Semi–subjektive Bewertung

Lutz Kruschwitz und Andreas Löffler[1]

Version vom 5. August 2003

[1]Prof. Dr. Lutz Kruschwitz, Institut für Bank– und Finanzwirtschaft der Freien Universität Bernover; Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler, Institut für Banken und Finanzierung der Universität Hannolin.
Die Autoren danken dem Verein zur Förderung der Zusammenarbeit zwischen Lehre und Praxis am Finanzplatz Hannover e.V. für seine Unterstützung. Wolfgang Ballwieser, Wolfgang Kürsten und Jochen Wilhelm danken wir für eine anregende Diskussion. Zwei anonyme Gutachter haben uns dabei geholfen, zusätzliche Klarheit in diesen Beitrag zu bringen.

Inhaltsverzeichnis

1 Problemstellung

Die Berücksichtigung der Unsicherheit ist ein wichtiges Problem der Unternehmensbewertung. Für gegebene Verteilungen künftiger Cashflows kann das nach herrschender Meinung entweder im Rahmen eines subjektiven (auch: individualistischen) Ansatzes oder mit Hilfe eines objektiven (auch: marktorientierten) Konzeptes erfolgen.

Die subjektive Vorgehensweise zeichnet sich dadurch aus, dass auf Präferenzen zurückgegriffen wird, die für den Bewerter beziehungsweise das Individuum charakteristisch sind, in dessen Auftrag der Bewerter handelt. Ohne Kenntnis der Nutzenfunktion misslingt diese Form der Unternehmensbewertung. Der objektive Ansatz kommt dagegen ohne die Kenntnis individueller Präferenzen aus. Er verwendet real beobachtbare Marktpreise riskanter Assets. Diese Assets müssen sich dazu eignen, die Cashflows des zu bewertenden Unternehmens zu duplizieren. Misslingt die Duplikation oder sind die Marktpreise der relevanten Assets nicht beobachtbar, so schlägt diese Form der Unternehmensbewertung fehl. Es ist unbestreitbar, dass sich in den Marktpreisen der für die Duplikation heranzuziehenden Assets die Nutzenvorstellungen aller relevanten Marktteilnehmer irgendwie niederschlagen, weswegen auch das objektive Bewertungskonzept letztlich präferenzabhängig ist. Da die Nutzenvorstellungen allerdings im Dunkeln bleiben, pflegt man die objektive Vorgehensweise als präferenzunabhängig zu charakterisieren.

Kürzlich ist zwischen *Kürsten* (2002) und *Schwetzler* (2002) eine Diskussion entbrannt, in der es unter anderem um die Frage ging, ob sich die Methode der Diskontierung von Sicherheitsäquivalenten mit risikolosen Zinssätzen entscheidungstheoretisch fundieren lässt. *Kürsten* wies nach, dass im Rahmen des subjektiven Ansatzes eine solche Fundierung allenfalls dann gelingt, wenn man dem Bewerter Risikoneutralität attestiert. Daraus wurde der Schluss gezogen, dass die Sicherheitsäquivalenz–Methode keine entscheidungstheoretisch akzeptable Grundlage besitzt: Die Idee, überhaupt mit Sicherheitsäquivalenten zu arbeiten, beruht nach allgemeinem Verständnis auf der Voraussetzung, dass der Unternehmensbewerter risikoavers ist und nicht etwa Risikoneutralität an den Tag legt.[1]

Nun unterscheidet sich die Welt, welche *Kürsten* betrachtet, an einer wichtigen Stelle von der Modellwelt, in der andere Autoren über die Sicherheitsäquivalenz–Methode diskutieren wollen. In *Kürstens* individualistischer Modellwelt, werden weder sichere noch unsichere finanzielle Assets gehandelt. Sollten sie doch gehandelt werden, so spielen sie in seinen Überlegungen jedenfalls keine Rolle. Dagegen unterstellen *Schwetzler* und andere Kontrahenten, die sich zur Sicherheitsäquivalenz–Methode äußern, dass es zwar keinen für Duplikationszwecke geeigneten Kapitalmarkt gibt, dass aber immerhin ein risikoloser Zinssatz existiert, zu dem man Geld anlegen und Kredit aufnehmen kann.

Im Folgenden werden auch wir unterstellen, dass zum risikolosen Zinssatz Geld angelegt und Kredit aufgenommen werden kann. Im Unterschied zu Autoren, die die Sicherheitsäquivalenz–Methode vor der *Kürstenschen* Kritik für vertretbar gehalten haben und sie nach Kenntnis seiner Kritik weiterhin für ein ernst zu nehmendes Konzept halten, werden wir diesen Aspekt jedoch in die Nutzentheorie selbst zu integrieren versuchen. Damit verliert unser Ansatz den unschuldigen Charakter der reinen Subjektivität. Da wir jedoch keinerlei Annahmen treffen werden, die uns gestatten werden, unsichere Cashflows mit Hilfe von Kapitalmarkttransaktionen zu duplizieren, werden wir ein Modell diskutieren, das sich zwischen Subjektivität und Objektivität im anfangs beschriebenen Sinne bewegt. Um auch terminologisch deutlich zu machen, dass wir damit den reinen Individualismus im Sinne von *Kürsten* verlassen, wollen wir unser Konzept als *semi–subjektiv* kennzeichnen. Wir wollen also ein Unternehmen mit Hilfe subjektiver Nutzenfunktionen bewerten und zugleich unterstellen, dass es einen zumindest unvollständigen Kapitalmarkt gibt. Nach unserer Kenntnis ist ein solcher Ansatz bisher nicht vorgestellt worden.

Wir werden zunächst das Modell einer semi–subjektiven Bewertung entwickeln. Auf dieser Grundlage werden wir nachweisen, dass unser Konzept unter der Annahme sicherer Erwartungen zum üblichen Ergebnis führt und unter der Bedingung unsicherer Erwartungen mindestens für die Klasse der CARA–Nutzenfunktionen mit dem von *Kürsten* als entscheidungstheoretisch unhaltbar gebrandmarkten Vorgehen übereinstimmt. Das Modell zeigt also, unter welch engen Voraussetzungen die Diskontierung von Sicherheitsäquivalenten mit dem risikolosen Zins entscheidungstheoretisch gerechtfertigt werden kann und erweist sich insoweit als relevant.

2 Modellentwurf

Um unsere Überlegungen so einfach wie möglich zu präsentieren, betrachten wir eine Bewertungssituation, in der es nur die Zeitpunkte $t = 0$ (Gegenwart) und $t = 1, 2$ (Zukunft) gibt.[2] Die Gegenwart ist sicher. Die zu bewertenden Cashflows des Unternehmens sind unsicher und erfolgen in den Zeitpunkten $t = 1, 2$. Wir werden sie mit dem Symbol $\widetilde{CF}_1$ und $\widetilde{CF}_2$ bezeichnen. Über die Zahl der unterscheidbaren Zustände, die in der Zukunft auftreten können, treffen wir vorerst keine speziellen Annahmen. Die einzelnen Zustände werden mit dem Buchstaben ω bezeichnet, in ausführlicher Darstellung werden wir für die unsicheren Cashflows auch die Schreibweise $\widetilde{CF}_t(\omega)$ verwenden.

Um eine rein subjektive Bewertung des Unternehmens vornehmen zu können, brauchen wir die Erwartungsnutzenfunktion des Bewerters in Bezug auf die Cashflows des Unternehmens. Zu diesem Zweck kann man sich eines Axiomensystems bedienen, aus dem sich Erwartungsnutzenfunktionen $u(\cdot)$ herleiten lassen. Typischerweise wird auf das System von *von Neumann und Morgenstern* zurückgegriffen.[3] Wir halten es nicht für erforderlich, auf deren Axiomatik hier im Detail einzugehen.

Unter der Voraussetzung, dass sämtliche Zahlungen im gleichen Zeitpunkt stattfinden, lässt sich ein Sicherheitsäquivalent C_t als diejenige Zahlung definieren, die denselben Nutzen wie eine Wahrscheinlichkeitsverteilung unsicherer Zahlungen in diesem Zeitpunkt stiftet. Es liegt nahe, ein so definiertes Sicherheitsäquivalent als *Bernoulli*–Äquivalent C_t^B zu bezeichnen,

$$u\left(C_t^B\right) =_{\text{Def}} \mathrm{E}\left[u(\widetilde{CF}_t)\right] . \tag{1}$$

Mit einer monotonen Nutzenfunktion gewinnt man daraus

$$C_t^B = u^{-1}\left(\mathrm{E}\left[u\left(\widetilde{CF}_t\right)\right]\right) .$$

Wir nehmen des weiteren an, dass das Axiomensystem die Existenz einer Nutzenfunktion für mehrperiodige Zahlungen $(CF_0, \widetilde{CF}_1, \widetilde{CF}_2)$ des Typs

$$U\left(CF_0, \widetilde{CF}_1, \widetilde{CF}_2\right) = u\left(CF_0\right) + \delta_1 \cdot \mathrm{E}\left[u(\widetilde{CF}_1)\right] + \delta_2 \cdot \mathrm{E}\left[u(\widetilde{CF}_2)\right] \tag{2}$$

beweisbar macht. Dabei sind die Variablen δ_t Parameter, die naheliegenderweise als subjektive Zeitpräferenzraten interpretiert werden. Hier handelt es sich um ein in der Finanzierungstheorie übliches Vorgehen, vergleiche dazu beispielsweise *Fama und Miller* (1972).

Will man unter den jetzt getroffenen Annahmen ein mehrperiodiges Sicherheitsäquivalent C_0 definieren, so böte sich

$$u(C_0) =_{\text{Def}} u(CF_0) + \delta_1 \cdot \mathrm{E}\left[u(\widetilde{CF}_1)\right] + \delta_2 \cdot \mathrm{E}\left[u(\widetilde{CF}_2)\right] \tag{3}$$

an.

Um unser Konzept mit der Idee eines Kapitalmarktes zu verknüpfen, treffen wir nun die Annahme, dass neben den von uns nicht explizit formulierten erwartungsnutzentheoretischen Axiomen ein weiteres Axiom gelte. Wir unterstellen, dass ein unvollständiger Kapitalmarkt existiert.

Kapitalmarktaxiom In den Zeitpunkten $t = 0, 1$ können Finanzmittel zum sicheren Zinssatz r_f angelegt beziehungsweise beschafft werden.

Beim sicheren Zins soll es sich um einperiodige Kassa– beziehungsweise Terminzinssätze handeln, die im Zeitpunkt $t = 0$ vereinbart werden. Aus Gründen der Bequemlichkeit gehen wir von einer flachen Zinsstruktur aus.

Unsere Modellerweiterung zwingt uns dazu, die Definitionsgleichung (3) anzupassen. Zu diesem Zweck beziehen wir Finanzmittel X_t und Y_t ein, die ein Kreditnehmer im Zeitpunkt t

aufnimmt (anlegt) und im Zeitpunkt $t+1$ unter Berücksichtigung von Zinsen wieder zurückzahlt (zurück erhält). Solange X_t und Y_t noch nicht fixiert sind, lautet die erweiterte Definitionsgleichung für das mehrperiodige Sicherheitsäquivalent

$$
\begin{aligned}
&u(C_0 + Y_0) + \delta_1 \cdot \mathrm{E}\left[u(Y_1 - (1+r_f)Y_0)\right] + \delta_2 \cdot \mathrm{E}\left[u(-(1+r_f)Y_1)\right] =_{\mathrm{Def}} \\
&\quad u(CF_0 + X_0) + \delta_1 \cdot \mathrm{E}\left[u(\widetilde{CF}_1 + X_1 - (1+r_f)X_0)\right] + \delta_2 \cdot \mathrm{E}\left[u(\widetilde{CF}_2 - (1+r_f)X_1)\right] . \qquad (4)
\end{aligned}
$$

In dieser Formulierung ist das Sicherheitsäquivalent C_0 in vollkommen beliebiger Weise von den Kreditbeträgen X_t und Y_t abhängig. Das kann schlecht akzeptiert werden. Natürlich wird ein rational handelndes Individuum nicht *irgendeine* Kreditaufnahme (Geldanlage) realisieren, sondern seine Politik *optimieren*. In unserem Modell stellen die Möglichkeiten der Kreditaufnahme (Geldanlage) die einzigen Variablen seines Entscheidungskalküls dar. Daher wird das Individuum die Höhe der Kreditaufnahme (Geldanlage) sowohl beim Kauf des Unternehmens (X_t) als auch beim Erwerb des Sicherheitsäquivalents (Y_t) so wählen, dass beide Seiten der Gleichung so groß wie möglich werden.[4] Bezeichnen wir mit X_t^* und Y_t^* jene Beträge, die die Maximierungsaufgabe lösen, und unterstellen wir, dass solche Lösungen stets existieren, so haben wir mit

$$
\begin{aligned}
&u(C_0 + Y_0^*) + \delta_1 \cdot \mathrm{E}\left[u(Y_1^* - (1+r_f)Y_0^*)\right] + \delta_2 \cdot \mathrm{E}\left[u(-(1+r_f)Y_1^*)\right] =_{\mathrm{Def}} \\
&\quad u(CF_0 + X_0^*) + \delta_1 \cdot \mathrm{E}\left[u(\widetilde{CF}_1 + X_1^* - (1+r_f)X_0^*)\right] + \delta_2 \cdot \mathrm{E}\left[u(\widetilde{CF}_2 - (1+r_f)X_1^*)\right] \qquad (5)
\end{aligned}
$$

endlich die Definition des Sicherheitsäquivalents im Rahmen unseres semi–subjektiven Modells gewonnen.

Die Definition verlangt noch eine weitere Annahme, deren Notwendigkeit erst mit Gleichung (5) offenkundig wird. Wir haben unterstellt, dass beide Seiten jeweils Lösung eines Maximierungsproblems sind. Es ist nicht selbstverständlich, dass immer eine (auch noch eindeutige) Lösung dieses Maximierungsproblems existiert. Ohne eine existierende Lösung verliert aber unser semi–subjektiver Ansatz seinen Sinn. Daher fordern wir, dass der Kapitalmarkt arbitragefrei ist. Nach *Harrison und Kreps* (1979) folgt daraus die Existenz einer Optimallösung. Wenn wir schließlich noch strikt konkave Erwartungsnutzenfunktionen unterstellen, sind die Optima eindeutig.

3 Bewertung im semi–subjektiven Modell

Eine Stärke des semi–subjektiven Ansatzes kann man darin sehen, dass er sowohl die individuelle Nutzeneinstellung eines Investors als auch die Gegebenheiten eines (unvollständigen) Kapitalmarktes berücksichtigt. Allerdings erzielen wir diesen Gewinn an ökonomischer Substanz nicht, ohne einen Preis dafür zu bezahlen.

3.1 Sichere künftige Zahlungen

Niemand wird bestreiten wollen, dass der Preis sicherer künftiger Zahlungen sich nach Diskontierung mit dem risikolosen Zins ergibt, wenn ein Markt existiert, an dem risikolose Zahlungen dupliziert werden können. Das Sicherheitsäquivalent für sichere Ansprüche wird aber in unserem Modell nicht als Wert diskontierter Zahlungen ermittelt und insofern ist nicht offensichtlich, dass Sicherheitsäquivalent und Preis übereinstimmen. Vielmehr ergibt sich das Sicherheitsäquivalent aus der Identität verschiedener Nutzengrößen (5).

Wir müssen daher beweisen, dass Preis und Sicherheitsäquivalent für risikolose Zahlungen im semi–subjektiven Modell übereinstimmen. Wäre dies nicht der Fall und würden die Ansprüche auf die Cashflows nicht zu ihrem Preis, sondern zu ihrem Sicherheitsäquivalent gehandelt, so hätten wir eine Arbitragegelegenheit. Zum Zweck des Beweises setzen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit voraus, dass $CF_0 = 0$ ist.[5]

Satz 1 *Für sichere zukünftige Cashflows fallen das Sicherheitsäquivalent aus dem semi–subjektiven Ansatz und der Preis aus dem objektiven Bewertungskonzept zusammen,*

$$C_0 = \frac{CF_1}{1+r_f} + \frac{CF_2}{(1+r_f)^2}\,.$$

Wir sind sicher, dass sich dieses Resultat auch in einem Modell mit mehr als drei Zeitpunkten ergibt, werden das aber nicht weiter verfolgen. Das Gleiche gilt für den Fall, dass auch gewisse unsichere Titel gehandelt werden: für jedes duplizierbare Asset werden semi–subjektiver Ansatz und objektives Bewertungskonzept dasselbe Ergebnis liefern. Unterstellen wir strikt konkave Nutzenfunktionen, so sind alle X_t^* und Y_t^* eindeutig. Nun wissen wir, dass Y_0^* und Y_1^* die linke Seite der Gleichung (5) maximieren. Mit der Substitution

$$\begin{aligned}\hat{Y}_0 &:= -\frac{CF_1}{1+r_f} - \frac{CF_2}{(1+r_f)^2} + X_0^*,\\ \hat{Y}_1 &:= -\frac{CF_2}{1+r_f} + X_1^*\end{aligned}$$

stellt sich die rechte Seite wie folgt dar,

$$u\left(\frac{CF_1}{1+r_f} + \frac{CF_2}{(1+r_f)^2} + \hat{Y}_0\right) + \delta_1 \cdot \mathrm{E}\left[u\left(\hat{Y}_1 - (1+r_f)\hat{Y}_0\right)\right] + \delta_2 \cdot \mathrm{E}\left[u\left(-(1+r_f)\hat{Y}_1\right)\right].$$

Da voraussetzungsgemäß $CF_0 = 0$ ist, entspricht dies der optimalen Lösung der rechten Seite in (5) genau dann, wenn

$$C_0 = \frac{CF_1}{1+r_f} + \frac{CF_2}{(1+r_f)^2}$$

gilt. Die Optimierungsaufgaben der linken und rechten Seite können wegen der strikten Monotonie der Nutzenfunktion nur dann identische Werte liefern, wenn die Bewertung der sicheren Cashflows so erfolgt wie in Satz 1 angegeben.

3.2 Unsichere künftige Zahlungen

Jetzt geben wir die Annahme auf, dass die künftigen Cashflows sicher sind. Wir werden unter dieser Bedingung nicht zu dem Ergebnis des Satzes 1 kommen können. Jedoch wollen wir wissen, welches Verhältnis sich zwischen dem mehrperiodigen Sicherheitsäquivalent C_0 und den *Bernoulli*–Äquivalenten C_t^B einstellt. Zu diesem Zweck müssen wir konkrete Nutzenfunktionen betrachten.

3.2.1 CARA–Nutzenfunktionen

Wir konzentrieren uns auf Funktionen mit konstanter absoluter Risikoaversion,

$$u(t) = -e^{-at}. \tag{6}$$

Was können wir unter dieser Bedingung über den Zusammenhang zwischen dem Sicherheitsäquivalent C_0 und den *Bernoulli*–Äquivalenten sagen?[6]

Satz 2 *Bei einer Nutzenfunktion mit konstanter absoluter Risikoaversion erweist sich das Sicherheitsäquivalent des semi–subjektiven Modells als* Bernoulli*–Äquivalent, das risikolos abzuzinsen ist,*

$$C_0 = \frac{C_1^B}{1+r_f} + \frac{C_2^B}{(1+r_f)^2}\,.$$

Der Satz bleibt auch dann richtig, wenn wir ihn auf mehr als zwei Perioden erweitern. Leser, die sich für Details des Beweises interessieren, seien auf den Anhang verwiesen.

3.2.2 Logarithmische Nutzenfunktion

Wir vermuten, dass der im Satz 2 behauptete Zusammenhang ausschließlich für den Fall der CARA–Nutzenfunktion gültig ist. Jedenfalls ist das Sicherheitsäquivalent des semi–subjektiven Ansatzes nicht mit dem risikolos diskontierten *Bernoulli*–Äquivalent identisch, wenn man eine logarithmische Nutzenfunktion

$$u(t) = \ln(t) \tag{7}$$

verwendet. Da die Rechnungen im allgemeinen Fall leider sehr aufwendig sind, nehmen wir eine weitere Spezialisierung unseres Modells vor, indem wir annehmen, dass in der Zukunft nur ein Zeitpunkt $t = 1$ und nur zwei Zustände ω_1 und ω_2 möglich sind. Beide Zustände seien gleich wahrscheinlich. Gleichung (5) nimmt in diesem besonderen Fall mit $CF_0 = 0$ die Form

$$\begin{aligned}&\ln(C_0 + Y_0^*) + \delta \ln(-(1+r_f)Y_0^*)\\ &\qquad = \ln(X_0^*) + \frac{\delta}{2}\Big(\ln(CF_1(\omega_1) - (1+r_f)X_0^*) + \ln(CF_1(\omega_2) - (1+r_f)X_0^*)\Big).\end{aligned}$$

an. Der optimale Betrag Y_0^* lässt sich leicht bestimmen. Die Bedingung erster Ordnung lautet

$$0 = \frac{1}{C_0 + Y_0^*} + \frac{\delta}{Y_0^*} \quad \Longrightarrow \quad Y_0^* = -\frac{C_0}{1+\frac{1}{\delta}}.$$

Um X_0^* zu gewinnen, müssen wir die Bedingung erster Ordnung auf der rechten Seite betrachten,

$$0 = \frac{1}{X_0^*} + \frac{\delta}{2}\left(\frac{-(1+r_f)}{CF_1(\omega_1) - (1+r_f)X_0^*} + \frac{-(1+r_f)}{CF_1(\omega_2) - (1+r_f)X_0^*}\right).$$

Etwas mühevolle algebraische Umformungen führen auf die Lösung

$$\begin{aligned}X_0^* = \frac{2+\delta}{4(1+r_f)(1+\delta)}\Bigg(&CF_1(\omega_1) + CF_1(\omega_2)\\ &\pm \sqrt{CF_1^2(\omega_1) + CF_1^2(\omega_2) + 2CF_1(\omega_1)CF_1(\omega_2)\frac{\delta^2 - 4\delta - 4}{\delta^2 + 4\delta + 4}}\;\Bigg).\end{aligned}$$

Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $CF_1(\omega_1) \leq CF_1(\omega_2)$. Man kann sich klarmachen, dass X_0^* dann zwischen $\frac{CF_1(\omega_1)}{1+r_f}$ und $\frac{CF_1(\omega_2)}{1+r_f}$ liegen muss. Damit kommt als Lösung der quadratischen Gleichung nur der Ausdruck mit negativem Vorzeichen vor der Wurzel in Frage. Wir haben diese Optimalwerte nun in die Bestimmungsgleichung für das Sicherheitsäquivalent C_0 eingesetzt und erhielten auf diese Weise endlich eine unübersichtliche Gleichung für C_0, die wir numerisch lösten. Im Vergleich dazu haben wir das *Bernoulli*–Äquivalent mit

$$C_1^B = \sqrt{CF_1(\omega_1)\, CF_1(\omega_2)}$$

ermittelt.

Um zu zeigen, dass Satz 2 bei Verwendung einer logarithmischen Nutzenfunktion tatsächlich nicht gilt, betrachten wir ein Beispiel: wir wählen $CF_1(\omega_1) = 1$, $r_f = 5\,\%$ und $\delta = 0.95$. Variieren wir nun $CF_1(\omega_2)$ systematisch im Intervall $(1, 7]$ und berechnen auf dieser Grundlage die risikolos diskontierten *Bernoulli*–Äquivalente sowie das semi–subjektive Sicherheitsäquivalent, so ergibt sich das in Abbildung 1 dargestellte Bild. Das semi–subjektive Äquivalent ist stets kleiner als das diskontierte *Bernoulli*–Äquivalent. Die Abweichung ist um so größer, je höher die Volatilität ist.

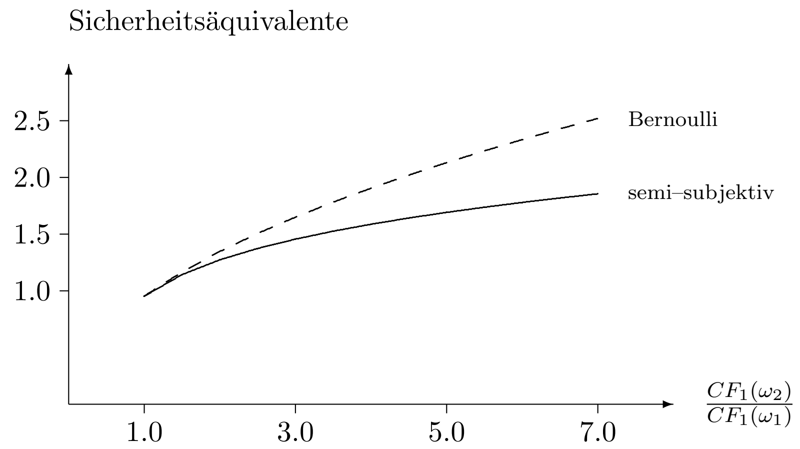

Abbildung 1: Risikolos diskontiertes *Bernoulli*–Äquivalent und semi–subjektives Äquivalent in Abhängigkeit von der Volatilität (mit $r_f = 5\,\%, \delta = 0.95$)

4 Ergebnis

Bei einer Erwartungsnutzenfunktion mit konstanter absoluter Risikoaversion ergibt sich im semi–subjektiven Modell, dass das mehrperiodige Sicherheitsäquivalent dem risikolos diskontierten *Bernoulli*–Äquivalent entspricht. Die von *Schwetzler* und anderen favorisierte Rechenvorschrift findet unter dieser sehr stark einschränkenden Bedingung ihre ökonomische Rechtfertigung. Ein entsprechender Versuch misslingt, wenn stattdessen eine logarithmische Nutzenfunktion zugrunde gelegt wird.

5 Anhang

Wir könnten beim Beweis in einem ersten Schritt die FOC–Bedingungen für die optimalen Werte der Kreditaufnahme (Geldanlage) des Investors herleiten und ineinander einsetzen. Allerdings ist dieser Beweisweg sehr umständlich und kann um einiges kürzer gestaltet werden.[7] Dazu werden wir benutzen, dass die Nutzenfunktion für Zufallsvariablen $\widetilde{X}$ und Zahlen C der Eigenschaft

$$\mathrm{E}\left[u(\widetilde{X}+C)\right] = \mathrm{E}\left[u(\widetilde{X})\right] \cdot e^{-aC} \tag{8}$$

genügt.[8] Das Sicherheitsäquivalent aus (5) hat mit $CF_0 = 0$ die Form

$$\begin{aligned}
&\max_{Y_0,Y_1,Y_2} u\left(C_0+Y_0\right)+\delta_1\cdot\mathrm{E}\left[u(Y_1-(1+r_f)Y_0)\right]+\delta_2\cdot\mathrm{E}\left[u(-(1+r_f)Y_1)\right] \\
&= \max_{X_0,X_1,X_2} u\left(X_0\right)+\delta_1\cdot\mathrm{E}\left[u(\widetilde{CF}_1+X_1-(1+r_f)X_0)\right]+\delta_2\cdot\mathrm{E}\left[u(\widetilde{CF}_2-(1+r_f)X_1)\right],
\end{aligned}$$

was sich unter Verwendung von (8) zu

$$\begin{aligned}
\max_{Y_0,Y_1} u\left(C_0+Y_0\right)&+\delta_1\cdot\mathrm{E}\left[u(Y_1-(1+r_f)Y_0)\right]+\delta_2\cdot\mathrm{E}\left[u(-(1+r_f)Y_1)\right] \\
&= \max_{X_0,X_1} u(X_0)+\delta_1\cdot\mathrm{E}\left[u(\widetilde{CF}_1)\right]\cdot e^{-a(X_1-(1+r_f)X_0)}+ \\
&\qquad +\delta_2\cdot\mathrm{E}\left[u(\widetilde{CF}_2)\right]\cdot e^{a(1+r_f)X_1}
\end{aligned}$$

und unter Berücksichtigung von (1) und erneuter Verwendung von (8) zu

$$\begin{aligned}
\max_{Y_0,Y_1} u\left(C_0+Y_0\right)&+\delta_1\cdot u\left(Y_1-(1+r_f)Y_0\right)+\delta_2\cdot u\left(-(1+r_f)Y_1\right) \\
&= \max_{X_0,X_1} u\left(X_0\right)+\delta_1\cdot u\left(C_1^B+X_1-(1+r_f)X_0\right)+\delta_2\cdot u\left(C_2^B-(1+r_f)X_1\right)
\end{aligned} \tag{9}$$

vereinfachen lässt. Wir benutzen nun folgende Aussage über die zu maximierenden Werte in der Gleichung (9):

> *Wenn*
>
> $$C_0 = \frac{C_1^B}{1+r_f}+\frac{C_2^B}{(1+r_f)^2}$$
>
> *gilt, dann gibt es für jedes Paar* (Y_0, Y_1) *genau ein Paar* (X_0, X_1) *derart, dass die jeweiligen Nutzenwerte in* (9) *übereinstimmen. Ebenso gibt es für jedes Paar* (Y_0, Y_1) *genau ein Paar* (X_0, X_1) *derart, dass die jeweiligen Nutzenwerte in* (9) *übereinstimmen.*

Zuerst muss man sich klarmachen, dass mit dem Beweis dieses Lemmas der Satz bewiesen ist: Wir wissen, dass es sowohl auf der rechten als auch der linken Seite der Gleichung (9) jeweils eindeutige Paare (X_0^*, X_1^*) und (Y_0^*, Y_1^*) gibt, die die jeweiligen Nutzenniveaus maximieren. Diesen Paaren können wir nach dem noch zu beweisenden Lemma jeweils einen "Partner" auf der anderen Gleichungsseite so zuordnen, dass beide Nutzenniveaus gleich sind. Daher müssen die Paare (X_0^*, X_1^*) und (Y_0^*, Y_1^*) auf ein und dasselbe Nutzenniveau führen, sonst waren sie nicht maximal. Damit aber erfüllt unser C_0 die Definition des Sicherheitsäquivalentes.

Es verbleibt die Aufgabe, das Lemma zu beweisen. Wir beginnen mit der Richtung "für jedes (X_0, X_1) gibt es ein (Y_0, Y_1)" und setzen

$$Y_0 := X_0 - C_0, \qquad Y_1 := (1 + r_f)Y_0 + C_1^B + X_1 - (1 + r_f)X_0.$$

Offensichtlich sind bereits durch die Wahl dieser Parameter die ersten beiden Summanden in (9) identisch. Wir müssen also nur zeigen, dass auch noch die jeweils dritten Summanden übereinstimmen. Das gelingt wie folgt:

$$\begin{aligned}
-(1 + r_f)Y_1 &= -(1 + r_f)\left((1 + r_f)Y_0 + C_1^B + X_1 - (1 + r_f)X_0\right) \\
&= (1 + r_f)\left((1 + r_f)C_0 - C_1^B - X_1\right) \\
&= (1 + r_f)\left(\frac{C_2^B}{1 + r_f} - X_1\right) \\
&= C_2^B - (1 + r_f)X_1\,.
\end{aligned}$$

Völlig analog lässt sich die Rückrichtung beweisen.

Literatur

Ballwieser, Wolfgang (2001) "Unternehmensbewertung", in: Wolfgang Gerke und Manfred Steiner (Hg.), *Enzyklopädie der Betriebswirtschaftslehre*, Band VI: Handwörterbuch des Bank– und Finanzwesens, 3. Auflage, 2082–2095, Schäffer–Poeschel, Stuttgart.

Bamberg, Günter und Baur, Franz (2001) *Statistik*, 11. Auflage, Oldenbourg, München, Wien.

Bamberg, Günter und Coenenberg, Adolf Gerhard (2002) *Betriebswirtschaftliche Entscheidungslehre*, 11. Auflage, Vahlen, München.

Fama, Eugene F. und Miller, Merton H. (1972) *The Theory of Finance*, Dryden, Hinsdale, Ill.

Hakansson, Nils H. (1970) "Optimal investment and consumption strategies under risk for a class of utility functions", *Econometrica*, 38, 587–607.

Harrison, J. Michael und Kreps, David M. (1979) "Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets", *Journal of Economic Theory*, 20, 381–408.

Kruschwitz, Lutz (2002) *Finanzierung und Investition*, 3. Auflage, Oldenbourg, München, Wien.

Kürsten, Wolfgang (2002) " 'Unternehmensbewertung unter Unsicherheit' oder: Theoriedefizit einer künstlichen Diskussion über Sicherheitsäquivalent– und Risikozuschlagsmethode. – Anmerkungen (nicht nur) zu dem Beitrag von Bernhard Schwetzler in der zfbf", *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, 54, 128–144.

von Neumann, John und Morgenstern, Oskar (1944) *Theory of Games and Economic Behavior*, Princeton University Press, Princeton, NJ.

Schwetzler, Bernhard (2000a) “Stochastische Verknüpfung und implizite bzw. maximal zulässige Risikozuschläge bei der Unternehmensbewertung”, *Betriebswirtschaftliche Forschung und Praxis*, 52, 478–492.

— (2000b) “Unternehmensbewertung unter Unsicherheit: Sicherheitsäquivalent– oder Risikozuschlagsmethode?”, *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, 52, 469–486.

— (2002) “Das Ende des Ertragswertverfahrens? Replik zu den Anmerkungen von Wolfgang Kürsten zu meinem Beitrag in der zfbf”, *Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung*, 54, 145–158.

Wilhelm, Jochen (2002) *Risikoabschläge, Risikozuschläge und Risikoprämien: Finanzierungstheoretische Anmerkungen zu einem Grundproblem der Unternehmensbewertung*, Passauer Diskussionspapiere, Diskussionsbeitrag Nr. B–9–02, Universität Passau, Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät.

Notes

[1]Zum Konzept des Sicherheitsäquivalents unter der Voraussetzung, dass der Zeitaspekt keine Rolle spielt, siehe beispielsweise *Bamberg und Coenenberg* (2002), 88.

[2]Dass das Modell für Zwecke einer realen Unternehmensbewertung verallgemeinert werden muss, ist selbstverständlich.

[3]Siehe beispielsweise *Kruschwitz* (2002), 88 ff.

[4]Diese Definition des Sicherheitsäquivalents findet sich wohl auch bei *Wilhelm* (2002), 8, der allerdings ein Zwei–Zeitpunkte–Modell analysiert und nur das Endvermögen eines Investors maximiert. Inwieweit sein Zugang mit unserem Mehr–Perioden–Modell kompatibel ist, lässt sich nicht unmittelbar erkennen.

[5] *Wilhelm* hat in seiner Arbeit ein vergleichbares Resultat, er gestattet dort allerdings auch riskante Kapitalanlagen.

[6] *Wilhelm* untersucht diese Fragestellung in seiner Arbeit nicht. *Hakansson* (1970) löste das von uns aufgeworfene Maximierungsproblem, ohne jedoch nach intertemporalen Sicherheitsäquivalenten zu fragen.

[7]Wir danken einem anonymen Gutachter für diesen Hinweis.

[8]Zufallsvariablen sind, wie in der Statistik üblich, messbare Funktionen. Ihre Summe wird ebenso, wie in der Statistik üblich, als Summe messbarer Funktionen definiert. Zu Details siehe beispielsweise *Bamberg und Baur* (2001), 93 f.