

# 中学生に向けた集合論

—授業実践—試案—

石井基裕

群馬大学教育実践研究 別刷

第36号 37～46頁 2019

群馬大学教育学部 附属学校教育臨床総合センター



# 中学生に向けた集合論

## —授業実践—試案—

石井基裕  
群馬大学教育学部数学教育講座

### Set theory for junior high school students

Motohiro ISHII  
Department of Mathematics, Faculty of Education, Gunma University

キーワード：無限集合, ヒルベルト・ホテル, カントールの対角線論法, 数学教材  
Keywords : Infinite Set, Hilbert's Hotel, Cantor's Diagonal Argument, Mathematics Material

(2018年10月31日受理)

## 1 はじめに

無限とは何であろうか。地球上に存在するあらゆる物質, それらを構成する全ての原子の個数は膨大な数であるが, それは高々有限である。より広く, 全宇宙の質量(エネルギー)は有限であると考えられており, その有限な世界の中で, 有限な時間を我々は生きている。このように, 現実の世界の中で, 我々が無限を見出すことは非常に困難である。しかし, 数学を通して我々は無限について考察することができる。無限の概念は, 数学のあらゆる分野の基礎をなし, 様々な対称性や物理現象を記述する上でも必要不可欠である。無限の概念を用いることによって, 我々はこの有限な世界を認識し, より深く理解することができるのである。

集合とはものの集まりのことである。数学的な対象の多くは, 集合の言葉を用いて記述されるため, 現代の数学において集合の概念は基本的である。また, 全ての自然数のように, 無限に多くのものから構成される集合(無限集合)を考えることにより, 無限について研究したり, それを様々な利用することができるようになる。集合論の創始者である G. Cantor (1845-1928) は, 集合の大きさを表す濃度の概念を導入し, 無限集合について深く研究した。特に, 自然数全体の

集合と実数全体の集合とは互いに異なる濃度を持つ無限集合であることを示すとともに, それらの中間の濃度を持つ集合は存在しないであろうという有名な予想(連続体仮説)を提唱した。

一方, Cantor 自身も認識していたことであるが, 無限集合を考察すると, 様々なパラドックスが生じることが知られている。それにより, Cantor の時代には, 数論で有名な L. Kronecker (1823-1891) など, 無限集合を扱う集合論を受けない数学者もいた。このような背景から, D. Hilbert (1862-1943) を中心として進められたヒルベルト・プログラムをはじめ, 公理系から出発して数学理論を構築する上での基礎付けに関する研究が盛んになっていく。

1930 年に K. Gödel (1906-1978) は, 自然数全体の集合を定式化できる理論には, 証明も反証もできない命題が必ず存在することを主張する(第 1)不完全性定理 ([5]) を証明した。数学において最も素朴な概念の 1 つである自然数が, 数学の根底を揺るがす程の困難な問題をはらんでいるというこの事実は, 数学全体に大きな衝撃を与えた。また, 1940 年に Gödel は (ZFC 公理系の無矛盾性の仮定のもとに) 連続体仮説を満たすような集合論のモデルの存在を証明した。1963 年には, P. Cohen (1934-2007) により, 同

様の仮定のもとに、連続体仮説を満たさないような集合論のモデルの存在も証明された。これは、連続体仮説が証明も反証もできない命題であることを示している。別の言い方をすると、集合の理論には、性質の異なる様々なモデルが存在することが証明されたのである。

本稿の目的は、中学生を対象とした数学の特別授業を想定して、集合論の入門的な教材の試案を提出することである。無限集合が学習の対象として初めて扱われるのは中学校数学の第1学年であり、ここでは「自然数の集合」、「整数の集合」、「数全体の集合」を学ぶ。そして、高等学校の数学Iにおいて、集合と論証について、より詳しく学習する。一方、直線や平面、自然数や有理数など、算数・数学の様々な場面に無限集合は既に現れている。そのような意味で身近な対象である無限集合の性質に着目することは、重要な課題であると考えられる。また、上述のように、無限集合は数学を展開する上で、最も基本的な概念の1つである。従って、無限集合に対する理解を深めることは、数学全体に対する理解を深める上で重要な役割を果たすものと考えられる。しかし、無限集合の性質を数学的に厳密に述べるためには、多大な知識の準備を必要とし、通常の授業に組み込むことは困難である。そこで、本稿では無限に多くの客室を持つ「ヒルベルト・ホテル」を例に、集合論に関する予備知識を仮定せずに、中学生が無限集合の基本的な性質を理解できる授業実践の試案を提出する。

第2章では、Russellのパラドックスを例に、素朴集合論における問題点を示し、公理的集合論の考え方について触れる。第3章では、無限集合の濃度と連続体仮説について触れる。第4章は、中学生に向けた集合論の授業実践の試案である。「ヒルベルト・ホテル」を例に、第2章と第3章で述べる専門的な知識を必要とせずに中学生が理解できる形で、有限集合と無限集合との性質の違いや、自然数全体の集合が持つ基本的な性質について述べる。

## 2 集合とは何か

**集合**とは“もの”の集まりであり、集合を構成する1つひとつの“もの”は互いに区別されていて、その集まりの全体を指定する範囲が明確に与えられているものである。集合を構成する1つひとつの“もの”を、その集合の**元**もしくは**要素**という。例えば、群馬大学に所属する学生全体は、各学生を元とする集合をなす。一方、群馬大学に所属する「背が高い学生」全体を考えると、「背が高い学生」とはどのような範囲の学生を指定しているのかが不明瞭であるので、これは集合ではない。

集合を表すのに、全ての元を列挙する方法と、集合に属する元の条件を述べる方法とがある。例えば、 $\{a, b, c, d\}$ は、元 $a, b, c, d$ からなる集合を表す。また、 $\{x \mid x \text{は} 5 \text{以上} 10 \text{以下の自然数}\}$ によって、5以上10以下の自然数全体の集合を表す。また、集合 $X$ に元 $x$ が属することを $x \in X$ 、属していないことを $x \notin X$ と表す。

以上のような集合の導入を「素朴集合論」という。素朴集合論は、集合を直観的に分かりやすく捉えることができるという利点があるが、次のような深刻な問題を含んでいる。

### Russellのパラドックス

条件 $X \notin X$ を満たす集合 $X$ 全体の集合 $U$ を考える。もしも $U \in U$ であるならば、 $U$ の定義より $U \notin U$ となる。また、もしも $U \notin U$ であるならば、 $U$ の定義より $U \in U$ となる。いずれの場合も矛盾である。

この例のように、ある条件を満たす集合全体の集合のようなものを考えてしまうと、矛盾が生じることがある。このような問題を回避するために、素朴な意味での集合全てを考えるのではなく、はじめに「集合」が満たすべき条件(公理系)を設け、その条件を満たすような対象を集合とするような理論を展開するという方法がある。これを「公理的集合論」という。公理系

の選び方や、その公理系を満たす集合論のモデルは、複数存在し得るが、現在の数学で特に広く使用されている公理系として **ZFC 公理系** と呼ばれるものがある (ZF は考案者の Zermelo と Fraenkel の頭文字であり、C は **選択公理 (Axiom of Choice)** を指す). 例えば、ZFC 公理系には、次が含まれる.

### 空集合の存在

元を全く持たない集合  $\emptyset$  が存在する.  $\emptyset$  を **空集合** という.

また、ZFC 公理系から自然数全体のなす集合

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$$

を定義することができる. 自然数全体の集合  $\mathbb{N}$  から、整数全体の集合

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\},$$

有理数全体の集合

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{n}{m} \mid n, m \in \mathbb{Z}, m \neq 0 \right\},$$

実数全体の集合  $\mathbb{R}$ , そして、複素数全体の集合

$$\mathbb{C} = \left\{ x + y\sqrt{-1} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$$

が順次構成される.

## 3 集合の濃度と連続体仮説

集合  $X$  から集合  $Y$  への写像

$$f: X \rightarrow Y, \quad x \mapsto f(x)$$

とは、 $X$  の各元  $x \in X$  に対して、 $Y$  の元  $f(x) \in Y$  を対応させる対応のことである. 例えば、

$$\begin{aligned} f: \{a, b, c\} &\rightarrow \{0, 1\} \\ f(a) &= 1, \quad f(b) = 0, \quad f(c) = 1 \end{aligned}$$

によって、 $\{a, b, c\}$  から  $\{0, 1\}$  への写像  $f$  が定まる. 写像  $f: X \rightarrow Y$  が **単射** であるとは、条件

「任意の  $x, x' \in X$  に対して、 $f(x) = f(x')$  ならば  $x = x'$  である」が成り立つことをいう. また、写像  $f: X \rightarrow Y$  が **全射** であるとは、条件「任意の  $y \in Y$  に対して、 $f(x) = y$  を満たす  $x \in X$  が存在する」が成り立つことをいう. 写像  $f$  が全射かつ単射であるとき、 $f$  は **全単射** であるという.  $X$  から  $Y$  への全単射な写像  $f: X \rightarrow Y$  が存在するとき、 $X$  と  $Y$  とは **1対1に対応する** という. また、集合  $X$  が **有限集合** であるとは、ある自然数  $N \in \mathbb{N}$  が存在して、 $X$  と  $\{1, 2, 3, \dots, N\}$  とが 1対1に対応することをいう. このとき、 $X$  の元の個数は  $N$  であるといい、 $|X| = N$  とかく. 有限集合でない集合を **無限集合** という.

無限集合の大きさをどのように定めることができるだろうか. また、2つの無限集合の大きさをどのように比較することができるだろうか. 有限集合の大きさは、元の個数によって捉えることができ、2つの有限集合の大きさを比較するためには、それぞれの集合の元の個数を求めて、それらを比較すればよい. しかし、無限集合においては、全ての元の個数を数え上げることはできない. 実は、元の個数を数えずに、2つの有限集合の大きさを比較することができる次の方法がある.

**命題 1.**  $X, Y$  を有限集合とする.  $X$  の元の個数と  $Y$  の元の個数とが一致するための必要十分条件は、 $X$  と  $Y$  とが 1対1に対応することである.

命題 1 をもとに、有限であるとは限らない集合  $X, Y$  の「**濃度が等しい**」ということを、 $X$  と  $Y$  とが 1対1に対応することと定義する. このとき、 $|X| = |Y|$  とかく. 自然数全体の集合  $\mathbb{N}$  と濃度が等しい集合を **可算無限集合** という. また、可算無限集合  $X$  は **可算濃度**  $\aleph_0$  (アレフ・ゼロ) を持つといい、 $|X| = \aleph_0$  と表す.  $\mathbb{N}$  はもちろん可算無限集合である.

集合  $X$  が集合  $Y$  の **部分集合** であることを、命題「任意の  $x$  に対して、 $x \in X$  ならば  $x \in Y$  で

ある」が真であることを定義する.  $X$  が  $Y$  の部分集合であることを,  $X \subset Y$  という記号で表す. また,  $X \subset Y$  かつ  $Y \subset X$  が成り立つとき,  $X = Y$  とかき,  $X$  と  $Y$  とは集合として等しいという. 例えば,  $\{a, c\}$  は  $\{a, b, c, d\}$  の部分集合であるので,  $\{a, c\} \subset \{a, b, c, d\}$  である. また, 任意の集合  $X$  に対して, 命題「任意の  $x$  に対して,  $x \in \emptyset$  ならば  $x \in X$ 」は, 前提条件「 $x \in \emptyset$ 」が偽であるので, 真である. 従って, 空集合  $\emptyset$  は任意の集合  $X$  の部分集合となる.

有限集合  $X, Y$  について,  $X \subset Y$  かつ  $X \neq Y$  であるならば,  $|X| < |Y|$  が成り立つ. しかし, この性質は無限集合については一般には成立しない. 例えば, 整数全体の集合  $\mathbb{Z}$  は可算無限集合である. 実際,

$$\begin{cases} f(2m-1) = m-1 \\ f(2m) = -m \end{cases} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

によって定まる写像  $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$  は全単射である. また, 正の偶数全体の集合

$$2\mathbb{N} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

についても, 2倍するという操作によって定まる写像

$$\mathbb{N} \rightarrow 2\mathbb{N}, \quad x \mapsto 2x$$

は全単射であるので,  $|2\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$  が成り立つ. より一般に, 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して, 正の  $n$  の倍数全体の集合  $n\mathbb{N}$  を同様に定義すると,  $|n\mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$  が成り立つ. 更に, 第4章の「土曜日」で述べるように, 有理数全体の集合  $\mathbb{Q}$  は可算無限集合である. 以上より,  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$  である. しかし,  $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$  かつ  $\mathbb{N} \neq \mathbb{Z} \neq \mathbb{Q}$  である.

**命題 2.**  $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, n\mathbb{N}$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) は可算無限集合である.

同様に, 开区間  $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$  は  $\mathbb{R}$  の部分集合であるが, 正接関数

$$\tan: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \mathbb{R}$$

は全単射であるので,  $\left| \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \right| = |\mathbb{R}|$  が成り立つ. 更に,  $\frac{1}{\pi}$  倍するという操作によって定まる写像

$$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \quad x \mapsto \frac{x}{\pi}$$

は全単射であり,  $\frac{1}{2}$  を加えるという操作によって定まる写像

$$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \rightarrow (0, 1), \quad x \mapsto x + \frac{1}{2}$$

も全単射である. 以上をまとめると,  $|\mathbb{R}| = |(0, 1)|$  が従う.

**命題 3.**  $|\mathbb{R}| = |(0, 1)|$ .

$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$  は座標平面を表し,  $\mathbb{R}^3 = \{(x, y, z) \mid x, y, z \in \mathbb{R}\}$  は座標空間を表す. 一般に,  $n$  次元の座標空間  $\mathbb{R}^n$  を定義することができる. Cantor は次の定理を証明した.

**定理 4.** 任意の  $n \in \mathbb{N}$  に対して,  $|\mathbb{R}| = |\mathbb{R}^n|$  が成り立つ.

$\mathbb{R}$  の濃度を**連続体濃度**といい,  $|\mathbb{R}| = \aleph$  (アレフ) と表す. 例えば, 複素数全体の集合  $\mathbb{C}$  は,

$$\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{C}, \quad (x, y) \mapsto x + y\sqrt{-1}$$

により  $\mathbb{R}^2$  と 1 対 1 に対応する. よって,  $|\mathbb{C}| = |\mathbb{R}^2| = |\mathbb{R}| = \aleph$  が成り立つ.

$X$  から  $Y$  への単射な写像が存在するとき,  $|X| \leq |Y|$  とかく. また,  $|X| \leq |Y|$  かつ  $|X| \neq |Y|$  が成り立つとき, すなわち  $X$  から  $Y$  への単射な写像は存在するが, 全単射な写像は存在しないとき,  $|X| < |Y|$  とかく.  $X \subset Y$  ならば, 包含写像

$$X \rightarrow Y, \quad x \mapsto x$$

は単射な写像を与えるので,  $|X| \leq |Y|$  が成り立つ. 有限集合  $X, Y$  に対して,  $|X| \leq |Y|$  かつ  $|Y| \leq |X|$  であることと  $|X| = |Y|$  であることが同値であることは明らかである. 実は, 次

に述べる Cantor–Bernstein–Schröder の定理により、この性質は無限集合に対しても成立する。すなわち、 $X$  から  $Y$  への単射な写像が存在し、かつ  $Y$  から  $X$  への単射な写像が存在するならば、 $X$  から  $Y$  への全単射な写像が存在する。

**定理 5.** 集合  $X, Y$  に対して、 $|X| \leq |Y|$  かつ  $|Y| \leq |X|$  であることと  $|X| = |Y|$  であることは同値である。

**カントールの対角線論法** ([3]) と呼ばれる方法により、2つの濃度  $\aleph_0$  と  $\aleph$  とは等しくないことが示される。すなわち、 $\mathbb{N}$  と  $\mathbb{R}$  との間には全単射な写像は存在しない。カントールの対角線論法については第4章の「日曜日」において詳述する。

**定理 6.**  $\aleph_0 < \aleph$ .

この定理は、無限には本質的に異なる大きさが存在することを示している。可算無限集合ではない無限集合を**非可算無限集合**という。それでは、非可算無限集合の濃度は一意的であるだろうか。実は、無限集合の濃度には、相異なるものが無数に存在することが知られている。一般に、集合  $X$  に対して、 $X$  の部分集合全体のなす集合を  $\mathfrak{P}(X)$  と表し、 $X$  の**べき集合**という。例えば、 $X = \{a, b\}$  のべき集合は、

$$\mathfrak{P}(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$$

であり、 $|\mathfrak{P}(X)| = 4 = 2^2$  となる。一般に、有限集合  $X$  に対して、 $|\mathfrak{P}(X)| = 2^{|X|}$  が成り立つ。有限とは限らない集合  $X$  に対しても、 $\mathfrak{P}(X)$  の濃度を  $2^{|X|}$  と表すことにする。

**定理 7.** 任意の集合  $X$  に対して、 $|X| < 2^{|X|}$  が成り立つ。

開区間  $(0, 1)$  に属する任意の元  $x$  は、2進数の無限小数として、

$$x = 0.x_1x_2x_3x_4x_5 \cdots \quad (x_i \in \{0, 1\}, i \in \mathbb{N})$$

という形に表すことができる。従って、 $(0, 1)$  の各元は、数列

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, \dots \quad (x_i \in \{0, 1\}, i \in \mathbb{N})$$

によって定まると考えることができる。すなわち、0か1かの選択を  $\mathbb{N}$  の各元に対して行うことによって定まっている。このような議論から、 $|(0, 1)| = 2^{\aleph_0}$  であることが従う。すなわち、次の定理が成り立つ。

**定理 8.**  $\aleph = 2^{\aleph_0}$ .

可算濃度  $\aleph_0$  と連続体濃度  $\aleph$  との性質について深い考察を行った Cantor は、次の有名な予想を提出した。

**予想 9 (連続体仮説).**  $\aleph_0$  と  $\aleph$  との中間の大きさの濃度を持つ集合は存在しない。

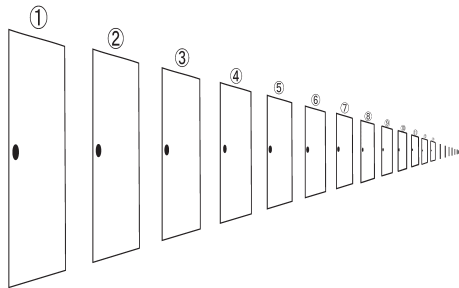
連続体仮説は、**ヒルベルトの 23 の問題** ([4]) の第1番目の問題として取り上げられるなど、多くの数学者の注目を集めることとなるが、Cantor の存命中に解決することはなかった。その後、この予想は数学の基礎に関わる重大な問題へと発展していく。ZFC 公理系の無矛盾性の仮定のもとに、まず Gödel ([6]) により連続体仮説が成り立つような集合論のモデルの存在が証明され、後に Cohen ([7]) により連続体仮説が成り立たないような集合論のモデルの存在が証明された。すなわち、連続体仮説は、ZFC 公理系からは証明も反証もできないことが証明されたのである。多くの数学者が理論の基礎として採用している ZFC 公理系のみからは、無限集合に関する性質の全ては捉えることができないことが判明し、これらの事実は数学の世界に大きな衝撃を与えた。すなわち、我々が集合論を用いて数学的に「無限」を解釈する方法は一意的ではないということが結論されたのである。

## 4 -授業実践一試案- ヒルベルト・ホテルの1週間

この章では、Hilbert が 1924 年度に行った講義で用いた、無限に多くの客室を持つホテルの例をもとにして、有限集合と無限集合との性質の違いについて述べる ([2, 8]).

### ヒルベルト・ホテル

ヒルベルト氏が経営するヒルベルト・ホテルには、 $1, 2, 3, 4, 5, \dots$  と無限に多くの客室がある。各自然数  $m$  に対して、部屋番号  $m$  が割り振られた客室がある。部屋番号  $m$  の客室を、 $m$  号室と呼ぶ。



**月曜日** ヒルベルト・ホテルに 1 人の飛び込みの来客がある。しかし、ホテルは既に満室である。有限個の部屋しか持たない通常のホテルでは、満室であることと、これ以上の来客を受け入れることができなことは同値である。しかし、ヒルベルト・ホテルでは、満室であったとしても、新たな来客を受け入れることができる。

まず、次のように宿泊客に部屋を移動してもらう。

- 1 号室の客は 2 号室へ
- 2 号室の客は 3 号室へ
- 3 号室の客は 4 号室へ

一般に、

- $m$  号室の客は  $(m + 1)$  号室へ

すると、もともとの宿泊客全員を新たな部屋に案内することができるとともに、1 号室が空室になるので、そこへ新しくきた客を案内することができる。

**Q.** 最も端の部屋に宿泊している客は、次の部屋に移動することができないのではないのでしょうか？

実は、ヒルベルト・ホテルには「最も端の部屋」は存在しない。実際、仮にそのような部屋  $C$  があるとする。ヒルベルト・ホテルの客室は、順に  $1, 2, 3, 4, 5, \dots$  と部屋番号が割り振られているので、部屋  $C$  にもある部屋番号  $m$  が付いているはずである。しかし、 $m$  号室の隣には必ず  $(m + 1)$  号室がある。これは、 $C$  が「最も端の部屋」であるという仮定に反し、矛盾である。よって、ヒルベルト・ホテルには「最も端の部屋」は存在しないことが示された。

**火曜日** 今日もヒルベルト・ホテルは満室である。そこへ、10 人の団体客が来る。しかし、月曜日と同様にして、次のように宿泊客に部屋を移動してもらえばよい。

- 1 号室の客は 11 号室へ
- 2 号室の客は 12 号室へ
- 3 号室の客は 13 号室へ

一般に、

- $m$  号室の客は  $(m + 10)$  号室へ

すると、もともとの宿泊客全員を新たな部屋に案内することができるとともに、新しく来た 10 人に 1 号室から 10 号室までの客室を割り振ることができる。より一般に、 $N$  人の団体客が来たとしても、

- 1 号室の客は  $(1 + N)$  号室へ
- 2 号室の客は  $(2 + N)$  号室へ
- 3 号室の客は  $(3 + N)$  号室へ

一般に、



- $m$  号室の客は  $(m + N)$  号室へ

と移動すれば、もともとの宿泊客全員を新たな部屋に案内することができるとともに、新しく来た  $N$  人に 1 号室から  $N$  号室までの客室を割り振ることができる。

**水曜日** 今日も満室のヒルベルト・ホテルに「 $N$  観光バス」が到着する。  $N$  観光バスには  $1, 2, 3, 4, 5, \dots$  と無限に多くの客が乗っている。各自然数に対して、 $N$  観光バスの乗客がちょうど 1 人ずつ対応する。自然数  $n$  に対応する客を、 $n$  番目の客と呼ぶ。

火曜日の案内方法では、いくらでも大きな有限の人数の客を泊めることができた。しかし、どんなに宿泊客に移動してもらったとしても、有限個の客室しか空けることができない。また、もともとの宿泊客の移動先の部屋を具体的に指定することも困難である。

**Q.**  $N$  観光バスで来た全ての客を部屋に案内することができるでしょうか？どのように部屋を割り振ればよいのでしょうか？

次のように宿泊客に部屋を移動してもらおう。

- 1 号室の客は 2 号室へ
- 2 号室の客は 4 号室へ
- 3 号室の客は 6 号室へ

一般に、

- $m$  号室の客は  $2m$  号室へ

すると、奇数  $1, 3, 5, \dots, 2m - 1, \dots$  の番号の部屋が空室になる。そこへ、 $N$  観光バスの客を順に、

- 1 番の客は 1 号室へ
- 2 番の客は 3 号室へ
- 3 番の客は 5 号室へ

一般に、

- $m$  番の客は  $(2m - 1)$  号室へ

と案内すると、もともとの宿泊客全員を新たな部屋に案内することができるとともに、新しく来た全ての客に部屋を割り振ることができる。

**木曜日** 今日は  $N$  観光バスが 1 号車から 4 号車まで、合計 4 台やってきた。

**Q.** 全ての客に部屋を割り振る方法として、どのような方法が考えられるでしょうか？

1 つの方法としては、水曜日の手続きで順に 1 台ずつ客を案内するということが考えられる。すなわち、まず 1 台目の  $N$  観光バスの客を水曜日のように案内する。すると、ヒルベルト・ホテルは満室となる。引き続き、同様の方法で 2 台目の  $N$  観光バスの客を案内していく。3 台目以降も同様に、この方法を繰り返していくと、全ての客に部屋を割り振ることができる。

一方、次のような方法も考えられる。まず、もともとの宿泊客に次のように移動してもらおう。

- 1 号室の客は 5 号室へ
- 2 号室の客は 10 号室へ
- 3 号室の客は 15 号室へ

一般に、

- $m$  号室の客は  $5m$  号室へ

すると 5 で割ったときの余りが、それぞれ

- 1 となる番号  $1, 6, 11, 16, \dots, 5m + 1, \dots$
- 2 となる番号  $2, 7, 12, 17, \dots, 5m + 2, \dots$
- 3 となる番号  $3, 8, 13, 18, \dots, 5m + 3, \dots$
- 4 となる番号  $4, 9, 14, 19, \dots, 5m + 4, \dots$

を持つ客室が空室となる。そこへ、まず  $N$  観光バス 1 号車の客を次のように案内する。

- 1 番の客は 1 号室へ

- 2 番の客は 6 号室へ
- 3 番の客は 11 号室へ

一般に,

- $(m+1)$  番の客は  $(5m+1)$  号室へ

同様に,  $\mathbb{N}$  観光バス  $i$  号車の  $(m+1)$  番目の客を  $(5m+i)$  号室へ案内すると  $(m \geq 0, i = 1, 2, 3, 4)$ , 全ての客に部屋を割り振ることができる.

より一般に,  $\mathbb{N}$  観光バスが  $k$  台来たとする  $(k \geq 1)$ . まず, もともとの宿泊客を次のように移動させる.

- 1 号室の客は  $(1+k)$  号室へ
- 2 号室の客は  $2(1+k)$  号室へ
- 3 号室の客は  $3(1+k)$  号室へ

一般に,

- $m$  号室の客は  $m(1+k)$  号室へ

そして,  $\mathbb{N}$  観光バス  $i$  号車の  $(m+1)$  番目の客を  $(m(1+k)+i)$  号室へ案内する  $(m \geq 0, i = 1, 2, 3, \dots, k)$ . すると, 全ての客に部屋を割り振ることができる.

**金曜日** 今日は  $\mathbb{N}$  観光バスが  $1, 2, 3, 4, 5, \dots$  と無限にたくさんやってきた. 木曜日の方法では, いくらでも大きな有限の台数の  $\mathbb{N}$  観光バスの客を全員泊めることができる. しかし, この方法をどんなに繰り返していったとしても, 無限に多くの  $\mathbb{N}$  観光バスの客全員に部屋を割り振ることはできない.

**Q.** 全ての客を客室に案内することができるのでしょうか? どのように部屋を割り振ればよいのでしょうか?

新たにやってきた団体客を次のように整列させる. まず,  $\mathbb{N}$  観光バス  $i$  号車の  $m$  番目の客に

番号札  $(i, m)$  を渡す. そして, 番号札にある 2 つの値の和  $i+m$  が等しい客同士で, 次のようにグループを作る.

- 第 1 グループ:  $(1, 1)$ .
- 第 2 グループ:  $(1, 2), (2, 1)$ .
- 第 3 グループ:  $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ .
- 第 4 グループ:  $(1, 4), (2, 3), (3, 2), (4, 1)$ .

一般に,

- 第  $m$  グループ:  $(1, m), (2, m-1), (3, m-2), \dots, (i, m-i+1), \dots, (m-1, 2), (m, 1)$ .

次に, グループ番号の小さい順に整列させる. 更に, 各グループ内では, バスの番号について小さい順に整列させる. そして, この順番に関して, 改めて  $1, 2, 3, 4, 5, \dots$  と客に番号を付ける. すると, 水曜日と同様に, もともとの宿泊客を偶数番目の部屋へ移動させることにより, 新しく来た客を空いた奇数番目の部屋に順に案内することができる.

より正確には, 番号札  $(i, m)$  を持つ客には, 番号

$$N_{i,m} = i + \sum_{j=1}^{i+m-2} j \quad (4.1)$$

$$= i + \frac{1}{2}(i+m-1)(i+m-2) \quad (4.2)$$

を割り振り, その客を  $(2N_{i,m}-1)$  号室に案内する. ここで, 式 (4.1) の 1 項目の  $i$  は  $(i, m)$  が第  $(i+m-1)$  グループの中の  $i$  番目であることを表し, 2 項目の和  $\sum_{j=1}^{i+m-2} j$  は第 1 グループから第  $(i+m-2)$  グループに属する客の人数を表す.

以上で, 全ての客に部屋を提供することができた.

**土曜日** 今日は「Q 観光バス」がやってきた.  
Q 観光バスのそれぞれの客には、有理数

$$\frac{1}{2}, 2.31, \frac{8}{3}, -\frac{5}{2}, -0.022, \frac{17}{6}, \dots$$

がちょうど1つずつ割り振られている.

**Q.** 全ての客を客室に案内することができるでしょうか?どのように部屋を割り振ればよいでしょうか?

もしも、正の有理数に対応する客に部屋を割り振ることができれば、その後、全く同様の方法で負の有理数に対応する客にも部屋を割り振ることができるので、まずは正の有理数に対応する客を部屋に案内する方法を述べる.

有理数は、分数の形に表すことができる実数であるので、例えば、 $\frac{n}{m}$  に対して、2つの整数の組  $(n, m)$  を割り振れば、金曜日に用いた方法でうまく客を整列させることができるのではないかと考えられる. しかし、有理数を分数で表す方法は1通りではない. 例えば、 $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \dots$  となる. そこで、 $\frac{1}{2}$  のように、それ以上約分することができない既約分数  $\frac{n}{m}$  に対して、番号札  $(n, m)$  を配ることにする. そうすると、金曜日と同様の方法により部屋を割り振ることができる. すなわち、もともとの宿泊客を偶数番目の部屋へ移動させ、残った奇数番目の部屋に、番号札に応じて客を案内していく. より正確には、番号札  $(n, m)$  が割り振られた客を、 $(2N_{n,m} - 1)$  号室に案内すればよい. ただし、 $N_{n,m}$  は式 (4.1) で定義される自然数である.

以上で正の有理数が割り振られた客全員に部屋を提供することができた. 引き続き、負の有理数が割り振られた客を同様の方法で案内していく. すなわち、既に部屋に案内されている客を偶数番目の部屋に移動させ、負の有理数  $-\frac{n}{m}$  (既約分数) に対応する客を  $(2N_{n,m} - 1)$  号室に案内する. これで、全ての客に部屋を提供することができた.

**日曜日** 今日は日曜日、休日である. しかし、あいにく今日のヒルベルト・ホテルは、全ての客室が空室である. そこに「(0, 1) 観光バス」の団体客が飛び込みでやってきた. (0, 1) 観光バスのそれぞれの客には、0より大きく1より小さい実数

$$0.212, \frac{23}{95}, \frac{\sqrt{2}}{3}, \frac{e^2}{10}, \frac{\pi}{4}, \dots$$

がちょうど1つずつ割り振られている.

**Q.** 全ての客を部屋に案内することができるでしょうか?

実は、ヒルベルト・ホテルが全室空室であったとしても、(0, 1) 観光バスの客全員を部屋に案内することはできない. 以下では、**コントロールの対角線論法**を用いて、なぜ部屋を割り振ることができないのかを説明していく.

0より大きく1より小さい実数を小数として表すと、その整数部分は必ず0であることに注意する. また、例えば、有限小数 0.124 は、

$$0.124 = 0.12399999999999999999999999999999999 \dots$$

のように無限小数の形にしておく. すると、この無限小数としての表示は0より大きく1より小さい各実数に対して一意的となる.

仮に、(0, 1) 観光バスの全ての客を次のように客室に案内することができたとする.

- 1号室: 0.7234502720398023328939047...
- 2号室: 0.3248904023876427982831054...
- 3号室: 0.0962381282500101326508356...
- 4号室: 0.2389573494633791827900615...
- 5号室: 0.5601403590810773492850989...
- 6号室: 0.1242897345863491982749734...
- 7号室: 0.9288948582060200481891289...
- 8号室: 0.1873737337777112490238903...
- 9号室: 0.6089023404233235345342345...
- ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮ ⋮

このとき、各  $i$  号室に案内された客の小数第  $i$  位を順に並べると

$$7, 2, 6, 9, 4, 9, 8, 3, 0, \dots$$

という数列が得られる。この数列の各項を、別の数に書き換える。例えば、偶数の項は 1 に、奇数の項は 2 に書き換える。すると、その結果として次の数列が得られる。

$$2, 1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \dots$$

ここで、この数列の第  $i$  項を小数第  $i$  位に持つ、次のような小数を考える。

$$\alpha = 0.211212121 \dots$$

$\alpha$  は 0 より大きく 1 より小さい実数であるので、 $\alpha$  に対応する  $(0, 1)$  観光バスの客が存在して、いずれかの客室に案内されている。例えば、 $m$  号室に案内されているとする。 $\alpha$  の作り方から、 $\alpha$  と  $m$  号室の小数とは、小数第  $m$  位が異なるので、等しくない。これは矛盾である。よって、 $(0, 1)$  観光バスの全ての客に客室を割り振ることはできないことが証明された。

## 1 週間のまとめ

- 有限個の部屋しか持たない通常のホテルとは違い、無限に多くの部屋を持つヒルベルト・ホテルでは、満室であったとしても新しく来た客に部屋を提供することができる。
- ヒルベルト・ホテルでは、自然数や有理数で番号付けられた客全員に対して、いつでも部屋を提供することができる。

- ヒルベルト・ホテルでは、0 より大きく 1 より小さい実数で番号付けられた客全員に部屋を提供することはできない。

## 参考文献

- [1] 志賀浩二, 数学 30 講シリーズ 3 「集合への 30 講」, 朝倉書店, 1988.
- [2] 大栗博司, 「数学の言葉で世界を見たら -父から娘に贈る数学-」, 幻冬舎, 2015.
- [3] G. Cantor, “Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre”, Jahresbericht der Deutsche Mathematiker Vereinigung, 75-78, 1891.
- [4] D. Hilbert, “Mathematical problems”, Bull. Amer. Math. Soc. **8**, 437-479, 1902.
- [5] K. Gödel, “Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I”, Monatshefte für Mathematik und Physik **38**, 173-198, 1931. [和訳と解説: 林晋, 八杉満利子, 岩波文庫 33-944-1 「ゲーデル 不完全性定理」, 岩波書店, 2006.]
- [6] K. Gödel, “The Consistency of the Continuum-Hypothesis”, Princeton University Press, 1940.
- [7] P. Cohen, “The independence of the continuum hypothesis”. Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America **50**, 1143-1148, 1963.
- [8] W. Wwald and W. Sieg, “David Hilbert’s Lectures on the Foundations of Arithmetics and Logic 1917-1933”, Springer-Verlag, 2013.

(いしい もとひろ)