

Є. П. ГОМОЗОВ, Т. С. ЗАЙКА

ДЕЯКІ МАТЕМАТИЧНІ МОДЕЛІ ЦІНОУТВОРЕННЯ НА ЕНЕРГОРИНКАХ

У роботі обговорюються різні моделі ціноутворення на енергоринках. Наведено огляд різних дискретних та неперервних моделей. Дискретні моделі подані рівняннями в кінцевих різницях з запізненням. Неперервні моделі описуються динамічними системами. Одна з таких моделей удосконалена. Основний результат роботи – запропонована модель визначення рівноважної ціни на енергоринку загального типу. В модель включено хеджування ризиків з використанням портфелю деривативів. Управління параметрами моделі дає змогу обмежити коливання цін біфуркаціями типу народження циклу.

Ключові слова: енергоринки загального типу, інтегро-диференціальна система рівнянь, моделі ціноутворення, «енергетичні» похідні фінансові інструменти.

Е. П. ГОМОЗОВ, Т. С. ЗАЙКА

НЕКОТОРЫЕ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ЦЕНООБРАЗОВАНИЯ НА ЭНЕРГОРИНКАХ

В работе обсуждаются различные модели ценообразования на энергорынках. Приведен обзор различных дискретных и непрерывных моделей. Дискретные модели представлены уравнениями в конечных разностях с запаздыванием. Непрерывные модели описываются динамическими системами. Одна из таких моделей усовершенствована. Основной результат работы – предложена новая интегро-дифференциальная модель определения равновесной цены на энергорынке общего вида. В модель включено хеджирование рисков с использованием портфеля деривативов. Управление параметрами модели позволяет ограничить изменение цен бифуркациями типа рождения цикла.

Ключевые слова: энергорынок общего вида, интегро-дифференциальная система уравнений, модели ценообразования, «энергетические» производные финансовые инструменты.

E. P. GOMOZOV, T. S. ZAIKA

SOME MATHEMATICAL MODELS OF PRICING IN ELECTRICITY MARKETS

The paper discusses various pricing models in the electricity markets. An overview of various discrete and continuous models is presented. Discrete models are represented by equations in finite differences with delay. Continuous models are described by dynamic systems. One of these models is improved. The main result of the work is proposed new integro-differential model for determining the equilibrium price in the generic electricity market. The model incorporates risk hedging using a portfolio of derivatives. Managing the model's parameters allows to limit the price change by bifurcations of the type of cycle generation.

Key words: generic electricity markets, integro-differential equation system, pricing models, "energy" derivative financial instruments.

Вступ. Загальна модель конкурентних ринків електроенергії може мати таку структуру: оптовий ринок електроенергії, роздрібні ринки електроенергії, ринок потужності, ринок системних послуг, ринок фінансових прав на переказ, ринок деривативів. Ціни на усіх цих ринках взаємно пов'язані [1].

Споживання електроенергії змінюється постійно в кожен момент часу. Необхідно мати у своєму розпорядженні резерв, який може бути пушений в роботу в порівняно короткий термін. Для того щоб протистояти випадковим відхиленням у виробництві, необхідно мати у своєму розпорядженні станції та устаткування, здатні швидко змінювати свою потужність. Принципово важливим є те, що електровиробництво, електрозбут та електропостачання являють собою потокові процеси в силу своєї фізичної сутності в електроенергетичній системі, яка включає такі елементи: електростанції; підвищуючі трансформатори; синхронні компенсатори; понижуючі трансформатори у споживачів; статичні конденсатори різної напруги; електроприлади, включаючи електродвигуни; електротехнічні установки; електричні мережі [2].

Опис функціонування енергетичної системи здійснюється на основі математичних моделей. Використання математичних моделей для визначення за їх допомогою взаємозв'язків і залежностей між різними елементами системи дає змогу більш детально дослідити ринок електроенергії, визначити вплив зовнішніх факторів на стан системи та проаналізувати альтернативи її розвитку. Через складність реальних процесів стає неможливим точне відображення моделі, тому найчастіше їх математична проекція спрощується. Достовірність досліджуваної моделі зменшується за рахунок спрощень та обмежень, можливих неточностей щодо деяких параметрів та будь-яких неочікуваних явищ.

Актуальність теми. Рівень економічного розвитку будь-якої країни визначається перш за все ефективністю використання енергоресурсів. Оцінка ефективності використання енергоресурсів, енергоспоживання та енергозбереження у промисловості нашої країни пов'язана з комплексом проблем, що виникли за умов нестабільної економіки та початкових кроків України у світову економічну систему. Управління економікою підприємств та галузей, а особливо процесом споживання енергії, базується на об'єктивній та повній інформації про показники, які характеризують енергоемність продукції, їх рівень і причини, які обумовлюють їх зміну [1, 3].

Методи та засоби аналізу роботи електропостачальних систем. Виробництво електроенергії повинно швидко реагувати в режимі реального часу на зміни споживання електроенергії. Електроенергія не може ефективно зберігатися у великих об'ємах. Процес її споживання має нелінійний характер. Енергоефективність постачання електричної енергії в сучасних електричних мережах повинна враховувати несиметричний, нелінійний та швидкозмінний характер споживання електричної енергії сучасними споживачами. Головними факторами є фізіологічні цикли людини, зміна часу доби і сезонність, позмінна робота.

Зараз для відбудови моделі енергоспоживання використовуються *методи обчислювального інтелекту*, методи *теорії ігор*, фрактальні моделі, динамічні системи, мультиагенти, тощо [4 – 6].

Методи обчислювального інтелекту спираються на евристичні алгоритми, які використовуються, наприклад, у *нечіткій логіці*, *штучних нейронних мережах* і *еволюційному моделюванні*.

Оптовий ринок енергетики часто має структуру *олігополії* [7]. Засновник *теорії олігополії*, французький економіст *К. Курно* так охарактеризував взаємозалежність на олігопольному ринку: «тому що на ринку конкурують лише декілька фірм, то кожен учасник ринку повинен стежити за поведінкою суперників, зважувати свої дії відносно цінової політики, а також оцінювати потенційні наслідки своїх рішень» [3]. В аналізі ринків Англії, Уельсу, Норвегії, Нової Зеландії та штату Вікторія в Австралії *Уолак Ф. А.* [1] вказує на те, що правила лібералізованого ринку електроенергії, в комбінації зі структурою ринку, можуть впливати на зміну ринкових цін.

Для аналізу оптового ринку електроенергії доцільно використовувати *модель SFE* (supply function equilibrium), що враховує специфіку ринку електроенергії. Поняття *функції рівноважних поставок* було спочатку розроблено *Клемперером* і *Мейером* [8] як спосіб моделювання, в якому конкуренти в умовах невизначеного попиту можуть домогтися максимізації прибутку рівноваги на ринку. Підхід SFE був запозичений *Гріном* і *Ньюбері* [9] в якості моделі для стратегічних торгів у конкурентному спотовому ринку електроенергії.

Питання функціонування конкурентних ринків електроенергії та введення диференційованих за часом цін на електроенергію були досліджені в роботах *Давидсоном* і *Догадушкіной* [10], *Боном*, *Караманісом* і *Швеппе* [11] *Волконським*, *Кузовкіним* і *Поманським* [12], *Швеппе* і *Караманісом* [13], *Стофтом* [14], *Хоганом* [15, 16], *Крамтоном* і *Вілсоном* [17].

Огляд дискретних моделей енергоринку. *Алексеев В. І., Гнатів Б. В., Кавалець І. І.* у роботі [18] розглянули систему з конкуренцією, в якій функціонує n (де $n \geq 2$) елементів $F_i, i = \overline{1, n}$ з вихідними характеристиками $q_i, i = \overline{1, n}$ кожного з них, відповідно. Кінцевий результат функціонування кожного елемента такої системи має деяку характеристику $p_i, i = \overline{1, n}$. Побудували узагальнену *математичну модель типу Курно – Пу* для багатоелементної дискретної системи з конкуренцією

$$q_i(t+1) = \sqrt{\sum_{j=1, j \neq i}^n \frac{q_j(t)}{c_i}} - \sum_{j=1, j \neq i}^n q_j(t), \quad i = \overline{1, n},$$

де $q_i(t+1)$ – *функція реакції* (тобто, значення вихідної характеристики) i -го елемента в момент часу $t+1$ на значення вихідних характеристик, властивих іншим елементам системи в момент часу t (припускається, що $q_i(t+1) > 0, i = \overline{1, n}$); $c_i, i = \overline{1, n}$ – різні сталі значення параметрів, які характеризують граничну поведінку кожного елемента системи (припускається, що $c_i > 0, i = \overline{1, n}$).

Авторами проаналізовано застосування однієї та двох керуючих функцій до структури моделі дво- та триелементної системи, отримано аналітичне рішення систем та *точка рівноваги Курно*.

Переваги застосування даної моделі в моделюванні енергоринку полягають в тому, що вона розроблена для N – учасників ринку, а також використання керуючих функцій дає змогу стабілізувати поведінку учасників ринку. До недоліків можна віднести дискретність моделі, бо для енергоринку притаманна неперервність роботи. Модель є небездоганною, проте відкриває великі перспективи щодо її доповнення.

Лу Ю. Л. [19] вивчає вплив зміни кількості продукції, що випускається фірмою, та вибір вагового коефіцієнта випуску продукції, який передбачає інша фірма,

$$\begin{cases} q_1(t+1) = q_1(t) + \beta q_1(t) [a - 2bq_1 - bq_2 - d_1 - 2e_1q_1]; \\ q_2(t+1) = w \cdot q_2(t) + (1-w) \cdot \frac{a - bq_1 - d_2}{2(b - e_2)}, \end{cases}$$

де $q_1(t)$ – обсяг першої фірми, що є обмеженим раціональним гравцем; $q_2(t)$ – обсяг продукції другої фірми, що є адаптивним гравцем; β – відносна швидкість регулювання випуску продукції першої фірми ($\beta > 0$); $w \in (0, 1)$ – ваговий коефіцієнт; $L_k(q_1(t), q_2(t)) = pq_k - C_k$ – функція прибутку двох фірм в період t ; $p = f(Q) = a - bQ$ – лінійна спадна зворотна функція попиту; a – максимальна ціна продукту на ринку ($a > 0$); b – кількість одиниць продукції за ціну ($b > 0$); $Q = q_1 + q_2$ – загальний обсяг продукції; $C_k(q_k) = c_k + d_k q_k + e_k q_k^2$ – функція вартості двох фірм; c_k – позитивна фіксована вартість; $d_k q_k + e_k q_k^2$ – змінні витрати.

На ринку електроенергетики також присутні фірми, яким притаманні поведінки адаптивного гравця та обмеженого раціонального гравця, які описані в даній моделі. Подальший розвиток можливий, наприклад, у бік доповнення системи фірмами, які грають за іншими правилами.

Пу Хіаосонг та Ма Юньхан [20] досліджували динамічну поведінку трьох фірм, використовуючи різні правила очікування:

$$\begin{cases} q_1(t+1) = \frac{1}{3n+3d_1} \left[-2n(q_2(t)+q_3(t)) - c_1 + \sqrt{M} \right]; \\ q_2(t+1) = q_2(t) + \alpha \left\{ q_2(t) - \frac{1}{3n+3d_2} \left[-2n(q_1(t)+q_3(t)) - c_2 + \sqrt{N} \right] \right\}; \\ q_3(t+1) = q_3(t) + \beta q_3(t) \left\{ -3(n+d_3)q_3^2(t) - [4nq_1(t)+4nq_2(t)+2c_3]q_3(t) - n[q_1(t)+q_2(t)]^2 + m - b_3 \right\}; \\ M = (n^2 - 3nd_1)(q_2(t)+q_3(t))^2 + 4nc_1(q_2(t)+q_3(t)) + c_1^2 + 3(mn - nb_1 + md_1 - b_1d_1); \\ N = (n^2 - 3nd_1)(q_1(t)+q_3(t))^2 + 4nc_2(q_1(t)+q_3(t)) + c_2^2 + 3(mn - nb_2 + md_2 - b_2d_2), \end{cases}$$

де n, m – коефіцієнти зворотної функції попиту; $b_i, c_i, d_i, i = \overline{1,3}$ – коефіцієнти функції вартості; α – параметр зворотного зв'язку, $-1 < \alpha < 0$; β – параметр швидкості зміни випуску продукції, $0 < \beta < 1$; характеристика q_1 – перша фірма приймає наївні очікування; характеристика q_2 – друга фірма має адаптивні очікування; q_3 – третя фірма представляє обмежено раціонального гравця.

Використовуючи дану модель для дослідження динамічної поведінки фірм на енергоринку, які застосовують різні правила очікування, можна припустити, що не всі фірми одночасно приймають свої рішення, та доповнити реакцію однієї з фірми затримкою у часі на один крок, тобто у момент часу $(t-1)$.

Ма Юньхан та Хонгліанг Ту [21] ґрунтуючись на ігровій моделі триполі на оптовому енергоринку з обмеженою кількістю раціональних гравців, досліджує нову ігрову модель дуополі Курно з затримкою обмеженої раціональності. Автори припускають, що зворотна функція попиту є нелінійною, і одна з функцій витрат є нелінійною, а інша – лінійною. У цій моделі гравці обмеженої раціональності регулюють швидкість виробництва відповідно до граничного прибутку і приймають рішення про кількість виробленої продукції,

$$\begin{aligned} q_1(t+1) &= q_1(t) + \alpha_1 q_1(t) \left[-3nq_1^2(t) - nq_2^2(t-1) - 4nq_1(t)q_2(t-1) - 2c_1q_1(t) + m - b_1 - \gamma \right]; \\ q_2(t+1) &= q_2(t) + \alpha_2 q_2(t) \left[-3nq_2^2(t) - nq_1^2(t-1) - 4nq_1(t-1)q_2(t) + m - b_2 - \gamma \right], \end{aligned}$$

де n, m – коефіцієнти зворотної функції попиту; b_1, b_2, c_1 – коефіцієнти функції вартості; α_1, α_2 – параметр зворотного зв'язку, $-1 < \alpha < 0$; γ – швидкість (wheelingrate).

У даній статті передбачається, що є два підприємства, які постачають електроенергію (де підприємство X являє собою традиційне підприємство вугільної електрогенерації, підприємство Y представляє нове енергетичне підприємство, наприклад, гідро-, атомної енергетики, або сонячну енергію, або енергію вітру, і т.п.) на оптовому ринку електричної енергії, і вони забезпечують електроенергією споживачів через енергопідприємства. Постачальники електроенергії X, Y приймають оптимальне рішення про випуск, і припускають T – випуск рівним $q_i(t)$, ($i = 1, 2$), відповідно. У зв'язку з неповною інформацією і затримкою рішення, передбачається, що існує один крок ($T = 1$) затримки у випуску взаємних виробників.

Айзенберг Н. И., Кисельова М. А. [22] розглянули механізми організації аукціонів на електроенергетичному ринку, які засновані на заявках оператора ринку споживачами та виробниками енергії. Також порівняли можливі стратегії поведінки виробників електроенергії, що призводять до різних рівноважних ситуацій та відповідним моделям Курно, рівноваги функцій пропозиції, досконалої конкуренції.

Нижче представлені стратегія поведінки виробників, які визначені функцією пропозиції, в яку включені можливі реакції конкурентів на зміну обсягів випуску фірми,

$$q_i^K(P) = \begin{cases} 0, & P \leq a_i; \\ \gamma(P - a_i) / (1 + c_i\gamma), & a_i < P \leq V_i(1 + c_i\gamma) / \gamma + a_i; \quad i = 1, \dots, n; \\ V_i, & P > V_i(1 + c_i\gamma) / \gamma + a_i, \end{cases}$$

де $q_i^K(P)$ – функція пропозиції стратегічного i -го гравця і в моделі Курно; $P \in R_+^1$ – ціна, яка формується в результаті взаємодії агентів на ринку за умови, що всі споживачі агрегуються єдиною незростаючою функцією попиту $D(P)$ або зворотної до неї функції $D^{-1}(Q)$; $D(P) = N - \gamma P$ – лінійна функція сукупного попиту; γ – деяка позитивна величина; $c_i > 0, a_i \neq 0$ – витрати фірми i ; V_i – максимальна потужності, що генерується,

$$q_i^{LE}(P) = \begin{cases} 0, & P \leq a_i; \\ \gamma(P - a_i) / (w_i + c_i\gamma), & a_i < P \leq V_i(w_i + c_i\gamma) / \gamma + a_i; \quad i = 1, \dots, n; \\ V_i, & P > V_i(w_i + c_i\gamma) / \gamma + a_i, \end{cases}$$

$q_i^{LE}(P)$ – функція пропозиції для виробників енергії з урахуванням обмеження на її вироблення в моделі LFSE;

$$w_i = \frac{1}{\sum_{i \neq j} \left(\frac{1}{w_j + c_j \gamma} + 1 \right)} - \text{індекси впливу } i - \text{тої за номером фірми на стан ринку};$$

$$q_i^W(P) = \begin{cases} 0, & P \leq a_i; \\ (P - a_i)/c_i, & a_i < P \leq V_i c_i + a_i; \quad i = 1, \dots, n; \\ V_i, & P > V_i c_i + a_i, \end{cases}$$

$q_i^W(P)$ – функція пропозиції кожної фірми, що не залежить від еластичності попиту в моделі абсолютно конкурентної взаємодії генеруючих компаній (моделі Вальраса);

Огляд неперервних моделей енергоринку. Дюсуше О. М. [23] запропонована концепція конкурентоспроможності фірми в рівновазі Курно для n фірм, а також визначені приблизні варіації як перші похідні від функції постійного прибутку Штакельберга і поняття послідовно-групового порядку в грі n персон. У розглянутій постановці задачі Курно умови першого порядку з урахуванням можливих варіацій мають вигляд:

$$\frac{d\pi_i^e}{dq_i} = b \left[Q_{ci} - 2q_i - q_{-i}^e - q_i \cdot \frac{dq_{-i}^e}{dq_i} \right] = 0,$$

де $Q_{ci} = \frac{a - c_i}{b}$ – обсяг абсолютно конкурентного випуску при ціноутворенні по граничним витратам $P = c_i$, званий «абсолютно конкурентний обсяг фірми номер i »; q_i – об'єм випуску фірми i ; $q_{-i}^e = \sum_{i \neq j} q_j = Q - q_i$ – невідомий сумарний обсяг випуску інших фірм; c_i – граничні витрати.

Запропонований в даній статті підхід стратегічних рефлексивних ігор можна застосувати для аналізу поведінки фірми на енергоринку та аналізу впливу на збіжність процесу стратегічної рефлексії до статичної рівноваги Курно – Неша.

Стосовно енергоринку, моделі, які розглянуті вище, для подальшого розвитку їх концепції використовуються такі припущення, як визначення виробників перед споживачами у якості єдиного виробника, а всіх споживачів електроенергії, як одного споживача; забезпечення обсягів електричної потужності та енергії, необхідних для балансування обсягів виробництва і споживання електроенергії в реальному часі, через те, що електроенергія являє собою товар, який неможна запасати в необхідній кількості. Моделі матимуть узагальнений вигляд і не припускатимуть накопичення виробленої електроенергії для продажу споживачеві через деякий час.

У своїх роботах Лу Ю. Л. [19], Дюсуше О. М. [23], Ду Дж. Г., Хуан Т. В., Шенг З. Х. та Чжан Х. Б. [24], Зоркальцев В. И., Мокрий И. В. [25] ціну формують, як функцію кількості попиту $P(G(t))$,

$$P(G(t)) = A - B \cdot G(t) - \text{спадна лінійна зворотна функція попиту},$$

де A – максимально можлива ціна електроенергії; B – кількість одиниць продукції за дану ціну.

В мікроекономіці крива загальної вартості є аналогом кубічної функції, добре відображає як зростаючу, так і спадаючу граничну продуктивність, що має місце, при єдиному змінному введеному факторі виробництва [25]. Тому Пу Хіаосонг, Ма Юньхан [20] використовують функцію наступного вигляду:

$$C_i(g_i(t)) = a_i + b_i g_i(t) + c_i g_i^2(t) + d_i g_i^3(t), \quad i = \overline{1, n},$$

де a, b, c, d – коефіцієнти; $\pi_i(t) = g_i(t) \cdot P(G(t)) - C_i(g_i(t))$ – прибуток i -го виробника електроенергії; $\partial \pi_i(t) / \partial q_i(t) = 0$ – граничний прибуток i -го виробника; $MC_i(t) = (\partial C_i(g_i(t))) / \partial g_i$ – граничні витрати цього ж виробника; $MR_i(t) = (\partial (P(G(t)) \cdot g_i(t))) / \partial g_i$ – граничний дохід виробника i .

Для безперебійної роботи енергосистеми між видобутком та споживанням електроенергії повинен зберігатися баланс:

$$G(t) - Q(t) = 0.$$

Видобуток та споживання електроенергії ведеться безперервно, тому для безперебійної роботи системи повинен бути баланс «видобуток-споживання».

Диспетчеризація, з точки зору економіки, ставить перед собою мету доставити споживачеві електроенергію при мінімальній загальній вартості, тобто досягти

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n C_i(g_i(t)) \right\},$$

де $g_i(t)$ – вихідна потужність i -го виробника енергії; C_i – вартість генерації i -го виробника.

Безперервна взаємодія між компаніями – генераторами та компаніями – споживачами відповідає моделі вироблення-споживання, яка описує обмін інформацією в кожен момент часу. Оператор енергоринку являє собою єдиний центр, через який проходять заявки споживачів і виробників на обсяги споживання / виробництва, а та-

кож їх ціни. Така модель є нелінійною та являє собою систему диференціальних рівнянь [26].

Розглядається математична модель енергоринку, що складається з n_s постачальників (supplier) – генеруючих компаній, що характеризуються поточним обсягом виробництва електроенергії $q_s^i(t)$, $i = \overline{1, n_s}$, і компаній n_c – споживачів (customer). Модель характеризується обсягом споживання електроенергії $q_c^i(t)$, $i = \overline{1, n_c}$, яка витрачається на виробництво товарів і послуг,

$$\dot{q}_s^i(t) = -a_s^i q_s^i(t) - r_s^i + \pi(t) b_s^i q_s^i(t) + v_s^i, \quad i = \overline{1, n_s}; \quad \dot{q}_c^i(t) = a_c^i q_c^i(t) + r_c^i - \pi(t) b_c^i q_c^i(t) + v_c^i, \quad i = \overline{1, n_c};$$

$$\mu \dot{\pi}(t) = \sigma(t) = \sum_{i=1}^{n_c} q_c^i(t) - \sum_{i=1}^{n_s} q_s^i(t) = Q_c(t) - Q_s(t);$$

де $a_s^i q_s^i(t) + r_s^i$ – поточна вартість виробництва i -м постачальником; $a_c^i q_c^i(t) + r_c^i$ – поточний дохід i -го споживача; $\pi(t)$ – поточна ринкова ціна електроенергії; v_s^i , v_c^i – інвестиції в розширення виробництва і споживання; μ – коефіцієнт релаксації ринку, що характеризує швидкість реакції ціни на дисбаланс попиту і пропозиції.

Вдосконалення моделі може йти шляхом доповнення централізованого управління децентралізованим та розподіленим. Відмова від централізованого управління дає можливість скоротити витрати і зробити систему більш гнучкою, за рахунок укладення контрактів на постачання електроенергії без участі посередників між виробниками і споживачами електроенергії (peer-to-peer) і виконання їх в автоматичному режимі. Взаємодія великої кількості вузлів і методів управління, необхідних для досягнення поставлених цілей, забезпечується закладеним в систему рівноправним (пірінговим) механізмом.

В умовах підвищення складності взаємодії учасників ринку, необхідна більш гнучка система обробки інформації – *мультиагентна система*. Така система здатна на гнучкі автономні дії для досягнення своїх цілей.

Реакція на зміну поточного стану системи не може бути миттєвою. Тому для вдосконалення приведеної вище моделі вводиться припущення про те, що формування ціни здійснюється з запізненням в один крок. Також очікується, що постачальники свій обсяг виробництва планують виходячи з обсягу попиту на електроенергію в попередній період. Дана модель позитивно впливає на баланс попиту-пропозиції електроенергії, її рівняння мають наступний вигляд:

$$\dot{q}_s^i(t) = -a_s^i q_s^i(t) q_c^i(t-1) - r_s^i + \pi(t-1) b_s^i q_s^i(t) + v_s^i, \quad i = 1 \dots n_s;$$

$$\dot{q}_c^i(t) = a_c^i q_c^i(t) + r_c^i - \pi(t-1) b_c^i q_c^i(t) + v_c^i, \quad i = 1 \dots n_c;$$

$$\mu \dot{\pi}(t) = \sigma(t) = \sum_{i=1}^{n_c} q_c^i(t) - \sum_{i=1}^{n_s} q_s^i(t) = Q_c(t) - Q_s(t);$$

де $a_s^i q_s^i(t) q_c^i(t-1) + r_s^i$ – поточна вартість виробництва i -м постачальником, яка враховує обсяг попиту в попередній період; $a_c^i q_c^i(t) + r_c^i$ – поточний дохід i -го споживача; інші позначення було пояснено.

Основний результат. Зважаючи на сказане вище, метою роботи було розробити нелінійну модель найбільш загального енергетичного ринку, яка відповідає наступним вимогам.

1. Припускає, що у вартості електроенергії врахована вартість послуг і фінансових прав.
2. Припускає, що швидкість зміни ціни залежить від середньозважених цін в минулому.
3. Припускає, що середньозважена ціна на ринку потужності є відомою функцією.
4. У моделі є можливість хеджування ризиків різкої зміни цін портфелем ф'ючерсів та опціонів.
5. Існують параметри управління, які можливо визначити емпірично.

Тоді, згідно ідеям, що розвинуті у відомій роботі [27], отримуємо інтегро-диференційну модель:

$$\dot{q}(t) = \lambda q(t) \left[1 - \int_{-\infty}^0 q(t+\tau) w(-\tau) d\tau \right] - \mu p(t) q(t); \quad \dot{p}(t) = -\alpha p(t) + \beta p(t) q(t) - f(p(t), t),$$

де λ , μ , α , β – додатні параметри; $\alpha > \beta$; μ – біфуркаційний параметр; $q(t)$ – середньозважена ціна пропозиції оптового ринку електроенергії; $p(t)$ – середньозважена ціна пропозиції роздрібного ринку електроенергії, $w(t)$ – середньозважена ціна пропозиції оптового ринку потужності; $f(p(t), t)$ – ціна опціонної премії.

Висновки. Отримана модель має єдине значення рівноважної ціни. Для ядра $w(t)$ загального вигляду система не є кінцевовимірною. Але у спеціальних випадках модель може бути зведена до системи з чотирьох звичайних диференціальних рівнянь. В таких випадках цикли, що народжуються при значенні λ_0 параметра λ , мають асимптотичну орбітальну сталість. Класичні методи оцінки фінансових деривативів погано працюють на енергоринках. Тому актуальною є задача побудови моделей оцінки «енергетичних» ф'ючерсів, опціонів і хедж-портфельей.

Проблеми застосування і комп'ютерної реалізації інтегро-диференціальних моделей вирішені поки що недостатньо. Дослідження таких моделей є важливим і актуальним напрямом, а розробка методів та засобів їх комп'ютерного моделювання необхідна для широкого кола прикладних задач.

Список літератури

1. Wolak F. A., Patrick R. H. The Impact of Market Rules and Market Structure on the Price Determination Process in the England and Wales Electricity Market. POWER Working Paper PWP-047. – California : University of California Energy Institute, 1997. – 237 p.
2. Сафина А. Р. Зарождение и эволюция системы энергетики и энергоснабжения в Республике Татарстан // Экономика, управление, финансы : материалы II междунар. науч. конф. (г. Пермь, декабрь 2012 г.). – Пермь : Меркурий, 2012. – С. 30 – 33.
3. Микитенко В. В. Энергоэффективность промышленного производства. Монографія. – Київ : Об'єднаний ін-т економіки НАН України, 2001. – 92 с.
4. Pierluigi Mancarella, Chin Kim Gan, Goran Strbac. Fractal models for electro-thermal network studies // 17th Power Systems Computation Conference (PSCC). Sweden, August 2011. – Stockholm, 2011. – pp. 22 – 26.
5. Mordjaoui M., Boudjema B., Bouabaz M., Daira R. Short-Term Electric Load Forecasting Using Neuro-Fuzzy Modeling for Nonlinear System Identification // Proceedings of International 3rd Conference on Nonlinear Science and Complexity (NSC'10) Ankara, Turkey. – Ankara, 2010. – No. 64. – 6 p.
6. Ines Romero Navarro. Dynamic Load Models for Power Systems. Estimation of Time-Varying Parameters during Normal Operation. Printed in Sweden by Media-Tryck Lund, University Lund, 2002, 166 p.
7. Булатов А. С. Экономика : Учебник, 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Юнонь, 2002. – 896 с.
8. Klemperer Paul D., Meyer Margaret A. Supply Function Equilibria // Econometrica. – 1989. – № 57. – p. 1243 – 1277.
9. Green Richard J., Newbery David M. Competition in the British Electric Spot Market // Journal of Political Economy. – 1992. – № 100. – p. 929 – 953.
10. Давидсон М. Р., Догадущкина Ю. В. Математическая модель конкурентного оптового рынка электроэнергии в России // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2004. – № 3. – С. 72 – 83.
11. Bohn R. E., Caramanis M. C., Schweppe F. C. Optimal Pricing in Electrical Networks Over Space and Time // The RAND Journal of Economics. – 1984. – Vol. 15. – № 3. – pp. 360 – 376.
12. Волконский В. А., Кузовкин А. И., Поманский А. Б. (1986): Об определении дифференцированных по времени тарифов на энергию и услуги // Экономика и мат. методы. – 1986. – Т. XX II. – Вып. 1.
13. Schweppe F. C., Caramanis M. C. Spot Pricing of Electricity. Norwell : Kluwer Academic Publishers. – 1988. – 355 p.
14. Stoft S. Transmission Pricing in Zones: Simple or Complex? // The Electricity Journal. – 1997. – Vol. 10. – № 1. – pp. 24 – 31.
15. Hogan W. W. Getting the Prices Right in PJM : What the Data Teaches Us // The Electricity Journal. – 1998. – vol. 11. – № 7. – pp. 61 – 67.
16. Hogan W. W. Nodes and Zones in Electricity Markets : Seeking Simplified Congestion Pricing. In : Defining Competitive Electricity Markets. Hung-po Chao, Huntington H.G. (eds.). Norwell : Kluwer Academic Publishers. – 1998. – pp. 33 – 62.
17. Cramton P., Wilson R. A Review of ISO New England's Proposed Market Rules. MDI Report for ISO New England, September 9, 1998. – 41 p. – Режим доступу : <ftp://cramton.umd.edu/papers1995-1999/98mdi-iso-ne-markets-review.pdf>. – Дата звертання : 10 жовтня 2018).
18. Алексеев В. I., Гнатів Б. В., Кавалець I. I., Костробій П. П., Алексеев I. В., Хома I. Б. Узагальнена модель олігополії Курно – Пу та стійкість її точки рівноваги с. 51 – 70. – Математичні моделі регулювання фінансових потоків : Монографія. – Львів : «Растр-7», 2012. – 134 с.
19. Lu Y. L. Analysis of Duopoly Output Game With Different Decision-Making Rules // Management Science and Engineering. – 2015. – 9 (1). – pp. 1 – 6.
20. Pu Xiaoson, Ma Junhai. Chaos Control on the Nonlinear Triopoly Model with Different Expectations // JCIT : Journal of Convergence Information Technology. – 2012. – Vol. 7. – No. 3. – pp. 192 – 198.
21. Ma Junhai, Hongliang Tu Complexity of a Duopoly Game in the Electricity Market with Delayed Bounded Rationality // Discrete Dynamics in Nature and Society. – Volume 2012. – Article ID 698270. – 13 pages. DOI: 10.1155/2012/698270.
22. Айзенберг Н. И., Киселёва М. А. Модели несовершенной конкуренции применительно к анализу электроэнергетического рынка Сибири // Стохастическое программирование и его приложения. – Иркутск, 2012. – С. 186 – 216.
23. Дюсуше О. М. Статичное равновесие Курно – Нэша и рефлексивные игры олигополии : случай линейных функций спроса и издержек // Экономический журнал Высшей школы экономики. – 2006. – Т. 10. – № 1. – С. 3 – 32.
24. Di J. G., Huang T. W., Sheng Z. H., Zhang H. B. A new method to control chaos in an economic system // Applied Mathematics and Computation. – 2010. – no. 217. – pp. 2370 – 2380.
25. Зоркальцев В. И., Мокрый И. В. Имитационная модель поведения однопродуктового рынка // Стохастическое программирование и его приложения. – Иркутск, 2012. – С. 370 – 380.
26. Любчик Л. М., Шпатаенко С. А. Анализ динамических моделей энергорынка методом разделения движений // Вестник НТУ «ХПИ» : сб. науч. тр. Темат. вып. : Системный анализ, управление и информационные технологии. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2009. – № 10. – С. 117 – 120.
27. May R. Time-delay versus stability in population models with two and three trophic levels // Ecology. – 1973. – no. 54. – pp. 315 – 325.

References (transliterated)

1. Wolak F. A., Patrick R. H. *The Impact of Market Rules and Market Structure on the Price Determination Process in the England and Wales Electricity Market. POWER Working Paper PWP-047.* California, University of California Energy Institute Publ., 1997. – 237 p.
2. Safina A. R. Zarozhdenie i evolyutsiya sistemy energetiki i energosnabzheniya v Respublike Tatarstan [Rise and evolution of energy system and power supply in the republic of Tatarstan]. *Ekonomika, upravlenie, finansy : materialy II mezhdunar. nauch. konf. (g. Perm', dekabr', 2012 g.)* [Economics, managing, finances: proceeding of the II-nd international scientific conference (Permian, December, 2012)]. Permian, Merkurij Publ., 2012. pp. 30–33.
3. Mykytenko V. V. *Energoefektyvnist' promyslovogo vyrobnytstva. Monografiya* [Energy efficiency of industrial production. Monograph]. Kyiv, Ob'yednanyy in-t ekonomiky NAN Ukrayiny Publ., 2001. 92 p.
4. Pierluigi Mancarella, Chin Kim Gan, Goran Strbac. Fractal models for electro-thermal network studies. *17th Power Systems Computation Conference (PSCC). Sweden, August 2011.* Stockholm, 2011, pp. 22–26.
5. Mordjaoui M., Boudjema B., Bouabaz M., Daira R. Short-Term Electric Load Forecasting Using Neuro-Fuzzy Modeling for Nonlinear System Identification. *Proceedings of International 3rd Conference on Nonlinear Science and Complexity (NSC'10) Ankara, Turkey.* Ankara, 2010, no. 64, 6 p.
6. Ines Romero Navarro. *Dynamic Load Models for Power Systems. Estimation of Time-Varying Parameters during Normal Operation.* Locentiate PhD Thesis. Printed in Sweden by Media-Tryck Lund, University Lund, 2002, 166 p.
7. Bulatov A. S. *Ekonomika : Uchebnik, 3-e izd., pererab. i dop.* [Economics: Textbook, e-d ed., revised and expanded]. Moscow, Yunost' Publ., 2002. 896 p.
8. Klemperer Paul D., Meyer Margaret A. Supply Function Equilibria. *Econometrica.* 1989, vol. 57, pp. 1243–1277.
9. Green Richard J., Newbery David M. Competition in the British Electric Spot Market. *Journal of Political Economy.* 1992, no. 100, pp. 929–953.
10. Davidson M. P., Dogadushkin Yu. V. Matematicheskaya model' konkurentnogo optovogo rynka elektroenergii v Rossii [Mathematical model of competitive wholesale electricity market in Russia]. *Izvestiya RAN. Teoriya i sistemy upravleniya* [Bulletin of the Academy of Science of Russia. Management system theory]. 2004, no. 3, pp. 72–83.
11. Bohn R. E., Caramanis M. C., Schweppe F. C. Optimal Pricing in Electrical Networks Over Space and Time. *The RAND Journal of Economics.* 1984, vol. 15, no. 3, pp. 360–376.

12. Volkonskiy V. A., Kuzovkin A. I., Pomanskiy A. B. (1986): Ob opredelenii differentsirovannykh po vremeni tarifov na energiyu i uslugi [On determining time-differentiated power and service prices]. *Ekonomika i mat. metody* [Economics and mathematical methods]. 1986, vol. XX II, no. 1.
13. Schweppe F. C., Caramanis M. C. *Spot Pricing of Electricity*. Norwell, Kluwer Academic Publishers, 1988. 355 p.
14. Stoft S. Transmission Pricing in Zones : Simple or Complex? *The Electricity Journal*. 1997, vol. 10, no. 1, pp. 24–31.
15. Hogan W. W. Getting the Prices Right in PJM : What the Data Teaches Us. *The Electricity Journal*. 1998, vol. 11, no. 7, pp. 61 – 67.
16. Hogan W. W. Nodes and Zones in Electricity Markets : Seeking Simplified Congestion Pricing. In : *Defining Competitive Electricity Markets*. Hung-po Chao, Huntington H.G. (eds.). Norwell : Kluwer Academic Publishers. 1998, pp. 33–62.
17. Cramton P., Wilson R. A Review of ISO New England's Proposed Market Rules. MDI Report for ISO New England, September 9, 1998. 41 p. Available at : [ftp://cramton.umd.edu/papers1995-1999/98mdi-iso-ne-markets-review.pdf](http://cramton.umd.edu/papers1995-1999/98mdi-iso-ne-markets-review.pdf). (accessed 10.10.2018).
18. Alekseev V. I., Gnativ B. V., Kavalets' I. I., Kostrobiiy P. P., Alekseev I. V., Khoma I. B. Uzagal'nena model' oligopoliiy Kurno – Pu ta stiykist' yiyi tochky rivnovagy pp. 51–70. – Matematichni modeli reguluyannya finansovykh potokiv. Monografiya [Cournot – Pu generalized oligopoly model and stability of its equilibrium point: monograph]. Lviv, "Rastr – 7" publ., 2012. 134 p.
19. Lu Y. L. Analysis of Duopoly Output Game With Different Decision-Making Rules. *Management Science and Engineering*. 2015, no. 9 (1), pp. 1–6.
20. Pu Xiaoson, Ma Junhai. Chaos Control on the Nonlinear Triopoly Model with Different Expectations. *JCIT : Journal of Convergence Information Technology*. 2012, vol. 7, no. 3, pp. 192–198.
21. Ma Junhai, Hongliang Tu. Complexity of a Duopoly Game in the Electricity Market with Delayed Bounded Rationality. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. Volume 2012, Article ID 698270. 13 pages. DOI: 10.1155/2012/698270.
22. Ayzenberg N. I., Kiselyova M. A. Modeli nesovershennoy konkurentsii primenitel'no k analizu elektroenergeticheskogo rynka Sibiri [Imperfect competition models for analyzing Siberian electricity and power market]. *Stokhasticheskoe programirovanie i ego prilozheniya* [Stochastic programming and applications]. Irkutsk, 2012, pp. 186–216.
23. Dyusushe O. M. Statichnoe ravnovesie Kurno – Nyeshia i refleksivnye igry oligopolii : sluchay lineynykh funktsiy sprosa i izderzhkek [Cournot – Nash static equilibrium and reflexive oligopoly games: case of linear demand and expense]. *Ekonomicheskii zhurnal Vysshey shkoly ekonomiki* [Economic journal of Higher Economics School]. 2006, vol. 10, no. 1, pp. 3–32.
24. Du J. G., Huang T. W., Sheng Z. H., Zhang H. B. A new method to control chaos in an economic system. *Applied Mathematics and Computation*. 2010, no. 217, pp. 2370–2380.
25. Zorkal'tsev V. I., Mokryy I. V. Imitatsionnaya model' povedeniya odnoproductovogo rynka [Imitational model of behavior of single-product market]. *Stokhasticheskoe programirovanie i ego prilozheniya* [Stochastic programming and applications]. Irkutsk, 2012, pp. 370–380.
26. Lyubchik L. M., Shpatenko S. A. Analiz dinamicheskikh modeley energorynka metodom razdeleniya dvizheniya [Analysis of power market dynamic model by separation of movements]. *Vestnik NTU "KhPI" : sb. nauch. tr. Temat. vyp. : Sistemyy analiz, upravlenie i informatsionnye tekhnologii* [Bulletin of NTU "KhPI": collection of scientific works, special issue: System analysis, control, and information technologies]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2009. no. 10, pp. 117–120.
27. May R. Time-delay versus stability in population models with two and three trophic levels. *Ecology*. 1973, no. 54, pp. 315–325.

Надійшла (received) 27.10.2018

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

Гомозов Євген Павлович (Гомозов Евгений Павлович, Gomozov Yevgen Pavlovich) – кандидат фізико-математичних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (050) 514-01-33; e-mail: kayaker0011@gmail.com.

Заїка Тетяна Сергіївна (Заїка Татьяна Сергеевна, Zaika Tatyana Sergeevna) – асистент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (097) 655-39-28; e-mail: zaika.tats@gmail.com.

УДК 519.6

Е. П. ГОМОЗОВ, М. В. МЕЗЕРНАЯ**СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ ДИНАМИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ ПОРТФЕЛЕМ ФИНАНСОВЫХ АКТИВОВ**

Приведен обзор существующих на сегодняшний день моделей функционирования финансового рынка. Однако, в силу сложного устройства современного глобального финансового рынка, неоднородной структуры имеющихся финансовых инструментов и трейдеров, использующих разные подходы и временные горизонты, прогнозы, как правило, требуют большого количества наблюдений, плохо работают в окрестностях бифуркаций и не имеют компьютерной модели, которая могла бы строить прогнозы в режиме реального времени. В работе сделан первый шаг по построению комбинированной модели динамического управления портфелем активов.

Ключевые слова: p – адические модели финансового рынка, уравнения в дробных производных, динамическое управление портфелем активов.

Є. П. ГОМОЗОВ, М. В. МЕЗЕРНА**СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ ДИНАМІЧНОГО УПРАВЛІННЯ ПОРТФЕЛЕМ ФІНАНСОВИХ АКТИВІВ**

Надано огляд існуючих на сьогоднішній день моделей функціонування фінансового ринку. Однак, через складний устрій сучасного глобального ринку, неоднорідну структуру фінансових інструментів, що використовуються, трейдерів, які мають різні погляди та різні часові горизонти, прогнози зазвичай потребують великої кількості спостережень, погано працюють в околі біфуркацій і не мають комп'ютерної моделі, яка мала б змогу робити прогнози у режимі реального часу. В роботі зроблено перший крок у побудованні комбінованої моделі динамічного керування портфелем активів.

Ключові слова: p – одичні моделі фінансового ринку, рівняння у дробових похідних, динамічне управління портфелем активів.

© Е. П. Гомозов, М. В. Мезерная, 2018