UDC 517.968

*T. S. POLYANSKAYA, O. O. NABOKA*

# NUMERICAL SOLUTION OF FIRST KIND SINGULAR INTEGRAL EQUATION WITH HILBERT-TYPE MULTIPLE INTEGRAL

In the paper a first kind singular integral equation containing a Hilbert-type double integral over the domain $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$ is studied. The necessary conditions providing solvability of this equation are given. The equation studied is discretized under additional assumptions by the method of discrete singularities. The unique solvability of the discrete problem obtained is proved. The speed of convergence of the solution of the discrete problem to the exact solution of the initial singular integral equation is estimated.

**Key words:** singular integral equation, method of discrete singularities.

*Т. С. ПОЛЯНСЬКА, О. О. НАБОКА*

## ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИНГУЛЯРНОГО ІНТЕГРАЛЬНОГО РІВНЯННЯ ПЕРШОГО РОДУ З КРАТНИМ ІНТЕГРАЛОМ ТИПУ ГІЛЬБЕРТА

Досліджено сингулярне інтегральне рівняння першого роду з подвійним інтегралом типу Гільберта, у випадку, коли областю інтегрування є добуток $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$. Наведено необхідні умови, за яких це рівняння має розв'язок. Проведено дискретизацію рівняння, що вивчається, за додаткових умов на основі метода дискретних особливостей. Доведена однозначна розв'язність дискретної задачі і дана оцінка скорості збіжності розв'язку цієї задачі до точного розв'язку заданого сингулярного інтегрального рівняння.

**Ключові слова:** сингулярне інтегральне рівняння, метод дискретних особливостей.

*Т. С. ПОЛЯНСКАЯ, Е. А. НАБОКА*

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА С КРАТНЫМ ИНТЕГРАЛОМ ТИПА ГИЛЬБЕРТА

Рассмотрено сингулярное интегральное уравнение первого рода с двукратным интегралом типа Гильберта, когда область интегрирования является произведением $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$. Приведены необходимые условия разрешимости этого уравнения. Проведена дискретизация рассматриваемого уравнения с дополнительными условиями на основе метода дискретных особенностей. Доказана однозначная разрешимость дискретной задачи и дана оценка скорости сходимости решения этой задачи к точному решению заданного сингулярного интегрального уравнения.

**Ключевые слова:** сингулярное интегральное уравнение, метод дискретных особенностей.

**Introduction.** It is shown in [1], that the problem of a flow over a rectangular wing can be reduced to a singular integral equation containing a double singular integral. Thus studying such equations is of importance for applications. In the present paper a first kind singular integral equation with a double Hilbert-type integral is solved by the numerical method of discrete singularities.

**Problem setting.** We are looking for the solution $u(\varphi_1,\varphi_2)$ to the following *singular integral equation* (SIE):

$$\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\varphi_1-\theta_1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi_2-\theta_2}{2}u(\varphi_1,\varphi_2)\,d\varphi_1 d\varphi_2+\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}K(\theta_1,\theta_2,\varphi_1,\varphi_2)u(\varphi_1,\varphi_2)\,d\varphi_1 d\varphi_2=g(\theta_1,\theta_2), \quad (1)$$

where $K(\theta_1,\theta_2,\varphi_1,\varphi_2)$ and $g(\theta_1,\theta_2)$ are $2\pi$ – periodic functions belonging to the functional class $C^{\mu,\gamma}$ in each variable uniformly with respect to the other variables. Here $C^{\mu,\gamma}$ stands for the class of $\mu$ times differentiable functions such that their $\mu$ – th derivatives satisfy *the Hilbert condition with the exponent* $\gamma$ $(0<\gamma\le 1)$.

We introduce the operators:

$$(\Gamma_\varphi u)(\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\varphi-\theta}{2}u(\varphi)\,d\varphi,$$

where the integral should be understood in the sense of *the Cauchy principal value* and

$$(Ku)(\theta_1,\theta_2)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}K(\theta_1,\theta_2,\varphi_1,\varphi_2)u(\varphi_1,\varphi_2)\,d\varphi_1 d\varphi_2.$$

Using the operators introduced above equation (1) admits the following representation:

$$\left(\left(\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2}+K\right)u\right)(\theta_1,\theta_2)=g(\theta_1,\theta_2). \quad (2)$$

We introduce two regularization functions for equation (2):

$$h_s(\varphi_s)=\left\{\Gamma_{\theta_s}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[(Ku)(\theta_1,\theta_2)-g(\theta_1,\theta_2)\right]d\theta_r\right\}(\varphi_s), \quad r,s=1,2,\ r\ne s,$$

and a regularization constant:

$$h=-\frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[(Ku)(\theta_1,\theta_2)-g(\theta_1,\theta_2)\right]d\theta_1 d\theta_2.$$

The regularization functions satisfy the additional conditions:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}h_s(\varphi_s)\,d\varphi_s=0,\ \ s=1,2.$$

In case $u(\varphi_1,\varphi_2)$ is a solution to SIE (2), the following conditions hold along this solution: $h_s(\varphi_s)\equiv 0,\ \ s=1,2$, $h=0$, which are the necessary conditions providing solvability of equation (2). Nevertheless, the numerical method can be applied for solving equation (2) only if stricter conditions are imposed. Namely, in what follows we assume that

$$\int_0^{2\pi}K(\theta_1,\theta_2,\varphi_1,\varphi_2)\,d\theta_s\equiv 0,\ \ s=1,2,\qquad \int_0^{2\pi}g(\theta_1,\theta_2)\,d\theta_s\equiv 0,\ \ s=1,2.$$

The operator $\Gamma_\varphi$ satisfies the following property (see [3]): $\Gamma_\varphi:1\to 0$, which implies that

$$\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2}:1\to 0;\qquad \Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2}:x(\varphi_s)\to 0,\ \ s=1,2.$$

In view of this remark, following the ideas of [1], we conclude that to ensure the unique solvability of the standard equation

$$\left(\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2}u\right)(\theta_1,\theta_2)=g(\theta_1,\theta_2)$$

the following conditions are required:

$$\begin{cases}\left(\Gamma_{\varphi_s}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}u(\varphi_1,\varphi_2)\,d\varphi_r\right)(\theta_s)=C_s(\theta_s), & r,s=1,2,\\[2ex] \dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}u(\varphi_1,\varphi_2)\,d\varphi_1 d\varphi_2=C,\end{cases}\tag{3}$$

where $C$ is a known constant, $C_s(\theta_s)\in C^{\mu,\gamma},\ s=1,2$ are known $2\pi-$periodic function satisfying equalities:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}C_s(\theta_s)\,d\theta_s=0,\quad s=1,2.\tag{4}$$

If all the above assumptions hold, then the unique solution to the standard equation is given by the function:

$$u(\varphi_1,\varphi_2)=\left(\Gamma_{\theta_1}\Gamma_{\theta_2}g\right)(\varphi_1,\varphi_2)-\left(\Gamma_{\theta_1}C_1\right)(\varphi_1)-\left(\Gamma_{\theta_2}C_2\right)(\varphi_2)+C\ .$$

Henceforth we assume that SIE (2) admits the unique solution $u(\varphi_1,\varphi_2)$ satisfying additional conditions (3).

**Regularization and discretization of given equation.** Let $\varphi_k^{(n)},\ k=\overline{0,2n}$ be the points of the unit circle centered at the origin dividing this circle into $2n+1$ equal arcs, and the points $\varphi_{0j}^{(n)}$ be the centers of the corresponding arcs $\varphi_j^{(n)}\ \varphi_{j+1}^{(n)},\ \ j=\overline{0,2n}$, $\left(\varphi_{2n+1}^{(n)}=\varphi_0^{(n)}\right)$.

We introduce the notations for two trigonometric interpolation polynomials:

$$\left(P_n^{(1)}f\right)(\varphi)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}f\left(\varphi_k^{(n)}\right)\frac{\sin\left[\frac{2n+1}{2}\left(\varphi-\varphi_k^{(n)}\right)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}\left(\varphi-\varphi_k^{(n)}\right)\right]},$$

and

$$\left(P_n^{(2)}f\right)(\varphi)=\frac{1}{2n+1}\sum_{j=0}^{2n}f\left(\varphi_{0j}^{(n)}\right)\frac{\sin\left[\frac{2n+1}{2}\left(\varphi-\varphi_{0j}^{(n)}\right)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}\left(\varphi-\varphi_{0j}^{(n)}\right)\right]}.$$

According to the method of discrete singularities, the solution $u_{\overline{n}}(\varphi_1,\varphi_2)\equiv\left(P_{n_1\varphi_1}^{(1)}P_{n_2\varphi_2}^{(1)}u_{\overline{n}}\right)(\varphi_1,\varphi_2)$, $\overline{n}=(n_1,n_2)$ to problem (2), (3) approximating the exact solution $u(\varphi_1,\varphi_2)$ to initial problem (1) is found by solving the following SIE:

$$\left(\left(\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2}+K_{\bar n}\right)u_{\bar n}\right)(\theta_1,\theta_2)+\sum_{s=1}^{2}\left(\Gamma_{\varphi_s}h_{s\bar n}\right)(\theta_s)+h_{\bar n}=\left(P^{(2)}_{n_1\theta_1}P^{(2)}_{n_2\theta_2}g\right)(\theta_1,\theta_2) \qquad (5)$$

supplemented by the conditions:

$$\begin{cases}\left(\Gamma_{\varphi_s}\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}u_{\bar n}(\varphi_1,\varphi_2)\,d\varphi_r\right)(\theta_s)+h_{C_s\bar n}=\left(P^{(2)}_{n_s}C_s\right)(\theta_s), \quad r,\ s=1,2, \quad r\neq s,\\ \dfrac{1}{(2\pi)^2}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}u_{\bar n}(\varphi_1,\varphi_2)\,d\varphi_1 d\varphi_2=C,\\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}h_{s\bar n}(\varphi_s)\,d\varphi_s=0, \quad s=1,2.\end{cases} \qquad (6)$$

Here $K_{\bar n}(\theta_1,\theta_2,\varphi_1,\varphi_2)=\left(P^{(2)}_{n_1\theta_1}P^{(2)}_{n_2\theta_2}P^{(1)}_{n_1\varphi_1}P^{(1)}_{n_2\varphi_2}K\right)(\theta_1,\theta_2,\varphi_1,\varphi_2)$; $h_{s\bar n}(\varphi_s)$, $s=1,2$ and $h_{\bar n}$ are accordingly the regularization functions and regularization constant for the following SIE:

$$\left(\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2}+K_{\bar n}\right)u_{\bar n}=P^{(2)}_{n_1\theta_1}P^{(2)}_{n_2\theta_2}g; \quad h_{C_s\bar n}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(P^{(2)}_{n_s}C_s\right)(\theta_s)\,d\theta_s, \ s=1,2$$

are regularization corrections which are due to the fact that in general $\left(P^{(2)}_{n_s}C_s\right)(\theta_s)$, $s=1,2,$ do not satisfy conditions (4).

Considering system of equations (5), (6) at the points $\theta_s=\varphi^{(n_s)}_{0j_s}$, $j_s=\overline{0,2n_s}$, $s=1,2$ and computing the integrals using quadrature formulas (see [3]), we arrive at the following system of linear algebraic equations (SLAE) with respect to the variables $u_{\bar n}\left(\varphi^{(n_1)}_{i_1},\varphi^{(n_2)}_{i_2}\right)$, $i_s=\overline{0,2n_s}$, $s=1,2$; $h_{C_s\bar n}$, $s=1,2$; $h_{\bar n}$; $h_{s\bar n}\left(\varphi^{(n_s)}_{i_s}\right)$, $i_s=\overline{0,2n_s}$, $s=1,2$:

$$\begin{cases}\dfrac{1}{(2n_1+1)(2n_2+1)}\displaystyle\sum_{i_1=0}^{2n_1}\sum_{i_2=0}^{2n_2}\left[\operatorname{ctg}\frac{\varphi^{(n_1)}_{i_1}-\varphi^{(n_1)}_{0j_1}}{2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi^{(n_2)}_{i_2}-\varphi^{(n_2)}_{0j_2}}{2}+K\left(\varphi^{(n_1)}_{0j_1},\varphi^{(n_2)}_{0j_2},\varphi^{(n_1)}_{i_1},\varphi^{(n_2)}_{i_2}\right)\right]\times\\ \times u_{\bar n}\left(\varphi^{(n_1)}_{i_1},\varphi^{(n_2)}_{i_2}\right)+\displaystyle\sum_{s=1}^{2}\frac{1}{2n_s+1}\sum_{i_s=0}^{2n_s}\operatorname{ctg}\frac{\varphi^{(n_s)}_{i_s}-\varphi^{(n_s)}_{0j_s}}{2}h_{s\bar n}\left(\varphi^{(n_s)}_{i_s}\right)+h_{\bar n}=g\left(\varphi^{(n_1)}_{0j_1},\varphi^{(n_2)}_{0j_2}\right),\\ j_1=\overline{0,2n_1}, \quad j_2=\overline{0,2n_2},\\ \dfrac{1}{(2n_1+1)(2n_2+1)}\displaystyle\sum_{i_1=0}^{2n_1}\sum_{i_2=0}^{2n_2}\operatorname{ctg}\frac{\varphi^{(n_s)}_{i_s}-\varphi^{(n_s)}_{0j_s}}{2}u_{\bar n}\left(\varphi^{(n_1)}_{i_1},\varphi^{(n_2)}_{i_2}\right)+h_{C_s\bar n}=C_s\left(\varphi^{(n_s)}_{0j_s}\right),\\ i_s=\overline{0,2n_s}, \quad s=1,2,\\ \dfrac{1}{(2n_1+1)(2n_2+1)}\displaystyle\sum_{i_1=0}^{2n_1}\sum_{i_2=0}^{2n_2}u_{\bar n}\left(\varphi^{(n_1)}_{i_1},\varphi^{(n_2)}_{i_2}\right)=C,\\ \dfrac{1}{2n_s+1}\displaystyle\sum_{i_s=0}^{2n_s}h_{s\bar n}\left(\varphi^{(n_s)}_{i_s}\right)=0, \quad s=1,2.\end{cases} \qquad (7)$$

In (7) $u_{\bar n}\left(\varphi^{(n_1)}_{i_1},\varphi^{(n_2)}_{i_2}\right)$, $i_s=\overline{0,2n_s}$, $s=1,2$ stand for the values of the unknown function $u_{\bar n}(\varphi_1,\varphi_2)$ at the interpolation nodes. In case these values are known, then

$$u_{\bar n}(\varphi_1,\varphi_2)=\frac{1}{(2n_1+1)(2n_2+1)}\sum_{i_1=0}^{2n_1}\sum_{i_2=0}^{2n_2}u_{\bar n}\left(\varphi^{(n_1)}_{i_1},\varphi^{(n_2)}_{i_2}\right)\frac{\sin\left[\frac{2n_1+1}{2}\left(\varphi_1-\varphi^{(n_1)}_{i_1}\right)\right]\sin\left[\frac{2n_2+1}{2}\left(\varphi_2-\varphi^{(n_2)}_{i_2}\right)\right]}{\sin\left[\frac{1}{2}\left(\varphi_1-\varphi^{(n_1)}_{i_1}\right)\right]\sin\left[\frac{1}{2}\left(\varphi_2-\varphi^{(n_2)}_{i_2}\right)\right]}.$$

We note that the regularization unknowns $h_{C_s\bar n}$, $s=1,2$; $h_{\bar n}$; $h_{s\bar n}\left(\varphi^{(n_s)}_{i_s}\right)$, $i_s=\overline{0,2n_s}$, $s=1,2$ were introduced by *I. K. Lifanov*, [4]. Apparently the number of equations in SLAE (7) equals the number of its unknowns.
SLAE (7) admits a unique solution if and only if problem (5), (6) does.

**Proof of solvability.** In order to prove the unique solvability of problem (5), (6) we consider an equivalent problem with homogeneous additional conditions. After introducing a new unknown function $v(\varphi_1, \varphi_2) = u(\varphi_1, \varphi_2) + y(\varphi_1, \varphi_2)$, where

$$y(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{s=1}^{2} \left(\Gamma_{\theta_s} C_s\right)(\varphi_s) - C,$$

equation (2) and conditions (3) become respectively:

$$\left(\left(\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2} + K\right)v\right)(\theta_1, \theta_2) = f(\theta_1, \theta_2) \quad (8)$$

and

$$\begin{cases} \left(\Gamma_{\varphi_s} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} v(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_r\right)(\theta_s) = 0, \ \ r, s = 1, 2, \ \ r \neq s, \\ \dfrac{1}{(2\pi)^2} \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} v(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1 d\varphi_2 = 0, \end{cases} \quad (9)$$

where $f(\theta_1, \theta_2) = g(\theta_1, \theta_2) + (Ky)(\theta_1, \theta_2)$. Apparently, for equation (8) the following conditions hold:

$$\int_0^{2\pi} K(\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2)\, d\theta_s \equiv 0, \ \ s = 1, 2, \qquad \int_0^{2\pi} f(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_s \equiv 0, \ \ s = 1, 2. \quad (10)$$

We introduce special functional spaces in which our operators are defined. Denote:

$L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}$ – the Hilbert space of the functions of two variables with the scalar product defined by the formula:

$$(x, y)_{L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}} = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} x(\varphi_1, \varphi_2)\, \overline{y}(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1 d\varphi_2;$$

$L^{2,0}_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}$ – a subspace of $L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}$ consisting of the functions satisfying (9).

In view of conditions (9), (10), equation (8) can be considered in the pair of spaces

$$\left(L^{2,0}_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}, L^{2,0}_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}\right), \quad (11)$$

in which the operator $\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2}$ is continuously invertible. Then the assumption about the unique solvability of problem (2), (3) implies the continuous invertibility of the operator $\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2} + K$ in the pair of spaces (11).

Consider $w(\theta_1, \theta_2) \in L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}$, $e(\theta_1, \theta_2) \equiv 1$. Define the regularized function $w^R(\theta_1, \theta_2) \in L^{2,0}_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}$ by the relation:

$$w^R(\theta_1, \theta_2) = w(\theta_1, \theta_2) + \sum_{\substack{r,s=1 \\ r \neq s}}^{2} \left\{\Gamma_{\psi_s}\left[\left(\Gamma_{\theta_r} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} w(\theta_1, \theta_2)\, d\theta_s\right)(\psi_r)\right]\right\}(\theta_r) - -\frac{1}{(2\pi)^2}(w, e)_{L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}}.$$

The approximate solution $v_{\overline{n}}(\varphi_1, \varphi_2) \equiv \left(P^{(1)}_{n_1\varphi_1} P^{(1)}_{n_2\varphi_2} v_{\overline{n}}\right)(\varphi_1, \varphi_2)$ to problem (8), (9) is determined by the following SIE:

$$\left(\left(\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2} + K^R_{\overline{n}}\right)v_{\overline{n}}\right)(\theta_1, \theta_2) = f^R_{\overline{n}}(\theta_1, \theta_2), \quad (12)$$

supplemented by the additional conditions:

$$\begin{cases} \left(\Gamma_{\varphi_s} \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} v_{\overline{n}}(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_r\right)(\theta_s) = 0, \ \ r, s = 1, 2, \ \ r \neq s, \\ \dfrac{1}{(2\pi)^2} \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} v_{\overline{n}}(\varphi_1, \varphi_2)\, d\varphi_1 d\varphi_2 = 0. \end{cases} \quad (13)$$

In (12) $f^R_{\overline{n}}(\theta_1, \theta_2)$ is the regularization of the function $f_{\overline{n}}(\theta_1, \theta_2)$:

$$f_{\overline{n}}(\theta_1, \theta_2) = \left(P^{(2)}_{n_1\theta_1} P^{(2)}_{n_2\theta_2} g\right)(\theta_1, \theta_2) + \left(K_{\overline{n}} y_{\overline{n}}\right)(\theta_1, \theta_2), \ \ y_{\overline{n}}(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_{s=1}^{2}\left[\Gamma_{\theta_s}\left(P^{(2)}_{n_s} C_s\right)\right](\varphi_s) - C,$$

and the kernel $K_{\overline{n}}(\theta_1, \theta_2, \varphi_1, \varphi_2)$ is regularized in the variables $\theta_1, \theta_2$.

Regularization in the left- and right-hand parts of equation (12) enables us to consider it in the pair of spaces (11), which implies that the necessary solvability conditions are satisfied. Moreover, regularization brings the regularization variables about.

If $v_{\bar n}(\varphi_1,\varphi_2)$ is the unique solution to problem (12), (13), then $u_{\bar n}(\varphi_1,\varphi_2)=v_{\bar n}(\varphi_1,\varphi_2)-y_{\bar n}(\varphi_1,\varphi_2)$ is the unique solution to problem (5), (6), hence, SLAE (7) admits a unique solution.

Regularizing equation (12) as defined above, we arrive at the equation equivalent to SIE (12):

$$\left(\left(\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2}+K_{\bar n}\right)v_{\bar n}\right)(\theta_1,\theta_2)+\sum_{s=1}^{2}\left(\Gamma_{\varphi_s}h_{s\bar n}\right)(\theta_s)+h_{\bar n}=\left(P^{(2)}_{n_1\theta_1}P^{(2)}_{n_2\theta_2}f\right)(\theta_1,\theta_2),$$

where $h_{s\bar n}(\varphi_s)$, $s=1,2$ and $h_{\bar n}$ are respectively the regularization functions and regularization constant for the SIE

$$\left(\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2}+K_{\bar n}\right)v_{\bar n}=P^{(2)}_{n_1\theta_1}P^{(2)}_{n_2\theta_2}f\,.$$

Being invariant with respect to the change of the unknown function in the equation, they are the same as the regularization functions and regularization constant for the SIE

$$\left(\Gamma_{\varphi_1}\Gamma_{\varphi_2}+K_{\bar n}\right)u_{\bar n}=P^{(2)}_{n_1\theta_1}P^{(2)}_{n_2\theta_2}g.$$

Let the space $\Phi^0_{\bar n}\subset L^{2,0}_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}$ consist of trigonometric polynomials of order not greater than $n_1$ in $\varphi_1$, and $n_2$ in $\varphi_2$, satisfying conditions (13). We consider equation (12) in the pair of spaces

$$\left(\Phi^0_{\bar n},\Phi^0_{\bar n}\right). \tag{14}$$

We prove that equation (12) admits a unique solution in the pair of spaces (14) for $n=\min\{n_1,n_2\}$ sufficiently large.

By *Jackson's theorem* and properties of interpolation polynomials, [5], it can be proved that for $n>\mu$ the following estimates hold (see, for example, [2]):

$$\left\|\left(K-K^R_{\bar n}\right)v_{\bar n}\right\|_{L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}}\le C(K)\cdot\varepsilon_{\bar n}(K)\cdot\left\|v_{\bar n}\right\|_{L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}},\ \text{ where }\ \varepsilon_{\bar n}(K)=\mathcal{O}\left(n^{-\mu-\gamma}\right)\ \text{ for }\ n\to\infty,$$

$$\left\|f-f^R_{\bar n}\right\|_{L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}}\le D(f)\cdot\omega_{\bar n}(f),\ \text{ where }\ \omega_{\bar n}(f)=\mathcal{O}\left(n^{-\mu-\gamma}\right)\ \text{ for }\ n\to\infty,$$

$C(K)$ и $D(f)$ are constants independent of $\bar n$.

The above estimates imply (see [6]), that there exists $N>\mu$ such that for $n>N$ equation (12) admits a unique solution $v_{\bar n}(\varphi_1,\varphi_2)$ in the pair of spaces (14), and if $v(\varphi_1,\varphi_2)$ is the solution to equation (8) in the pair of spaces (11), then

$$\left\|v-v_{\bar n}\right\|_{L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}}\le\alpha_{\bar n},$$

where $\alpha_{\bar n}=\mathcal{O}\left(n^{-\mu-\gamma}\right)$ for $n\to\infty$.

Hence, for $n>N$ SIE (5) supplemented by additional conditions (6) has the unique solution $u_{\bar n}(\varphi_1,\varphi_2)$. If $u(\varphi_1,\varphi_2)$ is the solution to problem (2), (3), then

$$\left\|u-u_{\bar n}\right\|_{L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}}\le\beta_{\bar n},$$

where $\beta_{\bar n}=\mathcal{O}\left(n^{-\mu-\gamma}\right)$ for $n\to\infty$.

Moreover, for the regularization unknowns the following estimates hold:

$$\left|h_{C_s\bar n}\right|\le\delta_{n_s}(C_s)=\mathcal{O}\left(n^{-\mu-\gamma}\right)\ \text{ for }\ n\to\infty,\ s=1,2;$$

$$\left|h_{\bar n}\right|\le\frac{1}{2\pi}\nu_{\bar n};\quad \left\|h_{s\bar n}\right\|_{L^2_{[0,2\pi]}}\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\nu_{\bar n},\ s=1,2,$$

where $\nu_{\bar n}=\left\|(Ku-g)-\left(K_{\bar n}u_{\bar n}-P^{(2)}_{n_1\theta_1}P^{(2)}_{n_2\theta_2}g\right)\right\|_{L^2_{[0,2\pi]\times[0,2\pi]}}=\mathcal{O}\left(n^{-\mu-\gamma}\right)$ for $n\to\infty$.

**Conclusions.** The metod of discrete singularities is applied for setting up a system of linear algebraic equations approximating the first kind singular integral equation with double Hilbert-type integral over the domain $[0,2\pi]\times[0,2\pi]$. It is proved that under additional smoothness assumptions on the right-hand part and the kernel of the regular part of this singular integral equation the system of linear algebraic equations obtained admits a unique solution. Moreover, the rate of convergance of the approximate solution to the exact one is estimated.

**Bibliography**

1. *Лифанов И. К.* О произведении одномерных сингулярных интегральных операторов // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – Харьков : Изд. ХГУ, 1984. – Вып. 42. – С. 67 – 71.
2. *Гандель Ю. В.*, *Полянская Т. С.* Математические вопросы метода дискретних зарядов. Учеб. пособие. Ч. I. – Харьков : Изд. ХГУ, 1991. – 67 с.
3. *Гандель Ю. В.* Лекции о численных методах для сингулярных интегральных уравнений. Учеб. пособие. Ч. 1. – Харьков : Изд. ХНУ им. В. Н. Каразина, 2001. – 92 с.
4. *Лифанов И. К.* О некорректности и регуляризации численного решения сингулярных интегральных уравнений первого рода // *ДАН СССР*. – 1980. – Т. 255. – № 5. – С. 1046 – 1050.
5. *Натансон И. П.* Конструктивная теория функций. – М. – Л. : ГТТИ, 1949. – 688 с.
6. *Габдулхаев Б. Г.* Оптимальные аппроксимации решений линейных задач. – Казань : Изд. Казанск. ун-та, 1980. – 231с.

**References (transliterated)**

1. Lifanov I. K. O proizvedenii odnomernykh singulyarnykh integral'nykh operatorov [On the product of one dimensional singular integral equations]. *Teoriya funktsiy, funktsional'nyy analiz i ikh prilozheniya* [Theory of functions, functional analysis, and their applications]. Kharkov, Kharkov State University Publishing, 1984, vol. 42, pp. 67–71.
2. Gandel Y. V., Polyanskaya T. S. *Matematicheskiye voprosy metoda diskretnikh zaryadov. Ucheb. posobiye. Ch. I* [Mathematical problems of the method of discrete charges.Tutorial.Part I]. Kharkov, Kharkov State University Publ., 1991. 67 p.
3. Gandel Y. V. *Lekzii o chislennykh metodakh dlya singulyarnykh integralnykh uravneniy. Ucheb.posobie. Ch.I* [Lectures on numerical methods for singular integral equations. Textbook. Part I]. Kharkov, V. N. Karazin Kharkov National University Publ., 2001. 92 p.
4. Lifanov I. K. O nekorrektnosti i regulyarizatsii chislennogo resheniya singulyarnykh integral'nykh uravneniy pervogo roda [On ill-posedness and regularization of numeriacal solution to first kind singular integral equation]. *Doklady Akademii nauk SSSR* [Reports of the Academy of Science of the USSR]. 1980, vol. 255, no. 5, pp. 1046–1050.
5. Natanson I. P. *Konstruktivnaya teoriya funktsiy* [Constructive theory of functions]. Moscow – Leningrad, State Publishing of Technical and Theoretical Literature (GTTI), 1949. 688 p.
6. Gabdulkhaev B. G. *Optimal'nye approksimazii resheniy lineynykh sadach* [Optimal approximation of solutions to linear problems]. – Kazan, Kazan. University Publ., 1980. 231 p.


*Received (поступила) 06. 09.2018*


Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

***Полянська Тетяна Семенівна (Полянская Татьяна Семеновна, Polyanskaya Tatyana Semenovna)*** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (093) 921-97-17; e-mail: tpolyanskaya1@gmail.com.

***Набока Олена Олексіївна (Набока Елена Алексеевна, Naboka Olena Oleksiyivna)*** – кандидат фізико-математичних наук, старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (097) 961-81-16; e-mail: lena622651@gmail.com.


УДК 621.923

***В. И. ПОЛЯНСКИЙ***

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ УПРУГИМИ ПЕРЕМЕЩЕНИЯМИ ПРИ МЕХАНИЧЕСКОЙ ОБРАБОТКЕ

На основе разработанной математической модели управления упругими перемещениями при механической обработке показано, что с точки зрения повышения производительности и точности размера обработки при точении с низкой жесткостью технологической системы целесообразно съем припуска производить за один проход инструмента или использовать упругую схему шлифования с фиксированным радиальным усилием. Для достижения высокой точности формы обрабатываемой поверхности и повышения производительности обработки необходимо съем припуска производить по схемам многопроходной обработки абразивными и лезвийными инструментами. Аналитически установлена эффективность применения в этом случае лезвийной обработки, в особенности инструментами из синтетических сверхтвердых материалов, обеспечивающих снижение интенсивности трения в зоне резания и соответственно повышение точности и производительности обработки по сравнению с процессом шлифования.

**Ключевые слова:** упругое перемещение, технологическая система, точность обработки, производительность обработки, точение, шлифование, инструмент, трение.

***В. І. ПОЛЯНСЬКИЙ***

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ УПРАВЛІННЯ ПРУЖНИМИ ПЕРЕМІЩЕННЯМИ ПРИ МЕХАНІЧНІЙ ОБРОБЦІ

На основі розробленої математичної моделі управління пружними переміщеннями при механічній обробці показано, що з точки зору підвищення продуктивності та точності розміру обробки при точінні з низькою жорсткістю технологічної системи доцільно зняття припуску здійснювати за один прохід інструменту або використовувати пружну схему шліфування з фіксованим радіальним зусиллям. Для досягнення високої точності форми оброблюваної поверхні та підвищення продуктивності обробки необхідно зняття припуску здійснювати за схемами багатопрохідної обробки абразивними та лезовими інструментами. Аналітично встановлено ефективність застосування в цьому випадку лезової обробки, особливо інструментами з синтетичних надтвердих матеріалів, що забезпечують зниження інтенсивності тертя в зоні різання й відповідно підвищення точності та продуктивності обробки порівняно з процесом шліфування.

**Ключові слова:** пружне переміщення, технологічна система, точність обробки, продуктивність обробки, точіння, шліфування, інструмент, тертя.