

12. Volkonskiy V. A., Kuzovkin A. I., Pomanskiy A. B. (1986): Ob opredelenii differentsirovannykh po vremeni tarifov na energiyu i uslugi [On determining time-differentiated power and service prices]. *Ekonomika i mat. metody* [Economics and mathematical methods]. 1986, vol. XX II, no. 1.
13. Schweppe F. C., Caramanis M. C. *Spot Pricing of Electricity*. Norwell, Kluwer Academic Publishers, 1988. 355 p.
14. Stoft S. Transmission Pricing in Zones : Simple or Complex? *The Electricity Journal*. 1997, vol. 10, no. 1, pp. 24–31.
15. Hogan W. W. Getting the Prices Right in PJM : What the Data Teaches Us. *The Electricity Journal*. 1998, vol. 11, no. 7, pp. 61 – 67.
16. Hogan W. W. Nodes and Zones in Electricity Markets : Seeking Simplified Congestion Pricing. In : *Defining Competitive Electricity Markets*. Hung-po Chao, Huntington H.G. (eds.). Norwell : Kluwer Academic Publishers. 1998, pp. 33–62.
17. Cramton P., Wilson R. A Review of ISO New England's Proposed Market Rules. MDI Report for ISO New England, September 9, 1998. 41 p. Available at : [ftp://cramton.umd.edu/papers1995-1999/98mdi-iso-ne-markets-review.pdf](http://cramton.umd.edu/papers1995-1999/98mdi-iso-ne-markets-review.pdf). (accessed 10.10.2018).
18. Alekseev V. I., Gnativ B. V., Kavalets' I. I., Kostrobiiy P. P., Alekseev I. V., Khoma I. B. Uzagal'nena model' oligopoliiy Kurno – Pu ta stiykist' yiyi tochky rivnovagy pp. 51–70. – Matematichni modeli reguluyannya finansovykh potokiv. Monografiya [Cournot – Pu generalized oligopoly model and stability of its equilibrium point: monograph]. Lviv, "Rastr – 7" publ., 2012. 134 p.
19. Lu Y. L. Analysis of Duopoly Output Game With Different Decision-Making Rules. *Management Science and Engineering*. 2015, no. 9 (1), pp. 1–6.
20. Pu Xiaoson, Ma Junhai. Chaos Control on the Nonlinear Triopoly Model with Different Expectations. *JCIT : Journal of Convergence Information Technology*. 2012, vol. 7, no. 3, pp. 192–198.
21. Ma Junhai, Hongliang Tu. Complexity of a Duopoly Game in the Electricity Market with Delayed Bounded Rationality. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. Volume 2012, Article ID 698270. 13 pages. DOI: 10.1155/2012/698270.
22. Ayzenberg N. I., Kiselyova M. A. Modeli nesovershennoy konkurentsii primenitel'no k analizu elektroenergeticheskogo rynka Sibiri [Imperfect competition models for analyzing Siberian electricity and power market]. *Stokhasticheskoe programirovanie i ego prilozheniya* [Stochastic programming and applications]. Irkutsk, 2012, pp. 186–216.
23. Dyusushe O. M. Statichnoe ravновesie Kurno – Nyeshia i refleksivnye igry oligopolii : sluchay lineynykh funktsiy sprosa i izderzhkek [Cournot – Nash static equilibrium and reflexive oligopoly games: case of linear demand and expense]. *Ekonomicheskii zhurnal Vysshey shkoly ekonomiki* [Economic journal of Higher Economics School]. 2006, vol. 10, no. 1, pp. 3–32.
24. Du J. G., Huang T. W., Sheng Z. H., Zhang H. B. A new method to control chaos in an economic system. *Applied Mathematics and Computation*. 2010, no. 217, pp. 2370–2380.
25. Zorkal'tsev V. I., Mokryy I. V. Imitatsionnaya model' povedeniya odnoproductovogo rynka [Imitational model of behavior of single-product market]. *Stokhasticheskoe programirovanie i ego prilozheniya* [Stochastic programming and applications]. Irkutsk, 2012, pp. 370–380.
26. Lyubchik L. M., Shpatenko S. A. Analiz dinamicheskikh modeley energorynka metodom razdeleniya dvizheniya [Analysis of power market dynamic model by separation of movements]. *Vestnik NTU "KhPI" : sb. nauch. tr. Temat. vyp. : Sistemyy analiz, upravlenie i informatsionnye tekhnologii* [Bulletin of NTU "KhPI": collection of scientific works, special issue: System analysis, control, and information technologies]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2009. no. 10, pp. 117–120.
27. May R. Time-delay versus stability in population models with two and three trophic levels. *Ecology*. 1973, no. 54, pp. 315–325.

Надійшла (received) 27.10.2018

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Гомозов Євген Павлович (Гомозов Евгений Павлович, Gomozov Yevgen Pavlovich)** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 514-01-33; e-mail: kayaker0011@gmail.com.

**Заїка Тетяна Сергіївна (Заика Татьяна Сергеевна, Zaika Tatyana Sergeevna)** – асистент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (097) 655-39-28; e-mail: zaika.tats@gmail.com.

УДК 519.6

**Е. П. ГОМОЗОВ, М. В. МЕЗЕРНАЯ**

#### СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ

Приведен обзор существующих на сегодняшний день моделей функционирования финансового рынка. Однако, в силу сложного устройства современного глобального финансового рынка, неоднородной структуры имеющихся финансовых инструментов и трейдеров, использующих разные подходы и временные горизонты, прогнозы, как правило, требуют большого количества наблюдений, плохо работают в окрестностях бифуркаций и не имеют компьютерной модели, которая могла бы строить прогнозы в режиме реального времени. В работе сделан первый шаг по построению комбинированной модели динамического управления портфелем активов.

**Ключевые слова:**  $p$  – адические модели финансового рынка, уравнения в дробных производных, динамическое управление портфелем активов.

**Є. П. ГОМОЗОВ, М. В. МЕЗЕРНА**

#### СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ДИНАМІЧНОГО УПРАВЛІННЯ ПОРТФЕЛЕМ ФІНАНСОВИХ АКТИВІВ

Надано огляд існуючих на сьогоднішній день моделей функціонування фінансового ринку. Однак, через складний устрій сучасного глобального ринку, неоднорідну структуру фінансових інструментів, що використовуються, трейдерів, які мають різні погляди та різні часові горизонти, прогнози зазвичай потребують великої кількості спостережень, погано працюють в околі біфуркацій і не мають комп'ютерної моделі, яка мала б змогу робити прогнози у режимі реального часу. В роботі зроблено перший крок у побудованні комбінованої моделі динамічного керування портфелем активів.

**Ключові слова:**  $p$  – одичні моделі фінансового ринку, рівняння у дробових похідних, динамічне управління портфелем активів.

© Е. П. Гомозов, М. В. Мезерная, 2018

E. P. GOMOZOV, M. V. MEZERNA

## MODERN PROBLEMS OF DYNAMIC MANAGEMENT OF A PORTFOLIO OF FINANCIAL ASSETS

An overview of the present models of functioning of the financial market is provided. However, owing to the complex device of the modern global financial market, a heterogeneous structure of existing financial instruments, and traders using different approaches and time horizons, predictions require typically a large number of observations, work poorly in the vicinity of bifurcations, and don't have computer models that could build forecasts in real time. The work done is, as we see it, the first step to build a "synthetic" dynamic portfolio management model.

**Key words:**  $p$  – adic financial market models, equations in fractional derivatives, dynamic portfolio management.

**Введение и краткий обзор литературы по теме исследования.** Приведем определения базовых финансовых понятий. Под *инвестированием* в широком смысле понимается любой процесс, имеющий целью сохранение и увеличение стоимости денежных или других средств. Средства, предназначенные для инвестирования, представляют собой *инвестиционный капитал*. С течением времени этот капитал может принимать различные конкретные формы. Тот или иной конкретный вид инвестиционного капитала называется *инвестиционным активом*. Важнейший принцип инвестирования состоит в том, что стоимость актива меняется со временем. Время, на которое инвестор вкладывает инвестиционный капитал, называется *инвестиционным горизонтом*. При этом, хотя инвестиционный капитал имеет вполне определенную стоимость в начальный момент времени, его будущая стоимость в этот момент неизвестна.

Инвесторы, которые стараются выиграть за счет изменения биржевых курсов активов, называются *спекулянтами*. Спекулянты с коротким инвестиционным горизонтом называются *скальперами*. Предполагается, что инвесторы принимают решения в координатах *риск – доходность*.

Исходя из приведенных выше подходов, возникла так называемая *портфельная теория Марковица*, которая предполагает, что рынок имеет вероятностную природу, стоимость активов и их доходности – это случайные величины, а риск изменения доходности – суть среднее квадратичное отклонение случайной величины *доходность*. Под *портфелем* понимается некая совокупность активов, выступающая как целостный объект управления. Математическая модель портфеля – это вероятностный вектор

$$(x_1, x_2, \dots, x_n)^T,$$

где  $n$  – число активов в портфеле;  $x_i$  – доля инвестиции в  $i$  – тый актив;  $T$  – знак транспонирования.

В теории Марковица все  $x_i$  неотрицательны, в *теории Блека* – любые числа (причём отрицательность числа означает, что для приобретения данного актива использовались заемные средства). Сумма всех  $x_i$  равна единице. Такая диверсификация активов позволяет улучшить соотношение риск/доходность портфеля по отношению к каждому из входящих в портфель активов.

Инвесторов, работающих в рамках указанных выше подходов, принято называть *рациональными*. Инвесторов, которые способствуют надуванию так называемых *мыльных пузырей* финансового рынка, принято называть *шумовыми*. Например, рынок *криптовалют* – это рынок «шумовых» инвесторов; они же, в значительной мере, отвечают за финансовые крахи фондовых рынков.

*Под динамическим управлением портфелем мы будем понимать изменение его структуры в режиме реального времени для улучшения инвестиционных свойств портфеля.* Классические модели всех портфельных теорий требуют выполнения определенных гипотез для рынка активов.

В работе [1] был приведен краткий обзор основных гипотез функционирования финансовых рынков – *эффективная* (вероятностная) *модель рынка* (ЕМН) и *фрактальная модель рынка* (ФМН), а также основанные на них методы моделирования прогнозов изменения курсов. Как показывают многочисленные исследования, те очень редкие и очень сильные колебания доходности, которые ранее считались несущественными и отбрасывались при проверке распределений на нормальность, на самом деле являются очень важными. Однако, в соответствии с классической теорией ЕМН, рынки должны быть почти всегда равновесны, а постарбитражные модели линейны. ЕМН для производных финансовых инструментов достаточно хорошо моделируется уравнениями типа диффузии и антидиффузии, что означает отсутствие у этой модели *памяти*. Эта модель плохо работает на коротких инвестиционных горизонтах и на таких достаточно экзотических рынках, как рынок криптовалют. Поэтому для прогнозирования курса *биткойна* в работе [1] был использован *метод SSA*, который позволяет строить прогнозы изменения курсов без использования гипотез ЕМН и построения в явном виде модели соответствующего эквидистентного временного ряда.

Модель ФМН создавалась как альтернатива ЕМН. Эта гипотеза придает особое значение влиянию информации и инвестиционным горизонтам в поведении инвесторов. Предполагается, что люди не признают трендов и не реагируют на них до тех пор, пока эти тренды хорошо не установятся, после чего инвесторы принимают то решение, которое обусловлено накопленной (но до этого игнорируемой) информацией. Такое поведение коренным образом отличается от действий рационального инвестора, который, в соответствии с ЕМН, немедленно использует новую информацию для принятия инвестиционных решений. Основными инструментами ФМН служат *фрактальная геометрия* и *теория хаотических систем*. Необходимость в применении теории хаотических систем возникает при анализе финансовых данных за большой период времени.

Были попытки создать новые или модифицированные гипотезы поведения фондовых рынков – *синергетическая модель*, *мультиагентная модель*, *модификация ЕМН* – на основе так называемой *теории игровой вероятности*.

Уже в течение многих лет в финансовом трейдинге используют *нейронные сети* [2]. Современная экономическая практика характеризуется наличием структурно неустойчивых рынков, включенных в качестве узлов в

функционирующую в режиме реального времени сеть мировой экономики. Из теории динамических систем следует, что модель, описывающая такую специфическую систему, должна содержать неустраимые области хаоса. С такими моделями на достаточно длинных инвестиционных горизонтах нейронные сети справляться пока не умеют. Хотя на очень коротких (в пределах от долей секунды до минуты) инвестиционных горизонтах в роли скальперов на *срочных рынках* (то есть рынках, на которых торгуются фьючерсы и опционы), скорее всего, уже выступают боты.

В работе [3] для прогнозирования курса акций использовался классический метод группового учета аргументов (МГУА). На основе МГУА была создана финансово-аналитическая система прогнозирования курсов, которая показала более точные результаты по сравнению с применением для такого же прогнозирования моделей ARIMA и ARFIMA-FIGARCH, причём даже и в «критических» для этих моделей случаях.

В последнее время для прогнозирования на финансовых и фондовых рынках стали использовать методы *p* – адического анализа (смотри, например, работы [4, 5]). В статье [4] рассмотрена иерархическая модель финансового рынка ценных бумаг на временах, предшествующих обвалу рынка. Показано, что в рамках этой модели динамика взаимодействия агентов рынка описывается известным из *p* – адического анализа *модифицированным уравнением Владимирова* [6]. В работе [5] сделано обобщение *иерархической модели Джохансена – Сорнета* [7] на основе введения зависимости степени влияния агентов рынка на основе ультраметрического расстояния между ними.

Следует заметить, что:

- любая из рассмотренных выше математических моделей функционирования рынка инвестиционных активов основана на формализации гипотез о поведении типичного инвестора;
- обычно портфели акций соответствуют так называемому инвестиционному стилю – то есть, в портфель включаются однотипные ценные бумаги;
- традиционно, задачи оптимизации портфеля – это, чаще всего, задачи *квадратичного программирования*, хотя сейчас уже используют и гораздо более сложные модели оптимизации;
- в работе [7] был рассмотрен новый подход к пониманию риска как к вероятности обвала рынка в целом.

В настоящее время *эконофизика*, то есть использование физических моделей для решения финансовых задач, может уже считаться классикой.

**Постановка задачи.** На основе анализа преимуществ и недостатков известных моделей необходимо предложить общий подход к математической формализации финансовых рынков. Используя этот общий подход, целесообразно рассмотреть синтетическую модель динамического управления обобщенным портфелем инвестиционных активов, который содержит акции, фьючерсы, опционы и криптовалюты. Заметим, что в данной работе мы не рассматриваем очень специфический случай деривативов энергорынка.

**Краткий анализ используемых математических моделей.** Следует заметить, что все известные математические формализации функционирования рынка инвестиционных активов используют те или иные модели процессов диффузионного типа в стационарной среде. Однако такие процессы не имеют памяти. Кстати, это их свойство – один из основных постулатов технического анализа. С другой стороны, для прогнозирования курсов используют данные о курсах из прошедших периодов. Это противоречие неявно пытаются снять разными приемами в различных подходах к прогнозированию. Кроме того, в моделях – аналогах рассматривается конкретный рынок конкретных активов, а не реально существующий сейчас глобальный рынок.

**Математическая модель.** В настоящее время следует рассматривать глобальный рынок разнородных активов с практически бесконечным множеством агентов, имеющих разные типы поведения и разные инвестиционные горизонты. Заметим, что до сих пор не исследовались эффекты, связанные с топологическими структурами этого рынка. Во всяком случае, наблюдаемое поведение рынка не укладывается в стандартные гипотезы о независимости случайных величин в уравнениях диффузионного типа. Поэтому, на наш взгляд, следует объединить следующие подходы:

1. Учитывая современное понимание *длинного инвестиционного горизонта*, акции имеют практически бесконечный срок жизни. Следовательно, для инвесторов в акции более значимой проблемой является недетерминированное колебание курсов, а не риск обвала рынка. С этой точки зрения имеет смысл демпфировать колебания курса акций, взятых в качестве базового актива, применением *хедж-опционов* на эти акции. Поэтому, развивая идеи эконофизики, для моделирования глобального рынка акций в координатах риск-доходность имеет смысл применить модифицированные, известные в электрохимии, *модели нестационарной диффузии с эффектом Киркендалля* (с точки зрения финансового рынка, этот эффект описывает процесс взаимодействия базовых активов и опционов с фрактальной доходностью, то есть риски активов демпфируются с помощью хеджирования опционами). То есть это могут быть *модификации второго закона Фика* по следующим направлениям: нелинейные уравнения, фрактальная среда, дробные производные (что придаёт системе *псевдопамять*), *p* – адический анализ для сверхмалых инвестиционных горизонтов.
2. Деривативы имеют средний срок жизни, и, поэтому, для этого рынка также менее значимым, по сравнению с недетерминированностью колебаний курсов, является риск обвала курсов. По-видимому, имеет смысл связать и *фьючерсы* в качестве базового актива, применением хедж-опционов на эти фьючерсы.

Представляется разумным поэтому, следуя идеям, развитым в известной работе [8], использовать модификацию известных уравнений Хатчинсона – Райта.

- Для рынка криптовалют наиболее важен риск обвала рынка, поэтому уместно использовать модификации на основе  $p$ -адического анализа метода SSA для прогнозирования курсов криптовалют и модели Джохансена – Сорнета для прогнозирования рисков обвала рынка.

Для оптимизации портфеля становится целесообразным использование модификаций на основе  $p$ -адического анализа метода МГУА.

**Динамическая модель оценки акции.** Обозначим через  $\mu$  безрисковую ставку доходности; для ее подсчета используется модель *spot rate* для так называемых *оторванных Treasury bill* по программе STRIPS. Пусть, далее,  $D_{a+}^{\alpha}$  – дробная производная Римана – Лиувилля,  $\alpha \in C$ ,  $\operatorname{Re} \alpha$  – индикатор оптимальной длины сканирования ряда [9] для курса акции,  $\operatorname{Im} \alpha$  – дата исполнения хедж-опциона,  $a$  – минимальная цена предложения стоимости акции на продажу в момент покупки хедж-опциона,  $I$  – средневзвешенный курс фондовых индексов основных фондовых бирж мира,  $t$  – время,  $V = V(I, t) \in C$ ,  $\operatorname{Re} V$  – курс акции,  $\operatorname{Im} V$  – цена хедж-опциона, выраженный  $p$ -адическим числом,  $\sigma^2(I)$  – дисперсия,  $D^{\beta}$  – дробная производная Рисса,  $\beta \in R$  – показатель Херста для ряда курса акции, выраженный  $p$ -адическим числом,  $V_I(I, t)$  – частная производная, причём

$$D_{a+}^{\alpha} V(I, t) = -\left(\sigma^2(I)/I^2\right) D^{\beta} \left(I^2 V_I(I, t)\right) - \mu(t) V_I(I, t).$$

В принципе, данная модель также дает возможность прогнозирования точек перелома тренда. При переходе величины  $\mu$  через критическое значение, описываемое моделью бифуркации типа *эффекта Фейгенбаума* могут дать прогноз поведения глобального рынка, который окажется близким к реальному в условиях мирового финансового кризиса.

**Динамическая модель оценки портфеля деривативов.** Мы предполагаем возможность хеджирования рисков резкого изменения цен фьючерсов портфелем фьючерсов и опционов.

Пусть, далее, существуют определяемые эмпирически по временным рядам курсов деривативов параметры управления таким портфелем.

Тогда, следуя идеям, развитым в известной работе [8], и модифицируя полученное там интегро-дифференциальное уравнение типа Хатчинсона – Райта, на основе  $p$ -адического анализа получаем следующую модель оценки портфеля деривативов в виде системы уравнений с использованием дробных производных:

$$D_{a+}^{\gamma} (F) = \lambda F [1 - D^{\alpha} (F)] - \mu F D;$$

$$D_{b+}^{\nu} (O) = -\varepsilon O + \nu O G,$$

где  $\lambda, \mu, \nu, \varepsilon$  – положительные параметры;  $\nu > \varepsilon$ ;  $\mu$  – бифуркационный параметр;  $N$  – значение индекса NASDAQ;  $F(N, t)$  – цена предложения на рынке фьючерсов, выраженный  $p$ -адическим числом;  $O(N, t)$  – цена предложения на рынке опционов, выраженный  $p$ -адическим числом;  $a$  – минимальная цена предложения на продажу на рынке фьючерсов, выраженный  $p$ -адическим числом;  $b$  – минимальная цена предложения на покупку на рынке опционов, выраженный  $p$ -адическим числом;  $D_{a+}^{\gamma}, D_{b+}^{\nu}$  – дробные производные Римана – Лиувилля;  $D^{\alpha}$  – дробная производная Рисса.

Данная модель определяет единственное значение для равновесной цены. Система общего вида не является конечномерной. Однако в специальных случаях модель может быть сведена к системе из четырех обыкновенных дифференциальных уравнений. В этих случаях циклы, рождающиеся при бифуркационном значении  $\lambda_0$  параметра  $\lambda$ , асимптотически орбитально устойчивы.

На основе кросс-секционного анализа фрактальных неквадрантных временных рядов биржевых сделок и использования некоторого аналога для уравнения Хатчинсона – Райта, было получено семейство уравнений в дробных производных с параметрами:

$$0 < \gamma \leq 2, 1 \leq \alpha \leq 2, -1 \leq \nu \leq 1,$$

где  $\alpha$  – дробный порядок производной по пространству;  $\nu$  – угловой коэффициент тренда базового актива;  $\gamma$  – дробный порядок производной по времени.

Дробная производная по пространству возникает в случае фрактальной среды, параметр производной зависит от *размерности Хаусдорфа – Безиковича*.

Дробная производная по времени возникает в первую очередь от неквадрантности указанных выше временных рядов и вычисляется как индикатор оптимальной длины сканирования ряда.

Если  $\alpha = 2$  и  $\gamma = 1$ , и уравнение приобретает вид, близкий к *классическому уравнению Блека – Сколза*. В случае  $1 < \alpha < 2$  цены меняются быстрее, чем по прогнозу классической модели. При  $\alpha = 1$  теоретически должно получаться что-то близкое к *флету*, но на практике этот режим не встречался. Для всякого значения параметра  $\alpha$  различаем в зависимости от параметра  $\gamma$  такие случаи:

- если  $0 < \gamma < 1$  – имеем режим *субантидиффузии*, в котором *показатель Херста* временного ряда дериватива монотонно убывает со временем;

- если  $1 < \gamma < 2$  – имеем режим субантидиффузии, в котором показатель Херста временного ряда дериватива монотонно возрастает со временем;
- если  $\gamma \rightarrow 2$ , то получаем уравнение волнового типа.

**Подход к динамической оценке рынка криптовалют.** Как оказалось (см. [1]), метод SSA хорошо работает на коротких временных горизонтах относительно далеко от момента обвала рынка. Исходя из общего анализа рынка криптовалют и соображений, аналогичных, например, [4], [5], [7], [8], можно предположить следующее: метод SSA для анализа и прогнозирования курсов криптовалют следует модифицировать на основе  $p$ –адического анализа в силу практически мгновенных инвестиционных горизонтов на этих рынках и практически полного отсутствия на них рациональных инвесторов. Это, в частности, означает, что логопериодические модели требуют либо фрактальных реализаций, либо использование комплексных экспонент. Аналогичные требования возникают и к моделям типа Джохансена – Сорнета и их модификациям.

**Управление оптимизацией портфеля активов.** Фактически, предлагаемые нами модели являются продвинутым техническим анализом, в котором устранены все поведенческие подходы и, как следствие, вероятностные модели. Поэтому, применяя некоторую общую идеологию теории динамических систем, мы использовали методы описания недетерминированных процессов без использования стохастических уравнений. Как сказано выше, мы рассматриваем портфельное инвестирование в самом широком смысле, с любым набором активов на глобальном рынке. В силу общих теорий динамических систем, можно предположить влияние самой структуры этого рынка на результаты торгов. Понятно, что бессмысленно строить какие бы то ни было априорные гипотезы о таком влиянии. Требуется большое количество реальных наблюдений и, возможно, создание какой-то новой ветви математики на основе, скажем, *КАМ – теории*. Однако понятно и то, что сейчас для оптимизации портфеля желательно использовать данные, лежащие за пределами чисто технического анализа. Нам представляется, что для использования таких данных в процедуре оптимизации портфеля уместно было бы использовать модификацию метода МГУА на основе теории нечетких множеств.

**Выводы.** Для рынков акций были построены динамические модели с модифицированными уравнениями типа второго закона Фика в дробных производных с использованием  $p$ –адического анализа. Необходимые параметры определяются по данным различных финансовых рынков.

Для рынков деривативов также были построены динамические модели с модифицированными уравнениями типа Хатчинсона – Райта в дробных производных с использованием  $p$ –адического анализа. Необходимые параметры определяются по данным различных финансовых рынков.

Для рынков криптовалют требуются некоторые дополнительные исследования, связанные с задачами модификации на основе  $p$ –адического анализа метода SSA для прогнозирования курсов и модели Джохансена – Сорнета.

Для портфельной оптимизации требуется модификация методов МГУА на основе теории нечетких множеств.

Построенные модели требуют компьютерной реализации, способной работать в режиме реального времени.

В дальнейшем предложенную модель динамического управления портфелем вполне возможно улучшить за счет разработки корректных методов подбора наиболее влияющих на прогноз факторов, а также комбинируя ее с другими методами прогнозирования курсов и точек перелома тренда.

#### Список литературы

1. Гардер С. Е., Гомозов Е. П. Анализ и прогнозирование курсовой стоимости биткойна методом SSA // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – 2018. – № 3 (1279). – С. 31 – 36.
2. Ширяев В. И. Финансовые рынки : Нейронные сети, хаос и нелинейная динамика. Изд. 2, испр. и доп. – М. : Либроком, 2009. – 232 с.
3. Ахизер И. А., Гомозов Е. П. Прогнозирование курса акций на основе МГУА // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Системний аналіз, управління та інформаційні технології. – 2012. – № 30. – С. 15 – 19.
4. Бякулов А. Х., Зубарев А. П., Кайдалова Л. В. Иерархическая динамическая модель финансового рынка вблизи точки обвала и  $p$ –адический математический анализ // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Серія : Физ.-мат. Науки. – 2006. – Вып. 42. – С. 135 – 140.
5. Пивоварова А. С. Моделирование логопериодических колебаний с помощью иерархических структур // Вестник Самарского государственного аэрокосмического университета. – 2012. – № 2 (33). – С. 266 – 273.
6. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И.  $p$ –адический анализ и математическая физика. – М. : Физматлит, 1994. – 352 с.
7. Дидье Сорнетте Как предсказывать крахи финансовых рынков. – М. – 2003. – 394 с.
8. May R. Time-delay versus stability in population models with two and three trophic levels // Ecology. – 1973. – № 54. – pp. 315 – 325.
9. Лебедев А. В., Орлов Ю. Н., Шагов Д. О. Индикатор оптимальной длины сканирования нестационарного временного ряда Препринты ИПМ им. В.М. Келдыша. – 2013. – №17. – 16 с. – Режим доступа : [http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013\\_17](http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013_17). – Дата звертання : 30 вересня 2018.

#### References (transliterated)

1. Garder S. E., Gomozev E. P. Analiz i prognozirovanie kursovoy stoimosti bitcoina metodom SSA [Analysis and prediction of bitcoin rate by SSA method]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Matematychnе modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh* [Bulletin of the National Technical University «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. 2018, no. 3 (1279), pp. 31–36.
2. Shiryaev V. I. *Finansovyye rynki : Neyronnyye seti, khaos i nelineynaya dinamika. Izd. 2, ispr. i dop.* [Financial Markets: Neural Networks, Chaos and Nonlinear Dynamics. 2-nd ed., revised and augmented]. Moscow, Librocom Publ., 2009. 232 p.
3. Akhiezer I. A., Gomozev E. P. Prognozirovanie kursa aktsiy na osnove MGUA [Prediction of stock prices based on MSUA]. *Visnyk NTU «KhPI». Seriya : Systemnyy analiz, upravlinnya ta informaciyini tekhnologiyi* [Bulletin of the National Technical University «KhPI» Series : System analy-

- sis, management and information technologies]. 2012, no. 30, pp. 15–19.
4. Bikulov A. H., Zubarev A. P., Kaydalova L. V. Ierarkhicheskaya dinamicheskaya model' finansovogo rynka vblizi tochki obvala i  $p$ -adicheskiy matematicheskiy analiz [Hierarchical dynamic model of the financial market near the collapse point and  $p$ -adic mathematical analysis]. *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Seriya : Fiz.-mat. Nauki* [Bulletin of the Samara State Technical University Series : Physical and mathematical sciences]. 2006, vol. 42, pp. 135–140.
  5. Pivovarov A. S. Modelirovaniye logoperiodicheskikh kolebaniy s pomoshhyu iyerarkhicheskikh struktur [Modeling log-periodic oscillations using hierarchical structures]. *Vestn. Sam. gos. tekhn. un-ta. Seriya : Fiz.-mat. Nauki* [Bulletin of the Samara State Aerospace University]. 2012, no. 2(33), pp. 266 – 273.
  6. Vladimirov V. S., Volovich I. V., Zelenov E. I.  $p$ -adicheskiy analiz i matematicheskaya fizika [ $p$ -adic analysis and mathematical physics]. Moscow, Fizmatlit Publ., 1994. 352 p.
  7. Didier Sornette. Kak predskazyvat' krakhi finansovykh rynkov [Why Stock Markets Crash]. Moscow, 2003. 394 p.
  8. May R. Time-delay versus stability in population models with two and three trophic levels. *Ecology*. 1973, no. 54, pp. 315–325.
  9. Lebedev A. V., Orlov U. N., Shagov D. O. Indikator optimal' noy dliny skanirovaniya nestacionarnogo vremennogo ryada [Optimal set length indicator for non-stationary time-series]. *Preprinty IPM im. V. M. Keldysha* [Preprints of the Keldysh institute of applied mathematics]. 2013, no. 17. 16 p. Available at : [http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013\\_17](http://library.keldysh.ru/preprint.asp?id=2013_17). (accessed 30.09.2018).

Поступила (received) 12.10.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Гомозов Євген Павлович (Гомозов Евгений Павлович, Gotozov Yevgen Pavlovich)** – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 514-01-33; e-mail: kayaker0011@gmail.com.

**Мезерна Марина Віталіївна (Мезерная Марина Витальевна, Mezerna Maryna Vitalijivna)** – старший викладач, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 386-74-22; e-mail: mezernyy@westron.kharkov.ua.

УДК 629.114.2.073.286

**А. П. КОЖУШКО, О. Л. ГРИГОР'ЄВ**

### **МОДЕЛЮВАННЯ ПОВ'ЯЗАНИХ КОЛИВАНЬ КОЛІСНОГО ТРАКТОРА ТА ЦИСТЕРНИ З РІДИНОЮ НА ПРЯМОМУ ШЛЯХУ ЗІ СКЛАДНИМ РЕЛЬЄФОМ**

Наведено модель коливань колісного трактора та цистерни із рідиною, яка має вільну поверхню. Для перерозподілу рідини у цистерні, що викликаний коливаннями оболонки, використано характеристики поверхневих хвиль Релея. Знайдено спектр частот вільних механічних коливань у дозвуківому діапазоні і проаналізовано відповідні форми взаємопов'язаних рухів елементів трактора та цистерни. Виокремлено групу низькочастотних коливань, шкідливих для здоров'я тракториста, та створено уточнену математичну модель для розрахунку вимушених коливань, що виникають під час довготривалого руху по прямій дорозі. Запропоновано для математичного тестування динамічних якостей транспортного засобу описувати рельєф дороги двома гармоніками – короткою та довгою синусоїдальною хвилею. Розроблено метод визначення довжини короткої хвилі, що призводить до резонансного збільшення амплітуди коливань рідини та кабіни трактора.

**Ключові слова:** колісний трактор, цистерна, вільна поверхня рідини, механічні коливання, спектр частот, власна форма.

**А. П. КОЖУШКО, А. Л. ГРИГОРЬЕВ Я**

### **МОДЕЛИРОВАНИЕ СВЯЗАННЫХ КОЛЕБАНИЙ КОЛЕСНОГО ТРАКТОРА И ЦИСТЕРНЫ С ЖИДКОСТЬЮ НА ПРЯМОЙ ДОРОГЕ СО СЛОЖНЫМ РЕЛЬЕФОМ**

Описана модель колебаний колесного трактора и цистерны с жидкостью, имеющей свободную поверхность. Для перераспределения жидкости в цистерне, вызванного колебаниями оболочки, использованы характеристики поверхностных волн Релея. Найден спектр частот свободных механических колебаний в дозвуковом диапазоне и проанализированы формы взаимосвязанных движений элементов трактора и цистерны. Выделена группа низкочастотных колебаний, вредных для здоровья тракториста, и создана уточненная математическая модель для расчета вынужденных колебаний, возникающих при долговременном движении по прямой дороге. Предложено для математического тестирования динамики транспортного средства описывать рельеф дороги двумя гармониками – короткой и длинной синусоидальной волной. Указан метод определения длины волны, приводящей к резонансному увеличению амплитуды колебаний жидкости и кабины трактора.

**Ключевые слова:** колесный трактор, цистерна, свободная поверхность, механические колебания, спектр частот, собственная форма.

**A. P. KOZHUSHKO, A. L. GRIGORIEV**

### **MODELING OF COUPLED OSCILLATIONS OF WHEELED TRACTORS AND TANKS WITH LIQUID ON A STRAIGHT ROAD WITH DIFFICULT TERRAIN**

The model describes oscillations of a wheeled tractor and a tank with liquid having free surface. For the redistribution of fluid in the tank, caused by vibrations of the shell, the characteristics of Rayleigh surface waves are used. The frequency spectrum of free mechanical vibrations in the subsonic range is found and the forms of interrelated movements of the tractor and tank elements are analyzed. A group of low-frequency oscillations harmful to the health of the tractor driver is identified, and a refined mathematical model is created to calculate the forced oscillations that occur during long-term traffic on a straight road. It is proposed for mathematical testing of vehicle dynamics to describe the road terrain by two harmonics with long and short wavelengths. A method is developed for determining the wavelength leading to the resonant increase in the amplitude of oscillations of the fluid and tractor cabin.

**Key words:** wheeled tractor, cistern, free surface, mechanical vibrations, frequency spectrum, eigenform.

© А. П. Кожушко, О. Л. Григор'єв, 2018