Ecuaciones diferenciales del Cálculo de Variaciones

Trabajo de grado para optar al título de
profesional en Matemáticas con énfasis en Estadística

Juan Camilo Arias V., código 070200012011

Sergio Manuel Gonzalez A., código 070250232011

Director
Leonardo Solanilla Ch.
Profesor del Departamento de Matemáticas y Estadística

Universidad del Tolima
Facultad de Ciencias
Departamento de Matemáticas y Estadística
Programa de Matemáticas con énfasis en Estadística
Ibagué, noviembre de 2016

UNIVERSIDAD DEL TOLIMA

FACULTAD DE CIENCIAS

PROGRAMA DE MATEMÁTICAS CON ÉNFASIS EN ESTADÍSTICA

ACTA DE SUSTENTACIÓN TRABAJO DE GRADO

TÍTULO: ECUACIONES DIFERENCIALES DEL CÁLCULO DE VARIACIONES

AUTORES: JUAN CAMILO ARIAS VARON Cód. 070200012011
SERGIO MANUEL GONZÁLEZ ACOSTA Cód. 070250232011

DIRECTOR: LEONARDO SOLANILLA

JURADOS: ANTON ARNOLD OOSTRA VANNOPEN
OCTAVIO MONTOYA MONTOYA

CALIFICACIÓN: cinco, cero (5.0)

x APROBÓ ___ REPROBÓ

OBSERVACIONES: Trabajo laureado.

FIRMAS

Arnold Oostra
ANTON ARNOLD OOSTRA VANNOPEN
Jurado 1

Octavio Montoya
OCTAVIO MONTOYA M.
Jurado 2

Leonardo Solanilla
LEONARDO SOLANILLA
Director del Trabajo

Leonardo D. Restrepo
LEONARDO DUVAN RESTREPO
Director del Programa

Ciudad y fecha: Ibagué, 27 de Marzo de 2017F

Resumen. En este trabajo se demuestra el siguiente resultado de existencia y unicidad para las ecuaciones diferenciales ordinarias.

Teorema. *Supongamos que la ecuación de Euler Lagrange de cierto problema variacional puede escribirse en la forma*

$$\varphi'' = f(x, \varphi, \varphi'),$$

donde las funciones $f, f_\varphi = \partial f/\partial\varphi, f_{\varphi'} = \partial f/\partial\varphi'$ *son continuas en cada punto finito* (x, φ) *y para cada* φ' *finita. Si existen* $k > 0$ *y funciones* $\alpha = \alpha(x, \varphi), \beta = \beta(x, \varphi) \geq 0$ *(acotadas en cualquier región acotada del plano) tales que*

$$f_\varphi(x, \varphi, \varphi') > k \quad y \quad |f(x, \varphi, \varphi')| \leq \alpha(\varphi')^2 + \beta,$$

entonces una y solamente una curva solución de la ecuación pasa por dos puntos dados $(a, A), (b, B)$, $a \neq b$.

Abstract. In this undergraduate thesis we prove the following existence and uniqueness result for ODEs.

Theorem. *Let the Euler-Lagrange equation of a variational problem be given by*

$$\varphi'' = f(x, \varphi, \varphi'),$$

where $f, f_\varphi = \partial f/\partial\varphi, f_{\varphi'} = \partial f/\partial\varphi'$ *are continuous at each finite point* (x, φ) *for each finite value of* φ'. *If there is a* $k > 0$ *and functions* $\alpha = \alpha(x, \varphi), \beta = \beta(x, \varphi) \geq 0$ *(bounded on each bounded region in the plane) such that*

$$f_\varphi(x, \varphi, \varphi') > k \quad y \quad |f(x, \varphi, \varphi')| \leq \alpha(\varphi')^2 + \beta,$$

then there is a unique solution curve to the equation passing through two given points $(a, A), (b, B)$, $a \neq b$.

Índice general

Introducción **8**

1. Cálculo de Variaciones **10**

1.1. Problema variacional más simple 10

1.2. Condición necesaria para la existencia de un punto crítico . . . 11

1.3. Soluciones a una ecuación EL 12

2. Tangentes acotadas **14**

2.1. Existencia 15

2.2. Acotamiento *a priori* 17

2.3. Conclusión en lenguaje moderno 22

3. *Analysis situs* de una familia de curvas **23**

3.1. Trayectorias regulares y simples 23

3.2. Segundo lema de Bernstein 26

3.3. Regularidad y clase de una ecuación 29

4. Unicidad y globalidad **31**

4.1. Regularidad, globalidad 31

4.2. Principio del Máximo 32

4.3. Teorema de existencia y unicidad 33

5. Ejemplos de aplicación **36**

5.1. El problema de la braquistócrona 36

5.2. Superficies de revolución con área mínima 38
5.3. Un problema isoperimétrico 40

A manera de conclusión **42**

Bibliografía **44**

Índice de figuras

1. Cálculo de Variaciones **10**

2. Tangentes acotadas **14**

2.1. Puntos por fuera de las trayectorias. 21

3. *Analysis situs* de una familia de curvas **23**

3.1. Trayectoria regular. 24

3.2. Trayectoria simple φ. Las ϕ son tales que $\|\phi - \varphi\|_{C^1} < \delta$. . . . 25

3.3. Trayectorias vecinas. 27

4. Unicidad y globalidad **31**

5. Ejemplos de aplicación **36**

5.1. La braquistócrona. 38

5.2. Dos curvas que generan extremos de la funcional de área. . . . 40

Introducción

En el estudio del Cálculo de Variaciones –realizado en el Seminario de Análisis 2014-2016 del Departamento de Matemáticas de la Universidad del Tolima– ha surgido el problema de determinar condiciones suficientes para la existencia y unicidad de soluciones a las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas a ciertas funcionales definidas en espacios de Banach clásicos. Especialmente, se vio la necesidad de estudiar un resultado de Bernstein (1912) que está en la base misma de dicho problema. Este trabajo de grado presenta los resultados fundamentales de Bernstein de una manera contemporánea, a la luz de la Topología y el Análisis de hoy. Además, al introducir elementos más modernos, las demostraciones se han hecho más claras y se han descubierto los teoremas del Análisis que soportan los resultados, por ejemplo, el Teorema del Valor Medio y el Principio del Máximo. Tal es el mérito principal de lo que aquí se desarrolla.

En el Capítulo 1 se presenta la conexión del Cálculo de Variaciones con las ecuaciones diferenciales que nos ocupan, es decir, las ecuaciones de Euler-Lagrange. El Capítulo 2 está dedicado a aclarar el asunto de la existencia de soluciones junto con algunas propiedades relevantes de tales soluciones. De importancia crucial para el resto del trabajo es el asunto del acotamiento de las tangentes. En concreto, cuando la función que define la ecuación crece menos que el cuadrado de la primera derivada, se obtiene que las derivadas de las soluciones están acotadas. Tal es la materia del primer lema de Bernstein. La condición impuesta *a priori* es la mejor posible para obtener soluciones apropiadas. Este resultado se deja también expresar en el lenguaje del Análisis Funcional. En el Capítulo 3 se consideran familias de trayectorias o soluciones al problema contenidas en un conjunto compacto con el propósito de establecer condiciones suficientes para la unicidad de las soluciones. El resultado central de este capítulo es el segundo lema de Bernstein, cuya demostración está acompañada de varias gráficas explicativas, las cuales constituyen un aporte de los autores de este trabajo al estudio de las ecuaciones diferenciales estudiadas. El Capítulo 4 contiene la aplicación de las condiciones descubiertas en los Capítulos 2 y 3 a la resolución total del problema. De manera particular, se ha descubierto el importante papel que juega el Principio del Máximo en la demostración de la unicidad de las soluciones. Por ultimo la teoría desarrollada se ilustra con un par de ejemplos donde se esbozan algunas conclusiones sobre lo aprendido en el camino.

Estamos convencidos de haber redescubierto un método muy útil para establecer propiedades cualitativas de las soluciones a una ecuación diferencial, a saber: el estudio de las familias de las trayectorias que son soluciones al problema. Este método permite relacionar efectivamente la geometría de las familias de curvas con propiedades como existencia y unicidad.

CAPÍTULO 1

Cálculo de Variaciones

En este capítulo describimos brevemente, sin mayores detalles, el contexto analítico en el que surge el problema que se enfrenta en este trabajo de grado, a saber: el de establecer un teorema de existencia y unicidad para las soluciones globales al problema de Euler-Lagrange. Dicho problema proviene del Cálculo de Variaciones, uno de los campos de trabajo más fructíferos y certeros del Análisis. *Grosso modo*, partimos de un problema de máximos y mínimos en espacios de funciones y llegamos a una ecuación diferencial cuyas soluciones son los extremos o puntos críticos del problema original. Veamos.

1.1. Problema variacional más simple

Consideremos el problema variacional más sencillo posible:

> *Sea F una función real –suficientemente diferenciable para lo que sigue– de tres variables reales, definida en algún dominio conveniente del espacio euclidiano $\mathbb{R}^3$. Buscamos funciones suficiente*[1] *y continuamente diferenciables φ, definidas en un intervalo real $[a, b]$, tales que satisfagan condiciones de frontera prefijadas $\varphi(a)$,*

[1] La determinación de la clase C^k de estas funciones hace parte del problema.

$\varphi(b)$[2] (constantes) y que produzcan un extremo –punto crítico, en verdad– de la funcional

$$\varphi \mapsto I(\varphi) = \int_a^b F(x, \varphi, \varphi')dx \in \mathbb{R}.$$

1.2. Condición necesaria para la existencia de un punto crítico

Teorema 1.1 (Euler-Lagrange)**.** *Sea $I : B \to \mathbb{R}$ una funcional de la forma*

$$I(\varphi) = \int_a^b F(x, \varphi, \varphi')dx,$$

donde B es cierto espacio de Banach por determinar y el integrando F es lo suficientemente diferenciable. Si I alcanza un extremo (máximo o mínimo) en una función $\varphi \in B$ que satisface la condiciones prescritas de frontera $\varphi(a)$ y $\varphi(b)$, entonces dicha función es una solución de la ecuación diferencial de Euler-Lagrange

$$F_\varphi - \frac{d}{dx}F_{\varphi'} = 0.$$

Los subíndices de F denotan derivación parcial. Ya que esta ecuación es –en general– de orden dos, podemos tomar $B = C^2[a, b]$.

Demostración. Las condiciones de frontera restringen la funcional I a un subespacio vectorial de su dominio. De este modo, asumimos la existencia del extremo φ y lo variamos o perturbamos mediante funciones h en el subespacio vectorial de las llamadas “funciones admisibles”:

$$H = \left\{ h \in C^1[a, b] : h(a) = h(b) = 0 \right\}.$$

El incremento de la funcional es

$$\begin{aligned} I(\varphi + h) - I(\varphi) &= \int_a^b \big(F(x, \varphi + h, \varphi' + h') - F(x, \varphi, \varphi')\big)\, dx \\ &= \int_a^b (F_\varphi h + F_{\varphi'} h')dx + \text{ otros términos de orden mayor en } h, \end{aligned}$$

[2] Se podrían exigir condiciones de otro tipo, éste es sólo el problema más sencillo posible.

en virtud del Teorema de Taylor. La primera derivada de la funcional en φ es la parte lineal $I'(\varphi)$ de esta última expresión. Es bien sabido que una condición necesaria para la existencia del extremo supuesto es que esta derivada sea nula:

$$I'(\varphi) = \int_a^b (F_\varphi h + F_{\varphi'} h')dx = 0.$$

Ahora bien, esta expresión se puede simplificar algo con ayuda de una integración por partes:

$$I'(\varphi) = \int_a^b \left(F_\varphi - \frac{d}{dx} F_{\varphi'} \right) h dx = 0, \ \forall h \in H.$$

De las propiedades elementales de las funciones continuas se sigue que

$$F_\varphi - \frac{d}{dx} F_{\varphi'} = 0.$$

□

De ahora en adelante las ecuaciones de Euler-Lagrange se llamarán, en breve, ecuaciones EL.

1.3. Soluciones a una ecuación EL

Por el teorema anterior, el Cálculo de Variaciones clásico conlleva la tarea de resolver las ecuaciones diferenciales EL. El problema es de naturaleza distinta a aquel de los cursos básicos de ecuaciones diferenciales –Teorema de Picard-Lindelöf–. En efecto, las soluciones deben existir y ser únicas globalmente. Para lo que sigue en este trabajo, supondremos que dicha ecuación EL se puede escribir, de alguna manera, en la forma

$$\varphi'' = f(x, \varphi, \varphi').$$

En concordancia, buscamos soluciones $\varphi \in C^2[a, b]$. En los próximos capítulos determinaremos condiciones suficientes sobre f que garanticen la existencia y unicidad globales de las soluciones para este tipo de ecuaciones.

Usaremos "métodos clásicos"[3], a pesar de que el Cálculo de Variaciones contemporáneo ha abandonado el estudio de la ecuacion EL y se ha dedicado al estudio de los llamados "métodos directos"[4]. En particular, las funciones consideradas en este trabajo tendrán siempre derivadas fuertes (clásicas).

[3]En ellos, se usan espacios de Banach clásicos, o sea, espacios C^k, donde se busca la solución de la ecuación EL.

[4]En los que se usan espacios de Sóbolev, donde se busca directamente el mínimo o el máximo de la funcional.

CAPÍTULO 2

Tangentes acotadas

Las estimaciones *a priori* constituyen el paso más delicado en el proceso de solución de una ecuación diferencial. En el caso que nos ocupa, tales estimaciones van a garantizar principalmente dos cosas: un comportamiento adecuado de las soluciones y la globalidad. En este capítulo trataremos el primer aspecto, o más en concreto, ciertas propiedades cualitativas de las soluciones que tienen que ver con el acotamiento de la derivada. El segundo aspecto (unicidad) se cubrirá más adelante.

De otro lado, la existencia estará garantizada por el célebre Teorema de Cauchy-Peano-Arzelà, tal como se explica en la primera sección, a continuación. Bernstein (1912, p. 432) explica que las estimaciones *a priori* de la segunda sección vienen sugeridas por la forma que toman las ecuaciones del movimiento de Lagrange: la energía cinética es un múltiplo del cuadrado de la velocidad. Un caso menos general al de Bernstein había sido ya estudiado por Painlévé (1897). En la tercera sección reescribimos el acotamiento de Bernstein (1912) en el lenguaje del Análisis Funcional, recurriendo a ciertos espacios de Banach clásicos.

2.1. Existencia

Como lo dijimos, la existencia de soluciones a una ecuación EL va a estar garantizada por el siguiente teorema del Análisis Clásico.

Teorema 2.1 (Cauchy-Peano-Arzelà)**.** *Sean* $F : K \to \mathbb{R}^n$ *una función continua definida en un cilindro compacto* $K = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B(x_0, r)}$ *de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$*,* M *una cota superior de la norma de* F *en* K *y* $c = \min\{a, r/M\}$*. Entonces, existe una solución* $y : [t_0 - c, t_0 + c] \to \overline{B(x_0, r)}$ *al problema con condición*

$$y' = F(t, y), \ y(t_0) = y_0.$$

La solución pudiera no ser única, pues del mismo punto inicial (t_0, y_0) *pueden emanar varias soluciones.*

El mismo Peano (1890) ha dado importantes ejemplos sobre la carencia de unicidad.

Ejemplo 2.2. *La ecuación*

$$\frac{dy}{dt} = 3y^{2/3},$$

donde la expresión de la derecha es continua –¡mas no lipschitziana!– en $y = 0$*, admite las soluciones* $y = t^3$ *y* $y = 0$ *que satisfacen* $(t_0, y_0) = (0, 0)$*, al igual que las funciones que se anulan en* $[0, a]$ *y toman el valor* $(t - a)^3$ *para* $t > a$*.*

Ejemplo 2.3. *El problema con condición inicial*

$$\frac{dy}{dt} = \frac{4yt^3}{y^2 + t^4}, \ y(0) = 0,$$

admite, para $C > 0$ *arbitraria, las cinco soluciones:*

$$\begin{aligned} y(t) &= t^2, \\ y(t) &= -t^2, \\ y(t) &= 0, \\ y(t) &= C - \sqrt{C^2 + t^4}, \\ y(t) &= \sqrt{C^2 + t^4} - C. \end{aligned}$$

Con esto, supongamos que la función f en la ecuación EL

$$\varphi'' = f(x, \varphi, \varphi')$$

es continua. Por el procedimiento usual de reducción del orden, ponemos $y_1 = \varphi$, $y_2 = \varphi'$. De esta manera, obtenemos el sistema equivalente

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2, \\ y_2' &= f(x, y_1, y_2). \end{aligned}$$

Dado que la función $(y_1', y_2') = (y_2, f(x, y_1, y_2))$ es continua, el teorema anterior asegura la existencia de soluciones. Por ahora, ellas son locales. En el próximo capítulo, las curvas solución se podrán extender en un dominio conveniente para hacerse globales.

Queda todavía pendiente el asunto de las condiciones que se van a imponer a la ecuación. Sin embargo, si –de alguna manera– logramos probar que por dos puntos distintos –en cierta región conveniente– pasa una y solo una solución a la ecuación, entonces todas las condiciones que se pueden imponer (iniciales o de frontera) son equivalentes. Como esto es precisamente lo que vamos a intentar hacer en lo que sigue, no nos preocuparemos más por las mencionadas condiciones.

Observación 2.4. *En el problema más simple del Cálculo de Variaciones es usual exigir condiciones de frontera $(a, \varphi(a))$ y $(b, \varphi(b))$. Ya que podemos tomar como eje coordenado a la línea que une estos dos puntos, de ahora en adelante y sin pérdida de generalidad, tomaremos $\varphi(\hat{a}) = \varphi(\hat{b}) = 0$. Otra interpretación de esta simplificación se puede lograr en términos de espacios vectoriales de funciones admisibles, como es costumbre en el Cálculo de Variaciones clásico.*

Considerada la existencia, debemos preocuparnos por buscar soluciones que exhiban un "buen comportamiento".

2.2. Acotamiento *a priori*

El punto de partida para las investigaciones de Bernstein (1912) sobre las ecuaciones diferenciales del Cálculo de Variaciones constituye la sustancia de nuestro primer lema.

Lema 2.5 (Bernstein)**.** *Supongamos que φ es una solución analítica acotada del problema diferencial*

$$\varphi'' = f(x, \varphi, \varphi'), \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0,$$

en el intervalo $[a, b]$. Si existen constantes $A, B > 0$ tales que

$$|f(x, \varphi, \varphi')| < A(\varphi')^2 + B,$$

en cierta región (compacta) apropiada del plano x, φ, entonces φ' también es acotada.

Demostración. Por hipótesis, se tiene que

$$-A(\varphi')^2 - B < \varphi'' < A(\varphi')^2 + B.$$

También, existe $M > 0$ tal que $-M \leq \varphi(x) \leq M$ para $x \in (a, b)$. Multipliquemos $0 \leq \varphi + M$ por $2A > 0$ para obtener $0 \leq 2A(\varphi + M)$. Existe, pues, una función analítica acotada u con $1 \leq u(x)$, $x \in (a, b)$, tal que

$$\varphi = -M + \frac{\log u}{2A} \quad \text{ssi} \quad u = \exp(2A(\varphi + M)).$$

Derivando con respecto a x,

$$\varphi' = \frac{1}{2A}\frac{u'}{u}, \ \varphi'' = \frac{1}{2A}\frac{u''u - (u')^2}{u^2} = \frac{1}{2A}\left(\frac{u''}{u} - \frac{(u')^2}{u^2}\right).$$

Reemplazando en el acotamiento *a priori*, desigualdad izquierda,

$$\frac{1}{2A}\frac{u''}{u} > \frac{1}{4A}\frac{(u')^2}{u^2} - B \quad \text{ssi} \quad u'' > \frac{(u')^2}{2u} - 2ABu$$

debido a que $u \geq 1 > 0$. Por lo tanto, $u'' > -2ABu$.

Ahora bien, el teorema de Rolle garantiza que existe un $x_0 \in (a,b)$ tal que $\varphi'(x_0) = u'(x_0) = 0$. Si para valores de x menores a x_0 se tiene $\varphi'(x) > 0$, también $u'(x) > 0$. De esta manera, multiplicando por $2u'$,

$$2u'u'' > -4ABuu'.$$

Luego de integrar en el intervalo $[x, x_0]$,

$$(u'(x_0))^2 - (u'(x))^2 = -(u'(x))^2 > -2AB\left((u(x_0))^2 - (u(x))^2\right).$$

En consecuencia,

$$(u'(x))^2 < 2AB(u(x_0))^2.$$

De este modo,

$$(\varphi'(x))^2 = \frac{(u'(x))^2}{4A^2(u(x))^2} < \frac{B(u(x_0))^2}{2A(u(x))^2}.$$

En virtud de la definición de u y de la desigualdad triangular,

$$(\varphi'(x))^2 < \frac{B}{2A}\exp\left(4A|\varphi(x_0) - \varphi(x)|\right) \leq \frac{B}{2A}\exp\left(8AM\right).$$

Así pues,

$$|\varphi'(x)| < \sqrt{\frac{B}{2A}}\exp\left(4AM\right),$$

como se quería.

Si para valores de x mayores a x_0 se tiene $\varphi'(x), u'(x) < 0$, entonces

$$2u'u'' < -4ABuu'.$$

Por integración en $[x_0, x]$,

$$(u'(x))^2 < -2AB\left((u(x))^2 - (u(x_0))^2\right) < 2AB(u(x_0))^2.$$

Por lo tanto, se logra el mismo acotamiento.

Los casos restantes se obtienen del análisis similar para

$$\varphi = M - \frac{\log v}{2A} \quad \text{ssi} \quad v = \exp(2A(M - \varphi)).$$

Esta vez,

$$\varphi' = -\frac{1}{2A}\frac{v'}{v}, \ \varphi'' = \frac{1}{2A}\left(\frac{(v')^2}{v^2} - \frac{v''}{v}\right).$$

De esta manera,

$$\varphi'' = \frac{1}{2A}\left(\frac{(v')^2}{v^2} - \frac{v''}{v}\right) < A\left(\frac{1}{2A}\frac{v'}{v}\right)^2 + B.$$

O sea,

$$-\frac{1}{2A}\left(\frac{v''}{v}\right) < -\frac{1}{4A}\frac{(v')^2}{v^2} + B \quad \text{ssi} \quad -v'' < -\frac{(v')^2}{2v} + 2ABv < 2ABv.$$

Con esto, si para $x < x_0$ se tiene $\varphi'(x) < 0$, entonces $v'(x) > 0$ y, de este modo, $-2v'v'' < 4ABvv'$. Al integrar como antes en $[x, x_0]$,

$$(v'(x))^2 < 2AB\left((v(x_0))^2 - (v(x))^2\right) < 2AB(v(x_0))^2.$$

El caso faltante es evidente. $\square$

Corolario 2.6. *La demostración anterior sigue siendo válida cuando φ es dos veces diferenciable en $[a, b]$ y A, B son funciones positivas continuas de $x \in [a, b]$ y φ (por lo tanto, acotadas en los compactos).*

Definición 2.7. *Las ecuaciones diferenciales EL que satisfacen la condición de acotamiento en el lema anterior se llaman ecuaciones de tipo L.*

Ahora, ¿qué sucede si el crecimiento determinado por f es superior al segundo grado con respecto a la derivada de φ? La respuesta no es evidente. El asunto se trata en el resto de esta sección.

Teorema 2.8. *Si el crecimiento de f es superior a dos con respecto a φ', entonces pueden haber soluciones acotadas con derivada infinita.*

Demostración. Por ejemplo, supongamos que f pueda escribirse en una vecindad del punto $(x_0, \varphi = 0, \varphi' = +\infty)$ (es decir, la tercera coordenada grande) en la forma

$$f(x, \varphi, \varphi') = (\varphi')^m \left(A(x, \varphi) + \epsilon(\varphi')\right) = \varphi'',$$

donde $m > 2$, $A(x, \varphi) \neq 0$ y $\lim_{\varphi' \to \infty} \epsilon(\varphi') = 0$. Como $\varphi' > 0$, el teorema de la función inversa garantiza que x se puede escribir como función de φ con

$$x' = \frac{1}{\varphi'} \quad \text{y} \quad x'' = \frac{-1}{(\varphi')^2}\, \varphi''\, x'.$$

Reemplazando φ'' en la expresión de la derecha, un corto cálculo muestra que

$$x'' = -(x')^{3-m} \left(A(x, \varphi) + \hat{\epsilon}(x') \right),$$

donde $\lim_{x' \to 0} \epsilon(x') = 0$. Afirmamos que esta última ecuación tiene una solución no trivial (es decir, distinta de la constante x_0) que vale x_0 en $\varphi = 0$ y cuya derivada x' es nula en tal punto. Veamos. Con ayuda de

$$x' = u^{\frac{1}{m-2}} \quad \text{ssi} \quad (x')^{m-2} = u,$$

la ecuación considerada equivale al sistema

$$\begin{aligned} u' = \frac{du}{d\varphi} &= (m-2)(x')^{m-3} x'' = -(m-2)\left(A(x, \varphi) + \hat{\epsilon}(x') \right), \\ x' = \frac{dx}{d\varphi} &= u^{\frac{1}{m-2}}. \end{aligned}$$

Ahora bien, este sistema tiene al menos una solución que satisface las condiciones iniciales $u = 0, x = x_0$ para $\varphi = 0$. Esto es consecuencia del Teorema de Cauchy-Peano-Arzelà, por la continuidad de las expresiones para las derivadas. Por lo tanto, φ, en cuanto inversa de x, es la función acotada con derivada infinita que estábamos buscando. $\square$

Este teorema significa que el acotamiento de la segunda derivada por el cuadrado de la primera derivada es el mejor posible, si queremos que las derivadas de la solución permanezcan finitas. Se tiene, además, el interesante resultado que sigue.

Corolario 2.9. *Sea f como en el teorema anterior. Entonces existen puntos P, Q en el plano x, φ tales que ninguna trayectoria que satisfaga la ecuación diferencial puede pasar por tal par de puntos.*

Demostración. En la ecuación anterior

$$x'' = -(x')^{3-m}\left(A(x,\varphi) + \hat{\epsilon}(x')\right),$$

tomemos por ejemplo $A < 0$. De esta manera, para $x' > 0$ muy pequeño, la segunda derivada es positiva en cierto punto (φ_1, x_1). Por la continuidad del lado derecho, las segundas derivadas son positivas y acotadas en una vecindad de dicho punto. En particular, la segunda derivada permanece mayor a un valor positivo dado en dicha vecindad y así, una trayectoria recta horizontal es imposible. Más aún, la concavidad "hacia arriba" hace que las trayectorias solución por dicho punto se alejen de la recta $x = x_1$ a medida que φ crece. Por lo tanto, habrá puntos en una recta $x = x_1 + \eta$ ($\eta > 0$ suficientemente pequeña) por donde no pasará ninguna de las trayectorias solución por (φ_1, x_1). $\square$

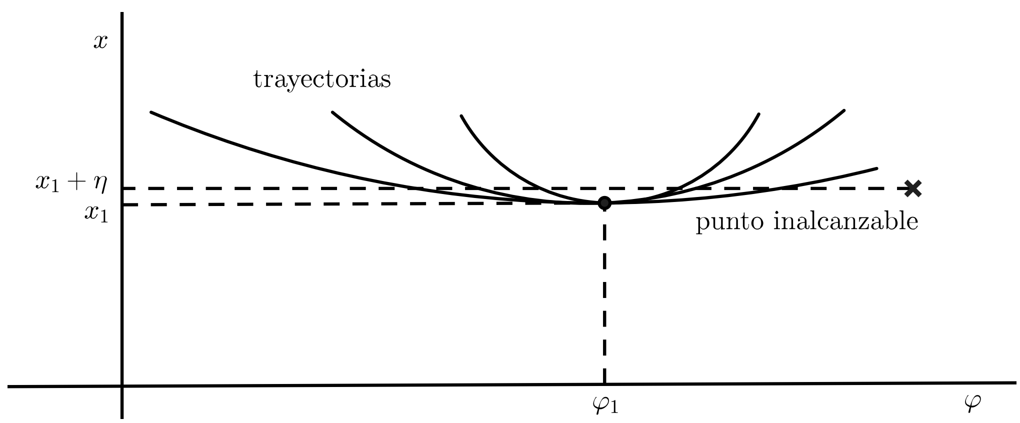

Figura 2.1: Puntos por fuera de las trayectorias.

En el contexto del próximo capítulo, este corolario significa que, cuando se viola el acotamiento de la segunda derivada por el cuadrado de la primera, no podemos aspirar siquiera a la existencia global de soluciones con valores de frontera prescritos en dos puntos de cierta región de interés.

2.3. Conclusión en lenguaje moderno

Poniendo todo lo anterior junto, el lema de Bernstein, resultado principal de este capítulo, puede interpretarse con ayuda de ciertos espacios de funciones. Denotamos con $C^1[a,b]$ al espacio de Banach de las funciones continuamente diferenciables en el intervalo $[a,b]$ y con $C^2[a,b]$ al espacio de las funciones dos veces continuamente diferenciables en el mismo intervalo.

Lema 2.10 (de encajamiento)**.** *Sea φ una solución acotada dos veces diferenciable de*

$$\varphi'' = f(x,\varphi,\varphi'); \quad \varphi(a) = \varphi(b) = 0, x \in [a,b],$$

donde $|f(x,\varphi,\varphi')| < A(\varphi')^2 + B$, para ciertas funciones positivas continuas $A = A(x,\varphi), B = B(x,\varphi)$ definidas en cierto subconjunto compacto del espacio x,φ. Entonces, $\varphi \in C^1[a,b]$. Más todavía, $\varphi \in C^2[a,b]$.

Demostración. Del lema de Bernstein y la definición de la norma para el espacio de Banach $C^1[a,b]$ se sigue que

$$\|\varphi\|_{C^1[a,b]} = \|\varphi\|_{C^0[a,b]} + \|\varphi'\|_{C^0[a,b]} < \infty.$$

Más aún, el acotamiento $|\varphi''| < A(\varphi')^2 + B$ implica entonces que

$$\|\varphi\|_{C^2[a,b]} = \|\varphi\|_{C^0[a,b]} + \|\varphi'\|_{C^0[a,b]} + \|\varphi''\|_{C^0[a,b]}.$$

□

Esta interpretación es uno de los aportes de este trabajo al estudio del problema que nos ocupa.

CAPÍTULO 3

Analysis situs de una familia de curvas

Resueltos los problemas de la existencia local y del comportamiento de las soluciones, es pertinente encarar el asunto de la unicidad y globalidad de las mismas. Para ello, se consideran las familias de soluciones a una ecuación EL de tipo L en cierto subconjunto del espacio (x, φ). En tales familias o conjuntos de trayectorias se relacionan nociones de cercanía en cierto espacio de Banach con la regularidad y la simplicidad de las soluciones.

En este capítulo se prueba un teorema general (sobre familias de curvas) cuya aplicación permite llevar el propósito de este trabajo a feliz término en el capítulo siguiente.

3.1. Trayectorias regulares y simples

Comencemos por permitir que las funciones $A(x, \varphi)$ y $B(x, \varphi)$ de una ecuación de tipo L se hagan infinitas en un subconjunto discreto (o finito, para facilitar la presentación) de cierto subconjunto de interés, por ejemplo la esfera de Riemann. Separemos los puntos del subconjunto con bolas de radio suficientemente pequeño centradas en ellos y aislemos igualmente el punto en el infinito mediante una circunferencia centrada en un punto finito de radio grande. Llamemos Ω al subconjunto pinchado resultante[1] –que pudiera no ser conexo. *Cf.* Figura 3.1.

En Ω consideramos la familia de las trayectorias o soluciones a nuestra ecuación diferencial de tipo L.

Definición 3.1. *Una de tales trayectorias que une los puntos $P, Q \in \Omega$ es regular entre estos dos puntos si existe un subconjunto compacto Ω_1, con las mismas propiedades topológicas que Ω, tal que la trayectoria va de P a Q sin salirse de Ω_1. V. Figura 3.1.*

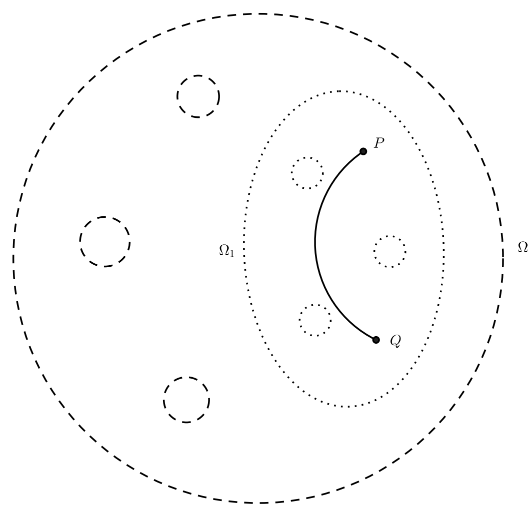

Figura 3.1: Trayectoria regular.

La regularidad puede ser "uniforme" en un conjunto.

Definición 3.2. *Usando las nociones de la definición anterior, sean ω_0 y ω_1 dos subconjuntos simplemente conexos de Ω_1. Las trayectorias que van de ω_0 a ω_1 son uniformemente regulares si permanecen en el interior de un mismo subconjunto Ω_1.*

[1]Hubiésemos querido usar la palabra dominio, pero no conviene porque la conexidad de estos conjuntos no está siempre garantizada. No obstante, para lo que se necesita en lo que sigue, se puede suponer que el conjunto es abierto y conexo, es decir, un dominio.

También es pertinente definir cierta noción de "simplicidad" de las trayectorias.

Definición 3.3. *Con las notaciones anteriores, una trayectoria φ de P a Q en Ω_1 es simple si, para todo $\epsilon > 0$, es posible encontrar un $\delta > 0$ ("pequeño") tal que para toda trayectoria ϕ en Ω_1 que cumpla*

$$|\phi - \varphi| < \delta \text{ y } |\phi' - \varphi'| < \delta^2$$

no se encuentran nunca simultáneamente en el interior de una bola abierta de radio ϵ centrada en P y en el interior de una bola abierta de radio ϵ centrada en Q. V. Figura 3.2. Una trayectoria es múltiple cuando esta condición no se cumple.

Observación 3.4. *Así, una trayectoria puede ser simple entre P y Q sin serlo en ciertos P_1 y Q_1, comprendidos entre los primeros.*

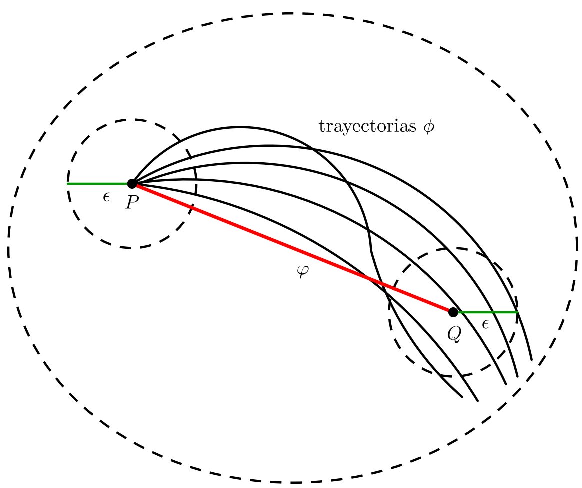

Figura 3.2: Trayectoria simple φ. Las ϕ son tales que $\|\phi - \varphi\|_{C^1} < \delta$.

[2] O sea, la distancia entre ϕ y φ, en la métrica inducida por la norma C^1, es menor que el δ.

3.2. Segundo lema de Bernstein

El resultado crucial de este capítulo es el siguiente.

Lema 3.5 (Bernstein). *Si ω_0, ω_1 son dos subconjuntos simplemente conexos de Ω y todas las trayectorias –soluciones de una ecuación de tipo L– que van de ω_0 a ω_1 son uniformemente regulares y simples, entonces el número de trayectorias que unen un $P_0 \in \omega_o$ con un $P_1 \in \omega_1$ es el mismo, sin importar la elección de los puntos P_0 y P_1.*

Demostración. Supongamos que existe una trayectoria desde $P_0 = (x_0, \varphi_0) \in \omega_0$ a $P_1 = (x_1, \varphi_1) \in \omega_1$. Sean también $P_1, P_2 \in \omega_1$ dos puntos unidos por una línea poligonal, de lados paralelos a los ejes coordenados x, φ, que no se sale de ω_1. Por la regularidad y el primer lema de Bernstein (capítulo anterior, ojalá en su versión con espacios de Banach), las derivadas de las trayectorias –o tangentes– son acotadas. Digamos que el valor de φ' en P_0 es α_0 y, en general, $\alpha = \varphi'$ en los puntos que se necesiten. Por continuidad, existe un $\eta > 0$ tal que

$$|\alpha - \alpha_0| \leq \eta \quad \text{cuando} \quad x_0 < x < x_1 + \eta.$$

Además, la trayectoria de P_0 a P_1, junto con sus vecinas emanadas de P_0, se pueden representar por

$$\varphi = \Phi(x, \alpha),$$

donde Φ es continua en sus argumentos, u holomorfa cuando f es analítica[3]. Además, siendo la trayectoria de P_0 a P_1 simple, Φ debe ser monótona con respecto a α en la bola $(x - x_1)^2 + (\varphi - \varphi_1)^2 < \epsilon^2$, determinada por cierto $\epsilon > 0$. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que Φ es decreciente y así,

$$\Phi(x, \alpha_0 - \Delta\alpha) > \Phi(x, \alpha_0) > \Phi(x, \alpha_0 + \Delta\alpha)$$

en la mencionada bola. La situación se puede entender con ayuda de la Figura **??**. El área amarilla indica un área donde las trayectorias -quizás– se cortan entre ellas.

[3]Dependencia continua o diferenciable de las condiciones iniciales.

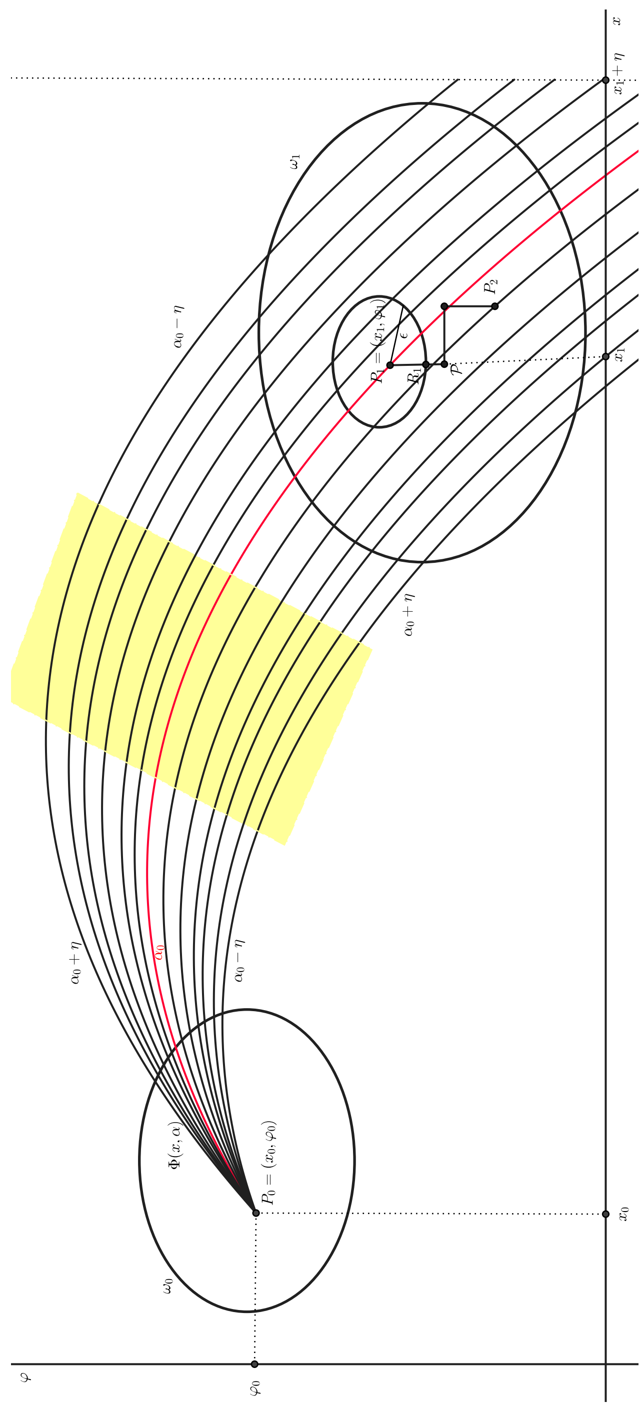

Figura 3.3: Trayectorias vecinas.

Sea $\mathcal{P}$ el vértice vecino (más cercano) de P_1 en la línea poligonal de P_1 a P_2. Afirmamos que el segmento $P_1\mathcal{P}$ contiene un subsegmento P_1R_1, cuyos puntos (todos) encuentran curvas de la familia $\Phi(x, \alpha)$. Ciertamente, la recta por P_1 y $\mathcal{P}$ tiene ecuación $x = x_1$ o $\varphi = \varphi_1$. Si lo primero, debemos resolver la ecuación $\varphi = \Phi(x_1, \alpha)$; si lo segundo, $\varphi_1 = \Phi(x, \alpha)$. En el primer caso, el punto R_1 tiene ordenada $\Phi(x_1, \alpha + \Delta\alpha)$ cuando se asume –sin pérdida de generalidad, como se ha hecho– que la ordenada de $\mathcal{P}$ es menor que la de P_1. A partir de R_1 podremos construir nuevamente un segmento R_1R_2 que interseque trayectorias φ cuyas derivadas φ' en P_0 estén entre $\alpha_0 + \Delta\alpha$ y $\alpha_0 + 2\Delta\alpha$. Y así sucesivamente tales derivadas tomarán valores entre $\alpha_0 + n\Delta\alpha$ y $\alpha_0 + (n+1)\Delta\alpha$, $n \in \mathbb{N}$. Al repetir el proceso un número finito de veces se llegará necesariamente (propiedad arquimediana) al punto $\mathcal{P}$, dònde sabemos que la derivada es finita –pues de lo contrario, existirían trayectorias de P_0 a ω_1 cuya derivada no sería acotada, contradiciendo el primer lema. En el segundo caso, se toma α con $\alpha_0 - \Delta\alpha < \alpha < \alpha_0 + \Delta\alpha$ y un x tal que

$$0 < |x - x_0| < \Delta\alpha < \epsilon$$

(en el punto de partida P_0). Por monotonicidad, cerca a $P_1 \in \omega_1$ se tendrá

$$\Phi(x, \alpha_0 + \Delta\alpha) - \varphi_1 < 0 \text{ y } \Phi(x, \alpha_0 - \Delta\alpha) - \varphi_1 > 0.$$

Del teorema del valor intermedio se desprende la existencia de una solución para cierto α. Esta vez, el tamaño del segmento P_1R_1 es igual a una cantidad determinada Δx. Repitiendo el procedimiento un número finito de veces, llegamos a $\mathcal{P}$ por la propiedad arquimediana.

De esta forma se puede pasar de cada segmento poligonal al siguiente, hasta llegar a P_2. Por lo tanto, toda trayectoria regular de P_0 a P_1 se transformará continuamente en una trayectoria de P_0 a P_2. Más aún, sería imposible que dos trayectorias diferentes de P_0 a P_1 se transformaran en una misma trayectoria de P_0 a P_2, porque ello implicaría que la trayectoria de P_0 a P_2 no sería simple. Se sigue la tesis del lema. $\square$

3.3. Regularidad y clase de una ecuación

Para simplificar el asunto, de ahora en adelante supondremos que nuestro subconjunto Ω es homeomorfo a un círculo abierto de radio tan grande como queramos, en particular, puede ser un rectángulo abierto. En otros términos, las funciones A y B permanecen acotadas para valores finitos de x, φ y con ello, se elimina la posibilidad de que f tenga singularidades en puntos finitos.

Definición 3.6. *Diremos que una ecuación de tipo L es regular si todas sus soluciones o trayectorias que unen a dos puntos de Ω son uniformemente regulares. Si esta misma propiedad se verifica en un subconjunto $\omega \subset \Omega$, diremos que la ecuación es regular en el subconjunto ω.*

En este mismo contexto introducimos un nuevo concepto que nos permite sacar provecho del lema anterior.

Definición 3.7. *Llamaremos clase de un $\omega \subset \Omega$, en relación con un punto $P \in \Omega$, al número máximo de trayectorias regulares que pasan por P y un punto dado cualquiera de ω (es decir, el número puede ser menor o igual a dicho número máximo). Si tal número n es finito e independiente de la elección de P y ω, diremos que el subconjunto Ω es de clase n. En este último caso diremos también que la ecuación diferencial –cuyas trayectorias solución yacen en Ω– es de clase n.*

Se sigue inmediatamente un corolario muy importante del segundo lema de Bernstein, en el que se establecen condiciones suficientes para la existencia de soluciones únicas.

Corolario 3.8. *Sea una ecuación de Euler-Lagrange de tipo L, regular y de clase 1. Supongamos también que esta ecuación tiene siempre soluciones globales en el dominio Ω. Entonces, por cada par de puntos distintos de Ω pasa una y sólo una trayectoria o solución regular a la ecuación.*

Demostración. Por hipótesis, la existencia de soluciones globales está garantizada. Por ser Ω de clase 1, dichas trayectorias regulares deben ser simples.

Por el lema de la sección anterior, el número de trayectorias es igual a uno sin importar cuáles sean los puntos P y Q. $\square$

En el próximo capítulo este corolario jugará un papel central.

CAPÍTULO 4

Unicidad y globalidad

Con las convenciones del final del capítulo anterior, todo queda reducido a probar que las ecuaciones EL de tipo L son regulares y de clase 1 en cierto dominio Ω (abierto y simplemente conexo). Establecer la regularidad es fácil y el asunto está relacionado con la globalidad de las soluciones. Para lo relativo a la clase 1, nos valemos del conocido Principio del Máximo. Con esto se alcanza el objetivo general de este trabajo: encontrar ciertas condiciones suficientes que garanticen la existencia global y la unicidad de las soluciones.

4.1. Regularidad, globalidad

Para demostrar que una ecuación de tipo L es regular basta encontrar *a priori* una cota superior al valor absoluto de las soluciones φ, sin importar cuáles sean los puntos P y Q en Ω. Con esto se logra una solución local: la variable x está confinada a la cota $c = \text{mín}\{a, r/M\}$ que le fija el Teorema 2.1 (Cauchy-Peano-Arzelà) y la variable φ a la cota referida.

Ahora bien, es sabido que cada solución se puede extender –quizás– por aplicación reiterada del mencionado Teorema 2.1. Afortunadamente, en nuestro caso, las extensiones son posibles en todo el intervalo ya que c es una constante que depende sólo de las cotas fijas de x, φ y φ'. Por la propiedad arquimediana, se cubre todo el intervalo $[a, b]$. De esta manera, las soluciones se hacen globales. No sobra insistir en que las extensiones de las soluciones no son todavía únicas. Estos resultados básicos sobre ecuaciones diferenciales ordinarias se pueden consultar, por ejemplo, en el texto de Hartman (1964, II.3). En suma, Ω contiene un rectángulo que encierra las soluciones, haciéndolas regulares.

Para lograr la unicidad se debe hacer un trabajo adicional. Recurrimos a otro resultado importante del Análisis.

4.2. Principio del Máximo

El Principio del Máximo es una herramienta muy potente para establecer propiedades de las soluciones a ciertas ecuaciones diferenciales, *v. e. g.* Rădulescu, Rădulescu y Andreescu (2009). Para nuestros propósitos basta la siguiente versión de tan importante resultado.

Teorema 4.1 (Principio del Máximo)**.** *Sea $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, una función continua dos veces diferenciable en (a, b), solución de la ecuación diferencial ordinaria*

$$\delta'' = \chi\delta' + \phi\delta \ \textit{en}\ (a, b),$$

donde $\chi, \phi : (a, b) \to \mathbb{R}$ son continuas y $\phi > 0$ en (a, b). Entonces,

$$|\delta(x)| \leq \text{máx}\{|\delta(a)|, |\delta(b)|\}, \ \textit{para toda}\ x \in [a, b].$$

Demostración. Por Topología elemental, δ es acotada en $[a, b]$ (compacto) y alcanza su máximo y su mínimo allí. Afirmamos que δ no puede tener ni un máximo positivo, ni un mínimo negativo en (a, b)[1]. Supongamos un máximo positivo y sea $x_0 \in [a, b]$ con $\delta(x_0) > 0$. Entonces,

$$\delta(x_0) \leq M := \text{máx}\{\delta(x) : x \in [a, b]\}.$$

[1]Es decir, no alcanza extremos en este abierto.

Si δ tiene su valor máximo en $x_M \in (a, b)$, entonces $\delta'(x_M) = 0$ y

$$\delta''(x_M) = \phi\delta(x_M) \leq 0$$

(condiciones necesarias para la existencia del máximo). Pero entonces se produce la contradicción $\delta(x_M) \leq 0 < \delta(x_0)$. De esta forma,

$$\delta(x_0) \leq M = \text{máx}\{\delta(a), \delta(b)\} \leq \text{máx}\{|\delta(a)|, |\delta(b)|\}.$$

El punto x_0 puede ser cualquiera en el intervalo. La demostración para el mínimo negativo es análoga. $\square$

Corolario 4.2. *Si $\delta(a) = \delta(b) = 0$, se tiene que $\delta \equiv 0$ en $[a, b]$.*

4.3. Teorema de existencia y unicidad

Ya para finalizar, introducimos una nueva condición sobre la derivada parcial $f_\varphi := \frac{\partial f}{\partial \varphi}$. Con ello, el Teorema del Valor Medio permite arribar al resultado central de este trabajo. Veamos.

Teorema 4.3. *Sea $f(x, \varphi, \varphi')$ una función de clase C^1 definida en cierto subconjunto compacto D del espacio (euclidiano tridimensional). Sean también una constante $k > 0$ y funciones continuas positivas $A = A(x, \varphi)$ y $B = B(x, \varphi)$ definidas en la intersección de D con el plano (x, φ). Si*

$$f_\varphi > k \quad y \quad |f| \leq A(\varphi')^2 + B$$

en D, entonces, por dos puntos convenientes $(a, \varphi(a))$ y $(b, \varphi(b))$[2], $a < b$, pasa una y sólo una trayectoria o curva integral $\varphi \in C^2[a, b]$ de la ecuación diferencial EL

$$\varphi'' = f(x, \varphi, \varphi').$$

[2]Situados en la intersección de D con el plano (x, φ).

Demostración. Sean, φ_1 y φ_2 dos trayectorias con las condiciones enunciadas. En virtud del Teorema del Valor Medio, sin pérdida de generalidad,

$$\begin{aligned}
\varphi_2'' &= f(x, \varphi_2, \varphi_2') \\
&= f(x, \varphi_1, \varphi_1') + (\varphi_2 - \varphi_1) f_\varphi(x, (1-\theta)\varphi_1 + \theta\varphi_2, (1-\vartheta)\varphi_1' + \vartheta\varphi_2') \\
&\quad + (\varphi_2' - \varphi_1') f_{\varphi'}(x, (1-\theta)\varphi_1 + \theta\varphi_2, (1-\vartheta)\varphi_1' + \vartheta\varphi_2'),
\end{aligned}$$

para ciertas $0 < \theta, \vartheta < 1$. De esta manera, la diferencia $\delta = \varphi_1 - \varphi_2$ satisface una ecuación lineal de la forma

$$\delta'' = \chi\delta' + \phi\delta,$$

donde χ, ϕ son funciones continuas y $\phi > 0$, por hipótesis. Ya que las dos soluciones satisfacen las mismas condiciones de frontera, el Principio del Máximo implica que $\delta = \varphi_1 - \varphi_2 \equiv 0$ en el intervalo $[a, b]$. Con esto se demuestra que el dominio Ω es de clase 1.

Para verificar que la ecuación es regular, debemos encontrar una cota *a priori* para la solución. Para tal fin, escribimos –con ayuda del Teorema del Valor Medio, de nuevo– la ecuación diferencial en la forma

$$\varphi'' = f(x, 0, \varphi') + \varphi f_\varphi(x, \theta\varphi, \varphi'), \ 0 < \theta < 1.$$

En efecto, mediante una traslación adecuada, podemos suponer que los puntos $(x, \varphi, \varphi') = (x, 0, 0) \in D$, $x \in [a, b]$, sin perjuicio para el alcance del teorema. Sea M el máximo de $|f(x, 0, 0)|$ en el intervalo considerado. Si φ alcanza su valor máximo positivo φ_M en x_M, $\varphi''(x_M) \leq 0$ y, por lo tanto,

$$f(x_M, 0, 0) + k\varphi_M < f(x_M, 0, 0) + \varphi_M f_\varphi(x_M, \theta_M\varphi_M, 0) \leq 0.$$

O sea,

$$\varphi_M < -\frac{f(x_M, 0, 0)}{k} \leq \frac{M}{k}.$$

De manera similar, si φ tiene su valor mínimo negativo φ_m en x_m, entonces

$$f(x_m, 0, 0) + \varphi_m f_\varphi(x_m, \theta_m\varphi_m, 0) \geq 0 \text{ ssi } \varphi_m \geq -\frac{f(x_m, 0, 0)}{f_\varphi(x_m, \theta_m\varphi_m, 0)}.$$

Así pues,

$$\varphi_m > -\frac{M}{k}.$$

Con esto, la cota buscada queda determinada. Así, se cumplen las hipótesis del Corolario 3.8 y la tesis del teorema. □

CAPÍTULO 5

Ejemplos de aplicación

5.1. El problema de la braquistócrona

Este famoso problema de la edad heroica del Cálculo infinitesimal fue resuelto por Leibniz, L'Hôpital, Newton y los dos hermanos Bernoulli, Johann y Jakob. Se trata de encontrar la curva plana de la trayectoria de un cuerpo puntual que cae avanzando sin fricción desde el reposo, acelerado por la gravedad, desde un punto a otro en el menor tiempo posible (la expresión griega *brákhistos khrónos* quiere decir "el tiempo más corto").

Para resolverlo, planteamos un problema del Cálculo de Variaciones. Por conservación de la energía, en cada instante tenemos

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg\varphi,$$

donde m es la masa, v es la velocidad del cuerpo, g es la gravedad y φ es la distancia vertical desde el punto inicial. Así,

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2g\varphi},$$

donde s la longitud de arco de la curva y t es el tiempo. Ahora bien, $ds = \sqrt{1+\varphi'^2}dx$, donde x es la distancia horizontal. Por lo tanto,

$$T(\varphi) = \int dt = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int \frac{\sqrt{1+\varphi'^2}}{\sqrt{\varphi}} dx.$$

La integración se hace de $x = a$ a $x = b$. Debemos minimizar el tiempo total T.

La ecuación EL (Euler-Lagrange) asociada es, por lo tanto,

$$-\frac{\varphi^{-3/2}}{2} - \varphi^{-1/2}\frac{\varphi''}{1+\varphi'^2} = 0 \text{ ssi } \varphi'' = -\frac{\varphi^{-1}(1+\varphi'^2)}{2}.$$

Con esto,

$$\varphi'' = A\varphi'^2 + B,$$

con las funciones $A(\varphi) = B(\varphi) = -(2\varphi)^{-1}$. La ecuación es de tipo L si elegimos $\varphi(a) < 0$ –sin pérdida de generalidad– de tal manera que φ será siempre negativo. Con esto, también

$$f_\varphi = \frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{1+\varphi'^2}{2\varphi^2} > k := \text{mín}\,\frac{1}{2\varphi^2} > 0.$$

Por el Teorema 4.3, la solución al problema existe y es única.

Dicha solución se encuentra por los métodos clásicos. Ya que el integrando de la funcional es independiente de x, la ecuación tiene primera integral (identidad de Beltrami)

$$\frac{\sqrt{1+\varphi'^2}}{\sqrt{\varphi}} - \varphi'\frac{d}{d\varphi'}\frac{\sqrt{1+\varphi'^2}}{\sqrt{\varphi}} = C.$$

Y, después de ciertos cálculos elementales,

$$(1+\varphi'^2)(\varphi - \varphi(a)) = K.$$

La curva solución es una cicloide que se puede expresar en términos de un parámetro $\theta > 0$ de tal forma que

$$\begin{aligned} x(\theta) &= -\frac{K}{2}(\theta - \operatorname{sen}\theta), \\ \varphi(\theta) &= \frac{K}{2}(1-\cos\theta) + \varphi(a). \end{aligned}$$

Por facilidad, pongamos $\theta = 0$ en $x = a = 0$. El valor de $K < 0$ se puede entonces encontrar o aproximar a partir de la ecuación cartesiana de la cicloide

$$x = -\frac{K}{2}\arccos\left(1 - \frac{2(\varphi-\varphi(a))}{K}\right) - \sqrt{(\varphi-\varphi(a))(K-(\varphi-\varphi(a)))}$$

en la condición de frontera $(b, \varphi(b))$. Esta solución existe como consecuencia del Teorema de la Función Implícita. En la Figura 5.1 se bosqueja la forma de la solución.

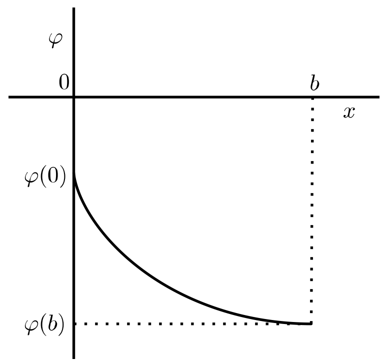

Figura 5.1: La braquistócrona.

5.2. Superficies de revolución con área mínima

Queremos determinar cuáles son las curvas planas –suficientemente suaves– $\varphi(x) > 0$, entre dos puntos $(a, \varphi(a))$ y $(b, \varphi(b))$, que generan, por revolución alrededor del eje x, superficies de área mínima. El Cálculo vectorial elemental enseña que dicha área está dada por la integral

$$A(\varphi) = 2\pi \int_a^b \varphi\sqrt{1+\varphi'^2}dx.$$

Su ecuación EL es, entonces,

$$1 - \varphi\frac{\varphi''}{1+\varphi'^2} = 0 \text{ ssi } 1 + \varphi'^2 - \varphi\varphi'' = 0 \text{ ssi } \varphi'' = \frac{1+\varphi'^2}{\varphi} = f(\varphi, \varphi').$$

Primero notamos que la ecuación es de tipo L con $A(\varphi) = B(\varphi) = 1/\varphi > 0$. Por otra parte,

$$f_\varphi = -\frac{1+\varphi'^2}{\varphi^2} < 0.$$

El Teorema 4.3 no es aplicable en este caso.

A pesar de esto, la ecuación se deja integrar con facilidad. Ella tiene integral primera de Beltrami

$$\varphi\sqrt{1+\varphi'^2} - \varphi\frac{\varphi'^2}{\sqrt{1+\varphi'^2}} = \varphi\frac{1}{\sqrt{1+\varphi'^2}} = C.$$

En consecuencia,

$$\varphi = C\sqrt{1+\varphi'^2} \quad \text{y} \quad \varphi' = \sqrt{\frac{\varphi^2 - C^2}{C^2}}.$$

Con esto, una integración elemental arroja que, para $C \neq 0$, la solución general de la ecuación EL es

$$\varphi(x) = C\cosh\frac{x-K}{C},$$

para cierta constante K. La solución es, pues, una catenaria. Las constantes C, K existen y se pueden determinar o aproximar numéricamente a partir de las dos ecuaciones implícitas que definen las condiciones de frontera $(a, \varphi(a))$ y $(b, \varphi(b))$. Se puede elegir $C > 0$ porque el caso $C < 0$ es totalmente simétrico.

En verdad, por simples consideraciones geométricas basadas en reflexiones y translaciones, podrían existir al menos dos extremos o catenarias que son soluciones de la ecuación EL y satisfacen las condiciones prescritas de frontera. La situación se ilustra en la Figura 5.2.

Ahora, la teoría de esta ecuación diferencial es bien conocida: si existen dos extremos, uno solo de ellos corresponde al área mínima buscada[1], *v.* Gelfand y Fomin (1963, Ejemplo 2[2], p. 20 y 21). Con más precisión, en Jost y Li-Jost (1998, sección 8.3) la existencia de tales superficies o catenoides se presenta como un ejemplo de un proceso de bifurcación. En el lenguaje de este trabajo: la ecuación EL es de clase mayor a 1, *tout court*.

[1]Habría que recurrir a una condición de segundo orden o a otra herramienta similar para demostrar este hecho.

[2]Incluso puede suceder que la curva buscada no exista.

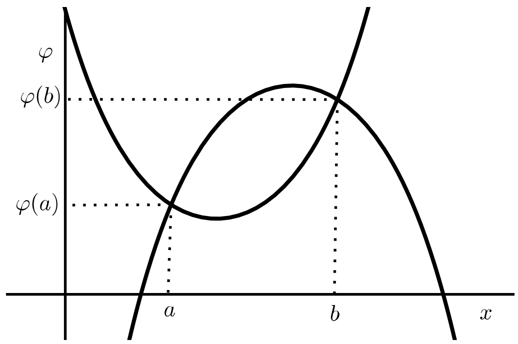

Figura 5.2: Dos curvas que generan extremos de la funcional de área.

5.3. Un problema isoperimétrico

Buscamos la curva φ de longitud $\mathcal{P}$ en el semiplano superior ($\varphi(x) > 0$) que pasa por los puntos $(-a, 0), (a, 0)$ –para cierto $a > 0$– y tal que el área comprendida entre ella y el intervalo $[-a, a]$ en el eje x es máxima. Es decir, buscamos la función $\varphi(x) > 0$ tal que

$$J(\varphi) = \int_{-a}^{a} \varphi dx$$

es máxima bajo la restricción

$$R(\varphi) = \int_{-a}^{a} \sqrt{1 + \varphi'^2} dx = \mathcal{P}.$$

Usamos al lagrangiano

$$J(\varphi) + \lambda R(\varphi) = \int_{-a}^{a} (\varphi + \lambda(\sqrt{1 + \varphi'^2}))dx,$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange. Su ecuación EL es

$$1 + \lambda \frac{d}{dx} \frac{\varphi'}{\sqrt{1 + \varphi'^2}} = 1 + \lambda \varphi'' \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \varphi'^2}} - \frac{\varphi'^2}{(1 + \varphi'^2)^{3/2}} \right) = 0.$$

Dicho de otro modo,

$$(1 + \varphi'^2)^{3/2} + \lambda \varphi'' = 0 \text{ ssi } \varphi'' = -\frac{1}{\lambda}(1 + \varphi'^2)^{3/2}.$$

La ecuación no es siquiera de tipo L. No obstante, ella tiene integral primera de Beltrami

$$x + \lambda \frac{\varphi'}{\sqrt{1+\varphi'^2}} = C.$$

La integración de esta expresión produce la familia de circunferencias

$$(x-C)^2 + (y-D)^2 = \lambda^2.$$

Los valores de C, D, λ se encuentran usando las condiciones de frontera $(-a,0), (a,0)$ junto con $R(\varphi) = \pi\lambda = \mathcal{P}$:

$$\begin{aligned} (C+a)^2 + D^2 &= \mathcal{P}^2/\pi^2, \\ (C-a)^2 + D^2 &= \mathcal{P}^2/\pi^2. \end{aligned}$$

De donde $C = 0$. Como la solución es una semicircunferencia, tiene que pasar también por el punto $(0, a)$, se tiene también el sistema

$$\begin{aligned} D^2 + a^2 &= \mathcal{P}^2/\pi^2, \\ (D-a)^2 &= \mathcal{P}^2/\pi^2. \end{aligned}$$

Así, $D = 0$. En suma, la semicircunferencia está centrada en el origen y tiene radio $\mathcal{P}/\pi$.

A manera de conclusión

Hay una diferencia esencial entre el teorema de existencia y unicidad estudiado aquí y los teoremas clásicos de Picard-Lindelöf y de Cauchy-Peano-Arzelà. En verdad, aquí la presentación puede perfectamente prescindir de la existencia local y asumir desde el comienzo la existencia global, propiedad que queda clara al final, después de haber logrado los acotamientos cruciales. El problema de la unicidad también se reviste de carácter global, pues se trata de una vez en todo el intervalo de existencia de la solución.

A propósito, la referencia al teorema de Cauchy-Peano-Arzelà es nuestra. En el artículo de Bernstein (1912) –que ilumina este trabajo– nunca se habla de existencia, ni mucho menos se diferencia lo local de lo global. El autor sabe ya que, al final, luego de establecer las cotas para las soluciones y sus derivadas, las soluciones globales tienen garantizadas (de alguna manera) su existencia.

Nuestro aporte ha consistido en dilucidar los resultados analíticos que sustentan los argumentos de Bernstein: algún teorema de existencia local, los espacios de Banach, la propiedad arquimediana, ciertas nociones de topología, el Principio del Máximo, el ineludible Teorema del Valor Medio, entre otros. Salvo por ciertas nociones topológicas, ninguno de ellos se menciona por su nombre en el artículo original –sencillamente se muestran las deducciones suponiendo la familiaridad del lector con los razonamientos.

También creemos que el rescate de las ideas detrás del segundo lema contribuye a entender mejor el Análisis de hoy. Es interesante, sobre todo, notar el talante geométrico de la demostración de este lema, que abarca una totalidad de soluciones reparando en las deformaciones continuas de una de ellas.

Por último, queda pendiente profundizar en el estudio de muchos aspectos. En particular, el proceso de bifurcación encontrado en el ejemplo de las superficies de revolución con área mínima sugiere ampliar el método de Bernstein a ecuaciones de clase superior a uno.

Bibliografía

[1] Bernstein, S. (1912) Sur les équations du calcul des variations. *Annales scientifiques de l'É. N. S.* 3^{e} série, tome 29, 431-485.

[2] Gelfand I. M. & Fomin, S. V. (1963) *Calculus of Variations*. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall.

[3] Hartman, Ph. (1964) *Ordinary Differential Equations*. New York: John Wiley & Sons.

[4] Jost, J. & Li-Jost, X. (1998) *Calculus of Variations*. Cambridge: Cambridge University Press.

[5] Painlévé, M. P. (1897) *Leçons sur la théorie analytique des équations différentielles*. Paris: Librairie scientifique A. Hermann.

[6] Peano, G. (1890) Démonstration de l'intégrabilité des équations différentielles ordinaires. *Mathematische Annalen* XXXVII. Band, 182-228.

[7] Rădulescu, T.-L., Rădulescu, V. D. & Andreescu, T. (2009) *Problems in Real Analysis: Advanced Calculus on the Real Axis*. Dordrecht: Springer.

[8] Sagan, H. (1969) *Introduction to the Calculus of Variations*. New York: Dover Publications.

Los suscritos:

Juan Camilo Arias Varón	**con C.C N°**	**1.110.526.516**
Sergio Manuel González Acosta	**con C.C N°**	**1.110.512.056**
	con C.C N°	
	con C.C N°	
	con C.C N°	

Manifiesto (an) la voluntad de:

Autorizar [**X**]

No Autorizar [ ] **Motivo**: ____________________

La consulta en físico y la virtualización de **mi OBRA**, con el fin de incluirlo en el repositorio institucional de la Universidad del Tolima. Esta autorización se hace sin ánimo de lucro, con fines académicos y no implica una cesión de derechos patrimoniales de autor.

Manifestamos que se trata de una OBRA original y como de la autoría de LA OBRA y en relación a la misma, declara que la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA, se encuentra, en todo caso, libre de todo tipo de responsabilidad, sea civil, administrativa o penal (incluido el reclamo por plagio).

Por su parte la UNIVERSIDAD DEL TOLIMA se compromete a imponer las medidas necesarias que garanticen la conservación y custodia de la obra tanto en espacios físico como virtual, ajustándose para dicho fin a las normas fijadas en el Reglamento de Propiedad Intelectual de la Universidad, en la Ley 23 de 1982 y demás normas concordantes.

La publicación de:

Trabajo de grado	**X**	Artículo		Proyecto de Investigación	
Libro		Parte de libro		Documento de conferencia	
Patente		Informe técnico			
Otro: (fotografía, mapa, radiografía, película, video, entre otros)					

Producto de la actividad académica/científica/cultural en la Universidad del Tolima, para que con fines académicos e investigativos, muestre al mundo la producción intelectual de la Universidad del Tolima. Con todo, en mi condición de autor me reservo los derechos morales de la obra antes citada con arreglo al artículo 30 de la Ley 23 de 1982. En concordancia suscribo este documento en el momento mismo que hago entrega del trabajo final a la Biblioteca Rafael Parga Cortes de la Universidad del Tolima.

De conformidad con lo establecido en la Ley 23 de 1982 en los artículos 30 ***"…Derechos Morales. El autor tendrá sobre su obra un derecho perpetuo, inalienable e irrenunciable"*** **y 37 "…*Es lícita la reproducción por cualquier medio, de una obra literaria o científica, ordenada u obtenida por el interesado en un solo ejemplar para su uso privado y sin fines de lucro"*. El artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "*los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores*" y en su artículo 61 de la Constitución Política de Colombia.**

- Identificación del documento:

Tesis: Ecuaciones diferenciales del Cálculo de Variaciones

Título completo: Trabajo de grado presentado para optar al título de:

Profesional en Matemáticas con énfasis en Estadística

- Proyecto de Investigación correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado "Trabajo de Grado"): ____________

- Informe Técnico correspondiente al Programa (No diligenciar si es opción de grado "Trabajo de Grado"): ____________

- Artículo publicado en revista: ____________

- Capítulo publicado en libro: ____________

- Conferencia a la que se presentó: V y VII Encuentro Nacional de Matemáticas y estadística (ENME-UT)

Quienes a continuación autentican con su firma la autorización para la digitalización e inclusión en el repositorio digital de la Universidad del Tolima, el:

Día: 17 Mes: Agosto Año: 2017

Autores:		Firma		
Nombre:	Juan Camilo Arias Varón	Juan Arias V.	C.C.	1.110.526.516
Nombre:	Sergio Manuel González Acosta	Sergio	C.C.	1.110.512.056
Nombre:			C.C.	
Nombre:			C.C.	

El autor y/o autores certifican que conocen las derivadas jurídicas que se generan en aplicación de los principios del derecho de autor.