité d'intrication est définie à partir de la figure 1.3, où la transformation \mathcal{E} , ou le canal, agit sur le premier qubit d'une paire maximalement intriqué dans l'état $|\Phi^+\rangle = (|00\rangle + |11\rangle)/\sqrt{2}$. L'état final est donné par

$$\hat{\rho} = (\mathcal{E} \otimes \hat{I}) |\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|, \quad (\text{A.1})$$

avec

$$\mathcal{E}(\hat{O}) = \sum_{ij} \chi_{ij} \hat{P}_i \hat{O} \hat{P}_j \quad (\text{A.2})$$

dans la représentation de la matrice χ , où les \hat{P}_i sont les opérateurs de Pauli. La fidélité d'intrication s'obtient à partir de l'équation (1.41)

$$\mathcal{F} = \langle\Phi^+|\hat{\rho}|\Phi^+\rangle = \text{Tr}(\hat{\rho}|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+|). \quad (\text{A.3})$$

On peut montrer que

$$|\Phi^+\rangle\langle\Phi^+| = \frac{1}{4} \left(\hat{I} \otimes \hat{I}^T + \hat{X} \otimes \hat{X}^T + \hat{Y} \otimes \hat{Y}^T + \hat{Z} \otimes \hat{Z}^T \right) \quad (\text{A.4})$$

$$= \frac{1}{4} \sum_k \hat{P}_k \otimes \hat{P}_k^T. \quad (\text{A.5})$$

Ainsi, l'équation (A.3) se développe comme

$$\mathcal{F} = \frac{1}{16} \sum_{kl} \text{Tr} \left[(\mathcal{E} \otimes \hat{I})(\hat{P}_k \otimes \hat{P}_k^T)(\hat{P}_l \otimes \hat{P}_l^T) \right], \quad (\text{A.6})$$

$$= \frac{1}{16} \sum_{kl} \text{Tr} \left[(\mathcal{E}(\hat{P}_k) \otimes \hat{P}_k^T)(\hat{P}_l \otimes \hat{P}_l^T) \right], \quad (\text{A.7})$$

$$= \frac{1}{16} \sum_{kl} \text{Tr} \left[\mathcal{E}(\hat{P}_k) \hat{P}_l \right] \text{Tr} \left(\hat{P}_k^T \hat{P}_l^T \right). \quad (\text{A.8})$$

Nous pouvons utiliser la propriété d'orthogonalité des matrices de Pauli donnée à l'équation (1.6)

$$\text{Tr}(\hat{P}_i \hat{P}_j) = \text{Tr}(\hat{P}_i^T \hat{P}_j^T) = 2\delta_{ij}, \quad (\text{A.9})$$

pour simplifier l'expression de \mathcal{F}

$$\mathcal{F} = \frac{1}{8} \sum_k \text{Tr} \left[\mathcal{E}(\hat{P}_k) \hat{P}_k \right]. \quad (\text{A.10})$$

La définition de \mathcal{E} à l'équation (A.2) donne maintenant

$$\mathcal{F} = \frac{1}{8} \sum_k \sum_{ij} \chi_{ij} \text{Tr} \left(\hat{P}_i \hat{P}_k \hat{P}_j \hat{P}_k \right). \quad (\text{A.11})$$

Utilisons maintenant l'identité

$$\sum_k \hat{P}_k \hat{P}_j \hat{P}_k = \hat{I} \hat{P}_j \hat{I} + \hat{X} \hat{P}_j \hat{X} + \hat{Y} \hat{P}_j \hat{Y} + \hat{Z} \hat{P}_j \hat{Z} \quad (\text{A.12})$$

$$= 4\delta_{j0}, \quad (\text{A.13})$$

puisque $\hat{P}_k^2 = \hat{I}$ et chaque opérateur de Pauli commute et anti-commute avec un nombre égal d'opérateurs de Pauli à l'exception de $\hat{P}_0 = \hat{I}$ qui commute avec tous les

opérateurs. Nous obtenons donc

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_{ij} \chi_{ij} \text{Tr}(\hat{P}_i) \delta_{j0} \quad (\text{A.14})$$

$$= \chi_{00}, \quad (\text{A.15})$$

parce que $\text{Tr}(\hat{P}_i) = 2\delta_{i0}$. Nous avons donc montré que la fidélité d'intrication \mathcal{F} est égale à l'élément χ_{00} de la matrice χ .

Annexe B

Modèle d'erreurs

Dans cette annexe, nous décrivons la dérivation analytique du modèle d'erreurs du qubit de chats par intégration de son équation maîtresse (2.77)

$$\dot{\hat{\rho}}_\alpha = \kappa_1 \hat{a}_\alpha \hat{\rho}_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger - \frac{\kappa_1}{2} (\hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha \hat{\rho}_\alpha + \hat{\rho}_\alpha \hat{a}_\alpha^\dagger \hat{a}_\alpha) \equiv \mathcal{L}_\alpha(\hat{\rho}_\alpha). \quad (\text{B.1})$$

Cette méthode de dérivation provient de la référence [15]. Réexprimons l'équation (B.1) avec la forme vectorisée de la matrice densité, $\hat{\rho}_\alpha \rightarrow \vec{\rho}_\alpha$,

$$\dot{\vec{\rho}}_\alpha = \hat{L}_\alpha \vec{\rho}_\alpha, \quad (\text{B.2})$$

où

$$[\hat{L}_\alpha]_{kl} = \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\hat{P}_k \mathcal{L}_\alpha(\hat{P}_l) \right]. \quad (\text{B.3})$$

Nous obtenons ainsi

$$\hat{L}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -m\kappa_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p\kappa_1 & 0 \\ -r\kappa_1 & 0 & 0 & -q\kappa_1 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

avec

$$m = \frac{(\epsilon_\alpha^2 - 1)^2 |\alpha|^2}{2\epsilon_\alpha^2}, \quad (\text{B.5})$$

$$p = \frac{(\epsilon_\alpha^2 + 1)^2 |\alpha|^2}{2\epsilon_\alpha^2}, \quad (\text{B.6})$$

$$q = \frac{(\epsilon_\alpha^4 + 1)^2 |\alpha|^2}{\epsilon_\alpha^2}, \quad (\text{B.7})$$

$$r = \frac{(\epsilon_\alpha^4 - 1) |\alpha|^2}{\epsilon_\alpha^2} \text{ et} \quad (\text{B.8})$$

$$\epsilon_\alpha = \sqrt{\tanh |\alpha|^2}. \quad (\text{B.9})$$

La solution de (B.2) s'écrit sous la représentation de la matrice de transfert de Pauli

$$\mathcal{E}(\vec{\rho}_\alpha) = \hat{R}_\mathcal{E} \vec{\rho}_\alpha, \quad (\text{B.10})$$

$$\hat{R}_\mathcal{E}(t) = e^{\hat{L}_\alpha t}. \quad (\text{B.11})$$

Nous avons donc

$$\hat{R}_\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M & 0 & 0 \\ 0 & 0 & P & 0 \\ R & 0 & 0 & Q \end{pmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

où

$$M = e^{-m\kappa_1 t} = (1 - \gamma)^m, \quad (\text{B.13})$$

$$P = e^{-p\kappa_1 t} = (1 - \gamma)^p, \quad (\text{B.14})$$

$$Q = e^{-q\kappa_1 t} = (1 - \gamma)^q, \quad (\text{B.15})$$

$$R = (Q - 1) \frac{r}{q}, \quad (\text{B.16})$$

$$(\text{B.17})$$

avec $\gamma = 1 - e^{-\kappa_1 t}$. $\hat{R}_\mathcal{E}$ décrit entièrement le modèle d'erreurs donné par la perte de

photons du qubit de chats.

La conversion de la matrice de transfert de Pauli vers la représentation de la matrice χ s'obtient à partir de la relation (1.39).

$$\chi_{k,l} = \frac{1}{4} \sum_{i,j} [\hat{R}_{\mathcal{E}}]_{i,j} \text{Tr} \left(\hat{P}_i \hat{P}_k \hat{P}_j \hat{P}_l \right), \quad (\text{B.18})$$

ce qui produit

$$\chi = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 + M + P + Q & 0 & 0 & R \\ 0 & 1 + M - P - Q & -iR & 0 \\ 0 & iR & 1 - M + P - Q & 0 \\ R & 0 & 0 & 1 - M - P + Q \end{pmatrix} \quad (\text{B.19})$$

La diagonalisation de la matrice χ permet d'obtenir la décomposition de Kraus du modèle d'erreurs. Les opérateurs de Kraus \hat{K}_i sont donnés par

$$\hat{K}_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{i(-M+P-R+\sqrt{(M-P)^2+R^2})}{2R\sqrt{\frac{\sqrt{(M-P)^2+R^2}}{M-P+\sqrt{(M-P)^2+R^2}}}} \\ \frac{i(-M+P+R+\sqrt{(M-P)^2+R^2})}{2R\sqrt{\frac{\sqrt{(M-P)^2+R^2}}{M-P+\sqrt{(M-P)^2+R^2}}}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.20})$$

$$\hat{K}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{i(M-P+R+\sqrt{(M-P)^2+R^2})}{2R\sqrt{\frac{\sqrt{(M-P)^2+R^2}}{-M+P+\sqrt{(M-P)^2+R^2}}}} \\ \frac{i(-M+P+R-\sqrt{(M-P)^2+R^2})}{2R\sqrt{\frac{\sqrt{(M-P)^2+R^2}}{-M+P+\sqrt{(M-P)^2+R^2}}}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.21})$$

$$\hat{K}_3 = \left(\begin{array}{cc} \frac{-M-P+R-\sqrt{(M+P)^2+R^2}}{2R\sqrt{\frac{\sqrt{(M+P)^2+R^2}(M+P+\sqrt{(M+P)^2+R^2})}{R^2}}} & 0 \\ 0 & \frac{M+P+R+\sqrt{(M+P)^2+R^2}}{2R\sqrt{\frac{\sqrt{(M+P)^2+R^2}(M+P+\sqrt{(M+P)^2+R^2})}{R^2}}} \end{array} \right) \text{ et} \quad (\text{B.22})$$

$$\hat{K}_4 = \left(\begin{array}{cc} \frac{-M-P+R+\sqrt{(M+P)^2+R^2}}{2R\sqrt{\frac{\sqrt{(M+P)^2+R^2}}{M+P+\sqrt{(M+P)^2+R^2}}}} & 0 \\ 0 & \frac{M+P+R-\sqrt{(M+P)^2+R^2}}{2R\sqrt{\frac{\sqrt{(M+P)^2+R^2}}{M+P+\sqrt{(M+P)^2+R^2}}}} \end{array} \right). \quad (\text{B.23})$$

Annexe C

Accumulation de phase lors d'une rotation dans l'espace des phases

Dans cette annexe, nous présentons la dérivation de la différence de phase Δ_θ de l'équation (4.29) discutée à la section 4.3. La phase θ_\pm s'accumule lorsque les états chats $|\mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^\pm\rangle$ subissent une rotation dans l'espace des phases sans l'utilisation du terme $\hat{a}^\dagger\hat{a}$.

Commençons avec l'état général du qubit de chats $|\psi(t)\rangle = x(t)|\mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^+\rangle + y(t)|\mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^-\rangle$, où les états chats sont définis à partir des équations (2.22), (2.29) et (2.30)

$$|\mathcal{C}_\alpha^\pm\rangle = \mathcal{N}_\alpha^\pm(|\alpha\rangle \pm |-\alpha\rangle), \quad (\text{C.1})$$

$$|\alpha\rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, \quad (\text{C.2})$$

$$\mathcal{N}_\alpha^\pm = \frac{1}{\sqrt{2(1 \pm e^{-2|\alpha|^2})}}. \quad (\text{C.3})$$

L'état $|\psi(t)\rangle$ évolue adiabatiquement selon l'hamiltonien

$$\hat{H}_{2,K}(t) = -K\hat{a}^{\dagger 2}\hat{a}^2 + \mathcal{E}_{2,A}(e^{i\phi(t)}\hat{a}^{\dagger 2} + e^{-i\phi(t)}\hat{a}^2), \quad (\text{C.4})$$

de sorte que $\alpha_o(t) = e^{i\phi(t)/2}\mathcal{E}_{2,A}/K$ et $\hat{H}_{2,K}(t)|\mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^\pm\rangle = E|\mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^\pm\rangle$, où E est la valeur propre dégénérée indépendante de $\phi(t)$ des états chats. L'évolution est donc donnée

par l'équation de Schrödinger

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = -i\hat{H}_{2,K}(t) |\psi(t)\rangle \quad (\text{C.5})$$

$$= -iE |\psi(t)\rangle \quad (\text{C.6})$$

Avec

$$\frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \frac{dx(t)}{dt} \left| \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^+ \right\rangle + x(t) \frac{d}{dt} \left| \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^+ \right\rangle \quad (\text{C.7})$$

$$+ \frac{dy(t)}{dt} \left| \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^- \right\rangle + y(t) \frac{d}{dt} \left| \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^- \right\rangle, \quad (\text{C.8})$$

nous obtenons des équations différentielles pour les facteurs $x(t)$ et $y(t)$

$$-iEx(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t) \left\langle \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^+ \left| \frac{d}{dt} \left| \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^+ \right\rangle \right. \right\rangle + y(t) \left\langle \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^+ \left| \frac{d}{dt} \left| \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^- \right\rangle \right. \right\rangle \quad \text{et} \quad (\text{C.9})$$

$$-iEy(t) = \frac{dy(t)}{dt} + x(t) \left\langle \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^- \left| \frac{d}{dt} \left| \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^+ \right\rangle \right. \right\rangle + y(t) \left\langle \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^- \left| \frac{d}{dt} \left| \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^- \right\rangle \right. \right\rangle \quad (\text{C.10})$$

en multipliant (C.6) à droite par $\left\langle \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^+ \right|$ et $\left\langle \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^- \right|$ respectivement.

Nous devons développer

$$\frac{d}{dt} \left| \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^+ \right\rangle = \left[\frac{d}{dt} |\alpha_o(t)\rangle + \frac{d}{dt} |-\alpha_o(t)\rangle \right] \mathcal{N}_{\alpha_o(t)}^+ \quad (\text{C.11})$$

$$\frac{d}{dt} \left| \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^- \right\rangle = [|\alpha_o(t)\rangle + |-\alpha_o(t)\rangle] \frac{d\mathcal{N}_{\alpha_o(t)}^+}{dt}. \quad (\text{C.12})$$

À partir de (C.2) on peut montrer que

$$\frac{d}{dt} |\pm\alpha_o(t)\rangle = -\frac{1}{2} \frac{d|\alpha_o(t)|^2}{dt} |\pm\alpha_o(t)\rangle \pm \frac{d\alpha_o(t)}{dt} \hat{a}^\dagger |\pm\alpha_o(t)\rangle. \quad (\text{C.13})$$

Alors,

$$\frac{d}{dt} \left| \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^\pm \right\rangle = -\frac{1}{2} \frac{d|\alpha_o(t)|^2}{dt} \left| \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^\pm \right\rangle + \frac{\mathcal{N}_{\alpha_o(t)}^\pm}{\mathcal{N}_{\alpha_o(t)}^\mp} \frac{d\alpha_o(t)}{dt} \hat{a}^\dagger \left| \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^\mp \right\rangle \quad (\text{C.14})$$

$$+ \frac{1}{\mathcal{N}_{\alpha_o(t)}^\pm} \frac{d\mathcal{N}_{\alpha_o(t)}^\pm}{dt} \left| \mathcal{C}_{\alpha_o(t)}^\pm \right\rangle. \quad (\text{C.15})$$

Dans notre cas, $\alpha_o(t) = |\alpha_o|e^{i\phi(t)/2}$ donc

$$\frac{d\alpha_o(t)}{dt} = i\frac{\dot{\phi}(t)}{2}\alpha_o(t), \quad (\text{C.16})$$

$$\frac{d|\alpha_o(t)|^2}{dt} = 0, \quad (\text{C.17})$$

$$\frac{d\mathcal{N}_{\alpha_o(t)}^{\pm}}{dt} = 0. \quad (\text{C.18})$$

Il suit donc que

$$-iEx(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)\frac{\mathcal{N}_{\alpha_o(t)}^{+2}}{\mathcal{N}_{\alpha_o(t)}^{-2}}|\alpha_o|^2i\frac{\dot{\phi}(t)}{2}, \quad (\text{C.19})$$

$$-iEy(t) = \frac{dy(t)}{dt} + y(t)\frac{\mathcal{N}_{\alpha_o(t)}^{-2}}{\mathcal{N}_{\alpha_o(t)}^{+2}}|\alpha_o|^2i\frac{\dot{\phi}(t)}{2}. \quad (\text{C.20})$$

Ceci a pour solution $x(t) = x(0)e^{i\theta_+}$ et $y(t) = y(0)e^{i\theta_-}$, où

$$\theta_{\pm} = \int \left(-E - \frac{\mathcal{N}_{\alpha_o(t)}^{\pm 2}}{\mathcal{N}_{\alpha_o(t)}^{\mp 2}}|\alpha_o|^2\frac{\dot{\phi}(t)}{2} \right) dt. \quad (\text{C.21})$$

Nous obtenons donc

$$\Delta_{\theta} = \theta_+ - \theta_- = \pi|\alpha_o|^2 \left(\frac{\mathcal{N}_{\alpha_o(t)}^{-2}}{\mathcal{N}_{\alpha_o(t)}^{+2}} - \frac{\mathcal{N}_{\alpha_o(t)}^{+2}}{\mathcal{N}_{\alpha_o(t)}^{-2}} \right) \quad (\text{C.22})$$

$$= 4\pi|\alpha_o|^2 \frac{e^{-2|\alpha_o|^2}}{1 - e^{-4|\alpha_o|^2}}. \quad (\text{C.23})$$

Annexe D

Tomographie numérique

Dans cette annexe, nous décrivons la méthode utilisée pour caractériser numériquement l'opération du CNOT développée au chapitre 4. À la section 1.2.3, nous avons vu que la matrice de transfert de Pauli $\hat{R}_{\mathcal{E}}$ constitue une description complète d'une transformation \mathcal{E} . La relation entre $\hat{R}_{\mathcal{E}}$ et \mathcal{E} est donnée par l'équation (1.34)

$$[\hat{R}_{\mathcal{E}}]_{ij} = \text{Tr}(\hat{P}_i \mathcal{E}(\hat{P}_j)) / 2^n. \quad (\text{D.1})$$

Numériquement, nous intégrons l'équation maîtresse du système pour obtenir $\mathcal{E}(\hat{\mathcal{O}})$ en sortie, où $\hat{\mathcal{O}}$ est un opérateur que nous faisons évoluer selon l'équation. Remarquons qu'il n'est pas nécessaire que $\hat{\mathcal{O}}$ représente un état pour permettre l'intégration de l'équation maîtresse. Il ne correspond pas nécessairement à une matrice densité. Nous pouvons donc évaluer numériquement $\mathcal{E}(\hat{P}_j)$ pour les 4^n membres du groupe de Pauli \mathcal{P}_n , pour un système à n qubits. Par exemple, dans le cas d'une opération à 2 qubits, cela correspond à 16 intégrations numériques. Ensuite, l'équation (D.1) permet d'obtenir chaque élément de la matrice de transfert $\hat{R}_{\mathcal{E}}$.

Notons que la propriété de linéarité de \mathcal{E} implique que $\mathcal{E}(\hat{A} + \hat{B}) = \mathcal{E}(\hat{A}) + \mathcal{E}(\hat{B})$. C'est-à-dire que nous ne sommes pas limités aux opérateurs de Pauli \hat{P}_j pour effectuer l'intégration de l'équation maîtresse. Par exemple, $\mathcal{E}(\hat{X}) = \mathcal{E}(|1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1|) = \mathcal{E}(|1\rangle\langle 0|) + \mathcal{E}(|0\rangle\langle 1|)$. Nous pouvons donc évaluer l'évolution de \hat{X} à partir de l'évolution des

matrices $|1\rangle\langle 0|$ et $|0\rangle\langle 1|$. De plus, nous pouvons montrer que

$$\mathcal{E}(\hat{X}) = 2\mathcal{E}(|+\rangle\langle +|) - \mathcal{E}(|0\rangle\langle 0|) - \mathcal{E}(|1\rangle\langle 1|). \quad (\text{D.2})$$

Il est donc possible d'obtenir $\mathcal{E}(\hat{X})$ à partir de la simulation d'états purs. En général, nous pouvons faire la tomographie complète d'une opération quantique à partir de simulation de 4^n états sélectionnés astucieusement.

Dans le cas où la transformation \mathcal{E} serait unitaire, c'est-à-dire qu'elle ne transforme pas d'état pur en état mixte, il est avantageux d'intégrer numériquement des états purs plutôt que des matrices arbitraires. En effet, l'évolution d'états purs peut être représentée par des vecteurs de dimensions $2^n \times 1$, ce qui est plus rapide à intégrer numériquement que des matrices $2^n \times 2^n$.

Bibliographie

1. Gottesman, D. An Introduction to Quantum Error Correction and Fault-Tolerant Quantum Computation (2009) (cf. p. [vii](#), [5](#), [15](#), [31](#), [32](#), [35](#), [39](#), [40](#)).
2. Nielsen, M. A. & Chuang, I. L. *Quantum Computation and Quantum Information: 10th Anniversary Edition* 10th (Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2011) (cf. p. [vii](#), [1](#), [5](#), [12](#), [19](#)).
3. Aliferis, P. & Preskill, J. Fault-tolerant quantum computation against biased noise. *Phys. Rev. A* **78**, 052331 (2008) (cf. p. [vii](#), [2](#), [3](#), [34](#), [41](#), [43](#), [44](#), [76](#), [89](#), [100](#), [104](#)).
4. Aliferis, P., Brito, F., DiVincenzo, D. P., Preskill, J., Steffen, M. & Terhal, B. M. Fault-tolerant computing with biased-noise superconducting qubits: a case study. *New Journal of Physics* **11**, 013061 (2009) (cf. p. [vii](#), [2](#), [3](#), [34](#), [41](#), [43](#), [44](#), [76](#), [89](#), [100](#), [104](#)).
5. Tuckett, D. K., Bartlett, S. D. & Flammia, S. T. Ultrahigh Error Threshold for Surface Codes with Biased Noise. *Phys. Rev. Lett.* **120**, 050505 (2018) (cf. p. [vii](#), [2](#), [3](#), [34](#), [41](#), [43](#), [44](#), [76](#), [89](#), [100](#), [104](#)).
6. Webster, P., Bartlett, S. D. & Poulin, D. Reducing the overhead for quantum computation when noise is biased. *Phys. Rev. A* **92**, 062309 (2015) (cf. p. [vii](#), [2](#), [41](#), [44](#), [104](#)).
7. Puri, S., Boutin, S. & Blais, A. Engineering the quantum states of light in a Kerr-nonlinear resonator by two-photon driving. *npj Quantum Information* **3**, 18 (2017) (cf. p. [vii](#), [2](#), [44](#), [47](#), [66](#), [67](#), [71](#)).
8. Blais, A., Huang, R.-S., Wallraff, A., Girvin, S. M. & Schoelkopf, R. J. Cavity quantum electrodynamics for superconducting electrical circuits: An architecture for quantum computation. *Phys. Rev. A* **69**, 062320 (2004) (cf. p. [vii](#), [47](#)).
9. Mirrahimi, M., Leghtas, Z., Albert, V. V., Touzard, S., Schoelkopf, R. J., Jiang, L. & Devoret, M. H. Dynamically protected cat-qubits: a new paradigm for universal quantum computation. *New Journal of Physics* **16**, 045014 (2014) (cf. p. [2](#), [30](#), [44](#), [65](#), [67](#)).

10. Leghtas, Z., Touzard, S., Pop, I. M., Kou, A., Vlastakis, B., Petrenko, A., Sliwa, K. M., Narla, A., Shankar, S., Hatridge, M. J., Reagor, M., Frunzio, L., Schoelkopf, R. J., Mirrahimi, M. & Devoret, M. H. Confining the state of light to a quantum manifold by engineered two-photon loss. *Science* **347**, 853–857 (2015) (cf. p. [2](#), [44](#), [47](#), [65](#), [67](#), [98](#)).
11. Albert, V. V., Noh, K., Duivenvoorden, K., Young, D. J., Brierley, R. T., Reinhold, P., Vuillot, C., Li, L., Shen, C., Girvin, S. M., Terhal, B. M. & Jiang, L. Performance and structure of single-mode bosonic codes. *Phys. Rev. A* **97**, 032346 (2018) (cf. p. [2](#), [30](#), [47](#), [58](#), [74](#)).
12. Fowler, A. G., Mariantoni, M., Martinis, J. M. & Cleland, A. N. Surface codes: Towards practical large-scale quantum computation. *Phys. Rev. A* **86**, 032324 (2012) (cf. p. [2](#), [25](#), [26](#), [33](#), [40](#), [41](#)).
13. Puri, S., St-Jean, L., Gross, J. A., Grimm, A., Frattini, N., Iyer, P. S., Krishna, A., Touzard, S., Jiang, L., Blais, A. *et al.* Bias-preserving gates with stabilized cat qubits. *arXiv preprint arXiv:1905.00450* (2019) (cf. p. [3](#)).
14. Greenbaum, D. Introduction to quantum gate set tomography. *arXiv preprint arXiv:1509.02921* (2015) (cf. p. [11](#), [12](#), [15–19](#)).
15. Andersson, E., Cresser, J. D. & Hall, M. J. W. Finding the Kraus decomposition from a master equation and vice versa. *Journal of Modern Optics* **54**, 1695–1716 (2007) (cf. p. [16](#), [19](#), [109](#)).
16. Geller, M. R. & Zhou, Z. Efficient error models for fault-tolerant architectures and the Pauli twirling approximation. *Phys. Rev. A* **88**, 012314 (2013) (cf. p. [17](#)).
17. Rahn, B., Doherty, A. C. & Mabuchi, H. Exact performance of concatenated quantum codes. *Phys. Rev. A* **66**, 032304 (2002) (cf. p. [20](#), [27](#), [28](#)).
18. Chow, J. M., Gambetta, J. M., Córcoles, A. D., Merkel, S. T., Smolin, J. A., Rigetti, C., Poletto, S., Keefe, G. A., Rothwell, M. B., Rozen, J. R., Ketchen, M. B. & Steffen, M. Universal Quantum Gate Set Approaching Fault-Tolerant Thresholds with Superconducting Qubits. *Phys. Rev. Lett.* **109**, 060501 (2012) (cf. p. [21](#)).
19. Nielsen, M. A. A simple formula for the average gate fidelity of a quantum dynamical operation. *Physics Letters A* **303**, 249–252 (2002) (cf. p. [21](#)).
20. Shor, P. W. Scheme for reducing decoherence in quantum computer memory. *Physical review A* **52**, R2493 (1995) (cf. p. [23–25](#)).
21. Martinis, J. M. *Qubit metrology for building a fault-tolerant quantum computer* 2015 (cf. p. [32](#)).
22. Duclos-Cianci, G. & Poulin, D. *A renormalization group decoding algorithm for topological quantum codes in 2010 IEEE Information Theory Workshop, ITW 2010, Dublin, Ireland, August 30 - September 3, 2010* (2010), 1–5 (cf. p. [33](#)).

23. Boykin, P. O., Mor, T., Pulver, M., Roychowdhury, V. & Vatan, F. *On Universal and Fault-Tolerant Quantum Computing: A Novel Basis and a New Constructive Proof of Universality for Shor's Basis* in *Proceedings of the 40th Annual Symposium on Foundations of Computer Science* (IEEE Computer Society, Washington, DC, USA, 1999), 486– (cf. p. 36).
24. Eastin, B. & Knill, E. Restrictions on Transversal Encoded Quantum Gate Sets. *Phys. Rev. Lett.* **102**, 110502 (2009) (cf. p. 40).
25. Sun, L., Petrenko, A., Leghtas, Z., Vlastakis, B., Kirchmair, G., Sliwa, K., Narla, A., Hatridge, M., Shankar, S., Blumoff, J. *et al.* Tracking photon jumps with repeated quantum non-demolition parity measurements. *Nature* **511**, 444 (2014) (cf. p. 47).
26. Wang, C., Gao, Y. Y., Reinhold, P., Heeres, R. W., Ofek, N., Chou, K., Axline, C., Reagor, M., Blumoff, J., Sliwa, K. M., Frunzio, L., Girvin, S. M., Jiang, L., Mirrahimi, M., Devoret, M. H. & Schoelkopf, R. J. A Schrödinger cat living in two boxes. *Science* **352**, 1087–1091 (2016) (cf. p. 47).
27. Ofek, N., Petrenko, A., Heeres, R., Reinhold, P., Leghtas, Z., Vlastakis, B., Liu, Y., Frunzio, L., Girvin, S., Jiang, L. *et al.* Extending the lifetime of a quantum bit with error correction in superconducting circuits. *Nature* **536**, 441 (2016) (cf. p. 47).
28. Heeres, R. W., Reinhold, P., Ofek, N., Frunzio, L., Jiang, L., Devoret, M. H. & Schoelkopf, R. J. Implementing a universal gate set on a logical qubit encoded in an oscillator. *Nature communications* **8**, 94 (2017) (cf. p. 47).
29. Hu, L., Ma, Y., Cai, W., Mu, X., Xu, Y., Wang, W., Wu, Y., Wang, H., Song, Y., Zou, C.-L. *et al.* Quantum error correction and universal gate set operation on a binomial bosonic logical qubit. *Nature Physics*, 1 (2019) (cf. p. 47).
30. Gottesman, D., Kitaev, A. & Preskill, J. Encoding a qubit in an oscillator. *Physical Review A* **64**, 012310 (2001) (cf. p. 47).
31. Haroche, S. & Raimond, J. *Exploring the Quantum: Atoms, Cavities, and Photons* (OUP Oxford, 2006) (cf. p. 47).
32. Leonhardt, U. & Paul, H. Measuring the quantum state of light. *Progress in Quantum Electronics* **19**, 89–130 (1995) (cf. p. 50).
33. Leonhardt, U. *Measuring the quantum state of light* (Cambridge university press, 1997) (cf. p. 51).
34. Gardiner, C. & Zoller, P. *Quantum noise: a handbook of Markovian and non-Markovian quantum stochastic methods with applications to quantum optics* (Springer Science & Business Media, 2004) (cf. p. 53).
35. Girvin, S. M. Circuit qed: Superconducting qubits coupled to microwave photons. *Proceedings of the 2011 Les Houches Summer School* (2011) (cf. p. 57, 62, 68).

36. Carmichael, H. *Statistical Methods in Quantum Optics 1: Master Equations and Fokker-Planck Equations* (Springer Berlin Heidelberg, 2013) (cf. p. 58).
37. Dykman, M. *Fluctuating Nonlinear Oscillators: From Nanomechanics to Quantum Superconducting Circuits* (OUP Oxford, 2012) (cf. p. 66).
38. Koch, J., Yu, T. M., Gambetta, J., Houck, A. A., Schuster, D. I., Majer, J., Blais, A., Devoret, M. H., Girvin, S. M. & Schoelkopf, R. J. Charge-insensitive qubit design derived from the Cooper pair box. *Phys. Rev. A* **76**, 042319 (2007) (cf. p. 69).
39. Kleiner, R., Koelle, D., Ludwig, F. & Clarke, J. Superconducting quantum interference devices: State of the art and applications. *Proceedings of the IEEE* **92**, 1534–1548 (2004) (cf. p. 70).
40. Boutin, S. *Amplificateur paramétrique Josephson: Limite quantique, modélisation et caractérisation* thèse de doct. (Université de Sherbrooke, 2015) (cf. p. 70).
41. Puri, S., Grimm, A., Campagne-Ibarcq, P., Eickbusch, A., Noh, K., Roberts, G., Jiang, L., Mirrahimi, M., Devoret, M. H. & Girvin, S. M. Stabilized Cat in Driven Nonlinear Cavity: A Fault-Tolerant Error Syndrome Detector. *arXiv preprint arXiv:1807.09334* (2018) (cf. p. 71).
42. Laflamme, R., Miquel, C., Paz, J. P. & Zurek, W. H. Perfect Quantum Error Correcting Code. *Phys. Rev. Lett.* **77**, 198–201 (1996) (cf. p. 80).
43. Berry, M. V. Transitionless quantum driving. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical* **42**, 365303 (2009) (cf. p. 97).
44. Touzard, S., Grimm, A., Leghtas, Z., Mundhada, S. O., Reinhold, P., Axline, C., Reagor, M., Chou, K., Blumoff, J., Sliwa, K. M., Shankar, S., Frunzio, L., Schoelkopf, R. J., Mirrahimi, M. & Devoret, M. H. Coherent Oscillations inside a Quantum Manifold Stabilized by Dissipation. *Phys. Rev. X* **8**, 021005 (2018) (cf. p. 98).
45. Touzard, S., Kou, A., Frattini, N. E., Sivak, V. V., Puri, S., Grimm, A., Frunzio, L., Shankar, S. & Devoret, M. H. Gated conditional displacement readout of superconducting qubits. *arXiv preprint arXiv:1809.06964* (2018) (cf. p. 98).