# Estimación de parámetros para un modelo de regresión difusa simple

Trabajo de para obtener el título de:

Profesional en Matemáticas con Énfasis en Estadística

Universidad del Tolima

Erica Paola Caycedo

Nicolai Rondón Camacho

2017

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA

FACULTAD DE CIENCIAS

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN TRABAJO DE GRADO

**TÍTULO**: ESTIMACIÓN DE PARÁMETROS PARA UN MODELO DE REGRESIÓN DIFUSA SIMPLE

**AUTORES**: NICOLAI RONDON CAMACHO Cód. 070200012009
ERICA PAOLA CAYCEDO CORTES Cód. 070200112009

**DIRECTOR:** JAIRO ALFONSO CLAVIJO

**JURADOS**: YURI MARCELA GARCÍA SAAVEDRA
ALFONSO SÁNCHEZ HERNANDEZ

CALIFICACIÓN:

X APROBÓ ___ REPROBÓ

OBSERVACIONES:

FIRMAS

YURI MARCELA GARCÍA SAAVEDRA
Jurado 1

ALFONSO SÁNCHEZ HERNANDEZ
Jurado 2

JAIRO ALFONSO CLAVIJO
Director del Trabajo

LEONARDO DUVAN RESTREPO A.
Director del Programa

Ciudad y fecha: Ibagué, 04 de Agosto de 2017

6. Calificación

PRIMER JURADO:

NOMBRE DEL JURADO: YURI MARCELA GARCÍA SAAVEDRA

NOTA OTORGADA POR EL JURADO 4,55

FIRMA DEL JURADO

SEGUNDO JURADO:

NOMBRE DEL JURADO: ALFONSO SÁNCHEZ HERNANDEZ

NOTA OTORGADA POR EL JURADO 4,475

FIRMA DEL JURADO

PROMEDIO FINAL DE LA NOTA DEL TRABAJO DE GRADO: 4,5 (Meritorio)

Cuatro punto cinco

7. RANGOS DE EQUIVALENCIA: (Acuerdo No. 030 de 2000 del Consejo de Facultad)

| | |
|---|---|
| Calificación menor de tres cero (3.0) | REPROBADO |
| Calificación entre tres cero (3.0) y tres nueve (3.9) | APROBADO |
| Calificación entre cuatro cero (4.0) y cuatro cuatro (4.4.) | SOBRESALIENTE |
| Calificación entre cuatro cinco (4.5) y cuatro nueve (4.9) | MERITORIO |
| Calificación de cinco cero (5.0) | LAUREADO |

FECHA DE SUSTENTACIÓN Agosto 04-2017

**AGRADECIMIENTOS:**

A Dios que siempre esta presente en nuestras obras, al profesor Jairo Alfonso Clavijo, que nos orientó con su conocimiento y apoyo a durante la elaboración de este trabajo de grado, a nuestros padres que han sido un pilar en nuestra formación , y a nuestros profesores de pregrado que hicieron este trabajo posible.

**RESUMEN:**

La lógica clásica nos brinda una herramienta útil para determinar resultados específicos y coherentes por medio de diferentes propiedades, pero limitada debido a que esta solo nos ofrece el poder clasificar elementos de un conjunto a través de una función de pertenencia en conjuntos disyuntos clasificados según pertenezcan o no, este tipo de lógica aunque funciona en numerosos casos, resulta limitada, ya que existen elementos que no pueden ser claramente clasificados como pertenecientes o no. Para solucionar estos casos se proponen otros tipos de lógica que modifican la forma clásica de la función de pertenencia que le asigna a los elementos que pertenecen a un conjunto el valor **1** y a los que no el valor **0**. En este trabajo abordaremos la lógica difusa propuesta por Lotfi_A._Zadeh en donde propone que la función de pertenencia no sea el conjunto de valores **{0,1}**, sino el intervalo **[0,1],** de esta manera un elemento de un conjunto podría pertenecer parcialmente al conjunto.

La lógica difusa es aplicada en diferentes ramas del conocimiento como la electrónica , ingeniería civil , mecánica ,entre otras. Este trabajo trata la implementación de los números difusos en la estadística , específicamente en la obtención de los parámetros para una regresión lineal simple , para este objetivo mostraremos diferentes propiedades de los conjuntos difusos y la regresión lineal , para después pasar a la estimación y concluir con ejemplos donde implementaremos el modelo obtenido.

# TABLA DE CONTENIDOS

## OBJETIVOS GENERALES

1. Mostrar cómo la lógica difusa puede ser usada para graduar la pertenencia de un elemento a un conjunto.

2. Mostrar cómo se pueden estimar los coeficientes de un modelo de regresión lineal simple con variables difusas .

## OBJETIVOS ESPECÍFICOS

1.Proporcionar herramientas de cálculo que permitan estimar de una manera práctica los parámetros de un modelo de regresión lineal simple en diferentes situaciones. Se pueden resumir así:

2. Proporcionar una base conceptual sobre los diferentes aspectos de variables y números difusos, así como su operacionalidad.

3. Deducir fórmulas para la estimación de los parámetros de un modelo de regresión lineal simple en tres situaciones particulares:

**a**. Parámetro nítido predictor difuso.
**b**. Parámetro difuso predictor nítido.
**c**. Parámetro difuso predictor difuso.

4. Ilustrar con ejemplos las situaciones tratadas en el trabajo.

**JUSTIFICACION**

La lógica difusa se habre camino a lo largo de diferentes ramas del conocimiento , como la informática, ingenierías, electrónica, etc. Una de las ramas menos estudiadas con estos conjuntos numéricos es su aplicación en la estadística , siendo este el camino mas natural debido a la forma de estos conjuntos , este trabajo pretende comenzar un camino hacia la aplicación de diferentes métodos estadísticos, comenzando con la regresión lineal simple con números difusos, se espera que este sea un primer paso para trabajos en este campo en el futuro.

## Capítulo 1

# Introducción general

El problema en la construcción de modelos de regresión es de vieja data. Desde la época de la pre-estadística, vale decir, hace más de 200 años, algunos insignes matemáticos como Leonhard Euler , John Dalton y Carl Friedrich Gauss, estudiaron algunos problemas relacionados con el tema, recayendo sobre el "*príncipe de las matemáticas*" el honor de construir un método para estimar los coeficientes en los modelos de regresión lineal. Hoy en día, el método de mínimos cuadrados, inventado por Gauss, sigue siendo una herramienta importante y de uso frecuente en varios campos de la Estadística, como método de estimación.

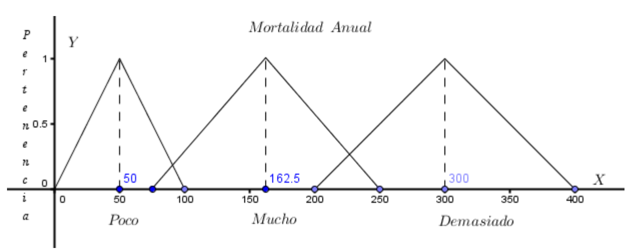
El problema de la regresión lineal, tal como lo estudió Gauss, ha sufrido numerosas generalizaciones a lo largo del tiempo, generalizaciones motivadas principalmente por la búsqueda de soluciones para los casos en que no se cumplen los supuestos de normalidad u homoestaticidad exigidos por el modelo clásico. Surgen así los métodos de mínimos cuadrados ponderados, los métodos de mínimos cuadrados generalizados y numerosos métodos de regresión robusta.

Todas las propuestas anteriores sin embargo suponen que la regresión se realiza con variables corrientes de tipo numérico, aleatorias para las respuestas y matemáticas no planificadas, esto es no-estocásticas, para las regresoras.

Existe otro tipo de variables, denominadas variables difusas, caracterizadas porque sus valores son números difusos triangulares y trapezoidales. Los números triangulares son aquellos para los cuales está definida una función de pertenencia, al menos "continua a trozos" que toma el valor 1 justo en un elemento , ahora, los números trapezoidales son aquellos cuya función toma el valor de 1 justo para un intervalo en el intervalo medio . Este concepto se basa en la noción de conjunto difuso que se caracteriza porque no siempre existe una clara división en subconjuntos, de los cuales pueda decirse tajantemente si un elemento pertenece o no a ellos. Por el contrario, si un conjunto $S$ es difuso, cada uno de sus elementos tienen un grado de pertenencia que es un valor entre 0 y 1. Se define así una función de pertenencia para cada elemento de $S$ en la forma $A: S \rightarrow [0,1]$ , para cada elemento $x$ de $S$, el valor $A(x)$ es el grado de pertenencia de $x$ a $S$.

Puede definirse una lógica difusa que permite deducir propiedades y operaciones entre conjuntos difusos que igualmente permite desarrollar una aritmética entre números difusos.

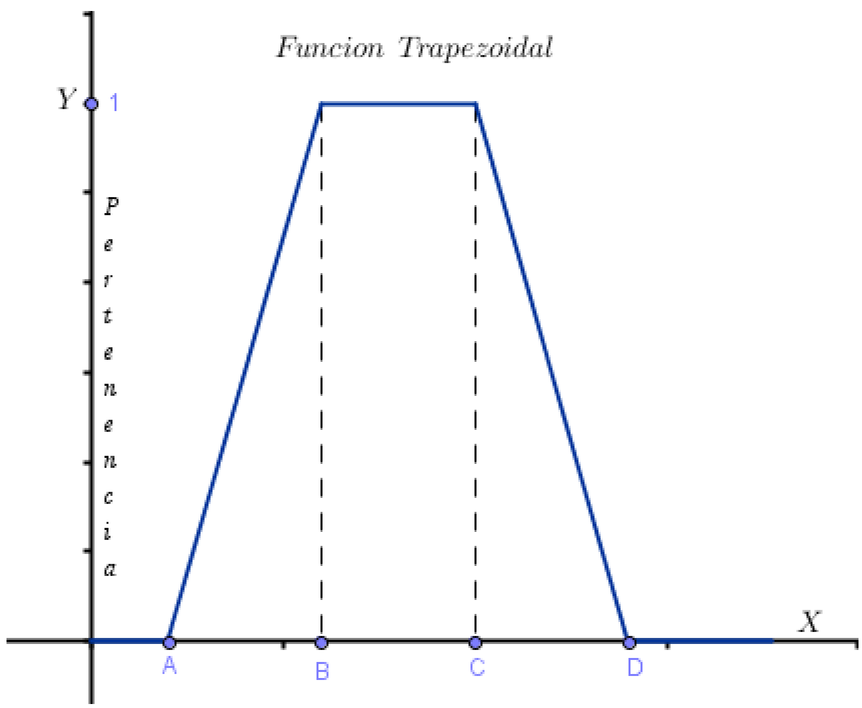
Una imagen de un conjunto difuso podría ser algo como lo siguiente:




El valor de la ordenada corresponde al grado de pertenencia de la que se ha hablado anteriormente.La función de pertenencia para cada punto es triangular, existen otros ejemplos no triangulares como:

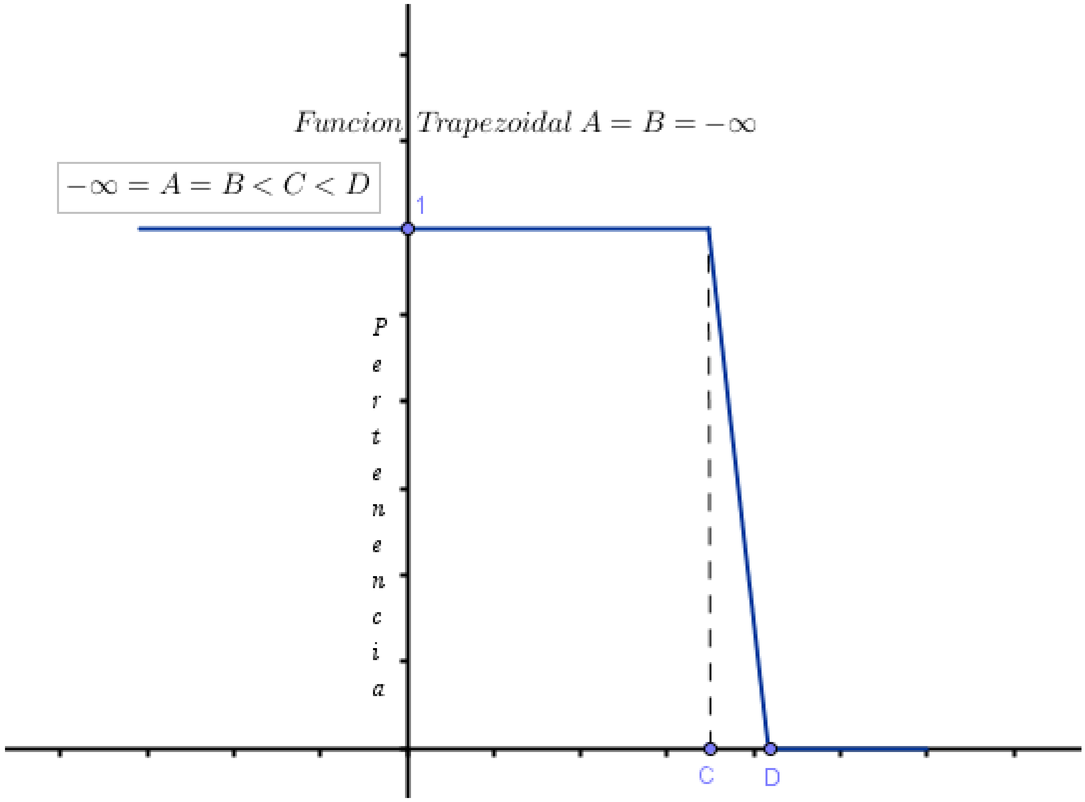
**función trapezoidal**

Definida por sus límites inferior **A**, superior **D**, y los límites de centrales inferior **B** y superior **C**, tal que$\mathbf{A} < \mathbf{B} < \mathbf{C} < \mathbf{D}$. En este caso, si los valores de **B** y **C** son iguales, se obtiene una función triangular.




Casos especiales de estas funciones trapezoidales son aquéllas en las que algunos parámetros toman valores no finitos:

Funciones Trapezoidales con parámetros $\mathbf{A} = \mathbf{B} = -\infty$




Pues bien, así como se han estudiado modelos de regresión para variables corrientes es posible generalizar este concepto para variables difusas como las que se han mencionado aquí. Sin embargo, al tratarse de variables que involucran aspectos no convencionales como la pertenencia, su tratamiento estadístico resulta más complejo, lo que hace que al menos por ahora limitemos el estudio al caso más sencillo, como es el modelo de regresión lineal simple.

Este trabajo se realizará exclusivamente con funciones de tipo triangular.

## 1.1 FUNDAMENTOS DE LA LÓGICA DIFUSA.

La lógica clásica admite solo dos posibilidades: que un elemento pertenezca a un conjunto o que no. Esta característica es insuficiente para explicar muchos fenómenos en los cuales la relación de pertenencia no se limita solo a esas dos situaciones y admite otros grados intermedios, así pues, las variables difusas pretenden emular la habilidad que tienen algunas personas para tomar decisiones correctas a partir de datos vagos o imprecisos y además su particular forma de mostrar respuestas más detalladas hace más sencilla su comprensión. Existen conjuntos donde cada objeto (elemento) tiene definidos de manera precisa los criterios de pertenencia , así encontramos "los múltiplos de 2" , "los meses del año" , "los números impares". En la teoría de conjuntos difusos, cada objeto puede tener grados intermedios de pertenencia en el intervalo $[0, 1]$, así podemos considerar el conjunto de "la sopa más salada" , "los números más grandes" , "el deporte mas sano" , "las mujeres más lindas", "el país más alegre" y descubrimos que lo más concreto que se puede imaginar depende al mismo tiempo de la mente del observador. En general, se llega a experimentar grandes dificultades para conciliar la teoría con la práctica pues son cosas que tienden a pasar cuando se entra en detalles, sin demasiados prejuicios, en los más variados campos de la investigación científica.

Antes de abordar las propiedades de los conjuntos difusos, debemos recordar la definición de función de pertenencia así: la *función de pertenencia* de un conjunto nos indica el grado en que cada elemento de un universo dado pertenece a dicho conjunto. Es decir, la función de pertenencia de un conjunto $A$ sobre un universo $X$ está dada por la siguiente definición:

**DEFINICIÓN 1.1.1** *Se entiende por función de pertenencia a un conjunto* $\boldsymbol{A}$ *toda función :* $f_A{:}X \to [0, 1]$*, tal que* $f_A(x) = r$ *donde* $r$ *es el grado de pertenencia de* $\boldsymbol{x}$ *a* $\boldsymbol{A}$*, otra notación que manejaremos para indicar el grado de pertenencia de un conjunto* $A$ *sera* $A(x)$*.*

La palabra *fuzzy* viene del ingles *fuzz* (tamo, pelusa, vello) y se traduce por difuso o borroso. L.A Zadeh (1965) pensó en una forma diferente de definir los conjuntos , no a la manera clásica donde la función de pertenencia toma valores fijos $\{0,1\}$, sino que extiende este concepto al intervalo $[0,1]$ creando valores intermedios de pertenencia y dando origen a la lógica difusa. Zadeh busca un sistema que proporcione una vía natural para tratar los problemas en los que la fuente de imprecisión es la ausencia de criterios claramente definidos de tipos de pertenencia, ya que el mundo físico esta lleno de eventos que no se pueden catalogar con la lógica clásica, por esto la transición de la pertenencia a la no pertenencia es gradual . La tesis de la que parte Zadeh es la siguiente:

"*los elementos clave en el pensamiento humano no son números sino rótulos (marcadores lingüísticos) de conjuntos difusos*".

Denominaremos ***nítidos*** a todos los elementos claros que no son difusos.

## 1.2 PROPIEDADES BÁSICAS DE LÓGICA DIFUSA

Las propiedades de la lógica difusa se obtienen a partir de su función de pertenencia definida de la siguiente manera

**DEFINICIÓN 1.2.1** un conjunto difuso es un conjunto tal que está definida una función de pertenencia A: X $\rightarrow[0,1]$ para cada uno de sus elementos, donde **A** denota tanto la función de pertenencia como al conjunto sobre el cual está definida la función de pertenencia y cumple las propiedades siguientes :

***Propiedad de normalidad:***

*Debe existir* $x \in A$ *tal que* $A(x) = 1$. *Si se tiene que* $A(x) < 1$ *para todo* $x \in A$, *al conjunto difuso se le llama subnormal.*

***Propiedad de monotonicidad:***

*Si* $x_1$ *es más próximo a* $x$ *que* $x_2$ , *entonces* $A(x_1) > A(x_2)$

***Propiedad de simetría:***

*Si* $x_1$ *y* $x_2$ *son equidistantes de* $x$, *entonces* $A(x_1) = A(x_2)$

A partir de la definición **1.2.1** podemos establecer un paralelo entre la lógica clásica y la lógica difusa , mostrando diferentes definiciones básicas de estos conceptos.

•Sea $A$ el conjunto vacio en un universo $X$ entonces $A(x)= 0$, puesto que $X$ no tiene elementos.

•Sea $A$ un conjunto en un universo $X$ , si $A = X$ entonces $A(x) = 1$.

•Sean $A$, $B$ conjuntos en un universo $X$, si $A \subseteq B$ entonces $A(x) \leq B(x)$

•Sean $A$, $B$ conjuntos en un universo $X$, si $A = B$ entonces $A(x) = B(x)$

Podemos observar cómo con las definiciones anteriores se muestra la forma de las operaciones básicas entre conjuntos, como son complemento, unión e intersección.

***Complemento* :** Sea $A$ un conjunto difuso, $\forall\ x \in X$, siendo $X$ (Conjunto universal) se define el complemento de $A$ así :

$\bar{A}(x) = 1 - A(x)$

***Unión* :**: Sean $A$ y $B$ dos conjuntos difusos definidos en $X$ (Conjunto universal), $\forall$ $x \in X$, se define la unión $A \cup B$ así:

$f_{A \cup B}(x)= Max \{ A(x), B(x) \}$ .

***Intesección* :**Sean $A$ y $B$ dos conjuntos difusos definidos en $X$ (Conjunto universal), $\forall\ x \in X$, se define la intersección $A \cap B$ así:

$f_{A \cap B}(x)= Min \{ A(x), B(x) \}$ .

Aunque no presentamos las demostraciones , se puede verificar el cumplimiento de las siguientes propiedades :

**ASOCIATIVIDAD** : sean $A$ y $B$ dos conjuntos difusos , se cumple :

$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C = A \cup B \cup C;$ y $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C;$

**CONMUTATIV**IDAD: sean $A$ y $B$ dos conjuntos difusos , se cumple :

$A \cup B = B \cup A;$ y $A \cap B = B \cap A;$

**DISTRIBUTIVIDAD** : sean $A$ , $B$ y $C$ tres conjuntos difusos , se cumple :

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;  y  $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

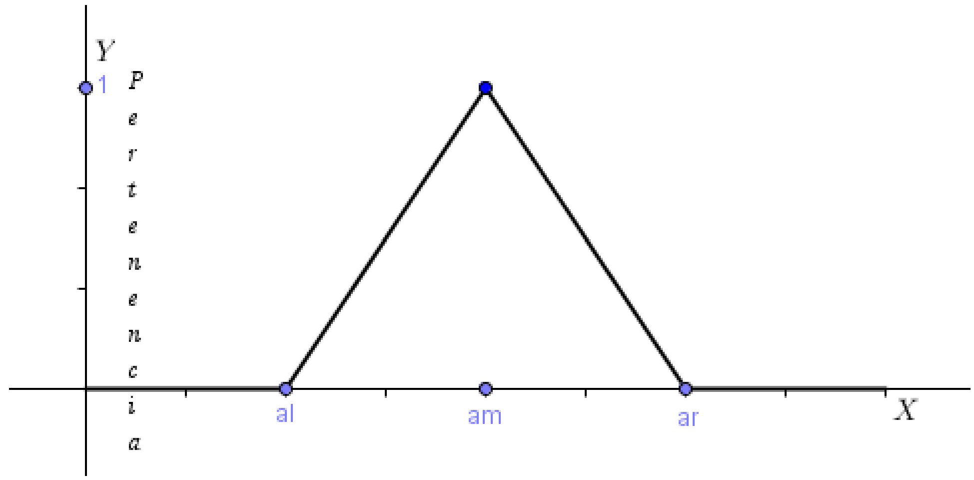
A continuación definiremos la forma de la función de pertenencia para un número difuso. Más adelante se aclarará el concepto de número difuso.

**FORMA DE LA FUNCIÓN DE PERTENENCIA DE UN NÚMERO DIFUSO:**

Un número difuso es una terna A=$(a_l, a_m, a_r)$ , que define la siguiente función de pertenencia :

$$A(x)= \begin{cases} 0 & x \leq a_l \\ \frac{x-a_l}{a_m-a_l} & si\, a_l < x \leq a_m \\ 1 & si\, x = a_m \\ \frac{x-a_r}{a_m-a_r} & a_m < x < +a_r \\ 0 & si\, x \geq a_r \end{cases}$$

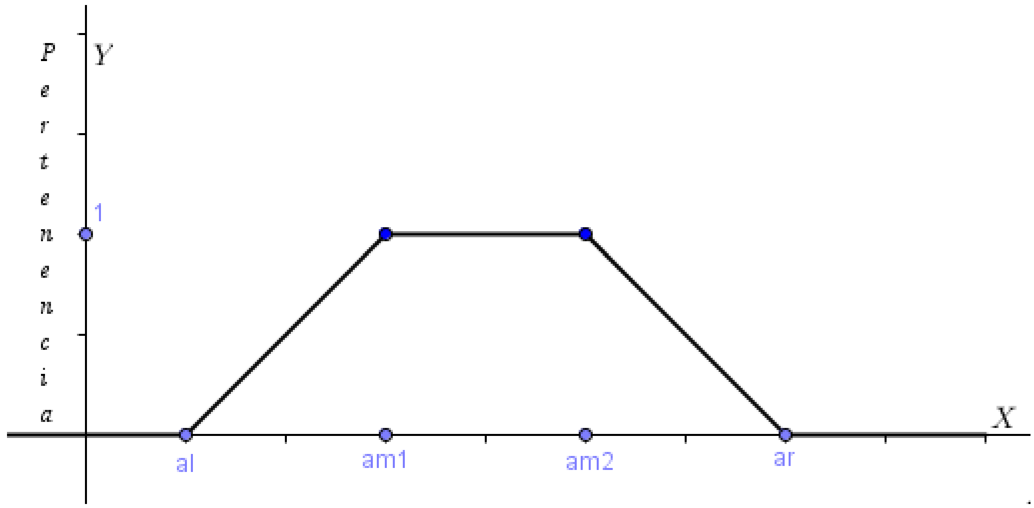
Cuya gráfica correspondiente está dada por:




Un número difuso trapezoidal es una cuádrupla B=$(a_l, a_{m1}, a_{m2}, a_r)$ ,para la cual la función de pertenencia está definida por:

$$B(x)= \begin{cases} 0 & x \leq a_l \\ \frac{a_l - x}{a_l - a_{m1}} & si\, a_l < x \leq a_{m1} \\ 1 & si\, a_{m1} < x \leq a_{m2} \\ \frac{x - a_r}{a_{m2} - a_r} & a_{m2} < x < +a_r \\ 0 & si\, x \geq a_r \end{cases}$$

Cuya gráfica correspondiente está dada por:




**DEFINICIÓN 1,2,2 (CONJUNTO DIFUSO)** :Se denomina conjunto difuso , a un conjunto de elementos definidos a partir de una función de pertenencia tipo difusa.

**DEFINICIÓN 1,2,3** : Dados un conjunto difuso $A$ definido en $X$ y cualquier número $\alpha \in [0,1]$, se define el corte $\alpha$, denotado por ${}^{\alpha}A$, y el corte estricto, ${}^{\alpha+}A$, como los conjuntos tradicionales o clásicos de la forma:

$${}^{\alpha}A = \{x/A(x) \geq \alpha\}$$

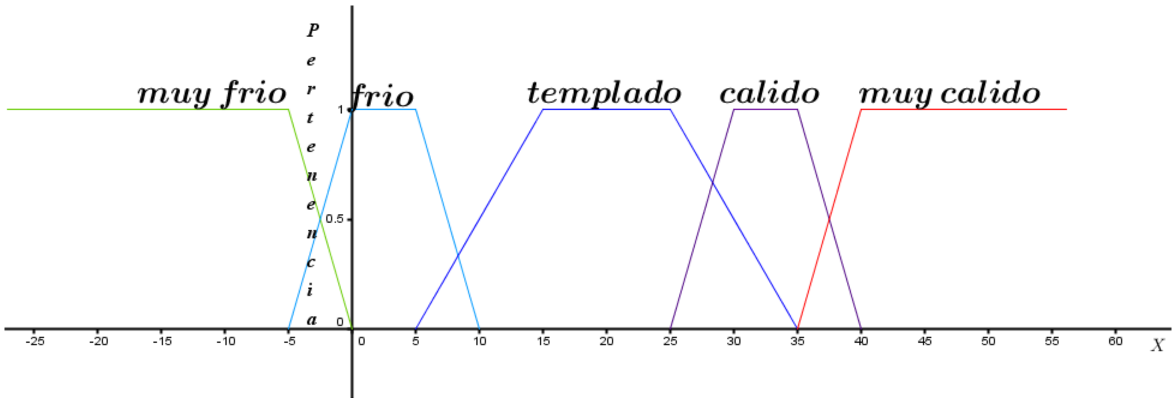
$${}^{\alpha+}A = \{x/A(x) > \alpha\}.$$

Esto es, son los conjuntos clásicos ${}^{\alpha}A$ y ${}^{\alpha+}A$ donde están contenidos todos los elementos $x$ del conjunto referencia $X$ cuyo grado de pertenencia es mayor o igual que el valor específico de $\alpha$.

El siguiente ejemplo nos ilustrará la definición anterior .

***Ejemplo*** :

Se considerarán cinco conjuntos difusos que representan los conceptos de temperatura muy frio ,frio , templado,cálido, muy cálido.




Se puede obtener una expresión razonable de estos conceptos si se utilizan funciones de pertenencia trapezoidales $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ . Estas funciones se pueden definir en el intervalo [-20, 50] como sigue :

$$A_1(x) = \begin{cases} 1 & x \leq -5 \\ \frac{-x}{5} & -5 < x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$$

$$A_2(x) = \begin{cases} 0 & x < -5 \\ 1 + \frac{x}{5} & -5 < x \leq 0 \\ 1 & 0 < x \leq 5 \\ \frac{-(x-10)}{5} & 5 < x \leq 10 \\ 0 & x > 10 \end{cases}$$

$$A_3(x) = \begin{cases} 0 & x < 5 \\ 1 & 15 \leq x \leq 25 \\ \frac{x-5}{10} & 5 \leq x < 15 \\ \frac{(35-x)}{10} & 25 < x \leq 35 \\ 0 & x > 35 \end{cases}$$

$$A_4(x) = \begin{cases} 0 & x < 25 \\ \frac{25-x}{-5} & 25 \leq x \leq 30 \\ 1 & 30 < x \leq 35 \\ \frac{(40-x)}{5} & 35 < x \leq 40 \\ 0 & x > 40 \end{cases}$$

$$A_5(x) = \begin{cases} \frac{x-35}{5} & 35 \leq x \leq 40 \\ 1 & x > 40 \\ 0 & x < 35 \end{cases}$$

Caracterización según la definición 1.2.3 de algunos cortes $\alpha$ y cortes estricto $\alpha$ para los conjuntos difusos $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$ , para todo $\alpha\epsilon \in(0,1]$.

$${}^{0}A_1 = {}^{0}A_2 = {}^{0}A_3 = {}^{0}A_4 = {}^{0}A_5 = [-20, 50] = X$$

$${}^{\alpha}A_1 = [-20, -5\alpha + (1-\alpha)0] = [-20, -5\alpha]$$

$${}^{\alpha}A_2 = [0\alpha + (1-\alpha)(-5), 5\alpha + (1-\alpha)10] = [5(\alpha-1), 5(2-\alpha)]$$

$${}^{\alpha}A_3 = [15\alpha + (1-\alpha)5,\ 25\alpha + (1-\alpha)30] = [5+15\alpha, 30-5\alpha] = [5(1+3\alpha), 5(6-\alpha)]$$

$^{\alpha}A_4 = [\alpha 30 + (1-\alpha)25, \alpha 35 + (1-\alpha)40] = [25 - \alpha 5, 40 - \alpha 5] = [5(5-\alpha), 5(8-\alpha)]$

$^{\alpha}A_5 = [\alpha 40 + (1-\alpha)35, 50] = [35 + 5\alpha, 50] = [5(7+\alpha), 50]$

$^{1+}A_1 = {}^{1+}A_2 = {}^{1+}A_3 = {}^{1+}A_4 = {}^{1+}A_5 = \varnothing$

Existen otras importantes definiciones de los conjuntos difusos, como son las siguientes:

**DEFINICIÓN 1.2.4(Nucléo):** El centro de una función de pertenencia para un conjunto difuso **A** se define como la región del universo que se caracteriza por la completa y total pertenencia de sus elementos al conjunto **A**. Esto es, es el conjunto clásico definido como: Centro de $A = \{x|A(x) = 1\}$ luego el centro de **A** se puede definir como el corte $^{1}\mathbf{A}$.

**DEFINICIÓN 1.2.5(Soporte)**: El soporte de una función de pertenencia para un conjunto difuso **A** se define como la región del universo que se caracteriza por tener un grado de pertenencia al conjunto **A**, que sea mayor que **0,** esto es, es el conjunto clásico definido como:

$Soporte\, de\, A = \{x|A(x) > 0\}$

Luego el soporte de **A** se puede definir como el corte estricto $^{0+}\mathbf{A}$**.**

**DEFINICIÓN 1.2.6(Altura)**:La altura $h(A)$ de un conjunto difuso $A$ es el mayor grado de pertenencia obtenido por algún elemento en ese conjunto. Formalmente: $h(A) = sup_{x\in X} A(x)$.

donde si el conjunto difuso cumple la propiedad de normalidad,se tiene que $h(A) = 1$.

Anteriormente se definieron conceptos como intersección , unión, corte alfa, entre otros, pero además de esto se puede demostrar un teorema muy importante dentro de los conjuntos y es el de convexidad.

**Teorema** (**Conjunto difuso convexo**) : Un conjunto difuso $A$ en $\Re$ es convexo si y solo si:

$$A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) \geq mín[A(x_1), A(x_2)]$$

para todo $x_1, x_2 \in R$ y todo $\lambda \in [0, 1]$, donde $mín$ denota el operador mínimo.

*Demostración* :

i)→A es convexo, entonces tomemos $x_1, x_2 \in A$; por la convexidad de $A$ podemos encontrar $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in A$ para algún $\lambda \in [0, 1]$.

Sea $\alpha = A(x_1) < A(x_2)$; de aquí por la definición de *corte* $\alpha$:

- $x_1$ satisface $A(x_1) = \alpha$ luego $x_1 \in^\alpha A$
- $x_2$ satisface $A(x_2) > \alpha$ luego $x_2 \in^\alpha A$

Por lo tanto el segmento $\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 \in {}^\alpha A$; Así por definición de corte alfa:

$$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \alpha = A(x_1) = min[A(x_1), A(x_2)]$$

sucedería lo mismo si $A(x_2) < A(x_1)$.

Por lo tanto:

$$A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq min[A(x_1), A(x_2)]$$

ii)←Se satisface :

$A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geq min[A(x_1),A(x_2)]$ con $\lambda\in[0,1]$

Tomemos $x_1,x_2\in\ {}^{\alpha}A$ esto quiere decir $A(x_1)\geq\alpha$,$A(x_2)\geq\alpha$ .

Ahora utilicemos nuestra hipótesis:

$A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geq min[A(x_1),A(x_2)] \geq min[\alpha,\alpha]=\alpha$

entonces:

$A(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2) \geq \alpha$

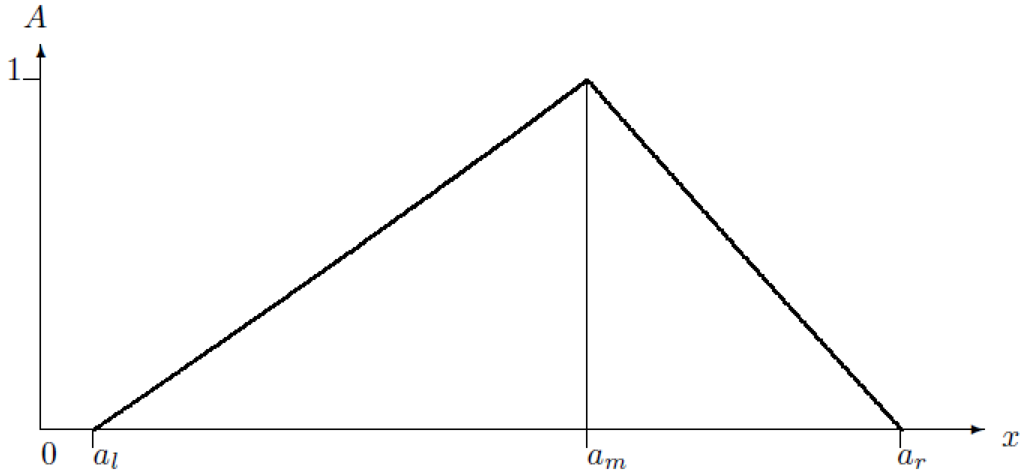
Así concluimos que $\lambda x_1+(1-\lambda)x_2\in\ {}^{\alpha}A$, por lo tanto $A$ es convexo

**DEFINICIÓN 1.2.7 (NÚMERO DIFUSO TRIANGULAR)** : Se define un número difuso triangular como un conjunto normalizado y convexo , cuya función de pertenencia es al menos, continua a trazos y tiene el valor funcional $A(x)=1$ justo para un elemento.

Estos números son triangulares, y usualmente los denotaremos como $\hat{A}=(a_l,a_m,a_r)$ , el subindice se denota por la letra de su posición en inglés left (izquierda), medium(medio) y rigth(derecha).

A partir de esta definición podemos construir la forma de la función triangular que representa a estos números difusos.

La siguiente gráfica nos muestra la forma general de un número difuso triangular, a partir de esta obtendremos la función general que representa este tipo de números.




Esta función triangular tienen parámetros $a_l$,$a_m$, $a_r$, es claro que esta cumple la definición de número difuso, de esta manera daremos una forma general a este tipo definiciones , para ello evaluaremos su comportamiento en los siguientes intervalos :

$$A(x)= \begin{cases} f_1(x) & x \leq a_l \\ f_2(x) & si\, a_l < x < a_m \\ f_3(x) & si\, x = a_m \\ f_4(x) & a_m < x < a_r \\ f_5(x) & si\ \ x > a_r \end{cases}$$

Para $f_1(x)$ es claro que la pertenencia es igual a 0 para cualquier valor $x \leq a$, debido a que no existe ninguna altura en número difuso para estos datos.

Para $f_2(x)$ observemos que en el intervalo que va de $a_l$ a $a_m$ existe una recta, entonces buscaremos la forma general de la ecuación de esta recta que los une. Así tenemos los siguientes puntos de esta recta $A(a_l) = 0$ y $A(a_m)$=1, con estos datos podemos obtener que la pendiente estaría dada por la expresión:

$m_2 = \frac{1}{a_m - a_l}$

De tal manera que la ecuación de la recta estaría dada por:

$y - 0 = \frac{1}{a_m - a_l}(x - a_l)$
$\rightarrow y = \frac{(x - a_l)}{a_m - a_l}$

De esta manera :

$f_2(x) = \frac{(x - a_l)}{a_m - a_l}$

Para $f_4(x)$ observemos que en el intervalo que va de $a_m$ a $a_r$ existe una recta, entonces buscaremos la forma general de la ecuación de esta recta que los une. Así tenemos los siguientes puntos de esta recta $A(a_m) = 1$ y $A(a_r)$=0, con estos datos podemos obtener que la pendiente estaría dada por la expresión:

$m_4 = \frac{1}{a_m - a_r}$

De tal manera de tal manera que la ecuación de la recta estaría dada por:

$y - 0 = \frac{1}{a_m - a_r}(x - a_r)$

$\rightarrow y = \frac{(x - a_r)}{a_m - a_r}$

De esta manera :

$f_4(x) = \frac{(x - a_r)}{a_m - a_r}$

En el caso de $f_3(x)$ es claro que por ser un número difuso tiene $A(x) = 1$, para algún valor, es claro que este valor esta dado por $a_m$, si observamos $f_5(x)$ los valores mayores a $a_r$ tienen un valor $A(x) = 0$ de esta manera la forma general de $A(x)$ estaría dada por .

$$A(x)= \begin{cases} 0 & x \leq a_l \\ \frac{x-a_l}{a_m-a_l} & si\, a_l < x \leq a_m \\ 1 & si\, x = a_m \\ \frac{x-a_r}{a_m-a_r} & a_m < x < +a_r \\ 0 & si\, x \geq a_r \end{cases}$$

## 1.3 REGRESIÓN LINEAL SIMPLE

**Regresión lineal simple**

La regresión es el proceso mediante el cual se construye una función que ajusta de la mejor manera posible un conjunto de valores obtenidos $y_1$, $y_2$ , ..., $y_n$ a partir de unos valores determinados $\boldsymbol{x}_1$, $\boldsymbol{x}_2$ ...$\boldsymbol{x}_n$. Si cada $\boldsymbol{x_i}$ es un valor real $x_i$, el modelo de regresión(función construída ) se denomina simple. Si cada $\boldsymbol{x_i}$ es un vector $(x_{i1}, x_{i2}, ..., x_{1p})$ el modelo se denomina múltiple .

La función de regresión se denomina lineal si es de la forma :

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + ... + \beta_p x_p.$$

En la cual todos los parámetros $\beta_i$ son lineales.

**MODELO DE REGRESIÓN LINEAL SIMPLE**

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \text{ para } i = 1, 2, 3...n$$

El objetivo principal de la regresión es la determinación o estimación de los parámetros $\beta_1$ y $\beta_0$ a partir de la información contenida en las observaciones que disponemos, es decir ,a partir de una muestra construir una función que permite relacionar la variable dependiente $(y)$ en términos de las variables independientes $(x)$ , usualmente utilizamos una variable dependiente en función de varias variables independientes , existen muchos tipos de funciones, por lo tanto podemos hablar de muchos tipos de regresiones , dependiendo el tipo de función a que se deseen aproximar los datos , en este caso centraremos nuestro interés en las de tipo lineal , utilizaremos una variable independiente por lo que el modelo se llama regresión lineal simple , es importante tener en cuenta la relación entre variables (dependiente e independiente), en el caso en que la relación es exacta , las observaciones se ubicarán sobre una recta , en este caso las estimaciones más adecuadas se reducirían a encontrar la pendiente y la ordenada en el origen de dicha recta.

Ahora bien en la práctica se presenta el caso de variables estocásticas que crean una nube de puntos , encontrando infinitas rectas que pudiesen ajustarse a esta nube de puntos, el problema que tenemos planteado es, pues, hallar unos estimadores $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ tales que la recta que pasa por los puntos $\left(X_i, \hat{Y}_i\right)$se ajuste lo mejor posible a los puntos $(X_i, Y_i)$ . Se denomina error o residuo a la diferencia entre el valor observado de la variable endógena $y_i$ y el valor ajustado $\hat{y}_i$. Para encontrar la recta más adecuada utilizaremos el método de mínimos cuadrados que consistiría en tomar como estimadores $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ aquellos valores que hagan la suma de todos los residuos tan próxima a cero como sea posible. Con este criterio la expresión a minimizar seria la siguiente:

$\left|\sum_{i=1}^{n} e_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y_i})\right|$ llamamos a $e_i$ residuo .

El problema fundamental de este método de estimación radica en que los residuos de distinto signo pueden compensarse, para evitar eso , se minimiza la siguiente expresión : $\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y_i})^2$

Si trasladamos el análisis a variables cuyo valor no está claramente definido (difusas) ,estaremos en el terreno de la regresión lineal difusa.

## Capítulo 2

# Estimación de parámetros para un modelo de regresión difusa simple.

En este trabajo nos proponemos estudiar un modelo de regresión lineal simple con datos difusos triangulares en el que los coeficientes o las variables regresoras sean difusas , pues dada la complejidad del tema nos limitaremos al caso más sencillo, con lo cual queremos abrir el camino a futuros trabajos más especializados en este campo.

Nuestro problema admite la formulación siguiente : $Y = \beta_0 + \beta_1 X$ , que nos es muy familiar.

La diferencia con el modelo de regresión clásica , está en el hecho de que $\beta_0$ y $\beta_1$, o $X$ son difusos y la variable respuesta Y va a ser en todos los casos difusa.

Tenemos tres situaciones bién definidas y serán tratadas por separado :

$a)$ Los parámetros $\beta_0$ , $\beta_1$ son nítidos y el predictor $X$ es difuso.

$b)$ Los parámetros $\beta_0$ , $\beta_1$ son difusos y el predictor $X$ es nítida .

$c)$ Tanto los parámetros $\beta_0$ , $\beta_1$ como el predictor $X$ son difusos.

La deducción de las fórmulas para estimar los coeficientes del modelo se basan en la noción de distancia, razón por la cual definiremos este concepto, en lo sucesivo notaremos los números difusos con $\hat{A}$.

**DEFINICIÓN 2.1:** Sea $\hat{A}_1 = (a_{1l}, a_{1m}, a_{1r})$ y $\hat{A}_2 = (a_{2l}, a_{2m}, a_{2r})$ se define la distancia entre estos dos números como:

$$d^2(\hat{A}_1, \hat{A}_2) = (a_{1l} - a_{2l})^2 + (a_{1m} - a_{2m})^2 + (a_{1r} - a_{2r})^2$$

Al igual que en el caso de MCO(mínimos cuadrados ordinarios ) la estimación de los coeficientes se basa en buscar la “recta” que hace mínima la suma de cuadrados entre los puntos observados y los puntos estimados por el modelo. Es decir , se busca minimizar la siguiente expresión :

$$S(\beta_{0,}\beta_1) = \sum_{i=1}^{n} d^2(y_i, \beta_0 + \beta_1 x_i)$$

dependiendo del caso $\beta_0$ ,$\beta_1$ o $x_i$ serán difusos o nítidos.

**Caso 1. parámetro nítido y predictor difuso.**

Se estimará $\beta_0$ y $\beta_1$, con $\hat{y} = (y_{il}, y_{im}, y_{ir})$ y $\hat{x}_i = (x_{il}, x_{im}, x_{ir})$ para $i = 1, 2...n$. Debido a la aritmética de los números difusos triangulares, $\beta_0 + \beta_1 \hat{x}_i$ es el número triangular difuso $(\beta_0 + \beta_1 \hat{x}_{il}, \beta_0 + \beta_1 \hat{x}_{im}, \beta_0 + \beta_1 \hat{x}_{ir})$, observaremos dos casos cuando $\beta_1 \geq 0$ o $\beta_1 < 0$ .De esta manera para el caso en que $\beta_1 \geq 0$ obtenemos que:

$$S^{+}(\beta_{0,}\beta_1) = \sum_{i=1}^{n} d^2(\hat{y}_i, \beta_0 + \beta_1 \hat{x}_i)$$

$$S^{+}\left(\beta_0, \beta_1\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[ \left(y_{im} - \beta_0 - \beta_1 x_{im}\right)^2 + \left(y_{il} - \beta_0 - \beta_1 x_{il}\right)^2 + \left(y_{ir} - \beta_0 - \beta_1 x_{ir}\right)^2 \right]$$

a) Calculamos la derivada de $S^{+}(\beta_0, \beta_1)$ respecto a cada uno de los parámetros. Así derivando respecto a $\beta_0$:

$$\frac{\partial\left(S^{+}(\beta_0,\beta_1)\right)}{\partial\beta_0} = \sum_{i=1}^{n}\left[-2\left(y_{im}-\beta_0-\beta_1 x_{im}\right)-2\left(y_{il}-\beta_0-\beta_1 x_{il}\right)-2\left(y_{ir}-\beta_0-\beta_1 x_{ir}\right)\right]=0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left[-2y_{im}+2\beta_0+2\beta_1 x_{im}-2y_{il}+2\beta_0+2\beta_1 x_{il}-2y_{ir}+2\beta_0+2\beta_1 x_{ir}\right]=0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left[6\beta_0+2\beta_1\left(x_{il}+x_{im}+x_{ir}\right)-2\left(y_{il}+y_{im}+y_{ir}\right)\right]=0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n}6\beta_0+2\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(x_{il}+x_{im}+x_{ir}\right)-2\sum_{i=1}^{n}\left(y_{il}+y_{im}+y_{ir}\right)=0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n}6\beta_0=2\sum\nolimits_{i=1}^{n}\left(y_{il}+y_{im}+y_{ir}\right)-2\beta_1\sum\nolimits_{i=1}^{n}\left(x_{il}+x_{im}+x_{ir}\right)$$

$$\rightarrow 6n\beta_0=2\left[\sum\nolimits_{i=1}^{n}\left(y_{il}+y_{im}+y_{ir}\right)-\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(x_{il}+x_{im}+x_{ir}\right)\right]$$

$$\rightarrow \beta_0=2\left[\tfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_{il}+y_{im}+y_{ir}\right)-\beta_1\sum_{i=1}^{n}\left(x_{il}+x_{im}+x_{ir}\right)}{6n}\right]$$

$$\rightarrow \beta_0=\left[\tfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_{il}+y_{im}+y_{ir}\right)}{3n}-\beta_1\tfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{il}+x_{im}+x_{ir}\right)}{3n}\right]$$

Definamos :

$$\bar{Y}=\tfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(y_{il}+y_{im}+y_{ir}\right)}{3n}$$

$$\bar{X}=\tfrac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{il}+x_{im}+x_{ir}\right)}{3n}$$

De esta manera denotaremos $\beta_0$ como $\beta_0^{+}$ para el caso en que $\beta_1 \geq 0$

$$\boxed{\beta_{\mathbf{0}}^{+} = \mathbf{\bar{Y}} - \beta_{\mathbf{1}}\mathbf{\bar{X}}}$$

b) Derivando respecto a $\beta_1$:

$$\frac{\partial(S^{+}(\beta_0,\beta_1))}{\partial\beta_1} = \sum_{i=1}^{n}\left[-2x_{im}\left(y_{im}-\beta_0-\beta_1x_{im}\right)-2x_{il}\left(y_{il}-\beta_0-\beta_1x_{il}\right)-2x_{ir}\left(y_{ir}-\beta_0-\beta_1x_{ir}\right)\right]=0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left[-2x_{im}y_{im}+2x_{im}\beta_0+2\beta_1x_{im}^2-2x_{il}y_{il}+2x_{il}\beta_0+2\beta_1x_{il}^2-2x_{ir}y_{ir}+2\beta_0x_{ir}+2\beta_1x_{ir}^2\right]=0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left[(2x_{im}\beta_0+2x_{il}\beta_0+2\beta_0x_{ir})-(2x_{im}y_{im}+2x_{il}y_{il}+2x_{ir}y_{ir})-\left(2\beta_1x_{im}^2+2\beta_1x_{il}^2+2\beta_1x_{ir}^2\right)\right]=0$$

$$\rightarrow 2n\sum_{i=1}^{n}\left[\beta_0\left(x_{im}+x_{il}+x_{ir}\right)-\left(x_{im}y_{im}+x_{il}y_{il}+x_{ir}y_{ir}\right)-\beta_1\left(x_{im}^2+\beta_1x_{il}^2+\beta_1x_{ir}^2\right)\right]=0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left[\beta_0\left(x_{im}+x_{il}+x_{ir}\right)-\left(x_{im}y_{im}+x_{il}y_{il}+x_{ir}y_{ir}\right)-\beta_1\left(x_{im}^2+\beta_1x_{il}^2+\beta_1x_{ir}^2\right)\right]=0$$

Despejando $\beta_1$:

$$\frac{\partial(S^{+}(\beta_0,\beta_1))}{\partial\beta_1} = \sum_{i=1}^{n}\left[-2x_{im}\left(y_{im}-\beta_0-\beta_1x_{im}\right)-2x_{il}\left(y_{il}-\beta_0-\beta_1x_{il}\right)-2x_{ir}\left(y_{ir}-\beta_0-\beta_1x_{ir}\right)\right]=0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left[-2x_{im}\left(y_{im}-\beta_0-\beta_1x_{im}\right)-2x_{il}\left(y_{il}-\beta_0-\beta_1x_{il}\right)-2x_{ir}\left(y_{ir}-\beta_0-\beta_1x_{ir}\right)\right]=0$$

$$\rightarrow 2\sum_{i=1}^{n}\left[\beta_1x_{im}^2+\beta_1x_{il}^2+\beta_1x_{ir}^2+\beta_0x_{im}+\beta_0x_{il}+\beta_0x_{ir}-x_{im}y_{im}-x_{il}y_{il}-x_{ir}y_{ir}\right]=0 \qquad (1)$$

Remplazamos a $\beta_{\mathbf{0}} = \mathbf{\bar{Y}} - \beta_{\mathbf{1}}\mathbf{\bar{X}}$ en (1) y obtenemos:

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n}\beta_1\left(x_{im}^2+x_{il}^2+x_{ir}^2\right)+\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}-\beta_1\bar{X})\left(x_{im}+x_{il}+x_{ir}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}y_{im}+x_{il}y_{il}+x_{ir}y_{ir}\right)=0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n}\beta_1\left(x_{im}^2+x_{il}^2+x_{ir}^2\right)+\sum_{i=1}^{n}\bar{Y}(x_{im}+x_{il}+x_{ir})-\beta_1\sum_{i=1}^{n}\bar{X}\left(x_{im}+x_{il}+x_{ir}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}y_{im}+x_{il}y_{il}+x_{ir}y_{ir}\right)=0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n}\beta_1\left(x_{im}^2+x_{il}^2+x_{ir}^2\right)-\beta_1\sum_{i=1}^{n}\bar{X}\left(x_{im}+x_{il}+x_{ir}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}y_{im}+x_{il}y_{il}+x_{ir}y_{ir}\right)-\sum_{i=1}^{n}\bar{Y}(x_{im}+x_{il}+x_{ir})$$

$$\rightarrow \beta_1\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}^2+x_{il}^2+x_{ir}^2\right)-\sum_{i=1}^{n}\bar{X}\left(x_{im}+x_{il}+x_{ir}\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}y_{im}+x_{il}y_{il}+x_{ir}y_{ir}\right)-\sum_{i=1}^{n}\bar{Y}(x_{im}+x_{il}+x_{ir})$$

$$\rightarrow \beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}y_{im}+x_{il}y_{il}+x_{ir}y_{ir}\right)-\bar{Y}\sum_{i=1}^{n}(x_{im}+x_{il}+x_{ir})}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}^2+x_{il}^2+x_{ir}^2\right)-\bar{X}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}+x_{il}+x_{ir}\right)} \qquad (2)$$

Tomando a :

$3n\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} (y_{il} + y_{im} + y_{ir})$

$3n\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} (x_{il} + x_{im} + x_{ir})$

Denotaremos $\beta_1$como $\beta_1^{+}$cuando $\beta_1 \geq 0$. Remplazando lo anterior en la expresión (2), obtenemos:

$$\boxed{\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{im}y_{im} + x_{il}y_{il} + x_{ir}y_{ir}) - 3n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n} \left(x_{im}^2 + x_{il}^2 + x_{ir}^2\right) - 3n\bar{X}^2}}$$

Ahora tomaremos el caso donde $\beta_1 < 0$ , de esta manera debido a la aritmética de los números difusos triangulares $\beta_0 + \beta_1\hat{x}_i$ es el número triangular difuso $(\beta_0 + \beta_1\hat{x}_{ir}, \beta_0 + \beta_1\hat{x}_{im}, \beta_0 + \beta_1\hat{x}_{il})$, el signo de $\beta_1$ altera el orden del número triangular difuso $\hat{x}_1$.

$$S^{+}(\beta_0,\beta_1) = \sum_{i=1}^{n} d^2(\hat{y}_i, \beta_0 + \beta_1\hat{x}_i)$$

$$S^{-}(\beta_0, \beta_1) = \sum_{i=1}^{n} \left[(y_{im} - \beta_0 - \beta_1 x_{ir})^2 + (y_{il} - \beta_0 - \beta_1 x_{il})^2 + (y_{ir} - \beta_0 - \beta_1 x_{im})^2\right]$$

Derivando respecto a $\beta_0$:

$$\frac{\partial\left(S^{-}(\beta_0,\beta_1)\right)}{\partial\beta_0} = \sum_{i=1}^{n} \left[-2\left(y_{im} - \beta_0 - \beta_1 x_{ir}\right) - 2\left(y_{il} - \beta_0 - \beta_1 x_{il}\right) - 2\left(y_{ir} - \beta_0 - \beta_1 x_{il}\right)\right] = 0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left[-2y_{im} + 2\beta_0 + 2\beta_1 x_{im} - 2y_{il} + 2\beta_0 + 2\beta_1 x_{ir} - 2y_{ir} + 2\beta_0 + 2\beta_1 x_{il}\right] = 0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left[6\beta_0 + 2\beta_1\left(x_{ir} + x_{im} + x_{il}\right) - 2\left(y_{il} + y_{im} + y_{ir}\right)\right] = 0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} 6\beta_0 + 2\beta_1 \sum_{i=1}^{n} (x_{ir} + x_{im} + x_{il}) - 2 \sum_{i=1}^{n} (y_{il} + y_{im} + y_{ir}) = 0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} 6\beta_0 = 2 \sum_{i=1}^{n} (y_{il} + y_{im} + y_{ir}) - 2\beta_1 \sum_{i=1}^{n} (x_{ir} + x_{im} + x_{il})$$

$$\rightarrow 6n\beta_0 = 2 \left[ \sum_{i=1}^{n} (y_{il} + y_{im} + y_{ir}) - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} (x_{ir} + x_{im} + x_{il}) \right]$$

$$\rightarrow \beta_0 = 2 \left[ \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_{il} + y_{im} + y_{ir}) - \beta_1 \sum_{i=1}^{n} (x_{ir} + x_{im} + x_{il})}{6n} \right]$$

$$\rightarrow \beta_0 = \left[ \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_{il} + y_{im} + y_{ir})}{3n} - \beta_1 \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{ir} + x_{im} + x_{il})}{3n} \right]$$

Definamos :

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_{il} + y_{im} + y_{ir})}{3n}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_{ir} + x_{im} + x_{il})}{3n}$$

De esta manera denotando $\beta_0 = \beta_0^-$ para el caso en que $\beta_0 < 0$, se obtiene:

$$\boxed{\beta_{\mathbf{0}}^- = \bar{\mathbf{Y}} - \beta_{\mathbf{1}} \bar{\mathbf{X}}}$$

Derivando respecto a $\beta_1$:

$$\frac{\partial (S^-(\beta_0, \beta_1))}{\partial \beta_1} = \sum_{i=1}^{n} \left[ -2x_{im} (y_{im} - \beta_0 - \beta_1 x_{im}) - 2x_{ir} (y_{il} - \beta_0 - \beta_1 x_{ir}) - 2x_{il} (y_{ir} - \beta_0 - \beta_1 x_{il}) \right] = 0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left[ -2x_{im} y_{im} + 2x_{im} \beta_0 + 2\beta_1 x_{im}^2 - 2x_{ir} y_{il} + 2x_{ir} \beta_0 + 2\beta_1 x_{ir}^2 - 2x_{il} y_{ir} + 2\beta_0 x_{il} + 2\beta_1 x_{il}^2 \right] = 0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \left[ (2x_{im}\beta_0 + 2x_{ir}\beta_0 + 2\beta_0 x_{il}) - (2x_{im} y_{im} + 2x_{ir} y_{il} + 2x_{il} y_{ir}) - \left( 2\beta_1 x_{im}^2 + 2\beta_1 x_{ir}^2 + 2\beta_1 x_{il}^2 \right) \right] = 0$$

$$\rightarrow 2n\sum_{i=1}^{n}\left[\beta_0\left(x_{im}+x_{ir}+x_{il}\right)-\left(x_{im}y_{im}+x_{ir}y_{il}+x_{il}y_{ir}\right)-\beta_1\left(x_{im}^2+\beta_1x_{ir}^2+\beta_1x_{il}^2\right)\right]=0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left[\beta_0\left(x_{im}+x_{il}+x_{ir}\right)-\left(x_{im}y_{im}+x_{ir}y_{il}+x_{il}y_{ir}\right)-\beta_1\left(x_{im}^2+\beta_1x_{ir}^2+\beta_1x_{il}^2\right)\right]=0$$

Despejando $\beta_1$:

$$\frac{\partial(S^-(\beta_0,\beta_1))}{\partial\beta_1}=\sum_{i=1}^{n}\left[-2x_{im}\left(y_{im}-\beta_0-\beta_1x_{im}\right)-2x_{ir}\left(y_{il}-\beta_0-\beta_1x_{ir}\right)-2x_{il}\left(y_{ir}-\beta_0-\beta_1x_{il}\right)\right]=0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n}\left[-2x_{im}\left(y_{im}-\beta_0-\beta_1x_{im}\right)-2x_{ir}\left(y_{il}-\beta_0-\beta_1x_{ir}\right)-2x_{il}\left(y_{ir}-\beta_0-\beta_1x_{il}\right)\right]=0$$

$$\rightarrow 2\sum_{i=1}^{n}\left[\beta_1x_{im}^2+\beta_1x_{ir}^2+\beta_1x_{il}^2+\beta_0x_{im}+\beta_0x_{ir}+\beta_0x_{il}-x_{im}y_{im}-x_{ir}y_{il}-x_{il}y_{ir}\right]=0 \qquad (3)$$

Remplazando en ( 3 ) $\boldsymbol{\beta_0=\bar{Y}-\beta_1\bar{X}}$

$$\rightarrow\sum_{i=1}^{n}\beta_1\left(x_{im}^2+x_{il}^2+x_{ir}^2\right)+\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}-\beta_1\bar{X})\left(x_{im}+x_{ir}+x_{il}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}y_{im}+x_{ir}y_{il}+x_{il}y_{ir}\right)=0$$

$$\rightarrow\sum_{i=1}^{n}\beta_1\left(x_{im}^2+x_{il}^2+x_{ir}^2\right)+\sum_{i=1}^{n}\bar{Y}(x_{im}+x_{il}+x_{ir})-\beta_1\sum_{i=1}^{n}\bar{X}\left(x_{im}+x_{il}+x_{ir}\right)-\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}y_{im}+x_{ir}y_{il}+x_{il}y_{ir}\right)=0$$

$$\rightarrow\sum_{i=1}^{n}\beta_1\left(x_{im}^2+x_{il}^2+x_{ir}^2\right)-\beta_1\sum_{i=1}^{n}\bar{X}\left(x_{im}+x_{il}+x_{ir}\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}y_{im}+x_{ir}y_{il}+x_{il}y_{ir}\right)-\sum_{i=1}^{n}\bar{Y}(x_{im}+x_{il}+x_{ir})$$

$$\rightarrow \beta_1\left[\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}^2+x_{il}^2+x_{ir}^2\right)-\sum_{i=1}^{n}\bar{X}\left(x_{im}+x_{il}+x_{ir}\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}y_{im}+x_{ir}y_{il}+x_{il}y_{ir}\right)-\sum_{i=1}^{n}\bar{Y}(x_{im}+x_{il}+x_{ir})$$

$$\rightarrow \beta_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}y_{im}+x_{ir}y_{il}+x_{il}y_{ir}\right)-\bar{Y}\sum_{i=1}^{n}(x_{im}+x_{il}+x_{ir})}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}^2+x_{il}^2+x_{ir}^2\right)-\bar{X}\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}+x_{il}+x_{ir}\right)} \qquad (4)$$

Tomando las siguientes expresiones tendríamos que:

$$3n\bar{Y}=\sum_{i=1}^{n}\left(y_{il}+y_{im}+y_{ir}\right)$$
$$3n\bar{X}=\sum_{i=1}^{n}\left(x_{il}+x_{im}+x_{ir}\right)$$

remplazando en (4) , y denotando $\beta_1$ como $\beta_1^-$ para el caso donde $\beta_1<0$, se llega a:

$$\boxed{\beta_1^-=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}y_{im}+x_{ir}y_{il}+x_{il}y_{ir}\right)-3n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}^2+x_{il}^2+x_{ir}^2\right)-3n\bar{X}^2}}$$

**Caso 2. parámetro difuso y predictor nítido.**

Se estimará $\hat{\beta}_0$, $\hat{\beta}_1$, con $\hat{\beta}_0 = (\beta_{0l}, \beta_{0m}, \beta_{0r})$ y $\hat{\beta}_1 = (\beta_{1l}, \beta_{1m}, \beta_{1r})$ , se presentarán dos casos cuando $x_i \geq 0$ y $x_i < 0$ para $i = 1, 2...n$ debido a la aritmética de los números difusos triangulares cuando $x_i \geq 0$ la expresión $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ es el número triangular difuso $(\beta_{0l} + \beta_{1l}x_i, \beta_{0m} + \beta_{1m}x_i, \beta_{0r} + \beta_{1r}x_i)$ , de esta manera para este caso obtenemos que:

$$S(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1) = \sum_{i=1}^{n} d^2(\hat{y}_i, \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)$$

$$S\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[(y_{im} - \beta_{0m} - \beta_{1m}x_i)^2 + (y_{il} - \beta_{0l} - \beta_{1l}x_i)^2 + (y_{ir} - \beta_{0r} - \beta_{1r}x_i)^2\right]$$

Derivando respecto a $\beta_{om}$.

$\frac{\partial\left(S(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial\beta_{om}} = \sum_{i=1}^{n}\left(-2\left(y_{im} - \beta_{0m} - \beta_{1m}x_i\right)\right) = 0$

$\rightarrow (-2\sum_{i=1}^{n} y_{im} + \sum_{i=1}^{n} 2\beta_{0m} + 2\beta_{1m}\sum_{i=1}^{n} x_i) = 0$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2\beta_{0m} = 2\left(\sum_{i=1}^{n} y_{im} - \beta_{1m}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

$\rightarrow 2n\beta_{0m} = 2\left(\sum_{i=1}^{n} y_{im} - \beta_{1m}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

$\rightarrow \beta_{0m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{im}}{n} - \beta_{1m}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ (5)

Tomando :

$\bar{Y}_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{im}}{n}$

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Remplazando en (5) obtenemos:

$$\boxed{\beta_{0m} = \bar{Y}_m - \beta_{1m}\bar{X}}$$

Derivando respecto a $\beta_{1m}$:

$$\frac{\partial\left(S(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial\beta_{1m}} = \sum_{i=1}^{n}\left[-2x_i\left(y_{im} - \beta_{0m} - \beta_{1m}x_i\right)\right] = 0$$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2\left[\beta_{0m}x_i + \beta_{1m}x_i^2 - y_{im}x_i\right] = 0$

$\rightarrow 2\left[\sum_{i=1}^{n} \beta_{0m}x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1m}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_{im}x_i\right] = 0$

Remplazamos $\beta_{0m} = \bar{Y}_m - \beta_{1m}\bar{X}$ donde $\bar{Y}_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{im}}{n}$ y $n\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i$ , se obtiene:

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_m - \beta_{1m}\bar{X})\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1m}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_{im}\right] = 0$

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_m - \beta_{1m}\bar{X})n\bar{X} + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1m}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_{im}\right] = 0$

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(n\bar{X}\bar{Y}_m - \beta_{1m}n\bar{X}^2) + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1m}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_{im}\right] = 0$

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n} n\bar{X}\bar{Y}_m - \beta_{1m}\sum_{i=1}^{n} n\bar{X}^2 + \beta_{1m}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_{im}\right] = 0$

$$\rightarrow \beta_{1m}\left[-\sum_{i=1}^{n} n\bar{X}^2+\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right]=\sum_{i=1}^{n} x_i y_{im}-\sum_{i=1}^{n} n\bar{X}\bar{Y}_m$$

$$\boxed{\beta_{1m}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_{im}-\sum_{i=1}^{n} n\bar{X}\bar{Y}_m}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2-\sum_{i=1}^{n} n\bar{X}^2}}$$

Derivando la función respecto a $\beta_{ol}$

$$S\left(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(y_{im}-\beta_{0m}-\beta_{1m}x_i\right)^2+\left(y_{il}-\beta_{0l}-\beta_{1l}x_i\right)^2+\left(y_{ir}-\beta_{0r}-\beta_{1r}x_i\right)^2\right]$$

$$\frac{\partial\left(S(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial\beta_{ol}}=\sum_{i=1}^{n}\left(-2\left(y_{il}-\beta_{0l}-\beta_{1l}x_i\right)\right)=0$$

$$\rightarrow\left(-2\sum_{i=1}^{n} y_{il}+\sum_{i=1}^{n} 2\beta_{0l}+2\beta_{1l}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)=0$$

$$\rightarrow\sum_{i=1}^{n} 2\beta_{0l}=2\left(\sum_{i=1}^{n} y_{il}-\beta_{1l}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\rightarrow 2n\beta_{0l}=2\left(\sum_{i=1}^{n} y_{il}-\beta_{1l}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

$$\rightarrow\beta_{0l}=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_{il}}{n}-\beta_{1l}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}\ (6)$$

Tomando :

$$\bar{Y}_l=\frac{\sum_{i=1}^{n} y_{il}}{n}$$

$$\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Remplazando en (6) obtenemos:

$$\boxed{\beta_{0l} = \bar{Y}_l - \beta_{1l}\bar{X}}$$

Derivando respecto a $\beta_{1l}$:

$$\frac{\partial\left(S(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial\beta_{1l}} = \sum_{i=1}^{n}\left[-2x_i\left(y_{il} - \beta_{0l} - \beta_{1l}x_i\right)\right] = 0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2\left[\beta_{0l}x_i + \beta_{1l}x_i^2 - y_{il}x_i\right] = 0$$

$$\rightarrow 2\left[\sum_{i=1}^{n} \beta_{0l}x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1l}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_{il}x_i\right] = 0$$

Remplazamos $\beta_{0l} = \bar{Y}_l - \beta_{1l}\bar{X}$ donde $\bar{Y}_l = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{il}}{n}$ y $n\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i$ .

$$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_l - \beta_{1l}\bar{X})\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1l}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_{il}\right] = 0$$

$$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_l - \beta_{1l}\bar{X})n\bar{X} + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1l}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_{il}\right] = 0$$

$$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(n\bar{X}\bar{Y}_l - \beta_{1l}n\bar{X}^2) + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1l}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_{il}\right] = 0$$

$$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n} n\bar{X}\bar{Y}_l - \beta_{1l}\sum_{i=1}^{n} n\bar{X}^2 + \beta_{1l}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_{il}\right] = 0$$

$$\rightarrow \beta_{1l}\left[-\sum_{i=1}^{n} n\bar{X}^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] = \sum_{i=1}^{n} x_iy_{il} - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}\bar{Y}_l$$

$$\boxed{\beta_{1l} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_iy_{il} - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}\bar{Y}_l}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}^2}}$$

Derivaremos la función respecto a $\beta_{or}$

$$S^{+}\left(\hat{\beta}_0,\hat{\beta}_1\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(y_{im}-\beta_{0m}-\beta_{1m}x_i\right)^2+\left(y_{il}-\beta_{0l}-\beta_{1l}x_i\right)^2+\left(y_{ir}-\beta_{0r}-\beta_{1r}x_i\right)^2\right]$$

$\frac{\partial\left(S(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial\beta_{or}}=\sum_{i=1}^{n}\left(-2\left(y_{ir}-\beta_{0r}-\beta_{1r}x_i\right)\right)=0$

$\rightarrow\left(-2\sum_{i=1}^{n}y_{ir}+\sum_{i=1}^{n}2\beta_{0r}+2\beta_{1r}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)=0$

$\rightarrow\sum_{i=1}^{n}2\beta_{0r}=2\left(\sum_{i=1}^{n}y_{ir}-\beta_{1r}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$

$\rightarrow 2n\beta_{0r}=2\left(\sum_{i=1}^{n}y_{ir}-\beta_{1r}\sum_{i=1}^{n}x_i\right)$

$\beta_{0r}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_{ir}}{n}-\beta_{1r}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$ (7)

Tomando :

$\bar{Y}_r=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_{ir}}{n}$

$\bar{X}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i}{n}$

Remplazando en (7) obtenemos:

$$\boxed{\beta_{0r}=\bar{Y}_r-\beta_{1r}\bar{X}}$$

Derivando respecto a $\beta_{1r}$:

$\frac{\partial(S(\beta_0,\beta_1))}{\partial\beta_{1r}} = \sum_{i=1}^{n} \left[-2x_i \left(y_{ir} - \beta_{0r} - \beta_{1r}x_i\right)\right] = 0$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2\left[\beta_{0r}x_i + \beta_{1r}x_i^2 - y_{ir}x_i\right] = 0$

$\rightarrow 2\left[\sum_{i=1}^{n} \beta_{0r}x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1r}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_{ir}x_i\right] = 0$

Remplazamos $\beta_{0r} = \bar{Y}_r - \beta_{1r}\bar{X}$ donde $\bar{Y}_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ir}}{n}$ y $n\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i$ .

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_r - \beta_{1r}\bar{X})\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1r}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_{ir}\right] = 0$

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_r - \beta_{1r}\bar{X})n\bar{X} + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1r}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_{ir}\right] = 0$

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(n\bar{X}\bar{Y}_r - \beta_{1r}n\bar{X}^2) + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1r}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_{ir}\right] = 0$

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n} n\bar{X}\bar{Y}_r - \beta_{1r}\sum_{i=1}^{n} n\bar{X}^2 + \beta_{1r}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_iy_{ir}\right] = 0$

$\rightarrow \beta_{1r}\left[-\sum_{i=1}^{n} n\bar{X}^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] = \sum_{i=1}^{n} x_iy_{ir} - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}\bar{Y}_r$

$$\boxed{\beta_{1r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_iy_{ir} - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}\bar{Y}_r}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}^2}}$$

Ahora se estimara $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$, con $\hat{\beta}_0 = (\beta_{0l}, \beta_{0m}, \beta_{0r})$ y $\hat{\beta}_1 = (\beta_{1l}, \beta_{1m}, \beta_{1r})$ ,en este caso tomaremos $x_i < 0$ para $i = 1, 2...n$ debido a la aritmética de los números difusos triangulares cuando $x_i < 0$ la expresión $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1x_i$ es el número triangular difuso $(\beta_{0l} + \beta_{1r}x_i, \beta_{0m} + \beta_{1m}x_i, \beta_{0r} + \beta_{1l}x_i)$ , de esta manera para este caso obtenemos que:

$$S(\hat{\beta}_{0,}\hat{\beta}_1) = \sum_{i=1}^{n} d^2(\hat{y}_i, \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i)$$

$$S\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[(y_{im} - \beta_{0m} - \beta_{1m}x_i)^2 + (y_{il} - \beta_{0l} - \beta_{1r}x_i)^2 + (y_{ir} - \beta_{0r} - \beta_{1l}x_i)^2\right]$$

Derivando respecto a $\beta_{om}$.

$\frac{\partial\left(S(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial\beta_{om}} = \sum_{i=1}^{n}\left(-2\left(y_{im} - \beta_{0m} - \beta_{1m}x_i\right)\right) = 0$

$\rightarrow \left(-2\sum_{i=1}^{n} y_{im} + \sum_{i=1}^{n} 2\beta_{0m} + 2\beta_{1m}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2\beta_{0m} = 2\left(\sum_{i=1}^{n} y_{im} - \beta_{1m}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

$\rightarrow 2n\beta_{0m} = 2\left(\sum_{i=1}^{n} y_{im} - \beta_{1m}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

$\rightarrow \beta_{0m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{im}}{n} - \beta_{1m}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ (8)

Tomando :

$\bar{Y}_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{im}}{n}$

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Remplando en (8) obtenemos:

$$\boxed{\beta_{0m} = \bar{Y}_m - \beta_{1m}\bar{X}}$$

Derivando respecto a $\beta_{1m}$:

$\frac{\partial\left(S(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial\beta_{1m}} = \sum_{i=1}^{n}\left[-2x_i\left(y_{im} - \beta_{0m} - \beta_{1m}x_i\right)\right] = 0$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2\left[\beta_{0m}x_i + \beta_{1m}x_i^2 - y_{im}x_i\right] = 0$

$\rightarrow 2\left[\sum_{i=1}^{n}\beta_{0m}x_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_{1m}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}y_{im}x_i\right] = 0$

Remplazamos $\beta_{0m} = \bar{Y}_m - \beta_{1m}\bar{X}$ donde $\bar{Y}_m = \frac{\sum_{i=1}^{n}y_{im}}{n}$ y $n\bar{X} = \sum_{i=1}^{n}x_i$ .

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_m - \beta_{1m}\bar{X})\sum_{i=1}^{n}x_i + \sum_{i=1}^{n}\beta_{1m}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}x_iy_{im}\right] = 0$

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_m - \beta_{1m}\bar{X})n\bar{X} + \sum_{i=1}^{n}\beta_{1m}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}x_iy_{im}\right] = 0$

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(n\bar{X}\bar{Y}_m - \beta_{1m}n\bar{X}^2) + \sum_{i=1}^{n}\beta_{1m}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}x_iy_{im}\right] = 0$

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}n\bar{X}\bar{Y}_m - \beta_{1m}\sum_{i=1}^{n}n\bar{X}^2 + \beta_{1m}\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}x_iy_{im}\right] = 0$

$\rightarrow \beta_{1m}\left[-\sum_{i=1}^{n}n\bar{X}^2 + \sum_{i=1}^{n}x_i^2\right] = \sum_{i=1}^{n}x_iy_{im} - \sum_{i=1}^{n}n\bar{X}\bar{Y}_m$

$$\boxed{\beta_{1m} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_{im} - \sum_{i=1}^{n}n\bar{X}\bar{Y}_m}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n}n\bar{X}^2}}$$

Derivando la función respecto a $\beta_{ol}$

$$S\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\right) = \sum_{i=1}^{n} \left[ (y_{im} - \beta_{0m} - \beta_{1m}x_i)^2 + (y_{il} - \beta_{0l} - \beta_{1r}x_i)^2 + (y_{ir} - \beta_{0r} - \beta_{1l}x_i)^2 \right]$$

$\frac{\partial\left(S(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial\beta_{ol}} = \sum_{i=1}^{n} \left(-2\left(y_{il} - \beta_{0l} - \beta_{1r}x_i\right)\right) = 0$

$\rightarrow \left(-2\sum_{i=1}^{n} y_{il} + \sum_{i=1}^{n} 2\beta_{0l} + 2\beta_{1r}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2\beta_{0l} = 2\left(\sum_{i=1}^{n} y_{il} - \beta_{1r}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

$\rightarrow 2n\beta_{0l} = 2\left(\sum_{i=1}^{n} y_{il} - \beta_{1r}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

$\rightarrow \beta_{0l} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{il}}{n} - \beta_{1r}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}(9)$

Tomando :

$\bar{Y}_l = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{il}}{n}$

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Repmzando en (9) obtenemos:

$$\boxed{\beta_{0l} = \bar{Y}_l - \beta_{1r}\bar{X}}$$

Derivando respecto a $\beta_{1l}$:

$\frac{\partial\left(S(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial\beta_{1l}} = \sum_{i=1}^{n} \left[-2x_i\left(y_{il} - \beta_{0l} - \beta_r x_i\right)\right] = 0$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2\left[\beta_{0l} x_i + \beta_{1r} x_i^2 - y_{il} x_i\right] = 0$

$\rightarrow 2\left[\sum_{i=1}^{n} \beta_{0l} x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1r} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_{il} x_i\right] = 0$

Remplazamos $\beta_{0l} = \bar{Y}_l - \beta_{1r}\bar{X}$ donde $\bar{Y}_l = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{il}}{n}$ y $n\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i$ .

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_l - \beta_{1r}\bar{X}) \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1r} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_{il}\right] = 0$

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_l - \beta_{1r}\bar{X}) n\bar{X} + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1r} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_{il}\right] = 0$

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(n\bar{X}\bar{Y}_l - \beta_{1r} n\bar{X}^2) + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1r} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_{il}\right] = 0$

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n} n\bar{X}\bar{Y}_l - \beta_{1r} \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}^2 + \beta_{1r} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_{il}\right] = 0$

$\rightarrow \beta_{1r}\left[- \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i y_{il} - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}\bar{Y}_l$

$$\boxed{\beta_{1r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_{il} - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}\bar{Y}_l}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}^2}}$$

Derivando la función respecto a $\beta_{or}$

$$S^{+}\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1\right) = \sum_{i=1}^{n}\left[(y_{im} - \beta_{0m} - \beta_{1m} x_i)^2 + (y_{il} - \beta_{0l} - \beta_{1r} x_i)^2 + (y_{ir} - \beta_{0r} - \beta_{1l} x_i)^2\right]$$

$\frac{\partial\left(S(\hat{\beta_0}, \hat{\beta}_1)\right)}{\partial \beta_{or}} = \sum_{i=1}^{n}\left(-2\left(y_{ir} - \beta_{0r} - \beta_{1l} x_i\right)\right) = 0$

$\rightarrow \left(-2\sum_{i=1}^{n} y_{ir} + \sum_{i=1}^{n} 2\beta_{0r} + 2\beta_{1l}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = 0$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2\beta_{0r} = 2\left(\sum_{i=1}^{n} y_{ir} - \beta_{1l}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

$\rightarrow 2n\beta_{0r} = 2\left(\sum_{i=1}^{n} y_{ir} - \beta_{1l}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$

$\beta_{0r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ir}}{n} - \beta_{1l}\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ (10)

Tomando :

$\bar{Y}_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ir}}{n}$

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$

Remplazando en (10) obtenemos:

$$\boxed{\beta_{0r} = \bar{Y}_r - \beta_{1l}\bar{X}}$$

Ahora derivando respecto a $\beta_{1r}$:

$\frac{\partial\left(S(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial\beta_{1r}} = \sum_{i=1}^{n}\left[-2x_i\left(y_{ir} - \beta_{0r} - \beta_{1l}x_i\right)\right] = 0$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2\left[\beta_{0r}x_i + \beta_{1l}x_i^2 - y_{ir}x_i\right] = 0$

$\rightarrow 2\left[\sum_{i=1}^{n} \beta_{0l}x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1l}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_{ir}x_i\right] = 0$

Remplazamos $\beta_{0l} = \bar{Y}_r - \beta_{1l}\bar{X}$ donde $\bar{Y}_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ir}}{n}$ y $n\bar{X} = \sum_{i=1}^{n} x_i$ .

$\to \left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_r - \beta_{1l}\bar{X}) \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1l}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_{ir}\right] = 0$

$\to \left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_r - \beta_{1l}\bar{X})n\bar{X} + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1l}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_{ir}\right] = 0$

$\to \left[\sum_{i=1}^{n}(n\bar{X}\bar{Y}_r - \beta_{1l}n\bar{X}^2) + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1l}x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_{ir}\right] = 0$

$\to \left[\sum_{i=1}^{n} n\bar{X}\bar{Y}_r - \beta_{1l}\sum_{i=1}^{n} n\bar{X}^2 + \beta_{1l}\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i y_{ir}\right] = 0$

$\to \beta_{1l}\left[-\sum_{i=1}^{n} n\bar{X}^2 + \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i y_{ir} - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}\bar{Y}_r$

$$\boxed{\beta_{1l} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_{ir} - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}\bar{Y}_r}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}^2}}$$

**Caso 3. parámetro difuso y predictor difuso.**

Se estimará $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$, con $\hat{\beta}_0 = (\beta_{0l}, \beta_{0m}, \beta_{0r})$ y $\hat{\beta}_1 = (\beta_{1l}, \beta_{1m}, \beta_{1r})$ , y $\hat{x}_i = (x_{il}, x_{im}, x_{ir})$ para $i = 1, 2...n$ definiremos el producto entre dos números difusos $\hat{A}_1 = (a_{1l}, a_{1m}, a_{1r})$ y $\hat{A}_2 = (a_{2l}, a_{2m}, a_{2r})$ como aproximadamente:

$$\hat{A}_1\hat{A}_2 \simeq (a_{1l}a_{2l}, a_{1m}a_{2m}, a_{1r}a_{2r})$$

La expresión $\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ es aproximadamente el número triangular difuso $(\beta_{0l} + \beta_{1l}x_{il}, \beta_{0m} + \beta_{1m}x_{im}, \beta_{0r} + \beta_{1r}x_{ir})$ , de esta manera para este caso obtenemos que:

$$S(\hat{\beta}_{0,}\hat{\beta}_1) = \sum_{i=1}^{n} d^2(\hat{y}_i, \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1\hat{x}_i)$$

$$S(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1) = \sum_{i=1}^{n} \left[(y_{im} - \beta_{0m} - \beta_{1m}x_{im})^2 + (y_{il} - \beta_{0l} - \beta_{1l}x_{il})^2 + (y_{ir} - \beta_{0r} - \beta_{1r}x_{ir})^2\right]$$

Derivando respecto a $\beta_{om}$

$\rightarrow \frac{\partial\left(S^{+}(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial\beta_{om}} = \sum_{i=1}^{n}\left(-2\left(y_{im} - \beta_{0m} - \beta_{1m}x_{im}\right)\right) = 0$

$\rightarrow \frac{\partial\left(S^{+}(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial\beta_{om}} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_{0m} + \beta_{1m}x_{im} - y_{im}\right) = 0$

$\rightarrow \frac{\partial\left(S^{+}(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial\beta_{om}} = \sum_{i=1}^{n}\beta_{0m} + \sum_{i=1}^{n}\beta_{1m}x_{im} - \sum_{i=1}^{n}y_{im} = 0$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n}\beta_{0m} = \sum_{i=1}^{n}y_{im} - \sum_{i=1}^{n}\beta_{1m}x_{im}$

$\rightarrow n\beta_{0m} = \sum_{i=1}^{n}y_{im} - \beta_{1m}\sum_{i=1}^{n}x_{im}$

$\rightarrow \beta_{0m} = \frac{\sum_{i=1}^{n}y_{im}}{n} - \beta_{1m}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_{im}}{n}$ (11)

Definamos:

$\bar{Y}_m = \frac{\sum_{i=1}^{n}y_{im}}{n}$

$\bar{X}_m = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_{im}}{n}$

Remplazando en (11) obtenemos:

$$\boxed{\beta_{0m} = \bar{Y}_m - \beta_{1m}\bar{X}_m}$$

Derivando respecto a $\beta_{1m}$:

$\frac{\partial\left(S^{+}(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial\beta_{1m}} = \sum_{i=1}^{n}\left[-2x_{im}\left(y_{im} - \beta_{0m} - \beta_{1m}x_m\right)\right] = 0$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2\left[\beta_{0m}x_{im} + \beta_{1m}x_{im}^2 - y_{im}x_{im}\right] = 0$

$\rightarrow 2\left[\sum_{i=1}^{n}\beta_{0m}x_{im} + \sum_{i=1}^{n}\beta_{1m}x_{im}^2 - \sum_{i=1}^{n}y_{im}x_{im}\right] = 0$

Remplazamos $\beta_{0m} = \bar{Y}_m - \beta_{1m}\bar{X}_m$ donde $\bar{Y}_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{im}}{n}$ y $n\bar{X}_m = \sum_{i=1}^{n} x_{im}$ .

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_m - \beta_{1m}\bar{X}_m)\sum_{i=1}^{n}x_{im} + \sum_{i=1}^{n}\beta_{1m}x_{im}^2 - \sum_{i=1}^{n}x_{im}y_{im}\right] = 0$

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_m - \beta_{1m}\bar{X}_m)n\bar{X}_m + \sum_{i=1}^{n}\beta_{1m}x_{im}^2 - \sum_{i=1}^{n}x_{im}y_{im}\right] = 0$

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(n\bar{X}_m\bar{Y}_m - \beta_{1m}n\bar{X}_m^2) + \sum_{i=1}^{n}\beta_{1m}x_{im}^2 - \sum_{i=1}^{n}x_{im}y_{im}\right] = 0$

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}n\bar{X}_m\bar{Y}_m - \beta_{1m}\sum_{i=1}^{n}n\bar{X}_m^2 + \beta_{1m}\sum_{i=1}^{n}x_{im}^2 - \sum_{i=1}^{n}x_{im}y_{im}\right] = 0$

$\rightarrow \beta_{1m}\left[-\sum_{i=1}^{n}n\bar{X}_m^2 + \sum_{i=1}^{n}x_{im}^2\right] = \sum_{i=1}^{n}x_{im}y_{im} - \sum_{i=1}^{n}n\bar{X}_m\bar{Y}_m$

$$\boxed{\beta_{1m} = \frac{\sum_{i=1}^{n}x_{im}y_{im} - \sum_{i=1}^{n}n\bar{X}_m\bar{Y}_m}{\sum_{i=1}^{n}x_{im}^2 - \sum_{i=1}^{n}n\bar{X}_m^2}}$$

Derivando respecto a $\beta_{ol}$

$$\rightarrow \frac{\partial\left(S^{+}(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial \beta_{ol}} = \sum_{i=1}^{n}\left(-2\left(y_{il}-\beta_{0l}-\beta_{1l}x_{il}\right)\right)=0$$

$$\rightarrow \frac{\partial\left(S^{+}(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial \beta_{ol}} = 2\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_{0l}+\beta_{1l}x_{il}-y_{il}\right)=0$$

$$\rightarrow \frac{\partial\left(S^{+}(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial \beta_{ol}} = \sum_{i=1}^{n}\beta_{0l}+\sum_{i=1}^{n}\beta_{1l}x_{il}-\sum_{i=1}^{n}y_{il}=0$$

$$\rightarrow \sum_{i=1}^{n}\beta_{0l}=\sum_{i=1}^{n}y_{il}-\sum_{i=1}^{n}\beta_{1l}x_{il}$$

$$\rightarrow n\beta_{0l}=\sum_{i=1}^{n}y_{il}-\beta_{1l}\sum_{i=1}^{n}x_{il}$$

$$\rightarrow \beta_{0l}=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_{il}}{n}-\beta_{1l}\frac{\sum_{i=1}^{n}x_{il}}{n}\ (12)$$

Obtenemos:

$\bar{Y}_l=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_{il}}{n}$

$\bar{X}_l=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_{il}}{n}$

Remplazando en (12) obtenemos:

$$\boxed{\beta_{0l}=\bar{Y}_l-\beta_{1l}\bar{X}_l}$$

Derivando respecto a $\beta_{1l}$:

$$\frac{\partial\left(S^{+}(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial\beta_{1l}} = \sum_{i=1}^{n}\left[-2x_{il}\left(y_{il}-\beta_{0l}-\beta_{1l}x_l\right)\right]=0$$

$$\rightarrow \textstyle\sum_{i=1}^{n} 2\left[\beta_{0l}x_{il}+\beta_{1l}x_{il}^2-y_{il}x_{il}\right]=0$$

$$\rightarrow 2\left[\textstyle\sum_{i=1}^{n}\beta_{0l}x_{il}+\sum_{i=1}^{n}\beta_{1l}x_{il}^2-\sum_{i=1}^{n}y_{il}x_{il}\right]=0$$

Remplazamos $\beta_{0l}=\bar{Y}_l-\beta_{1l}\bar{X}_l$ donde $\bar{Y}_l=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_{il}}{n}$ y $n\bar{X}_l=\sum_{i=1}^{n}x_{il}$ .

$$\rightarrow \left[\textstyle\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_l-\beta_{1l}\bar{X}_l)\sum_{i=1}^{n}x_{il}+\sum_{i=1}^{n}\beta_{1l}x_{il}^2-\sum_{i=1}^{n}x_{il}y_{il}\right]=0$$

$$\rightarrow \left[\textstyle\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_l-\beta_{1l}\bar{X}_l)n\bar{X}_l+\sum_{i=1}^{n}\beta_{1l}x_{il}^2-\sum_{i=1}^{n}x_{il}y_{il}\right]=0$$

$$\rightarrow \left[\textstyle\sum_{i=1}^{n}(n\bar{X}_l\bar{Y}_l-\beta_{1l}n\bar{X}_l^2)+\sum_{i=1}^{n}\beta_{1l}x_{il}^2-\sum_{i=1}^{n}x_{il}y_{il}\right]=0$$

$$\rightarrow \left[\textstyle\sum_{i=1}^{n}n\bar{X}_l\bar{Y}_l-\beta_{1l}\sum_{i=1}^{n}n\bar{X}_l^2+\beta_{1l}\sum_{i=1}^{n}x_{il}^2-\sum_{i=1}^{n}x_{il}y_{il}\right]=0$$

$$\rightarrow \beta_{1l}\left[-\textstyle\sum_{i=1}^{n}n\bar{X}_l^2+\sum_{i=1}^{n}x_{il}^2\right]=\sum_{i=1}^{n}x_{il}y_{il}-\sum_{i=1}^{n}n\bar{X}_l\bar{Y}_l$$

$$\boxed{\beta_{1l}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_{il}y_{il}-\sum_{i=1}^{n}n\bar{X}_l\bar{Y}_l}{\sum_{i=1}^{n}x_{il}^2-\sum_{i=1}^{n}n\bar{X}_l^2}}$$

Derivando respecto a $\beta_{or}$

$$\rightarrow\frac{\partial\left(S^{+}(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial\beta_{or}}=\textstyle\sum_{i=1}^{n}\left(-2\left(y_{ir}-\beta_{0r}-\beta_{1r}x_{ir}\right)\right)=0$$

$$\rightarrow\frac{\partial\left(S^{+}(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial\beta_{or}}=2\textstyle\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_{0r}+\beta_{1r}x_{ir}-y_{ir}\right)=0$$

$\rightarrow \frac{\partial\left(S^{+}(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial \beta_{or}} = \sum_{i=1}^{n} \beta_{0r} + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1r} x_{ir} - \sum_{i=1}^{n} y_{ir} = 0$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} \beta_{0r} = \sum_{i=1}^{n} y_{ir} - \sum_{i=1}^{n} \beta_{1r} x_{ir}$

$\rightarrow n\beta_{0r} = \sum_{i=1}^{n} y_{ir} - \beta_{1r} \sum_{i=1}^{n} x_{ir}$

$\rightarrow \beta_{0r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ir}}{n} - \beta_{1r} \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ir}}{n}$ (13)

Definamos:

$\bar{Y}_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ir}}{n}$

$\bar{X}_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ir}}{n}$

Remplazando en (13) obtenemos:

$$\boxed{\beta_{0r} = \bar{Y}_r - \beta_{1r} \bar{X}_r}$$

Derivando respecto a $\beta_{1r}$:

$$\frac{\partial\left(S^{+}(\hat{\beta_0},\hat{\beta}_1)\right)}{\partial \beta_{1r}} = \sum_{i=1}^{n} \left[-2x_{ir}\left(y_{ir} - \beta_{0r} - \beta_{1r} x_l\right)\right] = 0$$

$\rightarrow \sum_{i=1}^{n} 2\left[\beta_{0l} x_{ir} + \beta_{1l} x_{ir}^2 - y_{ir} x_{ir}\right] = 0$

$\rightarrow 2\left[\sum_{i=1}^{n} \beta_{0r} x_{ir} + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1r} x_{ir}^2 - \sum_{i=1}^{n} y_{ir} x_{ir}\right] = 0$

Remplazamos $\beta_{0r} = \bar{Y}_r - \beta_{1r}\bar{X}_r$ donde $\bar{Y}_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ir}}{n}$ y $\bar{X}_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ir}}{n}$ .

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_r - \beta_{1r}\bar{X}_r)\sum_{i=1}^{n} x_{ir} + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1l}x_{ir}^2 - \sum_{i=1}^{n} x_{ir}y_{ir}\right] = 0$

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(\bar{Y}_r - \beta_{1r}\bar{X}_r)n\bar{X}_r + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1r}x_{ir}^2 - \sum_{i=1}^{n} x_{ir}y_{ir}\right] = 0$

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n}(n\bar{X}_r\bar{Y}_r - \beta_{1r}n\bar{X}_r^2) + \sum_{i=1}^{n} \beta_{1r}x_{ir}^2 - \sum_{i=1}^{n} x_{ir}y_{ir}\right] = 0$

$\rightarrow \left[\sum_{i=1}^{n} n\bar{X}_r\bar{Y}_r - \beta_{1r}\sum_{i=1}^{n} n\bar{X}_r^2 + \beta_{1r}\sum_{i=1}^{n} x_{ir}^2 - \sum_{i=1}^{n} x_{ir}y_{ir}\right] = 0$

$\rightarrow \beta_{1r}\left[-\sum_{i=1}^{n} n\bar{X}_r^2 + \sum_{i=1}^{n} x_{ir}^2\right] = \sum_{i=1}^{n} x_{ir}y_{ir} - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}_r\bar{Y}_r$

$$\boxed{\beta_{1r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ir}y_{ir} - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}_r\bar{Y}_r}{\sum_{i=1}^{n} x_{ir}^2 - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}_r^2}}$$

## Capítulo 3

# EJEMPLOS DE ESTIMACIÓN DE MODELOS DE REGRESIÓN DIFUSA SIMPLE.

En este capítulo mostraremos la aplicación de cada uno de los casos estudiados en el capítulo anterior.

***Caso 1. Ejemplo para el caso de parámetro nítido y predictor difuso .***

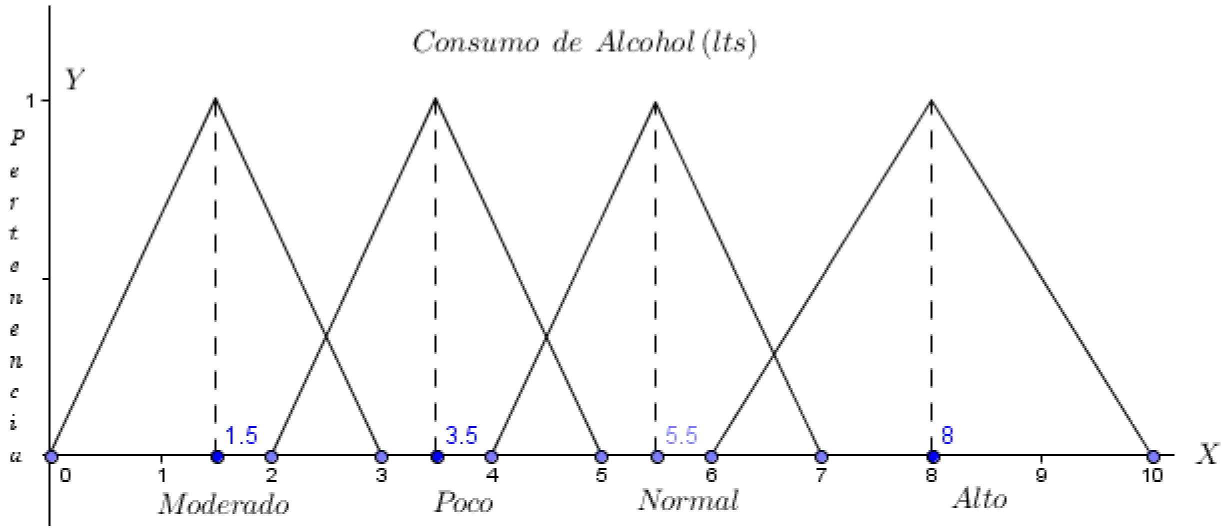
Cantidad de muertos por bebidas alcohólicas ingeridas en una localidad ( zona tomada aleatoriamente de la muestra de un conjunto de localidades con alto índice de mortalidad por consumo de alcohol).

Se han definido los datos relacionados con la cantidad de alcohol ingerida y los accidentes de tránsito fatales en un población, como se muestra a continuación:

**CONSUMO DE ALCOHOL**

| **cuantificador** | **número difuso** |
|---|---|
| moderado (M1) | (0, 1.5,3) |
| poco (P1) | (2,3.5,5) |
| normal (N1) | (4,5.5,7) |
| alto (A1) | $(6, 8, 10)$ |

La tabla anterior nos muestra los rangos definidos según el consumo de alcohol y el numero difuso asociado a cada rango , siendo moderado el grado más bajo de consumo y alto el mayor grado de consumo, cuya representación gráfica es:




con una función de pertenencia para cada uno de estos números difusos dada por:

$$Moderado = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{x}{1,5} & si\ x \in [0, 1.5) \\ 1 & si\ x = 1,5 \\ \frac{x-3}{-1,5} & si\ x \in (1.5\ ,3] \\ 0 & si\ x \geq 3 \end{cases}$$

$$
Poco = \begin{cases} 0 & si\ x < 2 \\ \frac{x-2}{3,5} & si\ x \in [2, 3.5) \\ 1 & si\ x = 3,5 \\ \frac{x-5}{-3,5} & si\ x \in (3.5\ ,5] \\ 0 & si\ x \geq 5 \end{cases}
$$

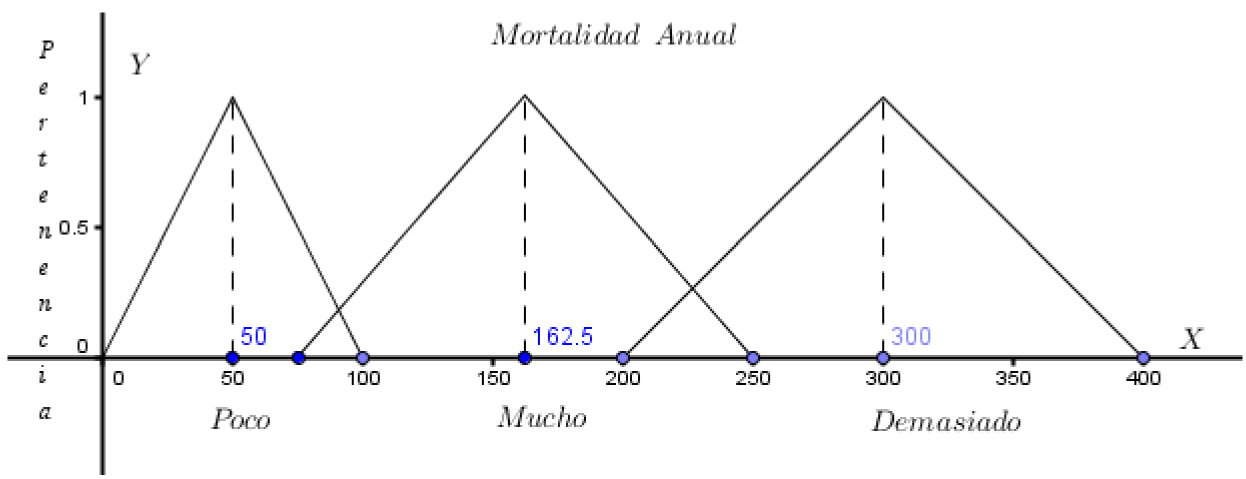
$$
Normal = \begin{cases} 0 & si\ x < 4 \\ \frac{x-4}{5,5} & si\ x \in [4, 5.5) \\ 1 & si\ x = 5,5 \\ \frac{x-7}{-5,5} & si\ x \in (5.5\ ,7] \\ 0 & si\ x \geq 7 \end{cases}
$$

$$
alto = \begin{cases} 0 & si\ x < 6 \\ \frac{x-6}{8} & si\ x \in [6, 8) \\ 1 & si\ x = 8 \\ \frac{x-10}{-8} & si\ x \in (8\ ,10] \\ 0 & si\ x \geq 7 \end{cases}
$$

La variable repuesta, en este caso cantidad de muertos en accidentes de tránsito está definida por la tabla siguiente:

| **cuantificador** | **número difuso** |
|---|---|
| pocos (P2) | (0,50,100) |
| muchos (M2) | $(75, 162{,}5, 250)$ |
| demasiados (D2) | $(200, 300, 400)$ |

Con función de pertenencia dada por:




$$Pocos = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{x}{50} & si\ x \in [0, 50) \\ 1 & si\ x = 50 \\ \frac{x-100}{-50} & si\ x \in (50\,,100] \\ 0 & si\ x \geq 100 \end{cases}$$

$$Muchos = \begin{cases} 0 & si\ x < 75 \\ \frac{x-75}{162,5} & si\ x \in [75, 162.5) \\ 1 & si\ x = 163,5 \\ \frac{x-250}{-162,5} & si\ x \in (162.5\ ,250] \\ 0 & si\ x \geq 250 \end{cases}$$

$$Demasiados = \begin{cases} 0 & si\ x < 200 \\ \frac{x-200}{100} & si\ x \in [200,\ 300) \\ 1 & si\ x = 300 \\ \frac{x-400}{-100} & si\ x \in (300\ , 400] \\ 0 & si\ x \geq 400 \end{cases}$$

Se han observado 5 datos sobre el consumo de alcohol en litros y la cantidad de muertes en accidentes de tránsito muertes relacionadas como se muestra en la tabla, el alcohol está dado en litros y las muertes en centenares.

| **alcohol tomado** $= y$ | **cantidad de muertos = x** |
|---|---|
| $0,8$ | 71 |
| 1,5 | 115 |
| $3,9$ | 167 |
| $5,8$ | 211 |
| $9,1$ | 250 |

Cada uno de los datos anteriores se corresponde a una cantidad difusa de acuerdo a como estas han sido definidas, así :

VARIABLE REGRESORA

| **observación = x** | **pertenencia** | **número difuso** |
|---|---|---|
| 0,8 | $moderado = 0{,}53$ | (0,1.5,3) |
| 1,5 | $moderado = 1$ | $(0, 1{,}5, 3)$ |
| 3,9 | $poco = 0{,}73$ | $(2, 3{,}5, 5)$ |
| 5,8 | $normal = 0{,}8$ | $(4, 5{,}5, 7)$ |
| 9,1 | $alto = 0{,}6$ | $(6, 8, 10)$ |

VARIABLE RESPUESTA

| **observación = y** | **pertenencia** | **numero difuso** |
|---|---|---|
| 71 | $P2 = 0{,}58$ | $(0, 50, 100)$ |
| 115 | $M2 = 0{,}45$ | $(75, 162{,}5, 250)$ |
| 167 | $M2 = 0{,}94$ | $(75, 162{,}5, 250)$ |
| 211 | $M2 = 0, 44$ | $(75, 162{,}5, 250)$ |
| | $D2 = 0, 11$ | $(200, 300, 400)$ |
| 265 | $D2 = 0, 65$ | $(200, 300, 400)$ |

El cuadro siguiente resume las dos variables difusas.

| **x** | **y** |
|---|---|
| $(0, 1{,}5, 3)$ | $(0, 50, 100)$ |
| $(0, 1{,}5, 3)$ | $(75, 162{,}5, 250)$ |
| $(2, 3{,}5, 5)$ | $(75, 162{,}5, 250)$ |
| $(4, 5{,}5, 7)$ | $(75, 162{,}5, 250)$ |
| $(4, 5{,}5, 7)$ | (200,300,400) |
| $(6, 8, 10)$ | $(200, 300, 400)$ |

Usando excel y las fórmulas descritas en el capítulo anterior obtenemos los resultados siguientes:

| n | $\mathbf{x}_l$ | $\mathbf{x}_m$ | $\mathbf{x}_r$ | $\mathbf{y_l}$ | $\mathbf{y}_m$ | $\mathbf{y}_r$ | $\mathbf{x}_l^2$ | $\mathbf{x}_m^2$ | $\mathbf{x}_r^2$ | $\mathbf{x_l y_l}$ | $\mathbf{x_m y_m}$ | $\mathbf{x_r y_r}$ | $\sum \mathbf{x_i y_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0 | 1,5 | 3 | 0 | 50 | 100 | 0 | 2,25 | 9 | 0 | 75 | 300 | 375 |
| 2 | 0 | 1,5 | 3 | 75 | 162,5 | 250 | 0 | 2,25 | 9 | 0 | 243,75 | 750 | 993,75 |
| 3 | 2 | 3,5 | 5 | 75 | 162,5 | 250 | 4 | 12,25 | 25 | 150 | 568,75 | 1250 | 1968,75 |
| 4 | 4 | 5,5 | 7 | 75 | 162,5 | 250 | 16 | 30,25 | 49 | 300 | 893,75 | 1750 | 2943,75 |
| 5 | 4 | 5,5 | 7 | 200 | 300 | 400 | 16 | 30,25 | 49 | 800 | 1650 | 2800 | 5250 |
| 6 | 6 | 8 | 10 | 200 | 300 | 400 | 36 | 64 | 100 | 1200 | 2400 | 4000 | 7600 |
| sumas | 16 | 22,5 | 35 | 625 | 1137,5 | 1650 | 72 | 141,25 | 241 | 2450 | 5831,25 | 10850 | 19131, 25 |

Así que $\beta_1$ está determinado por:

$$\beta_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}y_{im} + x_{il}y_{il} + x_{ir}y_{ir}\right) - 3n\bar{X}\bar{Y}}{\sum_{i=1}^{n}\left(x_{im}^2 + x_{il}^2 + x_{ir}^2\right) - 3n\bar{X}^2}$$

donde :

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_{il}+y_{im}+y_{ir})}{3n}$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_{il}+x_{im}+x_{ir})}{3n}$$

Remplazando $n = 6$ tenemos que:

$$\bar{Y} = \frac{\sum_{i=1}^{6}(y_{il}+y_{im}+y_{ir})}{18} = \frac{(0+75+75+75+200+200)+(50+162{,}5+162{,}5+162{,}5+300+300)+(100+250+250+250+400+400)}{18}$$

$$\bar{Y} = 189{,}58$$

$$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{6}(x_{il}+x_{im}+x_{ir})}{18} = \frac{(0+0+2+4+4+6)+(1{,}5+1{,}5+3{,}5+5{,}5+5{,}5+8)+(3+3+5+7+7+10)}{18}$$

$$\bar{X} = 4{,}25$$

basándonos en la información anterior obtenemos que:

$$\beta_1 = \frac{19131{,}25 - (18)(4{,}25)(189{,}58)}{454{,}25 - (18)(4{,}25)^2}$$

$$\beta_{\mathbf{1}} = \mathbf{35{,}8422}$$

Por tanto.

$$\beta_{\mathbf{0}} = \bar{\mathbf{Y}} - \beta_{\mathbf{1}}\bar{\mathbf{X}}$$

Tomando el valor:

$$\beta_{\mathbf{0}} = \mathbf{189,58 - (35,8422)(4,25)}$$

$$\beta_{\mathbf{0}} = \mathbf{37,25395289}$$

En consecuencia el modelo de regresión será:

$$\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{37,25395289 + 35,8422x}$$

*Caso 2.Ejemplo parámetro difuso y predictor nítido.*

Se tomó una muestra de 25 personas en un campus universitario , se tomaron datos del rendimiento semestral (muy regular, regular , bueno , excelente ) y cantidad de horas que utilizan su celular en redes sociales ( de 1 a 10 horas ) .

Tomamos la variable respuesta $Y$ (rendimiento por estudiante ) y el predictor $x$ (cantidad de horas en la red ), como difusa y nítida respectivamente .

Definimos $Y$ como variable difusa puesto que el estudiante no tiene aún claro cuál será su rendimiento semestral , responde según su desempeño relacionándolo a las horas que utiliza el Internet desde su celular en actividades diferentes al estudio.

La siguiente tabla muestra las horas que ocupó cada estudiante con su celular:

**HORAS EN INTERNET DESDE EL CELULAR**

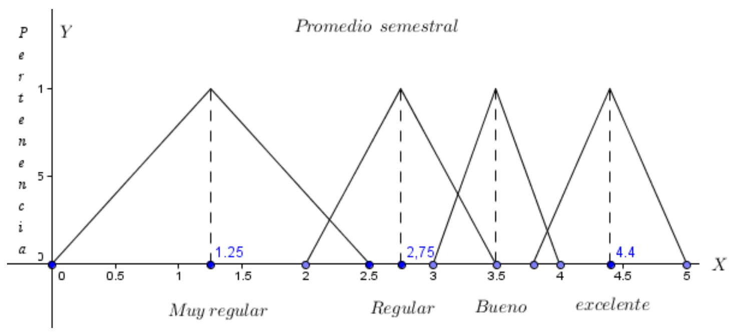
| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 8 | 6 | 6 | 8 | 1 |
| 4 | 8 | 5 | 1 | 2 |
| 5 | 3 | 8 | 5 | 7 |
| 8 | 6 | 6 | 8 | 8 |
| 6 | 9 | 9 | 7 | 2 |

La variable respuesta esta definida de la siguiente manera:

**PERCEPCIÓN DE SU RENDIMIENTO**

| **cuantificador** | **número difuso** |
|---|---|
| Muy regular(MR1) | (0, 1,25, 2,5) |
| Regular(R1) | (2, 2,75, 3,5) |
| Bueno (B1) | (3, 3,5, 4) |
| Excelente (E1) | (3,8, 4,4, 5) |

La tabla anterior nos muestra los rangos definidos según el promedio percibido por los estudiantes encuestados y el número difuso asociado a cada rango , siendo muy regular el grado mas bajo de desempeño y excelente el mas alto , cuya representación gráfica es:




con una función de pertenencia para cada uno de estos números difusos dada por:

$$
Muy\,regular = \begin{cases} 0 & si\ x < 0 \\ \frac{x}{1{,}25} & si\ x \in [0, 1.25) \\ 1 & si\ x = 1{,}25 \\ \frac{x-2{,}5}{-1{,}25} & si\ x \in (1.25\,, 2.5] \\ 0 & si\ x \geq 2{,}5 \end{cases}
$$

$$
Regular\ = \begin{cases} 0 & si\ x < 2 \\ \frac{x-2}{0,75} & si\ x \in [2, 2.75) \\ 1 & si\ x = 2,75 \\ \frac{x-3,5}{-0,75} & si\ x \in (2.75\ ,3.5] \\ 0 & si\ x \geq 3,5 \end{cases}
$$

$$
Bueno\ = \begin{cases} 0 & si\ x < 3 \\ \frac{x-l}{1,5} & si\ x \in [3, 3.5) \\ 1 & si\ x = 3,5 \\ \frac{x-4}{-1,5} & si\ x \in (3.5\ ,4] \\ 0 & si\ x \geq 4 \end{cases}
$$

$$
Execelente\ = \begin{cases} 0 & si\ x < 3,8 \\ \frac{x-3,8}{0,6} & si\ x \in [3.8, 4.4) \\ 1 & si\ x = 4,4 \\ \frac{x-5}{-0,6} & si\ x \in (4.4\ ,5] \\ 0 & si\ x \geq 5 \end{cases}
$$

Las siguientes tablas muestran la relación entre cada número difuso y las horas en el celular de los encuestados.

**MUY REGULAR**

| NÚMERO DIFUSO | HORAS EN EL CELULAR |
|---|---|
| (0 ,1.25, 2.5) | 9 |
| (0 ,1.25, 2.5) | 8 |
| (0 ,1.25, 2.5) | 9 |
| (0 ,1.25, 2.5) | 8 |
| (0 ,1.25, 2.5) | 8 |
| (0 ,1.25, 2.5) | 8 |
| (0 ,1.25, 2.5) | 8 |

**REGULAR**

| NÚMERO DIFUSO | HORAS EN EL CELULAR |
|---|---|
| (2 ,2.75, 3.5) | 8 |
| (2 ,2.75, 3.5) | 5 |
| (2 ,2.75, 3.5) | 8 |
| (2 ,2.75, 3.5) | 6 |
| (2 ,2.75, 3.5) | 7 |
| (2 ,2.75, 3.5) | 7 |
| (2 ,2.75, 3.5) | 5 |

**BUENO**

| NÚMERO DIFUSO | HORAS EN EL CELULAR |
|---|---|
| (3,3.5, 4.0) | 7 |
| (3,3.5, 4.0) | 7 |
| (3,3.5, 4.0) | 5 |
| (3,3.5, 4.0) | 6 |
| (3,3.5, 4.0) | 6 |
| (3,3.5, 4.0) | 6 |
| (3,3.5, 4.0) | 6 |

**EXCELENTE**

| NÚMERO DIFUSO | HORAS EN EL CELULAR |
|---|---|
| (3,8.4.4, 5) | 6 |
| (3,8.4.4, 5) | 4 |
| (3,8.4.4, 5) | 5 |
| (3,8.4.4, 5) | 2 |
| (3,8.4.4, 5) | 3 |
| (3,8.4.4, 5) | 2 |
| (3,8.4.4, 5) | 1 |
| (3,8.4.4, 5) | 1 |

Aplicando los métodos descritos en el capítulo anterior obtendremos los resultados siguientes:

| n | $x_i$ | $x_i^2$ | $y_{il}$ | $y_{im}$ | $y_{ir}$ | $x_iy_{il}$ | $x_iy_{im}$ | $x_iy_{ir}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 9 | 81 | 0 | 1.25 | 2.5 | 0 | 11,25 | 22,5 |
| 2 | 8 | 64 | 0 | 1.25 | 2.5 | 0 | 10 | 20 |
| 3 | 9 | 81 | 0 | 1.25 | 2.5 | 0 | 11,25 | 22,5 |
| 4 | 8 | 64 | 0 | 1.25 | 2.5 | 0 | 10 | 20 |
| 5 | 8 | 64 | 0 | 1.25 | 2.5 | 0 | 10 | 20 |
| 6 | 8 | 64 | 0 | 1.25 | 2.5 | 0 | 10 | 20 |
| 7 | 8 | 64 | 0 | 1.25 | 2.5 | 0 | 10 | 20 |
| 8 | 8 | 64 | 2 | 2.75 | 3.5 | 16 | 22 | 28 |
| 9 | 5 | 25 | 2 | 2.75 | 3.5 | 10 | 13,75 | 17,5 |
| 10 | 8 | 64 | 2 | 2.75 | 3.5 | 16 | 22 | 28 |
| 11 | 6 | 36 | 2 | 2.75 | 3.5 | 12 | 16,5 | 21 |
| 12 | 7 | 49 | 2 | 2.75 | 3.5 | 14 | 19,25 | 24,5 |
| 13 | 7 | 49 | 2 | 2.75 | 3.5 | 14 | 19,25 | 24,5 |
| 14 | 5 | 25 | 2 | 2.75 | 3.5 | 10 | 13,75 | 17,5 |
| 15 | 7 | 49 | 3 | 3.5 | 4 | 21 | 24,5 | 28 |
| 16 | 7 | 49 | 3 | 3.5 | 4 | 21 | 24,5 | 28 |
| 17 | 5 | 25 | 3 | 3.5 | 4 | 15 | 17,5 | 20 |
| 18 | 6 | 36 | 3 | 3.5 | 4 | 18 | 21 | 24 |
| 19 | 6 | 36 | 3 | 3.5 | 4 | 18 | 21 | 24 |
| 20 | 6 | 36 | 3 | 3.5 | 4 | 18 | 21 | 24 |
| 21 | 6 | 36 | 3,8 | 4.4 | 5 | 22,8 | 26,4 | 30 |
| 22 | 4 | 16 | 3,8 | 4.4 | 5 | 15,2 | 17,6 | 20 |
| 23 | 5 | 25 | 3,8 | 4.4 | 5 | 19 | 22 | 25 |
| 24 | 2 | 4 | 3,8 | 4.4 | 5 | 7,6 | 8,8 | 10 |
| 25 | 3 | 9 | 3,8 | 4.4 | 5 | 11,4 | 13,2 | 15 |

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 26 | 2 | 4 | 3,8 | 4.4 | 5 | 7,6 | 8,8 | 10 |
| 27 | 1 | 1 | 3,8 | 4.4 | 5 | 3,8 | 4,4 | 5 |
| 28 | 1 | 1 | 3,8 | 4.4 | 5 | 3,8 | 4,4 | 5 |
| SUMAS | 165 | 1121 | 62,4 | 84,2 | 106 | 294,2 | 434,1 | 574 |

Con la información registrada en la tabla obtenemos :

$\bar{Y}_l = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{il}}{n} = \frac{62,4}{25} = 2,496$

$\bar{Y}_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{im}}{n} = \frac{84,2}{25} = 3,368$

$\bar{Y}_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ir}}{n} = \frac{106}{25} = 4,24$

$\bar{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{165}{25} = 5,84$

Determinaremos $\beta_{1m}$ ,$\beta_{1l}$ ,$\beta_{1r}$

$\beta_{1m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_{im} - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}\bar{Y}_m}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}^2} = \frac{(434,1)-(25)(5,84)(3,368)}{(1121)-(25)(34,1056)} = -0,214$

$\beta_{1l} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_{il} - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}\bar{Y}_l}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}^2} = \frac{(2,94)-(25)(5,84)(2,496)}{(1121)-(25)(34,1056)} = -0,261$

$\beta_{1r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_{ir} - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}\bar{Y}_r}{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}^2} = \frac{(574)-(25)(5,84)(4,24)}{(1121)-(25)(34,1056)} = -0,167$

Así $\beta_{0m}, \beta_{0l}, \beta_{0r}$ esta determinado por :

$\beta_{0m} = \bar{Y}_m - \beta_{1m}\bar{X}$

$\beta_{0r} = \bar{Y}_r - \beta_{1r}\bar{X}$

$\beta_{0l} = \bar{Y}_l - \beta_{1l}\bar{X}$

De esta manera $\beta_{0m}, \beta_{0l}, \beta_{0r}$ estaría dado por:

$\beta_{0m} = 3,36 + 0,214(5,84) = 4,622$

$\beta_{0l} = 2,496 + 0{,}261(5,84) = 4,024$

$\beta_{0r} = 4,24 + 0{,}167(5,84) = 5,22$

Y por tanto los modelos de regresión serían :

$\mathbf{y_l = 4,02 - 0,261x}$

$\mathbf{y_m = 4,62 - 0,214x}$

$\mathbf{y_r = 5,22 - 0,167x}$

***Caso 3.Ejemplo parámetro difuso y predictor difuso.***

Observamos la cocción de una muestra de galletas para estudiar el tiempo de horneado preciso en el que la galleta quede exquisita a la vista y adecuada para la venta. Cuando se observa la galleta puede tomar tres estados: cruda, en punto, dorada. Estos tres términos los concluimos de una encuesta realizada a peatones que probaron y observaron las galletas, teniendo en cuenta anticipadamente el tiempo de cocción de cada unidad muestral con una temperatura de horneado de 180 °C recomendada para un horneado óptimo . Así :

Variable respuesta : estado de cocción de la galleta

Variable predictora : tiempo de horneado

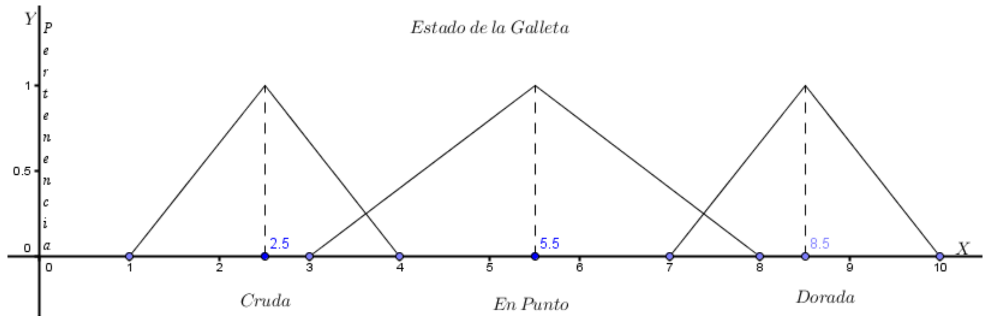
Como variable difusa se visualiza toda variable cuyo valor no sea claro por sus condiciones cualitativas, para efectuar los cálculos correspondientes en el proceso de hallar los parámetros debemos relacionar esas cualidades de las variables con variables numéricas El color es un factor determinante en los alimentos a la hora de identificar muchas veces su sabor, temperatura y en este caso el estado de cocción Y = estado de la galleta.

Tomamos la gama de un color enumerada de 1 a 10 (del menos al más intenso ) y pedimos a los encuestados lo relacionaran con el color de la galleta que probaron , y según sus respuestas hicimos : :

**ESTADO DE LA GALLETA**

| **cuantificador** | **número difuso** |
|---|---|
| CRUDA | (1,2.5,4) |
| EN PUNTO | (3,5.5,8) |
| DORADA | (7,8,5,10) |

La tabla anterior nos muestra los rangos definidos según estado de la galleta y el número difuso asociado a cada rango , siendo éstos: cruda , en punto y dorada su representación gráfica esta dada por las siguientes funciones triangulares:




Con una función de pertenencia para cada uno de estos números difusos dada por:

$$Cruda = \begin{cases} 0 & si \ x < 1 \\ \frac{x-1}{2,5} & si \ x \in [1, 2.5) \\ 1 & si \ x = 2,5 \\ \frac{x-4}{-2,5} & si \ x \in (2.5\,,4] \\ 0 & si \ x \geq 4 \end{cases}$$

$$En\, punto = \begin{cases} 0 & si \ x < 3 \\ \frac{x-3}{5,5} & si \ x \in [3, 5.5) \\ 1 & si \ x = 5,5 \\ \frac{x-8}{-5,5} & si \ x \in (5.5\,,8] \\ 0 & si \ x \geq 8 \end{cases}$$

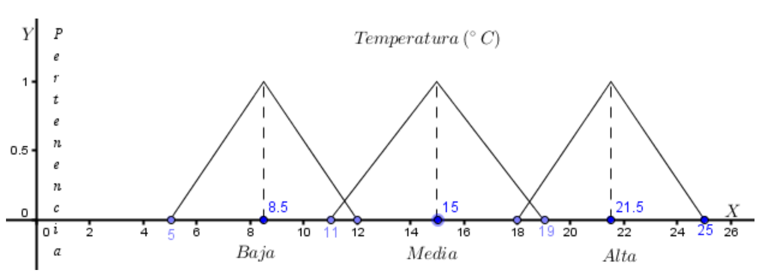
$$
Dorada = \begin{cases} 0 & si\ x < 7 \\ \frac{x-7}{5{,}5} & si\ x \in [7, 5.5) \\ 1 & si\ x = 8,5 \\ \frac{x-10}{-5{,}5} & si\ x \in (5.5\ ,10] \\ 0 & si\ x \geq 7 \end{cases}
$$

La temperatura que es la variable predictora $X$ , se ordenó de la siguiente manera en grados celsius :

**TEMPERATURA DE LA GALLETA**

| **cuantificador** | **numero difuso** |
|---|---|
| Baja | (5,8.5,12) |
| Media | (11,15,19) |
| Alta | (18,21.5,25) |

La tabla anterior nos muestra los rangos definidos según la temperatura de la galleta y el número difuso asociado a cada rango , siendo estos temperatura baja , media y alta su representación gráfica esta dada por la siguiente función triangular:



Con una función de pertenencia para cada uno de estos números difusos dada por:

$$Temp.baja\ = \begin{cases} 0 & si\ x < 5 \\ \frac{x-5}{8{,}5} & si\ x \in [5, 8.5) \\ 1 & si\ x = 8{,}5 \\ \frac{x-12}{-8{,}5} & si\ x \in (8.5\ ,12] \\ 0 & si\ x \geq 12 \end{cases}$$

$$En\,punto = \begin{cases} 0 & si\ x < 11 \\ \frac{x-11}{4} & si\ x \in [11, 15) \\ 1 & si\ x = 1, 5 \\ \frac{x-19}{-4} & si\ x \in (1.5\ ,19] \\ 0 & si\ x \geq 19 \end{cases}$$

$$Dorada\ = \begin{cases} 0 & si\ x < 18 \\ \frac{x-21{,}5}{3{,}5} & si\ x \in [21.5\ 2.5) \\ 1 & si\ x = 21, 5 \\ \frac{x-25}{-3{,}5} & si\ x \in (21.5\ ,25] \\ 0 & si\ x \geq 25 \end{cases}$$

Se han tomado datos sobre el estado de la galleta y la temperatura de la misma la siguiente tabla muestra la relación entre estas dos variables . El estado de la galleta se cuantificó por medio de una paleta de colores cuantificada con valores del 1 al 10., la temperatura fue tomada en grados celsius.

| observaciones | $x = Temp.galleta(difuso)$ | $x_i$ | $y_i$ | $y = Est.galleta(difuso)$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | (5,8.5,12) | 5 | 1 | (1, 2.5 , 4) |
| 2 | (5,8.5,12) | 5 | 1 | (1, 2.5 , 4) |
| 3 | (5,8.5,12) | 7 | 1 | (1, 2.5 , 4) |
| 4 | (5,8.5,12) | 9 | 1 | (1, 2.5 , 4) |
| 5 | (5,8.5,12) | 10 | 2 | (1, 2.5 , 4) |
| 6 | (5,8.5,12) | 12 | 4 | (1, 2.5 , 4) |
| 6 | (11,15,19) | 12 | 4 | (3,5.5,8) |
| 7 | (11,15,19) | 13 | 5 | (3,5.5,8) |
| 8 | (11,15,19) | 14 | 5 | (3,5.5,8) |
| 9 | (11,15,19) | 15 | 5 | (3,5.5,8) |
| 10 | (11,15,19) | 15 | 5 | (3,5.5,8) |
| 11 | (11,15,19) | 16 | 5 | (3,5.5,8) |
| 12 | (11,15,19) | 17 | 6 | (3,5.5,8) |
| 13 | (11,15,19) | 18 | 6 | (3,5.5,8) |
| 13 | (18 ,21.5,25) | 18 | 6 | (3,5.5,8) |
| 14 | (18 ,21.5,25) | 20 | 8 | (7, 8.5,10) |
| 15 | (18 ,21.5,25) | 22 | 10 | (7, 8.5,10) |
| 16 | (18 ,21.5,25) | 22 | 10 | (7, 8.5,10) |
| 17 | (18 ,21.5,25) | 22 | 9 | (7, 8.5,10) |
| 18 | (18 ,21.5,25) | 22 | 9 | (7, 8.5,10) |
| 19 | (18 ,21.5,25) | 23 | 10 | (7, 8.5,10) |
| 20 | (18 ,21.5,25) | 25 | 10 | (7, 8.5,10) |

Aplicando los métodos descritos en el capítulo anterior obtendremos los resultados siguientes:

| n | $\mathbf{x}_l$ | $\mathbf{x}_m$ | $\mathbf{x}_r$ | $\mathbf{y_l}$ | $\mathbf{y}_m$ | $\mathbf{y}_r$ | $\mathbf{x}_l^2$ | $\mathbf{x}_m^2$ | $\mathbf{x}_r^2$ | $\mathbf{x_l y_l}$ | $\mathbf{x_m y_m}$ | $\mathbf{x_r y_r}$ | $\sum \mathbf{x_i y_i}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 5 | 8.5 | 12 | 1 | 2,5 | 4 | 25 | 72,25 | 144 | 5 | 21,25 | 48 | 74,25 |
| 2 | 5 | 8.5 | 12 | 1 | 2,5 | 4 | 25 | 72,25 | 144 | 5 | 21,25 | 48 | 74,25 |
| 3 | 5 | 8.5 | 12 | 1 | 2,5 | 4 | 25 | 72,25 | 144 | 5 | 21,25 | 48 | 74,25 |
| 4 | 5 | 8.5 | 12 | 1 | 2,5 | 4 | 25 | 72,25 | 144 | 5 | 21,25 | 48 | 74,25 |
| 5 | 5 | 8.5 | 12 | 1 | 2,5 | 4 | 25 | 72,25 | 144 | 5 | 21,25 | 48 | 74,25 |
| 6 | 5 | 8.5 | 12 | 1 | 2,5 | 4 | 25 | 72,25 | 144 | 5 | 21,25 | 48 | 74,25 |
| 7 | 11 | 15 | 19 | 3 | 5,5 | 8 | 121 | 225 | 361 | 33 | 82,5 | 152 | 267,5 |
| 8 | 11 | 15 | 19 | 3 | 5,5 | 8 | 121 | 225 | 361 | 33 | 82,5 | 152 | 267,5 |
| 9 | 11 | 15 | 19 | 3 | 5,5 | 8 | 121 | 225 | 361 | 33 | 82,5 | 152 | 267,5 |
| 10 | 11 | 15 | 19 | 3 | 5,5 | 8 | 121 | 225 | 361 | 33 | 82,5 | 152 | 267,5 |
| 11 | 11 | 15 | 19 | 3 | 5,5 | 8 | 121 | 225 | 361 | 33 | 82,5 | 152 | 267,5 |
| 12 | 11 | 15 | 19 | 3 | 5,5 | 8 | 121 | 225 | 361 | 33 | 82,5 | 152 | 267,5 |
| 13 | 11 | 15 | 19 | 3 | 5,5 | 8 | 121 | 225 | 361 | 33 | 82,5 | 152 | 267,5 |
| 14 | 11 | 15 | 19 | 3 | 5,5 | 8 | 121 | 225 | 361 | 33 | 82,5 | 152 | 267,5 |
| 15 | 18 | 21,5 | 25 | 3 | 5,5 | 8 | 324 | 462,25 | 625 | 54 | 118,25 | 200 | 372,25 |
| 16 | 18 | 21,5 | 25 | 7 | 8,5 | 10 | 324 | 462,25 | 625 | 126 | 182,75 | 250 | 558,75 |
| 17 | 18 | 21,5 | 25 | 7 | 8,5 | 10 | 324 | 462,25 | 625 | 126 | 182,75 | 250 | 558,75 |
| 18 | 18 | 21,5 | 25 | 7 | 8,5 | 10 | 324 | 462,25 | 625 | 126 | 182,75 | 250 | 558,75 |
| 19 | 18 | 21,5 | 25 | 7 | 8,5 | 10 | 324 | 462,25 | 625 | 126 | 182,75 | 250 | 558,75 |
| 20 | 18 | 21,5 | 25 | 7 | 8,5 | 10 | 324 | 462,25 | 625 | 126 | 182,75 | 250 | 558,75 |
| 21 | 18 | 21,5 | 25 | 7 | 8,5 | 10 | 324 | 462,25 | 625 | 126 | 182,75 | 250 | 558,75 |
| 22 | 18 | 21,5 | 25 | 7 | 8,5 | 10 | 324 | 462,25 | 625 | 126 | 182,75 | 250 | 558,75 |
| Sumas | 262 | 343 | 424 | 82 | 124 | 166 | 3710 | 5931,5 | 8752 | 1230 | 2185 | 3454 | 6869 |

Tenemos que: $\bar{Y}_r$, $\bar{Y}_m$, $\bar{Y}_l$ y $\bar{X}_r$, $\bar{X}_m$, $\bar{X}_l$

$\bar{Y}_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{ir}}{n}$ =8,3

$\bar{X}_r = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ir}}{n}$ =21,2

$\bar{Y}_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{im}}{n}$ =6,2

$\bar{X}_m = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{im}}{n}$ =17,15

$\bar{Y}_l = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_{il}}{n}$ =4,1

$\bar{X}_l = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{il}}{n}$ =13,1

$\beta_{1r}$,$\beta_{1m}$ y $\beta_{1l}$ está determinado por:

$\beta_{1r} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{ir}y_{ir} - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}_r\bar{Y}_r}{\sum_{i=1}^{n} x_{ir}^2 - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}_r^2} = \frac{3454-(19)(21{,}2)(8{,}3)}{(8752)-(19)(21{,}2)^2}$=0,275

$\beta_{1m} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{im}y_{im} - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}_m\bar{Y}_m}{\sum_{i=1}^{n} x_{im}^2 - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}_m^2} = \frac{2185-(19)(17{,}15)(6{,}2)}{(5931{,}5)-(19)(17{,}15)^2}$=1,19

$\beta_{1l} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_{il}y_{il} - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}_l\bar{Y}_l}{\sum_{i=1}^{n} x_{il}^2 - \sum_{i=1}^{n} n\bar{X}_l^2} = \frac{1230-(19)(13{,}1)(4{,}1)}{(3710)-(19)(13{,}1)^2}$=0,56

Así $\beta_{0r}$,$\beta_{0m}$,$\beta_{0l}$ esta determinado por :

$\beta_{0r} = \bar{Y}_r - \beta_{1r}\bar{X}_r$=$8,3 - (0,275)(21,2)$=2,462

$\beta_{0m} = \bar{Y}_m - \beta_{1m}\bar{X}_m$= $6,2 - (1,19)(17,15)$=-14,21

$\beta_{0l} = \bar{Y}_l - \beta_{1l}\bar{X}_l$= $4,1 - (0,56)(13,1)$=-3,246

Y por tanto los modelos de regresión serían:

$\mathbf{\hat{y}_l = -3,246 + 0,56x_l}$

$\mathbf{\hat{y_m} = -14,21 + 1,19x_m}$

$\mathbf{\hat{y_r} = 2,462 + 0,275x_r}$

# CONCLUSIONES

Resaltamos la importantacia de los conceptos que lingüisticamente los seres humanos hemos desarrollado y que matematicamente es complejo plasmar, aqui se mostro que se puede plasmar nuestras concepciones de manera formal, que no son simples casos particulares de los que estamos rodeados en realidad y que es una amplia gama de posibilidades a las que nos enfrentamos en cada evento.

La lógica difusa al ajustarse de una mejor manera a nuestro lenguaje impreciso , abre una puerta para poder estudiar una cantidad sin fin de fenómenos, la estimación de coeficientes es sencilla y este trabajo es una puerta abierta para continuar con la investigación de estos conjuntos aplicados a la estadística.

# RECOMENDACIONES

En la construcción de este trabajo encontramos como existe poca información en este campo aplicado a la estadística , por ello las bases de datos de difusas son escasas, se recomienda implementar estos métodos de regresión , para de esta manera ampliar las fuentes de información sobre estadística difusa.

# BIBLIOGRAFIA:


- Lofli A Zadeh(1965).*Conjuntos difusos.información y control*,8:338-353.
- Daniel Reina (2008) *Fundamentos de matemática difusa.*
- Morillas Raya, a. (2006).*Introduccion al análisis de datos difusos.*
- Paul P. Wang , da ruan (2007). *fuzzy logic.* Springer
- A. R. Arabpour and M. Tata *Iranian Journal of Fuzzy Systems Vol. 5, No. 2, (2008) pp. 1-19*
- George C. Canavos (1988).*Probabilidad y estadística, aplicaciones y metodos.*McGraw-Hill.
- Walpole, Ronald E.; Raymond H.; Myers, Sharon L(1999).; *Probabilidad y Estadística para Ingenieros.* Pretice-Hall Hispanoamericana, S.A

Los suscritos:

| | | |
|---|---|---|
| Erica Paola Caycedo Cortes | **con C.C N°** | **1.110.520.192** |
| Nicolai Rondon Camacho | **con C.C N°** | **1.110.459.382** |
| | **con C.C N°** | |
| | **con C.C N°** | |
| | **con C.C N°** | |

Manifiesto (an) la voluntad de:

**Autorizar** [x]

**No Autorizar** [ ] **Motivo**: ______

La consulta en físico y la virtualización de **mi OBRA**, con el fin de incluirlo en el repositorio institucional de la Universidad del Tolima. Esta autorización se hace sin ánimo de lucro, con fines académicos y no implica una cesión de derechos patrimoniales de autor.

Manifestamos que se trata de una OBRA original y como de la autoría de LA OBRA y en relación a la misma, declara que la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA, se encuentra, en todo caso, libre de todo tipo de responsabilidad, sea civil, administrativa o penal (incluido el reclamo por plagio).

Por su parte la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA se compromete a imponer las medidas necesarias que garanticen la conservación y custodia de la obra tanto en espacios físico como virtual, ajustándose para dicho fin a las normas fijadas en el Reglamento de Propiedad Intelectual de la Universidad, en la Ley 23 de 1982 y demás normas concordantes.

La publicación de:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Trabajo de grado | X | Artículo | | Proyecto de Investigación | |
| Libro | | Parte de libro | | Documento de conferencia | |
| Patente | | Informe técnico | | | |
| Otro: (fotografía, mapa, radiografía, película, video, entre otros) | | | | | |

Producto de la actividad académica/científica/cultural en la Universidad del Tolima, para que con fines académicos e investigativos, muestre al mundo la producción intelectual de la Universidad del Tolima. Con todo, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada con arreglo al artículo 30 de la Ley 23 de 1982. En concordancia suscribo este documento en el momento mismo que hago entrega del trabajo final a la Biblioteca Rafael Parga Cortes de la Universidad del Tolima.

De conformidad con lo establecido en la Ley 23 de 1982 en los artículos 30 ***"…Derechos Morales. El autor tendrá sobre su obra un derecho perpetuo, inalienable e irrenunciable"*** **y 37 "…*Es lícita la reproducción por cualquier medio, de una obra literaria o científica, ordenada u obtenida por el interesado en un solo ejemplar para su uso privado y sin fines de lucro*". El artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "*los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores*" y en su artículo 61 de la Constitución Política de Colombia.**

- Identificación del documento:

Estimación de parámetros para un modelo de regresión difusa simple

- Trabajo de grado como requisito parcial para optar al título de:

**Profesional en Matemáticas con énfasis en estadística**

- Proyecto de Investigación correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado "Trabajo de Grado"): ____________

- Informe Técnico correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado "Trabajo de Grado"): ____________

- Artículo publicado en revista: ____________

- Capítulo publicado en libro: ____________

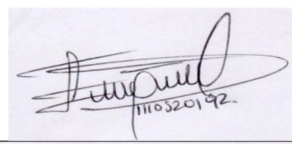
- Conferencia a la que se presentó: ____________

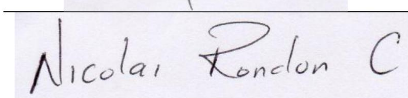
| | SISTEMA DE GESTION DE LA CALIDAD | Página **3** de **3** |
|---|---|---|
| | **FORMATO DE AUTORIZACIÓN DE PUBLICACIÓN EN EL REPOSITORIO INSTITUCIONAL** | Código: GB-P04-F03 |
| | | Versión: 02 |

Quienes a continuación autentican con su firma la autorización para la digitalización e inclusión en el repositorio digital de la Universidad del Tolima, el:

Día: **23** Mes: **Agosto** Año: **2017**

Autores: Firma

Nombre: **Erica Paola Caycedo**  C.C. **1.110.520.192**

Nombre: **Nicolai Rondon Camacho** 

C.C **1.110.459.382**

Nombre: ____________ ____________ C.C. ____________

Nombre: ____________ ____________ C.C. ____________

El autor y/o autores certifican que conocen las derivadas jurídicas que se generan en aplicación de los principios del derecho de autor.

Fecha Versión 02: 04-11-2016