Universitat de Girona

NOUS ASPECTES DE LA TEORIA DELS SUBCONJUNTS BORROSOS I ESTUDI D'ALGUNES APLICACIONS A MODELS ECONÒMICS

Xavier BERTRAN i ROURA

ISBN: 978-84-694-5703-0
Dipòsit legal: GI-810-2011
http://hdl.handle.net/10803/31918

NOUS ASPECTES DE LA TEORIA DELS SUBCONJUNTS BORROSOS I ESTUDI D'ALGUNES APLICACIONS A MODELS ECONÒMICS

Tesi doctoral presentada per:
XAVIER BERTRAN i ROURA

Dirigida per:
Dr. CARLES CASSÚ i MELLADO

Codirigida per:
Dr. JOAN CARLES FERRER i COMALAT

Programa de Doctorat:
Matemàtica aplicada a la comptabilitat i a l'empresa

UNIVERSITAT DE GIRONA
DEPARTAMENT D'EMPRESA

GIRONA
JULIOL 2000

Universitat de Girona

JOAN CARLES FERRER i COMALAT, PROFESSOR TITULAR D'UNIVERSITAT DEL DEPARTAMENT D'EMPRESA DE LA UNIVERSITAT DE GIRONA,

CERTIFICA: Que la tesi doctoral titulada "Nous aspectes de la teoria dels subconjunts borrosos i estudi d'algunes aplicacions a models econòmics", que es presenta per optar al grau de Doctor en Ciències Econòmiques i Empresarials, secció Empresarials, ha estat realitzada per Xavier Bertran i Roura, sota la direcció dels Drs. Carles Cassú Mellado i Joan Carles Ferrer Comalat.

I per tal que consti als efectes oportuns, signo aquest certificat a Girona, a 3 de juliol de 2000

Joan Carles Ferrer

Signat: Joan Carles Ferrer i Comalat

0. INTRODUCCIÓ

«Penso que és necessari el descobriment d'un càlcul nou que s'adapti particularment als problemes econòmics i socials, de la mateixa manera que el càlcul diferencial s'adapta als problemes de la física»

O. MORGENSTERN

AGRAÏMENTS

Aquests darrers anys transcorreguts des de la meva arribada a la Facultat de Ciències Econòmiques i Empresarials de la Universitat de Girona on vaig retrobar antics companys del desaperagut Col.legi Universitari han estat molt fructífers des del punt de vista personal i acadèmic, un exemple del qual n'és aquest treball. Entre d'altres em vaig retrobar al Dr. Carles Cassú que em va animar a integrar-me en el seu grup de recerca i la col.laboració amb el qual va ser sempre fluida, amical i productiva que va concretar-se quan va acceptar agraïdament dirigir aquesta tesi.

Per tant, el meu primer agraïment per a qui em va orientar, motivar i corregir una gran part d'aquest treball, que malauradament no ha pogut veure acabat. La seva desaparició hauria pogut provocar un trencament de la meva linea de recerca, però no va ésser així justament per la unitat que ell havia donat al grup de recerca de la qual n'és una demostració que el Dr. Joan Carles Ferrer es fes càrrec de la direcció de la meva tesi. Per a ell les meves mes sinceres mostres d'agraïment atès que ha hagut de fer front a una feina suplementària no prevista.

El meu agraïment al mestratge rebut pel Dr. Jaume Gil Aluja tant en la basant pedagògica com en la científica que he rebut d'ell, primer durant el curs impartit en el programa de doctorat i després pels múltiples suggeriments que m'ha donat al llarg de totes les converses que hem anat mantenint en les nostres trobades en els congressos, lectures de tesis i concursos.

També vull expressar el recolzament rebut pels meus companys de l'àrea de Matemàtiques i del grup de recerca, especialment al Dr. Joan Bonet, per la seva gran dedicació en els aspectes formals de la redacció de la tesi. Al Dr. Miquel LLadó i al professor Ramon Munté, pel suport donat en els moments difícils. A la Dolors Corominas, per la gran dedicació, suport matemàtic i el seu entusiasme i constància que m'ha donat al llarg de tot el treball. A en Narcís Clara, per les seves múltiples idees, reflexions i aportacions en l'àmbit científic i filosòfic.

Així mateix, vull deixar constància del recolzament rebuts pel Degà de la Facultat i els caps de Departament d'Empresa i Economia, Dr. Jaume Portella, Dr. Joaquim Rabaseda i Dr. Marc Saez.

Un agraïment especial per la Dra. Anna Garriga, per la seva dedicació en la comprensió d'alguns aspectes econòmics per a mi desconeguts i del tot necessàris per a millorar l'enfoc econòmic d'aquest treball.

Al meu amic Jordi Hors per les llargues estones passades en la correcció ortogràfica, semàntica i en definitiva lingüistica de tota aquesta tesi.

Des del punt de vista de l'afecte personal, vull expressar la meva gratitud pel constant recolzament que m'han donat la meva esposa Pilar Ferrer, i les meves filles Laura, Ester i Marta amb el conseqüent sacrifici personal que els hi ha comportat, del qual, n'estic segur, l'han assumit amb total generositat i estima. Als meus pares, Montserrat i Melció, pel gran estímol que m'han donat al llarg d'aquest període.

1. PRÒLEG

A l'estudiar els problemes que es presenten en l'àmbit econòmic, tant en el petit marc de la microeconomia d'una petita empresa com en el molt ampli de les polítiques macroeconòmiques dels Estats i organismes internacionals, el paper que en els últims anys han assolit els models econòmics tractats mitjançant la matemàtica de la incertesa ha estat molt important i sens dubte es consolidaran de forma clara en el futur.

Aquest fet ha pogut sorpendre a alguns, que potser han fet de l'ortodoxia científíca un dogma, en contradicció amb la veritable filosofia científica que no rebutja mai les noves idees i paradigmes, sempre i quan aquests siguin suficientment contrastats per les verificacions dels resultats als que ens han conduït. Però aquí l'heterodoxia obre sempre nous camins, i en cas de consolidar-se es converteixen en idees acceptades per la comunitat científica i, per tant, en una nova ortodoxia. Ens sembla que aquest es el procés, per ara inacabat però en fase avançada, que està seguint la matemàtica de la incertesa: una forma novedosa d'abordar els problemes i que acabarà esdevenint clàssica.

Com ha quedat palès tantes vegades la matemàtica de la certesa i de la probabilística ha donat grans resultats en la Física, la Química, la Enginyeria i totes aquelles disciplines que posseeixen postulats i lleis universals, que els han permès d'entendre i de fer prediccions amb molta precisió dels fenòmens del seu interès. Aquest no ha estat mai el cas de les ciències socials i de l'economia. La seva complexitat i canvi constant de variables, fenòmens i interaccions simplement no ho permet. Fixem-nos en un exemple de cada un d'ells. Segons les últimes observacions del telescopi espacial Hubble, és molt probable que la llei de la gravitació universal descoberta per Newton sigui la mateixa des del principi de l'univers, al qual se li pot donar una data aproximada d'uns vint mil milions d'anys. No cal dir la seguretat que dóna treballar amb una eina semblant.

D'altra banda hi tenim per exemple el problema borsari, on multitud d'experts amb una preparació i solvència contrastada fan prediccions que a posteriori es demostren d'una fiabilitat no massa gran. És aquesta realitat la que fa necessària una nova forma d'enfocar els problemes, que d'aquí a uns decennis pensem que acabarà formant part de les diferents branques de l'Economia.

L'absència total de lleis immutables, que es mantinguin en el temps i que tinguin en compte totes les variables fa que els models inspirats en les grans Teories Matemàtiques com les Equacions Diferencials siguin una bona forma d'especular, però per més complexes que siguin no aconsegueixen els resultats buscats. Com era de preveure una ciència social i per tant sotmesa a la immensa complexitat del lliure arbitri i la voluntad de l´èsser humà no es pot abordar amb aquests paràmetres.

La incertesa i la subjectivitat són conceptes absoluta i intimament lligats a l'activitat humana. Aquesta és la gran diferència de l'Economia, que s'ocupa de l'activitat humana, amb la Física i la Química, que s'esforcen en establir principis i models per objectes inanimats. La incertesa i la subjectivitat ens porten indefectiblement a la llibertat i d'aquí a la no programabilitat exacta de moltes de les activitats humanes. És en aquest àmbit on es mouen els nostres interessos científics, les nostres motivacions i objectius.

En aquest sentit, seguim la línea de pensament endagada ja fa uns anys pels professors A. Kaufmann i J. Gil Aluja, quan afirmen: *"Entre la programació adaptativa i la intel.ligència hi ha una enorme diferència, i aquesta diferència és la imaginació".*

Però aleshores ens plantegem la següent qüestió: En el marc de la incertesa què hem d'exigir als nostres models? Pensem que el que cal exigir-los és que s'adaptin el millor possible a allò que percebem amb els nostres sentits. És millor que les hipòtesis s'adaptin a la realitat, encara que de forma difusa, a tenir hipòtesis molt ben estructurades però lluny de les nostres percepcions.

En el context de la incertesa hi ha dos camins entrellaçats que es poden recòrrer. El primer, més modest però més practicable, és la fuzzificació de models ja establerts, la qual cosa ens permet intentar resoldre el problema de la certesa de les dades amb les quals treballem. L'altre, molt més complex i ambiciós, és la construcció de models basats exclusivament en la lògica borrosa.

En aquest punt, topem sovint amb la complexitat dels càlculs, moltes vegades impossibles, i amb la no conservativitat de les estructures, com en el cas del producte de números borrosos triangulars que deixa de ser-ho. Aquests tipus de problemes ens han preocupat des del començament, i proposem com a solució fer aproximacions en lloc de definir estructures cada vegada més abstractes i complicades, a fi que les mencionades estructures molt acceptades en el tractament dels problemes econòmics es mantinguin. A aquest efecte, en la primera part relativa als fonaments de la matemàtica borrosa, hem introduït una aproximació poligonal per al producte de dos números borrosos triangulars amb un error prefixat.

Els dos camins esmentats s'aborden en aquest treball i formen part del que en el moment actual s'està fent en el món fuzzy. Així doncs, en el conjunt d'aquesta tesi, hem intentat donar un nou enfoc a uns temes que considerem fonamentals: les equacions borroses i la resolució de certes equacions diferencials, des d'un punt de vista estrictament borrós.

Per completar l'estudi que presentem en aquesta tesi, després de l'anàlisi detallada d'algunes de les qüestions teòriques esmentades, abordem l'estudi d'alguns models clàssics de la teoria econòmica, consistents en la fuzzificació de determinades variables involucrades en els models, que guanyen en la seva aplicabilidad a la predicció si aquestes es consideren incertes i se'ls atribueix una distribució de possibilitat.

Les aplicacions realitzadas als models analitzats tenen per objectiu observar la utilització de la lògica borrosa i la matemàtica de la incertesa en el marc de la teoria econòmica.

Els models reals són, generalment, de formulació més complexa, ja que intenten tenir en compte totes les magnituds que, d'una manera o l'altra, influeixen en la formació d'una determinada variable econòmica. Però amb el nostre estudi volem posar de manifest que l'aplicació de les tècniques operatives en la incertesa és possible en aquest camp, ja que pensem que la incorporació de la matemàtica borrosa hi pot ser útil al permetre considerar la part de les estimacions futures que no són previstes per les dades del passat, però que poden incorporarse a partir de les conjectures o expectatives posades en certa mesura de caràcter econòmic que es desitji tenir en compte.

2. ESTRUCTURA DE LA TESI

La tesi que es presenta es divideix en tres blocs:

1. Fonaments de la Matemàtica per al tractament de la Incertesa.

2. Noves aportacions a l'estudi de les Equacions Borroses i de les Equacions Diferencials Borroses.

3. Aplicacions de la Matemàtica de la Incertesa al comportament de models de la teoria econòmica.

Com a complement necessari per donar sentit a algunes de les qüestions teóriques analitzades, el treball es complementa amb dos annexos, que poden ser consultats al llarg de la lectura si es creu convenient.

PRIMER BLOC: FONAMENTS DE LA MATEMÀTICA PER AL TRACTAMENT DE LA INCERTESA

1. Nocions de lògica. Donem les idees bàsiques de la lògica binària per tal d'introduïr les T-normes i S-conormes de la lògica borrosa i estudiar algunes de les seves propietats.

2. Subconjunts borrosos. Fem una exposició exhaustiva de les definicions i els teoremes referents a subconjunts borrosos, les seves operacions, les diferents formes de discriminar els subconjunts borrosos, acabant amb la introducció del principi d'extensió de les operacions.

3. Números borrosos. Se estudien els números borrosos des d'un punt de vista teòric, com un cas particular dels subconjunts borrosos. Per tal de realitzar operacions amb números borrosos, fem un èmfasi especial a la compatibilitat del principi d'extensió de les operacions amb els α-talls. Com una eina fonamental per desenvolupar el segon i tercer bloc de la tesi fixem prioritàriament la nostra atenció en els números borrosos triangulars, sense deixar de banda els trapezoïdals i els de tipus L-R. Finalment, aportem comn a novetat una nova forma d'aproximació amb error prefixat del producte de dos números borrosos triangulars.

SEGON BLOC: NOVES APORTACIONS A L'ESTUDI DE LES EQUACIONS BORROSES I DE LES EQUACIONS DIFERENCIALS BORROSES

4. Equacions borroses. A partir de la solució de Buckley i Qu plantegem un nou enfocament dirigit a resoldre equacions borroses amb coeficients dins el conjunt dels números borrosos triangulars, i plantejant un mètode que permeti conservar l'estructura triangular de la solució a partir d'un índex d'aproximació prefixat.

5. Derivades i equacions diferencials borroses. En aquest capítol, dirigim el nostre estudi a plantejar condicions necessàries i suficients que permetin garantir l'estructura triangular de la derivada en un punt. Això ens servirà per poder fer un estudi més complet de les equacions diferencials borroses lineals amb coeficients constants.

TERCER BLOC: APLICACIONS DE LA MATEMÀTICA DE LA INCERTESA AL COMPORTAMENT DE MODELS DE LA TEORIA ECONÒMICA

6. Anàlisi de l'equilibri parcial de mercat: un model lineal borrós. En aquest capítol exposem els resultats obtinguts després de fuzzyficar el model enunciat. Primer ho abordem com un model estàtic, a continuació com un model dinàmic considerant el temps com una variable contínua i, finalment, fem un tractament del temps com a variable discrets estudiant les condicions que han de complir les variables incertes involucrades en el model per a la convergència de la trajectòria del preu.

7. Duopoli: equilibri de Cournot-Nash en un context de incertesa. Estudiem en situació d'incertesa el comportament del model d'equilibri de Cournot-Nash, plantejant finalment un procés de desfuzzyficació de la regió d'equilibri incerta que es determina basat en el càlcul del centre de gravetat de la regió d'equilibri borrosa.

8. Optimització dinàmica borrosa. Finalment, en el darrer capítol abordem l'estudi de la determinació de trajectòries òptimes que es generen en un problema d'optimització dinàmica, quan considerem que les condicions inicials i finals són incertes, i els valors s'expressen a través de números borrosos discrets. Ho concretem per al cas d'un monopoli, en el qual prenent com a funcional la funció de beneficis del model clàssic d'Evans, i considerant borroses les condicions de frontera, obtenim una ponderació que ens permete determinar la funció de pertinença del preu que defineix una trajectòria òptima concreta.

3. SUMARI

I. FONAMENTS DE LA MATEMÀTICA BORROSA.....1

1. Nocions de lògica.....1

2. Subconjunts borrosos.....25

3. Números borrosos.....69

II. NOVES APORTACIONS A LA M. BORROSA.....131

4. Equacions borroses.....133

5. Derivades i eq. diferencials borroses.....171

III. APLICACIONS EN L'ÀMBIT ECONÒMIC.....207

6. Anàlisi de l'equilibri parcial de mercat.....209

7. Duopoli. Equilibri de Cournot-Nash en context d'incertesa.....241

8. Optimització dinàmica borrosa.....267

IV. ANNEXOS.....287

A. Conjunts ordinaris.....209

B. Eq. diferencials i en diferències finites.....315

I. FONAMENTS DE LA MATEMÀTICA BORROSA

CAPÍTOL 1

NOCIONS DE LÒGICA

Qualsevol teoria matemàtica es presenta com un conjunt d'enunciats (axiomes, definicions, proposicions,...). Quan aquests es descriuen amb les paraules d'una llengua utilitzant el seu sentit ordinari, pot donar lloc a confusió, per la qual cosa les demostracions cal fer-les sempre amb les regles de la lògica.

La història del pensament mostra, d'altra banda, que l'elaboració de la lògica i la construcció de les primeres "Matemàtiques" han evolucionat conjuntament. Fins i tot alguns matemàtics pensen que el progrés de la matemàtica ha afavorit el desenvolupament de la lògica, però en tot cas es tracta d'una posició clarament subjectiva.

No obstant, en el temps que ens ha tocat viure, hi ha una gran preocupació pel rigor i aquest s'aconsegueix amb les regles de la lògica de les proposicions convenientment precisades.

1.1 LÒGICA BINÀRIA

1.1.1 PROPOSICIÓ LÒGICA I PREDICAT

Una *proposició lògica* és un enunciat del qual podem afirmar, sense cap mena de dubte, que és cert o fals. Per designar una proposició lògica farem servir habitualment les lletres p, q, r, etc.

Un *predicat* és un enunciat que pot ser vertader en alguns casos i fals en altres, però en una situació determinada podrem decidir si és vertader o fals i, fent córrer una mica la imaginació, podrem dir que un predicat és una mena de proposició local.

1.1.2 VALUACIÓ D'UNA PROPOSICIÓ LÒGICA

Segons la definició de proposició lògica, aquesta només pot tenir dos possibles valors: vertader o fals. Aleshores, el model matemàtic, quan treballem amb aquest tipus de proposicions, és molt senzill. Només cal considerar *aplicacions* v del conjunt Π de les proposicions lògiques en el conjunt $\{0,1\}$, definides de la següent manera:

$$\begin{aligned} v_i: \Pi &\rightarrow \{0,1\} \\ p &\rightarrow v_i(p) \end{aligned}$$

on $i=1, 2, 3, ..., 2^n$, essent n el nombre d'elements del conjunt Π de manera que a cada element de Π li fem correspondre el valor 0 o 1 segons si la proposició és falsa o certa, respectivament.

Per exemple, si Π és el conjunt format per dues proposicions p i q, tindrem, en aquest cas, quatre valuacions possibles:

$$\begin{aligned} v_1: \Pi &\rightarrow \{0,1\} \\ p &\rightarrow v_1(p)=0 \\ q &\rightarrow v_1(q)=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v_2: \Pi &\rightarrow \{0,1\} \\ p &\rightarrow v_2(p)=0 \\ q &\rightarrow v_2(q)=1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3: \Pi &\rightarrow \{0,1\} \\ p &\rightarrow v_3(p)=1 \\ q &\rightarrow v_3(q)=0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} v_4: \Pi &\rightarrow \{0,1\} \\ p &\rightarrow v_4(p)=1 \\ q &\rightarrow v_4(q)=1 \end{aligned}$$

Podem observar de l'exemple anterior que totes les possibles valuacions es poden recollir en una taula, anomenada *taula de veritat*, de la següent manera:

	p	q
v_1	0	0
v_2	0	1
v_3	1	0
v_4	1	1

on cada fila d'aquesta taula representa una valuació del conjunt Π, i sempre que no doni lloc a confusió, podrem suprimir la columma de l'esquerra.

En general, si $\Pi=\{p_1, p_2, ..., p_n\}$, escriurem totes les valuacions de Π en la taula de veritat següent:

p_1	p_2	p_3	...	p_{n-2}	p_{n-1}	p_n
0	0	0	...	0	0	0
0	0	0	...	0	0	1
0	0	0	...	0	1	0
...	...	...	...	...	...	...
1	1	1	...	1	1	1

1.1.3 OPERACIONS AMB PROPOSICIONS LÒGIQUES

Alguns enunciats consten de diverses proposicions relacionades entre elles. D'aquí neixen les *connectives lògiques*:

a) Conjunció

Anomenem *conjunció* de dues proposicions p i q, i la representem per $p \wedge q$ la proposició que és certa només quan les dues proposiciones són certes, i és falsa en cas contrari. Definim la valuació de l'operació $p \wedge q$ com

$$\boxed{v_i(\,p \wedge q\,)=\text{mín}\{v_i(p),v_i(q)\}} \qquad [1.1]$$

En forma de taula de veritat:

p	p	$p \wedge q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

b) Disjunció

Anomenem *disjunció* de dues proposicions p i q, i la representem per $p \vee q$, la proposició que és certa quan almenys una de les dues és certa. Definim la valuació de l'operació $p \vee q$ com

$$\boxed{V_i(\ p \vee q\ ) = \text{màx}\{V_i(p), V_i(q)\}} \qquad [1.2]$$

La seva taula de veritat és:

p	p	$p \vee q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

c) Negació

Donada una proposició p, definim la *negació*, i la representem per $\neg p$, com una proposició vertadera quan p és falsa, i falsa quan p és vertadera. Definim la valuació de l'operació $\neg p$ com

$$\boxed{V_i(\ \neg p\ ) = 1 - V_i(p)} \qquad [1.3]$$

En forma de taula de veritat:

p	$\neg p$
0	1
1	0

d) Condicional

Per a definir el *condicional* direm que la proposició p implica la proposició q, i ho representarem per $p \Rightarrow q$, a la proposició $(\neg p) \vee q$ que és falsa només quan la p és vertadera i la q és falsa. Expressant-ho simbòlicament:

$$\boxed{V_i(p \Rightarrow q) = \text{màx}\{1 - v_i(p), v_i(q)\}} \qquad [1.4]$$

La seva taula de veritat és:

p	p	$p \Rightarrow q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

e) Bicondicional

Donades dues proposicions p i q, definim el *bicondicional*, i el representem per $p \Leftrightarrow q$, com la proposició $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ que serà vertadera si p o q són ambdues vertaderes o ambdues falses. Per tant, tindrem

$$\boxed{V_i(p \Leftrightarrow q) = \text{mín}\{\text{màx}\{1 - v_i(p), v_i(q)\}, \text{màx}\{v_i(p), 1 - v_i(q)\}\}} \qquad [1.5]$$

L'expressió anterior també es pot posar en la forma

$$\boxed{V_i(p \Leftrightarrow q) = \text{màx}\{\text{mín}\{1 - v_i(p), 1 - v_i(q)\}, \text{mín}\{v_i(p), v_i(q)\}\}} \qquad [1.6]$$

Construïm la seva taula de veritat:

p	p	$p \Leftrightarrow q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

f) Contradicció

Algunes proposicions compostes per altres tenen la propietat de ser sempre falses, independentment del valor que prenguin les proposicions inicials. Aquests tipus de proposicions s'anomenem *contradiccions*. Un exemple de contradicció és la proposició $p \vee (\neg p)$ definida per:

$$\boxed{V_i(\ p \wedge (\neg p)\ ) = \text{mín}\{p, 1 - v_i(p)\}} \qquad [1.7]$$

Construint la seva taula de veritat veurem que està formada íntegrament per zeros:

p	p	$p \wedge (\neg p)$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	0

f) Tautologia

Altres proposicions compostes tenen la propietat de ser sempre vertaderes, independentment del valor de les proposicions inicials. Aquests tipus de proposicions s'anomenem *tautologies*. Així, per exemple, és una tautologia la proposició $p \vee (\neg p)$ definida per

$$\boxed{V_i(\ p \vee (\neg p)\ ) = \text{màx}\{p, 1 - v_i(p)\}} \qquad [1.8]$$

Lògicament, la seva taula de veritat està formada només per uns:

p	p	$p \vee (\neg p)$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	1

És evident que la negació d'una tautologia és una contradicció i, viceversa, la negació d'una contradicció és una tautologia.

Entre les TAUTOLOGIES MÉS IMPORTANTS, molt utilitzades en la lògica binària, hi tenim:

1) Modus ponens:	$[(p\Rightarrow q)\wedge p] \Rightarrow q$	[1.9]
2) Modus tollens:	$[(p\Rightarrow q)\wedge(\neg q)] \Rightarrow \neg p$	[1.10]
3) Silogisme disjuntiu:	$[(p\vee q)\wedge(\neg q)] \Rightarrow q$	[1.11]
4) Simplificació:	$(p\wedge q) \Rightarrow p$	[1.12]
5) Addició:	$p \Rightarrow (p\vee q)$	[1.13]
6) Llei del silogisme:	$[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)] \Rightarrow (p\Rightarrow r)$	[1.14]

1.1.4 PRINCIPIS DE LA LÒGICA BINÀRIA

a) Principi del terç exclòs

El *principi del terç exclòs* ens assegura que qualsevol proposició pot ser o bé vertadera o bé falsa, però no les dues coses alhora. Matemàticament podem escriure:

$$\boxed{\text{màx}\{\nu(p), \nu(\neg p)\} = 1} \qquad [1.15]$$

Aquest principi ens condueix a dos *mètodes de demostració* ben coneguts, com són els de reducció a l'absurd i de modus ponens:

1) MÈTODE DE REDUCCIÓ A L'ABSURD. «Si una proposició p és vertadera i $p\wedge(\neg q)$ és falsa, aleshores q és vertadera».

   Demostració: En efecte, si $\nu(p)=1$ i $\nu[p\wedge(\neg q)]=0$, implica que el mínim de $\{\nu(p),\nu(\neg q)\}$ és zero. Per tant, $\nu(\neg q)=0$ i, pel principi del terç exclòs, el màxim de $\{\nu(q),\nu(\neg q)\}$ és igual a 1. En conseqüència, $\nu(q)=1$. ♦

2) MÈTODE DEL MODUS PONENS. «Si les proposicions p i $(p\Rightarrow q)$ són vertaderes, aleshores la proposició q és vertadera».

   Demostració: En efecte, si $\nu(p)=1$ i el màx$\{\nu(\neg p),\nu(q)\}$ és igual a 1, llavors pel principi del terç exclòs el màx$\{\nu(p),\nu(\neg p)\}=1$ i així $\nu(\neg p)=0$. Per tant, $\nu(q)=1$. ♦

b) Principi de no contradicció

El *principi de no contradicció* afirma que una proposició qualsevol no pot ser vertadera i falsa alhora. Matemàticament podem escriure

$$\boxed{\min\{v(p), v(\neg p)\} = 0} \qquad [1.16]$$

Aquest principi també ens pot conduir a alguns tipus de demostració de la mateixa naturalesa que els que ens ha portat el principi del terç exclòs.

1.1.5 ÀLGEBRA DE PROPOSICIONS

Direm en primer lloc que p i q són dues *proposicions lògicament equivalents*, i ho denotarem per $p \equiv q$, si i només si la proposició $p \Leftrightarrow q$ és una tautologia. Un mètode pràctic per veure si les proposicions p i q són lògicament equivalents és escriure les dues taules de veritat i després veure que coincideixen.

Es pot demostrar que les operacions entre proposicions lògiques verifiquen les deu PROPIETATS següents, que li donen l'estructura d'*Àlgebra commutativa*:

1) Conmutativa: $p \wedge q \equiv q \wedge p$ $\quad p \vee q \equiv q \vee p$

2) Associativa: $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$ $\quad p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r$

3) Idempotent: $p \wedge p \equiv p$ $\quad p \vee p \equiv p$

4) Distributiva de $\vee$ respecta a $\wedge$: $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

5) Distributiva de $\wedge$ respecta a $\vee$: $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

6) Absorció: $p \wedge (q \vee p) \equiv p$ $\quad p \vee (q \wedge p) \equiv p$

7) Involutiva: $\neg(\neg p) \equiv p$

8) Lleis de Morgan: $\neg(p \vee q) \equiv (\neg p) \wedge (\neg q)$ $\quad \neg(p \wedge q) \equiv (\neg p) \vee (\neg q)$

9) Llei del contrarecíproc: $(p \Rightarrow q) \equiv [(\neg q) \Rightarrow (\neg p)]$

10) Doble implicació: $[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \equiv [(p \wedge q) \Rightarrow r]$.

1.1.6 RAONAMENT LÒGIC, PREMISSES I CONCLUSIÓ

Un *raonament lògic* consisteix en un esquema de fórmules de l'àlgebra de proposicions, $p_1, p_2, \ldots, p_n$, anomenades *premisses del raonament*, donant com a conseqüència una altra proposició q, anomenada *conclusió del raonament.* Simbòlicament, escriurem

$$\boxed{p_1, p_2, \ldots, p_n \rightarrow q} \qquad [1.17]$$

Un raonament lògic és vertader (o vàlid) si es verifica que q és vertadera quan totes les premisses $p_1, p_2, \ldots, p_n$ són vertaderes. En cas contrari, el raonament és fals i es tracta d'una *fal·làcia.*

Des d'un altre punt de vista, els raonaments lògics vàlids també s'anomenen *teoremes*; les premisses dels raonaments vàlids, *hipòtesis del teorema*; i a la conclusió del raonament lògic vàlid, *tesi del teorema.*

Observem que les proposicions $p_1, p_2, \ldots, p_n$ són totes vertaderes si ho és la proposició $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$. Així, el raonament lògic expressat per $p_1, p_2, \ldots, p_n \rightarrow q$ és vàlid si i només si la proposició q és vertadera quan $p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$ és vertader. Així, doncs, deduïm la important conclusió:

«El raonament lògic $p_1, p_2, \ldots, p_n \rightarrow q$ és vàlid si i només si la proposició $(p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n) \Rightarrow q$ és una tautologia».

1.2 LÒGICA BORROSA

1.2.1 PROPOSICIONS VAGUES

La lògica binària no sempre és adequada per descriure sistemes del món real. Aquesta problemàtica ve donada pel fet que en la lògica binària només existeixen dues possibilitats; conseqüentment, en la realitat, els sistemes queden definits de forma ambigua. En altres paraules, sovint les variables poden prendre matisos diferents de certesa i falsedat.

La *lògica borrosa* es basa en els conceptes de conjunt borrós i lògica simbòlica. En aquesta lógica el vertader valor d'una fórmula, en lloc de prendre dos valors (0=fals i 1=vertader), pot prendre qualsevol valor en l'interval tancat [0, 1], valor que indica el grau de veritat o falsedat de la proposició.

Si, per exemple, considerem que p és la proposició "x és un número real proper a zero", aleshores 0´2 és un nombre proper a zero amb un determinat grau de certesa. Els valors 0´001 i fins i tot 1.000 també es poden considerar a zero, peró amb un grau de certesa diferent, perquè tot dependrà de l'escala que adoptem. Així, si ens referim a la distància, 0´001 km (1m) és menys proper a 0 que no 1.000 micres (1mm).

Una *proposició vague* (o borrosa) és un enuciat que és cert o fals amb un cert grau de veritat o falsedat. Per exemple, "en Joan és un noi alt" és una proposició vague, perquè el concepte d'altura és relatiu. Sempre que no doni lloc a confusió, denotarem les proposicions vagues (o borroses) amb les lletres p, q, r, ... tal com ja hem fet en la lògica binària.

1.2.2 VALUACIÓ D'UNA PROPOSICIÓ VAGUE

Denotem per Γ el conjunt de totes les proposicions vagues:

$$\Gamma = \{p \ / \ p \text{ és una proposició vague}\}$$

i definim una *valuació* ν com el conjunt d'aplicacions del conjunt anterior Γ en l'interval tancat [0, 1], és a dir:

$$\begin{aligned} \nu_\alpha : \Gamma &\to [0,1] \qquad\qquad \text{on } \alpha \in [0,1] \\ p &\to \nu_\alpha(p) \end{aligned}$$

En conseqüència, una valuació es pot considerar com un conjunt de valors numèrics obtinguts de forma totalment subjectiva. Convindrem que si $\nu(p)=0$, la proposició vague és falsa i si $\nu(p)=1$, la proposició vague és certa.

A efectes pràctics de valuació, és convenient establir unes *escales semàntiques* (o bé etiquetes lingüístiques). Les més utilitzades són:

ESCALA TERNÀRIA		
0	fals	(impossible)
1/2	ni fals ni vertader	(igualment possible que impossible)
1	vertader	(totalment possible)

ESCALA QUATERNÀRIA		
0	fals	(impossible)
1/3	més fals que vertader	(més impossible que possible)
2/3	més vertader que fals	(més possible que impossible)
1	vertader	(totalment possible)

ESCALA PENTANÀRIA		
0	fals	(impossible)
1/4	més fals que vertader	(més impossible que possible)
1/2	ni fals ni vertader	(igualment possible que impossible)
3/4	més vertader que fals	(més possible que impossible)
1	vertader	(totalment possible)

ESCALA ENDECANÀRIA		
0	fals	(impossible)
0.1	pràcticament fals	(pràcticament impossible)
0.2	quasi fals	(quasi impossible)
0.3	bastant fals	(difícilment possible)
0.4	més fals que vertader	(més impossible que possible)
0.5	ni fals ni vertader	(igualment possible que impossible)
0.6	més vertader que fals	(més possible que impossible)
0.7	bastant vertader	(bastant possible)
0.8	quasi vertader	(quasi segur)
0.9	pràcticament vertader	(pràcticament segur)
1	vertader	(segur o totalment possible)

De totes les escales que podríem construir, segons Kaufmann, Gil i Terceño[1] , l'*escala endecanària* té la virtut que no és ni massa petita amb insuficiència de matisos ni tampoc massa gran amb excés de matisacions. També és interessant el fet que, en tenir un nombre imparell de valors, sempre existeix un valor central en el que no és ni veritat ni fals.

Per tal de portar a terme les diferents operacions que es poden efectuar entre diverses proposicions vagues, definim a continuació, d'una manera totalment axiomàtica, els conceptes de t-normes, t-conormes i negacions i també les propietats que existeixen entre aquests conceptes.

1.2.3 NORMES TRIANGULARS O t-NORMES.

a) **Definició**. Sigui l'interval $I=[0,1]$ i una aplicació $T: I\times I \to I$. L'aplicació T s'anomena una *norma triangular*, o *t-norma*, si verifica els següents axiomes:

i) T ÉS MONÒTONA CREIXENT:

$$\forall x,y,x',y' \in I \ / \ x \leq x' \text{ i } y \leq y' \Rightarrow \boxed{T(x,y) \leq T(x',y')} \qquad [1.18]$$

ii) T ÉS COMMUTATIVA O SIMÈTRICA:

$$\forall x,y \in I \qquad \boxed{T(x,y)=T(y,x)} \qquad [1.19]$$

iii) T ÉS ASSOCIATIVA:

$$\forall x,y,z \in I \ \boxed{T(x,T(y,z))=T(T(x,y),z)} \qquad [1.20]$$

iv) T TÉ ELEMENT UNITAT (1):

$$\forall x \in I \qquad \boxed{T(x,1)=T(1,x)=x} \qquad [1.21]$$

---

[1] KAUFMANN, A.; GIL ALUJA, J.; TERCEÑO, A. *Matemática para la Economía y la Gestión de Empresas. Vol.1,4-5.* Ed. Ediciones Foro Científico, S. L. Barcelona. 1994.

b) **Propietats immediates.** De la definició anterior deduïm dues propietats, que es demostren trivialment a partir dels axiomes:

1) $\forall x \in I$ $\boxed{T(x,x) \leq x}$ [1.22]

2) $\forall x \in I$ $\boxed{T(x,0)=0}$ [1.23]

Com a cas particular de 2) tenim $\boxed{T(0,0)=0}$ [1.24]

c) **Exemples de t-normes.** Existeixen infinites aplicacions que verifiquen els quatre axiomes de definició de t-norma. Fins i tot algunes d'elles depenen d'un paràmetre, donant lloc a una norma triangular per cada valor del paràmetre. Esmentem-ne les que creiem més importants:

1) MÍNIM DE ZADEH[2]:

$$\boxed{T(x,y)=T_Z(x,y)=\text{mín}\{\ x,\ y\}} \quad [1.25]$$

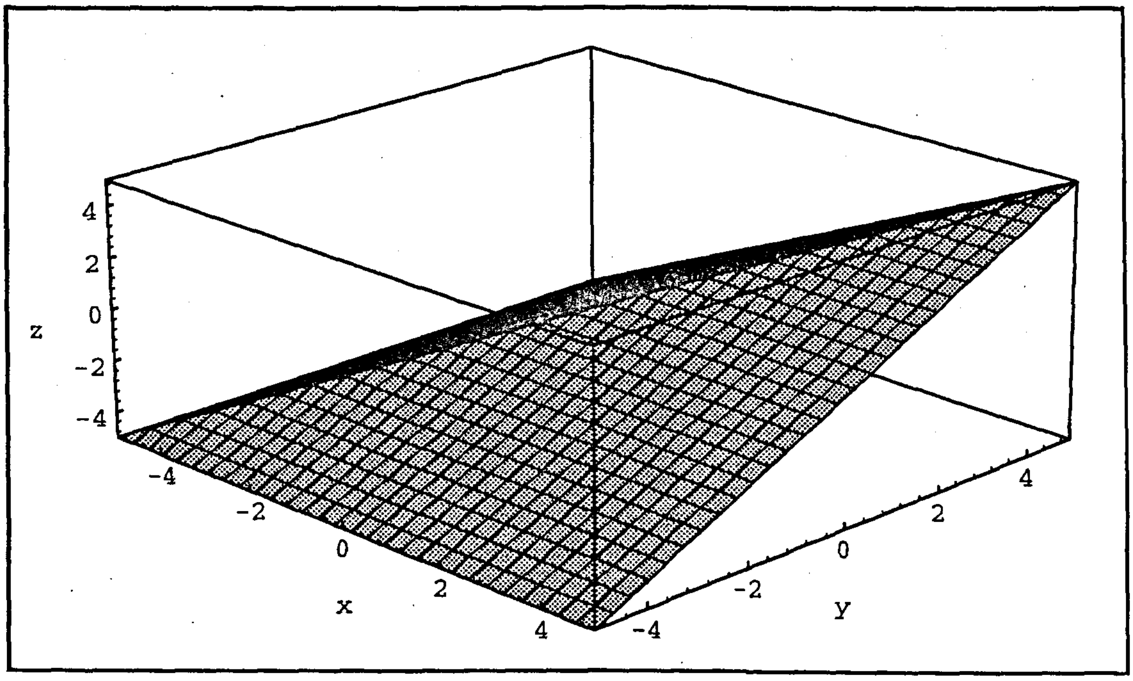


Fig.1.1 Gràfica de la t-norma del mínim de Zadeh

2 ZADEH, L.A. *Fuzzy Sets (3-4)*. Department of Electrical Engineering. University of California. Berkeley. E.E.U.U. 1965.

2) PRODUCTE ALGEBRAIC:

$$\boxed{T(x,y)=P(x,y)=x\cdot y} \qquad [1.26]$$

3) PRODUCTE D'EINSTEIN:

$$\boxed{T(x,y)=E(x,y)=(x\cdot y)/[2-(x+y-x\cdot y)]} \qquad [1.27]$$

4) PRODUCTE ACOTAT:

$$\boxed{T(x,y)=T_{\infty}(x,y)=\text{màx}\ \{\ x+y-1,\ 0\ \}} \qquad [1.28]$$

5) PRODUCTE DRÀSTIC:

$$\boxed{T(x,y)=T_d(x,y)=\begin{cases} x & \text{si } y=1 \\ y & \text{si } x=1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}} \qquad [1.29]$$

6) DOMBI:

$$\boxed{T_\lambda(x,y)=D_\lambda(x,y)=\frac{1}{1+\left[\left(\frac{1}{x}-1\right)^{\lambda}+\left(\frac{1}{y}-1\right)^{\lambda}\right]^{1/\lambda}} \qquad \lambda>0} \qquad [1.30]$$

7) HAMACHER:

$$\boxed{T_\lambda(x,y)=H_\lambda(x,y)=\frac{x.y}{\lambda+(1-\lambda)\,(x+y-x.y)} \qquad \lambda\geq 0} \qquad [1.31]$$

8) YAGER:

$$\boxed{T_\lambda(x,y)=Y_\lambda(x,y)=\ 1-\text{mín}\left\{1,\left((1-x)^{\lambda}+(1-y)^{\lambda}\right)^{1/\lambda}\right\} \qquad \lambda\geq 1} \qquad [1.32]$$

9) DUBOIS I PRADE:

$$\boxed{T_\lambda(x,y)=DP_\lambda(x,y)=\frac{x.y}{\text{màx}\ \{x,y,\lambda\}} \qquad 0<\lambda\leq 1} \qquad [1.33]$$

10) WEBER:

$$\boxed{T_\lambda(x,y)=W_\lambda(x,y)=\ \text{màx}\ \left\{0\ ,\ \frac{x+y-1+\lambda.x.y}{1+\lambda}\right\} \qquad \lambda>1} \qquad [1.34]$$

d) Teoremes de les normes triangulars

TEOREMA 1.1. «Donada una t-norma T, es verifica:

$$\boxed{T_d(x,y) \leq T(x,y) \leq T_z(x,y)} \qquad [1.35]$$

on T_d i T_z són respectivament les t-normes del producte dràstic i de Zadeh.»

Demostració:

a) Provem primer que $T_d(x,y) \leq T(x,y)$. Per $y=1$, $T_d(x,y)=x$ i $T(x,y)=T(x,1)=x$. Per tant, $T(x,y)=T_d(x,y)$.

Per $x=1$, $T_d(x,y)=y$ i $T(x,y)=T(1,y)=y$. Per tant, $T(x,y)=T_d(x,y)$. Per a tot $x,y \in I-\{1\}$, tenim $T_d(x,y)=0=T(x,0) \leq T(x,y)$.

b) Provem a continuació que $T(x,y) \leq T_z(x,y)$. Suposem que $x \leq y$, aleshores $T_z(x,y)=x$.

D'altra banda, $T(x,1)=x$ i per a tot $x,y \in I$, on $x \leq x$ i $y \leq 1$ es compleix que $T(x,y) \leq T(x,1)=x=T_z(x,y)$.

Anàlogament es prova pel cas $y \leq x$. ♦

Quant al segon teorema, haurem d'efectuar prèviament la següent definició. Direm que T és una *norma triangular idempotent* si i sols si es verifica:

$$\forall x \in I \quad \boxed{T(x,\ x) = x} \qquad [1.36]$$

TEOREMA 1.2. «La t-norma del mínim de Zadeh és l'única t-norma que és idempotent.»

Demostració:

a) És evident que $\forall x \in I$ es verifica que $T_z(x,x)=\text{mín}\{x,\ x\}=x$. Per tant, la norma de Zadeh, T_z, és idempotent.

b) D'altra banda, si T és una t-norma idempotent i suposem que $x \leq y$, aleshores tindrem $x=T(x,1) \geq T(x,y) \geq T(x,x)=x$. Per tant, $T(x,y)=x=\text{mín}\{\ x,\ y\}=T_z(x,y)$, i així la t-norma serà la de Zadeh. ♦

1.2.4 CONORMES TRIANGULARS O t-CONORMES.

a) Definició. Sigui l'interval I=[0,1] i una aplicació $S: I \times I \rightarrow I$. L'aplicació S s'anomena una *conorma triangular*, o *t-conorma*, si verifica els següents axiomes:

i) S ÉS MONÒTONA CREIXENT:

$$\forall x,y,x',y' \in I \ / \ x \leq x' \text{ i } y \leq y' \ \Rightarrow \ \boxed{S(x,y) \leq S(x',y')} \qquad [1.37]$$

ii) S ÉS COMMUTATIVA O SIMÈTRICA:

$$\forall x,y \in I \qquad \boxed{S(x,y)=S(y,x)} \qquad [1.38]$$

iii) S ÉS ASSOCIATIVA:

$$\forall x,y,z \in I \quad \boxed{S(x,S(y,z))=S(S(x,y),z)} \qquad [1.39]$$

iv) S TÉ ELEMENT UNITAT (0):

$$\forall x \in I \qquad \boxed{S(x,0)=S(0,x)=x} \qquad [1.40]$$

Observem que aquest últim axioma distingueix les t-conormes de les t-normes.

b) Propietats immediates. De manera similar a les t-normes, de la definició anterior es poden deduir dues propietats, que es demostren directament a partir dels axiomes:

1) $\forall x \in I \qquad \boxed{S(x,x) \leq x} \qquad [1.41]$

2) $\forall x \in I \qquad \boxed{S(x,1)=1} \qquad [1.42]$

Com a cas particular de 2) tenim $\boxed{S(1,1)=1}$ [1.43]

c) Exemples de t-conormes. Lògicament, com en el cas de les t-normes, existeixen infinites aplicacions que verifiquen els quatre axiomes de definició de la t-conorma, algunes d'elles depenents d'un paràmetre.

Esmentem les t-conormes que s'utilitzen més freqüentment:

1) MÀXIM DE ZADEH:

$$\boxed{S(x,y)=S_Z(x,y)=\text{màx}\{\ x,\ y\}} \qquad [1.44]$$

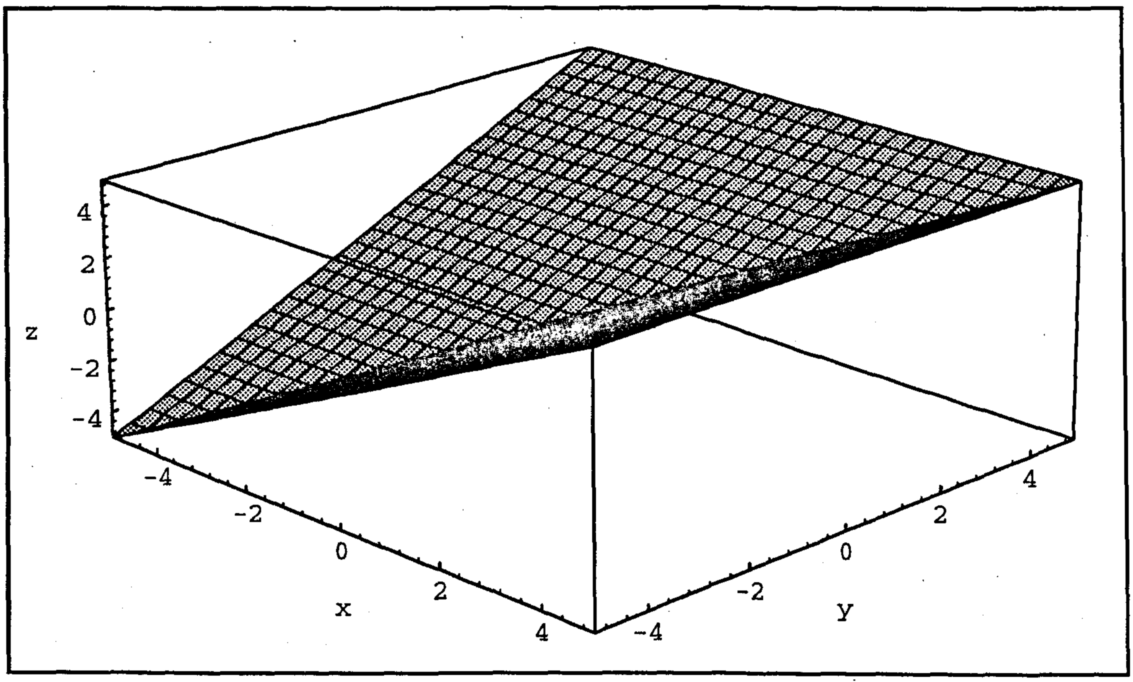


Fig.1.2 Gràfica de la t-conorma del màxim de Zadeh

2) SUMA ALGEBRAICA:

$$\boxed{S(x,y)=S_u(x,y)=x+y-x\cdot y} \qquad [1.45]$$

3) SUMA D'EINSTEIN:

$$\boxed{S(x,y)=S_E(x,y)=\ (x+y)/(1+x\cdot y)} \qquad [1.46]$$

4) SUMA ACOTADA:

$$\boxed{S(x,y)=S_\infty(x,y)=\text{mín}\{\ x+y,1\}} \qquad [1.47]$$

5) PRODUCTE DRÀSTIC:

$$\boxed{S(x,y)=S_d(x,y)=\begin{cases} x & \text{si } y=0 \\ y & \text{si } x=0 \\ 1 & \text{altrament} \end{cases}} \qquad [1.48]$$

Les t-conormes parametritzades són:

6) DOMBI:

$$S_\lambda(x,y)=D_\lambda(x,y)=\frac{1}{1+\left(\left(\frac{1}{x}-1\right)^{-\lambda}+\left(\frac{1}{y}-1\right)^{-\lambda}\right)^{-1/\lambda}} \qquad \lambda>0 \qquad [1.49]$$

7) HAMACHER:

$$S_\lambda(x,y)=H_\lambda(x,y)=\frac{x+y-x.y-(1-\lambda).x.y}{1-(1-\lambda).x.y} \qquad \lambda>0 \qquad [1.50]$$

8) YAGER:

$$S_\lambda(x,y)=Y_\lambda(x,y)=\text{mín}\left\{1,\left(x^\lambda+y^\lambda\right)^{1/\lambda}\right\} \qquad \lambda\geq 1 \qquad [1.51]$$

9) DUBOIS I PRADE:

$$S_\lambda(x,y)=DP_\lambda(x,y)=1-\frac{(1-x).(1-y)}{\text{màx}\left\{1-x\ ,\ 1-y\ ,\ \lambda\right\}} \qquad 0<\lambda<1 \qquad [1.52]$$

10) WEBER:

$$S_\lambda(x,y)=W_\lambda(x,y)=\text{mín}\left\{1,\frac{(1+\lambda).(x+y)-\lambda.x.y}{1+\lambda}\right\} \qquad \lambda>-1 \qquad [1.53]$$

d) Teoremes de les conormes triangulars

TEOREMA 1.3. «Donada una t-conorma S, es verifica:

$$\boxed{S_z(x,y)\leq S(x,y)\leq S_d(x,y)} \qquad [1.54]$$

on S_z i S_d són les t-conormes de Zadeh i del producte dràstic, respectivament.»

Demostració:

Es molt semblant a la del Teorema 1.1 i no l'efectuem. ♦

Direm que S és una *conorma triangular idempotent* si i sols si es verifica:

$$\forall x \in I \quad \boxed{S(x,\ x) = x} \qquad [1.55]$$

TEOREMA 1.4. «La t-conorma del màxim de Zadeh és l'única t-conorma que és idempotent.»

Demostració:

Es demostra de manera similar a la del Teorema 1.2. ♦

Per demostrar el proper teorema serà necessari efectuar primer algunes quantes *definicions que relacionen les t-normes amb les t-conormes*: Donades una t-norma T i una t-conorma S, resulta que:

1) T és distributiva respecte a S si i sols si

$$\forall x,y,z \in I \quad \boxed{S(x,T(y,z))=T(S(x,y),S(x,z))} \qquad [1.56]$$

2) T absorbeix a S si i sols si

$$\forall x,y \in I \quad \boxed{T(x,S(x,y))=x} \qquad [1.57]$$

3) S és distributiva respecte a T si i sols si

$$\forall x,y,z \in I \quad \boxed{T(x,S(y,z))=S(T(x,y),T(x,z))} \qquad [1.58]$$

4) S absorbeix a T si i sols si

$\forall x,y \in I$ \x(S(x,T(x,y)=x) [1.59]

TEOREMA 1.5. «Si S és distributiva respecte a T, llavors T absorbeix a S i, com a conseqüència, T és idempotent.»

Demostració:

a) Suposem que S és distributiva respecte a T, aleshores $\forall x,y \in I$ es verifica:

$$T(x,S(x,y))=T(S(x,0),S(x,y))=S(x,T(0,y))=S(x,0)=x.$$

b) Suposem ara que T absorbeix a S, aleshores $\forall x \in I$ tenim:

$$T(x,x)=T(x,S(x,0))=x. \quad \blacklozenge$$

TEOREMA 1.6. «Si T és distributiva respecte a S, llavors S absorbeix a T i, com a conseqüència, S és idempotent.»

Demostració:

Es prova de manera anàloga al teorema anterior. ♦

1.2.5 LES NEGACIONS O COMPLEMENTACIONS.

a) Classes de negacions. Definim en primer lloc tres classes de negacions (o complementacions):

NEGACIÓ FEBLE. Direm que una aplicació $N:I \rightarrow I$ és una *negació feble* si i sols si verifica les dues condicions següents:

1) $N(0)=1$, $N(1)=0$

2) $\forall x,y \in I \ / \ x \leq y \ \Rightarrow \ N(x) \geq N(y)$ (monòtona decreixent).

NEGACIÓ ESTRICTA. Direm que una aplicació $N:I \rightarrow I$ és una *negació estricta* si i sols si compleix les dues condicions següents:

1) $N(0)=1$, $N(1)=0$

2) $\forall x,y \in I \ / \ x \leq y \ \Rightarrow \ N(x) > N(y)$ (monòt. estrict. decreixent).

NEGACIÓ. Direm que una aplicació $N:I \rightarrow I$ és una *negació* si i sols si verifica les tres condicions següents:

1) $N(0)=1$, $N(1)=0$

2) $\forall x,y \in I \ / \ x \leq y \ \Rightarrow \ N(x) \geq N(y)$ (monòtona decreixent)

3) $\forall x \in I \quad N(N(x))=x$ (involutiva).

b) Exemples. Exposem a continuació quatre exemples de negacions o complementacions:

1) $N(x)=1-x$ [1.60]

2) $N(x)=1$ si $x=0$ i $N(x)=0$ si $x \neq 0$ [1.61]

3) $N(x)=0$ si $x=1$ i $N(x)=1$ si $x \neq 1$ [1.62]

4) $N(x)=(1-x)/(1+\lambda.x)$ $\lambda > -1$ [1.63]

c) N i T-associativitat en t-normes i t-conormes. Donades una t-norma T, una t-conorma S i una negació N, introduirem dues noves definicions. Direm que:

a) T és N-associativa respecte a S si:

$$\forall x,y \in I \quad \boxed{S(x,y)=N(T(N(x),N(y)))} \qquad [1.64]$$

b) N és T-associativa respecte a S si:

$$\forall x,y \in I \quad \boxed{T(x,y)=N(S(N(x),N(y)))} \qquad [1.65]$$

d) Lleis de Morgan. De les definicions anteriors es dedueix l'important teorema següent:

TEOREMA 1.7. Si T és una t-norma N-associativa respecte a S i S és una t-conorma N-associativa respecte a T, aleshores es verifiquen les dues propietats següents, que es coneixen per *Lleis de Morgan*::

i) $\forall x,y \in I$ $N(T(x,y))=S(N(x),N(y))$ [1.66]

ii) $\forall x,y \in I$ $N(S(x,y))=T(N(x),N(y))$ [1.67]

Demostració:

És evident, per la qual cosa no fem la demostració. ♦

1.2.6 VALUACIONS EN PROPOSICIONS LÒGIQUES VAGUES.

a) Valuacions en les operacions. Considerem les cinc operacions fonamentals entre proposicions lògiques vagues:

1) Conjunció: $p \wedge q$
2) Disjunció: $p \vee q$
3) Negació: $\neg p$
4) Condicional: $p \Rightarrow q$
5) Bicondicional: $p \Leftrightarrow q$

Si $\nu(p)$ i $\nu(q)$ són les valuacions de les proposicions vagues p i q, i si T és una t-norma, S una t-conorma i N una negació, les *valuacions* de les proposicions anteriors es defineixen respectivament com:

$$\boxed{\nu(p \wedge q)=T(\nu(p),\nu(q))} \qquad [1.68]$$

$$\boxed{\nu(p \vee q)=S(\nu(p),\nu(q))} \qquad [1.69]$$

$$\boxed{\nu(\neg p)=N(\nu(p))} \qquad [1.70]$$

$$\boxed{\nu(p \Rightarrow q)=\nu((\neg p) \vee q)=S(N(\nu(p)),\nu(q))} \qquad [1.71]$$

$$\boxed{\nu(p \Leftrightarrow q)=\nu((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))=}$$
$$\boxed{=T(S(N(\nu(p),\nu(q)),S(N(\nu(q),\nu(p)))))} \qquad [1.72]$$

b) Valuació de Zadeh. Si, com a cas particular, considerem la t-norma i la t-conorma de Zadeh i la negació $N(\nu(p))=1-\nu(p)$, tindrem les valuacions:

$$\boxed{\nu(p \wedge q)=\text{mín}\{\nu(p),\nu(q)\}} \qquad [1.73]$$

$$\boxed{\nu(p \vee q)=\text{màx}\{\nu(p),\nu(q)\}} \qquad [1.74]$$

$$\boxed{\nu(\neg p)=1-\nu(p)} \qquad [1.75]$$

$$\boxed{\nu(p \Rightarrow q)=\text{màx}\{1-\nu(p),\nu(q)\}} \qquad [1.76]$$

$$\boxed{\nu(p \Leftrightarrow q)= \text{mín}\{\text{màx}\{1-\nu(p),\nu(q)\}\ ,\ \text{màx}\{1-\nu(q),\nu(p)\}\}} \qquad [1.77]$$

c) **Principis del terç exclòs i de no contradicció.** En el cas de la lògica borrosa tenim el teorema següent:

TEOREMA 1.8. No es verifica el principi del terç exclòs ni el principi de no contradicció, és a dir existeix almenys una proposició p tal que compleix les desigualtats:

$$\boxed{\nu(p \vee (\neg p)) \neq 1} \qquad [1.78]$$

$$\boxed{\nu(p \wedge (\neg p)) \neq 0} \qquad [1.79]$$

Demostració:

Suposem que p és una proposició i que la seva valuació ve donada per una escala ternària. Utilitzant la valuació de Zadeh tindrem

$\nu(p)$	$\nu(\neg p)$	$\nu(p \vee (\neg p))$	$\nu(p \wedge (\neg p))$
0	1	1	0
0.5	0.5	0.5	0.5
1	0	1	0

que, com es pot veure, $\nu(p \vee (\neg p)) \neq 1$ i $\nu(p \wedge (\neg p)) \neq 0$.

Cal observar que emprant un altre tipus de valuació és possible que aquests dos principis es verifiquin. ♦

CAPÍTOL 2

SUBCONJUNTS BORROSOS

Segons hem exposat en l'annex A, donat un referencial $E \neq \emptyset$, una de les maneres de definir un *subconjunt ordinari* o nítid A d'E (crisp set) és donant una propietat o predicat P(x) que compleixin tots els seus elements, de manera que un element d'E pertanyerà a A si compleix la propietat P. Així, el conjunt A quedarà perfectament determinat.

Aquesta propietat pot venir modalitzada matemàticament per la seva *funció característica*

$$\mu_A : E \to \{0,1\}$$

de la següent manera:

$$x \to \mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \quad \text{(x verifica la propietat P(x))} \\ 0 & \text{si } x \notin A \quad \text{(x no verifica la propietat P(x))} \end{cases}$$

El graf de μ_A

$$G(\mu_A)=\{(x\ ,\ \mu_A(x)\ /\ x \in E\ \}$$

ens permetrà representar gràficament, en un sistema de referència, el subconjunt A.

2.1 SUBCONJUNTS BORROSOS

2.1.1 PRINCIPI DE SIMULTANEÏTAT GRADUAL

L'anterior definició de subconjunt ordinari està en consonància amb el *principi de no contradicció*, que afirma que un predicat no pot ser alhora cert i fals, i que, per tant, un element qualsevol ha de pertànyer o no al subconjunt.

Aquest principi pot ser substituït pel que els professors Kaufmann i Gil Aluja[3] anomenen *Principi de simultaneïtat gradual*, el qual afirma que qualsevol enunciat és vertader i fals a la vegada amb un cert grau α de veritat i un grau $1-\alpha$ de falsedat. En particular, un element x pertanyerà a E amb un cert grau de pertinença α i, per tant, $1-\alpha$ indicarà el grau de no pertinença.

Tot plegat equival a substituir el conjunt $\{0,1\}$ per l'interval $[0,1]$ com a recorregut de la funció μ_A. Així queda introduïda la noció de predicat vague $\tilde{P}(x)$ com aquell que verifica qualsevol element del conjunt E amb un cert grau de veritat (o falsedat).

La idea de subconjunt borrós, introduïda per Lotfi A. Zadeh[4] a l'any 1965, sorgeix en considerar els elements d'un referencial que verifiquen un predicat imprecís que simbolitzem per $\tilde{P}(x)$.

2.1.2 FUNCIÓ DE PERTINENÇA

a) **Definició.** A l'igual que en els conjunts ordinaris, per modelitzar matemàticament un predicat vague introduïm una *funció de pertinença* $\mu_{\tilde{A}}$ (membership function) definida per:

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{A}}: E &\to [0,1] \\ x &\to \mu_{\tilde{A}}(x) \end{aligned} \qquad [2.1]$$

on $\mu_{\tilde{A}}(x)$ indica el grau de pertinença d'un element x d'E en $\tilde{A}$.

3 KAUFAMANN, A.; GIL ALUJA, J.; TERCEÑO, A. *Matemática para la Economía y la Gestión de Empresas (Vol.1)*. Ed. Foro Científico, S.L. Barcelona. 1994.
4 ZADEH, L.A. *Fuzzy Sets* a «Information and Control", 8, 338-353. 1965.

Per exemple, si prenem el referencial dels nombres reals R i considerem el predicat vague $\tilde{P}(x)$="ser proper a 5", queda definit el conjunt borrós $\tilde{A}=\{x\in R/\ x \text{ és proper a } 5\}$ que podem modelitzar-lo matemàticament a partir de la funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{A}}: R \to [0,1]$$
$$x \to \mu_{\tilde{A}}(x)=\frac{1}{1+|x-5|} \qquad [2.2]$$

Gràficament,

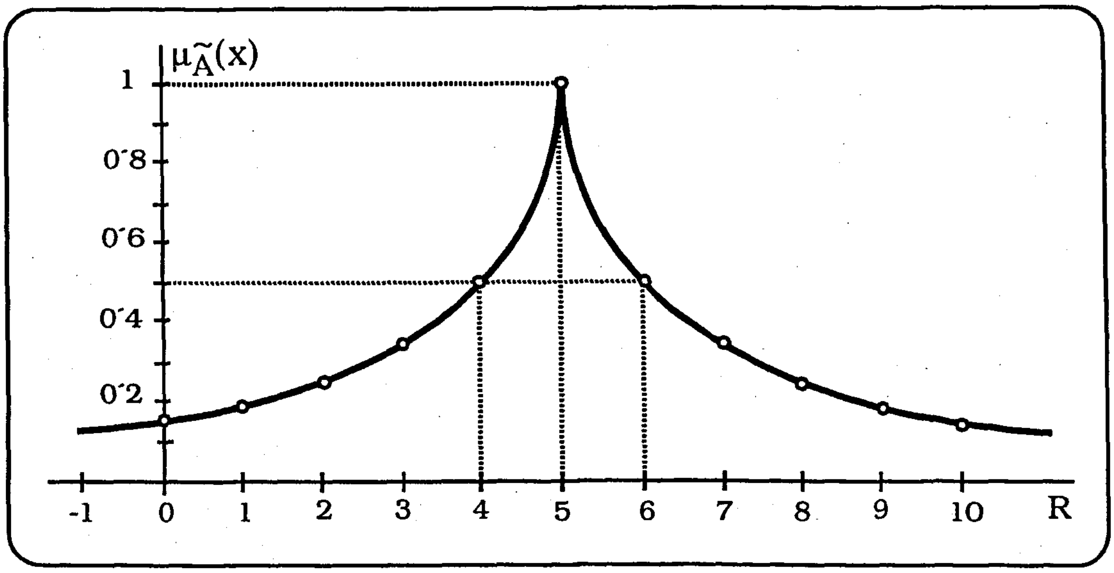


Fig. 2.1 Exemple de funció de pertinença

Així, amb aquesta modelització del conjunt $\tilde{A}$, qualsevol nombre real x és proper a 5 amb un grau de pertinença $\mu_{\tilde{A}}(x)$. Podem dir doncs, que:

5 és proper a 5 en grau de pertinença $\mu_{\tilde{A}}(5)=1$

6 és proper a 5 en grau de pertinença $\mu_{\tilde{A}}(6)=0'5$

9 és proper a 5 en grau de pertinença $\mu_{\tilde{A}}(6)=0'2$

104 és proper a 5 en grau de pertinença $\mu_{\tilde{A}}(104)=0'01$

etc...

És evident que la funció de pertinença d'aquest exemple és una funció totalment subjectiva.

b) Conseqüències immediates

1) La *funció de pertinença del referencial* E és la funció

$$\mu_E : E \rightarrow [0,1]$$
$$x \rightarrow \mu_E(x)=1 \qquad [2.3]$$

2) La *funció de pertinença del conjunt buit* Ø és la funció

$$\mu_\emptyset : E \rightarrow [0,1]$$
$$x \rightarrow \mu_\emptyset(x)=0 \qquad [2.4]$$

3) Observem que les funcions de pertinença del referencial E i del conjunt buit Ø coincideixen respectivament amb les seves funcions característiques. Com a conseqüència, els conjunts E i Ø els podrem considerar sempre com a conjunts nítids.

4) D'altra banda, donat un subconjunt nítid A d'un referencial E, atès que $\{0,1\}\subset[0,1]$, la seva *funció característica* la podrem definir com una funció d'E en l'interval [0,1], és a dir,

$$\mu_A : E \rightarrow [0,1]$$
$$\mu_A(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in A \\ 0 & \text{si } x\notin A \end{cases} \qquad [2.5]$$

i, conseqüentment, un subconjunt nítid sempre el podrem considerar com un cas particular de subconjunt borrós, en el que la funció de pertinença assoleix únicament els dos valors extrems, 0 i 1.

c) Notacions. Hi ha diferents mètodes de representació d'un subconjunt borrós, segons el tipus de referencial. Així tenim:

1) REFERENCIAL FINIT. Si $E=\{x_1, x_2, x_3, ...x_{n-1}, x_n\}$, el subconjunt borrós $\tilde{A}$ el podem representar de tres maneres diferents:

a) $\tilde{A}$ =

x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n
$\mu_{\tilde{A}}(x_1)$	$\mu_{\tilde{A}}(x_2)$	$\mu_{\tilde{A}}(x_3)$	...	$\mu_{\tilde{A}}(x_{n-1})$	$\mu_{\tilde{A}}(x_n)$

[2.6]

b) $\tilde{A} = \mu_{\tilde{A}}(x_1)/x_1 + \mu_{\tilde{A}}(x_2)/x_2 + \mu_{\tilde{A}}(x_3)/x_3 + \dots$

$\dots + \mu_{\tilde{A}}(x_{n-1})/x_{n-1} + \mu_{\tilde{A}}(x_n)/x_n$ [2.7]

c) $\tilde{A}=\{ (x_1, \mu_{\tilde{A}}(x_1)), (x_2, \mu_{\tilde{A}}(x_2)), (x_3, \mu_{\tilde{A}}(x_3),\dots$

$\dots(x_{n-1}, \mu_{\tilde{A}}(x_{n-1}))\ , (x_n, \mu_A(x_n)) \}$ [2.8]

2) REFERENCIAL INFINT NUMERABLE. Si és $E=\{x_1, x_2, x_3, \dots x_{n-1}, x_n, \dots\}$, el subconjunt borrós $\tilde{A}$ el podem representar per

a) $\tilde{A} =\{ (x_1, \mu_{\tilde{A}}(x_1)), (x_2, \mu_{\tilde{A}}(x_2)), \dots , (x_n, \mu_{\tilde{A}}(x_n), \dots\}$ [2.9]

b) $\tilde{A}= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_{\tilde{A}}(x_i)/x_i$ [2.10]

3) REFERENCIAL INFINT NO NUMERABLE. Si és $E \subseteq R$, el subconjunt borrós $\tilde{A}$, el podem representar per

a) $\tilde{A} =\{ (x , \mu_{\tilde{A}}(x)) \ / \ x \in E \}$ [2.11]

b) $\tilde{A}= \int_E \mu_{\tilde{A}}(x)/x$ [2.12]

En general, sempre que no doni lloc a confusió i fent un abús de llenguatge, expressarem un subconjunt borrós $\tilde{A}$ a partir de la seva funció de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$.

Per exemple, prenent com a referencial E el dels nombres reals R, la funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<1 \\ (x+2)/4 & \text{si } -1\leq x\leq 1 \\ 2-x & \text{si } 1<x\leq 2 \\ 0 & \text{si } x>2 \end{cases}$$

definirà un subconjunt borrós $\tilde{A}$ d'R.

Representem gràficament el subconjunt borrós anterior

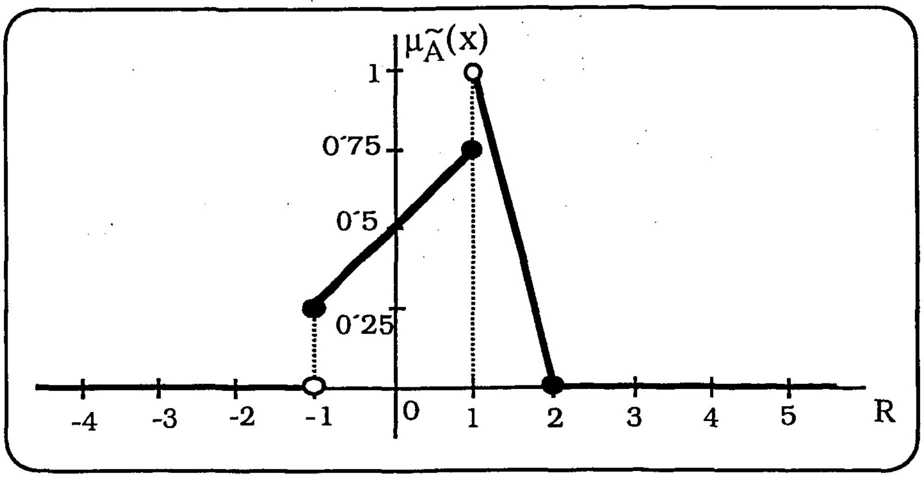


Fig. 2.2 Exemple de subconjunt borrós

2.1.3 GENERALITATS SOBRE SUBCONJUNTS BORROSOS

1) Inclusió i igualtat

a) INCLUSIÓ ÀMPLIA. Donats dos subconjunts borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ del mateix referencial E, direm que $\tilde{A}$ està contingut (o és inclòs) en sentit ampli en $\tilde{B}$ si i només si $\forall x \in E$ es verifica la desigualtat en sentit ampli $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$. Escriurem

$$\boxed{\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in E, \ \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)} \qquad [2.13]$$

Fent servir l'inclusió àmplia i donat un referencial E, anomenem *conjunt de les parts*, simbolitzat per $\tilde{P}(E)$, el conjunt format per tots els subconjunts borrosos d'E,

$$\boxed{\tilde{P}(E)=\left\{\tilde{A} \ / \ \tilde{A} \subseteq E\right\}} \qquad [2.14]$$

b) INCLUSIÓ ESTRICTA. Com a cas particualr de la inclusió àmplia, direm que el contingut o la inclusió és estricte si la desigualtat és estricta, és a dir,

$$\boxed{\tilde{A} \subset \tilde{B} \quad \Leftrightarrow \quad \forall x \in E, \ \mu_{\tilde{A}}(x) < \mu_{\tilde{B}}(x)} \qquad [2.15]$$

c) IGUALTAT. Donats dos subconjunts borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ del mateix referencial E, direm que són iguals si tenen la mateixa funció de pertinença, és a dir,

$$\boxed{\tilde{A} = \tilde{B} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in E, \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)} \qquad [2.16]$$

Aquesta definició d'igualtat és equivalent a

$$\boxed{\tilde{A} = \tilde{B} \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A} \subseteq \tilde{B} \quad i \quad \tilde{B} \subseteq \tilde{A}} \qquad [2.17]$$

Observem que la demostració és immediata, perquè només cal aplicar la propietat antisimètrica de la relació d'ordre usual en l'interval [0,1].

2) Suport, altura i nucli

a) SUPORT. Definim el *suport d'un subconjunt borrós* $\tilde{A}$, supp($\tilde{A}$), del referencial E com el subconjunt nítid format per tots els elements d'E pel quals la funció de pertinença d'$\tilde{A}$ és diferent de zero. Atès que, per definició, la funció de pertinença és sempre no negativa, $\mu_A(x) \geq 0$, podem escriure

$$\boxed{\mathrm{supp}(\tilde{A}) = \{\, x \in E / \ \mu_{\tilde{A}}(x) > 0 \,\}} \qquad [2.18]$$

b) ALTURA. Definim l'*altura d'un subconjunt borrós* $\tilde{A}$, h($\tilde{A}$), com el suprem (sup) del conjunt format per tots els graus de la seva funció de pertinença. Per tant,

$$\boxed{h(\tilde{A}) = \sup\,\{\mu_{\tilde{A}}(x) \ / \ x \in E\,\}} \qquad [2.19]$$

Notem que l'altura d'un subconjunt borrós existeix sempre, perquè el conjunt $\{\mu_{\tilde{A}}(x) \ / \ x \in E\}$ és un subconjunt nítid d'R acotat entre els extrems 0 i 1.

Per exemple, prenem E=R i considerem el subconjunt borrós amb funció de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$: R$\rightarrow$ [0,1] sempre nul·la per valors no positius i de valors iguals a $1/(1+x^2)$ per valors positius, té d'altura, $h(\tilde{A}) = \sup\{\mu_{\tilde{A}}(x) \ / \ x \in R\} = 1$.

Expressant matemàticament aquesta funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{1}{1+x^2} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

i fent la seva gràfica

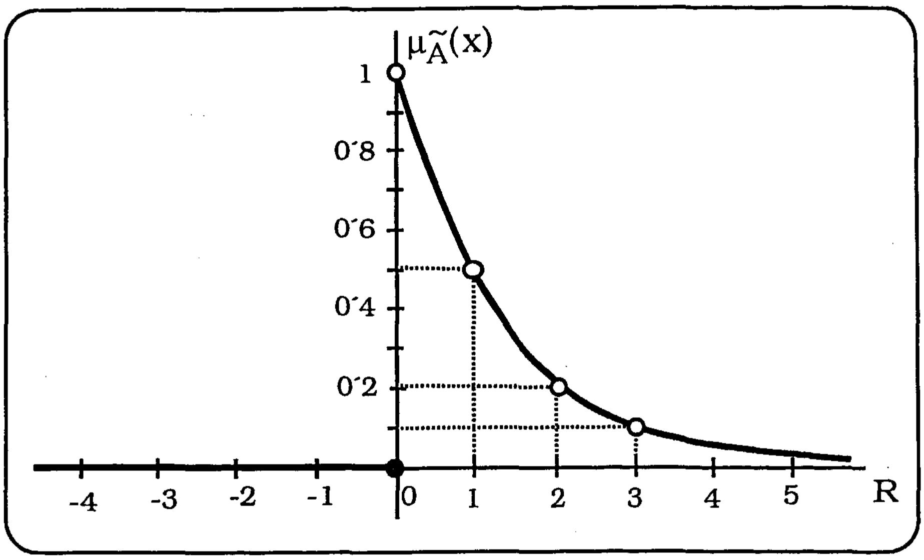


Fig. 2.3 Exemple d'altura d'un subconjunt borrós

podem observar que la seva altura és la unitat, perquè el suprem de la funció de pertinença és igual a 1.

Com a *cas particular d'un referencial finit*, i recordant que el suprem (sup) d'aquest tipus de referencial coincideix amb el seu màxim (màx), tindrem

$$\boxed{h(\tilde{A})=\text{màx}\,\{\mu_{\tilde{A}}(x)\ /\ x\in E\}} \qquad [2.20]$$

c) NORMALITAT. Un subconjunt borrós $\tilde{A}$ d'un referencial E direm que és un *subconjunt borrós normal* si existeix almenys un element d'E, tal que la funció de pertinença pren el valor 1, és a dir, si té una altura unitària:

$$\boxed{\tilde{A}\ \text{és normal} \quad \Leftrightarrow \quad \exists x\in E\ /\ \mu_{\tilde{A}}(x)=1} \qquad [2.21]$$

PROPOSICIÓ 2.1. «Si $\tilde{A}$ és un subconjunt borrós d'un referencial E amb funció de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$, i si existeix el màx{ $\mu_{\tilde{A}}(x)$ / $x \in E$ }, aleshores el conjunt borrós $\tilde{A}_N$ amb funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{A}_N}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) / \text{màx}\{\mu_{\tilde{A}}(x) \mid x \in E\} \qquad [2.22]$$

és un subconjunt borrós normal.»

Demostració:

Sigui α'=màx{$\mu_{\tilde{A}}(x)$ / $x \in E$}. Aleshores $\exists x' \in E$ tal que $\mu_{\tilde{A}}(x')=\alpha'$. Per tant, $\mu_{\tilde{A}_N}(x')=\alpha'/\alpha'=1$ i així $\tilde{A}_N$ és normal. ♦

d) NUCLI. Donat un subconjunt borrós $\tilde{A}$ del referencial E, anomenem *nucli* d'$\tilde{A}$, i el denotem per N($\tilde{A}$), el conjunt ordinari (crisp) format per tots els elements del referencial E que tenen la funció de pertinença igual a 1. És a dir, el nucli ve definit per

$$\boxed{N(\tilde{A}) = \{ x \in E \mid \mu_{\tilde{A}}(x)=1 \}} \qquad [2.23]$$

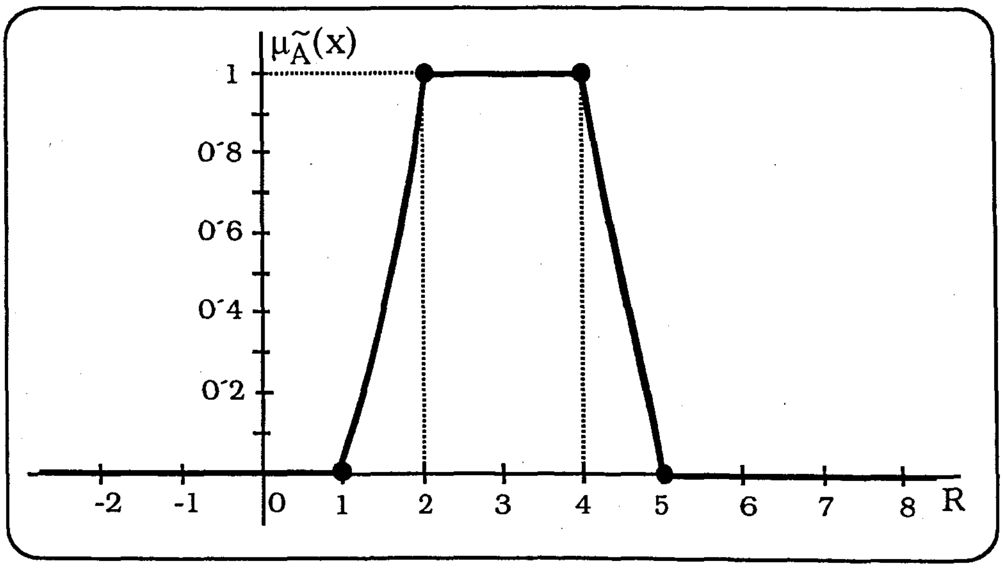


Fig. 2.4 Exemple de nucli de subconjunt borrós

El nucli anterior, N($\tilde{A}$)=[2, 4], és el de la funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} (x^2-x)/2 & \text{si } 1 \le x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 \le x \le 4 \\ 5-x & \text{si } 4 < x \le 5 \\ 0 & \text{si } x<1 \text{ o bé } x>5 \end{cases}$$

3) α-talls d'un subconjunt borrós

Donat $\alpha \in [0,1]$, definim el conjunt de nivell α o α-tall d'un subconjunt borrós $\tilde{A}$ del referencial E amb funció de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$, com el conjunt nítid A_α format per tots els elements d'E que tenen un grau de pertinença a $\tilde{A}$ superior o igual a α. És a dir,

$$\boxed{A_\alpha = \{ x \in E / \ \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \}} \qquad [2.24]$$

Observem que per $\alpha=0$ es verifica que $A_0=E$.

Per exemple, si $\tilde{A}$ és el subconjunt borrós de R que té per funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = e^{-|x|}$$

llavors els seus α-talls A_α seran:

a) Si $0 < \alpha < 1$

$$A_\alpha = \{x \in R / \mu_A(x) \geq \alpha\} = \{x \in R / e^{-|x|} \geq \alpha\} = \{x \in R / -|x| \geq Ln\alpha\} =$$

$$= \{x \in R / |x| \leq -Ln\alpha\} = [\, Ln\alpha \, , -Ln\alpha]$$

b) Si $\alpha=0$ $\quad A_0=R$

c) Si $\alpha=1$ $\quad A_1=\{x \in R / e^{-|x|}=1\} = \{x \in R / -|x|=0\} = \{1\}$.

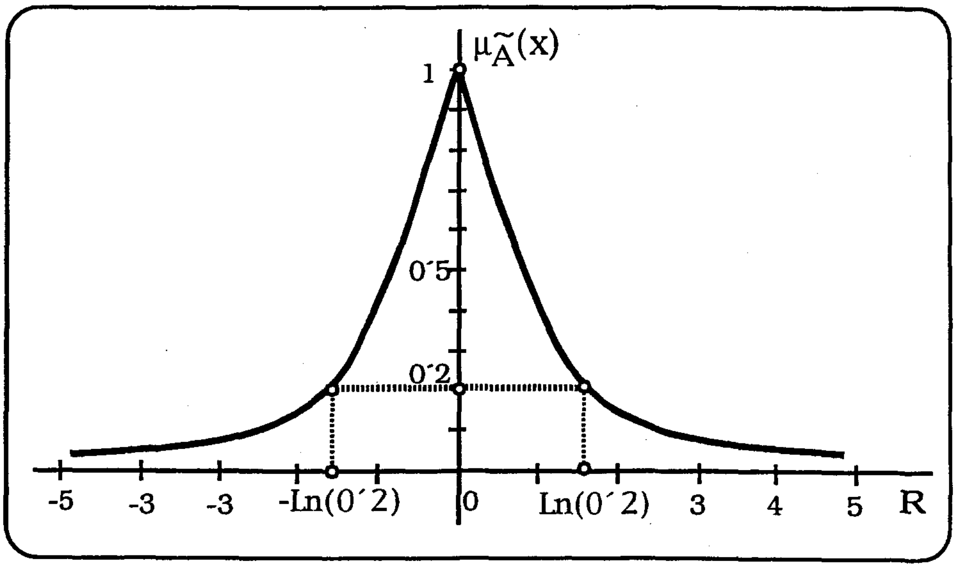


Fig. 2.5 Exemple dels α-talls

Si en la definició d'α-tall la desigualtat és estricta, direm que és un *α-tall estricte* i el representarem per $A^{+}{}_{\alpha}$. És a dir,

$$\boxed{A^{+}{}_{\alpha} = \{x \in E \,/\, \mu_{\tilde{A}}(x) > \alpha\}} \qquad [2.25]$$

PROPOSICIÓ 2.2. «Els α-talls $\{A_\alpha\}_{\alpha \in [0,1]}$ del subconjunt borrós $\tilde{A}$ verifiquen

1) Si $\alpha = \mu_{\tilde{A}}(x) \Rightarrow x \in A_\alpha$ 2) $\alpha' > \alpha \Rightarrow A_\alpha \supset A_{\alpha'}$

3) $A_\alpha \cap A_{\alpha'} = A_{\alpha''}$ on $\alpha'' = \text{màx}\{\alpha, \alpha'\}$.»

Demostració:

1) És immediata per la definició d'α-tall.

2) Si $x \in A_{\alpha'} \Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha'$. Com que per hipòtesi $\alpha' > \alpha$ tindrem, $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha$. Llavors serà $x \in A_\alpha$.

3) Si $x \in A_\alpha \cap A_{\alpha'} \Leftrightarrow x \in A_\alpha$ i $x \in A_{\alpha'} \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha$ i $\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha' \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \text{màx}\{\alpha, \alpha'\} = \alpha'' \Leftrightarrow x \in A_{\alpha''}$. ♦

PROPOSICIÓ 2.3. «Si $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ són dos subconjunts borrosos d'un referencial E, llavors $\forall \alpha \in [0,1]$ es verifica:

1) $\tilde{A} \subseteq \tilde{B} \Leftrightarrow A_\alpha \subseteq B_\alpha$ 2) $\tilde{A} = \tilde{B} \Leftrightarrow A_\alpha = B_\alpha$.»

Demostració:

1) Suposem que existeix un α' tal que $A_{\alpha'} \not\subset B_{\alpha'}$, llavors existeix $x' \in E$ tal que $x' \in A_{\alpha'}$ i $x' \notin B_{\alpha'}$ i, per tant, $\mu_{\tilde{A}}(x') \geq \alpha'$ i $\mu_{\tilde{B}}(x') < \alpha'$. En conseqüència, $\mu_{\tilde{B}}(x') < \mu_{\tilde{A}}(x')$, que és una contradicció amb la hipòtesi que $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$.

Suposem ara que $\tilde{A} \not\subset \tilde{B}$, aleshores existirà un $x' \in E$ tal que $\mu_{\tilde{B}}(x') < \mu_{\tilde{A}}(x')$. Sigui $\mu_{\tilde{A}}(x') = \alpha'$, per tant $x' \in A_{\alpha'}$ i $x' \notin B_{\alpha'}$, és a dir, existeix un α' tal que no verifica $A_\alpha \subseteq B_\alpha$.

2) És una conseqüència immediata d'1) i del fet que $\tilde{A} = \tilde{B}$ és equivalent a $\tilde{A} \subseteq \tilde{B}$ i $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}$. ♦

2.2 OPERACIONS AMB SUBCONJUNTS BORROSOS

2.2.1 INTERSECCIÓ DE SUBCONJUNTS BORROSOS

1) Definició d'intersecció

Siguin $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ dos subconjunts borrosos d'un referencial E, amb funcions de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$ i $\mu_{\tilde{B}}$, respectivament, i T una t-norma. Definim la *intersecció* d'$\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ com el subconjunt borrós $\tilde{C}$ amb funció de pertinença

$$\boxed{\mu_{\tilde{C}}(x) = T(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))} \qquad [2.26]$$

Així, doncs, tota intersecció entre subconjunts borrosos queda definida a partir d'una t-norma. Per tant, podem definir infinites interseccions diferents, atès que hi ha infinites t-normes.

Fem notar que cada intersecció complirà diferents propietats que dependran de la t-norma que la defineix.

2) Exemples d'interseccions

Donem a continuació, com a exemple, les interseccions definides a partir de les t-normes [1.26], [1.28] i [1.29]:

a) Producte algebraic: $\tilde{C} = \tilde{A} \cap_1 \tilde{B}$

$$\forall x \in E,\ \mu_{\tilde{C}}(x) = P(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \mu_{\tilde{A}}(x) \cdot \mu_{\tilde{B}}(x)$$

b) Producte acotat: $\tilde{C} = \tilde{A} \cap_2 \tilde{B}$

$$\forall x \in E,\ \mu_{\tilde{C}}(x) = T_{\infty}((\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)) = \text{màx}\{\mu_{\tilde{A}}(x) + \mu_{\tilde{B}}(x) - 1,\ 0\}$$

c) Producte dràstic: $\tilde{C} = \tilde{A} \cap_3 \tilde{B}$

$$\forall x \in E,\quad \mu_{\tilde{C}}(x) = T_d\big(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\big) = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(x) & \text{si } \mu_{\tilde{B}}(x) = 1 \\ \mu_{\tilde{B}}(x) & \text{si } \mu_{\tilde{A}}(x) = 1 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

3) Intersecció de Zadeh

D'entre les infinites interseccions possibles, mereix una especial atenció la definida a partir de la t-norma de Zadeh.

TEOREMA 2.1. «L'aplicació $\wedge$: $[0,1]\times[0,1] \to [0,1]$ definida per $\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) = \text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$ és una t-norma, que es coneix per t-norma de Zadeh.»

Demostració: La subdividim en quatre parts, provant que és monòtona creixent, commutativa, associativa i que existeix l'element unitat.

1) MONÒTONA CREIXENT. Per a tot $\mu_{\tilde{A}}(x)$, $\mu_{\tilde{A}}(x')$, $\mu_{\tilde{B}}(x)$ i $\mu_{\tilde{B}}(x')$ de l'interval [0,1] suposem que

$$\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{A}}(x') \quad \text{i} \quad \mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x')$$

llavors caldrà veure que

$$\text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \leq \text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x'), \mu_{\tilde{B}}(x')\}$$

Considerem els quatre casos següents:

1.a) $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$ i $\mu_{\tilde{A}}(x') \leq \mu_{\tilde{B}}(x')$

Per tant,

$$\text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \mu_{\tilde{A}}(x) \quad \text{i} \quad \text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x'), \mu_{\tilde{B}}(x')\} = \mu_{\tilde{A}}(x')$$

Com que per hipòtesi $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{A}}(x')$, tindrem

$$\text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \leq \text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x'), \mu_{\tilde{B}}(x')\}.$$

1.b) $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$ i $\mu_{\tilde{B}}(x') \leq \mu_{\tilde{A}}(x')$

Per tant,

$$\text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \mu_{\tilde{A}}(x) \quad \text{i} \quad \text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x'), \mu_{\tilde{B}}(x')\} = \mu_{\tilde{B}}(x')$$

Com que per hipòtesi $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x')$, tindrem

$$\text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \leq \text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x'), \mu_{\tilde{B}}(x')\}.$$

1.c) $\mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{A}}(x)$ i $\mu_{\tilde{A}}(x') \leq \mu_{\tilde{B}}(x')$

Per tant,

$$\text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \mu_{\tilde{B}}(x) \quad \text{i} \quad \text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x'), \mu_{\tilde{B}}(x')\} = \mu_{\tilde{A}}(x')$$

Com que per hipòtesi $\mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{A}}(x')$, tindrem

$$\text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \leq \text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x'), \mu_{\tilde{B}}(x')\}.$$

1.d) $\mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{A}}(x)$ i $\mu_{\tilde{B}}(x') \leq \mu_{\tilde{A}}(x')$

Per tant,

$$\text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \mu_{\tilde{B}}(x) \quad \text{i} \quad \text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x'), \mu_{\tilde{B}}(x')\} = \mu_{\tilde{B}}(x')$$

Com que per hipòtesi $\mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x')$, tindrem

$$\text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} \leq \text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x'), \mu_{\tilde{B}}(x')\}.$$

En conseqüència, per 1.a, 1.b, 1.c i 1.d, queda probat que l'aplicació $\wedge$ és monòtona creixent.

2) COMMUTATIVA. Per a tot $\mu_{\tilde{A}}(x)$ i $\mu_{\tilde{B}}(x)$ de l'interval $[0,1]$ tindrem que

$$\text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \text{mín}\{\mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x)\}.$$

3) ASSOCIATIVA. Per a tot $\mu_{\tilde{A}}(x)$, $\mu_{\tilde{B}}(x)$ i $\mu_{\tilde{C}}(x)$ de l'interval $[0,1]$ haurem de provar que

$$\begin{aligned} &\text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \text{mín}\{\mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{C}}(x)\}\} = \\ &\qquad = \text{mín}\{\text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \mu_{\tilde{C}}(x)\} \end{aligned}$$

Considerarem les sis possibilitats següents:

3.a) $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{C}}(x)$ 3.b) $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{C}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$

3.c) $\mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{C}}(x)$ 3.d) $\mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{C}}(x) \leq \mu_{\tilde{A}}(x)$

3.e) $\mu_{\tilde{C}}(x) \leq \mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$ 3.f) $\mu_{\tilde{C}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x) \leq \mu_{\tilde{A}}(x)$

Demostrem únicament, per exemple, la 3.c), perquè les restants es fan de la mateixa manera:

$$\text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \text{mín}\{\mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{C}}(x)\}\} = \text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} = \mu_{\tilde{B}}(x)$$

D'altra banda,

$$\text{mín}\{\text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}, \mu_{\tilde{C}}(x)\} = \text{mín}\{\mu_{\tilde{B}}(x), \mu_{\tilde{C}}(x)\} = \mu_{\tilde{B}}(x)$$

4) EXISTÈNCIA D'ELEMENT UNITAT. Existeix la funció de pertinença del referencial E, $\mu_E(x) \in [0,1]$, tal que per a tot $\mu_{\tilde{A}}(x) \in [0,1]$ es verifica que

$$\text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_E(x)\} = \text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x), 1\} = \mu_{\tilde{A}}(x). \ \blacklozenge$$

DEFINICIÓ D'INTERSECCIÓ DE ZADEH. Siguin $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ dos subconjunts borrosos d'un referencial E, amb funcions de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$ i $\mu_{\tilde{B}}$, respectivament, i sigui la t-norma $\wedge$. Definim la *intersecció de Zadeh* dels subconjunts borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ com el subconjunt borrós $\tilde{C}=\tilde{A}\cap\tilde{B}$ amb funció de pertinença

$$\boxed{\forall x \in E, \quad \mu_{\tilde{C}}(x) = \mu_{\tilde{A}\cap\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x)} \qquad [2.27]$$

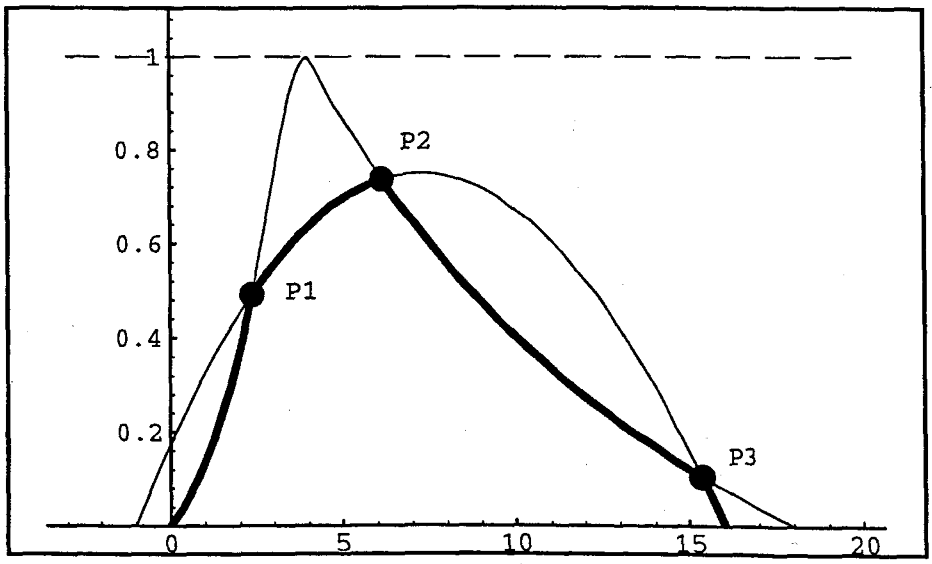


Fig.2.6 Intersecció de dos subconjunts borrosos

4) Intersecció de Zadeh en el cas infinit

A partir de la propietat associativa es pot definir la intersecció de Zadeh d'un nombre finit de subconjunts borrosos, és a dir si $\tilde{A}_1$, $\tilde{A}_2,\dots,\tilde{A}_n$ són n subconjunts borrosos d'un referencial E, aleshores tindrem per a tot $x\in E$,

$$\mu_{\tilde{C}}(x)= \mu_{\tilde{A}_1\cap\tilde{A}_2\cap\dots\cap\tilde{A}_n}(x)= \mu_{\tilde{A}_1}(x)\wedge\mu_{\tilde{A}_2}(x)\wedge\dots\wedge\mu_{\tilde{A}_n}(x) \qquad [2.28]$$

Cal observar que en el cas d'un nombre infinit de conjunts borrosos aquesta definició pot deixar de tenir sentit, atès que el mínim no té perquè existir. Així, per exemple, si suposem els següents subconjunts borrosos $\tilde{A}_k$ amb funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{A}_k}(x)= \frac{1}{k}$$

llavors el $\text{mín}\{\mu_{\tilde{A}_k}(x)\}=\text{mín}\{1,1/2,1/3,\dots\}$ no existeix.

Aquest fet ens porta a una nova definició, sensiblement diferent, d'intersecció en el cas infinit.

NOVA DEFINICIÓ D'INTERSECCIÓ DE ZADEH. Donat un nombre infinit de subconjunts borrosos $\tilde{A}_\beta$ d'un referencial E, amb funcions de pertinença $\mu_{\tilde{A}_\beta}$, anomenen *intersecció de Zadeh* dels subconjunts borrosos $\tilde{A}_\beta$ el subconjunt borrós $\tilde{C}=\bigcap\tilde{A}_\beta$ amb funció de pertinença

$$\boxed{\mu_{\tilde{C}}(x)= \text{ínf}\{\mu_{\tilde{A}_\beta}(x)\}} \qquad [2.29]$$

TEOREMA 2.2. «*La intersecció de Zadeh és l'única que és idempotent*. És a dir, donada una t-norma T idempotent i dos subconjunts borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ d'un referencial E, amb funcions de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$ i $\mu_{\tilde{B}}$ respectivament, qualsevol intersecció $\tilde{C}$ que té per funció de pertinença $\mu_{\tilde{C}}(x)=T(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$, verifica que $\mu_{\tilde{C}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{B}}(x)$.»

Demostració: És immediata per al Teorema 1.2, que provava que la t-norma del mínim de Zadeh era l'única idempotent. ♦

2.2.2 UNIÓ DE SUBCONJUNTS BORROSOS

1) Definició d'unió

Siguin $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ dos subconjunts borrosos d'un referencial E, amb funcions de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$ i $\mu_{\tilde{B}}$, respectivament, i S una t-conorma. Definim la *unió* d'$\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ com el subconjunt borrós $\tilde{C}$ amb funció de pertinença

$$\boxed{\mu_{\tilde{C}}(x)= S(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))} \qquad [2.30]$$

De la mateixa manera que en la intersecció, però ara utilitzant les t-conormes, la unió entre subconjunts borrosos queda definida a partir d'una t-conorma. Podrem definir, en conseqüència, infinites unions diferents.

2) Exemples d'unions

A títol d'exemple, donem a continuació les unions definides a partir de les t-conormes [1.45], [1.47] i [1.48].

a) Suma algebraica: $\tilde{C}= \tilde{A} \cup_1 \tilde{B}$

$$\forall x\in E, \quad \mu_C(x)= S_u(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))= \mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x)-\mu_{\tilde{A}}(x)\cdot\mu_{\tilde{B}}(x)$$

b) Suma acotada: $\tilde{C}= \tilde{A} \cup_2 \tilde{B}$

$$\forall x\in E, \quad \mu_C(x)= S_\infty((\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))= \min\{\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{B}}(x) ,1\}$$

c) Suma dràstica: $\tilde{C}= \tilde{A} \cup_3 \tilde{B}$

$$\forall x\in E, \quad \mu_{\tilde{C}}(x)= S_d\big(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\big) = \begin{cases} \mu_{\tilde{A}}(x) & \text{si } \mu_{\tilde{B}}(x)=0 \\ \mu_{\tilde{B}}(x) & \text{si } \mu_{\tilde{A}}(x)=0 \\ 1 & \text{altrament} \end{cases}$$

3) Unió de Zadeh

D'entre totes aquestes infinites unions mereix una especial atenció la unió definida a partir de la t-conorma de Zadeh.

TEOREMA 2.3. «L'aplicació $\vee$: $[0,1]\times[0,1] \rightarrow [0,1]$ definida per $\mu_{\tilde{A}}(x)\vee\mu_{\tilde{B}}(x)=\text{màx}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\}$ és una t-conorma, que es coneix per t-conorma de Zadeh.»

Demostració: Les propietats de 1) Monòtona creixent, 2) Commutativa i 3) Associativa es demostren de la mateixa manera que en el Teorema 2.1 de la t-norma de Zadeh. Ens falta provar l'última propietat:

4) EXISTÈNCIA D'ELEMENT UNITAT. Existeix la funció de pertinença del conjunt buit $\emptyset$, $\mu_{\emptyset}(x)\in[0,1]$, tal que per a tot $\mu_{\tilde{A}}(x)\in[0,1]$ es verifica que

$$\text{màx}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\emptyset}(x)\}=\text{màx}\{\mu_{\tilde{A}}(x),0\}=\mu_{\tilde{A}}(x). \quad \blacklozenge$$

DEFINICIÓ D'UNIÓ DE ZADEH. Siguin $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ dos subconjunts borrosos d'un referencial E, amb funcions de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$ i $\mu_{\tilde{B}}$, respectivament, i sigui $\vee$ la t-conorma. Definim la *unió de Zadeh* del subconjunts borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ com el subconjunt borrós $\tilde{C}=\tilde{A}\cup\tilde{B}$ amb funció de pertinença

$$\boxed{\forall x\in E, \quad \mu_{\tilde{C}}(x)=\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\vee\mu_{\tilde{B}}(x)} \qquad [2.31]$$

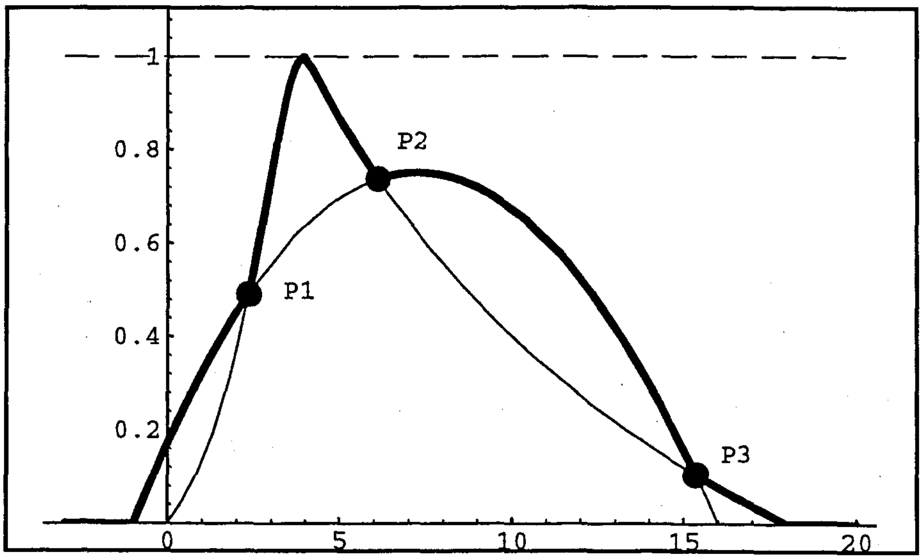


Fig. 2.7 Unió de dos subconjunts borrosos

TEOREMA 2.4. «*La unió de Zadeh és l'única que és idempotent.* És a dir, donada una t-conorma S idempotent i dos subconjunts borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ d'un referencial E, amb funcions de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$ i $\mu_{\tilde{B}}$ resp., qualsevol unió $\tilde{C}$ amb funció de pertinença $\mu_{\tilde{C}}(x)=S(\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x))$, verifica que $\mu_{\tilde{C}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\vee\mu_{\tilde{B}}(x)$.»

Demostració: És immediata pel Teorema 1.4, que prova que la t-conorma del mínim de Zadeh és l'única t-conorma idempotent. ♦

2.2.3 COMPLEMENTARI D'UN SUBCONJUNT BORRÓS

1) Definició de complementació

Sigui $\tilde{A}$ un subconjunt borrós d'un referencial E, amb funció de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$, i sigui N una negació. Definim el *complementari* d'$\tilde{A}$ com el subconjunt borrós $\tilde{C}$ amb funció de pertinença

$$\boxed{\mu_{\tilde{C}}(x)=N(\mu_{\tilde{A}}(x))} \qquad [2.32]$$

TEOREMA 2.5. «L'aplicació (') :[0,1] → [0,1] definida per $\mu_{\tilde{A}'}(x)= 1-\mu_{\tilde{A}}(x)$ és una negació, coneguda per *negació de Zadeh.*»

Demostració: Provarem els tres apartats següents:

1) COMPLEMENTARIS DEL BUIT I DEL REFERENCIAL:

$$\mu_{\emptyset'}(x)=1-\mu_{\emptyset}(x)=1-0=1 \quad , \quad \mu_{E'}(x)=1-\mu_E(x)=1-1=0$$

2) MONÒTONA DECREIXENT:

$$\forall\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(x')\in[0,1] \ \text{ tal que } \mu_{\tilde{A}}(x)\leq\mu_{\tilde{A}}(x'),$$

es verifica $\quad -\mu_{\tilde{A}}(x) \geq -\mu_{\tilde{A}}(x') \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \quad 1-\mu_{\tilde{A}}(x) \geq 1-\mu_{\tilde{A}}(x') \quad \Leftrightarrow \quad \mu_{\tilde{A}'}(x) \geq \mu_{\tilde{A}'}(x')$$

3) INVOLUTIVA:

$$\forall\mu_{\tilde{A}}(x)\in[0,1], \qquad \mu_{\tilde{A}''}(x)=(1-\mu_{\tilde{A}}(x))'=1-(1-\mu_{\tilde{A}}(x))=\mu_{\tilde{A}}(x).\ ♦$$

2) Complementari de Zadeh

Sigui $\tilde{A}$ un subconjunt borrós d'un referencial E, amb funció de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$ i sigui la negació ('). Definim el *complementari de Zadeh* del subconjunt borrós $\tilde{A}$ com el subconjunt borrós $\tilde{A}'$ amb funció de pertinença

$$\boxed{\mu_{\tilde{A}'}(x)= 1-\mu_{\tilde{A}}(x)} \qquad [2.33]$$

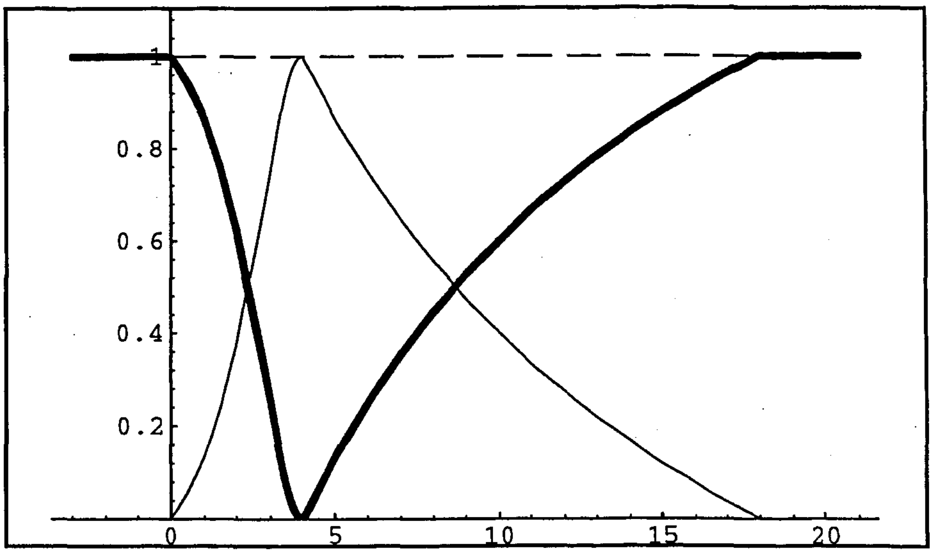


Fig. 2.8 Complementari d'un subconjunt borrós

2.2.4 INTERSECCIÓ, UNIÓ i COMPLEMENTACIÓ DE ZADEH

Exposem ara algunes propietats relacionades amb aquestes tres operacions de Zadeh, efectuades amb conjunts borrosos:

TEOREMA 2.6. «La complementació de subconjunts borrosos compleix les següents propietats lligades amb la intersecció i la unió, conegudes com *lleis de Morgan*: ». És a dir,

1) El complementari de la intersecció és igual a la unió dels complementaris,

$$\boxed{(\tilde{A}\cap\tilde{B})'=\tilde{A}'\cup\tilde{B}'} \qquad [2.34]$$

2) El complementari de la unió és igual a la intersecció dels complementaris,

$$\boxed{(\tilde{A}\cup\tilde{B})'=\tilde{A}'\cap\tilde{B}'} \qquad [2.35]$$

Demostració:

1) COMPLEMENTARI DE LA INTERSECCIÓ: $\boxed{(\tilde{A}\cap\tilde{B})'=\tilde{A}'\cup\tilde{B}'}$

Observem en primer lloc que donats dos elements a i b qualsevols de l'interval [0,1] es verifica

$$1-\text{mín}\{a, b\} = \text{màx}\{1-a, 1-b\}$$

Si suposem que $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$, obtindrem

$$\mu_{(\tilde{A}\cap\tilde{B})'}(x) = 1-\mu_{(\tilde{A}\cap\tilde{B})}(x) = 1-\text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{B}}(x)\} =$$

$$= \text{màx}\{1-\mu_{\tilde{A}}(x), 1-\mu_{\tilde{B}}(x)\} = \text{màx}\{\mu_{\tilde{A}'}(x), \mu_{\tilde{B}'}(x)\} = \mu_{\tilde{A}'\cup\tilde{B}'}(x).$$

2) COMPLEMENTARI DE LA UNIÓ: $\boxed{(\tilde{A}\cup\tilde{B})'=\tilde{A}'\cap\tilde{B}'}$

Com que també es verifica

$$1-\text{màx}\{a, b\} = \text{mín}\{1-a, 1-b\}$$

la propietat del complementari de la unió es demostra de la manera similar al cas anterior. ♦

Notem que aquestes tres operacions amb subconjunts borrosos no compleixen les mateixes propietats que les dels subconjunts ordinaris, perquè *en el cas borrós no es verifiquen els principis de no contradicció i del terç exclòs*:

$$\boxed{\tilde{A} \cap \tilde{A}' \neq \emptyset} \quad \text{i} \quad \boxed{\tilde{A} \cup \tilde{A}' \neq E} \qquad [2.36\text{-}37]$$

Per exemple, prenent el referencial $E=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ i el subconjunt borrós

$$\tilde{A}= 0'1/x_1 + 0'7/x_2 + 0'3/x_3 + 0'1/x_4 + 0/x_5 + 0'9/x_6$$

el complentari serà

$$\tilde{A}'=0'9/x_1 + 0'3/x_2 + 0'7/x_3 + 0'9/x_4 + 1/x_5 + 0'1/x_6.$$

Aleshores, tindrem que

$$\tilde{A} \cap \tilde{A}'=0'1/x_1 + 0'3/x_2 + 0'3/x_3 + 0'1/x_4 + 0/x_5 + 0'1/x_6 \neq \emptyset$$

$$\tilde{A} \cup \tilde{A}'=0'9/x_1 + 0'7/x_2 + 0'7/x_3 + 0'9/x_4 + 1/x_5 + 0'9/x_6 \neq E$$

La representació gràfica dels quatre conjunts borrosos anteriors ve expressada per les figures següents:

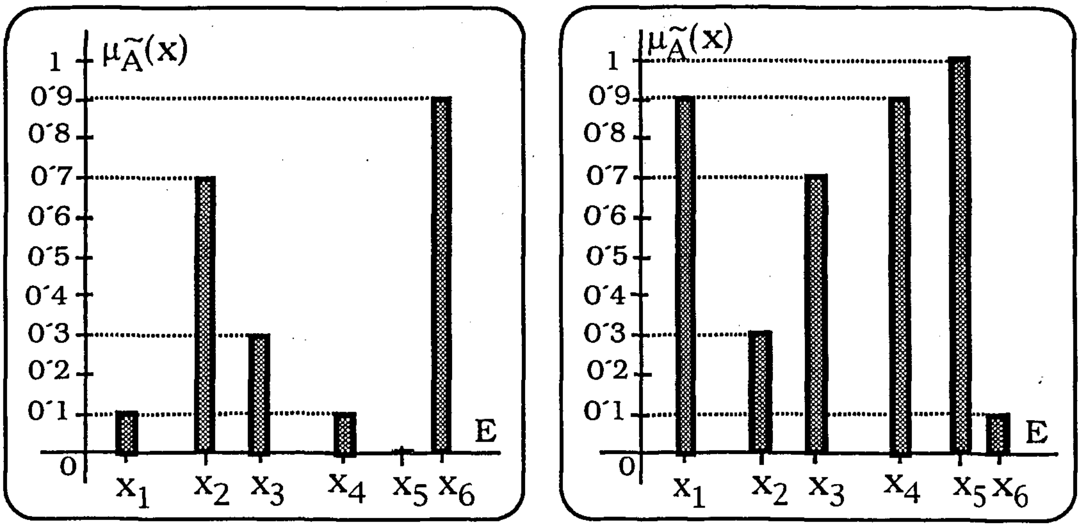


Fig.2.9 Subconjunts borrós $\tilde{A}$ i el seu complementari, $\tilde{A}'$

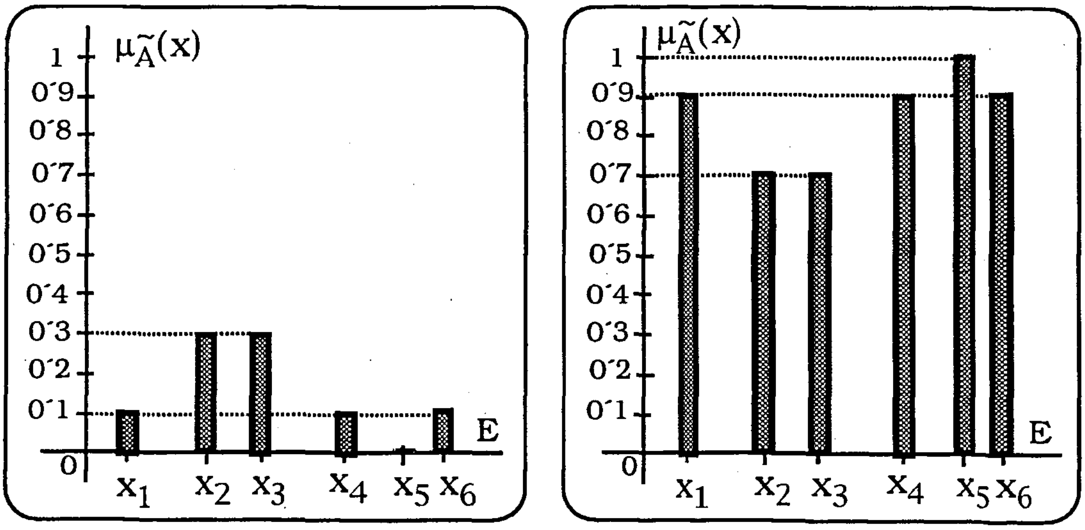


Fig.2.10 Subconjunts borrosos $\tilde{A} \cap \tilde{A}'$ i $\tilde{A} \cup \tilde{A}'$

ESTRUCTURA DE RETICLE[5] .

TEOREMA 2.7. «La terna $(\tilde{P}(E), \cap, \cup)$ té una estructura de reticle distributiu i no complementari.»

Demostració: L'efectuarem amb els sis passos següents:

[5] LATICE THEORY. *American Mathematical*. Society Colloquium Publications, XXV. 1967.

1) IDEMPOTÈNCIA:

a) $\forall \tilde{A} \in \tilde{P}(E)$, com que $\mu_{\tilde{A}\cap\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)$ serà

$$\tilde{A} \cap \tilde{A} = \tilde{A}$$

b) $\forall \tilde{A} \in \tilde{P}(E)$, com que $\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\vee\mu_{\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)$ tindrem

$$\tilde{A} \cup \tilde{A} = \tilde{A}$$

2) COMMUTATIVITAT:

a) Per definició de t-norma, $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \tilde{B} \cap \tilde{A}$

b) Per definició de t-conorma, $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \tilde{B} \cup \tilde{A}$

3) ASSOCIATIVITAT:

a) Per definició de t-norma, $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = \tilde{A} \cap (\tilde{B} \cap \tilde{C})$

b) Per definició de t-conorma, $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = \tilde{A} \cup (\tilde{B} \cup \tilde{C})$

4) ABSORCIÓ:

a) Es verifica que $\tilde{A} \cap (\tilde{A} \cup \tilde{B}) = \tilde{A}$.

En efecte, si $\mu_{\tilde{A}}(x) \leq \mu_{\tilde{B}}(x)$, aleshores tenim $\mu_{(\tilde{A}\cap(\tilde{A}\cup\tilde{B}))}(x)=$ $=\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{A}\cup\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge(\mu_{\tilde{A}}(x)\vee\mu_{\tilde{B}}(x))=\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x)$.

b) Es verifica que $\tilde{A} \cup (\tilde{A} \cap \tilde{B}) = \tilde{A}$.

La demostració és similar al cas anterior.

5) DISTRIBUTIVITAT:

a) Es compleix que $\tilde{A} \cap (\tilde{B} \cup \tilde{C}) = (\tilde{A} \cap \tilde{B}) \cup (\tilde{A} \cap \tilde{C})$

b) Es compleix que $\tilde{A} \cup (\tilde{B} \cap \tilde{C}) = (\tilde{A} \cup \tilde{B}) \cap (\tilde{A} \cup \tilde{C})$

En ambdós casos la demostració és trivial.

6) NO COMPLEMENTARIETAT:

a) El conjunt $\tilde{P}(E)$ no té element nul

b) El conjunt $\tilde{P}(E)$ no té element universal

Per demostrar que no és un reticle complementari farem servir un contraexemple, provant que, donats dos subconjunts borrosos, la intersecció amb els seus complementaris no dóna el mateix conjunt borrós.

Sigui el referencial $E=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6\}$ i els dos subconjunts borrosos

$$\tilde{A}= 0'1/x_1 + 0'7/x_2 + 0'3/x_3 + 0'1/x_4 + 0/x_5 + 0'9/x_6$$

$$\tilde{B} = 0'2/x_1 + 0'8/x_2 + 0'4/x_3 + 0'3/x_4 + 0'5/x_5 + 1/x_6$$

Aleshores, els seus complementaris seran

$$\tilde{A}'= 0'9/x_1 + 0'3/x_2 + 0'7/x_3 + 0'9/x_4 + 1/x_5 + 0'1/x_6$$

$$\tilde{B}' = 0'8/x_1 + 0'2/x_2 + 0'6/x_3 + 0'7/x_4 + 0'5/x_5 + 0/x_6$$

Formem les interseccions amb els seus complementaris

$$\tilde{A} \cap \tilde{A}'=0'1/x_1 + 0'3/x_2 + 0'3/x_3 + 0'1/x_4 + 0/x_5 + 0'1/x_6$$

$$\tilde{B} \cap \tilde{B}'= 0'2/x_1 + 0'2/x_2 + 0'4/x_3 + 0'3/x_4 + 0'5/x_5 + 0/x_6$$

Observem que resulta $\tilde{A} \cap \tilde{A}' \neq \tilde{B} \cap \tilde{B}'$. ◆

OBSERVACIONS:

Recordem que les úniques t-normes i t-conormes que verifiquen la propietat d'idempotència són les de Zadeh. Per tant, *l'estructura algebraica formada per la intersecció i la unió de Zadeh és l'única amb estructura de reticle.*

Fixem-nos també que la terna formada pel conjunt de les parts borroses, el producte acotat i la suma acotada, $(\tilde{P}(E), \cap_2, \cup_2)$, no té estructura de reticle. No obstant, es verifica el principi del terç exclòs i el principi de no contradicció, és a dir,

$$\tilde{A} \cap_2 \tilde{A}'= \emptyset \qquad \text{i} \qquad \tilde{A} \cup_2 \tilde{A}'=E$$

En efecte, anomenant $\tilde{C}=\tilde{A} \cap_2 \tilde{A}'$ i $\tilde{D}=\tilde{A} \cup_2 \tilde{A}'$ tenim que

$$\forall x \in E,\ \mu_{\tilde{C}}(x)= 0\vee(\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{A}'}(x)-1)= 0\vee(\mu_{\tilde{A}}(x)+1-\mu_{\tilde{A}}(x)-1)= 0\vee 0=0$$

$$\forall\ x \in E\ \ \mu_{\tilde{D}}(x)= 1\wedge(\mu_{\tilde{A}}(x)+\mu_{\tilde{A}'}(x))=1\wedge(\mu_{\tilde{A}}(x)+1-\mu_{\tilde{A}}(x))=1\wedge 1=1.$$

TEOREMA 2.8. «Si $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ són dos subconjunts borrosos d'un referencial E i α és qualsevol valor de l'interval [0,1], llavors es compleixen les tres propietats següents:

1) $(A \cap B)_\alpha = A_\alpha \cap B_\alpha$ 2) $(A \cup B)_\alpha = A_\alpha \cup B_\alpha$

3) $(A')_\alpha = (A^+_{(1-\alpha)})'$.»

Demostració:

1) INTERSECCIÓ:

Sigui $x \in (A \cap B)_\alpha \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A} \cap \tilde{B}}(x) \geq \alpha \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x) \geq \alpha \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha$ i $\mu_{\tilde{B}}(x) \geq \alpha \Leftrightarrow x \in A_\alpha$ i $x \in B_\alpha \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A_\alpha \cap B_\alpha$.

2) UNIÓ:

Sigui $x \in (A \cup B)_\alpha \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A} \cup \tilde{B}}(x) \geq \alpha \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \vee \mu_{\tilde{B}}(x) \geq \alpha \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha$ o $\mu_{\tilde{B}}(x) \geq \alpha \Leftrightarrow x \in A_\alpha$ o $x \in B_\alpha \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in A_\alpha \cup B_\alpha$.

3) COMPLEMENTACIÓ:

Sigui $x \in (A')_\alpha \Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}'}(x) \geq \alpha \Leftrightarrow 1-\mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1-\alpha \Leftrightarrow x \notin A^+_{(1-\alpha)} \Leftrightarrow x \in (A^+_{(1-\alpha)})'$. ♦

2.3 REPRESENTACIÓ D'UN SUBCONJUNT BORRÓS MITJANÇANT ELS SEUS α-TALLS

Anem a veure a continuació que un subconjunt borrós queda totalment determinat si es coneixen tots els seus α-talls.

Subconjunt borrós d'un α-tall

Donats els α-talls A_α del subconjunt borrós $\tilde{A}$, definim per a cadascun d'ells el subconjunt borrós $\tilde{A}_\alpha$ amb funció de pertinença

$$\boxed{\mu_{\tilde{A}_\alpha}(x) = \alpha \cdot \mu_{A_\alpha}(x)} \qquad [2.38]$$

on $\mu_{A\alpha}(x)$ és la funció característica del subconjunt nítid A_α, és a dir, la funció definida per

$$\mu_{A_\alpha}(x)=\begin{cases} 1 & \text{si } x\in A_\alpha \\ 0 & \text{si } x\notin A_\alpha \end{cases}$$

Exposem a continuació el següent TEOREMA DE DESCOMPOSICIÓ:[6]

TEOREMA 2.9. «Donat un subconjunt borrós $\tilde{A}$ d'un referencial E i si tenim en compte les notacions de la definició anterior, es verifica:

$$\tilde{A}=\bigcup_{\alpha\in[0,1]}\tilde{A}_\alpha \quad \text{o bé} \quad \mu_{\tilde{A}}(x)=\sup\left\{\mu_{\tilde{A}_\alpha}(x) \,/\, \alpha\in[0,1]\right\}$$.»

Demostració:

Donat un element qualsevol $x\in E$, existeix un element $a\in[0,1]$ tal que $\mu_{\tilde{A}}(x)=a$. Llavors podem escriure:

$$\sup\left\{\mu_{\tilde{A}_\alpha}(x) \,/\, \alpha\in[0,1]\right\}=$$
$$=\text{màx}\left\{\sup\left\{\mu_{\tilde{A}_\alpha}(x) \,/\, \alpha\in[0,a]\right\}, \sup\left\{\mu_{\tilde{A}_\alpha}(x) \,/\, \alpha\in[a,1]\right\}\right\}$$

Considerem els dos casos següents:

a) Si $\alpha\in(a,1]\Rightarrow a<\alpha\Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x)<\alpha\Rightarrow x\notin A_\alpha\Rightarrow \mu_{\tilde{A}_\alpha}(x)=0$

b) Si $\alpha\in[0,a]\Rightarrow a\geq\alpha\Rightarrow \mu_{\tilde{A}}(x)\geq\alpha\Rightarrow x\in A_\alpha\Rightarrow \mu_{\tilde{A}_\alpha}(x)=\alpha$

Aleshores,

$$\sup\left\{\mu_{\tilde{A}_\alpha}(x) \,/\, \alpha\in[0,1]\right\}=$$
$$=\text{màx}\left\{\sup\left\{\alpha \,/\, \alpha\in[0,a]\right\}, \sup\{0\}\right\}=\text{màx}\{a,0\}=\mu_{\tilde{A}}(x)$$

que és el que volíem demostrar. ♦

Com a EXEMPLE, considerem el referencial E={a, b, c, d, e} i prenem el subconjunt borròs $\tilde{A}$ =0.2/a + 0.4/b + 0.6/c + 0.8/d + 1/e.

[6] SAKAVA (1993), Pàg.16.

Els α-talls A_α del conjunt borrós $\tilde{A}$ són:

$$A_{0.2}=\{x\in E\ /\ \mu_{\tilde{A}}(x)\geq 0.2\}=\{a, b, c, d, e\}$$

$$A_{0.4}=\{x\in E\ /\ \mu_{\tilde{A}}(x)\geq 0.4\}=\{b, c, d, e\}$$

$$A_{0.6}=\{x\in E\ /\ \mu_{\tilde{A}}(x)\geq 0.6\}=\{c, d, e\}$$

$$A_{0.8}=\{x\in E\ /\ \mu_{\tilde{A}}(x)\geq 0.8\}=\{d, e\}$$

$$A_{1}=\{x\in E\ /\ \mu_{\tilde{A}}(x)\geq 1\}=\{e\}$$

que també podem expressar amb la notació

$$A_{0.2}= 1/a + 1/b + 1/c + 1/d + 1/e$$

$$A_{0.4}= 0/a + 1/b + 1/c + 1/d + 1/e$$

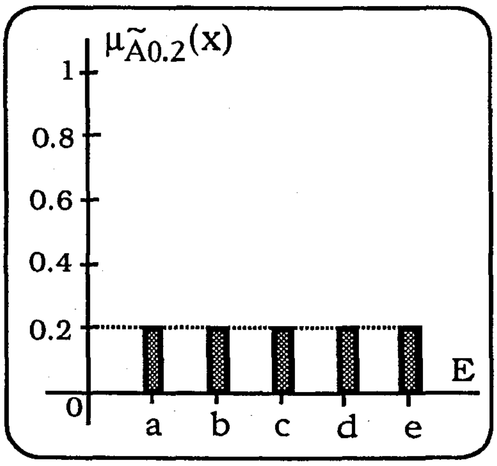
$$A_{0.6}= 0/a + 0/b + 1/c + 1/d + 1/e$$

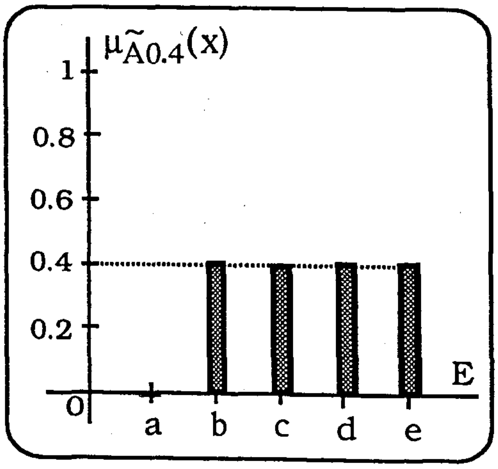
$$A_{0.8}= 0/a + 0/b + 0/c + 1/d + 1/e$$

$$A_{1}= 0/a + 0/b + 0/c + 0/d + 1/e$$

En conseqüència, les funcions de pertinença dels subconjunts borrosos $\tilde{A}_\alpha$ seran:

$\mu_{\tilde{A}0.2}(x)=0.2\cdot\mu_{A0.2}(x)$ $\mu_{\tilde{A}0.4}(x)=0.4\cdot\mu_{A0.4}(x)$





És a dir, obtindrem les funcions de pertinença

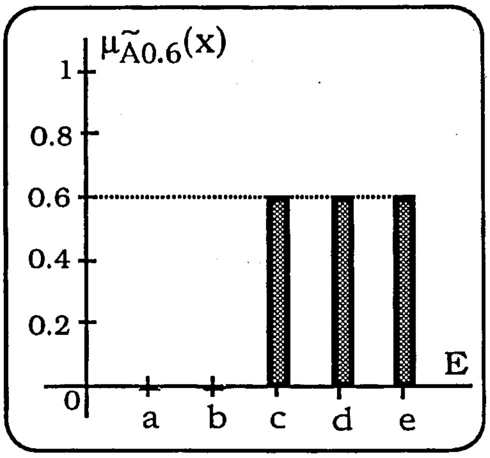
$$\mu_{\tilde{A}0.2}(x)=0.2/a + 0.2/b + 0.2/c + 0.2/d + 0.2/e$$

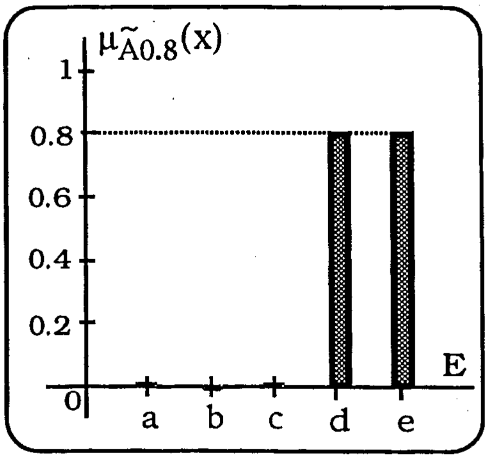
$$\mu_{\tilde{A}0.4}(x)= 0/a + 0.4/b + 0.4/c + 0.4/d + 0.4/e$$

De la mateixa manera,

$$\mu_{\tilde{A}0.6}(x)=0.6\cdot\mu_{A\,0.6}(x)= 0/a + 0/b + 0.6/c + 0.6/d + 0.6/e$$

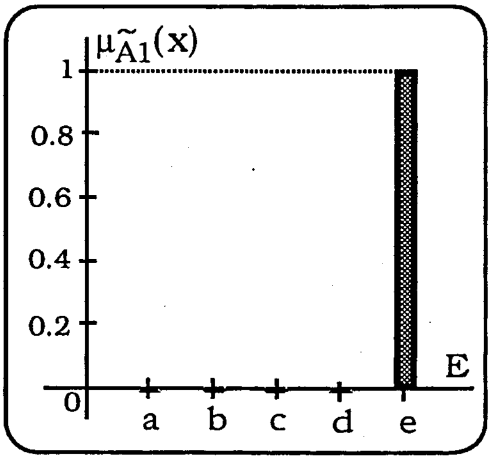
$$\mu_{\tilde{A}0.8}(x)=0.8\cdot\mu_{A\,0.8}(x)= 0/a + 0/b + 0/c + 0.6/d + 0.6/e$$

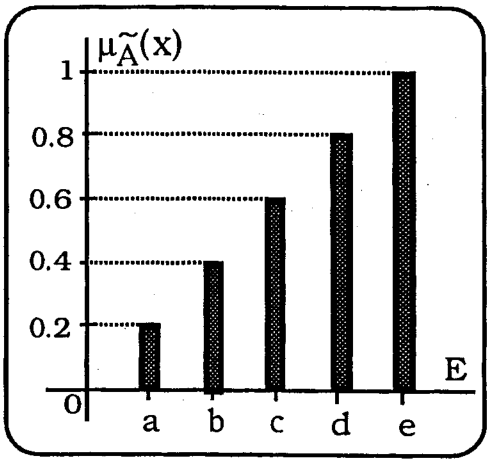




Finalment,

$$\mu_{\tilde{A}1}(x)=1\cdot\mu_{A\,1}(x)= 0/a+ 0/b + 0/c + 0/d + 1/e$$





Fent la seva unió, ens quedarà la gràfica superior dreta; és a dir, el conjunt $\tilde{A}$. En efecte,

$$\cup\ \tilde{A}_\alpha=0.2\cdot A_{0.2}\cup 0.4\cdot A_{0.4}\cup 0.6\cdot A_{0.6}\cup 0.8\cdot A_{0.8}\cup 1\cdot A_1=$$

$$= (\text{màx}\{0.2, 0, 0, 0, 0\})/a + (\text{màx}\{0.2, 0.4, 0, 0, 0\})/b +$$

$$(\text{màx}\{0.2, 0.4, 0.6, 0, 0\})/c +(\text{màx}\{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 0\})/d +$$

$$+ (\text{màx}\{0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1\})/e =$$

$$= 0.2/a + 0.4/b +0.6/c +0.8/d +1/e = \tilde{A}.$$

2.4 SUBCONJUNTS BORROSOS CONVEXOS

a) Definició de subconjunt borrós convex. Considerem el referencial dels nombres reals R i prenem un subconjunt borrós $\tilde{A}$ d'R amb funció de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$. Direm que $\tilde{A}$ és un *subconjunt borrós convex* si i només si tots els seus α-talls $\{A_\alpha\}_{\alpha\in[0,1]}$ són conjunts convexos en el sentit de la definició de l'Annex A.

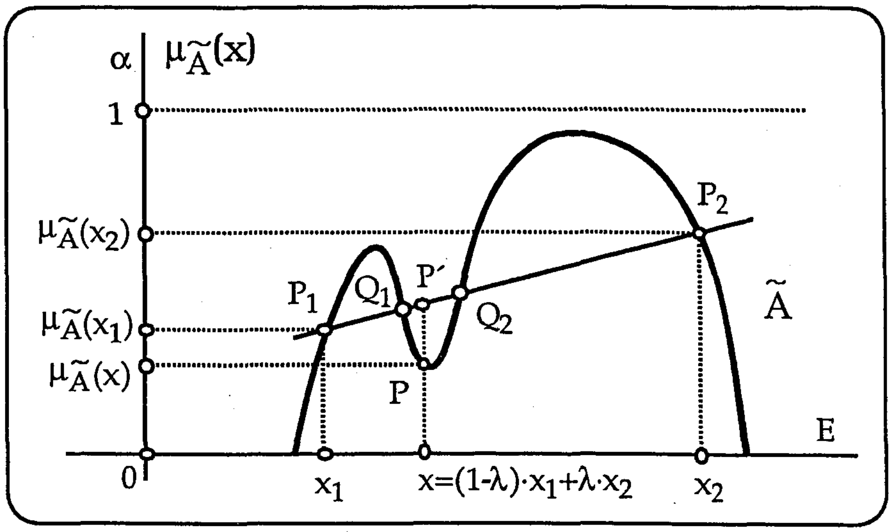


Fig.2.11 Subconjunt borrós no convex

b) Caracterització dels subconjunts borrosos convexos. Exposem i demostrem el següent teorema de caracterització:

TEOREMA 2.10. «El subconjunt borrós $\tilde{A}$ és convex si i sol si, $\forall x_1,x_2\in R$ i $\forall\lambda\in[0,1]$, es verifica:

$$\boxed{\mu_{\tilde{A}}[\lambda\cdot x_1+(1-\lambda)\cdot x_2] \geq \text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}} \qquad [2.39]$$

Demostració:

1) Suposem en primer lloc que $\tilde{A}$ és convex. Llavors donats dos elements x_1, x_2 qualssevol d'R, considerem, sense perdre generalitat, que $\alpha=\mu_{\tilde{A}}(x_1)\leq\mu_{\tilde{A}}(x_2)$.

Per tant, $x_1,x_2\in A_\alpha$. Atès que A_α és convex, es verifica que $\lambda\cdot x_1+(1-\lambda)\cdot x_2\in A_\alpha$, i per tant,

$$\mu_{\tilde{A}}[\lambda\cdot x_1+(1-\lambda)\cdot x_2] \geq \alpha = \mu_{\tilde{A}}(x_1)= \text{mín}\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\}.$$

2) Considerem ara la hipòtesi, $\forall x_1,x_2 \in R$ i $\forall \lambda \in [0,1]$,

$$\mu_{\tilde{A}}[\lambda \cdot x_1+(1-\lambda)\cdot x_2] \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu(x_2)\}.$$

Aplicant la definició d'α-tall, $\forall x_1,x_2 \in A_\alpha$ es verifica $\mu_{\tilde{A}}(x_1) \geq \alpha$ i també $\mu_{\tilde{A}}(x_2) \geq \alpha$. Per tant, $\forall \lambda \in [0,1]$ tindrem

$$\mu_{\tilde{A}}[\lambda \cdot x_1+(1-\lambda)\cdot x_2] \geq \min\{\mu_{\tilde{A}}(x_1), \mu_{\tilde{A}}(x_2)\} \geq \min\{\alpha, \alpha\} = \alpha$$

Conseqüentment, $\lambda.x_1+(1-\lambda)x_2 \in A_\alpha$. Llavors A_α és convex $\forall \alpha \in [0,1]$. Finalment, concluïm que $\tilde{A}$, és convex. ♦

2.5 PROPIETATS SEMÀNTIQUES DELS SUBCONJUNTS BORROSOS

Donat un subconjunt borrós $\tilde{A}$ definit per un predicat vague $\tilde{P}(x)$ modelitzat per la seva funció de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$, volem definir un altre subconjunt borrós $\tilde{B}$, a partir de la funció de pertinença del primer, que ens permeti donar un predicat vague del segon.

Considerem, per tant, $\tilde{A}$ un subconjunt borrós d'un referencial E Podem establir les següents definicions:

2.5.1 Translació. Anomenem *translació* de valor L ($L \neq 0$) d'un subconjunt borrós $\tilde{A}$ el subconjunt borrós $\tilde{B}$ que té per funció de pertinença

$$\boxed{\mu_{\tilde{B}}(x) = \mu_{\tilde{A}}(x-L)} \qquad [2.40]$$

Si $L>0$ parlarem de *translació a la dreta* del subconjunt borrós $\tilde{A}$, i, lògicament, si $L<0$ direm que és una *translació a l'esquerra.*

2.5.2 Compressió. Anomenem *compressió* de raó k ($k>1$) d'un subconjunt borrós $\tilde{A}$ el subconjunt borrós $\tilde{B}$ amb funció de pertinença

$$\boxed{\mu_{\tilde{B}}(x) = [\mu_{\tilde{A}}(x)]^k} \qquad [2.41]$$

c) Dilatació. Anomenem *dilatació* de raó k ($0<k<1$) d'un subconjunt borrós $\tilde{A}$ el subconjunt borrós $\tilde{B}$ amb funció de pertinença

$$\boxed{\mu_{\tilde{B}}(x) = [\mu_{\tilde{A}}(x)]^k} \qquad [2.42]$$

Suposem, per EXEMPLE, el referencial R dels nombres reals i considerem el subconjunt borrós $\tilde{A}=\{x \in R \ / \ x \text{ és proper a } 0\}$, expressat mitjançant el predicat vague $\tilde{P}(x)$="ser proper a 0".

Entre altres possibilitats, podem modelitzar aquest subconjunt borrós a partir de la funció de pertinença $\mu_{\tilde{A}}(x)=1/(1+x^2)$. Notem que obtindrem els valors (0, 1), (±1, 0.5), (±2, 0.2), (±3, 0.1), etc., que indiquem en la figura següent.

Una translació a la dreta de valor L=3 donarà el subconjunt borrós $\tilde{B}_1$ amb funció de pertinença $\mu_{\tilde{B}_1}(x)=1/[1+(x-3)^2]$, que tindrà com a predicat vague $\tilde{P}_1(x)$="ser proper a 3". És a dir,

$$\tilde{B}_1=\{x \in R \ / \ x \text{ és proper a } 3\}$$

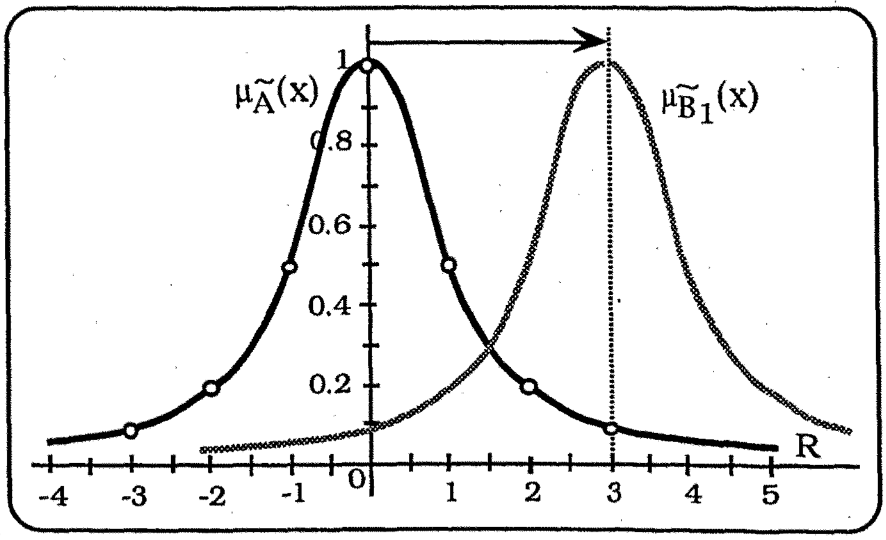


Fig. 2.12 Translació amb L=3

Una compressió de raó k=2 donarà la funció de pertinença:

$$\mu_{\tilde{B}_2}(x) = [1/(1+x^2)]^2 = 1/(1+x^2)^2$$

que tindrà com a predicat vague $\tilde{P}_2(x)$="ser molt proper a 0", per la qual cosa ens resultarà

$$\tilde{B}_2=\{x \in R / \ x \text{ és molt proper a } 0\}$$

A partir de la taula de valors (0, 1), (±1, 0.25), (±2, 0.04), etc. podem dibuixar la nova funció de pertinença

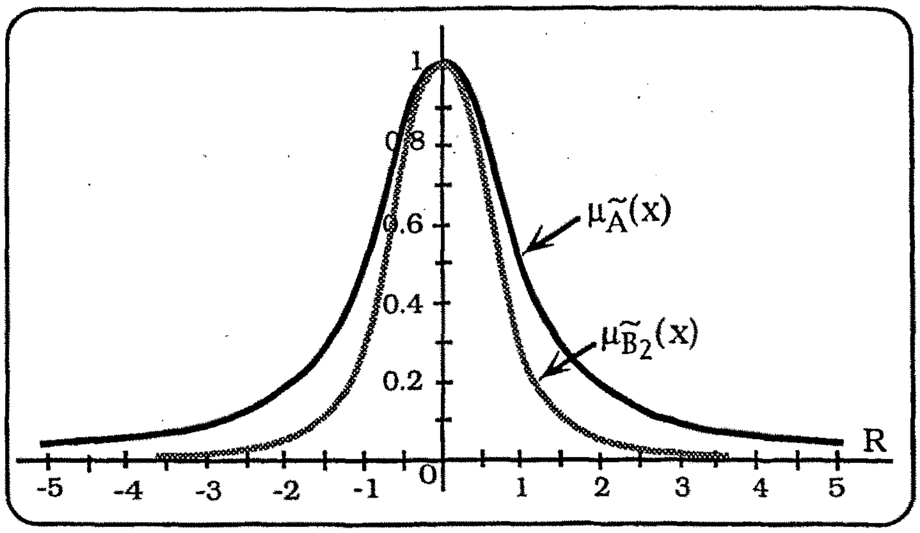


Fig. 2.13 Compressió amb k=2

Finalment, una dilatació de raó k=0.5 ens donarà la funció de pertinença $\mu_{\tilde{B}_3}(x) = [1/(1+x^2)]^{0.5} = 1/(1+x^2)^{0.5}$ que tindrà com a predicat vague $\tilde{P}_3(x)$="ser una mica proper a 0". El nou subconjunt borrós serà, doncs,

$$\tilde{B}_3 = \{x \in R \ / \ x \text{ és una mica proper a } 0\}$$

Amb els valors (0, 1), (±1, 0.7), (±2, 0.44), (±3, 0.31), etc. ens resulta la funció de pertinença

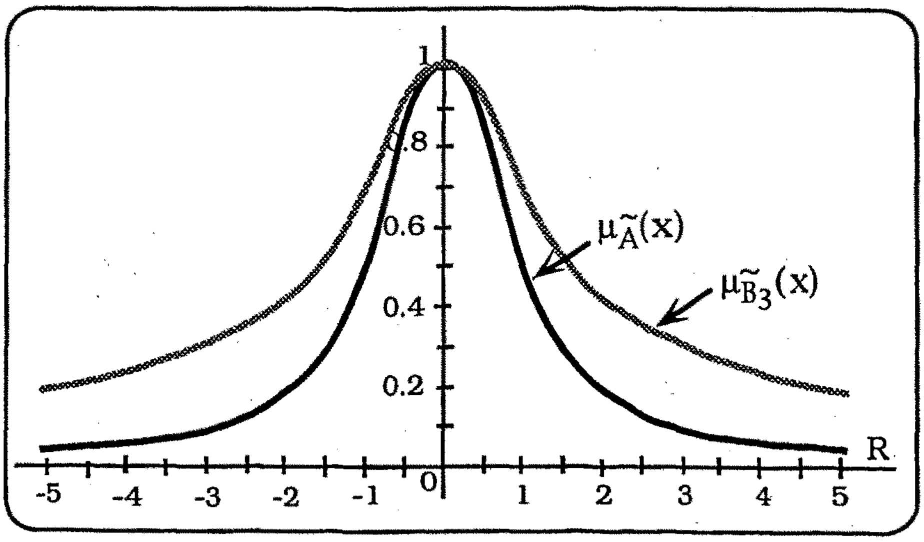


Fig. 2.14 Dilatació amb k=0.5

2.6 DISTÀNCIA ENTRE SUBCONJUNTS BORROSOS

a) DEFINICIÓ DE DISTÀNCIA

Donat un referencial E, una *distància* d, definida en el conjunt $\tilde{P}(E)$, és qualsevol aplicació

$$d: \tilde{P}(E)\times\tilde{P}(E) \rightarrow R$$
$$(\tilde{A}, \tilde{B}) \rightarrow d(\tilde{A},\tilde{B})$$

on el valor $d(\tilde{A}, \tilde{B})$ rep el nom de *distància* entre els subconjunts borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, que verifica els següents axiomes[7] :

1) POSITIVITAT: $\forall \tilde{A},\tilde{B}\in \tilde{P}(E)$,

$$\boxed{d(\tilde{A}, \tilde{B})\geq 0} \qquad [2.43]$$

2) IGUALTAT:

$$\boxed{\text{Si } \tilde{A}=\tilde{B} \;\Rightarrow\; d(\tilde{A}, \tilde{B})=0} \qquad [2.44]$$

3) COMMUTATIVITAT: $\forall \tilde{A},\tilde{B}\in \tilde{P}(E)$,

$$\boxed{d(\tilde{A}, \tilde{B})=d(\tilde{B}, \tilde{A})} \qquad [2.45]$$

4) ASSOCIATIVITAT: $\forall \tilde{A},\tilde{B},\tilde{C}\in \tilde{P}(E)$,

$$\boxed{d(\tilde{A}, \tilde{B}) \leq d(\tilde{A},\tilde{C})+d(\tilde{C}, \tilde{B})} \qquad [2.46]$$

b) DIFERENTS TIPUS DE DISTÀNCIA

1) Distància mètrica. Una distància d direm que és una *distància mètrica* si compleix la següent propietat:

$$5)\ \boxed{d(\tilde{A}, \tilde{B})=0 \;\Rightarrow\; \tilde{A}=\tilde{B}} \qquad [2.47]$$

---

[7] DE LUCA-TERMINI (1972)

2) Distància de Minkowski. Anomenem distància de Minkowski entre els subconjunts borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, i la representem per $d_\lambda(\tilde{A},\tilde{B})$, el nombre real donat, segons els casos, per:

- Si E és un referencial finit, $E=\{x_1, x_2, x_3 ... x_{n-1}, x_n\}$, $\forall\lambda\neq 0, \lambda\in N$:

$$\boxed{d_\lambda(\tilde{A},\tilde{B}) = \left[\sum_{i=1}^{n} |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)|^\lambda\right]^{1/\lambda}} \qquad [2.48]$$

- Si E és un referencial infinit numerable $E=\{x_1, x_2, ... x_{n-1}, x_n, ...\}$, $\forall\lambda\neq 0, \lambda\in N$, i sempre que la sèrie següent sigui convergent:

$$\boxed{d_\lambda(\tilde{A},\tilde{B}) = \left[\sum_{i=1}^{+\infty} |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)|^\lambda\right]^{1/\lambda}} \qquad [2.49]$$

- Si E és el referencial dels nombres reals R, $\forall\lambda\neq 0, \lambda\in N$, i sempre que l'integral impròpia següent sigui convergent:

$$\boxed{d_\lambda(\tilde{A},\tilde{B}) = \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)|^\lambda \cdot dx\right]^{1/\lambda}} \qquad [2.50]$$

Es pot comprovar fàcilment, observant que es compleixen els 4 axiomes de definició, que és una distància en $\tilde{P}(E)$ l'aplicació:

$$d_\lambda: \tilde{P}(E)\times\tilde{P}(E) \to R$$
$$(\tilde{A},\tilde{B}) \to d_\lambda(\tilde{A},\tilde{B})$$

Hem de dir que, en general, *la distància de Minkowski no és una distància mètrica*. En efecte, només cal considerar, en el referencial R, els subconjunts borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ definits per les seves funcions de pertinença:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } 0 \le x \le 2 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{B}}(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & \text{si } 0 \le x < 2 \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 2 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Representem gràficament les dues funcions de pertinença:

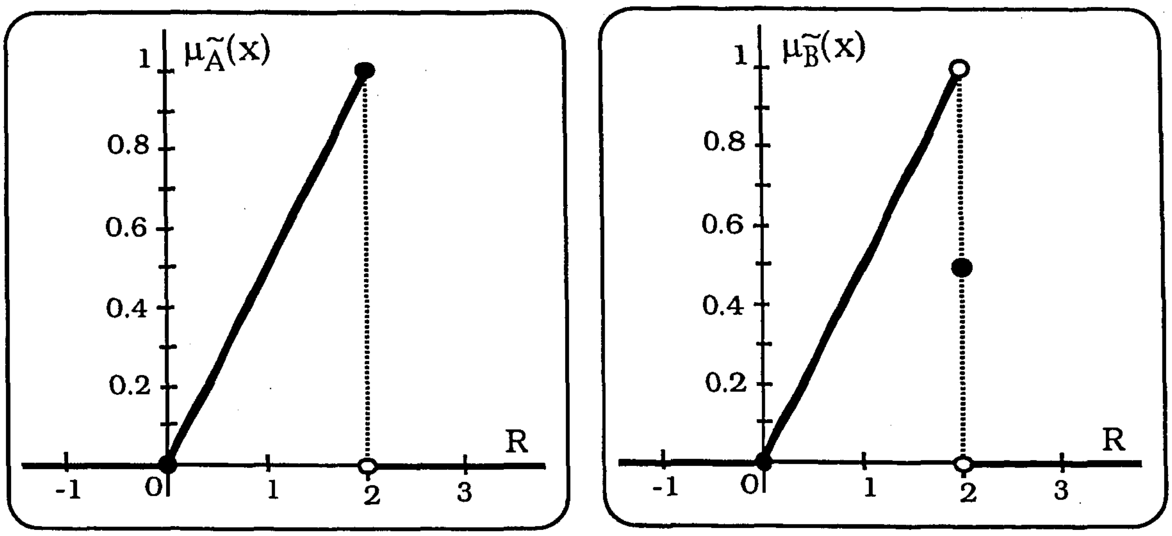


Fig.2.15 Funcions de pertinença

Observem que com que $\mu_{\tilde{A}}(2) \neq \mu_{\tilde{B}}(2)$ és evident que $\tilde{A} \neq \tilde{B}$, i no obstant es verifica que

$$d_\lambda(\tilde{A},\tilde{B}) = \left[\int_0^2 |\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)|^\lambda \, dx\right]^{1/\lambda} = \left[\int_0^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\right)^\lambda dx\right]^{1/\lambda} = 0$$

3) Distància de Hamming. Anomenem distància de Hamming entre els subconjunts borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ a la distància de Minkowski per $\lambda=1$, és a dir:

- Si E és un referencial finit, $E=\{x_1, x_2, x_3 .. x_{n-1}, x_n\}$, tenim:

$$\boxed{d_1(\tilde{A},\tilde{B}) = \sum_{i=1}^{n} |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)|} \qquad [2.51]$$

- Si E és un referencial infinit numerable, $E=\{x_1, x_2, \ldots x_{n-1}, x_n, \ldots\}$, i sempre que la sèrie següent sigui convergent:

$$\boxed{d_1(\tilde{A},\tilde{B}) = \sum_{i=1}^{+\infty} |\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i)|} \qquad [2.52]$$

- Si E és el referencial dels nombres reals R i sempre que l'integral impròpia següent sigui convergent:

$$d_1(\tilde{A},\tilde{B}) = \int_{-\infty}^{+\infty} |\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)| \, dx \qquad [2.53]$$

4) **Distància euclidiana.** Anomenem distància euclidiana entre els subconjunts borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ la distància de Minkowski per $\lambda=2$.

- Si E és un referencial finit $E=\{x_1, x_2, x_3 .. x_{n-1}, x_n\}$:

$$d_2(\tilde{A},\tilde{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i))^2} \qquad [2.54]$$

- Si E és un referencial infinit numerable $E=\{x_1, x_2,... x_{n-1}, x_n, ...\}$ i sempre que la sèrie següent sigui convergent:

$$d_2(\tilde{A},\tilde{B}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{+\infty} (\mu_{\tilde{A}}(x_i) - \mu_{\tilde{B}}(x_i))^2} \qquad [2.55]$$

- Si E és el referencial dels nombres reals R i sempre que l'integral impròpia següent sigui convergent.

$$d_2(\tilde{A},\tilde{B}) = \sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x))^2 \, dx} \qquad [2.56]$$

c) **DISTÀNCIES RELATIVES.** Anomenem distància relativa entre els subconjunts borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ el valor de la distància definit en l'interval [0,1]. Segons els tres casos del referencial, tenim:

- Si E és un referencial finit $E=\{x_1, x_2, x_3 .. x_{n-1}, x_n\}$,

D. relativa de Minkowski: $\boxed{\delta_\lambda(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{n^{1/\lambda}} . d_\lambda(\tilde{A}, \tilde{B})}$ [2.57]

D. relativa de Hamming: $\boxed{\delta_1(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{n}.d_1(\tilde{A}, \tilde{B})}$ [2.58]

D. relativa euclidiana: $\boxed{\delta_2(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{\sqrt{n}}.d_2(\tilde{A}, \tilde{B})}$ [2.59]

- Si E és el referencial dels nombres reals R i si els subconjunts borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ tenen suport acotat, en aquest cas, les distàncies relatives es defineixen a partir de l'interval [a, b], definit com el mínim interval tancat d'R tal que

$$\boxed{\operatorname{supp}(\tilde{A}) \cup \operatorname{supp}(\tilde{B}) \subseteq [a,b]} \qquad [2.60]$$

En aquest cas les tres distàncies relatives resultants són:

D. relativa de Minkowski: $\boxed{\delta_\lambda(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{(b-a)^{1/\lambda}}.d_\lambda(\tilde{A}, \tilde{B})}$ [2.61]

D. relativa de Hamming: $\boxed{\delta_1(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{b-a}.d_1(\tilde{A}, \tilde{B})}$ [2.62]

D. relativa euclidiana: $\boxed{\delta_2(\tilde{A}, \tilde{B}) = \frac{1}{\sqrt{b-a}}.d_2(\tilde{A}, \tilde{B})}$ [2.63]

2.7 MESURES DE BORROSITAT O D'ENTROPIA

a) DEFINICIÓ D'ENTROPIA

Per tal de formalitzar de manera apropiada la idea de desordre d'un subconjunt borrós, definirem el concepte d'entropia d'una manera axiomàtica.

D'aquesta manera, anomenem entropia a tota aplicació del tipus

$$\begin{aligned} \beta : \tilde{P}(E) &\rightarrow R \\ \tilde{A} &\rightarrow \beta(\tilde{A}) \end{aligned}$$

que verifica les quatre condicions següents:

1) ELS SUBCONJUNTS NÍTIDS TENEN ENTROPIA ZERO:

$$\boxed{\beta(\widetilde{A})=0 \;\Leftrightarrow\; \widetilde{A} \text{ és nítid}} \qquad [2.64]$$

2) LA MÀXIMA ENTROPIA ES DÓNA QUAN LA INCERTESA ÉS MÀXIMA:

$$\boxed{\forall x\in E,\ \beta(\widetilde{A}) \text{ té un únic màxim quan } \mu_{\widetilde{A}}(x)=1/2} \qquad [2.65]$$

3) EL SUBCONJUNT BORRÓS $\widetilde{A}$ SERÀ MÉS BORRÓS QUE EL $\widetilde{B}$ SI, $\forall x\in E$:

$$\boxed{\left.\begin{array}{l} \mu_{\widetilde{B}}(x) \le \mu_{\widetilde{A}}(x) \text{ quan } \mu_{\widetilde{A}}(x) \ge 1/2 \\ \mu_{\widetilde{B}}(x) \ge \mu_{\widetilde{A}}(x) \text{ quan } \mu_{\widetilde{A}}(x) \le 1/2 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta(\widetilde{A}) \ge \beta(\widetilde{B})} \qquad [2.66]$$

4) UN SUBCONJUNT BORRÓS I EL SEU COMPLEMENTARI, TENEN LA MATEIXA ENTROPIA:

$$\boxed{\beta(\widetilde{A}) = \beta(\widetilde{A'})} \qquad [2.67]$$

Diem, finalment, que al nombre real $\beta(\widetilde{A})$ li direm *entropia* del subconjunt borrós $\widetilde{A}$.

2.7.2 DIFERENTS CLASSES D'ENTROPIA

1) Entropia de Luca-Termini. Considerem en primer lloc que E és un referencial finit i que $\widetilde{A}$ és un subconjunt borrós, per la qual cosa el seu suport serà finit, és a dir, $Supp(\widetilde{A})=\{x_1, x_2, \ , x_n\}$. Aleshores anomenem *entropia de Luca Termini* d'$\widetilde{A}$ i ho representem per $\beta_L(\widetilde{A})$ el valor

$$\boxed{\beta_L(\widetilde{A}) = H(\widetilde{A}) + H(\widetilde{A}')} \qquad [2.68]$$

on

$$H(\widetilde{A}) = -K.\sum_{i=1}^{n} \mu_{\widetilde{A}}(x_i).\ln(\mu_{\widetilde{A}}(x_i)) \quad \text{on } K>0$$

Es pren $K=1/(n\cdot\ln 2)$.

Per tal de simplificar l'expressió anterior, introduïm la coneguda *funció de Shanon*:

$$\boxed{S(x) = -x \cdot \ln x - (1-x) \cdot \ln(1-x)} \qquad [2.69]$$

En conseqüència, podem posar l'entropia de Luca Termini en la forma següent:

$$\boxed{\beta_L(\tilde{A}) = K.\sum_{i=1}^{n} S(\mu_{\tilde{A}}(x_i))} \qquad [2.70]$$

2) Entropia de Kaufmann[8]**.** Donat un subconjunt borrós $\tilde{A}$ d'un referencial E, definim en primer lloc el *subconjunt nítid més proper* a $\tilde{A}$, que simbolitzem per $\underset{\sim}{\underline{A}}$, com aquell subconjunt que té per funció característica l'expressada per:

$$\mu_{\underline{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu_{\tilde{A}}(x) \leq 1/2 \\ 1 & \text{si } \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 1/2 \end{cases}$$

Un exemple pot ser el de la figura següent,

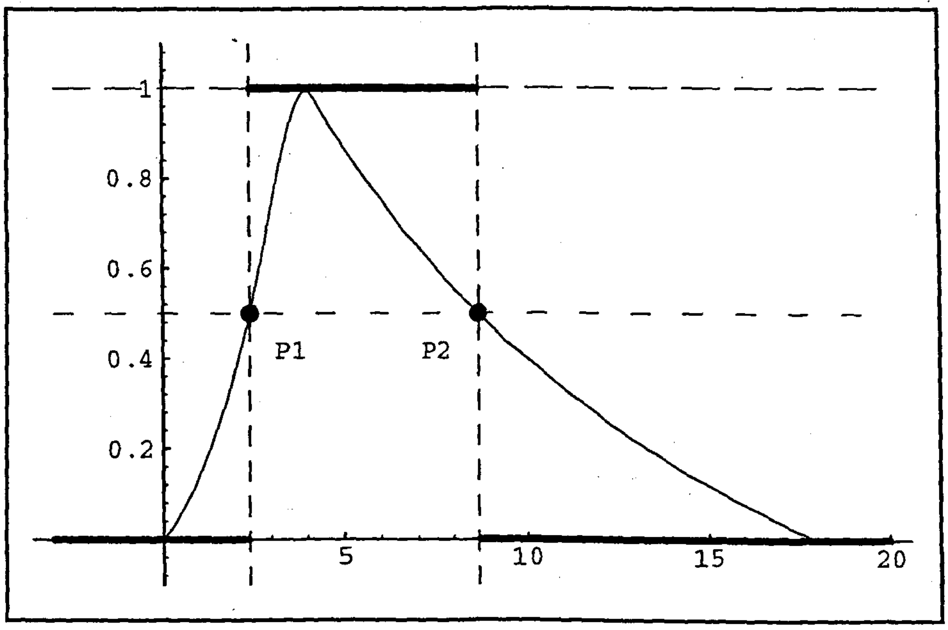


Fig.2.16 Suconjunt nítid més proper

[8] KAUFMANN, A. *INtroduction a la Théorie de sous-ensembles flous*. Vol.I. Ed.Masson. 1973.

S'anomena *entropia de Kaufmann* del subconjunt borrós $\tilde{A}$ i es simbolitza per $\beta_K(\tilde{A})$ el valor

$$\boxed{\beta_K(\tilde{A}) = 2.\delta_\lambda(\tilde{A}, \underset{\sim}{A}) \quad \lambda \geq 1} \qquad [2.71]$$

on δ_λ és la distància relativa de Minkowski.

3) **Entropia de Yager**[9]. Definim a continuació l'*entropia de Yager* del subconjunt borrós $\tilde{A}$ i la representem per $\beta_K(\tilde{A})$ com el valor

$$\boxed{\beta_Y(\tilde{A}) = 1 - \frac{d_\lambda(\tilde{A}, \tilde{A}')}{\text{card } S(\tilde{A})}} \qquad [2.72]$$

on d_λ és la distància de Minkowski.

2.8 PRINCIPI D'EXTENSIÓ

a) EXTENSIÓ D'UN SUBCONJUNT BORRÓS

Considerem dos subconjunts ordinaris E i F i una aplicació f: E→F. Aleshores, donat un subconjunt borrós $\tilde{A} \subseteq E$ amb funció de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$, definim el subconjunt borrós $\tilde{B} \subseteq F$ com

$$\tilde{B} = f(\tilde{A}) = \left\{ \left(y, \mu_{\tilde{B}}(y)\right) / y \in F \right\}$$

on es verifica que

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\left\{\mu_{\tilde{A}}(x) \ / \ y = f(x)\right\} & \text{si} \quad y \in f(E) \\ 0 \quad \text{si } y \in F - f(E) \end{cases}$$

o, equivalentment, la funció de pertinença es pot escriure com

$$\mu_{\tilde{B}}(y) = \begin{cases} \sup\left\{\mu_{\tilde{A}}(x) \ / \ x \in f^{-1}\{y\} \right\} & \text{si } f^{-1}\{y\} \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } f^{-1}\{y\} = \emptyset \end{cases}$$

---

[9] YAGER, R.R. *On the Measure of Fuzziness and Negation.* a "International Journal of General Systems, 5. 221-229". 1979.

El subconjunt $\widetilde{B}$ l'anomenarem l'*extensió del subconjunt borrós* $\widetilde{A}$ *induïda per l'aplicació f.*

Per EXEMPLE si els referencials són E=F=R i la funció f:R→R ve definida per $f(x)=x^2$ i si $\widetilde{A}$ és el subconjunt borrós d'R(=E) amb funció de pertinença

$$\mu_{\widetilde{A}}(x)=\begin{cases} x & \text{si } 0 \le x \le 1 \\ 2-x & \text{si } 1 < x \le 2 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Aleshores, l'extensió d'$\widetilde{A}$ induïda per f és el subconjunt borrós $\widetilde{B}$ d'R(=F) que compleix

$$\forall y \ge 0 \quad \mu_{\widetilde{B}}(y)=\sup\{\mu_{\widetilde{A}}(x) \;/\; x\in f^{-1}\{y\}\} = \sup\{\mu_{\widetilde{A}}(x) \;/\; x\in\{\sqrt{y}\,,\,-\sqrt{y}\}\}$$

$$=\mu_{\widetilde{B}}(y)=\sup\{\mu_{\widetilde{A}}(\sqrt{y})\,,\,\mu_{\widetilde{A}}(-\sqrt{y})\} = \begin{cases} \sqrt{y} & \text{si } 0 \le y \le 1 \\ 2-\sqrt{y} & \text{si } 1 < y \le 4 \end{cases}$$

Pel fet que no existeix l'arrel quadrada d'un nombre negatiu, considerarem que la seva funció de pertinença és

$$\mu_{\widetilde{B}}(y)=\begin{cases} \sqrt{y} & \text{si } 0 \le y \le 1 \\ 2-\sqrt{y} & \text{si } 1 < y \le 4 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

2.8.2 CASOS PARTICULARS

Existeixen tres casos particulars en què la funció de pertinença del subconjunt $\widetilde{B}$ és més fàcil de calcular:

1) Funció injectiva. Si la funció f és injectiva, es verificarà que $\forall y\in f(E)$ el conjunt $\{f^{-1}(y)\}$ tindrà només un element, i és clar que el suprem serà ell mateix. En aquest cas tindrem

$$\mu_{\widetilde{B}}(y)=\begin{cases} \mu_{\widetilde{A}}\left(f^{-1}(y)\right) & \text{si } f^{-1}(y)\neq\varnothing \\ 0 & \text{si } f^{-1}(y)=\varnothing \end{cases}$$

2) **Funció exhaustiva.** Si f és exhaustiva, és a dir si f(E)=F, tots els elements d'F tindran antiimatge i, aleshores, es verificarà

$$\forall y \in F \qquad \mu_{\tilde{B}}(y)=\sup\{\ \mu_{\tilde{A}}(x)\ /\ x\in f^{-1}(y)\}$$

3) **Funció bijectiva.** Si f és bijectiva resultarà

$$\forall y \in F \qquad \mu_{\tilde{B}}(y) = \mu_{\tilde{A}}(f^{-1}(y))$$

2.8.3 GENERALITZACIÓ DEL PRINCIPI D'EXTENSIÓ

Podem generalitzar a continuació el principi d'extensió amb la següent DEFINICIÓ[10]:

Siguin els n+1 conjunts ordinaris $E_1, E_2, \ldots, E_n$ i F, una aplicació f: $E=E_1\times E_2\times \ldots \times E_n \to F$ i siguin $\tilde{A}_1 \subseteq E_1, \tilde{A}_2 \subseteq E_2, \ldots, \tilde{A}_n \subseteq E_n$ subconjunts borrosos amb funcions de pertinença respectives $\mu_{\tilde{A}1}, \mu_{\tilde{A}2}, \ldots, \mu_{\tilde{A}n}$.

En aquestes condicions definim el subconjunt borrós $\tilde{B} \subseteq F$ com

$$\tilde{B}= f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n)= \left\{ \left(y, \mu_{\tilde{B}}(y)\right) / y\in F \right\}$$

amb funció de pertinença, on $\wedge$ representa el mínim,

$$\boxed{\mu_{\tilde{B}}(y)= \begin{cases} \sup\left\{\mu_{\tilde{A}_1}(x)\wedge\ldots\wedge\mu_{\tilde{A}_n}(x)\ /\ y=f(x_1,\ldots,x_n)\right\} & \text{si } y\in f(E) \\ 0 \quad \text{si } y\notin f(E) & \end{cases}} \qquad [2.73]$$

De forma equivalent la funció de pertinença és pot escriure com

$$\boxed{\mu_{\tilde{B}}(y)=\begin{cases} \sup\left\{\mu_{\tilde{A}_1}(x)\wedge\ldots\wedge\mu_{\tilde{A}_n}(x)\ /\ f(x_1,\ldots,x_n)\in f^{-1}\{y\}\right\} & \text{si } f^{-1}\{y\}\neq\varnothing \\ 0 \quad \text{si } f^{-1}\{y\}=\varnothing & \end{cases}} \qquad [2.74]$$

El subconjunt $\tilde{B}$ l'anomenarem *extensió del subconjunt borrós* $\tilde{A}$ induïda per l'aplicació f.

---

[10] ZADEH, L.A. *The concept of a linguistic variable and its application to aproximate reasoning*, I, II i III. a "Information Sciences, 8. 199-251, 307-357;9, 43-30.

Exposem tot seguit el següent TEOREMA DE COMPATIBILITAT DEL PRINCIPI D'EXTENSIÓ AMB ELS α-TALLS:

TEOREMA 2.11. «Siguin E i F dos referencials, f una aplicació entre aquests dos conjunts, f: $E \to F$, i siguin $\tilde{A}$ un subconjunt borrós de E i $\tilde{B}=f(\tilde{A})$ l'extensió del subconjunt $\tilde{A}$ induïda per l'aplicació f.

Si considerem els α-talls d'$\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ respectivament

$$A_\alpha=\{x\in E / \mu_A(x)\geq\alpha\} \quad \text{i} \quad B_\alpha=\{y\in F / \mu_{\tilde{B}}(y)\geq\alpha\}$$

aleshores, és verifica que $f(A_\alpha)\subseteq B_\alpha$.»

Demostració:

1) Si $y\in f(A_\alpha)$ voldrà dir que $\exists x_0\in E$ tal que $y=f(x_0)$ i $\mu_A(x_0)\geq\alpha$ i que $\mu_{\tilde{B}}(y)=\sup\{\mu_A(x) / x\in f^{-1}\{y\}\} \geq\mu_A(x_0)\geq\alpha$. Per tant, $y\in B_\alpha$.

2) Comprovem amb un exemple que en general B_α no està contingut en $f(A_\alpha)$, tot prenent com a referencials $E=F=[0,1)$ i com a funció $f:[0,1) \to [0,1)$ la definida per $f(x)=0$, $\forall x\in [0, 1)$. Considerem també que $\tilde{A}$ és el subconjunt borrós d'E amb funció de pertinença $\mu_{\tilde{A}}(x)=x$.

Tenim $\forall y\in (0,1)$ que $f^{-1}\{y\}=\varnothing$, i que per $y=0$ resulta la antiimatge $f^{-1}\{0\}=[0,1)$. Per tant, $\mu_{\tilde{B}}(y)=0$ si $y\in (0,1)$, on

$$\mu_{\tilde{B}}(0)= \sup\{\mu_{\tilde{A}}(x) / x\in f^{-1}\{0\}\}= \sup\{\mu_{\tilde{A}}(x) / x\in [0,1)\}=1$$

Els α-talls de $f(\tilde{A})$ i $\tilde{B}$ per $\alpha=1$ són, respectivament,

$$f(A_1) =f(\{x \in [0,1) / \mu_{\tilde{A}}(x)\geq 1\}) =$$

$$= f(\{x\in [0,1) / x\geq 1\})=f(\varnothing)=\varnothing$$

Deduïm doncs que

$$B_1=\{y\in [0,1) / \mu_B(y)\geq 1\}= \{0\}$$

Finalment, concluïm que $B_\alpha\not\subset f(A_\alpha)$. ♦

Notem que és fàcil comprovar que si existeix el màxim del conjunt $\{\mu_{\tilde{A}}(x) \,/\, x \in f^{-1}\{y\}\}$ aleshores $f(A_\alpha)=B_\alpha$.

Per acabar aquest capítol dedicat a l'estudi dels subconjunts borrosos, exposem el TEOREMA DE NGUYEN, demostrat en la referència que indiquem[11] :

TEOREMA 2.12. «Amb les mateixes hipòtesis de la definició de la generalització del principi d'extensió, si existeix el màxim del conjunt

$$\left\{\mu_{\tilde{A}_1}(x_1) \wedge \mu_{\tilde{A}_2}(x_2) \wedge \ldots \wedge \mu_{\tilde{A}_n}(x_n) \,/(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in f^{-1}\{y\}\right\}$$

aleshores

$$B_\alpha = \left[\, f(\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n)\right]_\alpha = f(A_{1_\alpha}, A_{2_\alpha}, \ldots, A_{n_\alpha})$$

on $A_{1_\alpha}, A_{2_\alpha}, \ldots, A_{n_\alpha}$ són els α-talls dels subconjunts borrosos $\tilde{A}_1, \tilde{A}_2, \ldots, \tilde{A}_n$.

[11] NGUYEN, H.T. *A note on the Extension Principle for fuzzy sets.* a "Journal of Mathematical Analysis and Applications", 2, 369-380. 1978.

CAPÍTOL 3

NÚMEROS BORROSOS

En moltes situacions de la vida quotidiana no som capaços de donar de forma precisa la informació numèrica. Per exemple, fem servir termes tals com "ens veurem al voltant de les vuit", "no hi havia quasi ningú", "més o menys pesa setanta kilos", etc. Tammateix, en algunes qüestions del món científic i, d'una forma especial, en l'Economia i l'Empresa, es donen situacions similars.

Per tal de poder quantificar aquesta imprecisió cal generalitzar el concepte de nombre real a allò que anomenem número borrós. Fent servir la teoria dels conjunts borrosos, podem representar aquests números borrosos com a conjunts borrosos del conjunt dels nombres reals.

No obstant, per fer servir aquests números borrosos en qualsevol problema que comporti aquest tipus d'imprecisió hem de poder realitzar operacions aritmètiques amb aquests números. En particular, hem de poder sumar, restar, multiplicar i dividir amb números borrosos. El procés de fer aquestes operacions s'anomena aritmètica borrosa.

3.1 NÚMEROS BORROSOS EN R

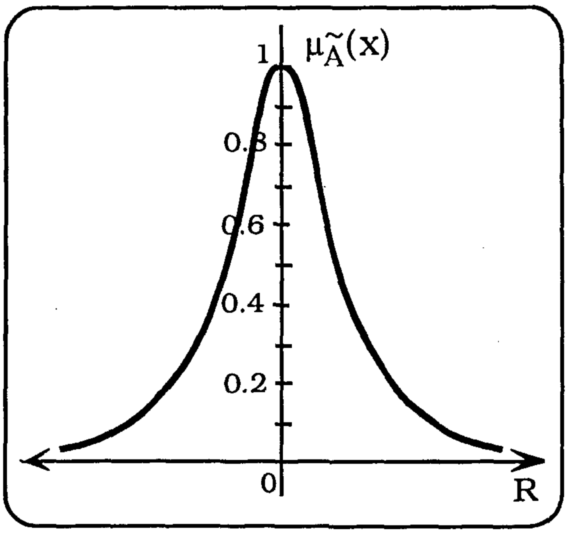
3.1.1 PRIMERES DEFINICIONS

a) **Número borrós.** Direm que $\tilde{A}$ és un *número borrós* si és un conjunt borrós normal i convex del referencial $E \subseteq R$.

b) **Número borrós discret.** Direm que $\tilde{A}$ és un *número borrós discret* si el seu referencial E és finit o infinit numerable.

c) **Número borrós continu.** Direm que $\tilde{A}$ és un *número borrós continu* si el seu referencial E és un interval d'R i la seva funció de pertinença és contínua.

d) **Número borrós de suport acotat.** Direm que un número borrós continu $\tilde{A}$ és un *número borrós de suport acotat* si el seu suport és acotat.



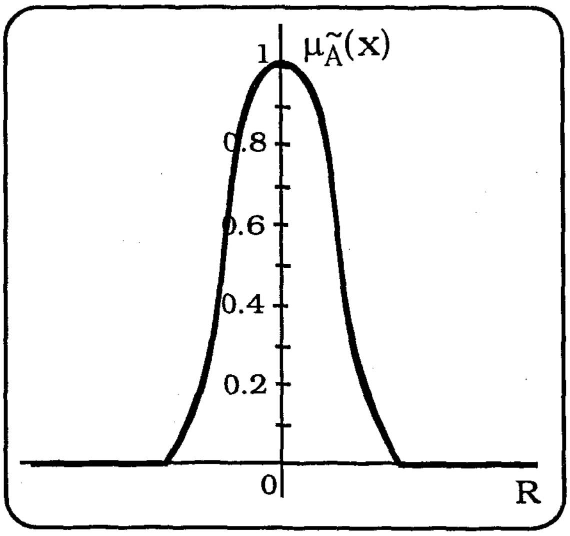


Fig.3.1 Números borrosos no acotat i acotat

e) **Número borrós positiu.** Direm que un número borrós $\tilde{A}$ del referencial R és un *número borrós positiu* si la seva funció de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$ pren el valor 0 per tots els valors més petits de 0. És a dir, es compleix que

$$\boxed{\tilde{A} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in R,\ x < 0, \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = 0} \qquad [3.1]$$

f) Número borrós negatiu. Direm que un número borrós $\tilde{A}$ del referencial R és un *número borrós negatiu* si la seva funció de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$ pren el valor 0 per tots els valors més grans de 0. És verificarà que

$$\boxed{\tilde{A} < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in R,\ x > 0, \quad \mu_{\tilde{A}}(x) = 0} \qquad [3.2]$$

3.1.2 TEOREMES DELS α-TALLS

Exposem a continuació els següents teoremes derivats de les definicions anteriors:

TEOREMA 3.1. «Els α-talls d'un número borrós continu $\tilde{A}$ d'R són intervals de nombres reals.»

Demostració:

Per la definició de número borrós, els α-talls són conjunts convexos d'R. Per tant, aplicant el teorema de l'Annex A, els α-talls són intervals d'R. ♦

TEOREMA 3.2. «Els α-talls A_α (amb $\alpha \neq 0$) d'un número borrós $\tilde{A}$ del referencial R, amb suport acotat són intervals tancats del tipus $A_\alpha = [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)]$ on

$$\underline{A}(\alpha) = \text{mín}\{x \in R \,/\, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \quad \text{i} \quad \overline{A}(\alpha) = \text{màx}\{x \in R \,/\, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\} \text{ »}$$

Demostració:

Pel teorema anterior els α-talls són intervals d'R. D'altra banda, A_α es pot expressar com

$$A_\alpha = \mu_{\tilde{A}}^{-1}[\alpha, 1].$$

Així doncs, A_α és l'antiimatge d'un conjunt tancat per una funció contínua i, per tant, A_α és tancat.

En ser el suport acotat, resultarà que $A_\alpha = [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)]$. ♦

3.2 PRINCIPI D'EXTENSIÓ DE LES OPERACIONS

3.2.1 OPERACIÓ MONÀRIA

Una de les aplicacions més importants del principi d'extensió serà l'extensió de les operacions amb nombres reals a les operacions amb números borrosos.

Comencem per les operacions monàries on recordem que una operació monària en R és una aplicació f : R → R.

Si $\tilde{A}$ és un número borrós d'R, l'extensió d'una operació monària en R ve donada pel conjunt borrós $\tilde{B}=f(\tilde{A})$ amb funció de pertinença

$$\boxed{\mu_{\tilde{B}}(y)=\begin{cases}\sup\{\mu_{\tilde{A}}(x)\ /\ x\in f^{-1}\{y\}\} & \text{si } f^{-1}\{y\}\neq\emptyset\\ 0 & \text{si } f^{-1}\{y\}=\emptyset\end{cases}} \qquad [3.3]$$

3.2.2 OPERACIÓ BINÀRIA

Recordem que una operació binària en R és una aplicació

$$f: R\times R \to R$$
$$(x, y) \to f(x, y)= x*y$$

Si $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ són dos números borrosos d'R, l'extensió d'una operació binària en R ve donada pel conjunt borrós $\tilde{C}=f(\tilde{A}, \tilde{B})=\tilde{A}(*)\tilde{B}$ amb funció de pertinença

$$\boxed{\mu_{\tilde{C}}(z)=\begin{cases}\sup\{\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{B}}(y)\ /(x,y)\in f^{-1}\{z\}\} & \text{si } f^{-1}\{z\}\neq\emptyset\\ 0 & \text{si } f^{-1}\{z\}=\emptyset\end{cases}} \qquad [3.4]$$

o equivalentment

$$\boxed{\mu_{\tilde{A}(*)\tilde{B}}(z)= \sup\{\mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{B}}(y)\ /\ z=x*y\}} \qquad [3.5]$$

Generalment, els números borrosos que utilitzarem són de suport acotat, amb funció de pertinença contínua i amb l'operació interna també contínua. En aquest cas, s'assolirà en algun punt el màxim del conjunt

$$\boxed{\{\mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) \ / \ z=x*y\}} \qquad [3.6]$$

Per aquest motiu, l'expressió anterior s'anomena *operació de convolució màx-mín.*

TEOREMA 3.3. «Donats dos números borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ del referencial del nombres reals R amb funcions de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$ i $\mu_{\tilde{B}}$ contínues i amb una operació binària interna en R, *, contínua i monòtona (creixent o decreixent), es verifica:

1) $\tilde{A}*\tilde{B}$ és un número borrós.

2) La funció de pertinença $\mu_{\tilde{A}*\tilde{B}}$ és contínua. »

Demostració:

Es pot trobar en la referència indicada.[12]

3.3 OPERACIONS AMB NÚMEROS BORROSOS

En tot aquest apartat suposarem que $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ són dos números borrosos d'R amb funcions de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$ i $\mu_{\tilde{B}}$ contínues.

3.3.1 SUMA DE NÚMEROS BORROSOS

L'operació binària de nombres reals f(x,y)=x+y és monòtona creixent en R i, pel Teorema 3.2, $\tilde{A}(+)\tilde{B}$ és un número borrós amb funció de pertinença $\mu_{\tilde{A}(+)\tilde{B}}$ contínua. Llavors, pel principi d'extensió de les operacions, tenim

$$\boxed{\mu_{\tilde{A}(+)\tilde{B}}(z)= \sup\{ \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) \ / \ x+y=z \}} \qquad [3.6]$$

[12] DUBOIS, D.; PRADE, H. *Fuzzy Sets and Systems: Theory and applications.* Academic Press. New York. 1980.

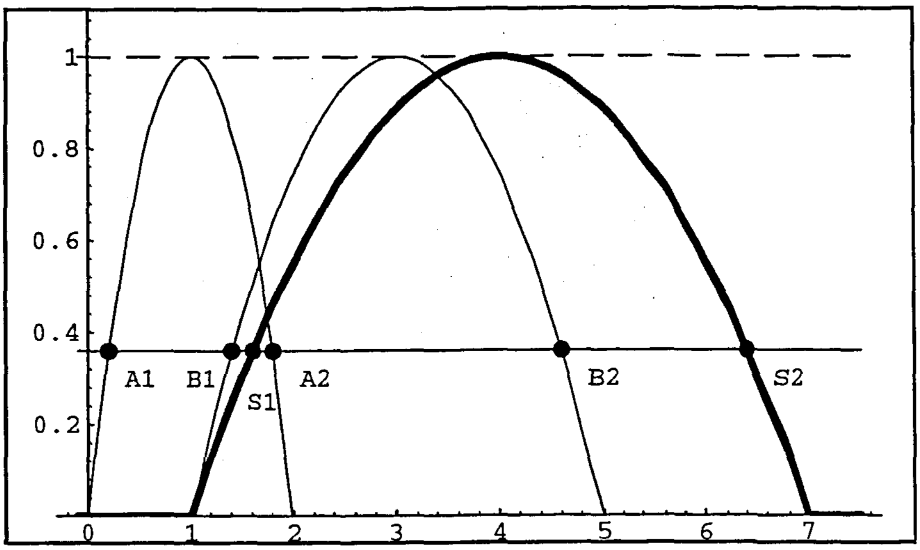


Fig.3.2 Suma de números borrosos

3.3.2 DIFERÈNCIA DE NÚMEROS BORROSOS

Definim en primer lloc el PSEUDO-OPOSAT D'UN NÚMERO BORRÓS, on segons la figura 3.3 comprovem gràficament que la suma d'un número borrós amb el seu pseudo-oposat no és l'element nul.

Notem que l'operació monària de nombres reals definida per f(x)=-x és monòtona decreixent en R. Llavors, pel Teorema 3.1, $-\tilde{A}$ serà un número borrós, anomenat *pseudo-oposat* de $\tilde{A}$, amb funció de pertinença $\mu_{-\tilde{A}}$ contínua.

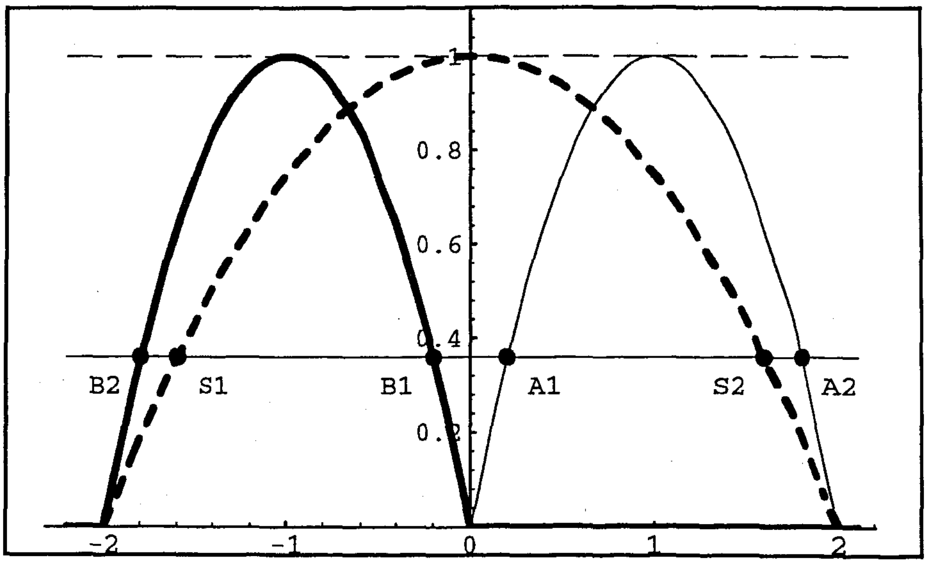


Fig.3.3 Suma d'un número borrós amb el seu oposat

Aplicant el principi d'extensió de les operacions tenim

$$\mu_{-\tilde{A}}(z)= \sup\{ \mu_{\tilde{A}}(x) \ / \ f(x)=z \}= \sup\{ \mu_{\tilde{A}}(x) \ / \ -x=z \}=$$

$$=\sup\{ \mu_{\tilde{A}}(x) \ / \ x=-z \}= \sup\{ \mu_{\tilde{A}}(-z) \ / \ z\in R \}=\mu_{\tilde{A}}(-z)$$

És a dir, es verifica que

$$\boxed{\mu_{-\tilde{A}}(z) =\mu_{\tilde{A}}(-z)} \qquad [3.7]$$

Atès que l'operació binària f(x,y)=x-y no és monòtona en R, no podem aplicar el Teorema 3.1. Ara bé la *diferència* $\tilde{A}(-)\tilde{B}$ la podem expressar com la suma dels números borrosos $\tilde{A}$ i $-\tilde{B}$ i, per tant, deduir que aquesta diferència és també un número borrós amb funció de pertinença contínua.

Aplicant el principi d'extensió de les operacions, la seva funció de pertinença vindrà donada per

$$\mu_{\tilde{A}(-)\tilde{B}}(z)= \mu_{\tilde{A}+(-\tilde{B})}(z)= \sup\{ \mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{-\tilde{B}}(y) \ / \ x+y=z \}$$

En conseqüència,

$$\boxed{\mu_{\tilde{A}(-)\tilde{B}}(z)= \sup\{ \mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{B}}(y) \ / \ x-y=z \}} \qquad [3.8]$$

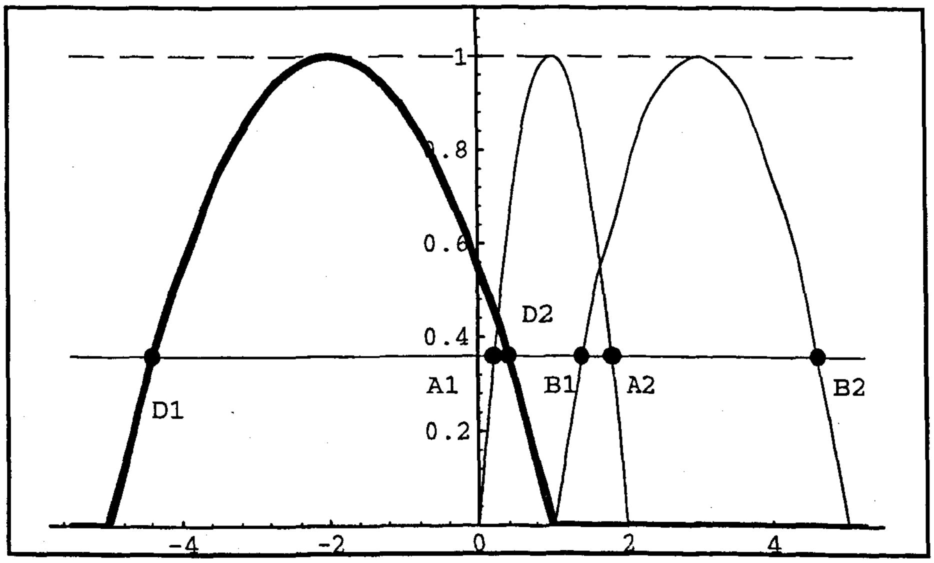


Fig.3.4 Diferència de números borrosos

En aquesta gràfica hem representat els números borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, a traç prim, i la seva diferència $\tilde{A}(-)\tilde{B}$ a traç gruixut.

3.3.3 PRODUCTE DE NÚMEROS BORROSOS

Considerem els tres casos següents, segons els signes (positiu, negatiu o cap de les dues coses):

1) ELS NÚMEROS BORROSOS SÓN DEL MATEIX SIGNE:

$\tilde{A}>0$ i $\tilde{B}>0$ o bé $\tilde{A}<0$ i $\tilde{B}<0$

L'operació binària de nombres reals $f(x, y)=x\cdot y$ és monòtona creixent (si són positius) o decreixent (si són negatius) en R. llavors, pel Teorema 3.1, $\tilde{A}(\cdot)\tilde{B}$ és un número borrós amb funció de pertinença contínua.

2) ELS NÚMEROS BORROSOS SÓN DE DIFERENT SIGNE:

$\tilde{A}>0$ i $\tilde{B}<0$ o bé $\tilde{A}<0$ i $\tilde{B}>0$

Si suposem que $\tilde{A}$ és positiu i $\tilde{B}$ negatiu, resulta que $\tilde{B}$ es pot expressar com $\tilde{B}=-\tilde{B}_1$ amb $\tilde{B}_1>0$. Aleshores,

$$\tilde{A}\cdot\ \tilde{B}=\tilde{A}\cdot\ (\ -\tilde{B}_1)=\ -\tilde{A}\cdot\ \tilde{B}_1$$

Atès que $\tilde{A}$ i $\tilde{B}_1$ són dos números borrosos positius, $\tilde{A}.\tilde{B}_1$ és un número borrós i, per l'apartat anterior, $\tilde{A}\cdot\ \tilde{B}$ és també un número borrós amb funció de pertinença contínua.

3) ALGUN DELS NÚMEROS BORROSOS NO TÉ SIGNE:

Si $\tilde{A}$ o $\tilde{B}$ no són ni positius ni negatius, aplicant els casos anteriors es demostra que $\tilde{A}\cdot\ \tilde{B}$ és un número borrós amb funció de pertinença contínua.

En resum, aplicant el principi d'extensió de les operacions en tots els casos, obtenim

$$\boxed{\mu_{\tilde{A}(\cdot)\tilde{B}}(z)=\sup\{\ \mu_{\tilde{A}}(x)\wedge\mu_{\tilde{B}}(y)\ /\ x\cdot y=z\ \}} \qquad [3.9]$$

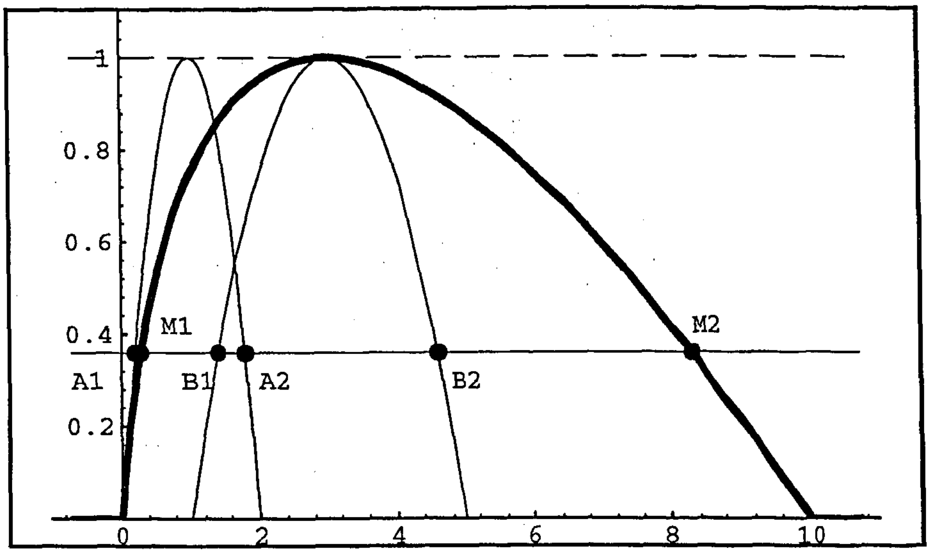


Fig.3.5 Producte de números borrosos

3.3.4 QUOCIENT DE NÚMEROS BORROSOS

Introduirem primerament el concepte de PSEUDO-INVERS D'UN NÚMERO BORRÓS, que només tindrà sentit si el número borrós és positiu o negatiu. Considerem els dos casos següents:

1) NÚMERO BORRÓS POSITIU:

Si $\tilde{A}>0$, l'operació monària $f(x)=1/x$ és decreixent en R^+ i pel Teorema 2.1 resulta que $\tilde{A}^{-1}=1/\tilde{A}$ és un número borrós amb funció de pertinença contínua.

2) NÚMERO BORRÓS NEGATIU:

Si $\tilde{A}<0$, l'operació monària $f(x)=1/x$ és decreixent en R^- i pel Teorema 2.1 deduïm que $\tilde{A}^{-1}=1/\tilde{A}$ és un número borrós amb funció de pertinença contínua.

Aplicant a continuació el principi d'extensió de les operacions obtenim la funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{A}^{-1}}(z)= \sup\{ \mu_{\tilde{A}}(x) \ / \ f(x)=z \}= \sup\{ \mu_{\tilde{A}}(x) \ / \ 1/x=z \}=$$

$$= \sup\{ \mu_{\tilde{A}}(x) \ / \ 1/z=x \}= \mu_{\tilde{A}}(1/z)$$

Consegüentment, el pseudo-invers és un número borrós que té per funció de pertinença:

$$\boxed{\mu_{\tilde{A}^{-1}}(z) = \mu_{\tilde{A}}(1/z)} \qquad [3.10]$$

En la gràfica següent mostrem un número borros (a traç fi), el seu pseudo-invers (a traç gruixut), així com el seu producte (a traç discontinu), que no serà l'element unitat:

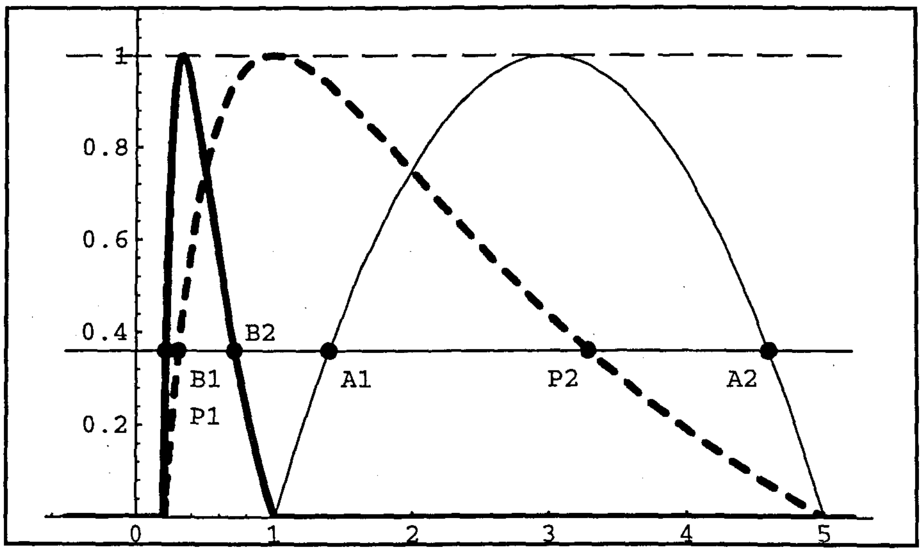


Fig.3.6 Producte de $\tilde{A}$ amb el seu pseudo-invers

Estudiem a continuació el quocient de dos números borrosos. Igual que passa amb el pseudo-invers d'un número borrós, el quocient $\tilde{A}(:)\tilde{B}$ dels números borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ només té sentit si $\tilde{B}$ és positiu o negatiu.

D'altra banda, tampoc és aplicable el Teorema 2.1, ja que la funció f(x)=x/y no és monòtona. Ara bé, el quocient $\tilde{A}(:)\tilde{B}$ es pot expressar com el producte del número borrós $\tilde{A}$ pel número borrós $\tilde{B}^{-1}$ i, per tant, $\tilde{A}(:)\tilde{B}$ serà un número borrós amb funció de pertinença contínua.

Aplicant el principi d'extensió de les operacions, la seva funció de pertinença ve donada per

$$\mu_{\tilde{A}:\tilde{B}}(z) = \mu_{\tilde{A}.\tilde{B}^{-1}}(z) = \sup\{\ \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}^{-1}}(y)\ /\ x \cdot y = z\ \} =$$

$$= \sup\{\ \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y)\ /\ x:y = z\ \}$$

Per tant, el quocient de dos números borrosos és un altre número borrós amb funció de pertinença

$$\boxed{\mu_{\tilde{A}:\tilde{B}}(z) = \sup\{ \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) \ / \ x:y=z \}} \qquad [3.11]$$

En aquesta figura presentem dos números borrosos (a traç prim), així com el seu quocient (a traç gruixut):

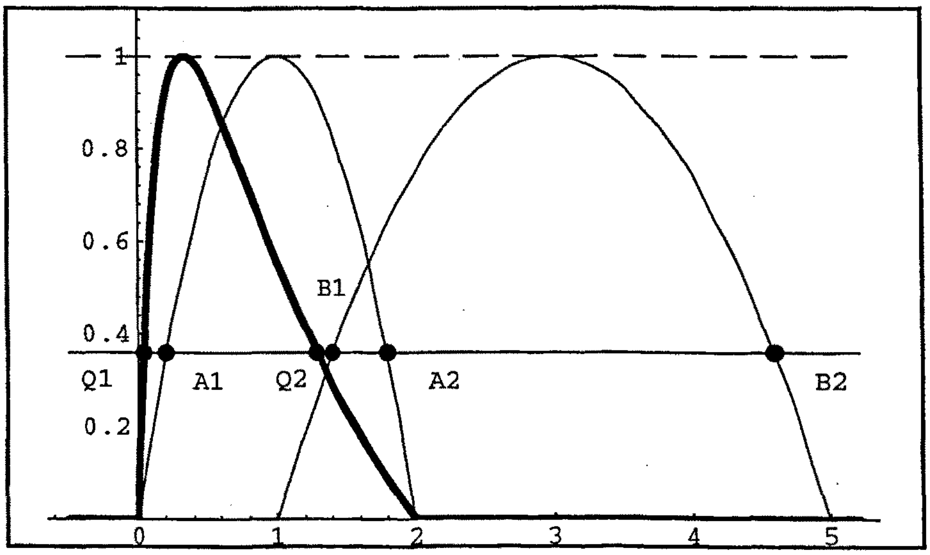


Fig.3.7 Quocient de dos números borrosos

3.3.5 PRODUCTE D'UN ESCALAR PER UN NÚMERO BORRÓS

Donat el nombre real $k \neq 0$, l'operació monària de nombres reals $f(x)=k \cdot x$ és una funció creixent si $k>0$ i decreixent si $k<0$. En qualsevol cas, és aplicable el Teorema 3.1 i, per tant, $k\tilde{A}$ és un número borrós amb funció de pertinença contínua.

Pel principi d'extensió de les operacions tenim

$$\mu_{k\tilde{A}}(z) = \sup\{ \mu_{\tilde{A}}(x) / \ k \cdot x=z\} = \sup\{ \mu_{\tilde{A}}(x) / \ x=z/k \} = \mu_{\tilde{A}}(z/k)$$

És a dir,

$$\boxed{\mu_{k\tilde{A}}(z) = \mu_{\tilde{A}}(z/k)} \qquad [3.12]$$

En la figura 3.8 de la pàgina següent tenim un número borrós (dibuixat a traç prim), i els resultats de multiplicar-lo per k=2 (a traç gruixut) i per k=-3 (a traç discontinu):

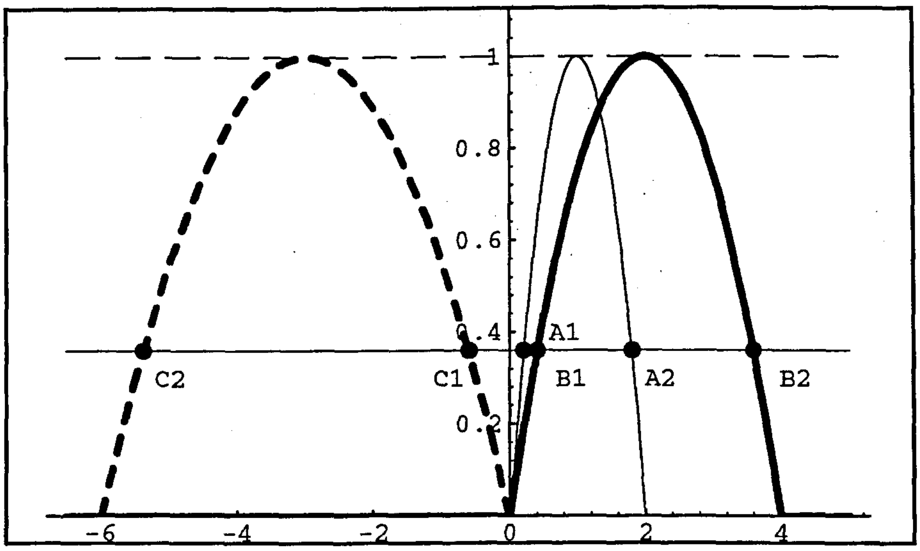


Fig.3.8 Producte d'un escalar per un número borrós

3.3.6 MÀXIM DE NÚMEROS BORROSOS

L'operació binària de nombres reals f(x,y)=x∨y, anomenda *màxim* de x i de y, és monòtona creixent en R. Llavors, pel Teorema 3.1, $\widetilde{A}(\vee)\widetilde{B}$ és un número borrós amb funció de pertinença contínua i, pel principi d'extensió de les operacions, tenim

$$\boxed{\mu_{\widetilde{A}(\vee)\widetilde{B}}(z) = \sup\{\mu_{\widetilde{A}}(x) \wedge \mu_{\widetilde{B}}(y) \ / \ x \vee y = z\}} \qquad [3.13]$$

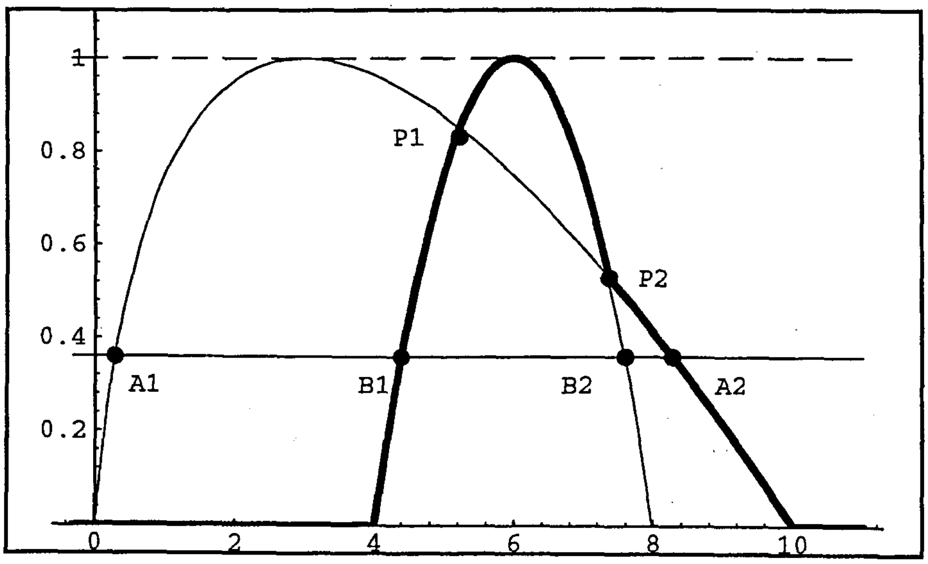


Fig.3.9 Màxim de dos números borrosos

3.3.7 MÍNIM DE NÚMEROS BORROSOS

L'operació binària de nombres reals $f(x,y)=x \wedge y$, anomenada mínim de x i de y, és monòtona creixent en R. Conseqüentment, pel Teorema 3.1, $\tilde{A}(\wedge)\tilde{B}$ és un número borrós amb funció de pertinença contínua i, pel principi d'extensió de les operacions, tenim

$$\boxed{\mu_{\tilde{A}(\wedge)\tilde{B}}(z)=\sup\{\, \mu_{\tilde{A}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) \;/\; x \wedge y = z \,\}} \qquad [3.14]$$

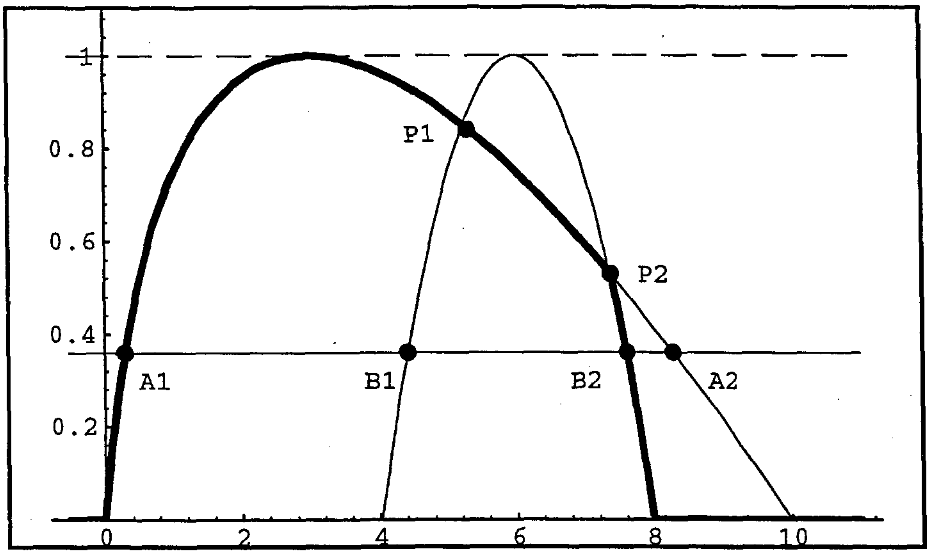


Fig.3.10 Mínim de dos números borrosos

3.4 ARITMÈTICA DELS α-TALLS

3.4.1 TEOREMES DELS α-TALLS

TEOREMA 3.3. (TEOREMA DE BUCKLEY)[13] «Si $*$ és una operació binària contínua en R i $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ son dos números borrosos amb funcions de pertinença contínues, aleshores es verifica que

$$\boxed{(A(*)B)_\alpha = \{\, z=x*y \;/\; x \in A_\alpha,\ y \in B_\alpha \,\}} \text{ »} \qquad [3.15]$$

Demostració: Està realitzada en la referència indicada. ♦

[13] BUCKLEY, J.J. *On using α-cuts to evaluate fuzzy equations* a "Fuzzy Sets and Systems", 38, 309-312. 1990.

TEOREMA 3.4. «Siguin $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ dos números borrosos d'$\underline{R}$, amb suport acotat i amb α-talls ($\alpha \neq 0$) iguals a $A_\alpha=[\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)]$ i $B_\alpha=[\underline{B}(\alpha), \overline{B}(\alpha)]$, respectivament. Considerem ara el subconjunt $T=[\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)]\times[\underline{B}(\alpha), \overline{B}(\alpha)]$ i també l'operació $*$, contínua en T, expressada per

$$* : T \to R$$
$$(x, y) \to x*y$$

Aleshores, els α-talls de $\tilde{A}(*)\tilde{B}$

$$(A(*)B)_\alpha=[\underline{A}(\alpha) , \overline{A}(\alpha)](*)[\underline{B}(\alpha) , \overline{B}(\alpha)]$$

vénen donats per

$$\boxed{(A(*)B)_\alpha= [a, b]} \qquad [3.16]$$

on els extrems de l'interval són

$$\boxed{a=\text{mín}\{x*y \;/\; x\in [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)] \text{ i } y\in [\underline{B}(\alpha), \overline{B}(\alpha)]\}} \qquad [3.17]$$

$$\boxed{b=\text{màx}\{x*y \;/\; x\in [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)] \text{ i } y\in [\underline{B}(\alpha), \overline{B}(\alpha)]\}} \text{ »} \qquad [3.18]$$

Demostració: En ser $*$ una funció contínua en el compacte T, assoleix, pel teorema de Weierstrass, el màxim i el mínim absoluts en T. ♦

3.4.2 EXEMPLE D'OPERACIÓ BINÀRIA

Donats els números borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ del referencial R amb α-talls $A_\alpha=[-1+4\alpha, 5-2\alpha]$ i $B_\alpha=[-2+3\alpha, 4-3\alpha]$, respectivament, i també l'operació binària definida per $f(x,y)= x*y=(x-2)^2\cdot(y-3)^2$, llavors

$$(A(*)B)_\alpha= [-1+4\alpha, 5-2\alpha](*)[-2+3\alpha, 4-3\alpha]=$$

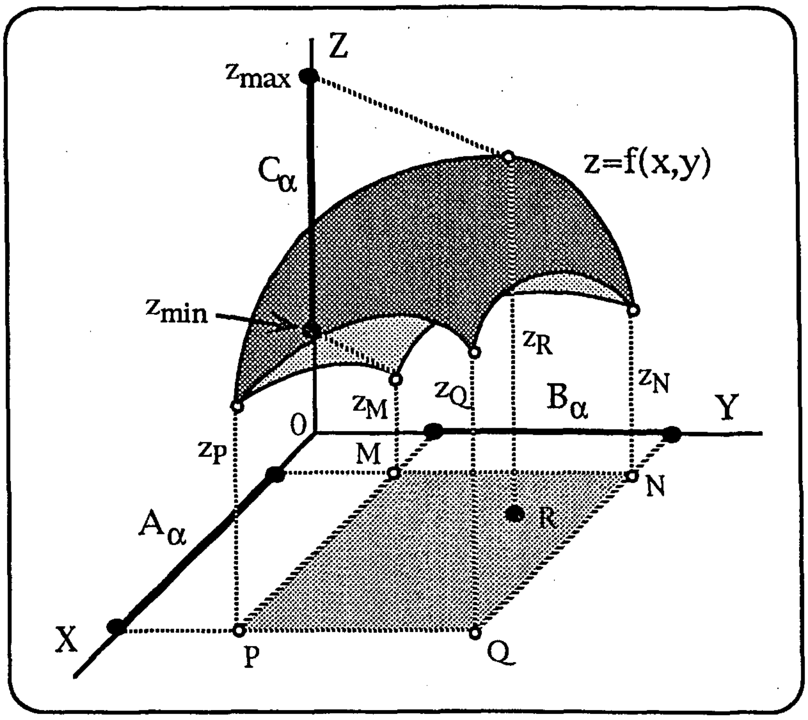
$$=[\ \text{mín}\{\ x*y \;/\; x\in A_\alpha \text{ i } y\in B_\alpha\ \}\ ,\ \text{màx}\{\ x*y \;/\; x\in A_\alpha \text{ i } y\in B_\alpha=\}\ ]$$

Els α-talls A_α i B_α, que dibuixem en els eixos X i Y, resp., determinaran el conjunt producte $A_\alpha\times B_\alpha$, que té per vèrtexs:

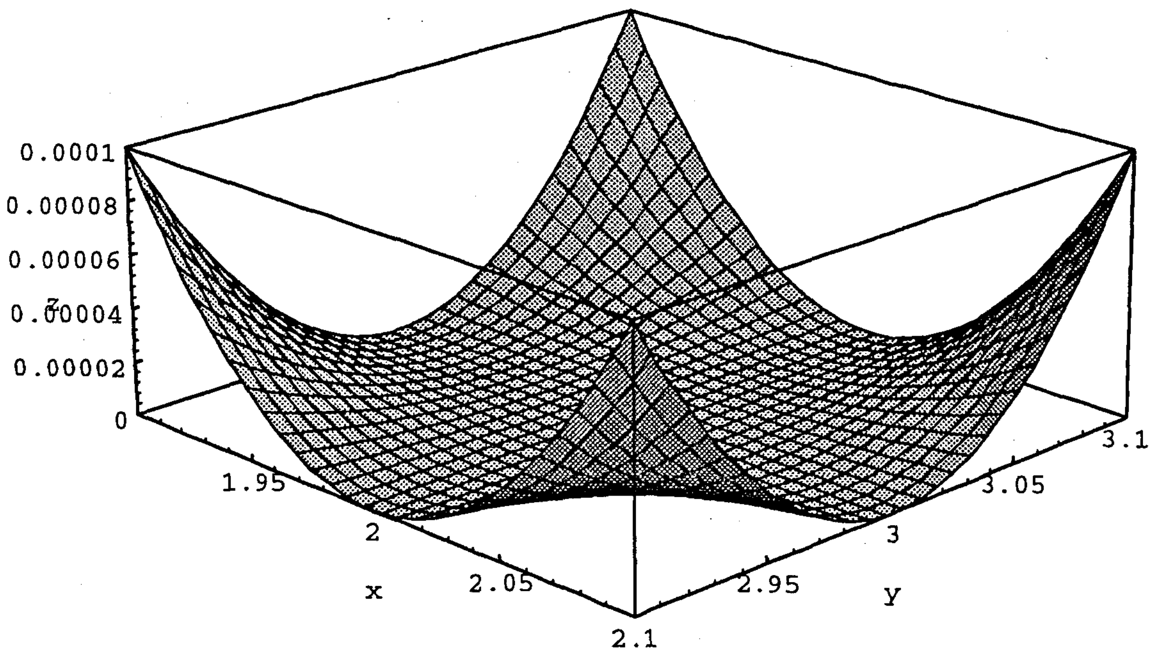
$M(-1+4\cdot\alpha,\ -2+3\cdot\alpha)$ $\qquad$ $N(-1+4\cdot\alpha,\ 4-3\cdot\alpha)$

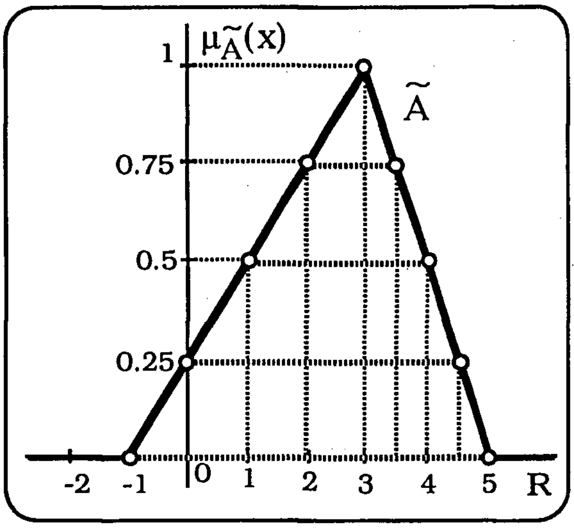
$P(5-2\cdot\alpha,\ -2+3\cdot\alpha)$ $\qquad$ $Q(5-2\cdot\alpha,\ 4-3\cdot\alpha)$

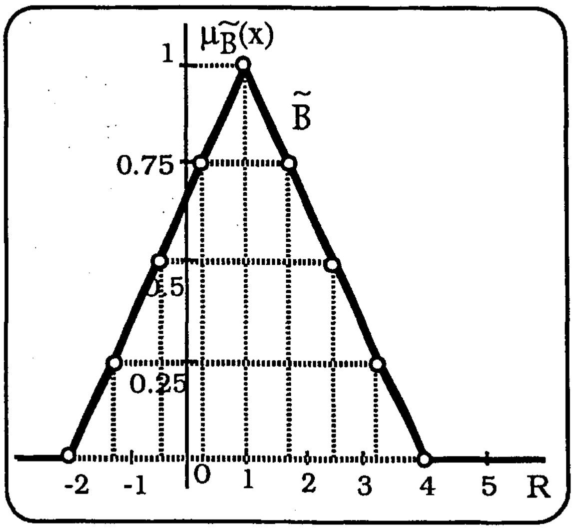
Determinarem ara les imatges d'aquests punts per mitjà de la funció $f(x,y)=(x-2)^2 \cdot (y-3)^2$, tal com mostrem en l'esquema següent:



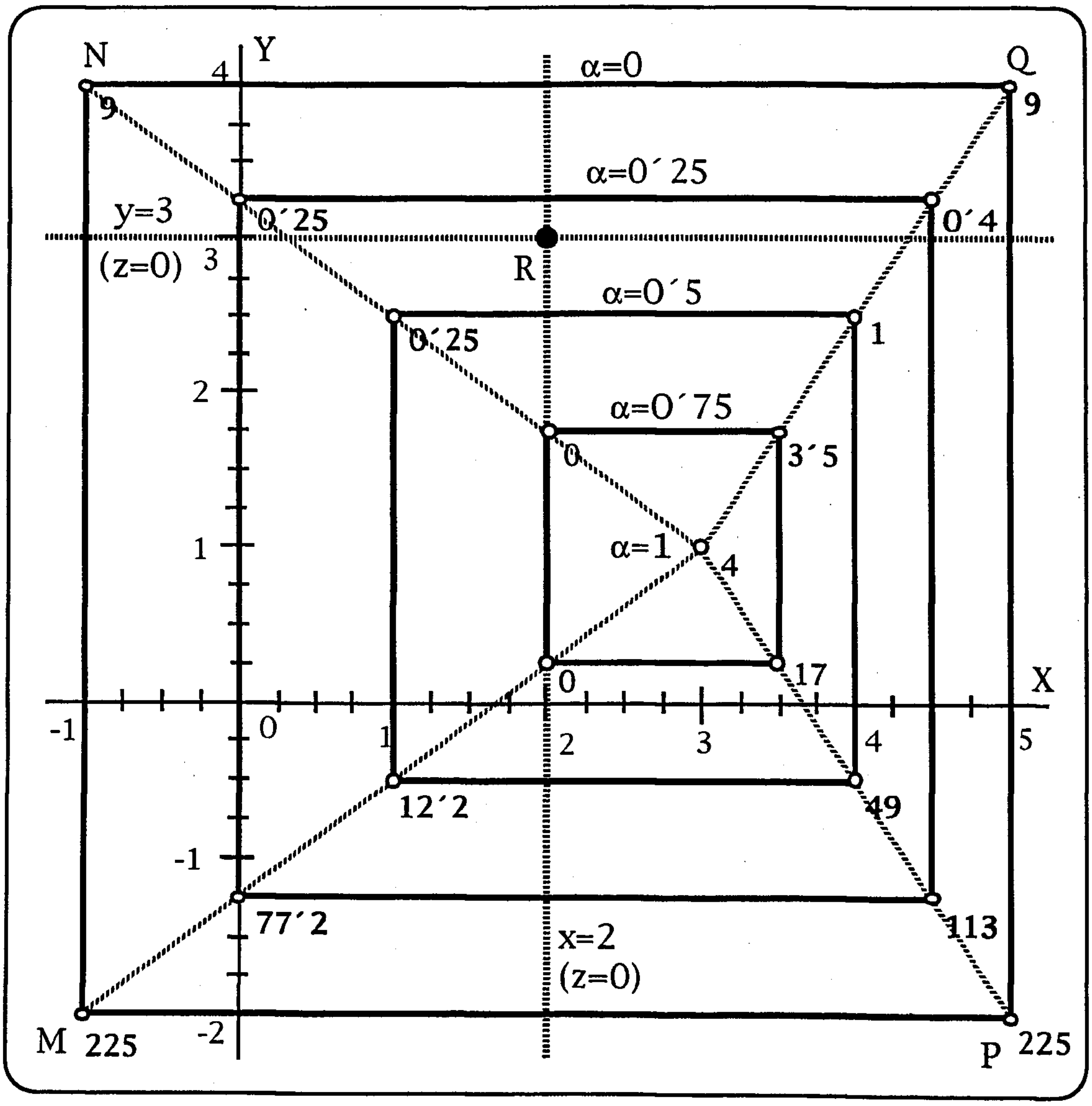
Hem de tenir en compte també que el mínim i el màxim pot assolirse en algun punt diferent dels extrems M, N, P i Q. En el nostre cas existeixen dues rectes de mínims, x=2 i y=3. Comprovem-ho amb la gràfica de la funció en un entorn del punt R(2, 3):







Hem partit dels α-talls A_α i B_α, utilitzant una escala pentanària. Determinem ara les imatges de M, N, P i Q:



Observem que els diferents rectangles MNPQ representen el conjunt producte $A_\alpha \times B_\alpha$ amb els valors de α=0, 0'25, 0'5, 0'75 i 1. Així, per α=0 tindrem A_α=[-1, 5] i B_α=[-2, 4], d'on M(-1,-2), N(-1, 4), P(5, -2) i Q(5, 4). Les imatges per $z=(x-2)^2\cdot(y-3)^2$ són

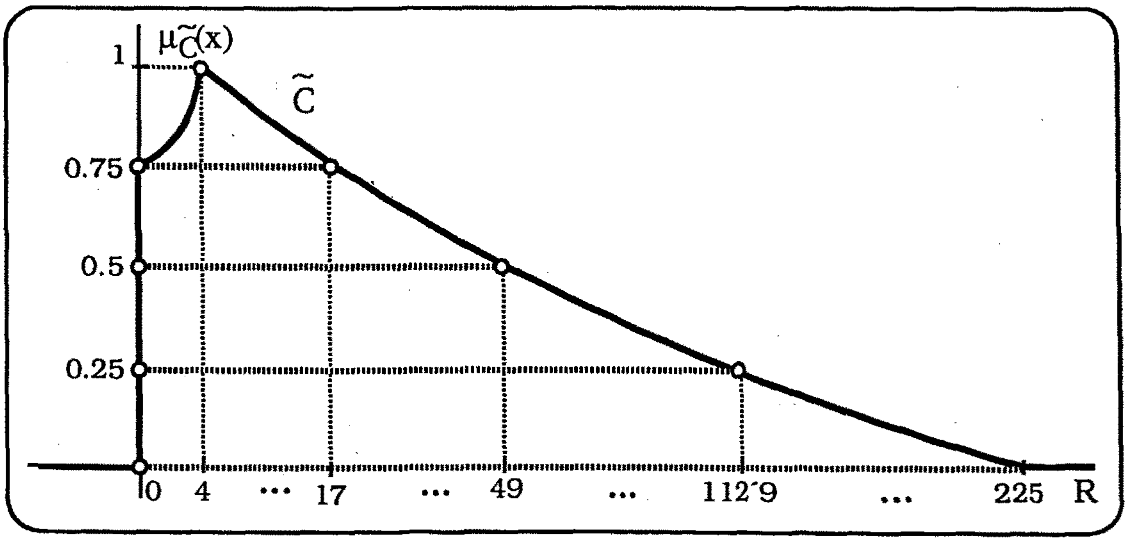
$$z_M=225\ ,\ z_N=9\ ,\ z_P=225\ \text{ i }\ z_Q=9$$

Com que en l'interior del quadrat MNPQ hi ha les línies de mínims x=2 i y=3, on en elles z=0, veiem que aquest és el mínim valor. El màxim, en canvi, es troba en M o P, i val z=225.

En conseqüència, el α-tall per α=0 del nou número borrós $\tilde{C}=\tilde{A}(*)\tilde{B}$ és C_α=[0, 225]. Efectuant aquest procés per els altres α-talls, obtenim

$$C_{0'25}=[0,\ 112'9]\ ,\ C_{0'5}=[0,\ 49]\ ,\ C_{0'75}=[0,\ 17]\ \text{ i }\ C_1=[4]$$

Amb ells, i altres valors d'α que creiem necessaris, podem dibuixar el nombre borròs:



Amb un raonament matemàtic, tot tenint en compte les rectes de mínims, es pot demostrar que els α-talls, $(A(*)B)_\alpha$, del nombre borrós anterior poden expressar-se per

Si $0 \leq \alpha \leq (3/4)$ $\qquad (A(*)B)_\alpha=[0\ ,\ (3-2\alpha)^2(-5+3\alpha)^2]$

Si $(3/4) < \alpha \leq 1$ $\qquad (A(*)B)_\alpha=[(-3+4\alpha)^2(1-3\alpha)^2\ ,\ (3-2\alpha)^2(-5+3\alpha)^2]$.

3.4.3 COROL·LARI DEL TEOREMA 3.4

COROL·LARI. «Amb les mateixes hipòtesis del Teorema 3.4 tenim que $(A(*)B)_\alpha = [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)](*)[\underline{B}(\alpha), \overline{B}(\alpha)]$ vindrà expressat, segons els quatre casos següents, per:

a) Si $*$ és creixent respecte a x i y:

$$(A(*)B)_\alpha = [\underline{A}(\alpha) * \underline{B}(\alpha), \overline{A}(\alpha) * \overline{B}(\alpha)]$$

b) Si $*$ és decreixent respecte a x i y:

$$(A(*)B)_\alpha = [\overline{A}(\alpha) * \overline{B}(\alpha), \underline{A}(\alpha) * \underline{B}(\alpha)]$$

c) Si $*$ és creixent respecte a x i decreixent respecte a y:

$$(A(*)B)_\alpha = [\underline{A}(\alpha) * \overline{B}(\alpha), \overline{A}(\alpha) * \underline{B}(\alpha)]$$

d) Si $*$ és decreixent respecte a x i creixent respecte a y:

$$(A(*)B)_\alpha = [\overline{A}(\alpha) * \underline{B}(\alpha), \underline{A}(\alpha) * \overline{B}(\alpha)] \text{ ».}$$

Demostració: És immediata, perquè només cal tenir en compte que una funció monòtona (creixent o decreixent) pren el seu valor màxim o mínim en els vèrtexs del rectangle $T = [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)] \times [\underline{B}(\alpha), \overline{B}(\alpha)]$. ♦

Per exemple, si considerem l'operació binària $f(x,y) = x * y = e^{x+y}$ en R i els números borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ de R amb α-talls $A_\alpha = [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)]$ i $B_\alpha = [\underline{B}(\alpha), \overline{B}(\alpha)]$, respectivament, llavors l'extensió de l'operació binària $*$ ve donada pel número borrós $\tilde{C} = e^{\tilde{A}+\tilde{B}}$.

Atès que l'operació $*$ és creixent en ambdós x i y, els α-talls del número borrós $\tilde{C}$ són

$$C_\alpha = [\underline{C}(\alpha), \overline{C}(\alpha)] = [\underline{A}(\alpha) * \underline{B}(\alpha), \overline{A}(\alpha) * \overline{B}(\alpha)]$$

És a dir,

$$C_\alpha = [e^{\underline{A}(\alpha)+\underline{B}(\alpha)}, e^{\overline{A}(\alpha)+\overline{B}(\alpha)}].$$

3.4.4 ARITMÈTICA DELS INTERVALS DE CONFIANÇA

Un interval de confiança és un interval tancat de nombres reals que conté el valor d'una determinada magnitud, la qual no es pot precisar de forma exacta. L'aritmètica dels intervals de confiança ha estat àmpliament desenvolupada pels professors Arnold Kaufmann i Jaume Gil Aluja.[14]

Pel Teorema 3.4 els α-talls de $\tilde{A}(*)\tilde{B}$ vénen donats per

$$(A(*)B)_{\alpha}= [\ \text{mín}\{\ x*y \ /\ x\in [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)] \ \text{ i } \ y\in [\underline{B}(\alpha), \overline{B}(\alpha)]\ \},$$
$$\text{màx}\{\ x*y \ /\ x\in [\underline{A}(\alpha),\overline{A}(\alpha)] \ \text{ i } \ y\in [\underline{B}(\alpha),\overline{B}(\alpha)]\ \}]$$

En el cas que es verifiquin les dues expressions següents

$$\text{mín}\{\ x*y \ /\ x\in [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)] \ \text{ i } \ y\in [\underline{B}(\alpha), \overline{B}(\alpha)]\}= \underline{A}(\alpha)*\underline{B}(\alpha)$$

$$\text{màx}\{\ x*y \ /\ x\in [\underline{A}(\alpha),\overline{A}(\alpha)] \ \text{ i } \ y\in [\underline{B}(\alpha),\overline{B}(\alpha)]\ \}= \overline{A}(\alpha)*\overline{B}(\alpha)$$

llavors, per operar números borrosos a través dels seus α-talls, podem utilitzar l'aritmètica dels intervals de confiança que, per la seva senzillesa, agilita d'una manera considerable els càlculs que s'han d'efectuar.

En general, si aquest mínim o màxim és difícil de calcular, la utilització de l'aritmètica dels intervals de confiança ens permet obtenir una aproximació de l'operació.

3.5 OPERACIONS AMB NÚMEROS BORROSOS EN FUNCIÓ DELS α-TALLS

En tot aquest apartat suposarem que $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ són dos números borrosos d'R amb suport acotat i amb α-talls, respectivament,

$$A_{\alpha}=[\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)] \quad \text{i} \quad B_{\alpha}=[\underline{B}(\alpha), \overline{B}(\alpha)]$$

---

14 KAUFMANN, A.; GIL ALUJA, J. *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre.* Ed. Hispano-Europea. 1987.

3.5.1 SUMA DE NÚMEROS BORROSOS

Per l'apartat a) del corol·lari del Teorema 3.4, la *suma* dels números borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ en funció dels α-talls A_α i B_α és

$$\boxed{(A(+)B)_\alpha = [\underline{A}(\alpha)+\underline{B}(\alpha),\ \overline{A}(\alpha)+\overline{B}(\alpha)]} \qquad [3.19]$$

La suma de números borrosos verifica, entre altres, les següents *propietats*, totes de demostració immediata:

1) Commutativa: $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{N}(R)$ $\quad \tilde{A}(+)\tilde{B} = \tilde{B}(+)\tilde{A}$

2) Associativa: $\forall \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in \tilde{N}(R)$ $\quad (\tilde{A}(+)\tilde{B})(+)\tilde{C} = \tilde{A}(+)(\tilde{B}(+)\tilde{C})$

3) Element neutre: $\exists 0 \in R \ / \ \forall \tilde{A} \in \tilde{N}(R)$ $\quad \tilde{A}(+)0 = \tilde{A}$

3.5.2 DIFERÈNCIA DE NÚMEROS BORROSOS

L'operació monària f(x)=-x és monòtona decreixent; per tant, com a cas particular de l'apartat b) del corol·lari tenim que el *pseudo-oposat* d'un número borrós $\tilde{A}$ és

$$\boxed{(-A)_\alpha = [-\overline{A}(\alpha),\ -\underline{A}(\alpha)]} \qquad [3.20]$$

Amb aquesta definició i per l'apartat c) del corol·lari, podem definir la *diferència* de dos números borrosos com

$$\boxed{(A(-)B)_\alpha = [\underline{A}(\alpha)-\overline{B}(\alpha),\ \overline{A}(\alpha)-\underline{B}(\alpha)]} \qquad [3.21]$$

3.5.3 PRODUCTE DE NÚMEROS BORROSOS

Considerem els cinc casos següents, tenint en compte els signes positiu, negatiu o indefinit dels números borrosos:

a) AMBDÓS NÚMEROS BORROSOS SÓN POSITIUS: $\tilde{A}>0$ i $\tilde{B}>0$

Per l'apartat a) del corol·lari del Teorema 3.4 tenim

$$\boxed{(A(\cdot)B)_\alpha = [\underline{A}(\alpha)\cdot\underline{B}(\alpha),\ \overline{A}(\alpha)\cdot\overline{B}(\alpha)]} \qquad [3.22]$$

b) AMBDÓS NÚMEROS BORROSOS SÓN NEGATIUS: $\tilde{A}<0$ i $\tilde{B}<0$

Per l'apartat b) del corol·lari resultarà que

$$\boxed{(A(\cdot)B)_\alpha = [\overline{A}(\alpha)\cdot\overline{B}(\alpha), \underline{A}(\alpha)\cdot\underline{B}(\alpha)]} \qquad [3.23]$$

c) NÚMEROS BORROSOS POSITIU I NEGATIU: $\tilde{A}>0$ i $\tilde{B}<0$

Per l'apartat c) del corol·lari tindrem que

$$\boxed{(A(\cdot)B)_\alpha = [\underline{A}(\alpha)\cdot\overline{B}(\alpha), \overline{A}(\alpha)\cdot\underline{B}(\alpha)]} \qquad [3.24]$$

d) NÚMEROS BORROSOS NEGATIU I POSITIU: $\tilde{A}<0$ i $\tilde{B}>0$

Per l'apartat d) del corol·lari resultarà

$$\boxed{(A(\cdot)B)_\alpha = [\overline{A}(\alpha)\cdot\underline{B}(\alpha), \underline{A}(\alpha)\cdot\overline{B}(\alpha)]} \qquad [3.25]$$

e) ALGÚN NÚMERO BORRÓS ÉS INDEFINIT:

En aquest cas, algún dels dos números borrosos no serà ni positiu ni negatiu i, en conseqüència, no hi haurà una expressió general per a tot α i, per tant, caldrà aplicar el Teorema 3.4.

Igual que en la suma, en el producte es verifiquen les *propietats*:

1) Commutativa: $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{N}(R)$ $\quad \tilde{A}(\cdot)\tilde{B} = \tilde{B}(\cdot)\tilde{A}$

2) Associativa: $\forall \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in \tilde{N}(R)$ $\quad (\tilde{A}(\cdot)\tilde{B})(\cdot)\tilde{C} = \tilde{A}(\cdot)(\tilde{B}(\cdot)\tilde{C})$

3) Element unitat: $\exists 1 \in R \ / \ \forall \tilde{A} \in \tilde{N}(R)$ $\quad \tilde{A}(\cdot)1 = \tilde{A}$

3.5.4 QUOCIENT DE NÚMEROS BORROSOS

Com ja hem vist anteriorment, només té sentit parlar del *pseudo-invers* d'un número borrós positiu o negatiu. Així, per l'apartat b) del corol·lari que estem utilitzant en tot aquest apartat,

$$\boxed{(A^{-1})_\alpha = [1/\overline{A}(\alpha), 1/\underline{A}(\alpha)]} \qquad [3.26]$$

Considerant ara el *quocient* $\tilde{A}(:)\tilde{B}$ com el producte $\tilde{A}(\cdot)\tilde{B}^{-1}$, cal distingir els cinc casos següents:

a) AMBDÓS NÚMEROS BORROSOS SÓN POSITIUS: $\tilde{A}>0$ i $\tilde{B}>0$

$$(A(:)B)_\alpha = (\tilde{A}(\cdot)\tilde{B}^{-1})_\alpha = [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)](\cdot)[1/\overline{B}(\alpha), 1/\underline{B}(\alpha)]$$

És a dir, resultarà que

$$\boxed{(A(:)B)_\alpha = [\underline{A}(\alpha):\overline{B}(\alpha), \overline{A}(\alpha):\underline{B}(\alpha)]} \qquad [3.27]$$

b) AMBDÓS NÚMEROS BORROSOS SÓN NEGATIUS: $\tilde{A}<0$ i $\tilde{B}<0$

De manera similar al cas a), tenim

$$\boxed{(A(:)B)_\alpha = [\overline{A}(\alpha):\underline{B}(\alpha), \underline{A}(\alpha):\overline{B}(\alpha)]} \qquad [3.28]$$

c) NÚMEROS BORROSOS POSITIU I NEGATIU: $\tilde{A}>0$ i $\tilde{B}<0$

$$\boxed{(A(:)B)_\alpha = [\underline{A}(\alpha):\underline{B}(\alpha) , \overline{A}(\alpha): \overline{B}(\alpha)]} \qquad [3.29]$$

d) NÚMEROS BORROSOS NEGATIU I POSITIU: $\tilde{A}<0$ i $\tilde{B}>0$

$$\boxed{(A(:)B)_\alpha = [\overline{A}(\alpha):\overline{B}(\alpha), \underline{A}(\alpha):\underline{B}(\alpha)]} \qquad [3.30]$$

e) ALGÚN NÚMERO BORRÓS ÉS INDEFINIT:

En aquest cas, i tenint en compte que ha de succeir que $0 \notin supp(\tilde{B})$, no hi haurà una expressió general per tot α i per tant caldrà aplicar el Teorema 3.4.

3.5.5 PRODUCTE D'UN ESCALAR PER UN NÚMERO BORRÓS

a) ESCALAR POSITIU:

Si $k>0$ per l'apartat a) del corol·lari del Teorema 3.4, tenim

$$\boxed{(k.A)_\alpha = [k.\underline{A}(\alpha), k.\overline{A}(\alpha)]} \qquad [3.31]$$

b) ESCALAR NEGATIU:

Si k<0 per l'apartat b) del corol·lari resulta que

$$\boxed{(k.A)_\alpha = [k.\overline{A}(\alpha),\ k.\underline{A}(\alpha)]} \qquad [3.32]$$

Esmentem les principals *propietats* del producte d'un escalar per un número borrós:

1) Pseudo-associativa: $\forall k,r \in R$ i $\forall \tilde{A} \in \tilde{N}(R)$ $\quad k.(r.\tilde{A}) = (k.r).\tilde{A}$

2) Pseudo-distributiva respecte a la suma d'escalars:

$$\forall k,r \in R \text{ i } \forall \tilde{A} \in \tilde{N}(R) \qquad (k+r).\tilde{A} = k.\tilde{A}\ (+)\ r.\tilde{A}$$

3) Pseudo-distributiva respecte a la suma de borrosos:

$$\forall k \in R \text{ i } \forall \tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{N}(R) \qquad k.(\tilde{A}\ (+)\ \tilde{B}) = k.\tilde{A}\ (+)\ k.\tilde{B}$$

3.5.6 MÀXIM DE NÚMEROS BORROSOS

Per l'apartat b) del corol·lari

$$\boxed{(A(\vee)B)_\alpha = [\underline{A}(\alpha) \vee \underline{B}(\alpha),\ \overline{A}(\alpha) \vee \overline{B}(\alpha)]} \qquad [3.32]$$

Exposem les principals propietats del màxim

1) Commutativa: $\forall\ \tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{N}(R)$ $\quad \tilde{A}(\vee)\tilde{B} = \tilde{B}(\vee)\tilde{A}$

2) Associativa: $\forall\ \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in \tilde{N}(R)$ $\quad (\tilde{A}(\vee)\tilde{B})(\vee)\tilde{C} = \tilde{A}(\vee)(\tilde{B}(\vee)\tilde{C})$

3) Idempotent: $\forall\ \tilde{A} \in \tilde{N}(R)$ $\quad \tilde{A}(\vee)\tilde{A} = \tilde{A}$

3.5.7 MÍNIM DE NÚMEROS BORROSOS

Per l'apartat b) del corol·lari,

$$\boxed{(A(\wedge)B)_\alpha = [\underline{A}(\alpha) \wedge \underline{B}(\alpha),\ \overline{A}(\alpha) \wedge \overline{B}(\alpha)]} \qquad [3.33]$$

Exposem a continuació les propietats del mínim:

1) Commutativa: $\forall \tilde{A}, \tilde{B} \in \tilde{N}(R)$ $\tilde{A}(\wedge)\tilde{B} = \tilde{B}(\wedge)\tilde{A}$

2) Associativa: $\forall \tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C} \in \tilde{N}(R)$ $(\tilde{A}(\wedge)\tilde{B})(\wedge)\tilde{C} = \tilde{A}(\wedge)(\tilde{B}(\wedge)\tilde{C})$

3) Idempotent: $\forall \tilde{A} \in \tilde{N}(R)$ $\tilde{A}(\wedge)\tilde{A} = \tilde{A}$

3.6 NÚMEROS BORROSOS TRIANGULARS

3.6.1 NÚMERO BORRÓS TRIANGULAR

Donats $a_1, a_2, a_3 \in R$, tals que $a_1 < a_2 < a_3$, direm que un número borrós $\tilde{A}$ del referencial R és un *número borrós triangular* (NBT) si la seva funció de pertinença és del tipus

$$\boxed{\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a_1 \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{si } a_1 \leq x < a_2 \\ \dfrac{a_3-x}{a_3-a_2} & \text{si } a_2 \leq x \leq a_3 \\ 0 & \text{si } x > a_3 \end{cases}} \qquad [3.34]$$

3.6.2 SUPORT I NUCLI D'UN N.B.T.

El *suport* del número borrós triangular $\tilde{A}$ és l'interval (a_1, a_3), mentre que el *nucli* és el conjunt format pel nombre real a_2.

Observem que, conegut el suport i el nucli d'un número borrós triangular, aquest queda completament determinat. Per aquesta raó el representarem per la tripleta ordenada (a_1, a_2, a_3) i escriurem el número borrós triangular com

$$\boxed{\tilde{A} = (a_1, a_2, a_3)} \qquad [3.35]$$

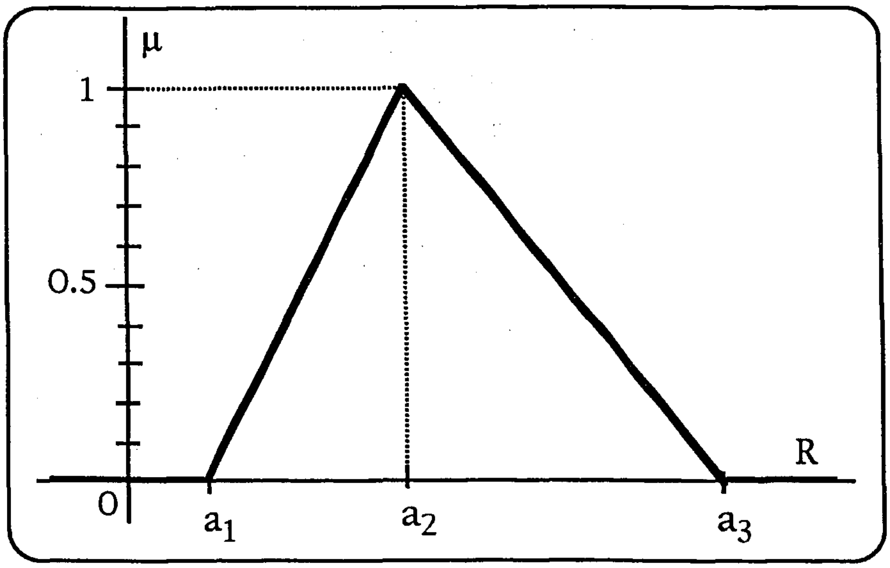


Fig.3.11 Número borrós triangular

3.6.3 α-TALLS D'UN NÚMERO BORRÓS TRIANGULAR

Notem que la funció de pertinença d'un número borrós triangular $\tilde{A}$ és contínua en tot R i que el seu suport és un conjunt acotat en R. Aleshores, pel Teorema 3.2, els α-talls A_α (amb $\alpha \neq 0$) són intervals tancats de nombres reals del tipus

$$A_\alpha = [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)]$$

on $\underline{A}(\alpha) = \text{mín}\{x \in R \,/\, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ i $\overline{A}(\alpha) = \text{màx}\{x \in R \,/\, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$.

Per tant, si si $a_1 \leq x < a_2$ es complirà que

$$\underline{A}(\alpha) = \text{mín}\{x \in R \,/\, (x-a_1)/(a_2-a_1) \geq \alpha\} =$$
$$= \text{mín}\{x \in R \,/\, x \geq a_1 + \alpha(a_2-a_1)\} = a_1 + \alpha(a_2-a_1)$$

Mentre que si $a_2 \leq x < a_3$ es tindrà que

$$\overline{A}(\alpha) = \text{màx}\{x \in R \,/\, (a_3-x)/(a_3-a_2) \geq \alpha\} =$$
$$= \text{màx}\{x \in R \,/\, x \geq a_3 - \alpha(a_3-a_2)\} = a_3 - \alpha(a_3-a_2)$$

Així, doncs, els α-talls del número borrós triangular $\tilde{A}$ són

$$\boxed{A_\alpha = [a_1 + \alpha.(a_2-a_1),\ a_3 - \alpha.(a_3-a_2)]} \qquad [3.36]$$

3.7 OPERACIONS AMB N. BORROSOS TRIANGULARS

3.7.1 SUMA DE NÚMEROS BORROSOS TRIANGULARS

La suma $\tilde{A}+\tilde{B}$ de dos números borrosos triangulars $\tilde{A}=(a_1, a_2, a_3)$ i $\tilde{B}=(b_1, b_2, b_3)$ és el número borrós triangular

$$\boxed{\tilde{A}+\tilde{B} = (a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)} \qquad [3.37]$$

En efecte, com que

$$A_\alpha=[\underline{A}(\alpha),\ \overline{A}(\alpha)]= [a_1+\alpha(a_2-a_1),\ a_3-\alpha.(a_3-a_2)]$$

$$B_\alpha=[\overline{B}(\alpha),\ \underline{B}(\alpha)]= [b_1+\alpha(b_2-b_1),\ b_3-\alpha\ .(b_3-b_2)]$$

aleshores, $(A+B)_\alpha=A_\alpha+B_\alpha$ i així

$$(A+B)_\alpha= [a_1+\alpha(a_2-a_1),\ a_3-\alpha.(a_3-a_2)]+[b_1+\alpha(b_2-b_1),\ b_3-\alpha.(b_3-b_2)]=$$

$$=[a_1+\alpha.(a_2-a_1)+b_1+\alpha.(b_2-b_1),\ a_3-\alpha.(a_3-a_2)+b_3-\alpha.(b_3-b_2)]=$$

$$=[a_1+b_1+\alpha.(a_2+b_2-a_1-b_1),\ a_3+b_3-\alpha.(a_3+b_3-a_2-b_2)]$$

Si posem $c_1=a_1+b_1,\ c_2=a_2+b_2,\ c_3=a_3+b_3$, obtenim

$$(A+B)_\alpha= [c_1+\alpha.(c_2-c_1),\ c_3-\alpha.(c_3-c_2)]$$

En conseqüència $\tilde{A}+\tilde{B}=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\ a_3+b_3)$.

La seva funció de pertinença és

$$\mu_{\tilde{A}+\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a_1+b_1 \\ \dfrac{x-(a_1+b_1)}{a_2+b_2-a_1-b_1} & \text{si } a_1+b_1 \le x < a_2+b_2 \\ \dfrac{(a_3+b_3)-x}{a_3+b_3-a_2-b_2} & \text{si } a_2+b_2 \le x \le a_3+b_3 \\ 0 & \text{si } x > a_3+b_3 \end{cases}$$

3.7.2 DIFERÈNCIA DE NÚMEROS BORROSOS TRIANGULARS

El *pseudo-oposat* $-\tilde{A}$ del número borrós triangular $\tilde{A}=(a_1, a_2, a_3)$ és el número borrós triangular

$$\boxed{-\tilde{A}= (-a_3, -a_2, -a_1)} \qquad [3.38]$$

En efecte, com que

$$A_\alpha= [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)] =[a_1+\alpha.(a_2-a_1), a_3-\alpha.(a_3-a_2)]$$

Obtenim el pseudo-oposat,

$$-A_\alpha= [-\overline{A}(\alpha), -\underline{A}(\alpha)]= [-(a_3-\alpha.(a_3-a_2)), -(a_1+\alpha.(a_2-a_1))]=$$

$$=[-a_3+\alpha.(a_3-a_2), -a_1-\alpha.(a_2-a_1)]= [c_1+\alpha.(c_2-c_1), c_3-\alpha.(c_3-c_2)]$$

on $c_1=-a_3$, $c_2=-a_2$ i $c_3=-a_1$.

Per tant, $-\tilde{A}=(-a_3, -a_2, -a_1)$

La funció de pertinença del pseudo-oposat serà

$$\mu_{-\tilde{A}}(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x < -a_3 \\ \dfrac{x+a_3}{a_3-a_2} & \text{si } -a_3 \leq x < -a_2 \\ \dfrac{-a_1-x}{a_2-a_1} & \text{si } -a_2 \leq x \leq -a_1 \\ 0 & \text{si } x > -a_1 \end{cases}$$

Definim a continuació la diferència $\tilde{A}-\tilde{B}$ de dos números borrosos triangulars $\tilde{A}=(a_1, a_2, a_3)$ i $\tilde{B}=(b_1, b_2, b_3)$ per mitjà del número borrós triangular

$$\boxed{\tilde{A}-\tilde{B} = (a_1-b_3, a_2-b_2, a_3-b_1)} \qquad [3.39]$$

En efecte, considerant $\tilde{A}-\tilde{B}=\tilde{A}+(-\tilde{B})$ aleshores $\tilde{A}-\tilde{B}$ és un número borrós triangular i el seu valor és

$$\tilde{A}-\tilde{B}= (a_1, a_2, a_3)+(-b_3, -b_2, -b_1)= (a_1-b_3, a_2-b_2, a_3-b_1)$$

La funció de pertinença de la diferència $\tilde{A}-\tilde{B}$ serà

$$\mu_{\tilde{A}-\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a_1-b_3 \\ \dfrac{x-(a_1-b_3)}{a_2-b_2-a_1+b_3} & \text{si } a_1-b_3 \le x < a_2-b_2 \\ \dfrac{(a_3-b_1)-x}{a_3-b_1-a_2+b_2} & \text{si } a_2-b_2 \le x \le a_3-b_1 \\ 0 & \text{si } x > a_3-b_1 \end{cases}$$

3.7.3 PRODUCTE DE NÚMEROS BORROSOS TRIANGULARS

Fem notar que el producte $\tilde{A}.\tilde{B}$ de dos números borrosos triangulars $\tilde{A}=(a_1, a_2, a_3)$ i $\tilde{B}=(b_1, b_2, b_3)$ no és un número borrós triangular.

En efecte, si els dos NBTs són

$$A_\alpha = [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)] = [a_1+\alpha.(a_2-a_1), a_3-\alpha.(a_3-a_2)]$$

$$B_\alpha = [\underline{B}(\alpha), \overline{B}(\alpha)] = [b_1+\alpha.(b_2-b_1), b_3-\alpha.(b_3-b_2)]$$

aleshores,

$$(A.B)\alpha = [\text{mín}(\underline{A}(\alpha).\underline{B}(\alpha), \underline{A}(\alpha).\overline{B}(\alpha), \overline{A}(\alpha).\underline{B}(\alpha), \overline{A}(\alpha).\overline{B}(\alpha)),$$

$$\text{màx}(\underline{A}(\alpha).\underline{B}(\alpha), \underline{A}(\alpha).\overline{B}(\alpha), \overline{A}(\alpha).\underline{B}(\alpha), \overline{A}(\alpha).\overline{B}(\alpha))]$$

Efectuem els quatre productes anteriors,

$$\underline{A}(\alpha).\underline{B}(\alpha) = a_1b_1+\alpha.[a_1(b_2-b_1)+b_1(a_2-a_1)]+\alpha^2.(a_2-a_1)(b_2-b_1)$$

$$\underline{A}(\alpha).\overline{B}(\alpha) = a_1b_3+\alpha.[-a_1(b_3-b_2)+b_3(a_2-a_1)]+\alpha^2.(a_2-a_1)(b_3-b_2)$$

$$\overline{A}(\alpha).\underline{B}(\alpha) = a_3b_1+\alpha.[a_3(b_2-b_1)-b_1(a_3-a_2)]+\alpha^2.(a_3-a_2)(b_2-b_1)$$

$$\overline{A}(\alpha).\overline{B}(\alpha) = a_3b_3+\alpha.[-a_3(b_3-b_2)-b_3(a_3-a_2)]+\alpha^2.(a_3-a_2)(b_3-b_2)$$

Podem observar que en qualsevol d'aquests quatre productes el coeficient d'α^2 és de la forma $(a_i-a_{i-1})(b_j-b_{j-1})$ amb i=2,3 i j=2,3.

Atès que $a_i \neq a_{i-1}$ i $b_j \neq b_{j-1}$, aquest coeficient serà sempre diferent de zero, amb la qual cosa deduïm que la funció de pertinença no és lineal i, per tant, no representarà en cap cas un NBT.

FUNCIÓ DE PERTINENÇA DEL PRODUCTE DE DOS NBTS POSITIUS.

Obtinguem ara la funció pertinença del producte de dos números borrosos triangulars en el cas que siguin positius. Tenim

$$(A.B)_\alpha = [\underline{A}(\alpha).\underline{B}(\alpha), \overline{A}(\alpha).\overline{B}(\alpha)] = [a_1b_1+\alpha.(a_1(b_2-b_1)+b_1(a_2-a_1)+$$

$$+\alpha^2.(a_2-a_1)(b_2-b_1),\ a_3b_3-\alpha.(a_3(b_3-b_2)+b_3(a_3-a_2)+\alpha^2.(a_3-a_2)(b_3-b_2)]=$$

$$= [a_1b_1+\alpha.(a_1b_2+b_1a_2-2a_1b_1)+\alpha^2.(a_2-a_1)(b_2-b_1),$$

$$a_3b_3+\alpha.(-2a_3b_3+a_3b_2+b_3a_2)+\alpha^2.(a_3-a_2)(b_3-b_2)]$$

Observem que els α-talls de nivell 0 i 1 són, respectivament

$$(A.B)_0 = [a_1b_1, a_3b_3] \quad \text{i} \quad (A.B)_1 = [a_2b_2\ ,\ a_2b_2] = a_2b_2.$$

Per tant,

$$\mu_{\tilde{A}\,\tilde{B}}(x) = (\underline{AB})^{-1}(x) \qquad \text{si } a_1b_1 \leq x \leq a_2b_2$$

$$\mu_{\tilde{A}\,\tilde{B}}(x) = (\overline{AB})^{-1}(x) \qquad \text{si } a_2b_2 \leq x \leq a_3b_3$$

a) Igualant l'extrem inferior de $(A.B)_\alpha$ a x,

$$a_1b_1+\alpha.(a_1b_2+a_2b_1-2a_1b_1)+\alpha^2.(a_2-a_1)(b_2-b_1)=x$$

Equació que podem posar en la forma d'equació de 2n grau en α,

$$(a_2-a_1)(b_2-b_1).\alpha^2 + (a_1b_2+a_2b_1-2a_1b_1).\alpha + (a_1b_1-x) = 0$$

Si resolem aquesta equació obtenim

$$\alpha = \frac{2a_1b_1-a_1b_2-a_2b_1+\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2+4(a_2-a_1)(b_2-b_1)x}}{2(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$$

b) De la mateixa manera, igualant l'extrem superior de $(A.B)_\alpha$ a x,

$$a_3b_3+\alpha.(-2a_3b_3+a_3b_2+b_3a_2)+\alpha^2.(a_3-a_2)(b_3-b_2)=x$$

Expressem l'equació anterior en la forma

$$(a_3-a_2)(b_3-b_2).\alpha^2 + (-2a_3b_3+a_3b_2+b_3a_2).\alpha + (a_3b_3-x)= 0$$

Resolent aquesta equació de 2n grau en α, obtenim

$$\alpha=\frac{2a_3b_3-a_2b_3-a_3b_2-\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+4(a_3-a_2)(b_3-b_2)x}}{2(a_3-a_2)(b_3-b_2)}$$

Finalment, dels dos apartats anteriors deduïm que la funció de pertinença del producte és

$$\mu_{\tilde{A}.\tilde{B}}(x)=\begin{cases}\dfrac{2a_1b_1-a_1b_2-a_2b_1+\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2+4(a_2-a_1)(b_2-b_1)x}}{2(a_2-a_1)(b_2-b_1)} & \text{si } a_1b_1\le x<a_2b_2\\ \dfrac{2a_3b_3-a_2b_3-a_3b_2-\sqrt{(a_2b_3-a_3b_2)^2+4(a_3-a_2)(b_3-b_2)x}}{2(a_3-a_2)(b_3-b_2)} & \text{si } a_2b_2\le x\le a_3b_3\\ 0 & \text{altrament}\end{cases}$$

En la figura següent observem que el producte de NBTs no és una operació interna:

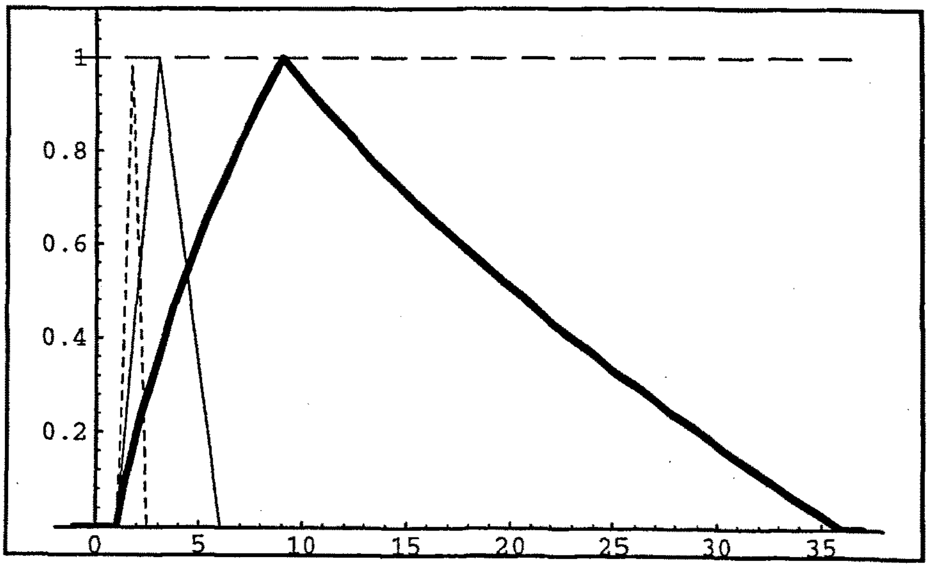


Fig.3.12 Producte de números borrosos triangulars

3.7.4 QUOCIENT DE NÚMEROS BORROSOS TRIANGULARS

El *pseudo-invers* $\tilde{A}^{-1}$ d'un número borrós triangular $\tilde{A}=(a_1, a_2, a_3)$, tal que $0 \notin Supp(\tilde{A})$, no és un NBT.

(Notem que el fet que $0 \notin Supp(\tilde{A})$ ens indica que el pseudo-invers només existeix per números borrosos positius o negatius).

En efecte, suposem que $\tilde{A}$ és un NBT positiu expressat per

$$A_\alpha = [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)] = [a_1+\alpha.(a_2-a_1), a_3-\alpha.(a_3-a_2)]$$

Aleshores

$$A_\alpha^{-1} = \left[\min\left(\frac{1}{\underline{A}(\alpha)}, \frac{1}{\overline{A}(\alpha)}\right), \max\left(\frac{1}{\underline{A}(\alpha)}, \frac{1}{\overline{A}(\alpha)}\right)\right] = \left[\frac{1}{\overline{A}(\alpha)}, \frac{1}{\underline{A}(\alpha)}\right] =$$

$$\left[\frac{1}{a_3-(a_3-a_2)\alpha}, \frac{1}{a_2-(a_2-a_1)\alpha}\right]$$

El pseudo-invers té per funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{A}^{-1}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < (1/a_3) \\ \dfrac{a_3x-1}{(a_3-a_2)x} & \text{si } (1/a_3) \leq x < (1/a_2) \\ \dfrac{1-a_1x}{(a_2-a_1)x} & \text{si } (1/a_2) \leq x \leq (1/a_1) \\ 0 & \text{si } x > (1/a_1) \end{cases}$$

Observem que els trams no nuls del NBT són troços d'hipèrbola, per la qual cosa no són funcions lineals i així el pseudo-invers no és un NBT.

Lògicament, el *quocient* $\tilde{A}:\tilde{B}$ de dos números borrosos triangulars $\tilde{A}=(a_1, a_2\ a_3)$ i $\tilde{B}=(b_1, b_2, b_3)$ no és un número borrós triangular.

En efecte, només cal observar que $\tilde{A}:\tilde{B}=\tilde{A}.(\tilde{B})^{-1}$ i per tant $\tilde{A}:\tilde{B}$ no és un NBT.

La funció de pertinença és

$$\mu_{\tilde{A}:\tilde{B}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < (a_1/b_3) \\ \dfrac{b_3x-a_1}{(a_2-a_1)+(b_3-b_2)x} & \text{si } (a_1/b_3) \leq x < (a_2/b_2) \\ \dfrac{a_3-b_1x}{(a_3-a_2)+(b_2-b_1)x} & \text{si } (a_2/b_2) \leq x \leq (a_3/b_1) \\ 0 & \text{si } x > (a_3/b_1) \end{cases}$$

3.7.5 PRODUCTE D'UN NÚMERO REAL PER UN NBT

El producte d'un nombre real k ($k \neq 0$) per un número borrós triangular $\tilde{A}=(a_1, a_2, a_3)$ és el número borrós triangular:

a) $k.\tilde{A}= (ka_1, ka_2, ka_3)$ si $k>0$

b) $k.\tilde{A}= (ka_3, ka_2, ka_1)$ si $k<0$

En efecte, estudiem separadament els dos casos anteriors.

a) CAS D'ESCALAR POSITIU: $k>0$

Partim de

$$A_\alpha= [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)]=[a_1+\alpha.(a_2-a_1), a_3-\alpha.(a_3-a_2)]$$

Multiplicant per k,

$$k.A_\alpha= [k.\underline{A}(\alpha), k.\overline{A}(\alpha)]= [k.(a_1+\alpha(a_2-a_1)), k.(a_3-\alpha.(a_3-a_2))]=$$

$$=[k.a_1+\alpha.(ka_2-ka_1), k.a_3-\alpha.(ka_3-ka_2)]= [c_1+\alpha.(c_2-c_1),c_3-\alpha.(c_3-c_2))]$$

on $c_1=k.a_1$, $c_2=k.a_2$ i $c_3=k.a_3$.

En conseqüència,

$$\boxed{k.\tilde{A}=(ka_1, ka_2, ka_3)} \qquad [3.40]$$

La funció de pertinença de $k.\tilde{A}$ ve expressada per

$$\mu_{k\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < ka_1 \\ \dfrac{x-ka_1}{ka_2-ka_1} & \text{si } ka_1 \le x < ka_2 \\ \dfrac{ka_3-x}{ka_3-ka_2} & \text{si } ka_2 \le x \le ka_3 \\ 0 & \text{si } x > ka_3 \end{cases}$$

b) CAS D'ESCALAR NEGATIU: $k<0$

Degut al fet que $A_\alpha=[\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)]=[a_1+\alpha.(a_2-a_1), a_3-\alpha.(a_3-a_2)]$, si multipliquem per $k<0$, obtenim

$$k.A_\alpha= [k.\overline{A}(\alpha), k.\underline{A}(\alpha)]= [k.(a_3-\alpha. (a_3-a_2)), k.(a_1+\alpha.(a_2-a_1))]=$$

$$=[k.a_3-\alpha. (k.a_3-k.a_2), k.a_1+\alpha.(k.a_2-k.a_1)]=[c_1+\alpha. (c_2-c_1), c_3-\alpha.(c_3-c_2)]$$

on $c_1=k.a_3$, $c_2=k.a_2$ i $c_3=k.a_1$.

D'aquí deduïm que,

$$\boxed{k.\tilde{A}=(ka_3, ka_2, ka_1)} \qquad [3.41]$$

La funció de pertinença és ara

$$\mu_{k\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < ka_3 \\ \dfrac{x-ka_3}{ka_2-ka_3} & \text{si } ka_3 \le x < ka_2 \\ \dfrac{ka_1-x}{ka_1-ka_2} & \text{si } ka_2 \le x \le ka_1 \\ 0 & \text{si } x > ka_1 \end{cases}$$

3.7.6 MÀXIM I MÍNIM DE N. BORROSOS TRIANGULARS

El màxim i el mínim de dos números borrosos triangulars en general no és un número borrós triangular. La funció de pertinença no té una expressió explícita i caldrà calcular-la en cada cas.

3.8 NÚMEROS BORROSOS TRAPEZOÏDALS

3.8.1 CONCEPTE DE NÚMERO BORRÓS TRAPEZOÏDAL

Siguin $a_1, a_2, a_3, a_4 \in R$, tals que $a_1 < a_2 < a_3 < a_4$. Direm que un número borrós $\tilde{A}$ del referencial R és un *número borrós trapezoïdal* (NBTR) si la seva funció de pertinença és del tipus

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < a_1 \\ \dfrac{x-a_1}{a_2-a_1} & \text{si} \quad a_1 \leq x < a_2 \\ 1 & \text{si} \quad a_2 \leq x \leq a_3 \\ \dfrac{a_4-x}{a_4-a_3} & \text{si} \quad a_3 < x \leq a_4 \\ 0 & \text{si} \quad x > a_4 \end{cases}$$

3.8.2 SUPORT I NUCLI D'UN N. BORRÓS TRAPEZOÏDAL

Fem notar que el *suport* d'$\tilde{A}$ és l'interval (a_1, a_4) i que el *nucli* és l'interval tancat $[a_2, a_3]$.

Observem també que, conegut el suport i el nucli d'un número borrós trapezoïdal, aquest queda completament determinat. En conseqüència, el podem representar per la següent quaterna ordenada (a_1, a_2, a_3, a_4) i escrivim $\tilde{A}=(a_1, a_2, a_3, a_4)$.

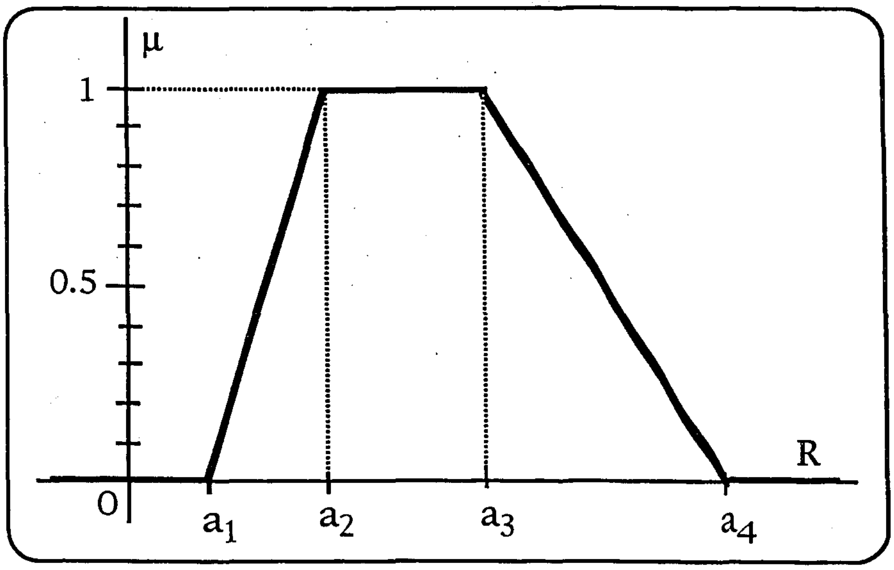


Fig.3.13 Número borrós trapezoïdal

3.8.3 α-TALLS D'UN N. BORRÓS TRAPEZOÏDAL

Observem que, igual que en el cas d'un número borrós triangular, la funció de pertinença d'un número borrós trapezoïdal $\tilde{A}$ és contínua en tot R i que el seu suport és un conjunt acotat en R. Per tant, els α-talls A_α (amb $\alpha \neq 0$) venen donats per

$$A_\alpha = [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)]$$

on $\underline{A}(\alpha) = \text{mín}\{x \in R \,/\, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$ i $\overline{A}(\alpha) = \text{màx}\{x \in R \,/\, \mu_{\tilde{A}}(x) \geq \alpha\}$.

Conseqüentment, si $a_1 \leq x < a_2$, tenim

$$\underline{A}(\alpha) = \text{mín}\{x \in R \,/\, (x-a_1)/(a_2-a_1) \geq \alpha\} =$$

$$= \text{mín}\{x \in R/\ x \geq a_1 + \alpha.(a_2-a_1)\} = a_1 + \alpha.(a_2-a_1).$$

Mentre que si $a_3 \leq x \leq a_4$, resulta

$$\overline{A}(\alpha) = \text{màx}\{x \in R \,/\, (a_4-x)/(a_4-a_3) \geq \alpha\} =$$

$$= \text{màx}\{x \in R \,/\, x \geq a_4 - \alpha.(a_4-a_3)\} = a_4 - \alpha.(a_4-a_3).$$

Així doncs, els α-talls d'$\tilde{A}$ són

$$\boxed{A_\alpha = [a_1 + \alpha.(a_2-a_1),\ a_4 - \alpha.(a_4-a_3)]} \qquad [3.42]$$

3.8.4 OPERACIONS AMB N. BORROSOS TRAPEZOÏDALS

Les operacions aritmètiques amb números borrosos trapezoïdals són molt similars a les dels números borrosos triangulars. Només cal tenir en compte que el nucli és un interval tancat de nombres reals en lloc d'un únic nombre real. Per aquest motiu no les desenvolupem.

3.9 NÚMEROS BORROSOS L-R.

La idea general d'aquest tipus de números, introduïts per Dubois i Prade[15], és considerar una funció contínua i creixent, a l'esquerra d'un cert valor amb funció de pertinença 1, i una altra funció contínua i decreixent a la dreta d'aquest valor.

3.9.1 FUNCIÓ DE REFERÈNCIA

Anomenem *funció de referència*, simbolitzada per L, a una funció

$$L : R \to [0, 1]$$
$$x \to L(x)$$

que verifica les cinc condicions següents:

a) L és contínua en R

b) $\forall x \in R \Rightarrow L(x)=L(-x)$

c) L és decreixent en $[0, +\infty)$

d) $L(0)=1$

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} L(x) = 0$

[15] DUBOIS, D.; PRADE, H. *Operacions on fuzzy numbers* a "International Journal of Systems and Science", 6, 613-626. 1978.

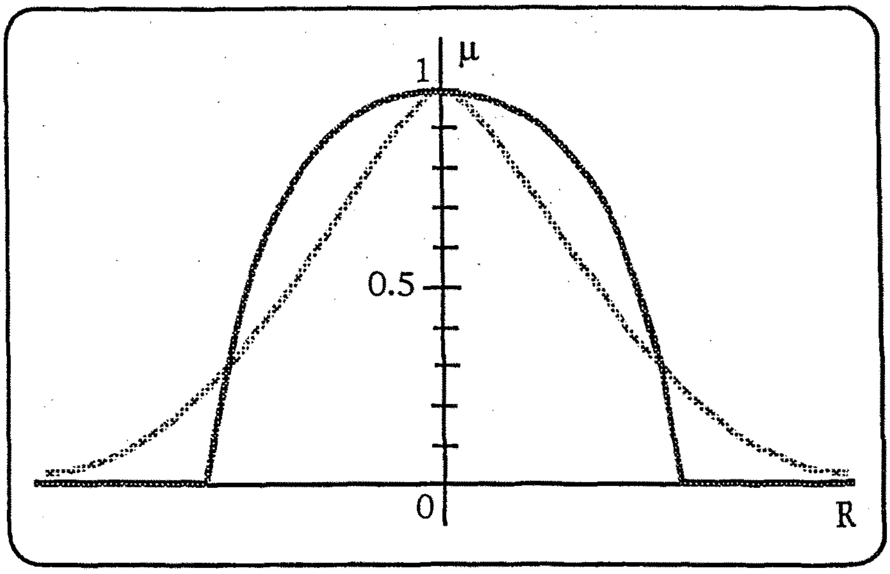


Fig.3.14 Dues funcions de referència

3.9.2 NÚMERO BORRÓS DE DUBOIS I PRADE

Donades dues funcions de referència L ("Left") i R ("Right"), direm que un número borrós $\tilde{A}$ d'R és un *número borrós de Dubois i Prade,* que simbolitzem per L-R, de valor principal m ($m \in R$) amb desviació esquerra λ ($\lambda \in R^+$) i desviació dreta ρ ($\rho \in R^+$), si la seva funció de pertinença $\mu_{\tilde{A}}$ és del tipus

$$\boxed{\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\lambda}\right) & \text{si } x < m \\ 1 & \text{si } x=m \\ R\left(\frac{x-m}{\rho}\right) & \text{si } x > m \end{cases}} \qquad [3.43]$$

Utilitzarem la notació $\tilde{A}=(m, \lambda, \rho)_{LR}$. Observem que les dues funcions de referència L i R indueixen una família infinita de números borrosos L-R obtinguda en variar els paràmetres m, λ i ρ.

Com a EXEMPLE d'aquesta família infinita de números borrosos, partim de les dues funcions de referència

$$L(x)= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \qquad \text{i} \qquad R(x)= \frac{2}{x^2+2}$$

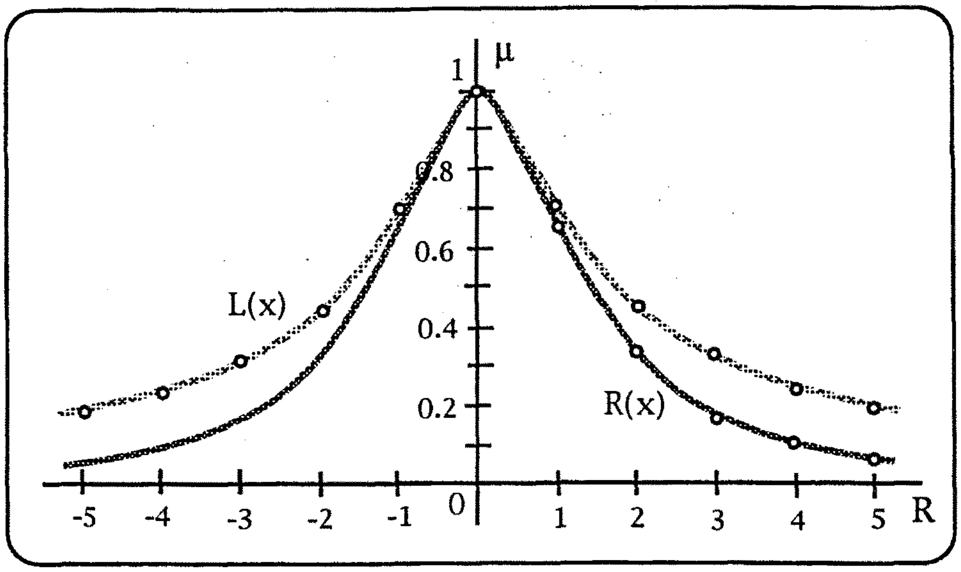


Fig.3.15 Funcions de referència de l'exemple

Prenent m=1, λ=1 i ρ=2, obtenim el número borrós $\tilde{A}$ amb funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{(1-x)^2+1}} & \text{si } x<1 \\ 1 & \text{si } x=1 \\ \dfrac{2}{\left(\dfrac{x-1}{2}\right)^2+2} & \text{si } x>1 \end{cases}$$

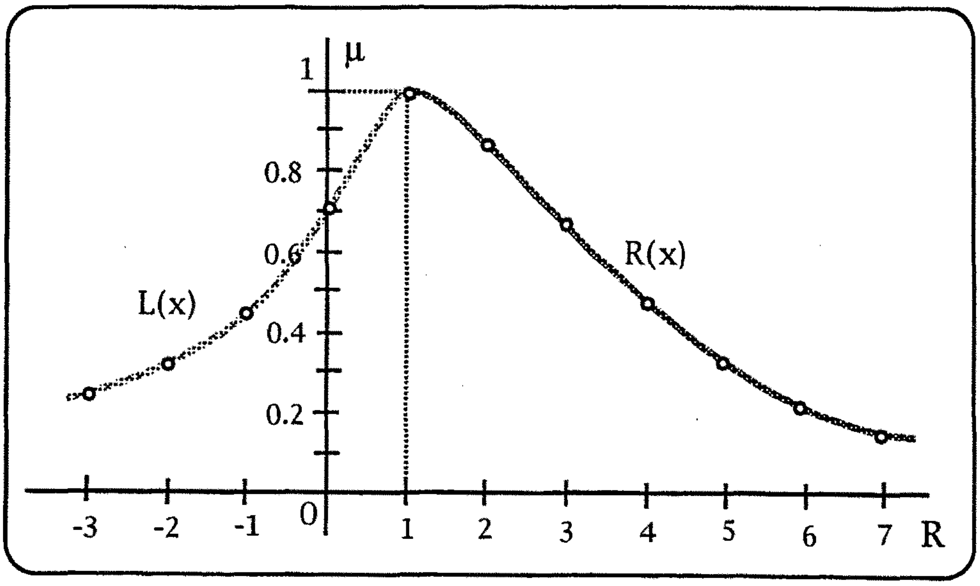


Fig.3.16 Número borrós L-R amb m=1, λ=1 i ρ=2

Si, en canvi, considerem m=2, λ=3 i ρ=4, obtenim el número borrós $\tilde{B}$ amb funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{B}}(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{2-x}{3}\right)^2+1}} & \text{si } x<2 \\ 1 & \text{si } x=2 \\ \dfrac{2}{\left(\dfrac{x-2}{4}\right)^2+2} & \text{si } x>2 \end{cases}$$

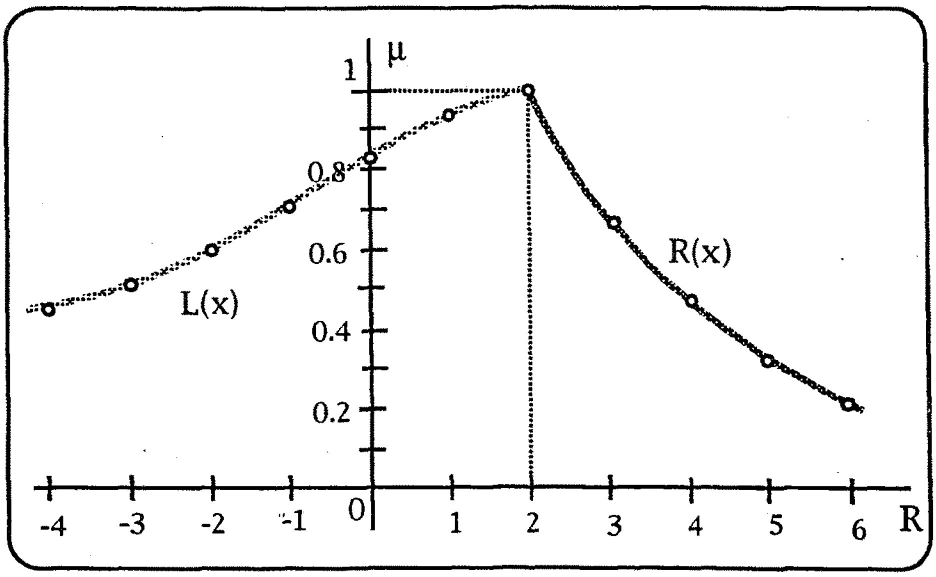


Fig.3.17 Número borrós L-R amb m=2, λ=3 i ρ=4

3.9.3 α-TALLS D'UN NÚMERO BORRÓS L-R

Donat un número borrós L-R, $\tilde{A}=(m, \lambda, \rho)_{LR}$, els α-talls de $\tilde{A}$, per $\alpha \neq 0$, són intervals del tipus $A_\alpha=[\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)]$, on

$$\underline{A}(\alpha)=\text{mín}\{x\in R \;/\; \mu_{\tilde{A}}(x)\geq\alpha\} \quad \text{i} \quad \overline{A}(\alpha)=\text{màx}\{x\in R \;/\; \mu_{\tilde{A}}(x)\geq\alpha\}$$

Si $x\leq m$, obtenim

$$\underline{A}(\alpha)= \text{mín}\{x\in R \;/\; L((m-x)/\lambda)\geq\alpha\}= \text{mín}\{x\in R \;/\; (m-x)/\lambda\geq L^{-1}(\alpha)\}=$$

$$= \text{mín}\{x\in R \;/\; x\leq m-\lambda L^{-1}(\alpha)\}= m-\lambda L^{-1}(\alpha)$$

En canvi, si $x \geq m$, resulta

$$\overline{A}(\alpha) = \text{màx}\{x \in R \ / \ R((x-m)/\rho) \geq \alpha\} = \text{màx}\{x \in R \ / \ (x-m)/\rho \geq R^{-1}(\alpha)\} =$$
$$= \text{màx}\{x \in R \ / \ x \geq m+\rho.R^{-1}(\alpha)\} = m+\rho.R^{-1}(\alpha)$$

Així, doncs, els α-talls d'$\tilde{A}$ són

$$\boxed{A_\alpha = [m-\lambda L^{-1}(\alpha),\ m+\rho.R^{-1}(\alpha)]} \qquad [3.44]$$

3.10 OPERACIONS AMB NÚMEROS BORROSOS L-R

3.10.1 SUMA DE NÚMEROS BORROSOS L-R

Donats els números borrosos $\tilde{A}=(m,\ \lambda,\ \rho)_{LR}$ i $\tilde{B}=(m',\ \lambda',\ \rho')_{LR}$ la seva *suma* verifica que

$$\boxed{\tilde{A}+\tilde{B}=(m+m',\ \lambda+\lambda',\ \rho+\rho')_{LR}} \qquad [3.45]$$

En efecte,

$$(A+B)_\alpha = A_\alpha + B_\alpha = [m-\lambda.L^{-1}(\alpha),\ m+\rho.R^{-1}(\alpha)]+[m'-\lambda'.L^{-1}(\alpha),\ m+\rho'.R^{-1}(\alpha)] =$$
$$= [m+m'-(\lambda+\lambda').L^{-1}(\alpha),\ m+m'+(\rho+\rho').R^{-1}(\alpha)]$$

i, per tant, $\tilde{A}+\tilde{B}=(m+m',\ \lambda+\lambda',\ \rho+\rho')_{LR}$.

3.10.2 DIFERÈNCIA DE NÚMEROS BORROSOS L-R

Donat el número borrós $\tilde{A}=(m,\ \lambda,\ \rho)_{LR}$, el *pseudo-oposat* d'$\tilde{A}$ ve expressat per

$$\boxed{-\tilde{A}=(-m,\ \rho,\ \lambda)_{RL}} \qquad [3.46]$$

En efecte,

$$(-A)_\alpha = [-\overline{A}(\alpha), -\underline{A}(\alpha)] = [-(m+\rho.R^{-1}(\alpha)),\ -(m-\lambda.L^{-1}(\alpha))] =$$
$$= [-m-\rho.R^{-1}(\alpha)),\ -m+\lambda.L^{-1}(\alpha)]$$

En conseqüència, donats els dos números borrosos $\tilde{A}=(m, \lambda, \rho)_{LR}$ i $\tilde{B}=(m', \lambda, \rho')_{RL}$, la seva *diferència* és

$$\boxed{\tilde{A}-\tilde{B}=(m-m', \lambda+\rho', \rho+\lambda')_{LR}} \qquad [3.47]$$

La seva comprovació és immediata, perquè només cal observar que $\tilde{A}-\tilde{B}=\tilde{A}+(-\tilde{B})$

3.10.3 PRODUCTE DE NÚMEROS BORROSOS L-R

Partint dels números borrosos L-R $\tilde{A}=(m, \lambda, \rho)_{LR}$ i $\tilde{B}=(m', \lambda', \rho')_{LR}$, podem observar que el seu *producte* no és un número borrós L-R.

Així, per exemple, en el cas en que considerem dos números borrosos L-R positius, tenim

$$(A.B)_\alpha=A_\alpha.B_\alpha=[m-\lambda.L^{-1}(\alpha), m+\rho.R^{-1}(\alpha)].$$

$$.[m'-\lambda'.L^{-1}(\alpha), m'+\rho'.R^{-1}(\alpha)]=$$

$$=[m.m'-(m\lambda'+m'\lambda).L^{-1}(\alpha)+\lambda\lambda'(L^{-1}(\alpha))^2,$$

$$m.m'+(m\rho'+m'\rho).R^{-1}(\alpha)+\rho\rho'(R^{-1}(\alpha))^2]$$

que, evidentment, no correspón a un número borrós L-R, ja que la seva funció de pertinença, obtinguda igualant a x els extrems de l'interval anterior i aïllant α, és:

$$\boxed{\mu_{\tilde{A}.\tilde{B}}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{(m\lambda'+m'\lambda)-\sqrt{(m\lambda'-m'\lambda)^2+4\lambda\lambda' x}}{2\lambda\lambda'}\right) & \text{si } x\le mm' \\ L\left(\dfrac{-(m\rho'+m'\rho)+\sqrt{(m\rho'-m'\rho)^2+4\rho\rho' x}}{2\rho\rho'}\right) & \text{si } x\ge mm' \end{cases}} \qquad [3.48]$$

3.10.4 QUOCIENT DE NÚMEROS BORROSOS L-R

Donat un número borrós L-R positiu o negatiu $\tilde{A}=(m, \lambda, \rho)_{LR}$, és fàcil comprovar que el seu *pseudo-invers* $\tilde{A}^{-1}$ no és un número borrós L-R.

La seva funció de pertinença ve expressada per

$$\mu_{\tilde{A}^{-1}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(1/x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{m-\frac{1}{x}}{\lambda}\right) & \text{si } \frac{1}{x}>m \\ 1 & \text{si } \frac{1}{x}=m \\ R\left(\dfrac{\frac{1}{x}-m}{\rho}\right) & \text{si } \frac{1}{x}<m \end{cases}$$

Reduint a comú denominador i aïllant x,

$$\mu_{\tilde{A}^{-1}}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{mx-1}{\lambda x}\right) & \text{si } x>\frac{1}{m} \\ 1 & \text{si } x=\frac{1}{m} \\ R\left(\dfrac{1-mx}{\rho x}\right) & \text{si } x<\frac{1}{m} \end{cases}$$

Finalment, ordenant termes obtindrem la funció de pertinença del pseudo-invers d'un número borrós L-R,

$$\boxed{\mu_{\tilde{A}^{-1}}(x)=\begin{cases} R\left(\dfrac{1-mx}{\rho x}\right) & \text{si } x<\frac{1}{m} \\ 1 & \text{si } x=\frac{1}{m} \\ L\left(\dfrac{mx-1}{\lambda x}\right) & \text{si } x>\frac{1}{m} \end{cases}} \qquad [3.49]$$

Per tant, donats ara els dos números borrosos L-R, que suposem positius, $\tilde{A}=(m, \lambda, \rho)_{LR}$ i $\tilde{B}=(m', \lambda', \rho')_{LR}$, el seu *quocient* , definit per $\tilde{A}:\tilde{B}=\tilde{A}.\tilde{B}^{-1}$.no és un número borrós L-R.

La seva funció de pertinença del quocient de dos números borrosos positius és, doncs

$$\boxed{\mu_{\tilde{A}:\tilde{B}}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{m-m'x}{\lambda+\rho'x}\right) & \text{si } x<\frac{m}{m'} \\ 1 & \text{si } x=\frac{m}{m'} \\ R\left(\dfrac{m'x-m}{\rho+\lambda'x}\right) & \text{si } x>\frac{m}{m'} \end{cases}} \qquad [3.50]$$

3.10.5 PRODUCTE D'UN N. REAL PER UN N. BORRÓS L-R

El producte d'un nombre real k per un número borrós L-R, expressat per $\tilde{A}=(m, \lambda, \rho)_{LR}$, és el número borrós :

a) $k.\tilde{A}=(km, k\lambda, k\rho)_{LR}$ si $k>0$

b) $k.\tilde{A}=(km, -k\rho, -k\lambda)_{RL}$ si $k<0$

La funció de pertinença en general és

$$\mu_{k.\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(x/k)=\begin{cases} L\left(\dfrac{m-\frac{x}{k}}{\lambda}\right) & \text{si } \frac{x}{k}<m \\ 1 & \text{si } \frac{x}{k}=m \\ R\left(\dfrac{\frac{x}{k}-m}{\rho}\right) & \text{si } \frac{x}{k}>m \end{cases}$$

Determinem-la per cadascún dels dos casos a) i b) anteriors:

a) ESCALAR POSITIU: $k>0$

$$\boxed{\mu_{k.\tilde{A}}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{km-x}{k\lambda}\right) & \text{si } x<km \\ 1 & \text{si } x=km \\ R\left(\dfrac{x-km}{k\rho}\right) & \text{si } x>km \end{cases}} \qquad [3.51]$$

per tant, $k.\tilde{A}=(km, k\lambda, k\rho)_{LR}$.

b) ESCALAR NEGATIU: $k<0$

En aquest cas, al ser k negatiu, haurem de tenir en compte el sentit de les desigualtats,

$$\mu_{k.\tilde{A}}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{km-x}{k\lambda}\right) & \text{si } x>km \\ 1 & \text{si } x=km \\ R\left(\dfrac{x-km}{k\rho}\right) & \text{si } x<km \end{cases}$$

Canviant signes en el numerador i denominador,

$$\mu_{k.\tilde{A}}(x)=\begin{cases} L\left(\dfrac{x-km}{(-k)\lambda}\right) & \text{si } x>km \\ 1 & \text{si } x=km \\ R\left(\dfrac{km-x}{(-k)\rho}\right) & \text{si } x<km \end{cases}$$

Finalment, ordenant els termes,

$$\boxed{\mu_{k.\tilde{A}}(x)=\begin{cases} R\left(\dfrac{km-x}{(-k)\rho}\right) & \text{si } x<km \\ 1 & \text{si } x=km \\ L\left(\dfrac{x-km}{(-k)\lambda}\right) & \text{si } x>km \end{cases}} \qquad [3.52]$$

aleshores, es verifica per k<0 que $k.\tilde{A}=(km, -k\rho, -k\lambda)_{RL}$.

3.11 COMPARACIÓ DE NÚMEROS BORROSOS

En la presa de decisions econòmiques en un entorn d'incertesa és important la comparació o ordenació de números borrosos. Aquestes comparacions no són simples, donat que en l'àmbit dels números borrossos no existeix una relació d'ordre total.

La forma més lògica de comparar números borrosos és basant-nos en el concepte de possibilitat, però això sovint contradiu la nostra intuïció. Una segona opció consisteix en la comparació d'àrees, posicions o coeficients que d'alguna manera representin aquests números borrosos.

El problema és que el procés de comparació és dinàmic i sovint les situacions canvien en funció de l'entorn o àmbit on treballem. Això comporta que per comparar números borrosos ens veiem obligats a utilitzar diferents mètodes, segons les situacions en qué ens trobem.

Tots aquests mètodes admeten diferents classificacions. Nosaltres els classifiquem en dos grans grups:

- Relació de preferència ordinària.
- Relació de preferència borrosa.

Per tal d'establir les relacions de preferència entre números borrosos, introduïm els conceptes d'interval esperat, valor esperat, centre de gravetat, coeficient de variació d'un número borrós i distància entre números borrosos a través dels seus α-talls.

3.11.1 INTERVAL ESPERAT D'UN NÚMERO BORRÓS

Anomenem *interval esperat*, que simbolitzem per $IE(\tilde{A})$, d'un número borrós $\tilde{A}$ l'interval de nombres reals definit per mitjà de les integrals definides

$$\boxed{IE(\tilde{A}) = \left[\int_0^1 \underline{A}(\alpha).d\alpha\ ,\ \int_0^1 \overline{A}(\alpha).d\alpha\right]} \qquad [3.53]$$

En el cas particular que $\tilde{A}$ sigui un número borrós triangular, expressat per la terna $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3)$, tenim

$$IE(\tilde{A}) = \left[\int_0^1 (a_1+\alpha(a_2-a_1).d\alpha\ ,\ \int_0^1 (a_2-\alpha(a_3-a_2).d\alpha\right] =$$

$$= \left[\left[a_1\alpha + \frac{\alpha^2}{2}(a_2-a_1)\right]_0^1, \left[a_3\alpha + \frac{\alpha^2}{2}(a_3-a_2)\right]_0^1\right] =$$

$$= \left[a_1 + \frac{1}{2}(a_2-a_1),\ a_3 + \frac{1}{2}(a_3-a_2)\right] = \left[\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_2+a_3}{2}\right]$$

Per tant, l'interval esperat del NBT és

$$\boxed{IE(\tilde{A}) = \left[\frac{a_1+a_2}{2}, \frac{a_2+a_3}{2}\right]} \qquad [3.54]$$

3.11.2 VALOR ESPERAT D'UN NÚMERO BORRÓS

Anomenem *valor esperat* d'un número borrós $\tilde{A}$, simbolitzat per $VE(\tilde{A})$, amb ponderació β, al nombre real que ens dóna una ponderació entre els extrems del seu interval esperat, és a dir,

$$\boxed{VE(\tilde{A}) = \beta \int_0^1 \underline{A}(\alpha).d\alpha + (1-\beta) \int_0^1 \overline{A}(\alpha).d\alpha} \qquad [3.55]$$

En el cas que $\tilde{A}$ sigui un número borrós triangular el valor esperat serà igual a

$$VE(\tilde{A}) = \beta.[(a_1+a_2)/2]+(1-\beta).[(a_2+a_3)/2]$$

Simplificant,

$$VE(\tilde{A}) = [a_2+a_3-\beta(a_3-a_1)]/2$$

En el cas particular de $\beta=1/2$ tenim

$$\boxed{VE(\tilde{A}) = (a_1+2a_2+a_3)/4} \qquad [3.56]$$

que és la mitjana dels extrems de l'interval esperat.

3.11.3 CENTRE DE GRAVETAT D'UN NÚMERO BORRÓS

Donat un número borrós $\tilde{A}$ del referencial R amb funció de pertinença contínua i de suport acotat l'interval [a, b], definim el *centre de gravetat* d$\tilde{A}$, i el simbolitzem com $\bar{x}_{\tilde{A}}$, al nombre real

$$\boxed{\bar{x}_{\tilde{A}} = \int_a^b x.\mu_{\tilde{A}}(x).dx \Big/ \int_a^b \mu_{\tilde{A}}(x).dx} \qquad [3.57]$$

El centre de gravetat d'un n. borrós triangular $\tilde{A}=(a_1, a_2, a_3)$ és

$$\boxed{\bar{x}_{\tilde{A}} = (a_1+a_2+a_3)/3} \qquad [3.58]$$

Observem que coincideix amb el baricentre del triangle.

En efecte, i prescindint dels càlculs intermedis,

$$\bar{x}_{\tilde{A}}=\frac{\displaystyle\int_{a_1}^{a_3} x\,\mu_{\tilde{A}}(x)\,dx}{\displaystyle\int_{a_1}^{a_3} \mu_{\tilde{A}}(x)\,dx}=\frac{\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} x\,\frac{x-a_1}{a_2-a_1}\,dx+\int_{a_2}^{a_3} x\,\frac{a_3-x}{a_3-a_2}\,dx}{\displaystyle\int_{a_1}^{a_2} \frac{x-a_1}{a_2-a_1}\,dx+\int_{a_2}^{a_3} \frac{a_3-x}{a_3-a_2}\,dx}=\frac{1}{3}(a_1+a_2+a_3)$$

3.11.4 COEFICIENT DE VARIACIÓ D'UN NÚMERO BORRÓS[16]

Donat un número borrós $\tilde{A}$ del referencial R amb funció de pertinença contínua i que té per suport acotat l'interval [a, b], considerem la funció de probabilitat per esdeveniments borrosos donada per $f(\tilde{A})=k\mu_{\tilde{A}}(x)$ on k és una constant de proporcionalitat.

Definim el *coeficient de variació* del número borrós $\tilde{A}$ i el representem per $CV(\tilde{A})$, com el nombre real que verifica

$$\boxed{CV(\tilde{A})=\frac{\sigma(\tilde{A})}{x_M(\tilde{A})}} \qquad [3.59]$$

on la mitjana $X_M(\tilde{A})$ ve donada per

$$x_M(\tilde{A})=\int_a^b x.(\mu_{\tilde{A}}(x))^2.dx \Big/ \int_a^b (\mu_{\tilde{A}}(x))^2.dx$$

i la desviació standard $\sigma(\tilde{A})$ per

$$\sigma(\tilde{A})=\sqrt{\left[\int_a^b x^2.(\mu_{\tilde{A}}(x))^2.dx \Big/ \int_a^b (\mu_{\tilde{A}}(x))^2.dx\right]-(x_M(\tilde{A}))^2}$$

---

16 LEE, E.S.; LI, R.L. *Comparison of fuzzy numbers based on the probability measure of fuzzy events.* Comput. Math. Appl. 15, 887-896. 1998.

Quan $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3)$ és un número borrós triangular, es pot provar que el coeficient de variació es pot escriure com

$$\boxed{CV(\tilde{A}) = \frac{1}{20}\,\frac{3a_1^2+4a_2^2+3a_3^2-4a_1a_2-2a_1a_3-4a_2a_3}{a_1+2a_2+a_3}} \qquad [3.60]$$

L'expressió anterior també es pot expressar en la forma

$$CV(\tilde{A})=\frac{1}{5}\left[\frac{a_1^2+2a_2^2+a_3^2}{a_1+2a_1+a_3}-\frac{a_1+2a_1+a_3}{4}\right]$$

3.11.5 DISTÀNCIA ENTRE NÚMEROS BORROSOS A TRAVÉS DELS α-TALLS[17]

Donats els números borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ amb α-talls $A_\alpha=[\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)]$ i $B_\alpha=[\overline{B}(\alpha), \underline{B}(\alpha)]$, respectivament, anomenem *distància* entre $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ a través dels seus α-talls, $d(\tilde{A},\tilde{B})$, al valor de l'expressió

$$\boxed{d(\tilde{A},\tilde{B})=\frac{1}{2}\left[\int_0^1\left(\left|\underline{A}(\alpha)-\underline{B}(\alpha)\right|+\left|\overline{A}(\alpha)-\overline{B}(\alpha)\right|\right)d\alpha\right]} \qquad [3.61]$$

Pel cas particular de números borrosos triangulars, $\tilde{A}=(a_1, a_2, a_3)$ i $\tilde{B}=(b_1, b_2, b_3)$, obtenim

$$d(\tilde{A},\tilde{B})=\frac{1}{2}\int_0^1 \left|a_1-b_1+\alpha(a_2-a_1-b_2+b_1)\right| - \left|a_3-b_3-\alpha(a_3-a_2-b_3+b_2)\right| d\alpha =$$

$$=\left[\frac{1}{4(a_2-a_1-b_2+b_1)}\left(a_1-b_1+\alpha(a_2-a_1-b_2+b_1)\right)\left|a_1-b_1+\alpha(a_2-a_1-b_2+b_1)\right|\right]_0^1$$

$$+\left[\frac{1}{4(a_3-a_2-b_3+b_2)}\left(a_3-b_3-\alpha(a_3-a_2-b_3+b_2)\right)\left|a_3-b_3-\alpha(a_3-a_2-b_3+b_2)\right|\right]_0^1=$$

$$=\frac{(a_2-b_2)\left|a_2-b_2\right|-(a_1-b_1)\left|a_1-b_1\right|}{4(a_2-a_1-b_2+b_1)}+\frac{(a_2-b_2)\left|a_2-b_2\right|-(a_3-b_3)\left|a_3-b_3\right|}{4(a_3-a_2-b_3+b_2)}$$

---

17 KAUFMANN, A. ; GUPTA, M.M. *Introduction to fuzzy Arithmetic.* International Thompson Computer press. 100. 1991.

En particular, la distància d'un número borrós $\tilde{A}$ al nombre real zero és

$$\boxed{d(\tilde{A},0)=\frac{1}{2}\left[\int_0^1 \left(|\underline{A}(\alpha)|+|\overline{A}(\alpha)|\right)d\alpha\right]} \qquad [3.62]$$

Observem que si $\tilde{A}$ és un número borrós positiu (resp negatiu) la distància anterior coincideix amb el valor esperat d'$\tilde{A}$ prenent $\beta=1/2$ (resp. amb el valor absolut del valor esperat d'$\tilde{A}$).

3.12 RELACIONS DE PREFERÈNCIA ORDINÀRIA

3.12.1 COMPARACIÓ DE N. BORROSOS A PARTIR DE N. REALS

Aquest mètode consisteix en assignar a cada número borrós del referencial R un nombre real i, a continuació, ordenar aquests valors segons l'ordenació d'ordre total en R. És a dir, definirem una aplicació g de la següent forma

$$\begin{aligned} g : \tilde{N}(R) &\to R \\ \tilde{A} &\to g(\tilde{A}) \end{aligned}$$

A partir d'ella diem que $\tilde{A}$ és *superior* a $\tilde{B}$, o *preferible* segons el context, i ho representem per $\tilde{A} \gg \tilde{B}$, si el nombre real $g(\tilde{A})$ és més gran que el $g(\tilde{B})$. Matemàticament,

$$\boxed{\tilde{A} \gg \tilde{B} \quad \Leftrightarrow \quad g(\tilde{A}) \geq g(\tilde{B})} \qquad [3.63]$$

De les diferents aplicacions que podem definir entre el conjunt dels números borrosos $\tilde{N}(R)$ i el dels nombres reals R, considerem les tres més usuals:

a) COMPARACIÓ AMB EL VALOR ESPERAT: VE

$$\boxed{\tilde{A} \gg \tilde{B} \quad \Leftrightarrow \quad VE(\tilde{A}) \geq VE(\tilde{B})} \qquad [3.64]$$

b) COMPARACIÓ AMB EL CENTRE DE GRAVETAT: $\bar{x}$

$$\boxed{\tilde{A} \gg \tilde{B} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x}_{\tilde{A}} \supseteq \geq \supseteq \bar{x}_{\tilde{B}}} \qquad [3.65]$$

c) COMPARACIÓ AMB EL COEFICIENT DE VARIACIÓ: CV

$$\boxed{\tilde{A} \gg \tilde{B} \quad \Leftrightarrow \quad CV(\tilde{A}) \geq CV(\tilde{B})} \qquad [3.66]$$

d) COMPARACIÓ A PARTIR DE LA DISTÀNCIA[17]

$$\boxed{\tilde{A} \gg \tilde{B} \quad \Leftrightarrow \quad d(\tilde{A}, \tilde{A} \wedge \tilde{B}) \geq d(\tilde{B}, \tilde{A} \wedge \tilde{B})} \qquad [3.67]$$

3.12.2 COMPARACIÓ A PARTIR DELS SEUS α-TALLS

Donats els números borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ d'R que tenen per α-talls $A_\alpha = [\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)]$ i $B_\alpha = [\underline{B}(\alpha), \overline{B}(\alpha)]$, respectivament, alguns dels criteris utilitzats per comparar números borrosos a partir dels seus α-talls són els següents:

a) $\tilde{A} \leq \tilde{B} \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1] \;\; \underline{A}(\alpha) \leq \underline{B}(\alpha)$ i $\overline{A}(\alpha) \leq \overline{B}(\alpha)$

b) $\tilde{A} \leq \tilde{B} \Leftrightarrow \forall \alpha \in [0,1] \;\; \overline{A}(\alpha) \leq \underline{B}(\alpha)$

c) $\tilde{A} \leq \tilde{B} \Leftrightarrow \forall \alpha \in [\alpha_1, 1] \;\; \overline{A}(\alpha) \leq \underline{B}(\alpha)$

on en aquest últim $\alpha_1 \in [0, 1]$.

3.13 RELACIONS DE PREFERÈNCIA BORROSA

Donats dos números borrosos que volem comparar, aquest mètode consisteix en assignar un nombre real de l'interval [0,1] a cadascún dels números borrosos, el qual ens indica en quin grau un d'ells és preferible a l'altre.

[17] KAUFMANN, A.; GIL ALUJA, J. *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre.* Ed. Hispano-Europea. 62. 1987.

Amb aquesta finalitat, sigui g la funció definida, en el conjunt producte dels números borrosos, per

$$g: \tilde{N}(R)\times\tilde{N}(R) \rightarrow [0, 1]$$
$$\left(\tilde{A},\tilde{B}\right) \rightarrow g\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)$$

Aleshores, diem que el número borrós $\tilde{A}$ és *preferible* al $\tilde{B}$ amb un *grau de preferència* $g\left(\tilde{A},\tilde{B}\right)$.

3.13.1 RELACIÓ DE PREFERÈNCIA DE YUAN[18]

Donats els números borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ d'R, anomenem *relació de preferència de Yuan* entre els números borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, i la representem per $\mu_{\tilde{Y}}$, a la següent expressió:

$$\boxed{\mu_{\tilde{Y}}(\tilde{A},\tilde{B}) = \begin{cases} \dfrac{S_1+S_2}{S} & \text{si } S > 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{si } S=0 \end{cases}} \qquad [3.68]$$

on $S=S_1+S_2+S_3+S_4$ i on S_1, S_2, S_3, S_4 vénen definits per les següents integrals definides:

$$S_1=\int_{\left\{\alpha\ /\ \overline{D}(\alpha)>0\right\}} \overline{D}(\alpha).d\alpha \qquad S_2=\int_{\left\{\alpha\ /\ \underline{D}(\alpha)>0\right\}} \underline{D}(\alpha).d\alpha$$

$$S_3=\int_{\left\{\alpha\ /\ \overline{D}(\alpha)<0\right\}} \left|\overline{D}(\alpha)\right|.d\alpha \qquad S_4=\int_{\left\{\alpha\ /\ \underline{D}(\alpha)<0\right\}} \left|\underline{D}(\alpha)\right|.d\alpha$$

essent $\underline{D}(\alpha)=\underline{A}(\alpha)-\overline{B}(\alpha)$ i $\overline{D}(\alpha)=\overline{A}(\alpha)-\underline{B}(\alpha)$

En conseqüència, per a determinar la relació de preferència de Yuan, s'haurà de determinar préviament els extrems inferior i superior de la diferència borrosa $\tilde{D}$ dels números borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, i després calcular les integrals definides anteriorment.

[18] YUAN, Y. *Criteria for evaluating fuzzy ranking methods* a "Fuzzy Sets and Systems", 44, 139-157. 1991.

Així, per exemple, en el nombre triangular $\tilde{D}$ les integrals són les àrees següents: S_1=OBED, S_2=CDE, S_3=0 i S_4=AOC.

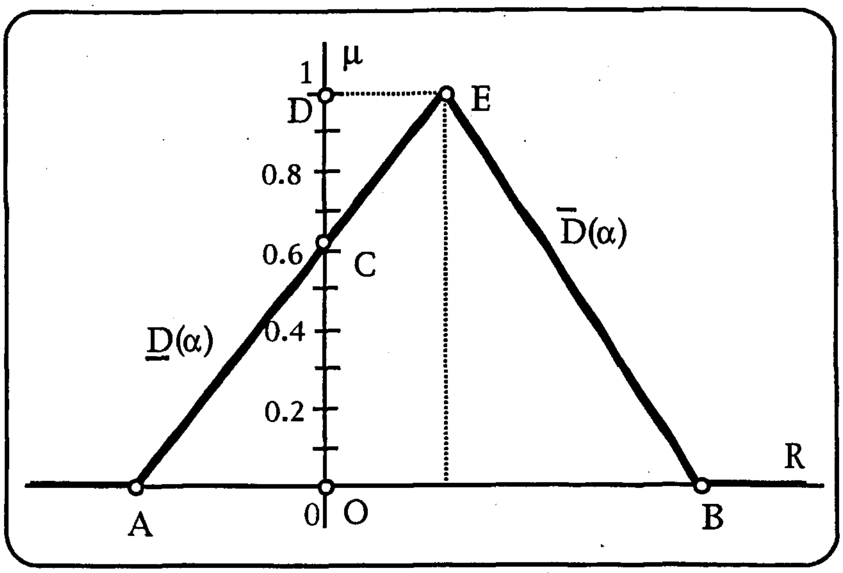


Fig.3.18 Relació de preferència de Yuan

3.13.2 RELACIÓ DE PREFERÈNCIA DE JIMÉNEZ[19]

Siguin dos números borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ d'R, amb intervals esperats $IE(\tilde{A})=[A_1, A_2]$ i $IE(\tilde{B})=[B_1, B_2]$, respectivament, i considerem les diferències $E_1=A_1-B_2$ i $E_2=A_2-B_1$.

Anomenem *relació de preferència de Jiménez* entre els números borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, i la representem per $\mu_{\tilde{J}}$, a la següent expressió

$$\boxed{\mu_{\tilde{J}}(\tilde{A},\tilde{B})=\begin{cases} 0 & \text{si } E_2 < 0 \\ \dfrac{E_1}{E_2-E_1} & \text{si } 0\in[E_1, E_2] \\ 1 & \text{si } E_1 > 0 \end{cases}} \qquad [3.69]$$

[19] JIMENEZ, M. *Modelos matemáticos aplicados a la toma de decisiones financieras en condiciones de incertidumbre*. Tesis Doctoral. Universidad del País Vasco. Bilbao. 1994.

3.14 APROXIMACIÓ DE NÚMEROS BORROSOS

3.14.1 APROXIMACIÓ I ERROR MÀXIM

Donats dos números borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ d'R direm que $\tilde{A}$ és una *aproximació* de $\tilde{B}$, i ho representem per $\tilde{A} \approx \tilde{B}$, si el valor absolut de la diferència de les funcions de pertinença és més petit o igual que un cert valor. És a dir,

$$\boxed{\tilde{A} \approx \tilde{B} \quad \Leftrightarrow \quad \forall\, x \in R, \ |\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)| \leq \varepsilon} \qquad [3.70]$$

L'*error màxim*, simbolitzat per e, d'aquesta aproximació vindrà expressat per

$$e = \text{màx}\ \{|\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)| \ / \ x \in R\}.$$

És evident que existeixen moltes maneres d'aproximar números borrosos. Ens limitarem a calcular aproximacions entre números borrosos de suport acotat que tenen el mateix nucli i suport.

3.14.2 CÀLCUL DE L'ERROR MÀXIM DE L'APROXIMACIÓ

Partim de dos números borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ que tenen igual nuclis i suports

$$N(\tilde{A}) = N(\tilde{B}) = N \qquad \text{i} \qquad \text{supp}(\tilde{A}) = \text{supp}(\tilde{B}) = [a, b]$$

i considerem la funció F definida com el valor absolut de la diferència de les funcions de pertinença

$$F(x) = |\mu_{\tilde{A}}(x) - \mu_{\tilde{B}}(x)|$$

Atès que F és una funció contínua definida en el compacte [a, b], llavors pel teorema de Weierstrass la funció F assoleix el màxim i el mínim absoluts en [a, b].

Pel fet que $F(x) \geq 0$ i que el mínim absolut és un element del conjunt $D_m = \{x \in [a, b] \ / \ \mu_{\tilde{A}}(x) = \mu_{\tilde{B}}(x)\}$ i com que $a, b \in [a, b]$, llavors el màxim absolut s'assolirà en l'interval obert (a, b).

En conseqüència, aquest máxim serà un element del conjunt $D_M = \{x \in (a, b) / \ F'(x) = 0\}$.

Aleshores, l'error màxim d'aproximació e vindrà donat per

$$\boxed{e=\text{màx}\{F(x)\ /\ x\in D_M\}} \qquad [3.71]$$

En la majoría de les ocasions aquest error màxim d'aproximació serà difícil de calcular. Els professors Jiménez i Rivas[20] demostren que, quan $\tilde{A}=(a_1, a_2, a_3, a_4)$ és un número borrós trapezoïdal, una cota K de l'error màxim e pot venir expressada per

$$\boxed{e \leq K=\text{màx}\left\{\frac{D_{esq}}{a_2-a_1}, \frac{D_{dta}}{a_4-a_3}\right\}} \qquad [3.72]$$

on les desviacions esquerra i dreta són

$$D_{esq}=\text{màx}\{|\underline{A}(\alpha)-\underline{B}(\alpha)|\ /\ 0\leq\alpha\leq 1\}$$

$$D_{dta}=\text{màx}\{|\overline{A}(\alpha)-\overline{B}(\alpha)|\ /\ 0\leq\alpha\leq 1\}.$$

3.14.3 APROXIMACIÓ DEL PRODUCTE DE DOS NBT POSITIUS

Donats els números borrosos triangulars positius $\tilde{A}=(a_1, a_2, a_3)$ i $\tilde{B}=(b_1, b_2, b_3)$, ja hem demostrat que el seu producte $\tilde{A}\cdot \tilde{B}$ és un número borrós no triangular amb nucli $N(\tilde{A}\cdot \tilde{B})=\{a_2b_2\}$ i suport $supp(\tilde{A}\cdot \tilde{B})=[a_1b_1, a_3b_3]$.

En aquest cas, i seguint la teoria desenvolupada anteriorment, el producte $\tilde{A}\cdot \tilde{B}$ l'aproximarem al número borrós triangular $\tilde{C}$ amb el mateix nucli i suport, és a dir, $\tilde{C}=(a_1b_1, a_2b_2, a_3b_3)$.

Una cota de l'error màxim d'aproximació ve donada per

$$K=\text{màx}\left\{\frac{\text{màx}\ \{(\alpha-\alpha^2)(a_2-a_1)(b_2-b_1)\ /\ 0\leq\alpha\leq 1\}}{a_2b_2-a_1b_1}, \frac{\text{màx}\ \{(\alpha-\alpha^2)(a_3-a_2)(b_3-b_2)\ /\ 0\leq\alpha\leq 1\}}{a_3b_3-a_2b_2}\right\}$$

[20] JIMENEZ, M.; RIVAS, J.A. *Actas III Congresos SIGEF*. Buenos Aires. Paper 2.12. 1996.

Si fem $F(\alpha)=(\alpha-\alpha^2)(a_2-a_1)(b_2-b_1)$, derivem respecte a α i igualem a zero, $F'(\alpha)=0$, tindrem

$$F'(\alpha)=(1-2\alpha)(a_2-a_1)(b_2-b_1) \quad , \quad 2\alpha=1 \quad , \quad \alpha=1/2$$

Com que $F''(\alpha)=2(a_2-a_1)(b_2-b_1)<0$, deduïm que en $\alpha=1/2$ s'assolirà un màxim. Per tant,

$$\text{màx}\{F(\alpha)\ /0\leq\alpha\leq 1\}=F(1/2)=(a_2-a_1)(b_2-b_1)/4$$

Anàlogament, si fem el mateix amb $G(\alpha)=(\alpha-\alpha^2)(a_3-a_2)(b_3-b_2)$, tindrem

$$G'(\alpha)=(1-2\alpha)(a_3-a_2)(b_3-b_2)=0 \quad , \quad 2\alpha=1 \quad , \quad \alpha=1/2$$

També $G''(\alpha)=-2(a_3-a_2)(b_3-b_2)<0$ i per tant el màxim de $G(\alpha)$ s'assoleix en $\alpha=1/2$. Per tant,

$$\text{màx}\{G(\alpha)\ /0\leq\alpha\leq 1\}=G(1/2)=(a_3-a_2)(b_3-b_2)/4$$

Conseqüentment, podem escriure

$$\boxed{K=\text{màx}\left\{\frac{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}{4\,(a_2b_2-a_1b_1)},\frac{(a_3-a_2)(b_3-b_2)}{4\,(a_3b_3-a_2b_2)}\right\}} \qquad [3.73]$$

3.14.4 APROXIMACIÓ DEL QUOCIENT DE DOS NBT POSITIUS

Donats els NBTs positius $\tilde{A}=(a_1, a_2, a_3)$ i $\tilde{B}=(b_1, b_2, b_3)$, sabem que el seu quocient $\tilde{A}:\tilde{B}$ és un número borrós no triangular que té per nucli $N(\tilde{A}:\tilde{B})=\{a_2:b_2\}$ i per suport $supp(\tilde{A}:\tilde{B})=[a_1:b_3, a_3:b_1]$.

Anàlogament al cas anterior, $\tilde{A}:\tilde{B}$ l'aproximem al número borrós triangular $\tilde{C}$ amb el mateix nucli i suport, $\tilde{C}=(a_1:b_3, a_2:b_2, a_3:b_1)$.

Efectuant els càlculs d'una manera similar al cas del producte, la cota de l'error màxim de l'aproximació del quocient és

$$\boxed{K=\text{màx}\left\{\frac{\sqrt{b_3}-\sqrt{b_2}}{\sqrt{b_3}+\sqrt{b_2}},\frac{\sqrt{b_2}-\sqrt{b_1}}{\sqrt{b_2}+\sqrt{b_1}}\right\}} \qquad [3.74]$$

3.14.5 APROXIMACIÓ DE NÚMEROS BORROSOS AMB UN ERROR D'APROXIMACIÓ PREFIXAT

Donat un número borrós $\tilde{A}$, proposem un mètode per calcular un número borrós poligonal $\tilde{P}$ de manera que l'error d'aproximació sigui més petit que un valor prefixat p_e.

Considerem en primer lloc una partició $\{\alpha_0, \alpha_1,..., \alpha_{n-1}, \alpha_n\}$ de l'interval [0, 1] definida per $\alpha_i=i/n$ on $n=2^m$ amb $i=0,1,2,...,2^m$, i per $j=0,1,...,n-1$ definim

$$K_{j+1}= \text{màx}\left\{\frac{D^j_{esq}}{\underline{A}\left(\frac{j+1}{2^m}\right)-\underline{A}\left(\frac{j}{2^m}\right)}, \frac{D^j_{dta}}{\overline{A}\left(\frac{j+1}{2^m}\right)-\overline{A}\left(\frac{j}{2^m}\right)}\right\}$$

on les desviacions esquerra i dreta són

$$D^j_{esq}= \text{màx}\left\{|\underline{A}(\alpha)-\underline{P}(\alpha)| \ / \ \frac{j}{2^m}\leq\alpha\leq\frac{j+1}{2^m}\right\}$$

$$D^j_{dta}= \text{màx}\left\{|\overline{A}(\alpha)-\overline{P}(\alpha)| \ / \ \frac{j}{2^m}\leq\alpha\leq\frac{j+1}{2^m}\right\}$$

Aleshores, $K=\text{màx}\{K_1, K_2,..., K_n\}$ és una cota superior de l'error i, calculant el valor de n amb la condició que $K\leq p_e$ obtindrem el número borrós poligonal $\tilde{P}$ amb un error d'aproximació "e" inferior al prefixat p_e.

Aplicació: aproximació del producte de dos NBT

Siguin dos números borrosos triangulars positius $\tilde{A}=(a_1, a_2, a_3)$ i $\tilde{B}=(b_1, b_2, b_3)$ i designem per $\tilde{P}$ el número borrós poligonal que aproxima el producte $\tilde{A}\tilde{B}$.

Considerem la partició de l'interval [0, 1] en n parts iguals, definida per

$$\alpha_i=i/2^m \quad \text{on} \quad n=2^m \quad \text{amb} \quad i=0,1,2,...,2^m.$$

Els subintervals de [0, 1] que genera la partició són de la forma

$$[\alpha_j, \alpha_{j+1}]=[j/2^m, (j+1)/2^m] \quad \text{on} \quad j=0,1,...,2^m-1.$$

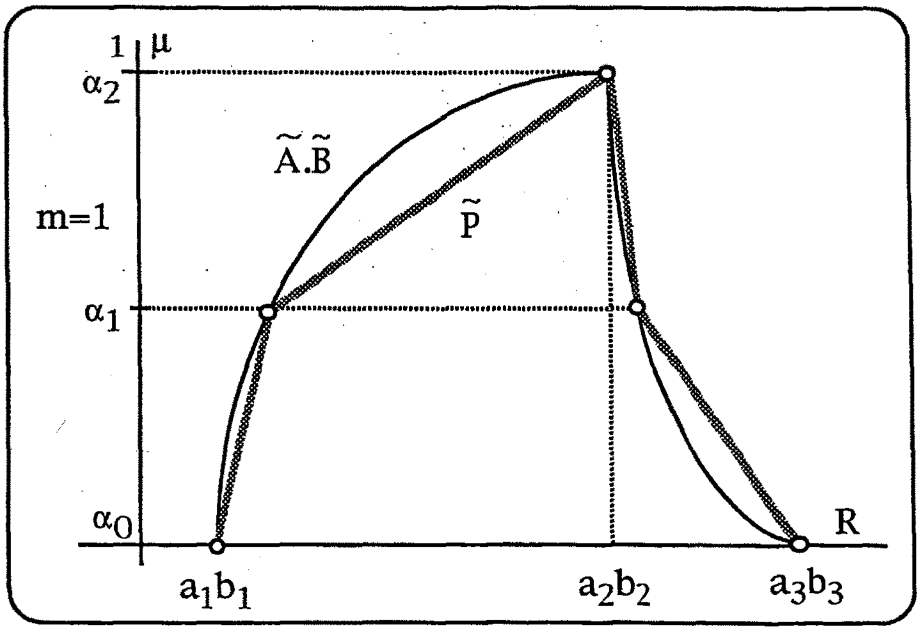


Fig.3.19 Número borrós poligonal amb m=1

Calcularem l'extrem inferior de l'α-tall, $\underline{P}(\alpha)$, per α pertanyent al subinterval $[j/2^m, (j+1)/2^m]$.

Recordant que

$$\underline{AB}(\alpha) = a_1b_1+\alpha(a_1b_2+b_1a_2-2a_1b_1)+\alpha^2(a_2-a_1)(b_2-b_1)$$

obtenim

$$\underline{AB}(\frac{j}{2^m}) = a_1b_1+\frac{j}{2^m}(a_1b_2+b_1a_2-2a_1b_1) + \left(\frac{j}{2^m}\right)^2(a_2-a_1)(b_2-b_1)$$

$$\underline{AB}(\frac{j+1}{2^m}) = a_1b_1+\frac{j+1}{2^m}(a_1b_2+b_1a_2-2a_1b_1) + \left(\frac{j+1}{2^m}\right)^2(a_2-a_1)(b_2-b_1)$$

Calculant ara la recta que passa pels punts M i N que podem veure en la figura de la pàgina següent,

$$M\left(\underline{AB}\left(\frac{j}{2^m}\right), \frac{j}{2^m}\right) \quad \text{i} \quad N\left(\underline{AB}\left(\frac{j+1}{2^m}\right), \frac{j+1}{2^m}\right)$$

Com que l'equació de la recta que passa pels punts $M(x_M, y_M)$ i $N(x_N, y_N)$ ve expressada per

$$(y-y_M)/(y_N-y_M) = (x-x_M)/(x_N-x_M)$$

I com que $y=\alpha$ i $x=\underline{P}(\alpha)$, substituint

$$\frac{\alpha-\frac{j}{2^m}}{\frac{j+1}{2^m}-\frac{j}{2^m}}=\frac{\underline{P}(\alpha)-\underline{AB}\left(\frac{j}{2^m}\right)}{\underline{AB}\left(\frac{j+1}{2^m}\right)-\underline{AB}\left(\frac{j}{2^m}\right)}$$

Aïllant i simplificant, l'extrem inferior de l'α-tall del número borrós $\tilde{P}$, $\underline{P}(\alpha)$,

$$\underline{P}(\alpha)=(2^m\alpha-j)\left(\underline{AB}\left(\frac{j+1}{2^m}\right)-\underline{AB}\left(\frac{j}{2^m}\right)\right)+\underline{AB}\left(\frac{j}{2^m}\right)$$

Substituint per les expressions dels extrems inferiors en funció de a_1, a_2, b_1 i b_2, tindrem

$$\underline{P}(\alpha)=(2^m\alpha-j)\left[\frac{a_1b_2+b_1a_2-2a_1b_1}{2^m}+\frac{(1+2j)(a_2-a_1)(b_2-b_1)}{2^{2m}}\right]+\underline{AB}\left(\frac{j}{2^m}\right)$$

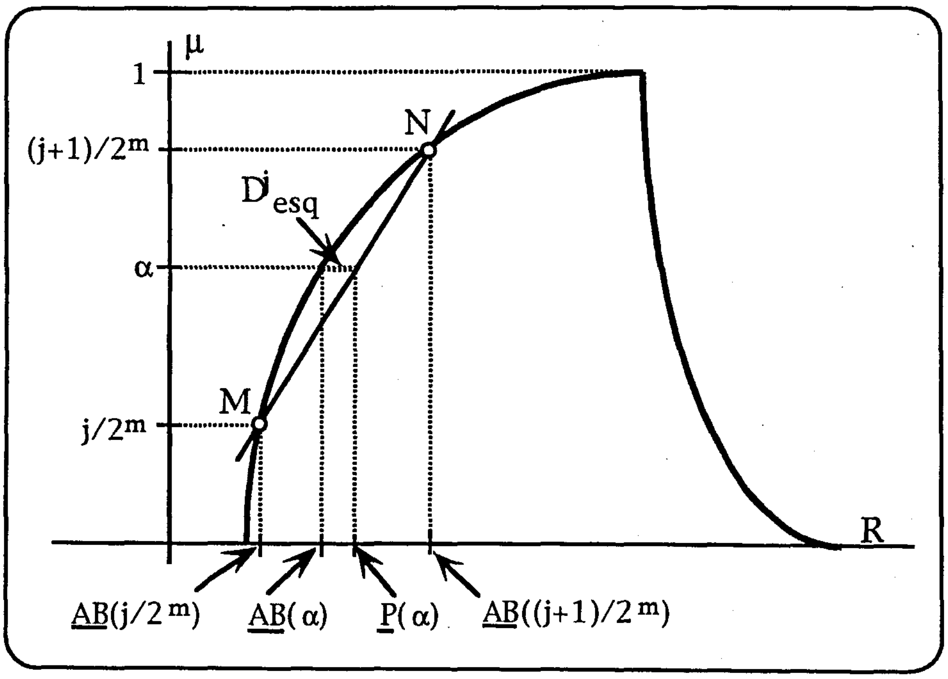


Fig.3.20 Obtenció de les desviacions esquerres

Calculem a continuació cadascuna de les desviacions esquerres,

$$F(\alpha)=\underline{AB}(\alpha)-\underline{P}(\alpha)=(a_2-a_1)(b_2-b_1)\left[\alpha^2-\alpha\left(\frac{1+2j}{2^m}\right)\right]+\frac{a_1b_2+a_2b_1-2a_1b_1}{2^m}+$$

$$+\frac{(2j+1)(a_2-a_1)(b_2-b_1)}{2^{2m}}-\underline{AB}\left(\frac{j}{2^m}\right)+a_1b_1$$

La més gran d'aquestes desviacions, per a diferents valors de α de l'interval en estudi,

$$D^j_{esq} = \text{màx}\left\{ F(\alpha) \;/\; \frac{j}{2^m} \leq \alpha \leq \frac{j+1}{2^m} \right\}$$

l'obtindrem fent $F'(\alpha)=0$,

$$F'(\alpha) = (a_2-a_1)(b_2-b_1)\left[2\alpha - \left(\frac{1+2j}{2^m}\right)\right] = 0 \;\Leftrightarrow\; 2\alpha - \left(\frac{1+2j}{2^m}\right) \;\Leftrightarrow\; \alpha = \frac{1+2j}{2^{m+1}}$$

Substituint per aquest valor, i operant, la desviació esquerra serà

$$\boxed{D^j_{esq} = \frac{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}{2^{2m+2}}} \qquad [3.75]$$

De la mateixa manera es podria trobar la desviació dreta,

$$\boxed{D^j_{dta} = \frac{(a_3-a_2)(b_3-b_2)}{2^{2m+2}}} \qquad [3.76]$$

Recordant ara la fórmula [3.72], una cota K_{j+1} de l'error podrà venir expressada per

$$K_{j+1} = \text{màx}\left\{ \frac{D^j_{esq}}{\underline{AB}\left(\frac{j+1}{2^m}\right) - \underline{AB}\left(\frac{j}{2^m}\right)}, \frac{D^j_{dta}}{\overline{AB}\left(\frac{j+1}{2^m}\right) - \overline{AB}\left(\frac{j}{2^m}\right)} \right\}$$

I com que,

$$\frac{D_{esq}}{\underline{AB}(\frac{j+1}{2^m}) - \underline{AB}(\frac{j}{2^m})} = \frac{1}{2^{m+2}} \frac{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}{a_2b_2-a_1b_1+2j(a_2-a_1)(b_2-b_1)}$$

$$\frac{D_{dta}}{\overline{AB}(\frac{j+1}{2^m}) - \overline{AB}(\frac{j}{2^m})} = \frac{1}{2^{m+2}} \frac{(a_3-a_2)(b_3-b_2)}{a_3b_3-a_2b_2+2j(a_3-a_2)(b_3-b_2)}$$

Resultarà que

$$K_{j+1} = \frac{1}{2^{m+2}}\,\text{màx}\left\{ \frac{(a_2-a_1)(b_2-b_1)}{a_2b_2-a_1b_1+2j(a_2-a_1)(b_2-b_1)}, \frac{(a_3-a_2)(b_3-b_2)}{a_3b_3-a_2b_2+2j(a_3-a_2)(b_3-b_2)} \right\}$$

Si designem per K'_{j+1} el màxim anterior, i variem l'índex j des de 0 a 2m-1, la cota K serà

$$\boxed{K=\frac{1}{2^{m+2}}\,\text{màx}\left\{K'_{j+1} \,/\, j=0,\,1,\,\ldots,\,2^m-1\right\}} \qquad [3.77]$$

A partir d'aquesta cota podem calcular el valor d'm imposant la condició $K\leq p_e$.

Així doncs, si denotem per

$$K'=\text{màx}\left\{K'_{j+1} \,/\, j=0,\,1,\,\ldots,\,2^m-1\right\}$$

aleshores, $K'/(2^{m+2})\leq p_e$.

Aïllant, m

$$\boxed{m\geq \text{Log}_2(K'/p_e)-2} \qquad [3.78]$$

Com EXEMPLE, donats els números borrosos triangulars $\tilde{A}=(2,3,5)$ i $\tilde{B}=(1,4,6)$, anem a calcular el número borrós poligonal $\tilde{P}$ que aproxima el producte $\tilde{A}\tilde{B}$ amb un error d'aproximació $p_e\leq 0{,}025$. Obtenim successivament les cotes

$$K_{j+1}=\frac{1}{2^{m+2}}\,\text{màx}\left\{\frac{3}{10+6j},\ \frac{4}{18+8j}\right\}$$

$$K=\frac{1}{2^{m+2}}\,\text{màx}\left\{\frac{3}{10+6j} \,/\, j=0,\,1,\,\ldots,\,2^m-1\right\}=\frac{1}{2^{m+2}}\,\frac{3}{10}$$

$$\frac{1}{2^{m+2}}\,\frac{3}{10}\leq 0{,}025 \quad\Leftrightarrow\quad m\geq \text{Log}_2(12)-2 \quad\Leftrightarrow\quad m\geq 1{,}58$$

és a dir cal prendre m=2 i, per tant n=4, obtenim així la següent partició de l'interval [0 ,1]

$$\left\{0,\,\frac{1}{4},\,\frac{2}{4},\,\frac{3}{4},\,1\right\}$$

Aleshores els α-talls del número borrós poligonal $\tilde{P}$ són

$$P_\alpha=\left[2+\frac{31}{4}\alpha+\left(\frac{3}{2}\alpha-\frac{3}{16}\right)j-\frac{3}{16}j^2\ ,\ 30-21\alpha+\left(2\alpha-\frac{1}{4}\right)j-\frac{1}{4}j^2\right]$$

on $\alpha\in\left[\frac{j}{4},\frac{j+1}{4}\right]$ amb $j=0,1,2,3$

és a dir

Per $j=0$ $\quad P_\alpha=\left[2+\frac{31}{4}\alpha\ ,\ 30-21\alpha\right]$ amb $\alpha\in\left[0\ ,\frac{1}{4}\right]$

Per $j=1$ $\quad P_\alpha=\left[\frac{13}{8}+\frac{37}{4}\alpha\ ,\frac{59}{2}-19\alpha\right]$ amb $\alpha\in\left[\frac{1}{4},\frac{2}{4}\right]$

Per $j=2$ $\quad P_\alpha=\left[\frac{7}{8}+\frac{43}{4}\alpha\ ,\frac{57}{2}-17\alpha\right]$ amb $\alpha\in\left[\frac{2}{4},\frac{3}{4}\right]$

Per $j=3$ $\quad P_\alpha=\left[-\frac{1}{4}+\frac{49}{4}\alpha\ ,\ 27-15\alpha\right]$ amb $\alpha\in\left[\frac{3}{4}\ ,1\right]$

Així, per exemple donat α=0´6 correspon a l'interval per $j=2$, i el seu valor és $P_{0'6}$=[7´325, 18´3].

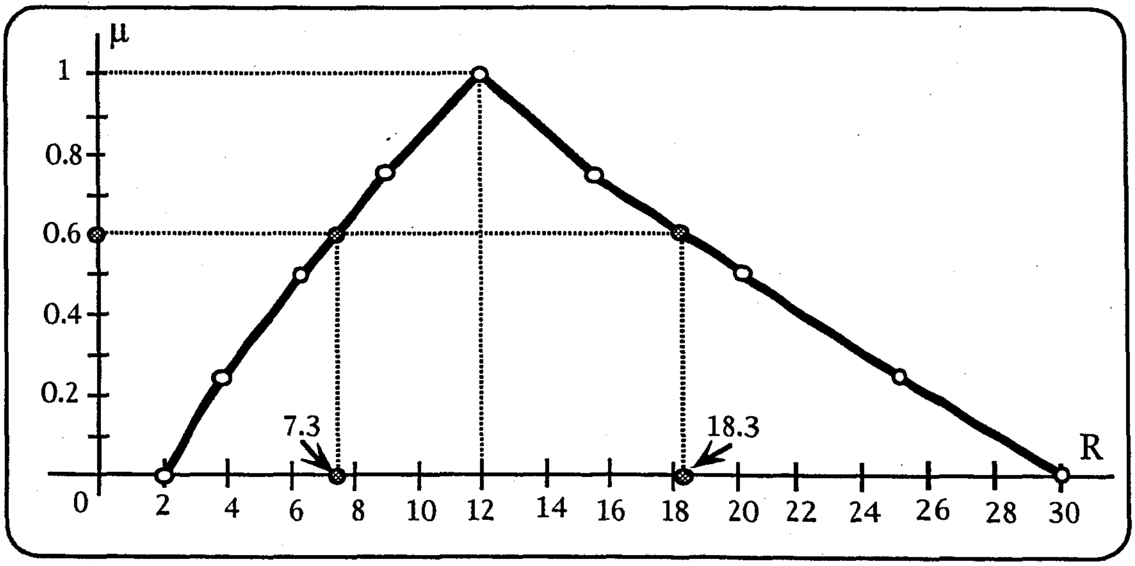


Fig.3.21 Aproximació poligonal del producte

II. NOVES APORTACIONS A LA MATEMÀTICA BORROSA

CAPÍTOL 4

EQUACIONS BORROSES

Les equacions borroses constitueixen una eina decisiva en la teoria dels conjunts borrosos donat el seu gran potencial en les aplicacions que se'n deriven. Malauradament aquesta teoria no ha estat suficientment desenvolupada. D'altra banda, algunes de les publicacions en aquest camp donen lloc a controvèrsies.

En la teoria d'equacions ordinàries, on els coeficients i la incògnita són elements que pertanyen a un grup G, diem que dues equacions són equivalents si i només si tenen les mateixes solucions. Per exemple, si considerem l'equació a+x=b, aquesta és equivalent a x=b-a. Quan ens situem en l'àmbit de l'aritmètica borrosa aquestes dues equacions no són equivalents, perquè mentre que l'equació $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$ no sempre té sentit en aquest àmbit, la segona equació $\tilde{X}=\tilde{B}-\tilde{A}$ en té sempre.

Objectiu d'aquest capítol és donar un nou enfoc a les equacions $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$ i $\tilde{A}\cdot\tilde{X}=\tilde{B}$ per tal d'obtenir a partir de la solució en el sentit de Buckley i Qu una nova aproximació a la solució que involucri menys borrositat.

4.1 GENERALITATS

4.1.1 EQUACIÓ BORROSA

Una equació borrosa és una equació del tipus

$$\boxed{f(\tilde{A}, \tilde{X})=\tilde{B}} \qquad [4.1]$$

on $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ són dos números borrosos coneguts d'un referencial $E \subseteq R$ i $\tilde{X}$ és un altre número borrós d'E a determinar.

Com és habitual en les equacions, $\tilde{X}$ s'anomena *incògnita* o *variable borrosa.*

4.1.2 SOLUCIÓ D'UNA EQUACIÓ BORROSA

Donada una equació borrosa $f(\tilde{A}, \tilde{X})=\tilde{B}$, una *solució* d'ella (cas d'existir) és un número borrós $\tilde{X}=\tilde{C}$ que verifica l'equació, és a dir,

$$\boxed{f(\tilde{A}, \tilde{C})=\tilde{B}} \qquad [4.2]$$

Equivalentment, si anomenem S_α els α-talls del primer terme i B_α els del segon terme de l'equació anterior, caldrà trobar els α-talls del número borrós $\tilde{X}$ tals que $S_\alpha=B_\alpha$.

És evident que la resolució d'una equació borrosa en molts casos no té solució.

Així, per EXEMPLE, si considerem l'equació

$$2.\tilde{X}+7.\tilde{A}=\tilde{B}$$

on $\tilde{A}=(1,2,6)$ i $\tilde{B}=(-1,0,4)$ aleshores $2.X_\alpha+7.A_\alpha = B_\alpha$, essent

$$X_\alpha=[\underline{X}(\alpha), \overline{X}(\alpha)] \ , \ A_\alpha=[1+\alpha, 6-4\alpha] \ , \ B_\alpha=[-1+\alpha, 4-4\alpha].$$

Llavors es verifica

$$2[\underline{X}(\alpha), \overline{X}(\alpha)] +7[1+\alpha, 6-4\alpha] = [-1+\alpha, 4-4\alpha]$$

$$[2\underline{X}(\alpha)+7+7\alpha, 2\overline{X}(\alpha)+42-28\alpha] = [-1+\alpha, 4-4\alpha]$$

Per tant, els extrems inferior i superior són:

$$2\underline{X}(\alpha)+7+7\alpha=-1+\alpha \Rightarrow \underline{X}(\alpha)=-4-3\alpha$$

$$2\overline{X}(\alpha)+42-28\alpha=4-4\alpha \Rightarrow \overline{X}(\alpha)=-19+12\alpha$$

Es dedueix, doncs, que $\tilde{X}$ no és un número borrós.

El professor Sanchez[1] demostra, utilitzant equacions lineals i quadràtiques, que les condicions per tal que existeixi solució són molt restrictives.

Per a subsanar aquesta dificultat, Buckley i Qu proposen un nou enfoc de l'equació borrosa $f(\tilde{A}, \tilde{X})=\tilde{B}$.

4.2 MÈTODE DE RESOLUCIÓ DE BUCKLEY I QU

Donada una equació borrosa $f(\tilde{A}, \tilde{X})=\tilde{B}$, Buckley i Qu[2] proposen considerar-la com una família d'equacions certes del tipus:

$$\boxed{f(a,x)=b \quad \text{on } a\in S(\tilde{A}) \text{ i } b\in S(\tilde{B})} \qquad [4.3]$$

associades a $f(\tilde{A}, \tilde{X})=\tilde{B}$, on els valors a i b representen tots els possibles valors de quantificació incerta donats, respectivament, pels números borrosos

$$\tilde{A}=\{(a, \mu_{\tilde{A}}(a)) \ / \ a\in E\} \quad \text{i} \quad \tilde{B}=\{(b, \mu_{\tilde{B}}(b)) \ / \ b\in E\}$$

Suposem que de l'equació [4.3] és possible aïllar algèbricament x en funció d'a i b, és a dir x=F(a, b), que genera la nova equació borrosa

$$\boxed{\tilde{X}=F(\tilde{A}, \tilde{B})} \qquad [4.4]$$

[1] SANCHEZ, E. *Solutions of fuzzy equations with extended operations* a "Fuzzy Sets and Systems", 12. 237-248. 1984.

[2] BUCKLEY, J.J.; QU, Y. *Solving fuzzy equations: a new solution concept* a "Fuzzy Sets and Systems", 39, 291-301. 1991.

Aleshores, pel principi d'extensió, podem assegurar que $\tilde{X}$ és un conjunt borrós amb funció de pertinença:

$$\boxed{\mu_{\tilde{X}}(x)=\sup\{\mu_{\tilde{A}}(a)\wedge \mu_{\tilde{B}}(b)\ /\ x=F(a,b)\}} \qquad [4.5]$$

PROPOSICIÓ 4.1. «En cas que la funció F sigui contínua, es dedueix que $\tilde{X}$ és un número borrós.»

Demostració:

Provarem que $\tilde{X}$ és un conjunt normal i convex.

1) NORMALITAT. Donat que $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ són normals, existeixen a' i b' tals que $\mu_{\tilde{A}}(a')=1$ i $\mu_{\tilde{B}}(b')=1$.

Sigui $x'=f(a',b')$, aleshores

$$\mu_{\tilde{X}}(x')= \sup\{\mu_{\tilde{A}}(a')\wedge\mu_{\tilde{B}}(b')\ /\ x'=F(a',b')\}= \sup\{1\wedge 1\}= 1$$

conseqüentment, $\tilde{X}$ és un conjunt borrós normal.

2) CONVEXITAT. Per la continuïtat de la funció F i per la compatibilitat del principi d'extensió amb els α-talls, sabem que els α-talls de la solució $\tilde{X}$ vénen donats per

$$X_\alpha=\{x\ /\ x=F(a,b)\ ,\ \text{on } a\in A_\alpha \text{ i } b\in B_\alpha\}$$

Atès que $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ són dos números borrosos del referencial $E\subseteq R$, el domini de definició de F és el compacte de R^2, $A_\alpha\times B_\alpha$. Per tant, segons el teorema de Weierstrass, existeix el mínim i el màxim de la funció F:

$$\underline{X}(\alpha)=\text{mín}\{x\ /\ x=F(a,b)\ ,\ \text{on } a\in A_\alpha \text{ i } b\in B_\alpha\}$$

$$\overline{X}(\alpha)=\text{màx}\{x\ /\ x=F(a,b)\ ,\ \text{on } a\in A_\alpha \text{ i } b\in B_\alpha\}$$

Aleshores, els α-talls de $\tilde{X}$ són els intervals tancats

$$X_\alpha=[\underline{X}(\alpha), \overline{X}(\alpha)]$$

I, per tant, els intervals són convexos. Conseqüentment, $\tilde{X}$ és un conjunt borrós convex.

Dels punts 1) i 2) deduïm que $\tilde{X}$ és un número borrós. ♦

El número borrós $\tilde{X}$ s'anomena solució de l'equació $f(\tilde{A}, \tilde{X})=\tilde{B}$ en el sentit de Buckley i Qu[3] i observem que sempre existeix.

PROPOSICIÓ 4.2. «En cas que l'equació $f(\tilde{A}, \tilde{X})=\tilde{B}$ tingui solució, aquesta està continguda en la solució en el sentit de Buckley i Qu.»

Demostració:

En efecte, si $x \in X_\alpha$ llavors existeixen $a \in A_\alpha$ i $b \in B_\alpha$ tals que $f(a,x)=b$. En conseqüència, $x=F(a,b)$ i, per tant, $x \in X_\alpha$ (en el sentit de B-Q). ♦

Donada la situació anterior, la solució en el sentit de Buckley i Qu es pot prendre com una aproximació de la solució de l'equació borrosa, en cas que aquesta no existeixi o que sigui molt complicada de calcular.

Exemple 4.1

Donada l'equació borrosa

$$\tilde{X}+7.\tilde{A} = \tilde{B}$$

on $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ són els dos números borrosos triangulars

$$\tilde{A}=(1, 2, 6) \quad \text{i} \quad \tilde{B}=(-1, 0, 4),$$

aleshores, la solució en el sentit de Buckley i Qu és el número borrós expressat per

$$\tilde{X} = \tilde{B}-7.\tilde{A}$$

Atès que els α-talls són

$$X_\alpha=[\underline{X}(\alpha), \overline{X}(\alpha)] \ , \ A_\alpha=[1+\alpha, 6-4\alpha] \ \text{ i } \ B_\alpha=[-1+\alpha, 4-4\alpha]$$

---

[3] BUCKLEY, J.J. *On using α-cuts to evaluate fuzzy equations* a "Fuzzy Sets and Systems", 38, 309-312. 1990.

i que la funció F(a,b)=b-7a és decreixent respecte a "a" i creixent respecte a "b", el mínim s'assoleix en el punt ($6-4\alpha$, $-1+\alpha$) i el màxim en el punt ($1+\alpha$, $4-4\alpha$).

Aleshores, els extrems inferior i superior són

$$\underline{X}(\alpha)=F(6-4\alpha,\ -1+\alpha)=29\alpha-43$$

$$\overline{X}(\alpha)=F(1+\alpha,\ 4-4\alpha)=-11\alpha-3$$

Per tant,

$$\tilde{X}=(-43,\ -14,\ -3)$$

Observem que en aquest cas, per calcular $\tilde{X}$, també podríem haver utilitzat l'aritmètica dels intervals de confiança.

Exemple 4.2

Donada l'equació borrosa

$$\tilde{A}.\tilde{X}=\tilde{A}+\tilde{B}$$

on $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ són els números borrosos triangulars

$$\tilde{A}=(3,\ 7,\ 9) \quad \text{i} \quad \tilde{B}=(4,\ 5,\ 7)$$

la solució en el sentit de Buckley i Qu és el número borrós

$$\tilde{X}=\frac{\tilde{A}+\tilde{B}}{\tilde{A}}$$

Atès que els α-talls són

$$X_\alpha=[\underline{X}(\alpha),\overline{X}(\alpha)]\ ,\ A_\alpha=[3+4\alpha,\ 9-2\alpha] \ \text{ i } \ B_\alpha=[4+\alpha,\ 7-2\alpha]$$

i que la funció F(a,b)=(a+b)/a és decreixent respecte a "a" i creixent respecte a "b", el mínim i el màxim s'assoleixen respectivament en els punts

$$P(9-2\alpha,\ 4+\alpha) \quad \text{i} \quad Q(3+4\alpha\ ,\ 7-2\alpha).$$

Aleshores, els extrems inferior i superior dels α-talls, emprant la funció anterior F(a,b)=(a+b)/a, són

$$\underline{X}(\alpha)=F(9-2\alpha,\ 4+\alpha)=\ (13-\alpha)/(9-2\alpha)$$

$$\overline{X}(\alpha)=F(3+4\alpha,\ 7-2\alpha)=\ (10+2\alpha)/(3+4\alpha)$$

Deduïm, doncs, que $\tilde{X}$ és un número borrós que té per funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{X}}(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<\frac{13}{9} \\ \frac{9x-13}{2x-1} & \text{si } \frac{13}{9}\le x<\frac{12}{7} \\ \frac{10-3x}{2+4x} & \text{si } \frac{12}{7}\le x\le\frac{10}{3} \\ 0 & \text{si } x>\frac{10}{3} \end{cases}$$

Anem a veure a continuació que en aquest cas, i utilitzant l'aritmètica dels intervals de confiança, obtenim un altre número borrós $\tilde{Y}$ que conté el número borrós $\tilde{X}$ anterior.

Aplicant l'aritmètica dels α-talls, tenim

$$\left[\underline{Y}(\alpha),\overline{Y}(\alpha)\right]=\frac{\left[\underline{A}(\alpha),\overline{A}(\alpha)\right]+\left[\underline{B}(\alpha),\overline{B}(\alpha)\right]}{\left[\underline{A}(\alpha),\overline{A}(\alpha)\right]}=\frac{\left[\underline{A}(\alpha)+\underline{B}(\alpha),\ \overline{A}(\alpha)+\overline{B}(\alpha)\right]}{\left[\underline{A}(\alpha),\overline{A}(\alpha)\right]}=$$

$$=\left[\frac{\underline{A}(\alpha)+\underline{B}(\alpha)}{\overline{A}(\alpha)},\frac{\overline{A}(\alpha)+\overline{B}(\alpha}{\underline{A}(\alpha)}\right]=\left[\frac{7+5\alpha}{9-2\alpha},\frac{16-4\alpha}{3+4\alpha}\right]$$

En conseqüència, $\tilde{Y}$ és el número borrós amb funció de pertinença expressada per

$$\mu_{\tilde{Y}}(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<\frac{7}{9} \\ \frac{9x-7}{2x+5} & \text{si } \frac{7}{9}\le x<\frac{12}{7} \\ \frac{16-3x}{4+4x} & \text{si } \frac{12}{7}\le x\le\frac{16}{3} \\ 0 & \text{si } x>\frac{16}{3} \end{cases}$$

Finalment, representant gràficament les funcions de pertinença de $\tilde{X}$ i $\tilde{Y}$, observem que $\tilde{X} \subset \tilde{Y}$.

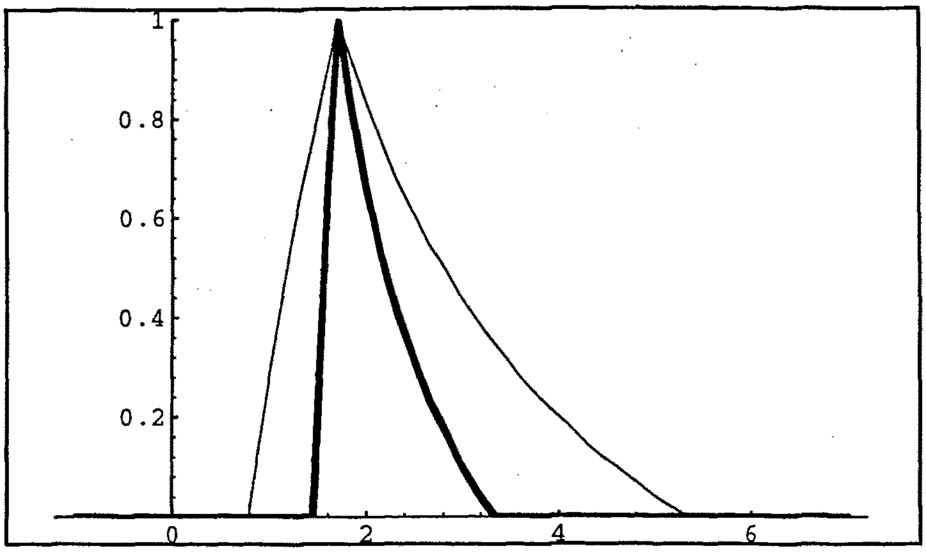


Fig.4.1 Números borrosos $\tilde{X}$ i $\tilde{Y}$

on el traç gruixut correspon a $\tilde{X}$ i el prim a $\tilde{Y}$.

4.3 RESOLUCIÓ DE L'EQUACIÓ BORROSA $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$

4.3.1 EXISTÈNCIA DE LA SOLUCIÓ

TEOREMA 4.1. «Siguin $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ dos números borrosos d'un referencial $E \subseteq R$ amb α-talls $A_\alpha=[\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)]$ i $B_\alpha=[\underline{B}(\alpha), \overline{B}(\alpha)]$, respectivament. Llavors, el número borrós $\tilde{X}$, amb α-talls $X_\alpha=[\underline{B}(\alpha)-\underline{A}(\alpha), \overline{B}(\alpha)-\overline{A}(\alpha)]$ és *solució de l'equació* si i només si es verifiquen les condicions següents:

1) $\forall \alpha \in [0,1]$ resulta $\boxed{\underline{B}(\alpha)-\underline{A}(\alpha) \leq \overline{B}(\alpha)-\overline{A}(\alpha)}$ [4.6]

2) $\forall \alpha, \beta \in [0,1]$ tal que $\alpha \leq \beta$ es compleixen

$$\boxed{\underline{B}(\alpha)-\underline{A}(\alpha) \leq \underline{B}(\beta)-\underline{A}(\beta)} \qquad [4.7]$$

$$\boxed{\overline{B}(\beta)-\overline{A}(\beta) \leq \overline{B}(\alpha)-\overline{A}(\alpha)} \text{ .»} \qquad [4.8]$$

Demostració:

Si $\tilde{X}$ és una solució de l'equació, és evident que es compleixen les condicions 1) i 2).

D'altra banda, suposem que es compleixen 1) i 2). Llavors és trivial que $A_\alpha+X_\alpha=B_\alpha$ i, per tant, $\tilde{X}$ és solució de l'equació. Per la hipòtesi 1) $\forall\alpha\in[0,1]$, X_α és un interval tancat. A més, la hipòtesi 2) ens assegura que $\tilde{X}$ és convex. Finalment, com que $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ són normals tenim que $X_1=[\underline{B}(1)-\underline{A}(1), \overline{B}(1)-\overline{A}(1)]\neq\emptyset$ i així $\tilde{X}$ és normal. ♦

Com a CAS PARTICULAR, analitzem l'existència de la solució borrosa en el cas de dos números borrosos triangulars, amb el següent corol·lari:

COROL·LARI 4.1. «Donada l'equació $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$ on $\tilde{A}=(a_1,a_2,a_3)$ i $\tilde{B}=(b_1,b_2,b_3)$ són dos NBT tals que $b_1-a_1 < b_2-a_2 < b_3-a_3$, llavors existeix $\tilde{X}$ solució de l'equació i el seu valor és el número borrós triangular $\tilde{X}=(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$ »

Demostració:

Comprovem que es verifiquen les hipòtesis 1) i 2) del teorema anterior.

1) $\forall\alpha\in[0,1]$ tenim

$$\underline{B}(\alpha)-\underline{A}(\alpha)= b_1+\alpha(b_2-b_1)-a_1-\alpha(a_2-a_1)=$$
$$= b_1-a_1+\alpha(b_2-b_1)-\alpha(a_2-a_1)= (1-\alpha)(b_1-a_1)+\alpha(b_2-a_2)\leq$$
$$\leq (1-\alpha)(b_3-a_3)+\alpha(b_2-a_2)=b_3-a_3-\alpha(b_3-a_3)+\alpha(b_2-a_2)=$$
$$= b_3-\alpha(b_3-b_2)-a_3+\alpha(a_3-a_2)= \overline{B}(\alpha)-\overline{A}(\alpha).$$

2) $\forall\alpha,\beta\in[0,1]$ tal que $\alpha\leq\beta$, resulten

$$\underline{B}(\alpha)-\underline{A}(\alpha)= b_1+\alpha(b_2-b_1)-a_1-\alpha(a_2-a_1)=$$
$$= b_1-a_1+\alpha(b_2-b_1)-\alpha(a_2-a_1)= (b_1-a_1)+\alpha(b_2-b_1-a_2+a_1)\leq$$
$$\leq (b_1-a_1)+\beta(b_2-b_1-a_2+a_1)= b_1-a_1+\beta(b_2-b_1)-\beta(a_2-a_1)=$$
$$= b_1+\beta(b_2-b_1)-a_1-\beta(a_2-a_1)= \underline{B}(\beta)-\underline{A}(\beta).$$

$$\overline{B}(\beta)-\overline{A}(\beta)= b_3-\beta(b_3-b_2)-a_3+\beta(a_3-a_2)=$$
$$= b_3-a_3-\beta(b_3-b_2)+\beta(a_3-a_2)= b_3-a_3-\beta(b_3-b_2+a_2-a_3)\leq$$
$$\leq b_3-a_3-\alpha(b_3-b_2+a_2-a_3)= b_3-a_3-\alpha(b_3-b_2)+\alpha(a_3-a_2)=$$
$$= b_3-\alpha(b_3-b_2)-a_3+\alpha(a_3-a_2)= \overline{B}(\alpha)-\overline{A}(\alpha).$$

Per tant, $\tilde{X}$ és un número borrós solució de l'equació, amb α-talls

$$X_\alpha= [\underline{B}(\alpha)-\underline{A}(\alpha), \overline{B}(\alpha)-\overline{A}(\alpha)]=$$
$$= [b_1+\alpha(b_2-b_1)-a_1-\alpha(a_2-a_1), b_3-\alpha(b_3-b_2)-a_3+\alpha(a_3-a_2)]=$$
$$= [b_1-a_1+\alpha(b_2-b_1-a_2+a_1), b_3-a_3-\alpha(b_3-b_2-a_3+a_2)]$$

Per tant, $\tilde{X}$ és el NBT $\tilde{X}=(b_1-a_1, b_2-a_2, b_3-a_3)$. ◆

Exemple 4.3

L'equació $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$ on $\tilde{A}=(1, 3, 7)$ i $\tilde{B}=(2, 5, 11)$, verifica les hipòtesis del corol·lari anterior, doncs $b_1-a_1=1$, $b_2-a_2=2$ i $b_3-a_3=4$. Així, la solució de l'equació és el NBT

$$\tilde{X}=(1, 2, 4)$$

La solució en el sentit de Buckley i Qu és el número borrós

$$\tilde{X}_1= \tilde{B}-\tilde{A}= (2, 5, 11) - (1, 3, 7)= (-5, 2, 10)$$

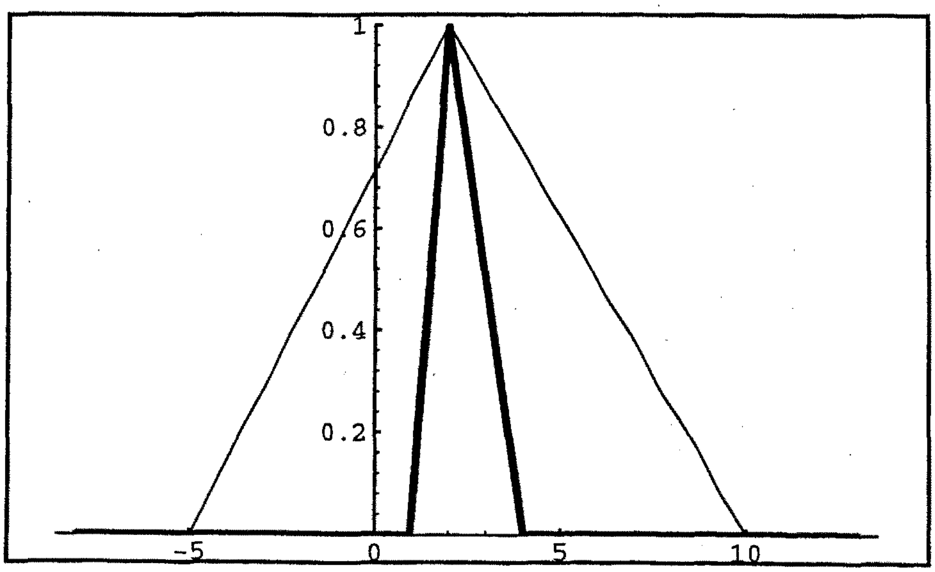


Fig.4.2 Gràfica de l'exemple 4.3

En la pàgina anterior hem representat en el mateix gràfic les dues solucions, on el traç gruixut correspon a $\tilde{X}$ i el prim a $\tilde{X}_1$.

Observem que:

a) La solució en el sentit de Buckley i Qu conté la solució de l'equació.

b) En prendre la solució en el sentit de Buckley i Qu com una aproximació de la solució de l'equació, hi ha un increment considerable de la borrositat.

4.3.2 MÈTODE APROXIMATIU A LA SOLUCIÓ DE L'EQUACIÓ BORRROSA $\tilde{A} + \tilde{X} = \tilde{B}$ AMB N. BORROSOS TRIANGULARS

Com a resultat de les observacions anteriors, en aquest apartat proposem un mètode per donar una aproximació a la solució de l'equació $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$ amb $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ números borrosos triangulars, a partir de la solució en el sentit de Buckley i Qu.

La idea central del mètode que exposarem tot seguit es basa en el fet que la solució en el sentit de Buckley i Qu conté la solució. A partir d'aquest fet interpretem l'equació com un contingut, en lloc d'una igualtat. És a dir, ens proposem calcular el número borrós $\tilde{X}$ de manera que $\tilde{A}+\tilde{X}$ sigui el número borrós més petit complint $\tilde{B}\subseteq\tilde{A}+\tilde{X}$.

Donada l'equació borrosa $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$, on $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ són dos NBT amb α-talls

$$A_\alpha=[\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)] \quad \text{i} \quad B_\alpha=[\underline{B}(\alpha), \overline{B}(\alpha)]$$

i on els seus nuclis respectius són

$$\text{Nuc}\tilde{A}=\{x_a\} \quad \text{i} \quad \text{Nuc}\tilde{B}=\{x_b\}$$

prenem tots els números borrosos $\tilde{X}$ amb nucli $\{x_0\}=\{x_b-x_a\}$ complint la desigualtat

$$\boxed{\tilde{B} \subseteq \tilde{A}+\tilde{X}} \qquad [4.9]$$

Observem que existeix almenys un $\tilde{X}$ d'aquests, atès que la solució segons Buckley i Qu ($\tilde{X}=\tilde{B}-\tilde{A}$) per la Proposició 4.2 conté $\tilde{B}$.

CONSTRUCCIÓ DE LA SOLUCIÓ APROXIMADA DE $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$

Donada l'equació $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$ on $\tilde{A}=(a_1, a_2, a_3)$ i $\tilde{B}=(b_1, b_2, b_3)$ són dos NBT, considerem el número borrós $\tilde{X}_0$ amb nucli b_2-a_2 tal que $\tilde{B}\subseteq\tilde{A}+\tilde{X}_0$ i α-talls $X_{0\alpha}=[\underline{X}_0(\alpha), \overline{X}_0(\alpha)]$ definits per:

$$\underline{X}_0(\alpha)= \text{mín} \{ \underline{B}(\alpha)-\underline{A}(\alpha),\ b_2-a_2 \}=$$

$$= \text{mín} \{ b_1+\alpha(b_2-b_1)-a_1-\alpha(a_2-a_1)\ ,\ b_2-a_2 \}=$$

$$= \text{mín} \{ (1-\alpha)(b_1 - a_1) +\alpha(b_2-a_2))\ ,\ b_2-a_2 \}$$

i

$$\overline{X}_0(\alpha)= \text{màx} \{ \overline{B}(\alpha)-\overline{A}(\alpha),\ b_2-a_2 \}=$$

$$= \text{màx} \{ b_3-\alpha(b_3-b_2)-a_3+\alpha(a_3-a_2)\ ,\ b_2-a_2 \}=$$

$$= \text{màx} \{(1-\alpha)\ (b_3 -a_3) + \alpha(b_2-a_2)\ ,\ b_2-a_2 \}$$

Per tal de calcular $\underline{X}_0(\alpha)$ i $\overline{X}_0(\alpha)$ definits anteriorment, considerem els QUATRE CASOS següents :

a) $\boxed{b_1-a_1 < b_2-a_2 < b_3-a_3}$

En aquest cas tenim les dues desigualtats

$$(1-\alpha)(b_1-a_1) + \alpha(b_2-a_2) \leq (1-\alpha)(b_2-a_2) + \alpha(b_2-a_2)= b_2-a_2$$

$$(1-\alpha)(b_3-a_3) + \alpha(b_2-a_2) \geq (1-\alpha)(b_2-a_2) + \alpha(b_2-a_2)= b_2-a_2$$

Per tant, els extrems inferior i superior són

$$\underline{X}_0(\alpha)=(1-\alpha)(b_1-a_1) + \alpha(b_2-a_2)$$

$$\overline{X}_0(\alpha)= (1-\alpha)(b_3-a_3) + \alpha(b_2-a_2)$$

Així doncs, $\tilde{X}_0$ és el número borrós que té per funció de pertinença,

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b_1 - a_1 \\ \dfrac{x-(b_1-a_1)}{(b_2-a_2)-(b_1-a_1)} & \text{si } b_1-a_1 \le x < b_2-a_2 \\ \dfrac{(b_3-a_3)-x}{(b_3-a_3)-(b_2-a_2)} & \text{si } b_2-a_2 \le x \le b_3-a_3 \\ 0 & \text{si } x > b_3-a_3 \end{cases}$$

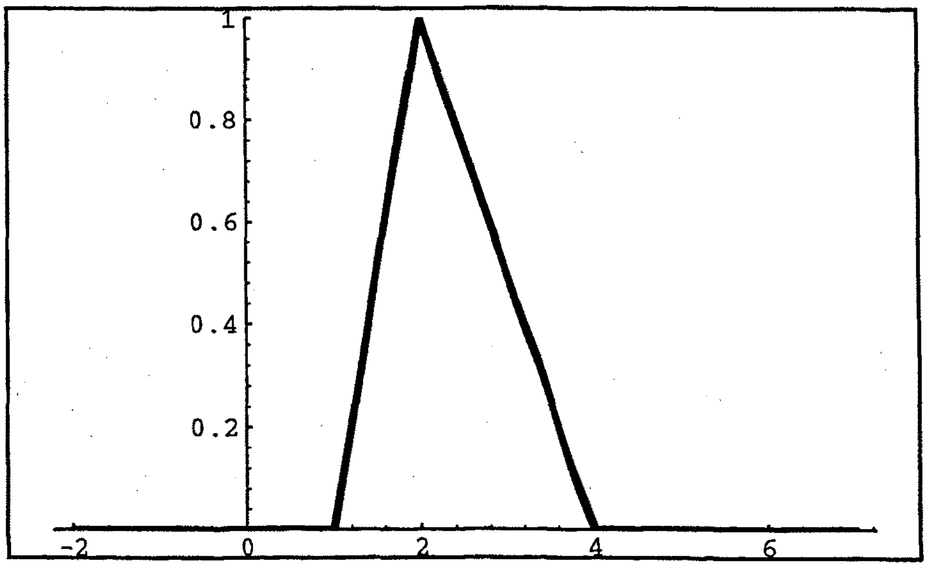
Exemple 4.4

Si prenem $\tilde{A}=(1,3,7)$ i $\tilde{B}=(2,5,11)$, tenim $b_1-a_1=1$, $b_2-a_2=2$, $b_3-a_3 = 4$. Així doncs, $1 < 2 < 4$ i, per tant, l'aproximació a la solució és el número borrós $\tilde{X}_0$ amb α-talls:

$$\underline{X}_0(\alpha) = 1+\alpha \quad \text{i} \quad \overline{X}_0(\alpha) = 4-2\alpha$$

Per tant, $\tilde{X}_0 = (1, 2, 4)$

La seva gràfica és



Observem que en aquest cas, atès que es compleixen les hipòtesis del Corol·lari 4.1, l'equació té solució i l'aproximació a la solució coincideix amb la solució prèviament calculada a l'Exemple 4.3.

b) $\boxed{b_1 - a_1 < b_2 - a_2}$ i $\boxed{b_3 - a_3 < b_2 - a_2}$

Obtenim en aquest cas

$$(1-\alpha)(b_1-a_1) + \alpha(b_2-a_2) \leq (1-\alpha)(b_2-a_2) + \alpha(b_2-a_2) = b_2-a_2$$

$$(1-\alpha)(b_3-a_3) + \alpha(b_2-a_2) \leq (1-\alpha)(b_2-a_2) + \alpha(b_2-a_2) = b_2-a_2$$

Per tant, els dos extrems són

$$\underline{X}_0(\alpha) = (1-\alpha)(b_1-a_1) + \alpha(b_2-a_2) \quad \text{i} \quad \overline{X}_0(\alpha) = b_2-a_2$$

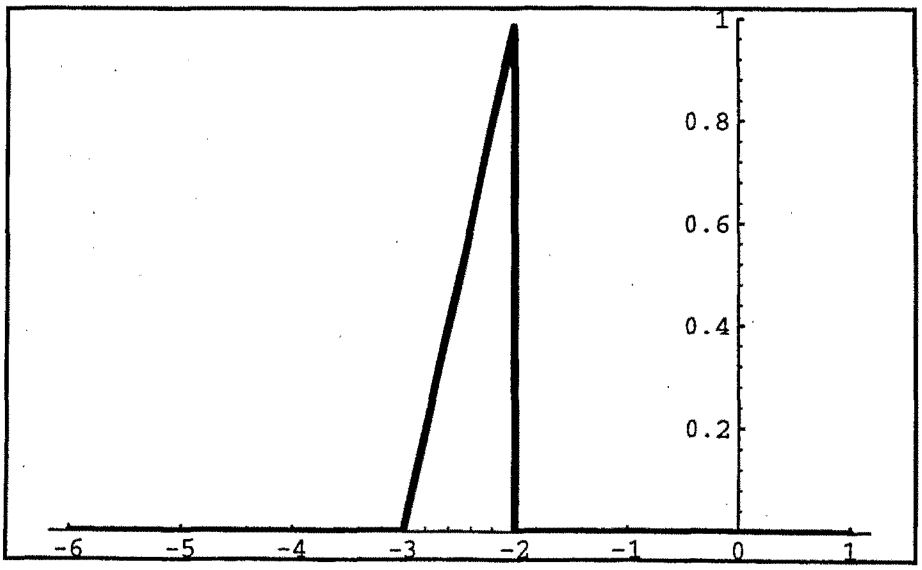
on $\tilde{X}_0$ és el número borrós amb funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b_1-a_1 \\ \dfrac{x-(b_1-a_1)}{(b_2-a_2)-(b_1-a_1)} & \text{si } b_1-a_1 \leq x \leq b_2-a_2 \\ 0 & \text{si } x > b_2-a_2 \end{cases}$$

Exemple 4.5

Prenent $\tilde{A}=(2, 3, 10)$ i $\tilde{B}=(-1, 1, 4)$, tenim les diferències $b_1-a_1=-3$, $b_2-a_2=-2$ i $b_3-a_3=-6$. Així doncs, $-3<-2$ i $-6<-2$ i, per tant, l'aproximació a la solució és el número borrós $\tilde{X}_0$ amb α-talls;

$$\underline{X}_0(\alpha) = -3+\alpha \quad \text{i} \quad \overline{X}_0(\alpha) = -2$$



c) $\boxed{b_2 - a_2 < b_1 - a_1}$ i $\boxed{b_2 - a_2 < b_3 - a_3}$

Les dues desigualtats són, en aquest cas,

$$(1-\alpha)(b_1-a_1) + \alpha(b_2-a_2) \geq (1-\alpha)(b_2-a_2) + \alpha(b_2-a_2) = b_2-a_2$$

$$(1-\alpha)(b_3-a_3) + \alpha(b_2-a_2) \geq (1-\alpha)(b_2-a_2) + \alpha(b_2-a_2) = b_2-a_2$$

Per tant, els extrems inferior i superior són

$$\underline{X}_0(\alpha) = b_2-a_2 \quad \text{i} \quad \overline{X}_0(\alpha) = (1-\alpha)(b_3-a_3) + \alpha(b_2-a_2)$$

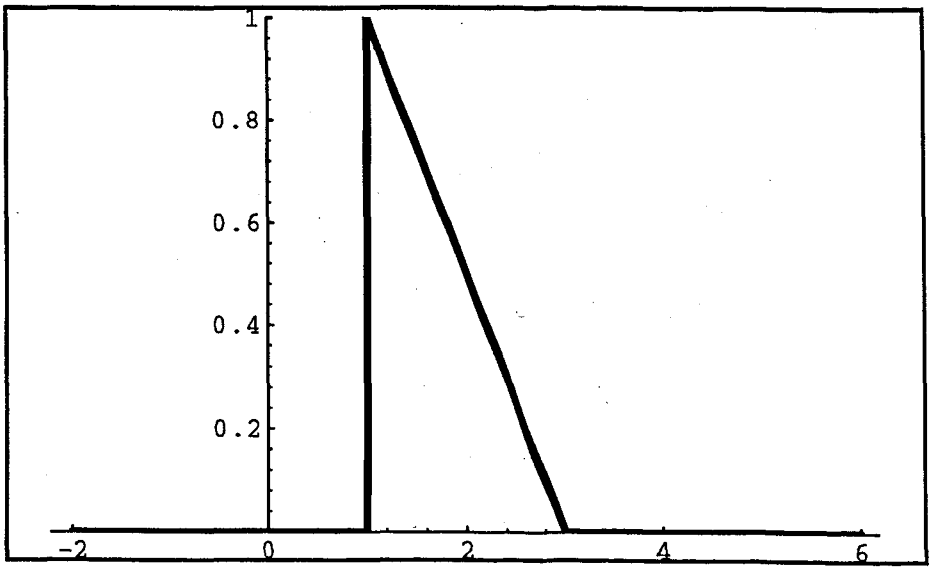
on $\tilde{X}_0$ és el número borrós amb funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < b_2-a_2 \\ \dfrac{(b_3-a_3)-x}{(b_3-a_3)-(b_2-a_2)} & \text{si } b_2-a_2 \leq x \leq b_3-a_3 \\ 0 & \text{si } x > b_3-a_3 \end{cases}$$

Exemple 4.6

Prenent $\tilde{A}=(-2, 1, 4)$ i $\tilde{B}=(0, 2, 7)$, tenim les diferències $b_1-a_1=2$, $b_2-a_2=1$ i $b_3-a_3=3$. Així doncs, $1<2$ i $1<3$ i, per tant, l'aproximació a la solució és el número borrós $\tilde{X}_0$ amb α-talls:

$$\underline{X}_0(\alpha) = 1 \quad \text{i} \quad \overline{X}_0(\alpha) = 3-2\alpha$$



d) $\boxed{b_3-a_3 < b_2-a_2 < b_1-a_1}$

En aquest últim cas, resulta

$$(1-\alpha)(b_1-a_1) + \alpha(b_2-a_2) \geq (1-\alpha)(b_2-a_2) + \alpha(b_2-a_2)= b_2-a_2$$

$$(1-\alpha)(b_3-a_3) + \alpha(b_2-a_2) \leq (1-\alpha)(b_2-a_2) + \alpha(b_2-a_2)= b_2-a_2$$

Per tant,

$$\underline{X}_0(\alpha)=\overline{X}_0(\alpha)= b_2-a_2$$

on $\widetilde{X}_0$ és el número borrós amb funció de pertinença

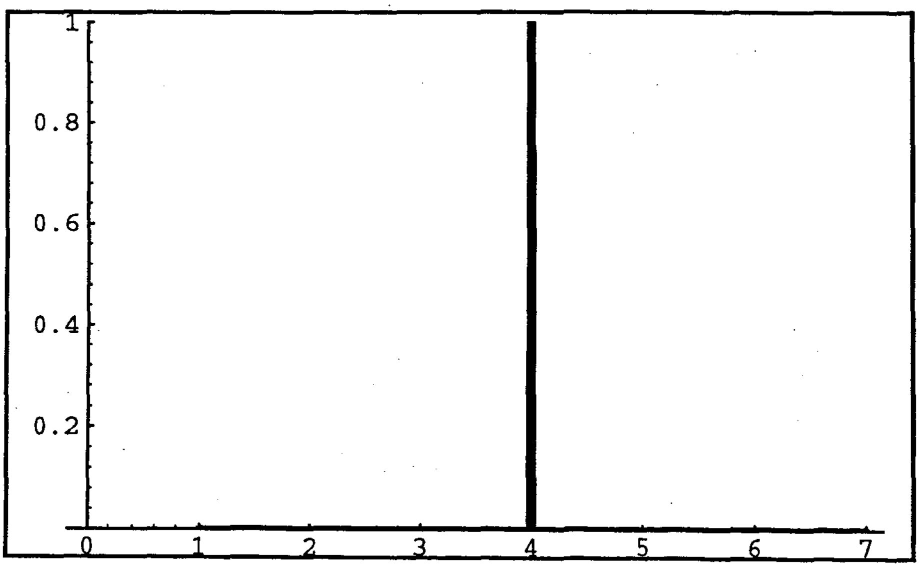
$$\mu_{\widetilde{X}_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq b_2-a_2 \\ 1 & \text{si } x = b_2-a_2 \end{cases}$$

Exemple 4.7

Prenent $\widetilde{A}=(-3, 1, 4)$ i $\widetilde{B}=(3, 5, 7)$, tenim les diferències $b_1-a_1=6$, $b_2-a_2=4$, $b_3-a_3=3$. Així doncs, $3<4<6$ i, per tant, l'aproximació a la solució és el número borrós $\widetilde{X}_0$ amb α-talls:

$$\underline{X}_0(\alpha) = 4 \quad \text{i} \quad \overline{X}_0(\alpha) =4$$

I tal com podem veure en aquest últim cas, la solució es tracta d'un número nítid.



En resum, hem obtingut en el cas de números borrosos triangulars la solució més aproximada possible. Notem que en el cas a) l'aproximació coincideix amb la solució, atès que aquesta existeix, a diferència dels apartats b) i c) on l'aproximació és un número borrós no triangular en funció de pertinença discontínua i en el cas d) obtenim un número nítid.

El número borrós $\tilde{X}_0$ construït en l'apartat anterior l'anomenem *solució aproximada* de l'equació $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$.

Per tal de facilitar els càlculs a efectes pràctics, ens interessa conservar l'estructura triangular de l'aproximació a la solució. Per això calcularem, a partir de l'aproximació a la solució obtinguda, una nova aproximació a la solució amb estructura triangular.

4.3.3 MÈTODE D'APROXIMACIÓ TRIANGULAR A LA SOLUCIÓ DE L'EQUACIÓ BORRROSA $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$ AMB NÚMEROS BORROSOS TRIANGULARS

L'objectiu que ens plantegem és calcular un número borrós triangular $\tilde{X}_1$ proper a l'aproximació $\tilde{X}_0$ calculada anteriorment.

Sigui l'equació $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$ on $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ són dos NBT i siguin $\tilde{X}_0$ l'aproximació a la solució i $\tilde{X}_1$ l'aproximació triangular a la solució. Definim l'*índex d'aproximació* de $\tilde{X}_0$ a $\tilde{X}_1$ com

$$\boxed{I_a(\tilde{X}_0,\tilde{X}_1) = \frac{\text{àrea}(\tilde{A}+\tilde{X}_0)}{\text{àrea}(\tilde{A}+\tilde{X}_1)}} \qquad [4.10]$$

Observem que, atès que

$$\tilde{X}_0 \subseteq \tilde{X}_1 \quad \Rightarrow \quad \tilde{A}+\tilde{X}_0 \subseteq \tilde{A}+\tilde{X}_1 \quad \Rightarrow \quad \text{àrea}(\tilde{A}+\tilde{X}_0) \leq \text{àrea}(\tilde{A}+\tilde{X}_1)$$

es verifica

$$\boxed{0 \leq I_a(\tilde{X}_0,\tilde{X}_1) \leq 1} \qquad [4.11]$$

Considerem que $\tilde{X}_0$ i $\tilde{X}_1$ *estan propers* quan l'índex d'aproximació és igual a 0,95. És a dir,

$$\boxed{\tilde{X}_0 \text{ i } \tilde{X}_1 \text{ propers} \quad \Leftrightarrow \quad I_a(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1)=0.95} \qquad [4.12]$$

CONSTRUCCIÓ ANALÍTICA DE L'APROXIMACIÓ TRIANGULAR $\tilde{X}_1$

La construcció de $\tilde{X}_1$ la realitzarem a partir de la funció de pertinença de $\tilde{X}_0$.

Considerem els QUATRE CASOS següents:

a) $\boxed{b_1-a_1 < b_2-a_2 < b_3-a_3}$

En aquest cas no tindrem cap dificultat perquè prenem $\tilde{X}_1=\tilde{X}_0$, atès que la solució de l'equació coincideix amb $\tilde{X}_0$.

b) $\boxed{b_1-a_1 < b_2-a_2}$ i $\boxed{b_3-a_3 < b_2-a_2}$

Construïm $\tilde{X}_1$ com el número borrós triangular (b_1-a_1, b_2-a_2, q), on el valor del paràmetre q es determinarà imposant la condició [4.12].

Exemple 4.8

En l'exemple 4.5 hem obtingut que l'aproximació a la solució és el número borrós $\tilde{X}_0$ amb α-talls

$$\underline{X}_0(\alpha) = -3+\alpha \quad \text{i} \quad \overline{X}_0(\alpha) = -2$$

L'aproximació triangular és el NBT $\tilde{X}_1=(-3, -2, q)$ on q es determina amb la condició

$$I_a(\tilde{X}_0,\tilde{X}_1) = \frac{\text{àrea}(\tilde{A}+\tilde{X}_0)}{\text{àrea}(\tilde{A}+\tilde{X}_1)} = 0{,}95$$

Com que $A_\alpha=[2+\alpha\ ,\ 10-7\alpha\ ]$ s'obté successivament

$$X_{0\alpha}=[-3+\alpha\ ,\ -2\ ] \ \Rightarrow\ A_\alpha+X_{0\alpha}=[-1+2\alpha\ ,\ 8-7\alpha\ ] \ \Rightarrow\ \tilde{A}+\tilde{X}_0=(\ -1\ ,\ 1\ ,\ 8)$$

$$X_{1\alpha}=[-3+\alpha,\ q-\alpha(q+2)] \ \Rightarrow\ A_\alpha+X_{1\alpha}=[-1+2\alpha, 10+q-\alpha(q+9)]$$

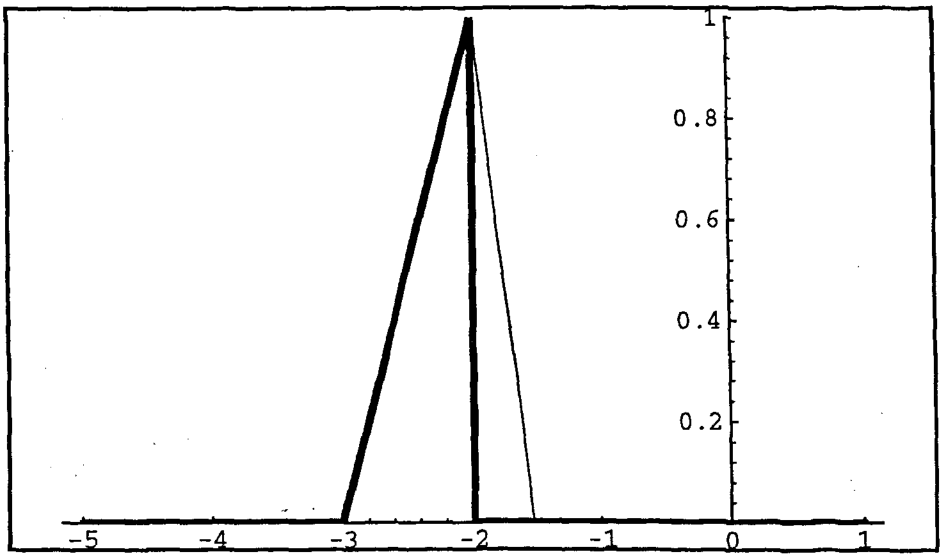
$$\Rightarrow\ \tilde{A}+\tilde{X}_1=(-1, 1, 10+q)$$

Imposant la condició, resulta

$$I_a(\tilde{X}_0,\tilde{X}_1)=\frac{9}{q+11}=0{,}95 \qquad \Rightarrow \qquad q \approx -1{,}53$$

Obtenim, doncs, que l'aproximació triangular de la solució és el número borrós triangular

$$\tilde{X}_1=(-3,\ -2,\ -1.53)$$



c) $\boxed{b_2-a_2 < b_1-a_1}$ i $\boxed{b_2-a_2 < b_3-a_3}$

Construïm $\tilde{X}_1$ com el número borrós triangular (p, b_2-a_2, b_3-a_3), on el valor del paràmetre p es determinarà imposant la condició [4.12].

Exemple 4.9

En l'exemple 4.6 hem obtingut que l'aproximació a la solució és el número borrós $\tilde{X}_0$ amb α-talls

$$\underline{X}_0(\alpha)=1 \quad \text{i} \quad \overline{X}_0(\alpha)=3-2\alpha$$

L'aproximació triangular és el NBT $\tilde{X}_1=(p, 1, 3)$, on p es determina amb la condició

$$I_a(\tilde{X}_0,\tilde{X}_1) = \frac{\text{àrea}(\tilde{A}+\tilde{X}_0)}{\text{àrea}(\tilde{A}+\tilde{X}_1)} = 0{,}95$$

Com que $A_\alpha=[-2+3\alpha,\ 4-3\alpha\ ]$, deduïm que

$$X_{0\alpha}=[1, 3-2\alpha\ ] \Rightarrow A_\alpha+X_{0\alpha}=[-1+3\alpha,\ 7-5\alpha\ ] \Rightarrow \tilde{A}+\tilde{X}_0=(-1,\ 2,\ 7)$$

$$X_{1\alpha}=[p+\alpha(1-p), 3-2\alpha] \Rightarrow A_\alpha+X_{1\alpha}=[p-2+\alpha(4-p),\ 7-5\alpha\ ]$$

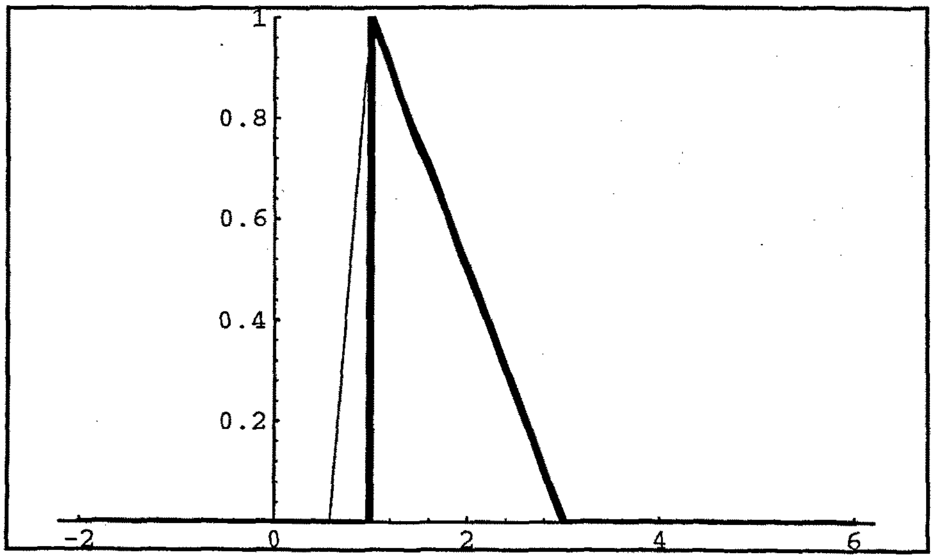
$$\Rightarrow \tilde{A}+\tilde{X}_1= (p-2,\ 2,\ 7)$$

Imposant la condició, resulta

$$I_a(\tilde{X}_0,\tilde{X}_1) = \frac{8}{9\ -p} =0{,}95 \qquad \Rightarrow \qquad p \approx 0{,}58$$

I, per tant, l'aproximació triangular de la solució és el NBT

$$\tilde{X}_1=(0.58,\ 1,\ 3)$$



d) $\boxed{b_3-a_3 < b_2-a_2 < b_1-a_1}$

Construïm $\tilde{X}_1$ com el NBT $(b_2-a_2-r,\ b_2-a_2,\ b_2-a_2-r)$, on com en els dos apartats anteriors, el valor del paràmetre r es determinarà imposant la condició [4.12].

Exemple 4.10

En l'exemple 4.7 hem obtingut que l'aproximació a la solució és el número borrós $\tilde{X}_0$ amb α-talls

$$\underline{X}_0(\alpha) = 4 \quad \text{i} \quad \overline{X}_0(\alpha) = 4$$

L'aproximació triangular és el NBT $\tilde{X}_1$=(4-r, 4, 4+r), on r es determina amb la condició

$$I_a(\tilde{X}_0,\tilde{X}_1) = \frac{\text{àrea}(\tilde{A}+\tilde{X}_0)}{\text{àrea}(\tilde{A}+\tilde{X}_1)} = 0{,}95$$

Com que, A_α=[-3+4α, 4-3α], resulta

$$X_{0\alpha}=[4, 4] \quad \Rightarrow \quad A_\alpha+X_{0\alpha}=[1+4\alpha, 8-3\alpha] \Rightarrow \tilde{A}+\tilde{X}_0=(1\ , 5, 8)$$

$$X_{1\alpha}=[4-r+\alpha\, r, 4+r-\alpha\, r] \Rightarrow A_\alpha+X_{1\alpha}=[1-r+\alpha(4+r), 8+r-\alpha(3+r)]$$

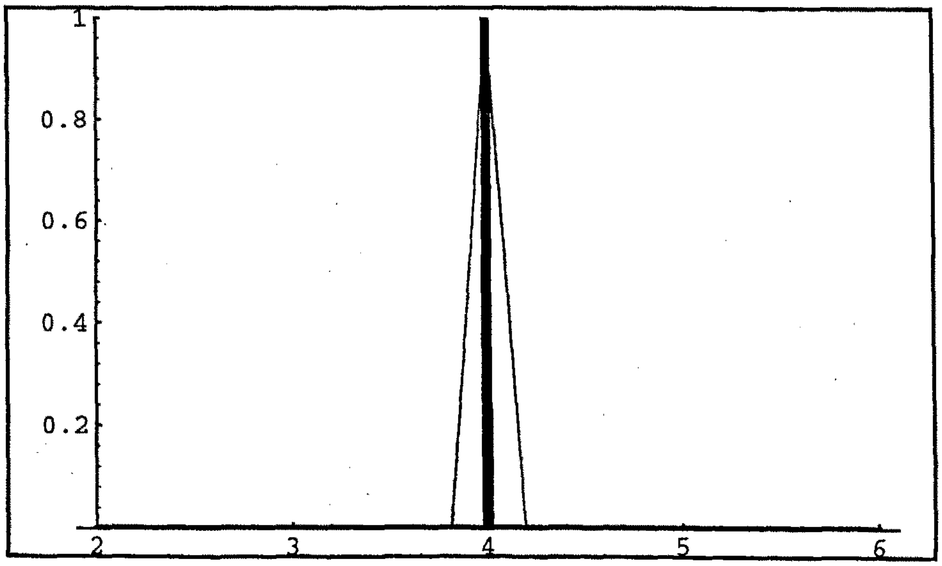
$$\Rightarrow \tilde{A}+\tilde{X}_1=(1-r,5,8+r)$$

Imposant la condició, obtenim

$$I_a(\tilde{X}_0,\tilde{X}_1) = \frac{7}{7+2r} = 0{,}95 \qquad \Rightarrow \qquad r \approx 0{,}19$$

I, per tant, l'aproximació triangular de la solució és el NBT

$$\tilde{X}_1=(3.81,\ 4,\ 4.19)$$



4.4 RESOLUCIÓ DE L'EQUACIÓ BORROSA $\tilde{A}.\tilde{X}=\tilde{B}$

En tot aquest apartat considerem números borrosos positius.

4.4.1 EXISTÈNCIA DE LA SOLUCIÓ

TEOREMA 4.2. «Siguin $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ dos números borrosos d'un referencial $E \subseteq R$ amb α-talls $A_\alpha=[\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)]$ i $B_\alpha=[\underline{B}(\alpha), \overline{B}(\alpha)]$, respectivament. Llavors el número borrós $\tilde{X}$ amb α-talls $X_\alpha=[\underline{B}(\alpha)/\underline{A}(\alpha), \overline{B}(\alpha)/\overline{A}(\alpha)]$ és solució de l'equació si i només si es verifiquen les condicions següents:

1) $\forall \alpha \in [0,1]$ $\boxed{\underline{B}(\alpha)/\underline{A}(\alpha) \leq \overline{B}(\alpha)/\overline{A}(\alpha)}$ [4.13]

2) $\forall \alpha, \beta \in [0,1]$ tal que $\alpha \leq \beta$ es compleixen

$$\boxed{\underline{B}(\alpha)/\underline{A}(\alpha) \leq \underline{B}(\beta)/\underline{A}(\beta)} \qquad [4.14]$$

$$\boxed{\overline{B}(\beta)/\overline{A}(\beta) \leq \overline{B}(\alpha)/\overline{A}(\alpha)}\ .\text{»} \qquad [4.15]$$

Demostració:

Si $\tilde{X}$ és solució de l'equació, és evident que es compleix 1) i 2).

D'altra banda és trivial que $A_\alpha.X_\alpha=B_\alpha$. Per tant, $\tilde{X}$ é s solució de l'equació. Per la hipòtesi 1) per a tot $\alpha \in [0,1]$ resulta que X_α és un interval tancat. A més, la hipòtesi 2) implica que $\tilde{X}$ és convex. Com que $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ són normals tenim que $X_1=[\underline{B}(1)/\underline{A}(1), \overline{B}(1)/\overline{A}(1)] \neq \emptyset$ i, per tant, $\tilde{X}$ és també normal. ♦

COROL·LARI 4.2. «Donada l'equació $\tilde{A}.\tilde{X}=\tilde{B}$ on $\tilde{A}=(a_1, a_2, a_3)$ i $\tilde{B}=(b_1, b_2, b_3)$ són dos NBT tals que $b_1/a_1 < b_2/a_2 < b_3/a_3$, llavors existeix $\tilde{X}$, solució de l'equació, i el seu valor és el número borrós amb α-talls

$$X_\alpha=\left[\frac{b_1+\alpha(b_2-b_1)}{a_1+\alpha(a_2-a_1)}, \frac{b_3-\alpha(b_3-b_2)}{a_3-\alpha(a_3-a_2)}\right]\text{»}$$

Demostració:

Comprovem que es verifiquen les hipòtesis 1) i 2) del teorema anterior.

1) $b_1/a_1 < b_2/a_2 < b_3/a_3 \Leftrightarrow a_2b_1 \leq a_1b_2$ i $a_3b_2 < a_2b_3$

$$\Leftrightarrow a_2b_1+a_3b_2 < a_1b_2+a_2b_3 \Leftrightarrow$$

$$\alpha(1-\alpha)(a_2b_1+a_3b_2) \leq \alpha(1-\alpha)(a_1b_2+a_2b_3) \Leftrightarrow$$

$$\alpha(1-\alpha)(a_2b_1+a_3b_2)+\alpha^2a_2b_2 \leq \alpha(1-\alpha)(a_1b_2+a_2b_3)+\alpha^2a_2b_2 \quad \text{(a)}$$

D'altra banda,

$$b_1/a_1 < b_3/a_3 \Leftrightarrow a_3b_1 < a_1b_3 \Leftrightarrow$$

$$(1-\alpha)^2a_3b_1 \leq (1-\alpha)^2a_1b_3 \qquad \text{(b)}$$

Sumant les expressions (a) i (b) i operant

$$(1-\alpha)^2a_3b_1+\alpha(1-\alpha)(a_2b_1+a_3b_2)+\alpha^2a_2b_2 \leq$$

$$\leq (1-\alpha)^2a_1b_3+\alpha(1-\alpha)(a_1b_2+a_2b_3)+\alpha^2a_2b_2 \Leftrightarrow$$

$$(b_1(1-\alpha)+\alpha b_2)(a_3(1-\alpha)+\alpha a_2) \leq$$

$$\leq (b_3(1-\alpha)+\alpha b_2)(a_1(1-\alpha)+\alpha a_2) \Leftrightarrow$$

$$(b_1(1-\alpha)+\alpha b_2)/(a_1(1-\alpha)+\alpha a_2) \leq$$

$$\leq (b_3(1-\alpha)+\alpha b_2)/(a_3(1-\alpha)+\alpha a_2) \Leftrightarrow$$

$$\frac{b_1+\alpha(b_2-b_1)}{a_1+\alpha(a_2-a_1)} \leq \frac{b_3-\alpha(b_3-b_2)}{a_3-\alpha(a_3-a_2)}$$

2) $\forall \alpha, \beta \in [0,1]$ tal que $\alpha \leq \beta$

$$b_1/a_1 < b_2/a_2 \Leftrightarrow b_1a_2 < b_2a_1 \Leftrightarrow b_2a_1-b_1a_2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-\beta)(b_2a_1-b_1a_2) \leq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)(b_2a_1-b_1a_2+a_1b_1-a_1b_1) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$(\alpha-\beta)[(b_2-b_1)a_1-(a_2-a_1)b_1] \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$(\alpha-\beta)(b_2-b_1)a_1-(\alpha-\beta)(a_2-a_1)b_1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha(b_2-b_1)a_1-\beta(b_2-b_1)a_1-\alpha(a_2-a_1)b_1+\beta(a_2-a_1)b_1 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\alpha(b_2-b_1)a_1+\beta(a_2-a_1)b_1 \leq \beta(b_2-b_1)a_1+\alpha(a_2-a_1)b_1 \Leftrightarrow$$

$$b_1a_1+\alpha(b_2-b_1)a_1+\beta(a_2-a_1)b_1 \leq b_1a_1+\beta(b_2-b_1)a_1+\alpha(a_2-a_1)b_1$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha\beta(b_2-b_1)(a_2-a_1)+b_1a_1+\alpha\,(b_2-b_1)a_1+\beta(a_2-a_1)b_1 \leq$$
$$\leq \alpha\beta(b_2-b_1)(a_2-a_1)+b_1a_1+\beta\,(b_2-b_1)a_1+\alpha(a_2-a_1)b_1$$
$$\Leftrightarrow \quad \beta(a_2-a_1)[\alpha(b_2-b_1)+b_1]+b_1a_1+\alpha\,(b_2-b_1)a_1 \leq$$
$$\leq \alpha(a_2-a_1)[\beta(b_2-b_1)+b_1]+b_1a_1+\beta\,(b_2-b_1)a_1 \quad \Leftrightarrow$$
$$\beta(a_2-a_1)[\alpha(b_2-b_1)+b_1]+a_1[\alpha(b_2-b_1)+b_1] \leq$$
$$\leq \alpha(a_2-a_1)[\beta(b_2-b_1)+b_1]+a_1[\beta(b_2-b_1)+b_1] \Leftrightarrow$$
$$[\alpha(b_2-b_1)+b_1][\beta(a_2-a_1)+a_1] \leq [\beta(b_2-b_1)+b_1][\alpha(a_2-a_1)+a_1] \quad \Leftrightarrow$$
$$[\alpha(b_2-b_1)+b_1][\beta(a_2-a_1)+a_1] \leq [\beta(b_2-b_1)+b_1][\alpha(a_2-a_1)+a_1]$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{b_1+\alpha(b_2-b_1)}{a_1+\alpha(a_2-a_1)} \leq \frac{b_1+\beta(b_2-b_1)}{a_1+\beta(a_2-a_1)}$$

Anàlogament es pot comprovar que

$$\frac{b_3-\beta(b_3-b_2)}{a_3-\beta(a_3-a_2)} \leq \frac{b_3-\alpha(b_3-b_2)}{a_3-\alpha(a_3-a_2)}$$

Per tant, $\tilde{X}$ és un número borrós solució de l'equació, amb α-talls

$$X_\alpha = \left[\frac{b_1+\alpha(b_2-b_1)}{a_1+\alpha(a_2-a_1)}, \frac{b_3-\alpha(b_3-b_2)}{a_3-\alpha(a_3-a_2)}\right] \quad \blacklozenge$$

4.4.2 MÈTODE D'APROXIMACIÓ A LA SOLUCIÓ DE L'EQUACIÓ BORRROSA $\tilde{A}.\tilde{X}=\tilde{B}$ AMB NÚMEROS BORROSOS TRIANGULARS POSITIUS

En vista de les observacions anteriors, en aquest apartat proposem un mètode totalment anàleg al de l'equació $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$ per donar una aproximació a la solució de l'equació $\tilde{A}.\tilde{X}=\tilde{B}$ amb $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ números borrosos triangulars, ambdós positius, a partir de la solució en el sentit de Buckley i Qu.

Igual que en el cas $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$, tot el procés es realitza a partir del fet que la solució en el sentit de Buckley i Qu conté la solució. Així doncs, ens proposem calcular el número borrós $\tilde{X}$ de manera que $\tilde{A}.\tilde{X}$ sigui el número borrós més petit complint $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}.\tilde{X}$.

Donada l'equació $\tilde{A}.\tilde{X}=\tilde{B}$, on $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ són dos NBT amb α-talls

$$A_\alpha=[\underline{A}(\alpha), \overline{A}(\alpha)] \quad \text{i} \quad B_\alpha=[\underline{B}(\alpha), \overline{B}(\alpha)]$$

i nuclis respectius

$$\text{Nuc}\tilde{A}=\{x_a\} \quad \text{i} \quad \text{Nuc}\tilde{B}=\{x_b\}$$

prenem tots els números borrosos $\tilde{X}$ amb nucli $\{x_0\}=\{x_b \cdot x_a\}$ complint la condició

$$\boxed{\tilde{B} \subseteq \tilde{A}.\tilde{X}} \qquad [4.16]$$

Observem que existeix almenys un $\tilde{X}$ d'aquests, atès que la solució segons Buckley i Qu ($\tilde{X}=\tilde{B}/\tilde{A}$) per la Proposició 4.2 conté $\tilde{B}$.

CONSTRUCCIÓ DE LA SOLUCIÓ APROXIMADA DE $\tilde{A}\tilde{X}=\tilde{B}$

Donada l'equació $\tilde{A}.\tilde{X}=\tilde{B}$ on $\tilde{A}=(a_1, a_2, a_3)$ i $\tilde{B}=(b_1, b_2, b_3)$ són dos NBT, considerem el número borrós $\tilde{X}_0$ amb nucli b_2/a_2 tal que $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}\cdot\tilde{X}_0$ i que tingui els α-talls $X_{0\alpha}=[\underline{X}_0(\alpha), \overline{X}_0(\alpha)]$ definits per:

$$\underline{X}_0(\alpha)=\min\left\{\frac{\underline{B}(\alpha)}{\underline{A}(\alpha)}, \frac{b_2}{a_2}\right\}=\min\left\{\frac{b_1+\alpha(b_2-b_1)}{a_1+\alpha(a_2-a_1)}, \frac{b_2}{a_2}\right\}$$

$$\overline{X}_0(\alpha)=\text{màx}\left\{\frac{\overline{B}(\alpha)}{\overline{A}(\alpha)}, \frac{b_2}{a_2}\right\}=\text{màx}\left\{\frac{b_3-\alpha(b_3-b_2)}{a_3-\alpha(a_3-a_2)}, \frac{b_2}{a_2}\right\}$$

Per tal de calcular $\underline{X}_0(\alpha)$ i $\overline{X}_0(\alpha)$ definits anteriorment, considerem els QUATRE CASOS següents:

a) $\boxed{b_1/a_1 < b_2/a_2 < b_3/a_3}$

En aquest cas tenim les desigualtats,

$$b_1/a_1<b_2/a_2 \Leftrightarrow b_1.a_2<b_2.a_1 \Leftrightarrow (1-\alpha)(b_1.a_2)\leq(1-\alpha)(b_2.a_1) \Leftrightarrow$$

$$(1-\alpha)b_1a_2+b_2a_2\alpha \leq (1-\alpha)b_2a_1+b_2a_2\alpha \Leftrightarrow$$

$$[(1-\alpha)b_1+b_2\alpha]a_2 \leq [(1-\alpha)a_1+a_2\alpha]b_2 \Leftrightarrow$$

$$[(1-\alpha)b_1+b_2\alpha]/[(1-\alpha)a_1+a_2\alpha] \leq b_2/a_2$$

Per tant,

$$\underline{X}_0(\alpha) = \frac{b_1+\alpha(b_2-b_1)}{a_1+\alpha(a_2-a_1)}$$

Anàlogament,

$$b_2/a_2 < b_3/a_3 \Leftrightarrow b_2.a_3 < b_3.a_2 \Leftrightarrow$$

$$(1-\alpha)(b_2.a_3) \leq (1-\alpha)(b_3.a_2)$$

$$\Leftrightarrow (1-\alpha)b_2a_3+b_2a_2\alpha \leq (1-\alpha)b_3a_2+b_2a_2\alpha \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow[(1-\alpha)a_3+a_2\alpha]b_2 \leq [(1-\alpha)b_3+b_2\alpha]a_2$$

$$\Leftrightarrow b_2/a_2 \leq [(1-\alpha)b_3+b_2\alpha]/[(1-\alpha)a_3+a_2\alpha]$$

Consegüentment,

$$\overline{X}_0(\alpha) = \frac{b_3-\alpha(b_3-b_2)}{a_3-\alpha(a_3-a_2)}$$

amb funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < (b_1/a_1) \\ \dfrac{a_1x-b_1}{(b_2-b_1)-(a_2-a_1)x} & \text{si } (b_1/a_1) \leq x < (b_2/a_2) \\ \dfrac{b_3-a_3x}{(b_3-b_2)-(a_3-a_2)x} & \text{si } (b_2/a_2) \leq x \leq (b_3/a_3) \\ 0 & \text{si } x > (b_3/a_3) \end{cases}$$

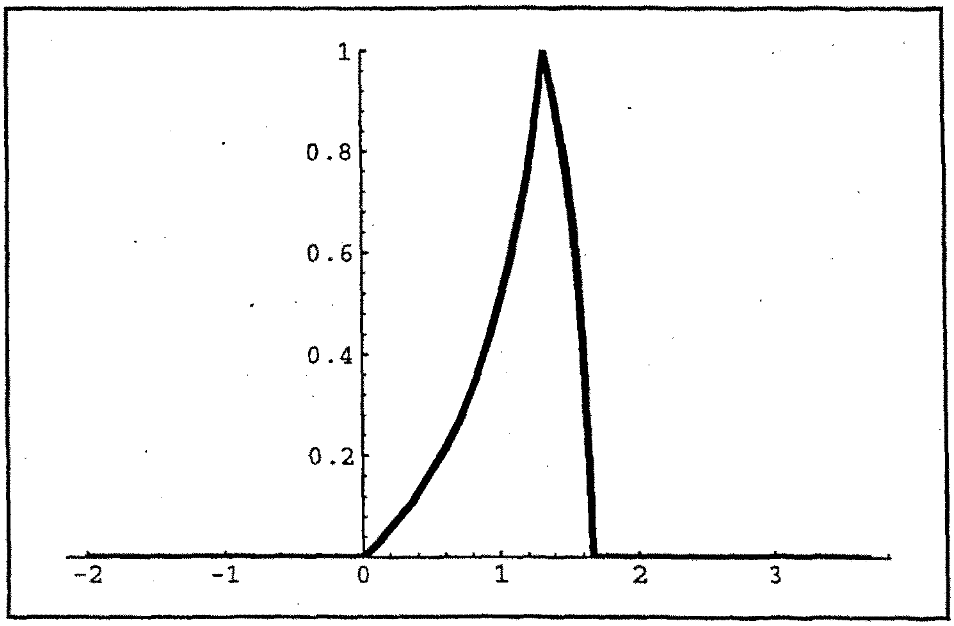
Exemple 4.11

Prenent $\tilde{A}=(1, 3, 9)$ i $\tilde{B}=(0, 4, 15)$, aleshores tenim $b_1/a_1=0$, $b_2/a_2=4/3$ i $b_3/a_3=15/9=5/3$. Així doncs, $0<(4/3)<(5/3)$ i, per tant, l'aproximació a la solució és el número borrós $\tilde{X}_0$ amb α-talls

$$\underline{X}_0(\alpha) = \frac{4\alpha}{1+2\alpha} \quad \text{i} \quad \overline{X}_0(\alpha) = \frac{15-11\alpha}{9-6\alpha}$$

I amb funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{x}{4-2x} & \text{si } 0 \le x < 4/3 \\ \dfrac{9x-15}{6x-11} & \text{si } 4/3 \le x < 5/3 \\ 0 & \text{si } x > 5/3 \end{cases}$$



b) $\boxed{b_1/a_1 < b_2/a_2}$ i $\boxed{b_3/a_3 < b_2/a_2}$

Procedint de la mateixa manera que en l'apartat a) obtenim els extrems inferior i superior dels α-talls

$$\underline{X}_0(\alpha) = \frac{b_1+\alpha(b_2-b_1)}{a_1+\alpha(a_2-a_1)} \quad \text{i} \quad \overline{X}_0(\alpha) = \frac{b_2}{a_2}$$

La funció de pertinença és

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < (b_1/a_1) \\ \dfrac{a_1x-b_1}{(b_2-b_1)-(a_2-a_1)x} & \text{si } (b_1/a_1) \le x \le (b_2/a_2) \\ 0 & \text{si } x > (b_2/a_2) \end{cases}$$

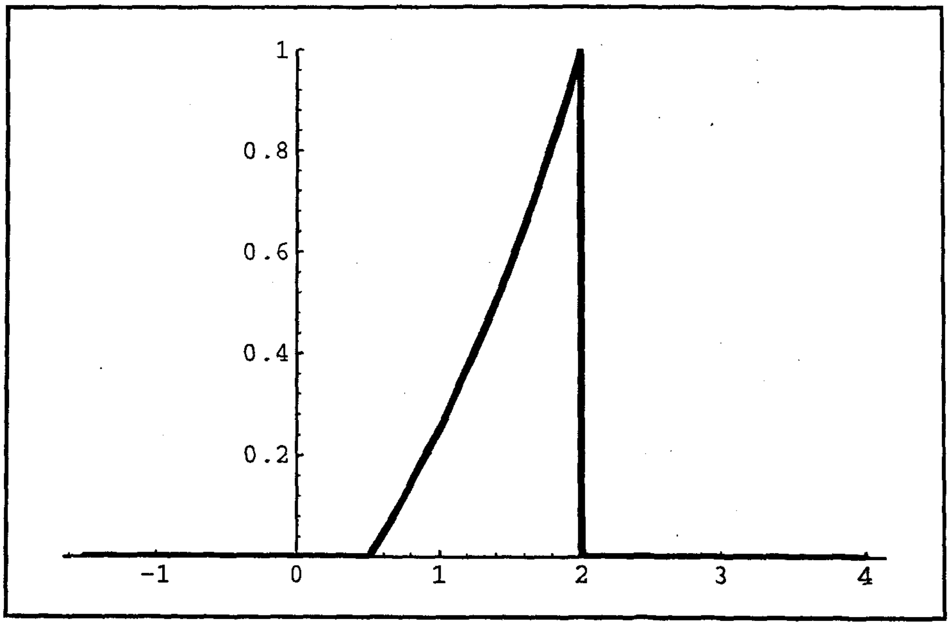
Exemple 4.12

Prenent $\tilde{A}=(2, 3, 5)$ i $\tilde{B}=(1, 6, 7)$, aleshores tenim $b_1/a_1=1/2$, $b_2/a_2=6/3=2$ i $b_3/a_3=7/5$. Així doncs, $(1/2)<2<(7/5)$ i, per tant, l'aproximació a la solució és el número borrós $\tilde{X}_0$ amb α-talls

$$\underline{X}_0(\alpha) = \frac{1+5\alpha}{2+\alpha} \quad \text{i} \quad \overline{X}_0(\alpha) = 2$$

que té per funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1/2 \\ \dfrac{2x-1}{5-x} & \text{si } 1/2 \le x \le 2 \\ 0 & \text{si } x > 2 \end{cases}$$



c) $\boxed{b_2/a_2 < b_1/a_1}$ i $\boxed{b_2/a_2 < b_3/a_3}$

En aquest cas obtenim

$$\underline{X}_0(\alpha) = \frac{b_2}{a_2} \quad \text{i} \quad \overline{X}_0(\alpha) = \frac{b_3-\alpha(b_3-b_2)}{a_3-\alpha(a_3-a_2)}$$

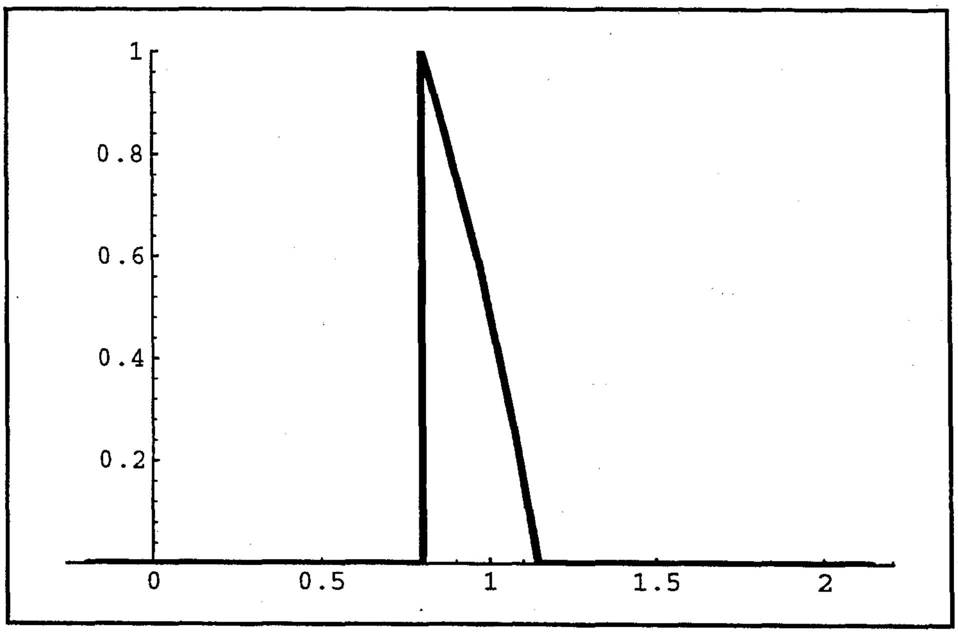
Amb funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < (b_2/a_2) \\ \dfrac{b_3-a_3x}{(b_3-b_2)-(a_3-a_2)x} & \text{si } (b_2/a_2) \leq x \leq (b_3/a_3) \\ 0 & \text{si } x > (b_3/a_3) \end{cases}$$

Exemple 4.13

Prenent $\tilde{A}=(1, 5, 7)$ i $\tilde{B}=(3, 4, 8)$, aleshores $b_1/a_1=3$, $b_2/a_2=4/5$ i $b_3/a_3=8/7$. Així doncs, $(1/2)<(6/3)<(7/5)$ i, per tant, l'aproximació a la solució és el número borrós $\tilde{X}_0$ amb α-talls

$$\underline{X}_0(\alpha) = \frac{4}{5} \quad \text{i} \quad \overline{X}_0(\alpha) = \frac{8-4\alpha}{7-2\alpha}$$



La funció de pertinença d'aquest exemple és

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x < 4/5 \\ \dfrac{7x-8}{2x-4} & \text{si } 4/5 \le x < 8/7 \\ 0 & \text{si } x > 8/7 \end{cases}$$

d) $\boxed{b_3/a_3 < b_2/a_2 < b_1/a_1}$

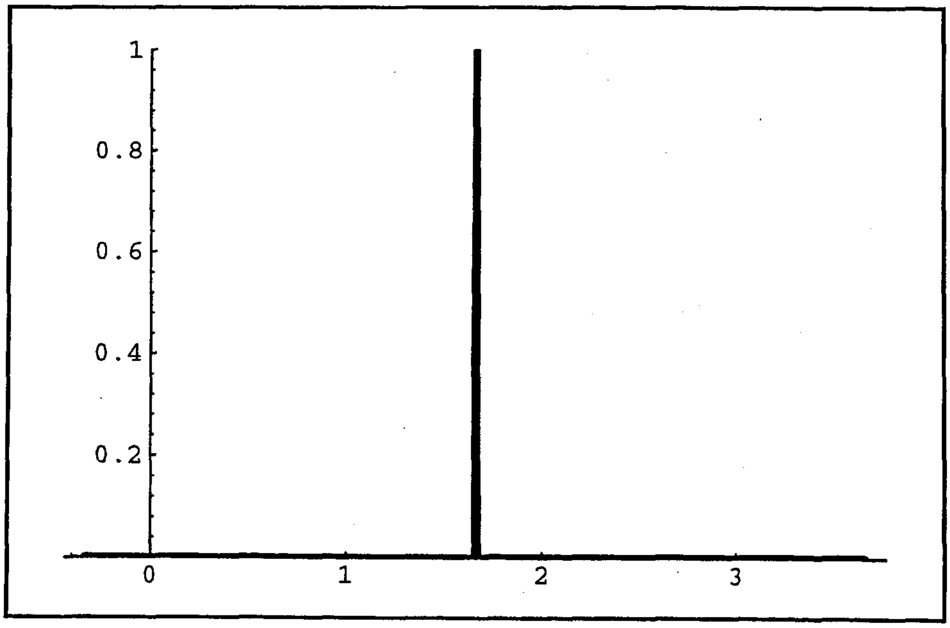
Obtenim els extrems dels α-talls i la funció de pertinença

$$\underline{X}_0(\alpha) = \overline{X}_0(\alpha) = \frac{b_2}{a_2} \qquad \mu_{\tilde{X}_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq (b_2/a_2) \\ 1 & \text{si } x = (b_2/a_2) \end{cases}$$

Exemple 4.14

Prenent $\tilde{A}=(4, 5, 9)$ i $\tilde{B}=(2, 3, 6)$, aleshores tenim $b_1/a_1=2$, $b_2/a_2=5/3$ i $b_3/a_3=3/2$. Així doncs, $(3/2)<(5/3)<2$ i, per tant, l'aproximació a la solució és el número borrós $\tilde{X}_0$ amb α-talls

$$\underline{X}_0(\alpha)=\overline{X}_0(\alpha)=\frac{5}{3}$$



Observem que la funció de pertinença és

$$\mu_{\tilde{X}_0}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq (5/3) \\ 1 & \text{si } x = (5/3) \end{cases}$$

CONCLUSIÓ. Dels quatre apartats anteriors i igual que en el cas de la suma, hem obtingut la solució més aproximada possible quan $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ són NBT. Notem que en el cas a) l'aproximació coincideix amb la solució, atès que aquesta existeix, a diferència dels apartats b) i c) on l'aproximació és un número borrós no triangular en funció de pertinença discontínua. Finalment, en el cas d) obtenim un número *crisp* o nítid.

4.4.3 MÈTODE D'APROXIMACIÓ CONTÍNUA A LA SOLUCIÓ DE L'EQUACIÓ BORROSA $\tilde{A}.\tilde{X} = \tilde{B}$ AMB NÚMEROS BORROSOS TRIANGULARS

L'objectiu que ens plantegem ara és calcular un número borrós triangular $\tilde{X}_1$ amb funció de pertinença contínua proper a l'aproximació $\tilde{X}_0$, calculada anteriorment.

Igual que en el cas de l'equació $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$, utilitzem l'*índex d'aproximació* que en aquest cas ve definit pel quocient entre les àrees expressades per

$$\boxed{I_a(\tilde{X}_0,\tilde{X}_1) = \frac{\text{àrea}(\tilde{A}.\tilde{X}_0)}{\text{àrea}(\tilde{A}.\tilde{X}_1)}} \qquad [4.17]$$

CONSTRUCCIÓ ANALÍTICA DE L'APROXIMACIÓ CONTÍNUA $\tilde{X}_1$

La construcció del número borrós triangular $\tilde{X}_1$ la realitzarem a partir de la funció de pertinença de $\tilde{X}_0$.

Considerem els QUATRE CASOS següents:

a) $\boxed{b_1/a_1 < b_2/a_2 < b_3/a_3}$

Atès que en aquest cas l'equació té solució, prenem $\tilde{X}_1 = \tilde{X}_0$.

b) $\boxed{b_1/a_1 < b_2/a_2}$ i $\boxed{b_3/a_3 < b_2/a_2}$

Construïm $\tilde{X}_1$ com el número borrós amb funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{X}_1}(x) = \begin{cases} 0 & \text{altrament} \\ \dfrac{a_1x-b_1}{(b_2-b_1)-(a_2-a_1)x} & \text{si } (b_1/a_1) \leq x \leq (b_2/a_2) \\ \dfrac{qb_2-b_2x}{qb_2-a_2} & \text{si } (b_2/a_2) < x \leq q \end{cases}$$

on el valor del paràmetre q es determinarà imposant la condició

$$I_a(\tilde{X}_0, \tilde{X}_1)=0.95$$

Exemple 4.15

En el exemple 4.12 hem obtingut que l'apoximació a la solució és el número borrós $\tilde{X}_0$ amb α-talls

$$\underline{X}_0(\alpha) = \frac{1+5\alpha}{2+\alpha} \quad \text{i} \quad \overline{X}_0(\alpha) = 2$$

L'aproximació contínua és el NBT $\tilde{X}_1$ amb funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{X}_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{5-x} & \text{si } \dfrac{1}{2} \leq x < 2 \\ \dfrac{q-x}{q-2} & \text{si } 2 \leq x \leq q \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Per tant els α-talls de $\tilde{X}_1$ són

$$(X_1)_\alpha = \left[\frac{5\alpha+1}{2+\alpha},\ q(1-\alpha)+2\alpha\right]$$

D'altra banda, el número borrós $\tilde{A}$ té per α-talls

$$A_\alpha = [2+\alpha \ , \ 5-2\alpha]$$

Per tant,

$$(X_1A)_\alpha = [5\alpha + 1 \ , \ (5-2\alpha)\left(q(1-\alpha)+2\alpha\right)]$$

Les dues àrees valen

$$\text{àrea}\left(\tilde{X}_1\tilde{A}\right) = \int_0^1 (5-2\alpha)\left(q(1-\alpha)+2\alpha\right) - (5\alpha+1)\, d\alpha = \frac{13q+1}{6}$$

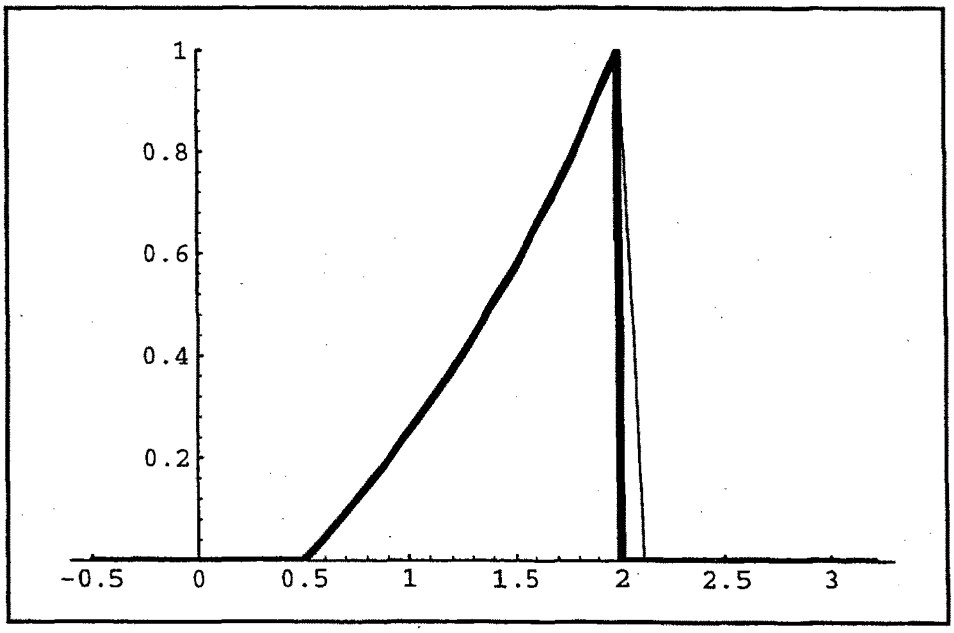
$$\text{àrea}\left(\tilde{X}_0\tilde{A}\right) = \frac{9}{2}$$

Calculem el paràmetre q

$$\frac{9/2}{(13q+1)/6} = 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad q = \frac{521}{247}$$

Llavors la funció de pertinença de $\tilde{X}_1$ és

$$\mu_{\tilde{X}_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{2x-1}{5-x} & \text{si } \dfrac{1}{2} \le x < 2 \\ \dfrac{521-247x}{27} & \text{si } 2 \le x \le 521/247 \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$



c) $\boxed{b_2/a_2 < b_1/a_1}$ i $\boxed{b_2/a_2 < b_3/a_3}$

Construïm $\tilde{X}_1$ com el número borrós amb funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{X}_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{a_2x-a_2p}{b_2-a_2p} & \text{si} \quad x < (b_2/a_2) \\[2ex] \dfrac{b_3-a_3x}{(b_3-b_2)-(a_3-a_2)x} & \text{si } (b_2/a_2) \leq x \leq (b_3/a_3) \\[2ex] 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

on el valor del paràmetre p es determina imposant la condició

$$I_a(\tilde{X}_0,\tilde{X}_1)=0.95$$

Exemple 4.16

En el exemple 4.13 hem obtingut que l'apoximació a la solució és el número borrós $\tilde{X}_0$ amb α-talls

$$\underline{X}_0(\alpha) = \frac{4}{5} \quad \text{i} \quad \overline{X}_0(\alpha) = \frac{8-4\alpha}{7-2\alpha}$$

L'aproximació contínua a la solució és el número borrós triangular $\tilde{X}_1$ amb funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{X}_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{5x-5p}{4-5p} & \text{si} \quad p \leq x < \dfrac{4}{5} \\[2ex] \dfrac{8-7x}{4-2x} & \text{si } \dfrac{4}{5} \leq x \leq \dfrac{8}{7} \\[2ex] 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

I amb α-talls

$$(X_1)_\alpha = \left[p+\alpha\left(\frac{4}{5}-p\right), \frac{4\alpha-8}{2\alpha-7}\right]$$

D'altra banda, els α-talls del número borrós $\tilde{A}$ són

$$A_\alpha = [1+4\alpha \; , \; 7-2\alpha \,]$$

Per tant,

$$(AX_1)_\alpha = \left[(1+4\alpha)\left(p+\alpha\left(\frac{4}{5}-p\right)\right),\ (7-2\alpha)\frac{4\alpha-8}{2\alpha-7}\right] = \left[p(1+4\alpha)+\alpha(1+4\alpha)\left(\frac{4}{5}-p\right),\ 8-4\alpha\right]$$

Calculem ara les dues àrees

$$\text{àrea}\left(\tilde{X}_1\tilde{A}\right) = \int_0^1 \left((8-4\alpha)-p(1+4\alpha)-\alpha(1+4\alpha)\left(\frac{4}{5}-p\right)\right) d\alpha = \frac{68}{15} - \frac{7p}{6}$$

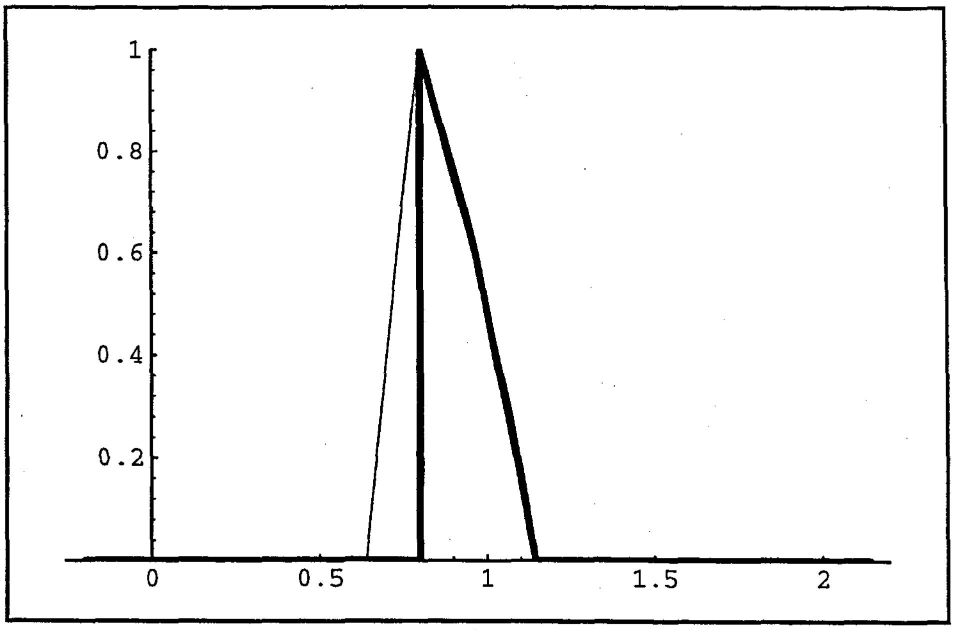
$$\text{àrea}\left(\tilde{X}_0\tilde{A}\right) = \frac{18}{5}$$

En conseqüència, el paràmetre p té per valor

$$\frac{18/5}{(68/15)-(7p/6)} = 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad p = \frac{424}{665}$$

I la funció de pertinença de $\tilde{X}_1$ és

$$\mu_{\tilde{X}_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{665x-424}{108} & \text{si } \dfrac{424}{665} \le x < \dfrac{4}{5} \\ \dfrac{8-7x}{4-2x} & \text{si } \dfrac{4}{5} \le x \le \dfrac{8}{7} \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$



d) $\boxed{b_3/a_3 < b_2/a_2 < b_1/a_1}$

Construïm $\tilde{X}_1$ com el número borrós amb funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{X}_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{a_2x-b_2+a_2r}{a_2r} & \text{si } (b_2/a_2)-r \le x \le (b_2/a_2) \\ \dfrac{b_2+a_2r-a_2x}{a_2r} & \text{si } (b_2/a_2) \le x \le (b_2/a_2)+r \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

on el valor del paràmetre r es determinarà imposant la condició

$$I_a(\tilde{X}_0,\tilde{X}_1)=0.95$$

Observem que en aquest cas l'aproximació contínua és el número borrós triangular

$$\tilde{X}_1=\left(\frac{b_2}{a_2}-r\ ,\ \frac{b_2}{a_2}\ ,\ \frac{b_2}{a_2}+r\right)$$

Exemple 4.17

En l'exemple 4.1.4 hem obtingut que l'aproximació a la solució és el número borrós $\tilde{X}_0$ amb α-talls

$$\underline{X}_0(\alpha)=\overline{X}_0(\alpha)=\frac{5}{3}$$

L'aproximació contínua a la solució és el número borrós $\tilde{X}_1$ amb funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{X}_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{3x-5+3r}{3r} & \text{si } \frac{5}{3}-r \le x < \frac{5}{3} \\ \dfrac{5+3r-3x}{3r} & \text{si } \frac{5}{3} \le x \le \frac{5}{3}+r \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

Amb α-talls

$$(X_1)_\alpha=\left[r(\alpha-1)+\frac{5}{3}\ ,\ r(1-\alpha)+\frac{5}{3}\right]$$

Atés que el número borrós $\tilde{A}$ té per α-talls

$$A_\alpha = [2+\alpha\ ,\ 6-3\alpha]$$

els α-talls del número borrós $\tilde{A}\tilde{X}_1$ són

$$(AX_1)_\alpha = \left[(2+\alpha)\left(r(\alpha-1)+\frac{5}{3}\right), (6-3\alpha)\left(r(1-\alpha)+\frac{5}{3}\right)\right]$$

Les dues àrees tenen per valor

$$\text{àrea}\left(\tilde{A}\tilde{X}_1\right) = \int_0^1 \left((6-3\alpha)\left(r(1-\alpha)+\frac{5}{3}\right) - (2+\alpha)\left(r(\alpha-1)+\frac{5}{3}\right)\right) d\alpha = \frac{25r+15}{6}$$

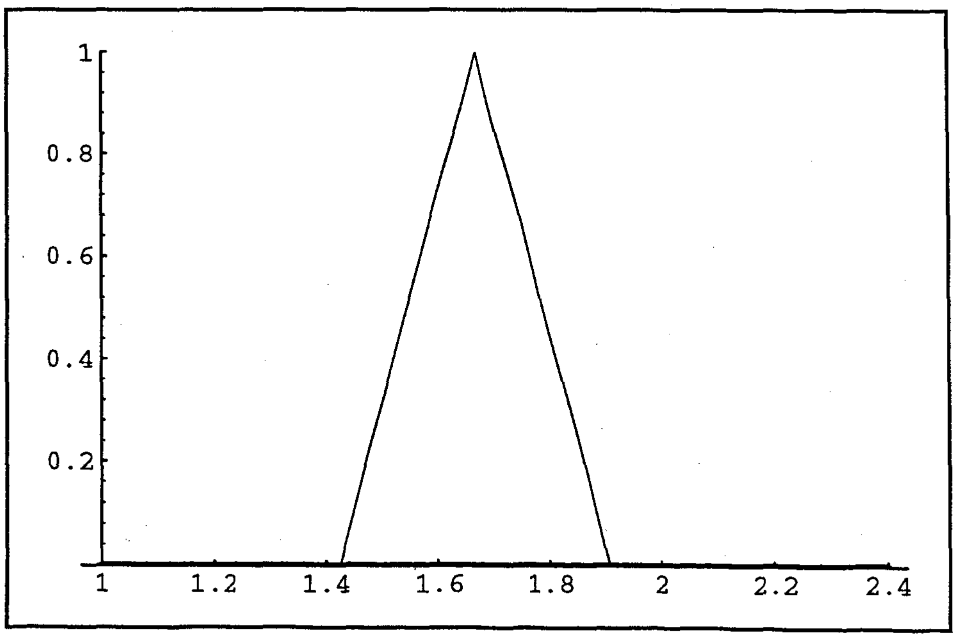
$$\text{àrea}\left(\tilde{A}\tilde{X}_0\right) = \frac{10}{3}$$

Per tant, el paràmetre r és

$$\frac{10/3}{(25r+15)/6} = 0{,}95 \quad \Rightarrow \quad r = \frac{23}{95}$$

I la funció de pertinença

$$\mu_{\tilde{X}_1}(x) = \begin{cases} \dfrac{285x+406}{69} & \text{si } \dfrac{406}{285} \le x < \dfrac{5}{3} \\ \dfrac{544-285x}{69} & \text{si } \dfrac{5}{3} \le x \le \dfrac{544}{285} \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$



CAPÍTOL 5

DERIVADES I EQUACIONS DIFERENCIALS BORROSES

La fuzzificació de models crisps ha estat una pràctica molt habitual en la Matemàtica de la Incertesa. Això permet treballar amb tota la informació des de l'inici fins a les conclusions.

En aquest capítol donem una alternativa més general a les Equacions Diferencials Lineals Borroses presentant-les des del principi amb objectes borrosos, la qual cosa permet una major profunditat en el coneixement de les lleis borroses que defineixen la Dinàmica.

Els apartats dedicats a les Derivades Borroses són essencials per a poder desenvolupar les idees i resultats posteriors.

5.1 DERIVADA D'UNA FUNCIÓ BORROSA

5.1.1 FUNCIÓ BORROSA

Sigui $T \subseteq R$ i $\tilde{N}(R)$ el conjunt de tots els números borrosos de referencial R. Llavors una *funció borrosa* $\tilde{f}$ de domini T és una funció tal que a cada element de T li associa un element de $\tilde{N}(R)$. Simbòlicament

$$\tilde{f}: T \rightarrow \tilde{N}(R)$$
$$t \rightarrow \tilde{f}(t)$$

Si per qualsevol element de T, resulta que $\tilde{f}(t)$ és un NBT, a la funció $\tilde{f}$ l'anomenem *funció borrosa triangular.*

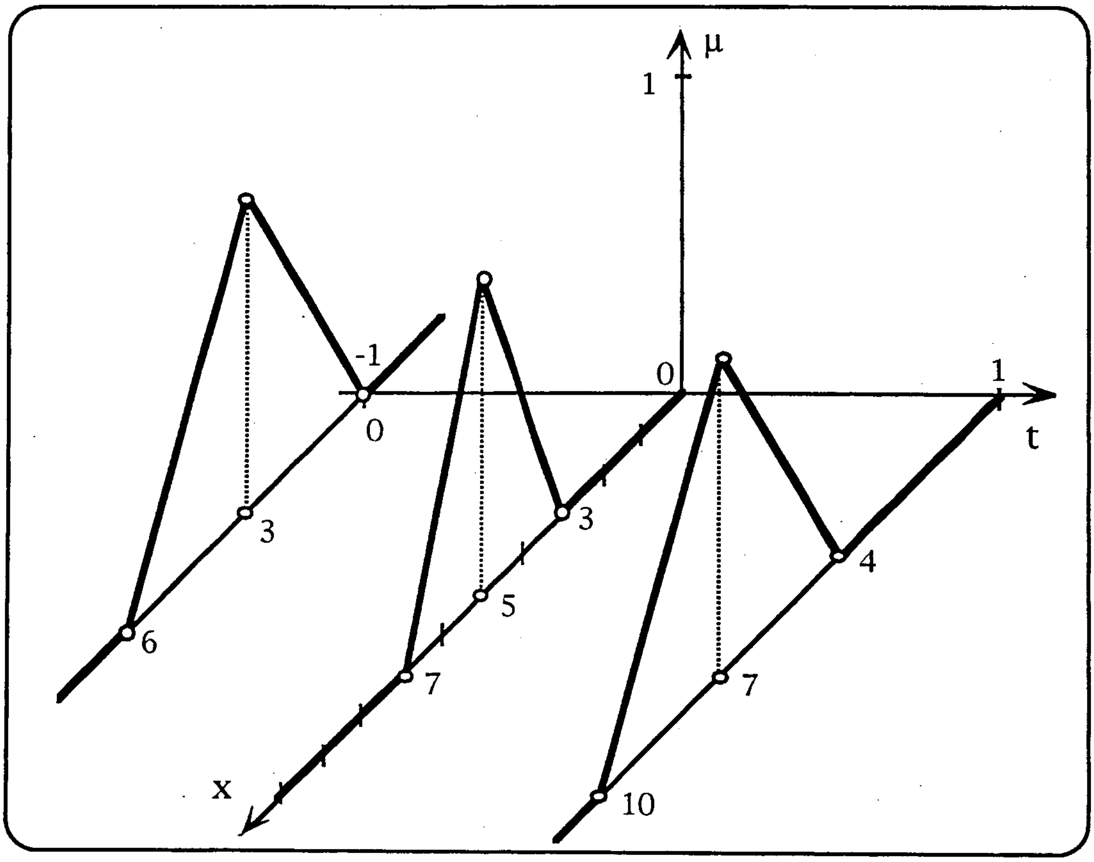


Fig.5.1 Exemple de funció borrosa

Per EXEMPLE, si considerem la funció borrosa $\tilde{f}$ definida per

$$\tilde{f}: [-1,1] \rightarrow \tilde{N}(R)$$
$$t \rightarrow \tilde{f}(t)=\tilde{a}.t + \tilde{b}$$

on $\tilde{a}=(1, 2, 3)$ i $\tilde{b}=(3, 5, 7)$ són números borrosos triangulars, aleshores $\tilde{f}$ vindrà donada per la següent expressió

$$\tilde{f}(t)=(1,2,3).t + (3,5.7)=\begin{cases}(3t+3 \ , 2t+5 \ , t+7) & \text{si } -1\leq t \leq 0 \\ (t+3 \ , 2t+5 \ , 3t+7) & \text{si } 0 < t \leq 1\end{cases}$$

En la pàgina anterior hem representat gràficament els tres NBTs d'aquesta funció borrosa, corresponents als valors t=-1, 0 i 1.

5.1.2 DERIVADA D'UNA FUNCIÓ BORROSA EN UN PUNT

Sigui $\tilde{f}$ una funció borrosa de variable real

$$\begin{aligned} \tilde{f}: T &\rightarrow \tilde{N}(R) \\ t &\rightarrow \tilde{f}(t) \end{aligned}$$

Per qualsevol valor de t del conjunt T, considerem el conjunt dels α-talls del número borrós $\tilde{f}(t)$, donats per

$$\left\{\underline{f}(\alpha)(t) \ , \overline{f}(\alpha)(t)\right\}$$

Anomenem en primer lloc $f_\alpha(t)$ a un element qualsevol d'aquest conjunt, i a continuació definim la *derivada de la funció borrosa* $\tilde{f}$ en el punt t_0 com el número borrós

$$\boxed{\frac{d\tilde{f}}{dt}(t_0)} \qquad [5.1]$$

amb funció de pertinença

$$\mu_{\frac{d\tilde{f}}{dt}(t_0)}(x)=\begin{cases} \sup\left\{\alpha \ / \frac{df_\alpha}{dt}(t_0)=x\right\} \\ 0 \text{ si no existeix } \alpha \ / \ \frac{df_\alpha}{dt}(t_0)=x \end{cases}$$

o, equivalentment, a partir dels seus α-talls

$$\left(\frac{df}{dt}(t_0)\right)_\alpha=\left[\min\left(\frac{d\underline{f}(\alpha)}{dt}(t_0) \ , \frac{d\overline{f}(\alpha)}{dt}(t_0)\right) \ , \ \text{màx}\left(\frac{d\underline{f}(\alpha)}{dt}(t_0) \ , \frac{d\overline{f}(\alpha)}{dt}(t_0)\right)\right]$$

Per EXEMPLE, donada la funció borrosa $\tilde{f}$ definida per

$$\tilde{f}:[-2\ ,\ 3] \rightarrow \tilde{N}(R)$$
$$t \rightarrow \tilde{f}(t)=\tilde{a}.t^2$$

on $\tilde{a}$ és el número borrós triangular $\tilde{a}=(1,\ 4,\ 5)$.

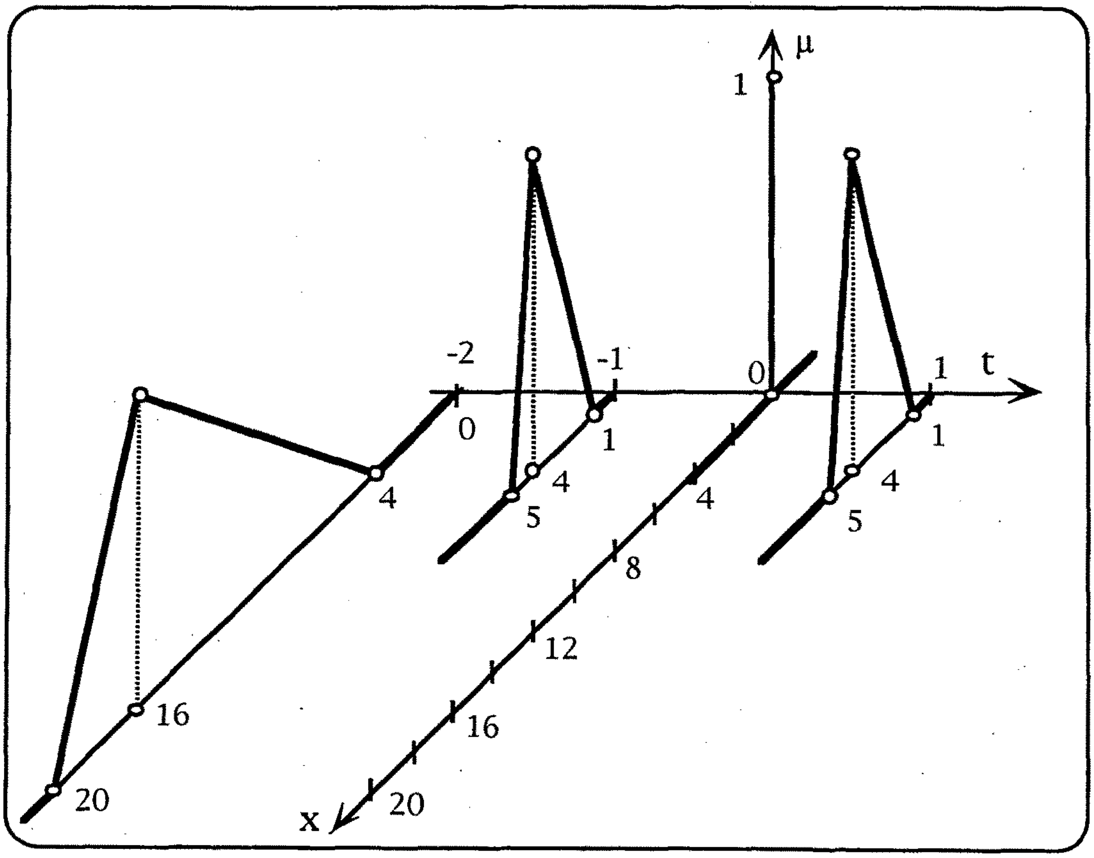


Fig.5.2 Exemple de funció borrosa per t=-2, -1, 0 i 1

Els α-talls del número borrós $\tilde{f}(t)$ són

$$\left[\underline{f}(\alpha)(t)\ ,\ \overline{f}(\alpha)(t)\right]=\left[t^2+3\alpha t^2\ ,\ 5t^2-\alpha t^2\right]$$

Per tant,

$$\frac{d\underline{f}(\alpha)}{dt}(-1) = -2-6\alpha \qquad \frac{d\overline{f}(\alpha)}{dt}(-1) = -10+2\alpha$$

Així, doncs, els α-talls de la derivada són

$$\text{mín}\{-2-6\alpha\ ,\ -10+2\alpha\}=-10+2\alpha \qquad \text{màx}\{-2-6\alpha\ ,\ -10+2\alpha\}=-2-6\alpha$$

És a dir

$$\left(\frac{d\tilde{f}}{dt}(-1)\right)_\alpha = [-10+2\alpha\ ,\ -2-6\alpha\ ]$$

i la funció de pertinença és

$$\mu_{\frac{d\tilde{f}}{dt}(-1)}(x)=\begin{cases}\dfrac{x+10}{2} & \text{si } -10 \le x \le -8\\[4pt] \dfrac{-x-2}{6} & \text{si } -8 < x \le -2\end{cases}$$

En resum, la derivada en el punt t_0=-1 de la funció $\tilde{f}$ és el número borrós triangular

$$\frac{d\tilde{f}}{dt}(-1)=(-10\ ,\ -8\ ,\ -2\ )$$

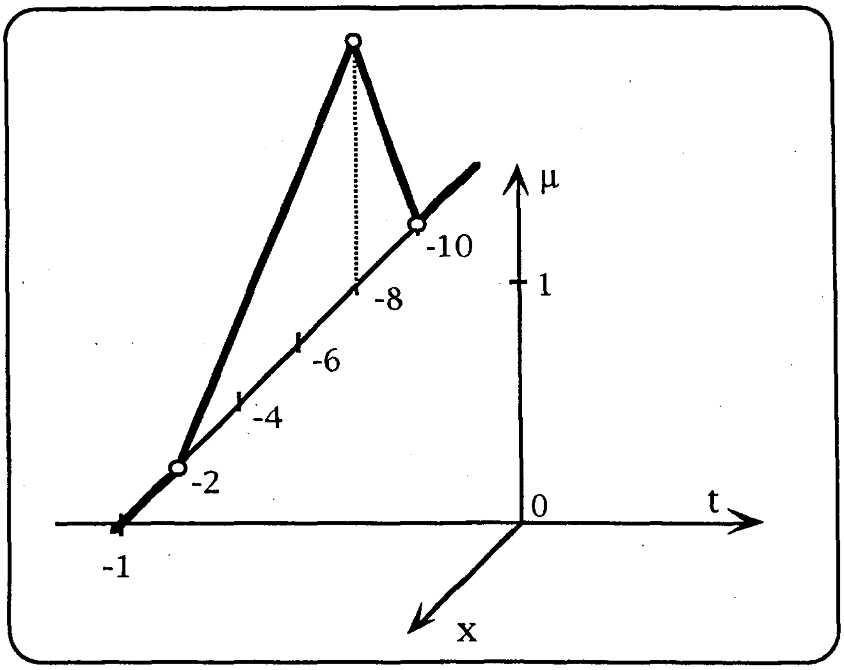


Fig.5.3 Derivada de la funció borrosa per t=-1

5.1.3 TEOREMES DE DERIVACIÓ BORROSA

La triangularitat és una característica molt útil per la seva senzillesa. Els dos teoremes següents ens permeten determinar quan aquesta propietat es conserva per derivació i quan no.

TEOREMA 5.1. «Donada una funció borrosa $\tilde{f}$ triangular avaluada en un punt t_0, és a dir

$$\boxed{\tilde{f}(t_0)=(\, f_1(t_0),\, f_2(t_0),\, f_3(t_0)\,)} \qquad [5.2]$$

es verifiquen les dues condicions següents:

a) Si $\frac{df_1}{dt}(t_0) < \frac{df_2}{dt}(t_0) < \frac{df_3}{dt}(t_0)$ llavors la derivada en t_0 és

$$\frac{d\tilde{f}}{dt}(t_0) = \left(\frac{df_1}{dt}(t_0), \frac{df_2}{dt}(t_0), \frac{df_3}{dt}(t_0) \right)$$

b) Si $\frac{df_3}{dt}(t_0) < \frac{df_2}{dt}(t_0) < \frac{df_1}{dt}(t_0)$ llavors la derivada en t_0 és

$$\frac{d\tilde{f}}{dt}(t_0) = \left(\frac{df_3}{dt}(t_0), \frac{df_2}{dt}(t_0), \frac{df_1}{dt}(t_0) \right) .»$$

Demostració:

Demostrarem només l'apartat a), perquè la demostració de l'apartat b) es fa d'una forma similar.

Els α-talls del número borrós $\tilde{f}(t_0)=(f_1(t_0), f_2(t_0), f_3(t_0))$ vénen expressats per

$$\underline{f}(\alpha)(t_0)= f_1(t_0)+\alpha(f_2(t_0)-f_1(t_0))$$

$$\overline{f}(\alpha)(t_0)=f_3(t_0)-\alpha(f_3(t_0)-f_2(t_0))$$

o, equivalentment,

$$\underline{f}(\alpha)(t_0)= (1-\alpha).f_1(t_0) + \alpha.f_2(t_0)$$

$$\overline{f}(\alpha)(t_0)= (1-\alpha).f_3(t_0) + \alpha.f_2(t_0)$$

En conseqüència, tenim

$$\text{mín} \left\{ \frac{d\underline{f}(\alpha)}{dt}(t_0), \frac{d\overline{f}(\alpha)}{dt}(t_0) \right\} =$$

$$= \text{mín} \left\{ (1-\alpha).\frac{df_1}{dt}(t_0)+\alpha.\frac{df_2}{dt}(t_0) \,,\, (1-\alpha).\frac{df_3}{dt}(t_0)+\alpha.\frac{df_2}{dt}(t_0) \right\}$$

i també

$$\text{màx} \left\{ \frac{d\underline{f}(\alpha)}{dt}(t_0), \frac{d\overline{f}(\alpha)}{dt}(t_0) \right\} =$$

$$= \text{màx}\left\{ (1-\alpha).\frac{df_1}{dt}(t_0)+\alpha.\frac{df_2}{dt}(t_0)\ ,\ (1-\alpha).\frac{df_3}{dt}(t_0)+\alpha.\frac{df_2}{dt}(t_0) \right\}$$

Com que per hipòtesi

$$\frac{df_1}{dt}(t_0) < \frac{df_3}{dt}(t_0)$$

aleshores,

$$\text{mín}\left\{\frac{d\underline{f}(\alpha)}{dt}(t_0), \frac{d\bar{f}(\alpha)}{dt}(t_0)\right\} = (1-\alpha)\frac{df_1}{dt}(t_0) + \alpha\,\frac{df_2}{dt}(t_0)$$

$$\text{màx}\left\{\frac{d\underline{f}(\alpha)}{dt}(t_0), \frac{d\bar{f}(\alpha)}{dt}(t_0)\right\} = (1-\alpha)\frac{df_3}{dt}(t_0) + \alpha\,\frac{df_2}{dt}(t_0)$$

i, per tant,

$$\left(\frac{df}{dt}(t_0)\right)_\alpha = \left[(1-\alpha)\frac{df_1}{dt}(t_0) + \alpha\,\frac{df_2}{dt}(t_0)\ ,\ (1-\alpha)\frac{df_3}{dt}(t_0) + \alpha\,\frac{df_2}{dt}(t_0)\right]$$

Comprovem que es conserva la monotonia dels α-talls. Si $\alpha < \alpha'$, atès que per hipòtesi

$$\frac{df_2}{dt}(t_0) > \frac{df_1}{dt}(t_0)$$

tenim

$$\alpha\left(\frac{df_2}{dt}(t_0) - \frac{df_1}{dt}(t_0)\right) < \alpha'\left(\frac{df_2}{dt}(t_0) - \frac{df_1}{dt}(t_0)\right)$$

i, per tant,

$$\frac{df_1}{dt}(t_0)+\alpha\left(\frac{df_2}{dt}(t_0) - \frac{df_1}{dt}(t_0)\right) < \frac{df_1}{dt}(t_0)+\alpha'\left(\frac{df_2}{dt}(t_0) - \frac{df_1}{dt}(t_0)\right)$$

De la mateixa manera es demostra que

$$\frac{df_3}{dt}(t_0)-\alpha\left(\frac{df_3}{dt}(t_0) - \frac{df_2}{dt}(t_0)\right) > \frac{df_3}{dt}(t_0)-\alpha'\left(\frac{df_3}{dt}(t_0) - \frac{df_2}{dt}(t_0)\right)$$

Conseqüentment, la derivada de $\tilde{f}$ en el punt t_0 és el número borrós triangular

$$\frac{d\tilde{f}}{dt}(t_0) = \left(\frac{df_1}{dt}(t_0), \frac{df_2}{dt}(t_0), \frac{df_3}{dt}(t_0)\right) \quad \blacklozenge$$

TEOREMA 5.2. «Donada una funció borrosa $\tilde{f}$ triangular avaluada en un punt t_0, és a dir $\tilde{f}(t_0)=(f_1(t_0), f_2(t_0), f_3(t_0))$, es verifiquen les quatre condicions següents:

a) Si $\frac{df_3}{dt}(t_0) < \frac{df_1}{dt}(t_0) < \frac{df_2}{dt}(t_0)$ llavors la derivada en t_0 és el número borrós definit per la funció de pertinença

$$\mu_{\frac{d\tilde{f}}{dt}(t_0)}(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\frac{df_3}{dt}(t_0)}{\frac{df_2}{dt}(t_0)-\frac{df_3}{dt}(t_0)} & \text{si } \frac{df_3}{dt}(t_0) \le x \le \frac{df_2}{dt}(t_0) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

b) Si $\frac{df_2}{dt}(t_0) < \frac{df_1}{dt}(t_0) < \frac{df_3}{dt}(t_0)$ llavors la derivada en t_0 és el número borrós definit per la funció de pertinença

$$\mu_{\frac{d\tilde{f}}{dt}(t_0)}(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\frac{df_3}{dt}(t_0)}{\frac{df_2}{dt}(t_0)-\frac{df_3}{dt}(t_0)} & \text{si } \frac{df_2}{dt}(t_0) \le x \le \frac{df_3}{dt}(t_0) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

c) Si $\frac{df_1}{dt}(t_0) < \frac{df_3}{dt}(t_0) < \frac{df_2}{dt}(t_0)$ llavors la derivada en t_0 és el número borrós definit per la funció de pertinença

$$\mu_{\frac{d\tilde{f}}{dt}(t_0)}(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\frac{df_1}{dt}(t_0)}{\frac{df_2}{dt}(t_0)-\frac{df_1}{dt}(t_0)} & \text{si } \frac{df_1}{dt}(t_0) \le x \le \frac{df_2}{dt}(t_0) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

d) Si $\frac{df_2}{dt}(t_0) < \frac{df_3}{dt}(t_0) < \frac{df_1}{dt}(t_0)$ llavors la derivada en t_0 és el número borrós definit per la funció de pertinença

$$\mu_{\frac{d\tilde{f}(t_0)}{dt}}(x)=\begin{cases} \dfrac{x-\frac{df_1}{dt}(t_0)}{\frac{df_2}{dt}(t_0)-\frac{df_1}{dt}(t_0)} & \text{si } \frac{df_2}{dt}(t_0) \leq x \leq \frac{df_1}{dt}(t_0) \\ 0 & \text{altrament} \end{cases}$$

»

Demostració:

a) El conjunt format pels α-talls del número borrós triangular $\tilde{f}(t_0)=(f_1(t_0), f_2(t_0), f_3(t_0))$ té d'extrems

$$\underline{f}(\alpha)(t_0)= f_1(t_0)+\alpha(f_2(t_0)-f_1(t_0))$$

$$\overline{f}(\alpha)(t_0)=f_3(t_0)-\alpha(f_3(t_0)-f_2(t_0))$$

Calculem per quins x es verifica que

$$\left\{\alpha \,/\, \frac{df_\alpha}{dt}(t_0) = x\right\} \neq \emptyset$$

Atès que

$$x=\frac{df_1}{dt}(t_0)+\alpha\left[\frac{df_2}{dt}(t_0)-\frac{df_1}{dt}(t_0)\right]$$

o bé

$$x=\frac{df_3}{dt}(t_0)+\alpha\left[\frac{df_3}{dt}(t_0)-\frac{df_2}{dt}(t_0)\right]$$

resulta

$$\alpha=\frac{x-\frac{df_1}{dt}(t_0)}{\frac{df_2}{dt}(t_0)-\frac{df_1}{dt}(t_0)} \quad \text{o} \quad \alpha=\frac{x-\frac{df_3}{dt}(t_0)}{\frac{df_2}{dt}(t_0)-\frac{df_3}{dt}(t_0)}$$

En conseqüència,

$$0 \leq \frac{x-\frac{df_1}{dt}(t_0)}{\frac{df_2}{dt}(t_0)-\frac{df_1}{dt}(t_0)} \leq 1 \quad \text{o} \quad 0 \leq \frac{x-\frac{df_3}{dt}(t_0)}{\frac{df_2}{dt}(t_0)-\frac{df_3}{dt}(t_0)} \leq 1$$

De les desiguatats anteriors, resulta

$$\frac{df_1}{dt}(t_0) \leq x \leq \frac{df_2}{dt}(t_0) \qquad \text{o} \qquad \frac{df_3}{dt}(t_0) \leq x \leq \frac{df_2}{dt}(t_0)$$

Atès que

$$\frac{df_3}{dt}(t_0) \leq \frac{df_1}{dt}(t_0)$$

les dues desigualtats anteriors es poden expressar en la desigualtat única

$$\frac{df_3}{dt}(t_0) \leq x \leq \frac{df_2}{dt}(t_0)$$

Per tant, per a tot $x \in R$ tal que verifiqui la desigualtat anterior, el conjunt

$$\left\{ \alpha \ / \ \frac{df_\alpha}{dt}(t_0)=x \right\} \neq \varnothing$$

Així, doncs,

$$\sup \left\{ \alpha \ / \ \frac{df_1}{dt}(t_0)+\alpha.\left[\frac{df_2}{dt}(t_0) - \frac{df_1}{dt}(t_0)\right]=x \quad \text{o bé} \right.$$

$$\left. \frac{df_3}{dt}(t_0)+\alpha.\left[\frac{df_3}{dt}(t_0) - \frac{df_2}{dt}(t_0)\right]=x \right\} =$$

$$= \frac{x - \frac{df_3}{dt}(t_0)}{\frac{df_2}{dt}(t_0) - \frac{df_3}{dt}(t_0)}$$

En efecte, només cal observar que

$$x \leq \frac{df_2}{dt}(t_0)$$

és equivalent a les següents expressions

$$\left[\frac{df_1}{dt}(t_0) - \frac{df_3}{dt}(t_0)\right].x \leq \frac{df_2}{dt}(t_0).\left[\frac{df_1}{dt}(t_0) - \frac{df_3}{dt}(t_0)\right]$$

$$\left[\frac{df_1}{dt}(t_0)- \frac{df_3}{dt}(t_0)+ \frac{df_2}{dt}(t_0)- \frac{df_2}{dt}(t_0)\right].x \leq \frac{df_2}{dt}(t_0).\left[\frac{df_1}{dt}(t_0)- \frac{df_3}{dt}(t_0)\right]$$

$$\left[\frac{df_2}{dt}(t_0)- \frac{df_3}{dt}(t_0)\right].x - \left[\frac{df_2}{dt}(t_0)- \frac{df_1}{dt}(t_0)\right].x \leq$$

$$\leq \frac{df_2}{dt}(t_0).\frac{df_1}{dt}(t_0) - \frac{df_2}{dt}(t_0).\frac{df_3}{dt}(t_0)$$

$$\left[\frac{df_2}{dt}(t_0)-\frac{df_3}{dt}(t_0)\right].x-\frac{df_2}{dt}(t_0).\frac{df_1}{dt}(t_0)\le$$
$$\le\left[\frac{df_2}{dt}(t_0)-\frac{df_1}{dt}(t_0)\right].x-\frac{df_2}{dt}(t_0).\frac{df_3}{dt}(t_0)$$

$$\left[\frac{df_2}{dt}(t_0)-\frac{df_3}{dt}(t_0)\right].x-\frac{df_2}{dt}(t_0).\frac{df_1}{dt}(t_0)+\frac{df_1}{dt}(t_0).\frac{df_3}{dt}(t_0)\le$$
$$\le\left[\frac{df_2}{dt}(t_0)-\frac{df_1}{dt}(t_0)\right].x-\frac{df_2}{dt}(t_0).\frac{df_3}{dt}(t_0)+\frac{df_1}{dt}(t_0).\frac{df_3}{dt}(t_0)$$

$$\left[\frac{df_2}{dt}(t_0)-\frac{df_3}{dt}(t_0)\right].x-\frac{df_1}{dt}(t_0).\left[\frac{df_2}{dt}(t_0)-.\frac{df_3}{dt}(t_0)\right]\le$$
$$\le\left[\frac{df_2}{dt}(t_0)-\frac{df_1}{dt}(t_0)\right].x-\frac{df_3}{dt}(t_0).\left[\frac{df_2}{dt}(t_0)-.\frac{df_1}{dt}(t_0)\right]$$

$$\left[\frac{df_2}{dt}(t_0)-\frac{df_3}{dt}(t_0)\right].\left(x-\frac{df_1}{dt}(t_0)\right)\le$$
$$\le\left[\frac{df_2}{dt}(t_0)-\frac{df_1}{dt}(t_0)\right].\left(x-\frac{df_3}{dt}(t_0)\right)$$

Finalment, deduïm que

$$\frac{x-\dfrac{df_1}{dt}(t_0)}{\dfrac{df_2}{dt}(t_0)-\dfrac{df_1}{dt}(t_0)}\le\frac{x-\dfrac{df_3}{dt}(t_0)}{\dfrac{df_2}{dt}(t_0)-\dfrac{df_3}{dt}(t_0)}$$

Anàlogament es demostren els apartats b), c) i d) ◆

5.2. EQ. DIFERENCIALS BORROSES TRIANGULARS

5.2.1 DEFINICIÓ

Anomenem *equació diferencial borrosa triangular* a una equació del tipus

$$\boxed{\frac{d\tilde{y}}{dt}(t)=\tilde{f}(t,\tilde{y}) \quad \text{amb} \quad \tilde{y}(0)=\tilde{y}_0} \qquad [5.3]$$

on $\forall\, t \geq 0$ $\tilde{f}(t,\tilde{y})$ i $\tilde{y}(t)$ són NBT.

5.2.2 RESOLUCIÓ D'EQUACIONS DIFERENCIALS BORROSES TRIANGULARS DE SEGON TERME CONSTANT

Una *equació diferencial borrosa triangular de segon terme* constant és una equació del tipus

$$\boxed{\frac{d\tilde{y}}{dt}=\tilde{a} \qquad \text{amb la condició inicial } \tilde{y}(0)=\tilde{y}_0} \qquad [5.4]$$

on $\tilde{a}=(a_1, a_2, a_3)$ i $\tilde{y}_0=(y_{01}, y_{02}, y_{03})$ són dos números borrosos triangulars donats.

El problema en estudi serà trobar una funció borrosa triangular

$$\tilde{y}(t)=\left(y_1(t), y_2(t), y_3(t)\right)$$

que verifiqui l'equació diferencial borrosa anterior.

Siguin $Y_\alpha(t)=\left[\underline{Y}(\alpha)(t)\ ,\ \overline{Y}(\alpha)(t)\right]$ els α-talls del número borrós $\tilde{y}(t)$. Aleshores, els α-talls de la derivada són

$$\left(\frac{dY}{dt}(t)\right)_\alpha=\left[\ \text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t),\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right),\ \text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t),\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right)\right]$$

Subtituïnt en l'equació diferencial i igualant els α-talls tindrem

$$\boxed{\left(\frac{dY}{dt}(t)\right)_\alpha=\left[\ a_1+\alpha.(a_2-a_1)\ ,\ a_3-\alpha.(a_3-a_2)\ \right]} \qquad [5.5]$$

on es verifica que

$$\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t), \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right) = a_1+\alpha.(a_2-a_1)$$

$$\text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t), \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right) = a_3-\alpha.(a_3-a_2)$$

Efectuem l'estudi de les DUES POSSIBILITATS següents:

a) $\boxed{\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t) < \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)}$

Com que

$$\left[\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right] = \left[a_1+\alpha\,(a_2-a_1)\ ,\ a_3-\alpha\,(a_3-a_2)\right]$$

deduïm que

$$\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t) = a_1+\alpha\,(a_2-a_1) \quad \text{i} \quad \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t) = a_3-\alpha\,(a_3-a_2)$$

Per tant, integrant

$$\underline{Y}(\alpha)(t)= \left(a_1+\alpha\,(a_2-a_1)\right)t + C_1(\alpha) \quad \text{i} \quad \overline{Y}(\alpha)(t)= \left(a_3-\alpha\,(a_3-a_2)\right)t + C_2(\alpha)$$

Pel cas particular de t=0 és

$$\underline{Y}(\alpha)(0)= C_1(\alpha) \quad \text{i} \quad \overline{Y}(\alpha)(0)= C_2(\alpha)$$

Conseqüentment, per la condició inicial,

$$C_1(\alpha)=y_{01}+\alpha\,(y_{02}-y_{01}) \qquad \text{i} \qquad C_2(\alpha)=y_{03}-\alpha\,(y_{03}-y_{02})$$

És a dir,

$$\underline{Y}(\alpha)(t)= \left(a_1+\alpha\,(a_2-a_1)\right)t +y_{01}+\alpha\,(y_{02}-y_{01})$$

$$\overline{Y}(\alpha)(t)= \left(a_3-\alpha\,(a_3-a_2)\right)t +y_{03}-\alpha\,(y_{03}-y_{02})$$

Finalment, la funció borrosa és

$$\boxed{\tilde{y}(t)=(a_1t+y_{01},\ a_2t+y_{02},\ a_3t+y_{03})} \qquad [5.6]$$

b) $\boxed{\frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t) < \frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)}$

Com que

$$\left[\frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right] = [a_1+\alpha\,(a_2-a_1)\ ,\ a_3-\alpha\,(a_3-a_2)]$$

resulta

$$\frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t) = a_1+\alpha\,(a_2-a_1) \quad \text{i} \quad \frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t) = a_3-\alpha\,(a_3-a_2)$$

Integrant les dues equacions diferencials anteriors, obtindrem els extrems de la funció borrosa

$$\overline{Y}(\alpha)=[a_1+\alpha.(a_2-a_1)].t + C_1(\alpha)$$

$$\underline{Y}(\alpha)=[a_3-\alpha.(a_3-a_2)].t + C_2(\alpha)$$

Pel cas particular de t=0

$$\overline{Y}(\alpha)(0) = C_1(\alpha) \quad \text{i} \quad \underline{Y}(\alpha)(0) = C_2(\alpha)$$

Imposant la condició inicial,

$$C_1(\alpha)= y_{03}-\alpha\,(y_{03}-y_{02}) \quad \text{i} \quad C_2\,(\alpha)= y_{01}+\alpha\,(y_{02}-y_{01})$$

És a dir,

$$\underline{Y}(\alpha)(t)= [a_3-\alpha.(a_3-a_2)].t + y_{01}+\alpha.(y_{02}-y_{01})$$

$$\overline{Y}(\alpha)(t)= [a_1+\alpha.(a_2-a_1)].t + y_{03}-\alpha.(y_{03}-y_{02})$$

Si imposem la condició que sigui una funció borrosa triangular, cal que és verifiquin les desigualtats

$$a_3t+y_{01} < a_2t+y_{02} < a_1t+y_{03}$$

d'on obtenim

$$t < \frac{y_{02}-y_{01}}{a_3-a_2} \quad \text{i} \quad t < \frac{y_{03}-y_{02}}{a_2-a_1}$$

Prenent

$$t_1=\frac{y_{02}-y_{01}}{a_3-a_2} \qquad t_2=\frac{y_{03}-y_{02}}{a_2-a_1} \qquad \text{i} \qquad t_3=\text{mín}\{t_1\,,\,t_2\}$$

aleshores $\forall\, t<t_3$ la solució de l'equació borrosa és la funció borrosa triangular

$$\boxed{\tilde{y}(t)=(a_3t+y_{01},\ a_2t+y_{02}\ ,\ a_1t+y_{03})} \qquad [5.6]$$

5.2.3 RESOLUCIÓ D'EQUACIONS DIFERENCIALS BORROSES TRIANGULARS LINEALS HOMOGÈNIES AMB COEFICIENTS CONSTANTS

Una *equació diferencial borrosa triangular lineal homogènia amb coeficients constants* és una equació del tipus

$$\boxed{\frac{d\tilde{y}}{dt}=a.\tilde{y} \qquad \text{amb la condició inicial } \tilde{y}(0)=\tilde{y}_0} \qquad [5.7]$$

on a és un nombre real diferent de zero i $\tilde{y}_0$ el número borrós triangular $\tilde{y}_0=(y_{01}, y_{02}, y_{03})$.

El problema consisteix en trobar una funció borrosa triangular

$$\tilde{y}(t)=(y_1(t),\ y_2(t),\ y_3(t))$$

que verifiqui l'equació diferencial borrosa anterior.

Siguin els α-talls del número borrós $\tilde{y}(t)$ expressats per

$$Y_\alpha(t)=\left[\underline{Y}(\alpha)(t),\ \overline{Y}(\alpha)(t)\right]$$

aleshores sabem que els α-talls de la derivada són

$$\left(\frac{dY}{dt}(t)\right)_\alpha=\left[\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right),\ \text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right)\right]$$

Cal considerar **DOS CASOS**:

1) PRIMER CAS: $\boxed{a>0}$

L'equació diferencial borrosa és

$$\left[\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right),\ \text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right)\right] =$$
$$= a.\left[\underline{Y}(\alpha)(t)\ ,\ \overline{Y}(\alpha)(t)\right]$$

Com que a és positiu,

$$\left[\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right),\ \text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right)\right] =$$
$$= \left[a.\underline{Y}(\alpha)(t)\ ,\ a.\overline{Y}(\alpha)(t)\right]$$

Igualant les components,

$$\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right) = a.\underline{Y}(\alpha)(t)$$

$$\text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right) = a.\overline{Y}(\alpha)(t)$$

Dins el cas 1) es presenten els **DOS SUBCASOS** següents:

1.a) PRIMER SUBCAS: $\boxed{\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t) < \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)}$

Aleshores resulta que

$$\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right) = \frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)$$

$$\text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right) = \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)$$

És a dir, obtenim les dues equacions diferencials

$$\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t) = a\underline{Y}(\alpha)(t) \qquad \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t) = a\overline{Y}(\alpha)(t)$$

Resolent aquestes dues equacions diferencials de variables separades tenim

$$\underline{Y}(\alpha)(t)= C_1(\alpha)\, e^{at} \qquad \overline{Y}(\alpha)(t)= C_2\,(\alpha)\, e^{at}$$

Per t=0 obtenim les constants

$$\underline{Y}_0(\alpha)= C_1(\alpha) \qquad \overline{Y}_0(\alpha)= C_2\,(\alpha)$$

i, per tant, la solució de l'equació diferencial és el número borrós definit pels seus α-talls

$$Y_\alpha = \left[\underline{Y}_0(\alpha)\, e^{at}\ ,\ \overline{Y}_0(\alpha)\, e^{at}\right]$$

Atès que

$$\underline{Y}_0(\alpha) = y_{01}+\alpha\,(y_{02}-y_{01}) \quad \text{i} \quad \overline{Y}_0(\alpha) = y_{03}-\alpha\,(y_{03}-y_{02})$$

llavors la solució de l'equació diferencial és el número borrós triangular

$$\boxed{\tilde{y}(t)= \left(y_{01}e^{at},\ y_{02}\, e^{at}\ ,\ y_{03}e^{at}\right)} \qquad [5.8]$$

1.b) SEGON SUBCAS: $\boxed{\dfrac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t) < \dfrac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)}$

Aleshores resulta que

$$\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right) = \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)$$

$$\text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right) = \frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)$$

I així, obtenim les dues equacions diferencials

$$\frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t) = a\underline{Y}(\alpha)(t) \quad \text{i} \quad \frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t) = a\overline{Y}(\alpha)(t)$$

Sumant i restant les dues equacions anteriors, tenim

$$\frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t) + \frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t) = a.\underline{Y}(\alpha)(t) + a.\overline{Y}(\alpha)(t)$$

$$\frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t) - \frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t) = a.\underline{Y}(\alpha)(t) - a.\overline{Y}(\alpha)(t)$$

Traient factor comú,

$$\frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t) + \frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t) = a.\left(\underline{Y}(\alpha)(t) + \overline{Y}(\alpha)(t)\right)$$

$$\frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t) - \frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t) = a.\left(\underline{Y}(\alpha)(t) - \overline{Y}(\alpha)(t)\right)$$

Fent els canvis de variable

$$\boxed{Z(\alpha)(t) = \overline{Y}(\alpha)(t) + \underline{Y}(\alpha)(t)} \qquad [5.9]$$

$$\boxed{T(\alpha)(t) = \overline{Y}(\alpha)(t) - \underline{Y}(\alpha)(t)} \qquad [5.10]$$

obtenim novament dues equacions diferencials de variables separades

$$\frac{dZ(\alpha)}{dt}(t) = a\ Z(\alpha)(t) \qquad \text{i} \qquad \frac{dT(\alpha)}{dt}(t) = -a\ T(\alpha)(t)$$

Si les resolem ens donaran

$$Z(\alpha)=C_1(\alpha)\ e^{at} \qquad \text{i} \qquad T(\alpha)=C_2\ (\alpha)\ e^{-at}$$

Desfent els canvis [5.9] i [5.10] deduïm que

$$\overline{Y}(\alpha)(t) + \underline{Y}(\alpha)(t) = C_1(\alpha).e^{a.t}$$

$$\overline{Y}(\alpha)(t) - \underline{Y}(\alpha)(t) = C_2(\alpha).e^{-a.t}$$

Sumant i restant aquestes dues equacions,

$$2.\overline{Y}(\alpha)(t) = C_1(\alpha).e^{a.t} + C_2(\alpha).e^{-a.t}$$

$$2.\underline{Y}(\alpha)(t) = C_1(\alpha).e^{a.t} - C_2(\alpha).e^{-a.t}$$

En conseqüència, els extrems inferior i superior són

$$\overline{Y}(\alpha)(t) = \frac{1}{2}\left[C_1(\alpha).e^{a.t} + C_2(\alpha).e^{-a.t}\right]$$

$$\underline{Y}(\alpha)(t) = \frac{1}{2}\left[C_1(\alpha).e^{a.t} - C_2(\alpha).e^{-a.t}\right]$$

Imposant la condició inicial t=0, obtenim el sistema de dues equacions i dues incògnites

$$\begin{cases} \overline{Y}_0(\alpha) = \frac{1}{2}[C_1(\alpha) + C_2(\alpha)] \\ \underline{Y}_0(\alpha) = \frac{1}{2}[C_1(\alpha) - C_2(\alpha)] \end{cases}$$

Directament, sumant i restant les dues expressions anteriors, veiem que les constants valen

$$C_1(\alpha) = \overline{Y}_0(\alpha) + \underline{Y}_0(\alpha) \quad \text{i} \quad C_2(\alpha) = \overline{Y}_0(\alpha) - \underline{Y}_0(\alpha)$$

Per tant, la solució de l'equació diferencial serà el número borrós definit pels seus α-talls

$$Y_\alpha = \left[\underline{Y}(\alpha), \overline{Y}(\alpha)\right]$$

on els dos extrems són

$$\boxed{\underline{Y}(\alpha) = \frac{1}{2}\left[\left(\overline{Y}_0(\alpha)+\underline{Y}_0(\alpha)\right).e^{a.t} - \left(\overline{Y}_0(\alpha)-\underline{Y}_0(\alpha)\right).e^{-a.t}\right]} \qquad [5.11]$$

$$\boxed{\overline{Y}(\alpha) = \frac{1}{2}\left[\left(\overline{Y}_0(\alpha)+\underline{Y}_0(\alpha)\right).e^{a.t} + \left(\overline{Y}_0(\alpha)-\underline{Y}_0(\alpha)\right).e^{-a.t}\right]} \qquad [5.12]$$

Atès que $\tilde{y}_0$ és un número borrós triangular, tenim que els seus α-talls són

$$\underline{Y}_0(\alpha) = y_{01}+\alpha\,(y_{02}-y_{01}) \quad \text{i} \quad \overline{Y}_0(\alpha) = y_{03}-\alpha\,(y_{03}-y_{02})$$

i per tant

$$\overline{Y}_0(\alpha) + \underline{Y}_0(\alpha) = (y_{03}+y_{01}) + \alpha.(2.y_{02}-y_{03}-y_{01})$$

$$\overline{Y}_0(\alpha) - \underline{Y}_0(\alpha) = (y_{03}-y_{01}) - \alpha.(y_{03}-y_{01})$$

Substituint en [5.11] i [5.12], els extrems de Y_α seran

$$\underline{Y}(\alpha) = \frac{1}{2}\Big[\big((y_{03}+y_{01})+\alpha.(2.y_{02}-y_{03}-y_{01}) \big).e^{a.t} -$$

$$- \big((y_{03}-y_{01})-\alpha.(y_{03}-y_{01})\big).e^{-a.t}\Big]$$

$$\overline{Y}(\alpha) = \frac{1}{2}\Big[\big((y_{03}+y_{01})+\alpha.(2.y_{02}-y_{03}-y_{01}) \big).e^{a.t} +$$

$$+ \big((y_{03}-y_{01})-\alpha.(y_{03}-y_{01})\big).e^{-a.t}\Big]$$

Emprant els casos en què $\alpha=0$ i $\alpha=1$ ens resulta el número triangular borrós

$$\boxed{\tilde{y}(t) = (m, n, p)} \qquad [5.13]$$

on els valors de m, n i p són

$$\boxed{m = \frac{1}{2}\Big[(y_{03}+y_{01}).e^{a.t} - \big((y_{03}-y_{01})\big).e^{-a.t} \Big]} \qquad [5.14]$$

$$\boxed{n = y_{02}.e^{a.t}} \qquad [5.15]$$

$$\boxed{p = \frac{1}{2}\Big[(y_{03}+y_{01}).e^{a.t} + \big((y_{03}-y_{01})\big).e^{-a.t} \Big]} \qquad [5.16]$$

Una vegada obtinguda la solució [5.13], calculem per quins valors de t, $\tilde{y}(t)$ és un número borrós triangular, és a dir per a quins valors de t es verifiquen les desigualtats

$$m < n < p$$

Observem que la primera desigualtat

$$\frac{1}{2}\Big[(y_{03}+y_{01}).e^{a.t} - \big((y_{03}-y_{01})\big).e^{-a.t} \Big] < y_{02}.e^{a.t}$$

es pot escriure, després de multiplicar per $e^{a.t}$ i passar termes al primer membre, com

$$\boxed{(y_{03}+y_{01}-2y_{02})\ e^{2at} < y_{03}-y_{01}} \qquad [5.17]$$

Notem que si $y_{03}+y_{01}-2.y_{02}\leq 0$, la desigualtat anterior es verifica per tot $t\geq 0$, mentre que si $y_{03}+y_{01}-2.y_{02}>0$, la desigualtat es compleix per els valors de t tals que

$$t< \frac{1}{2a}.Ln\left(\frac{y_{03}-y_{01}}{y_{03}+y_{01}-2.y_{02}}\right)$$

Quant a la segona desigualtat,

$$y_{02}.e^{a.t}<\frac{1}{2}[\,(y_{03}+y_{01}).e^{a.t}+((y_{03}-y_{01})).e^{-a.t}\,]$$

podem escriure, efectuant les mateixes operacions que en la primera desigualtat,

$$\boxed{(2y_{02}-y_{03}-y_{01})\ e^{2at} < y_{03}-y_{01}} \qquad [5.18]$$

Notem que si $2.y_{02}-y_{03}-y_{01}\leq 0$, la desigualtat anterior es verifica per tot $t\geq 0$, mentre que si $2.y_{02}-y_{03}-y_{01}>0$ es compleix pels valors de t tals que

$$t<\frac{1}{2a}.Ln\left(\frac{y_{03}-y_{01}}{2.y_{02}-y_{03}-y_{01}}\right)$$

En qualsevol cas existirà un interval de temps, $[0,\ t_1)$ o $[0,\ t_2)$, en el qual la solució existirà.

Fixem-nos que la borrositat de la solució del primer subcas, [5.8], és superior a la del segon, [5.13].

En efecte, provem primer que l'extrem inferior de [5.8], $y_{01}.e^{at}$, és menor que l'extrem inferior de [5.13], m, observant que es compleixen les equivalències següents, on $t\geq 0$,

$$e^{a.t}\geq e^{-a.t} \quad , \quad (y_{03}-y_{01}).e^{a.t}\geq (y_{03}-y_{01}).e^{-a.t} \quad ,$$

$$(y_{03}+y_{01}-2.y_{01}).e^{a.t}\geq (y_{03}-y_{01}).e^{-a.t} \quad ,$$

$$(y_{03}+y_{01}).e^{a.t}-2.y_{01}.e^{a.t}\geq (y_{03}-y_{01}).e^{-a.t} \quad ,$$

$$(y_{03}+y_{01}).e^{a.t}-(y_{03}-y_{01}).e^{-a.t}\geq 2.y_{01}.e^{a.t} \quad ,$$

$$y_{01}.e^{a.t} \leq \frac{1}{2}\left[(y_{03}+y_{01}).e^{a.t} - (y_{03}-y_{01}).e^{-a.t} \right] \quad , \quad y_{01}.e^{a.t} \leq m \quad \blacklozenge$$

D'altra banda, també es compleix que l'extrem superior de [5.8], $y_{03}.e^{at}$, és més gran que l'extrem superior de [5.13], p. En efecte, comprovem que es compleixen les equivalències següents, on el valor de t és positiu, $t \geq 0$,

$$e^{a.t} \geq e^{-a.t} \quad , \quad (y_{03}-y_{01}).e^{a.t} \geq (y_{03}-y_{01}).e^{-a.t} \quad ,$$

$$(2.y_{03}-y_{03}-y_{01}).e^{a.t} \geq (y_{03}-y_{01}).e^{-a.t} \quad ,$$

$$2.y_{03}.e^{a.t}-(y_{03}+y_{01}).e^{a.t} \geq (y_{03}-y_{01}).e^{-a.t} \quad ,$$

$$2.y_{03}.e^{a.t} \geq (y_{03}+y_{01}).e^{a.t} + (y_{03}-y_{01}).e^{-a.t} \quad ,$$

$$y_{03}.e^{a.t} \geq \frac{1}{2}\left[(y_{03}+y_{01}).e^{a.t} + (y_{03}-y_{01}).e^{-a.t}\right] \quad , \quad y_{03}.e^{a.t} \geq p \quad \blacklozenge$$

Exemple

Considerem l'equació diferencial

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = 2\tilde{y} \quad \text{amb la condició inicial } \tilde{y}(0)=(1,2,5)$$

Siguin

$$Y_\alpha(t) = \left[\underline{Y}(\alpha)(t),\ \overline{Y}(\alpha)(t)\right]$$

els α-talls del número borrós $\tilde{y}(t)$.

Aleshores, els α-talls de la derivada són

$$\left(\frac{dY}{dt}\right)_\alpha = \left[\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}, \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}\right), \text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}, \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}\right)\right]$$

Subtituint en l'equació diferencial tenim

$$\left[\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}, \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}\right), \text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}, \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}\right)\right] = 2.\left[\underline{Y}(\alpha)\ ,\ \overline{Y}(\alpha)\right]$$

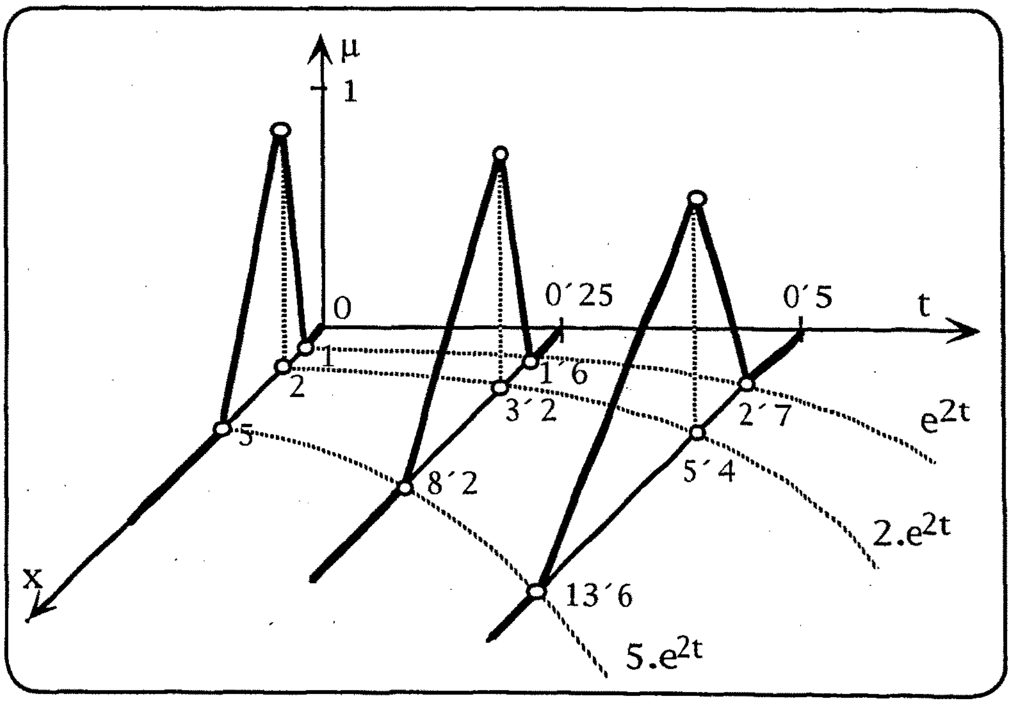
1.a) PRIMER SUBCAS: $\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t) < \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)$

Aleshores la solució és

$$Y_\alpha(t) = \left[(1+\alpha)\, e^{2t}\ ,\ (5-3\alpha)\, e^{2t}\right]$$

i el número borrós triangular ve expressat per

$$\tilde{y}(t)=(e^{2t}\ ,\ 2e^{2t}\ ,\ 5e^{2t})$$



1.b) SEGON SUBCAS: $\frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t) < \frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)$

Obtenim ara la solució

$$Y_\alpha(t)=\left[\frac{1}{2}(6-2\alpha)e^{2t}-\frac{1}{2}(4-4\alpha)e^{-2t}\ ,\ \frac{1}{2}(6-2\alpha)e^{2t}+\frac{1}{2}(4-4\alpha)e^{-2t}\right]$$

i també el número borrós triangular

$$\tilde{y}(t) = \left(3e^{2t}\ -2e^{-2t}\ ,\ 2e^{2t}\ ,\ 3e^{2t}\ +2e^{-2t}\right)$$

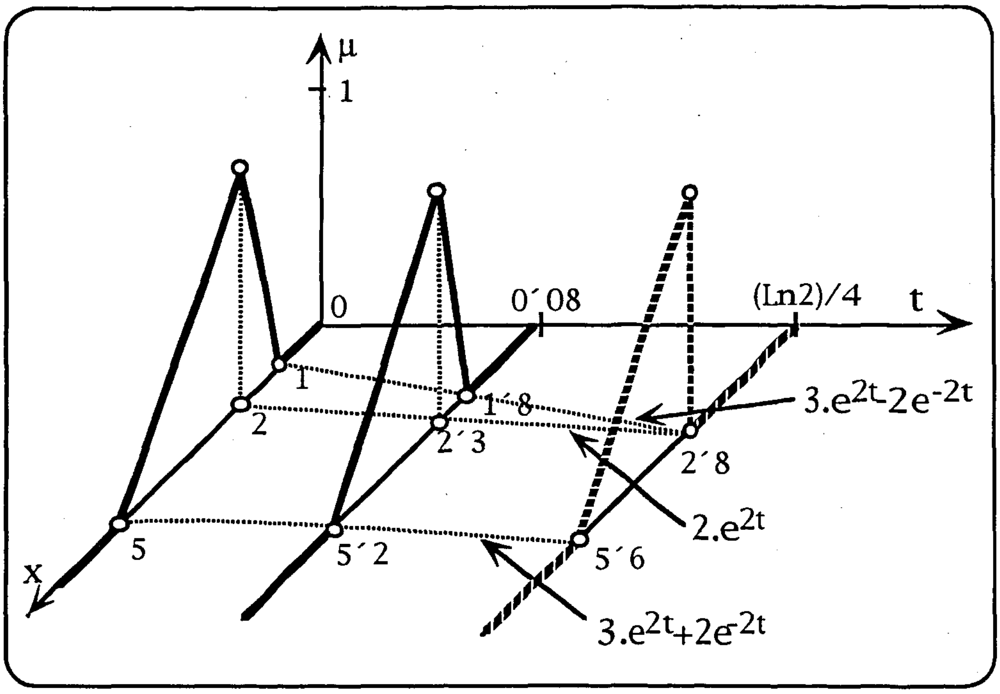
Hem de tenir en compte que s'han de verificar les desigualtats

$$3e^{2t} - 2e^{-2t} < 2e^{2t} \qquad \text{per } \ t < \frac{1}{4}\ln 2$$

$$2e^{2t} < 3e^{2t}+2e^{-2t} \qquad \text{per tot } \ t \geq 0$$

Aleshores existeix solució de l'equació diferencial en l'interval

$$\left[0\,,\frac{1}{4}\ln 2\right)$$



Comprovem que les dues solucions de $\tilde{y}(t)$ compleixen l'equació diferencial donada, aplicant el Teorema 5.1:

1.a) La derivada de $\tilde{y}(t)=(e^{2t},\ 2e^{2t},\ 5e^{2t})$ ve expressada per

$$\frac{d\tilde{y}}{dt}=\left(2e^{2t},\ 4e^{2t},\ 10e^{2t}\right)$$

i, per tant,

$$\frac{d\tilde{y}}{dt}=\left(2e^{2t},\ 4e^{2t},\ 10e^{2t}\right)=2\left(e^{2t},\ 2e^{2t},\ 5e^{2t}\right)=2\tilde{y}$$

1.b) La derivada de $\tilde{y}(t)=(3e^{2t}-2e^{2t},\ 2e^{2t},\ 3e^{2t}+2e^{2t})$ és

$$\frac{d\tilde{y}}{dt}=\left(6e^{2t}-4e^{-2t},\ 4e^{2t},\ 6e^{2t}+4e^{-2t}\right)$$

i per tant

$$\frac{d\tilde{y}}{dt}=\left(6e^{2t}-4e^{-2t},\ 4e^{2t},\ 6e^{2t}+4e^{-2t}\right)=2\left(3e^{2t}-2e^{-2t},\ 2e^{2t},\ 3e^{2t}+2e^{-2t}\right)=2\tilde{y}$$

2) SEGON CAS: $\boxed{a<0}$

L'equació diferencial borrosa és

$$\left[\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right),\ \text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right)\right] =$$
$$= a.\left[\underline{Y}(\alpha)(t)\ ,\ \overline{Y}(\alpha)(t)\right]$$

Com que a és negatiu,

$$\left[\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right),\ \text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right)\right] =$$
$$= \left[a.\overline{Y}(\alpha)(t)\ ,\ a.\underline{Y}(\alpha)(t)\right]$$

Igualant les components,

$$\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right) = a.\overline{Y}(\alpha)(t)$$

$$\text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right) = a.\underline{Y}(\alpha)(t)$$

Dins el cas 2) també, de la mateixa manera que en el cas 1), es presenten els **DOS SUBCASOS** següents:

2.a) PRIMER SUBCAS: $\boxed{\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t) < \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)}$

Aleshores resulta que

$$\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right) = \frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)$$

$$\text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right) = \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)$$

És a dir, obtenim les dues equacions diferencials

$$\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt} = a\overline{Y}(\alpha) \qquad \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt} = a\underline{Y}(\alpha)$$

Operant de la mateixa manera que en el subcas 1.2) del cas anterior arribem a la solució

$$Y_\alpha = \left[\underline{Y}(\alpha),\ \overline{Y}(\alpha)\right]$$

on els dos extrems, amb a<0, són

$$\underline{Y}(\alpha) = \frac{1}{2}\left[\left(\overline{Y}_0(\alpha)+\underline{Y}_0(\alpha)\right).e^{a.t} - \left(\overline{Y}_0(\alpha)-\underline{Y}_0(\alpha)\right).e^{-a.t}\right]$$

$$\overline{Y}(\alpha) = \frac{1}{2}\left[\left(\overline{Y}_0(\alpha)+\underline{Y}_0(\alpha)\right).e^{a.t} + \left(\overline{Y}_0(\alpha)-\underline{Y}_0(\alpha)\right).e^{-a.t}\right]$$

Atès que $\tilde{y}_0$ és un número borrós triangular, tenim que els seus α-talls són

$$\underline{Y}_0(\alpha) = y_{01}+\alpha\,(y_{02}-y_{01}) \quad \text{i} \quad \overline{Y}_0(\alpha) = y_{03}-\alpha\,(y_{03}-y_{02})$$

i per tant

$$\overline{Y}_0(\alpha) + \underline{Y}_0(\alpha) = (y_{03}+y_{01}) + \alpha.(2.y_{02}-y_{03}-y_{01})$$

$$\overline{Y}_0(\alpha) - \underline{Y}_0(\alpha) = (y_{03}-y_{01}) - \alpha.(y_{03}-y_{01})$$

Substituint en $\underline{Y}(\alpha)$ i $\overline{Y}(\alpha)$, obtenim

$$\underline{Y}(\alpha) = \frac{1}{2}\Big[\big(\,(y_{03}+y_{01})+\alpha.(2.y_{02}-y_{03}-y_{01})\,\big).e^{a.t} - \big((y_{03}-y_{01})-\alpha.(y_{03}-y_{01})\big).e^{-a.t}\Big]$$

$$\overline{Y}(\alpha) = \frac{1}{2}\Big[\big(\,(y_{03}+y_{01})+\alpha.(2.y_{02}-y_{03}-y_{01})\,\big).e^{a.t} + \big((y_{03}-y_{01})-\alpha.(y_{03}-y_{01})\big).e^{-a.t}\Big]$$

Emprant els casos en què α=0 i α=1 ens resulta el número triangular borrós

$$\boxed{\tilde{y}(t) = (m,\ n,\ p)} \qquad [5.19]$$

on els valors de m, n i p són

$$\boxed{m = \frac{1}{2}\left[\,(y_{03}+y_{01}).e^{a.t} - \big((y_{03}-y_{01})\big).e^{-a.t}\,\right]} \qquad [5.20]$$

$$\boxed{n = y_{02}.e^{a.t}} \qquad [5.21]$$

$$\boxed{p = \frac{1}{2}.\left[(y_{03}+y_{01}).e^{a.t} + ((y_{03}-y_{01})).e^{-a.t} \right]} \qquad [5.22]$$

Una vegada obtinguda la solució [5.19], calculem per quins valors de t, $\tilde{y}(t)$ és un número borrós triangular, és a dir, per a quins valors de t es verifiquen les desigualtats

$$m < n < p$$

Observem que la primera desigualtat

$$\frac{1}{2}.\left[(y_{03}+y_{01}).e^{a.t} - ((y_{03}-y_{01})).e^{-a.t} \right] < y_{02}.e^{a.t}$$

es pot escriure, després de multiplicar per $e^{a.t}$, que és positiu malgrat a<0, i passar termes al primer membre, com

$$\boxed{(y_{03}+y_{01}-2y_{02})\ e^{2at} < y_{03}-y_{01}} \qquad [5.23]$$

Notem que si $y_{03}+y_{01}-2.y_{02}.\leq.0$, la desigualtat anterior es verifica per tot $t\geq0$, mentre que si $y_{03}+y_{01}-2.y_{02}.>.0$, la desigualtat es compleix per als valors de t tals que

$$t < \frac{1}{2a}.Ln\left(\frac{y_{03}-y_{01}}{y_{03}+y_{01}-2.y_{02}}\right)$$

Quant a la segona desigualtat,

$$y_{02}.e^{a.t} < \frac{1}{2}.\left[(y_{03}+y_{01}).e^{a.t} + ((y_{03}-y_{01})).e^{-a.t} \right]$$

podem escriure, efectuant les mateixes operacions que en la primera desigualtat,

$$\boxed{(2y_{02}-y_{03}-y_{01})\ e^{2at} < y_{03}-y_{01}} \qquad [5.24]$$

Notem que si $2.y_{02}-y_{03}-y_{01}.\leq.0$, la desigualtat anterior es verifica per tot $t\geq0$, mentre que si $2.y_{02}-y_{03}-y_{01}.>.0$ es compleix per als valors de t tals que, com que a<0,

$$t > \frac{1}{2a}.Ln\left(\frac{y_{03}-y_{01}}{2.y_{02}-y_{03}-y_{01}}\right)$$

Atès que sempre

$$\frac{1}{2a}.\mathrm{Ln}\left(\frac{y_{03}-y_{01}}{2.y_{02}-y_{03}-y_{01}}\right)<0$$

la desigualtat anterior, [5.24], es verificarà per a tot $t\geq 0$.

2.b) SEGON SUBCAS: $\boxed{\frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t) < \frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)}$

Aleshores resulta que

$$\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t),\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right)=\frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)$$

$$\text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t),\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right)=\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)$$

I com que es verifica

$$\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t),\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right)=a.\overline{Y}(\alpha)(t)$$

$$\text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t),\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right)=a.\underline{Y}(\alpha)(t)$$

Obtenim les dues equacions diferencials

$$\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}=a\underline{Y}(\alpha) \qquad \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}=a\overline{Y}(\alpha)$$

Resolent aquestes dues equacions diferencials de la mateixa manera que en l'apartat anterior tenim

$$Y_\alpha(t)=\left[\underline{Y}_0(\alpha)\, e^{at},\ \overline{Y}_0(\alpha)\, e^{at}\right]$$

Com que per les condicions inicials

$$\underline{Y}_0(\alpha)=y_{01}+\alpha\,(y_{02}-y_{01}) \quad \text{i} \quad \overline{Y}_0(\alpha)=y_{03}-\alpha\,(y_{03}-y_{02})$$

llavors la solució de l'equació diferencial és el número borrós triangular

$$\boxed{\tilde{y}(t)=\left(y_{01}e^{at},\ y_{02}\,e^{at},\ y_{03}e^{at}\right)} \qquad [5.25]$$

Fixem-nos que en aquest segon cas la borrositat de la solució del primer subcas, [5.19], és superior a la del segon, [5.25].

En efecte, provem primer que l'extrem inferior de [5.19], m, és menor que l'extrem inferior de [5.25], $y_{01}.e^{at}$, observant que es compleixen les equivalències següents, on $a<0$ i $t\geq 0$,

$$e^{a.t} \leq e^{-a.t} \quad , \quad (y_{03}-y_{01}).e^{a.t} \leq (y_{03}-y_{01}).e^{-a.t} \quad ,$$

$$(y_{03}+y_{01}-2.y_{01}).e^{a.t} \leq (y_{03}-y_{01}).e^{-a.t} \quad ,$$

$$(y_{03}+y_{01}).e^{a.t} -2.y_{01}.e^{a.t} \leq (y_{03}-y_{01}).e^{-a.t} \quad ,$$

$$(y_{03}+y_{01}).e^{a.t} -(y_{03}-y_{01}).e^{-a.t} \leq 2.y_{01}.e^{a.t} \quad ,$$

$$\frac{1}{2}.\left[(y_{03}+y_{01}).e^{a.t} -(y_{03}-y_{01}).e^{-a.t} \right] \leq y_{01}.e^{a.t} \quad , \quad m \leq y_{01}.e^{a.t} \quad \blacklozenge$$

D'altra banda també es compleix que l'extrem superior de [5.25], $y_{03}.e^{at}$, és més petit que l'extrem superior de [5.19], p. En efecte, comprovem que es compleixen les equivalències següents, on a és negatiu i el valor de t és positiu,

$$e^{a.t} \leq e^{-a.t} \quad , \quad (y_{03}-y_{01}).e^{a.t} \leq (y_{03}-y_{01}).e^{-a.t} \quad ,$$

$$(2.y_{03}-y_{03}-y_{01}).e^{a.t} \leq (y_{03}-y_{01}).e^{-a.t} \quad ,$$

$$2.y_{03}.e^{a.t}-(y_{03}+y_{01}).e^{a.t} \leq (y_{03}-y_{01}).e^{-a.t} \quad ,$$

$$2.y_{03}.e^{a.t} \leq (y_{03}+y_{01}).e^{a.t} + (y_{03}-y_{01}).e^{-a.t} \quad ,$$

$$y_{03}.e^{a.t} \leq \frac{1}{2}.\left[(y_{03}+y_{01}).e^{a.t} + (y_{03}-y_{01}).e^{-a.t}\right] \quad , \quad y_{03}.e^{a.t} \leq p \quad \blacklozenge$$

Exemple

Considerem l'equació diferencial

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = -2.\tilde{y} \quad \text{amb condició inicial} \quad \tilde{y}(0)=(1, 2, 5)$$

i siguin els α-talls del número borrós $\tilde{y}(t)$.

$$Y_\alpha(t)= \left[\underline{Y}(\alpha)(t), \overline{Y}(\alpha)(t)\right]$$

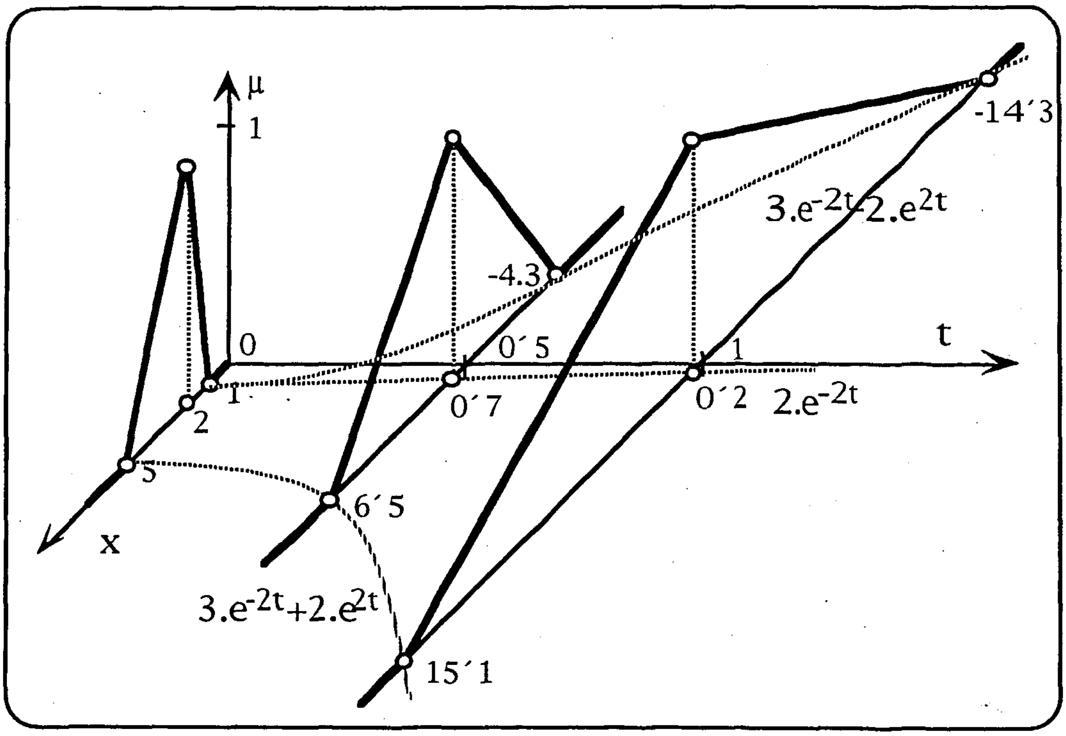
Aleshores, els α-talls de la derivada són

$$\left(\frac{dY}{dt}\right)_\alpha = \left[\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}, \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}\right), \text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}, \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}\right)\right]$$

Subtituint en l'equació diferencial tenim

$$\left[\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}, \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}\right), \text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}, \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}\right)\right] = -2.\left[\underline{Y}(\alpha), \overline{Y}(\alpha)\right]$$

2.a) PRIMER SUBCAS: $\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t) < \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)$



Aleshores la solució és

$$\tilde{y}(t) = (m, n, p)$$

on els valors de m, n i p són

$$m = \frac{1}{2}\left[(y_{03}+y_{01}).e^{a.t} - ((y_{03}-y_{01})).e^{-a.t}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(5+1).e^{-2.t} - ((5-1)).e^{2.t}\right] = 3.e^{-2.t} - 2.e^{2.t}$$

$$n = y_{02}.e^{a.t} = 2.e^{-2.t}$$

$$p = \frac{1}{2}\left[(y_{03}+y_{01}).e^{a.t} + \left((y_{03}-y_{01})\right).e^{-a.t} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[(5+1).e^{-2.t} + \left((5-1)\right).e^{2.t} \right] = 3.e^{-2.t} + 2.e^{2.t}$$

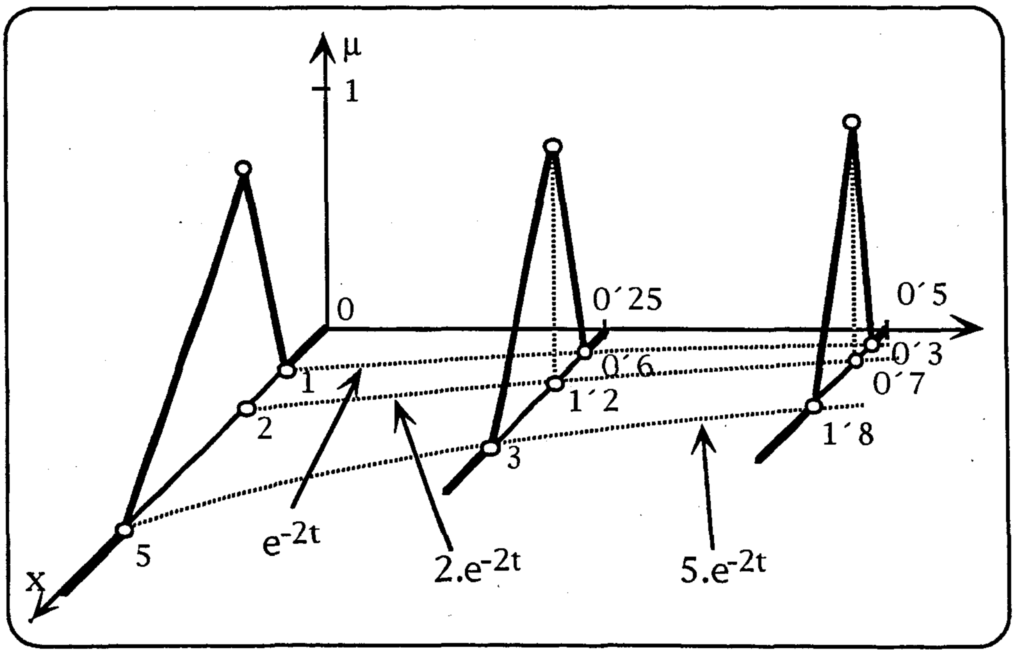
En resum, la solució borrosa triangular ve expressada per les exponencials

$$\tilde{y}(t) = \left(3.e^{-2.t}-2.e^{2.t} \ , \ 2.e^{-2.t} \ , \ 3.e^{-2.t}+2.e^{2.t}\right)$$

2.b) SEGON SUBCAS: $\frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t) < \frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)$

Tenint en compte [5.25], obtenim ara la solució

$$\tilde{y}(t) = \left(e^{-2.t} \ , \ 2.e^{-2.t} \ , \ 5.e^{-2.t}\right)$$



Observem que, degut a ser les exponencials decreixents, la solució $\tilde{y}(t)$ s'aproxima al valor nul.

5.2.4 RESOLUCIÓ D'EQUACIONS DIFERENCIALS BORROSES TRIANGULARS LINEALS COMPLETES AMB COEFICIENTS CONSTANTS

Una equació diferencial borrosa triangular lineal completa amb coeficients constants és una equació del tipus

$$\boxed{\frac{d\tilde{y}}{dt} = a.\tilde{y}+\tilde{b} \qquad \text{amb la condició inicial } \tilde{y}(0)=\tilde{y}_0} \qquad [5.26]$$

on $a \in R$, $\tilde{b}=(b_1, b_2, b_3)$ i $\tilde{y}_0=(y_{01}, y_{02}, y_{03})$

Siguin $Y_\alpha(t)=\left[\underline{Y}(\alpha)(t)\ ,\ \overline{Y}(\alpha)(t)\right]$ els α-talls del número borrós $\tilde{y}(t)$ i siguin $\tilde{b}_\alpha=\left[\underline{b}(\alpha)\ ,\ \overline{b}(\alpha)\right]$ els α-talls del número borrós $\tilde{b}$. Aleshores els α-talls de la derivada són

$$\left(\frac{dY}{dt}(t)\right)_\alpha = \left[\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right),\ \text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right)\right]$$

Subtituint en l'equació diferencial i igualant els α-talls, cal distingir dos casos segons que la “a” sigui positiva o negativa.

Tot seguit desenvoluparem únicament el cas $a>0$, perquè el $a<0$ es resol de manera similar.

1) PRIMER CAS: $\boxed{a>0}$

L'equació diferencial borrosa és

$$\left[\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right),\ \text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right)\right] =$$

$$= \left[a.\underline{Y}(\alpha)(t)+\underline{b}(\alpha)\ ,\ a.\overline{Y}(\alpha)(t)+\overline{b}(\alpha)\right]$$

Igualant les components,

$$\text{mín}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right) = a.\underline{Y}(\alpha)(t)+\underline{b}(\alpha)$$

$$\text{màx}\left(\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\ ,\ \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)\right) = a.\overline{Y}(\alpha)(t)+\overline{b}(\alpha)$$

Dins el cas 1) es presenten els **DOS SUBCASOS** següents:

1.a) PRIMER SUBCAS: $\boxed{\dfrac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t) < \dfrac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)}$

Aleshores resulta que

$$\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)=a\underline{Y}(\alpha)(t)+\underline{b}(\alpha) \quad \text{i} \quad \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)=a\overline{Y}(\alpha)(t)+\overline{b}(\alpha)$$

Resolent aquestes dues equacions lineals, obtenim els extrems inferior i superior dels α-talls de $Y_\alpha(t)$,

$$\underline{Y}(\alpha)(t)=\left[\underline{Y}_0(\alpha)+\frac{\underline{b}(\alpha)}{a}\right].e^{a.t}-\frac{\underline{b}(\alpha)}{a}$$

$$\overline{Y}(\alpha)(t)=\left[\overline{Y}_0(\alpha)+\frac{\overline{b}(\alpha)}{a}\right].e^{a.t}-\frac{\overline{b}(\alpha)}{a}$$

Imposant la condició inicial resulta el número borrós triangular

$$\boxed{\tilde{y}(t)=(m,\ n,\ p)} \qquad [5.27]$$

on els valors de m, n i p són

$$\boxed{m=\left(y_{01}+\frac{b_1}{a}\right).e^{a.t}-\frac{b_1}{a}} \qquad [5.28]$$

$$\boxed{n=\left(y_{02}+\frac{b_2}{a}\right).e^{a.t}-\frac{b_2}{a}} \qquad [5.29]$$

$$\boxed{p=\left(y_{03}+\frac{b_3}{a}\right).e^{a.t}-\frac{b_3}{a}} \qquad [5.30]$$

Efectivament, notem que per a tot $t>0$, i com que $b_1<b_2<b_3$, es verifica que $m<n<p$ i, per tant, $\tilde{y}(t)$ és ún número borrós triangular.

2.a) SEGON SUBCAS: $\boxed{\dfrac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t) < \dfrac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)}$

Tenim ara les igualtats

$$\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)=a\overline{Y}(\alpha)(t)+\overline{b}(\alpha) \quad \text{i} \quad \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)=a\underline{Y}(\alpha)(t)+\underline{b}(\alpha)$$

Sumant-les i restant-les

$$\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t) + \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t) = a.\left(\overline{Y}(\alpha)(t) + \underline{Y}(\alpha)\right) + \underline{b}(\alpha) + \overline{b}(\alpha)$$

$$\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t) - \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t) = a.\left(\overline{Y}(\alpha)(t) - \underline{Y}(\alpha)\right) + \underline{b}(\alpha) - \overline{b}(\alpha)$$

Fent a continuació els canvis de variables

$$Z(\alpha)(t)= \overline{Y}(\alpha)(t)+\underline{Y}(\alpha)(t) \quad T(\alpha)(t)= \overline{Y}(\alpha)(t)-\underline{Y}(\alpha)(t)$$

$$B_1(\alpha)=\underline{b}(\alpha)+\overline{b}(\alpha) \quad B_2(\alpha)=\underline{b}(\alpha)-\overline{b}(\alpha)$$

ens resulten les equacions diferencials

$$\frac{dZ(\alpha)}{dt}(t)=aZ(\alpha)(t)+B_1(\alpha) \qquad \frac{dT(\alpha)}{dt}(t)=aT(\alpha)(t)+B_2(\alpha)$$

Resolent-les, obtenim les expressions de $Z(\alpha)$ i $T(\alpha)$,

$$Z(\alpha)(t)= C_1(\alpha)\, e^{at} - \frac{B_1(\alpha)}{a} \qquad T(\alpha)(t)=C_2(\alpha)\, e^{at} - \frac{B_2(\alpha)}{a}$$

Desfent els canvis de variables efectuats

$$\overline{Y}(\alpha)(t)+\underline{Y}(\alpha)(t)= C_1(\alpha)\, e^{at} - \frac{\underline{b}(\alpha)+\overline{b}(\alpha)}{a}$$

$$\overline{Y}(\alpha)(t)-\underline{Y}(\alpha)(t)= C_2(\alpha)\, e^{at} - \frac{\underline{b}(\alpha)-\overline{b}(\alpha)}{a}$$

Restant i sumant, resulta

$$\underline{Y}(\alpha)(t)= \frac{1}{2}\left(C_1(\alpha)-C_2(\alpha)\right) e^{at} - \frac{\overline{b}(\alpha)}{a}$$

$$\overline{Y}(\alpha)(t)= \frac{1}{2}\left(C_1(\alpha)+C_2(\alpha)\right) e^{at} - \frac{\underline{b}(\alpha)}{a}$$

Pel cas particular de $t=0$, ens queda

$$\underline{Y}_0(\alpha) = \frac{C_1(\alpha)-C_2(\alpha)}{2} - \frac{\overline{b}(\alpha)}{a}$$

$$\overline{Y}_0(\alpha) = \frac{C_1(\alpha)+C_2(\alpha)}{2} - \frac{\underline{b}(\alpha)}{a}$$

Aïllant els termes $[C_1(\alpha)-C_2(\alpha)]/2$ i $[C_1(\alpha)+C_2(\alpha)]/2$ i substituint, obtenim els dos extrems dels α-talls de $Y_\alpha(t)$

$$\underline{Y}(\alpha)(t)=\left(\underline{Y}_0(\alpha)+\frac{\overline{b}(\alpha)}{a}\right)e^{at}-\frac{\overline{b}(\alpha)}{a}$$

$$\overline{Y}(\alpha)(t)=\left(\overline{Y}_0(\alpha)+\frac{\underline{b}(\alpha)}{a}\right)e^{at}-\frac{\underline{b}(\alpha)}{a}$$

El número borrós triangular

$$\boxed{\tilde{y}(t)=(m,\ n,\ p)} \qquad [5.31]$$

on els valors de m, n i p són ara

$$\boxed{m=\left(y_{01}+\frac{b_3}{a}\right).e^{a.t}-\frac{b_3}{a}} \qquad [5.32]$$

$$\boxed{n=\left(y_{02}+\frac{b_2}{a}\right).e^{a.t}-\frac{b_2}{a}} \qquad [5.33]$$

$$\boxed{p=\left(y_{03}+\frac{b_1}{a}\right).e^{a.t}-\frac{b_1}{a}} \qquad [5.34]$$

Estudiem si per a tot $t>0$, $\tilde{y}(t)$ és ún número borrós triangular. S'ha de verificar que $m<n<p$.

La primera desigualtat, $m<n$, es pot expressar com

$$[(a(y_{01}-y_{02}))+b_3-b_2]\,e^{at}<b_3-b_2$$

Observem que si el coeficient $a.(y_{01}-y_{02})+b_3-b_2\leq 0$, la desigualtat es verifica per tot $t\geq 0$.

En canvi, si $a(y_{01}-y_{02})+b_3-b_2>0$, la desigualtat es verifica per

$$\boxed{t<\frac{1}{a}\ln\left(\frac{b_3-b_2}{b_3-b_2+a(y_{01}-y_{02})}\right)} \qquad [5.35]$$

Quant a la segona desigualtat, $n<p$, la podem expresar com

$$[(a(y_{02}-y_{03}))+b_2-b_1]\,e^{at}<b_2-b_1$$

Observem que si $a.(y_{02}-y_{03})+b_2-b_1 \leq 0$, la desigualtat es verifica per tot $t \geq 0$.

En canvi, si $a.(y_{02}-y_{03})+b_2-b_1 > 0$, la desigualtat es verifica per

$$\boxed{t < \frac{1}{a} \ln\left(\frac{b_2-b_1}{b_2-b_1+a(y_{02}-y_{03})}\right)} \qquad [5.36]$$

Si anomenem els segons membres de [5.35] i [5.36] com

$$t_1 = \frac{1}{a}.\mathrm{Ln}\left(\frac{b_3-b_2}{b_3-b_2 + a.(y_{01}-y_{02})}\right)$$

$$t_2 = \frac{1}{a}.\mathrm{Ln}\left(\frac{b_2-b_1}{b_2-b_1 + a.(y_{02}-y_{03})}\right)$$

aleshores podem trobar un interval de temps $[0, t_3)$, on

$$t_3 = \text{mín}\ \{t_1, t_2\}$$

en el qual la solució serà un número borrós triangular.

Exemple

Sigui l'equació diferencial borrosa triangular completa amb coeficients constants

$$\frac{d\tilde{y}}{dt} = a.\tilde{y} + \tilde{b}$$

on els coeficients són $a=2$ i $\tilde{b}=(1, 4, 9)$ i la condició inicial per $t=0$ és $\tilde{y}_0=(3, 5, 6)$.

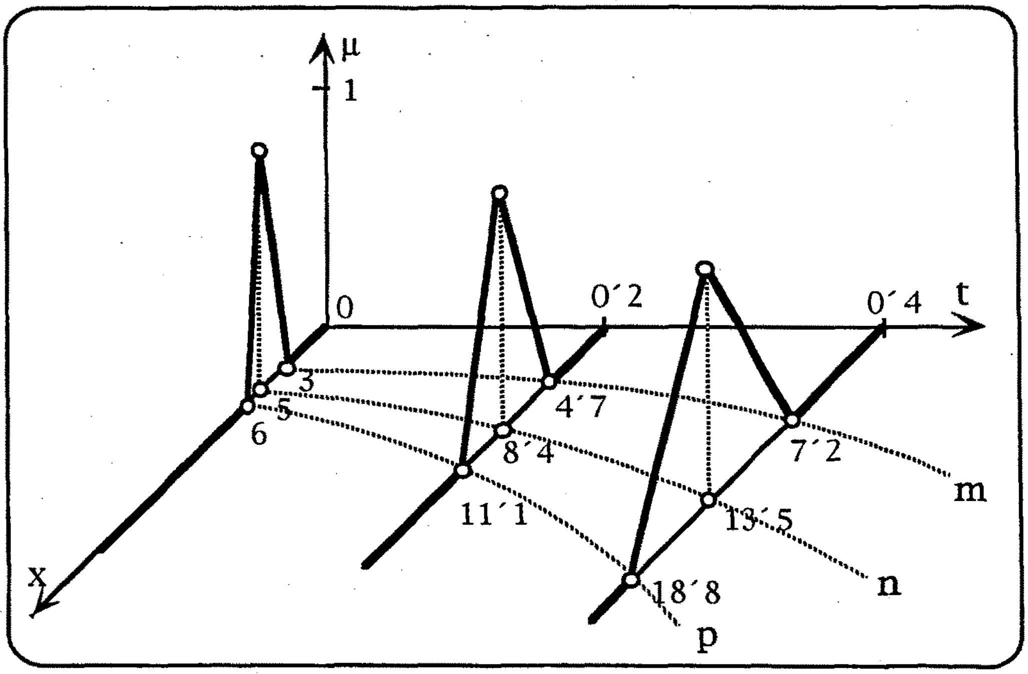
Com que $a>0$ ens trobem en el primer cas. Estudiem, doncs, la solució $\tilde{y}(t)=(m, n, p)$ pels dos subcasos corresponents:

1.a) PRIMER SUBCAS: $\frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t) < \frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t)$

Hem de tenir en compte les fórmules [5.27-30] i també que $b_1=1$, $b_2=4$, $b_3=9$, $y_{01}=3$, $y_{02}=5$ i $y_{03}=6$.

Amb aquestes condicions, la solució és

$$\boxed{\tilde{y}(t)=\left(\frac{7.e^{2t}-1}{2}\ ,\ 7.e^{2t}-2\ ,\ \frac{21.e^{2t}-9}{2}\right)}$$



Observem que per a tot t≥0 la solució $\tilde{y}(t)=(m,\ n,\ p)$ és un número borrós triangular perquè sempre m<n<p, és a dir

$$\frac{7.e^{2t}-1}{2} < 7.e^{2t}-2 < \frac{21.e^{2t}-9}{2}\ .$$

2.a) SEGON SUBCAS: $\frac{d\overline{Y}(\alpha)}{dt}(t) < \frac{d\underline{Y}(\alpha)}{dt}(t)$

Apliquem ara les fórmules [5.31-34] i obtindrem la solució

$$\boxed{\tilde{y}(t)=\left(\frac{15.e^{2t}-9}{2}\ ,\ 7.e^{2t}-2\ ,\ \frac{13.e^{2t}-1}{2}\right)}$$

Per a saber si aquesta solució és sempre un NBT, trobem el signe negatiu o positiu de

$$a.(y_{01}-y_{02})+b_3-b_2=\ 2.(3-5)+9-4=\ -4+5=1\ >0$$

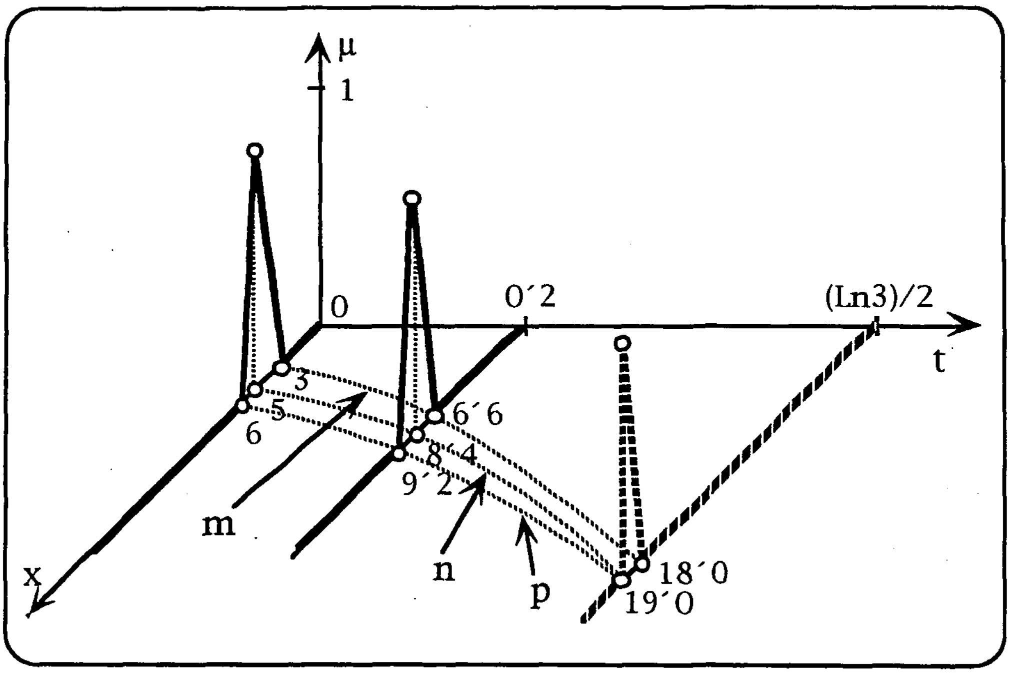
Per tant, $\tilde{y}(t)=(m,\ n,\ p)$ només serà un NBT en l'interval $[0,\ t_3)$, on t_3 és el mínim de les expressions [5.35] i [5.36].

Observem que

$$t_1 = \frac{1}{a}.\mathrm{Ln}\left(\frac{b_3-b_2}{b_3-b_2 + a.(y_{01}-y_{02})}\right) = \frac{1}{2}.\mathrm{Ln}\left(\frac{9-4}{9-4 + 2.(3-5)}\right) = \frac{\mathrm{Ln}(5)}{2}$$

$$t_2 = \frac{1}{a}.\mathrm{Ln}\left(\frac{b_2-b_1}{b_2-b_1 + a.(y_{02}-y_{03})}\right) = \frac{1}{2}.\mathrm{Ln}\left(\frac{4-1}{4-1 + 2.(5-6)}\right) = \frac{\mathrm{Ln}(3)}{2}$$

Conseqüentment, $t_3 = \text{mín}(t_1, t_2) = t_2$, i ens limitarem a estudiar els valors de t tals que $t \in [0, (\mathrm{Ln}3)/2)$.



Notem que pel límit $t=(\mathrm{Ln}3)/2 \cong 0'5493$ els valors de n i p coincideixen, i així $\tilde{y}(t)$ deixa de ser un número borrós triangular.

III. APLICACIONS EN L'ÀMBIT ECONÒMIC

CAPÍTOL 6

ANALISI DE L'EQUILIBRI PARCIAL DE MERCAT

Qualsevol tractat de Microeconomia presenta l'estabilitat de mercat com un dels conceptes bàsics. En els models més senzills es representa el mercat mitjançant unes funcions de demanda i d'oferta on la quantitat ofertada (Q_s) i la quantitat demandada (Q_d) són funcions que depenen del preu P. En considerar el preu com una variable independent, la funció de demanda, $Q_d=f(P)$, indica les diferents quantitats que es pretenen adquirir davant els diferents preus, mentre que la funció d'oferta, $Q_s=g(P)$, indica les quantitats que el productor estaria disposat a oferir a aquells preus.

Com que la Microeconomia es preocupa d'analitzar els diferents tipus d' equilibri que es poden assolir en els mercats, s'ha escollit com a tema d'estudi l'equilibri parcial d'un mercat, en la seva versió més simple, amb la finalitat d'oferir una nova perspectiva a la noció standard d'equilibri. Amb aquest objectiu ens aproximarem al concepte d'equilibri borrós, considerant en el model que a continuació es desenvolupa l'existència de dues variables econòmiques borroses.

6.1 MODEL ESTÀTIC LINEAL D'EQUILIBRI

6.1.1 EL MODEL CRISP ESTÀTIC

Tal i com hem mencionat abans, i si es considera una sola mercaderia, únicament és necessari incloure tres variables en el model objecte d'estudi[1]: la quantitat demandada de mercaderia (Q_d), la quantitat ofertada (Q_s) i el seu preu (P).

La hipòtesi normal és que s'adquireix l'equilibri en el mercat si i només si $Q_d - Q_s = 0$, és a dir si la demanda excedent és nul.la. En altres paraules, tot allò que volen comprar els consumidors és justament el que volen vendre els productors.

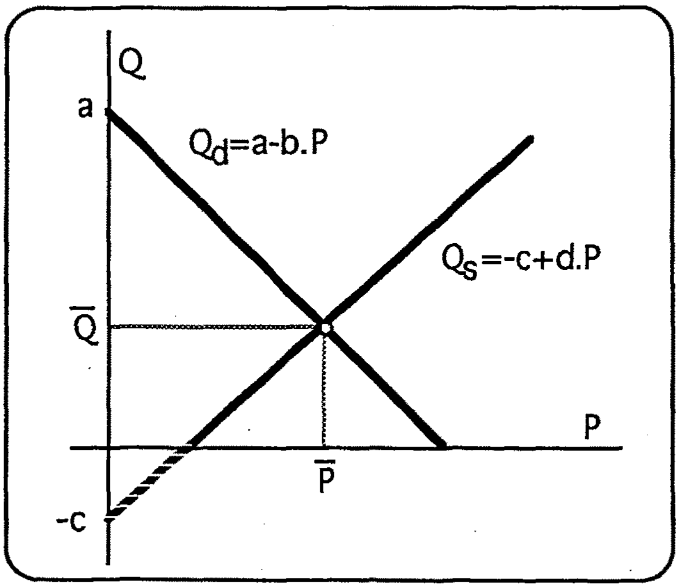


Fig.6.1 Funcions de demanda i d'oferta

Suposem, doncs, tal com podem veure en la figura anterior, que Q_d és una funció que depèn de P i és lineal i decreixent, mentre que Q_s es comporta com una funció que depèn de P i és lineal i creixent, complint-se la condició de no-negativitat, és a dir, que no s'ofereix cap quantitat a no ser que el preu excedeixi d'un determinat nivell positiu.

1 CHIANG, A.C. *Métodos fundamentales de Economía Matemática*. Ed. McGraw-Hill. Madrid. 1987. pp.38-41.

En definitiva, el model estarà definit per la condició que garanteix l'equilibri, més dues equacions que protagonitzen la demanda i l'oferta del mercat.

En conseqüència, les seves expressions matemàtiques hauran de ser, respectivament:

$$\boxed{Q_d=Q_s}\ ,\ \boxed{Q_d=a-c.P}\ \text{ i }\ \boxed{Q_s=-b+d.P} \qquad [6.1\text{-}3]$$

on els paràmetres a, b, c i d són números reals positius.

Resolent el sistema format per les tres equacions d'equilibri anteriors, resulta

$$\boxed{P=\frac{a+b}{c+d}} \qquad [6.4]$$

Notem que el preu d'equilibri P està en funció dels paràmetres que representen les expressions matemàtiques definides en aquest model estàtic lineal d'equilibri.

La quantitat Q de mercaderia a l'equilibri que correspon al valor del preu P és:

$$\boxed{Q=\frac{a.d-b.c}{c+d}} \qquad [6.5]$$

on també s'observa que l'expressió anterior depèn únicament dels paràmetres del model.

Com que el denominador de l'expressió anterior és positiu, la positivitat de Q requereix que el numerador d'aquesta expressió sigui també positiu.

Per tant, per garantir la condició de no-negativitat i així poder donar significat econòmic al present model, aquest ha de contenir la restricció addicional:

$$\boxed{a.d>b.c} \qquad [6.6]$$

6.1.2 MODEL BORRÓS ESTÀTIC D'EQUILIBRI

En el context del model estàtic descrit en l'apartat anterior, un exercici matemàticament interessant, és considerar que els paràmetres a i b corresponents, respectivament, a las quantitats inicials demandades i ofertades siguin paràmetres incerts i, per tant, puguin ser representats com números borrosos.

Construirem aquests números borrosos $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$ mitjançant les expressions corresponents als seus grafs

$$\tilde{a}=\{ (x, \mu_{\tilde{a}}(x) \} \qquad \tilde{b}=\{ (x, \mu_{\tilde{b}}(x) \}$$

on $\mu_{\tilde{a}}$ i $\mu_{\tilde{b}}$ representen les funcions de pertinença respectives, o bé en funció dels seus α-talls

$$\tilde{a}=\{ a_\alpha=[\underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)] \text{ , } \alpha\in[0, 1] \} \qquad \tilde{b}=\{ b_\alpha=[\underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)] \text{ , } \alpha\in[0, 1] \}$$

on a_α i b_α són els α-talls corresponents a cada nivell α.

Sota les condicions de borrositat establertes, anem a estudiar el preu i la quantitat de mercaderia en l'equilibri a partir de les solucions [6.4-5] del sistema [6.1-3]. D'acord amb el nou concepte de solució d'equacions borroses de Buckley i Qu tenim:

$$\boxed{\tilde{P}=\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{c+d} \quad \text{i} \quad \tilde{Q}=\frac{\tilde{a}.d-\tilde{b}.c}{c+d}} \qquad [6.7]$$

Notem que aquestes expressions representen la solució del sistema borrós corresponent.

Per tal que que el sistema tingui sentit econòmic, és condició necessària que la diferència de nombres borrosos $\tilde{a}.d-\tilde{b}.c=\tilde{t}$ sigui un nombre borrós tal que els seus α-talls formin una successió monòtona d'intervals encaixats de la semirrecta real positiva. Només serà precís, doncs, que l'α-tall de nivell $\alpha=0$ sigui un subconjunt dels reals positius, R^+:

$$\boxed{\tilde{Q}\subset R^+ \iff t_0=[\underline{t}(0), \overline{t}(0)] \subset R^+} \qquad [6.8]$$

Si es desenvolupa la condició [6.6] i s'aplica l'aritmètica dels intervals de confiança, s'obté:

$$[\underline{a}(\alpha), \overline{a}(\alpha)].[d, d]-[\underline{b}(\alpha), \overline{b}(\alpha)].[c, c] =[\underline{a}(\alpha).d-\overline{b}(\alpha).c \ , \overline{a}(\alpha).d-\underline{b}(\alpha).c]$$

expressió que és equivalent a

$$\begin{cases} \underline{a}(\alpha).d-\overline{b}(\alpha).c >0 \\ \overline{a}(\alpha).d-\underline{b}(\alpha).c >0 \end{cases} \quad \text{o bé} \quad \begin{cases} \underline{a}(\alpha).d>\overline{b}(\alpha).c \\ \overline{a}(\alpha).d>\underline{b}(\alpha).c \end{cases} \qquad [6.9]$$

Siguin a continaució les operacions binàries corresponents a l'expressió [6.7],

$$f(\tilde{a},\tilde{c})=(\tilde{a}+\tilde{b})/(c+d) \quad \text{i} \quad g(\tilde{a},b)=(\tilde{a}.d-\tilde{b}.c)/(c+d)$$

Llavors, suposant que les funcions de pertinença $\mu_{\tilde{a}}(x)$ i $\mu_{\tilde{b}}(x)$ són contínues, per aplicació del principi d'extensió a les dues operacions anteriors, s'obtenen les funcions de pertinença, pel preu i per la quantitat de mercaderia en el punt d'equilibri, mitjançant les dues expressions següents:

$$\mu_{\tilde{P}}(z)= \bigvee_{\{(x,y)\ /\ z=f(x,y)\}} \left(\mu_{\tilde{a}}(x)\wedge\mu_{\tilde{b}}(y)\right)$$

$$\mu_{\tilde{Q}}(z)= \bigvee_{\{(x,y)\ /\ z=g(x,y)\}} \left(\mu_{\tilde{a}}(x)\wedge\mu_{\tilde{b}}(y)\right)$$

Així doncs, com que les funcions f i g són contínues, els α-talls corresponents dels nombres borrosos $\tilde{P}$ i $\tilde{Q}$ són:

$$P_\alpha=[\underline{P}(\alpha), \overline{P}(\alpha)]=\{z=f(x, y)\ /\ x\in a_\alpha, y\in b_\alpha\}$$

$$Q_\alpha=[\underline{Q}(\alpha), \overline{Q}(\alpha)]=\{z=g(x, y)\ /\ x\in a_\alpha, y\in b_\alpha\}$$

on, suposant que $x\in a_\alpha$ i $y\in b_\alpha$, tenim

$$\underline{P}_\alpha=\text{mín}\{z=f(x,y)\} \qquad \overline{P}_\alpha=\text{màx}\{z=f(x,y)\}$$

$$\underline{Q}_\alpha=\text{mín}\{z=g(x,y)\} \qquad \overline{Q}_\alpha=\text{màx}\{z=g(x,y)\}$$

Com que les funcions f i g són contínues i el domini $a_\alpha \times b_\alpha$ un conjunt compacte d'R^2, llavors P_α i Q_α són intervals tancats i, conseqüentment, convexes.

D'altra banda, com que $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$ són normals, també ho seran $\tilde{P}$ i $\tilde{Q}$, amb la qual cosa es justifica que $\tilde{P}$ i $\tilde{Q}$ són dos nombres borrosos. Per als extrems de cada α-tall, $\alpha \in [0, 1]$, podrem escriure:

$$\underline{P}(\alpha) = \frac{\underline{a}(\alpha)+\underline{b}(\alpha)}{c+d} \qquad \overline{P}(\alpha) = \frac{\overline{a}(\alpha)+\overline{b}(\alpha)}{c+d}$$

$$\underline{Q}(\alpha) = \frac{\underline{a}(\alpha).d-\overline{b}(\alpha).c}{c+d} \qquad \overline{Q}(\alpha) = \frac{\overline{a}(\alpha).d-\underline{b}(\alpha).c}{c+d}$$

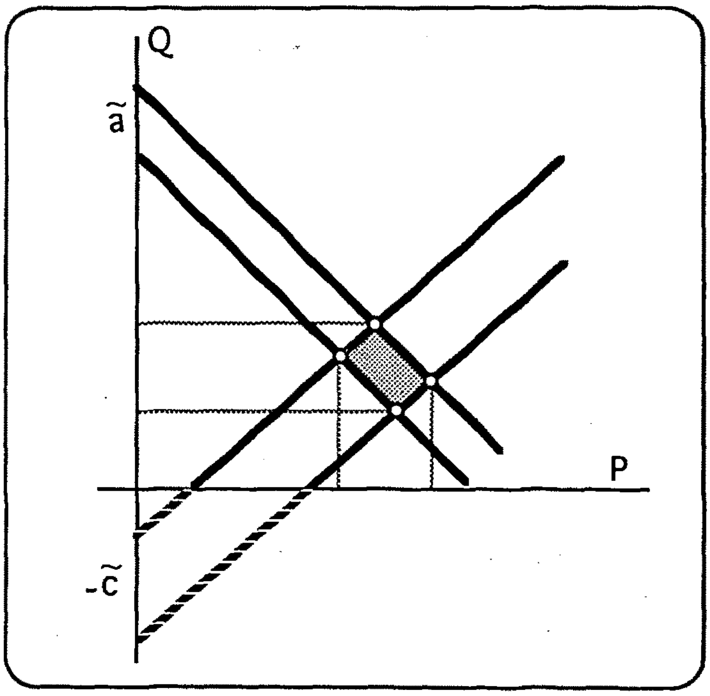


Fig.6.2 Situació d'equilibri borrós

Per aplicació de l'aritmètica dels intervals de confiança s'obtenen directament els α-talls corresponents:

$$\boxed{P_\alpha = \left[\frac{\underline{a}(\alpha)+\underline{b}(\alpha)}{c+d}\ ,\ \frac{\overline{a}(\alpha)+\overline{b}(\alpha)}{c+d}\right]} \qquad [6.10]$$

$$\boxed{Q_\alpha = \left[\frac{\underline{a}(\alpha).d-\overline{b}(\alpha).c}{c+d}\ ,\ \frac{\overline{a}(\alpha).d-\underline{b}(\alpha).c}{c+d}\right]} \qquad [6.11]$$

6.1.3 MODEL BORRÓS EN EL CAS DE NBTs

Com a cas particular, i tenint en compte que els números borrosos triangulars presenten una gran adequació a les qüestions de tipus econòmic, considerem en aquest apartat els nombres borrosos $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$ com NBTs. És a dir, suposem que

$$\tilde{a}=(a_1, a_2, a_3) \text{ i } \tilde{b}=(b_1, b_2, b_3)$$

A partir de les funcions de pertinença $\mu_{\tilde{a}}$ i $\mu_{\tilde{b}}$ es poden determinar les funcions de pertinença $\mu_{\tilde{P}}$ i $\mu_{\tilde{Q}}$ del preu P i de la quantitat de mercaderia Q en l'equilibri que a la vegada seran també números borrosos triangulars.

La funció de pertinença del preu d'equilibri borrós és

$$\boxed{\mu_{\tilde{P}}(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x < \dfrac{a_1+b_1}{c+d} \\ \dfrac{(c+d).x-(a_1+b_1)}{(a_2-a_1)+(b_2-b_1)} & \text{si } \dfrac{a_1+b_1}{c+d} \le x \le \dfrac{a_2+b_2}{c+d} \\ \dfrac{(a_3+b_3)-(c+d).x}{(a_3-a_2)+(b_3-b_2)} & \text{si } \dfrac{a_2+b_2}{c+d} \le x \le \dfrac{a_3+b_3}{c+d} \\ 0 \text{ si } x > \dfrac{a_3+b_3}{c+d} \end{cases}} \quad [6.12]$$

En canvi, la funció de pertinença de la quantitat de mercaderia d'equilibri borrós és

$$\boxed{\mu_{\tilde{Q}}(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x < \dfrac{a_1.d-b_3.c}{c+d} \\ \dfrac{(c+d).x-(a_1.d-b_3.c)}{(a_2-a_1.d+(b_3-b_2).c} & \text{si } \dfrac{a_1.d-b_3.c}{c+d} \le x \le \dfrac{a_2.d-b_2.c}{c+d} \\ \dfrac{(a_3.d-b_1.c)-(c+d).x}{(a_3-a_2).d+(b_2-b_1).c} & \text{si } \dfrac{a_2.d-b_2.c}{c+d} \le x \le \dfrac{a_3.d-b_1.c}{c+d} \\ 0 \text{ si } x > \dfrac{a_3.d-b_1.c}{c+d} \end{cases}} \quad [6.13]$$

Notem que el producte cartesià $\tilde{P}\times\tilde{Q}$, definit a partir dels números borrosos triangulars

$$\tilde{P}=\{(x, \mu_{\tilde{P}}(x)\} \qquad \tilde{Q}=\{(x, \mu_{\tilde{Q}}(x)\}$$

o bé en funció dels seus α-talls

$$\tilde{P}=\{P_\alpha=[\underline{P}(\alpha), \overline{P}(\alpha)], \alpha\in[0, 1]\} \qquad \tilde{Q}=\{Q_\alpha=[\underline{Q}(\alpha), \overline{Q}(\alpha)], \alpha\in[0, 1]\}$$

pot considerar-se determinat pel producte cartesià dels α-talls $P_\alpha\times Q_\alpha$ els quals, interpretats geomètricament resulten ser una successió de figures quadrangulars encaixades monòtonament, que per a $\alpha=1$ es redueixen en un únic punt.

EXEMPLE

Sigui el sistema d'equacions següents que representen un model lineal de mercat

$$Q_d=Q_s\,, \quad Q_d=a-2.P\,, \quad Q_s=-b+8.P$$

Substituint en [6.4] i [6.5], podrem determinar la seva solució en l'equilibri, resultant

$$P=\frac{a+b}{10}\,, \quad Q=\frac{8.a-2.b}{10}$$

Tractqrem de trobar una solució d'equilibri borrosa, tot considerant les quantitats inicials ofertades i demandades com els nombres borrosos triangulars $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$.

Prenem per exemple els NBTs

$$\tilde{a}=(80, 100, 130) \quad \text{i} \quad \tilde{b}=(90, 110, 140)$$

on suposem que les quantitats numèriques emprades es medeixen en tones mensuals (Tm/mes) i el valor corresponent a P en u. m. (unitats monetàries).

La funció de pertinença d'$\tilde{a}$ és:

$$\mu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 80 \\ \dfrac{x-80}{20} \text{ si } 80 \leq x \leq 100 \\ \dfrac{130-x}{30} \text{ si } 100 \leq x \leq 130 \\ 0 \text{ si } x > 130 \end{cases}$$

Mentre que la funció de pertinença de $\tilde{b}$ és:

$$\mu_{\tilde{b}}(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x < 90 \\ \dfrac{x-90}{20} \text{ si } 90 \leq x \leq 110 \\ \dfrac{140-x}{30} \text{ si } 110 \leq x \leq 140 \\ 0 \text{ si } x > 140 \end{cases}$$

Si substituïm $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$ en la solució d'equilibri s'obté la versió borrosa de la solució donada per els nombres borrosos:

$$\tilde{P}=\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{10} \qquad \tilde{Q}=\frac{8.\tilde{a}-2.\tilde{b}}{10}$$

que, com podem veure, presenten l'estructura de nombres borrosos triangulars.

Les seves funcions de pertinença respectives, obtingudes a partir de les expressions anteriors de $\tilde{P}$ i $\tilde{Q}$ són:

$$\mu_{\tilde{P}}(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 17 \\ \dfrac{x-17}{4} \text{ si } 17 \leq x \leq 21 \\ \dfrac{27-x}{6} \text{ si } 21 \leq x \leq 27 \\ 0 \text{ si } x > 27 \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{Q}}(x)=\begin{cases} 0 \text{ si } x < 36 \\ \dfrac{x-36}{22} \text{ si } 36 \leq x \leq 58 \\ \dfrac{86-x}{28} \text{ si } 58 \leq x \leq 86 \\ 0 \text{ si } x > 86 \end{cases}$$

Els α-talls vindran donats per les expressions:

$$P(\alpha)=[\underline{P}(\alpha)\ ,\ \overline{P}(\alpha)] = [17+4.\alpha\ ,\ 27-6.\alpha]$$

$$Q(\alpha)=[\underline{Q}(\alpha)\ ,\ \overline{Q}(\alpha)] = [36+22.\alpha\ ,\ 86-28.\alpha]$$

Presentem en la figura de la pàgina següent un esquema dels números borrosos $\tilde{P}$ i $\tilde{Q}$, conjuntament amb els seus α-talls.

Observem que per a cada nivell de presumpció α tenim una zona d'equilibri.

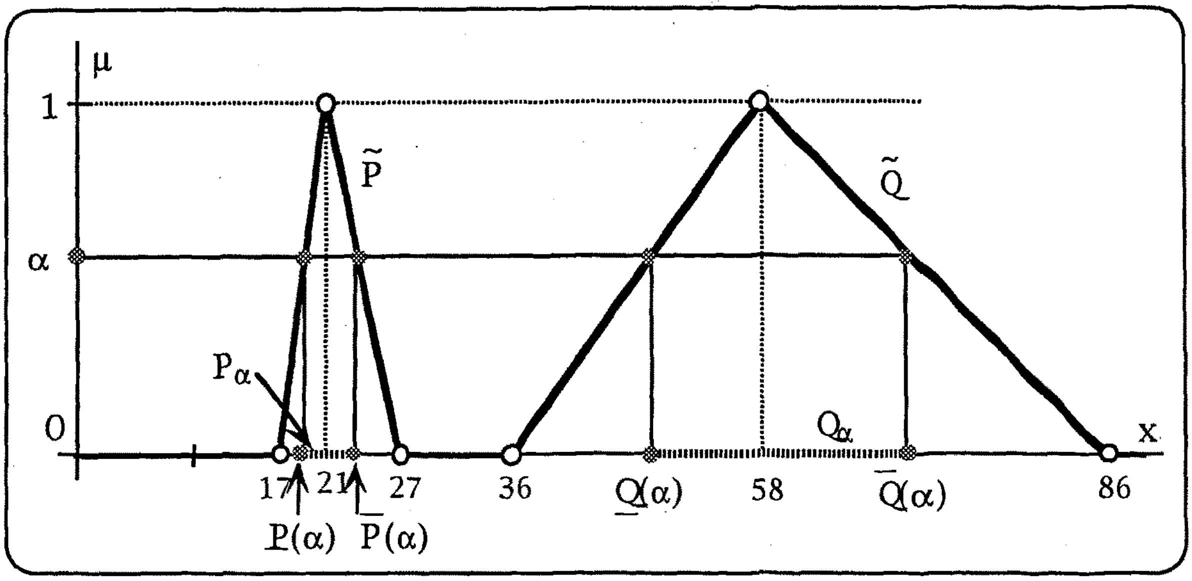


Fig.6.3 Preus i quantitats d'equilibri borrosos

En la següent taula s'exposen les dades corresponents a cada nivell de presumpció α:

α	$\underline{P}(\alpha)$	$\overline{P}(\alpha)$	$\underline{Q}(\alpha)$	$\overline{Q}(\alpha)$
0.0	17.0	27.0	36.0	86.0
0.1	17.4	26.4	38.2	83.2
0.2	17.8	25.8	40.4	80.4
0.3	18.2	25.2	42.6	77.6
0.4	18.6	24.6	44.8	74.6
0.5	19.0	24.0	47.0	72.0
0.6	19.4	23.4	49.2	69.2
0.7	19.8	22.8	51.4	66.4
0.8	20.2	22.2	53.6	63.6
0.9	20.6	21.6	55.8	60.8
1.0	21.0	21.0	58.0	58.0

Es pot observar una solució d' equilibri mínim corresponent a la parella (17, 36), una solució d' equilibri màxim corresponent a la parella (27, 86) i una solució de màxima presumpció corresponent a la parella (21, 58).

Una representació gràfica de la situació plantejada es reflecteix en la figura de la pàgina següent, on el pla horitzontal està situat a l'altura del nivell de presumpció α.

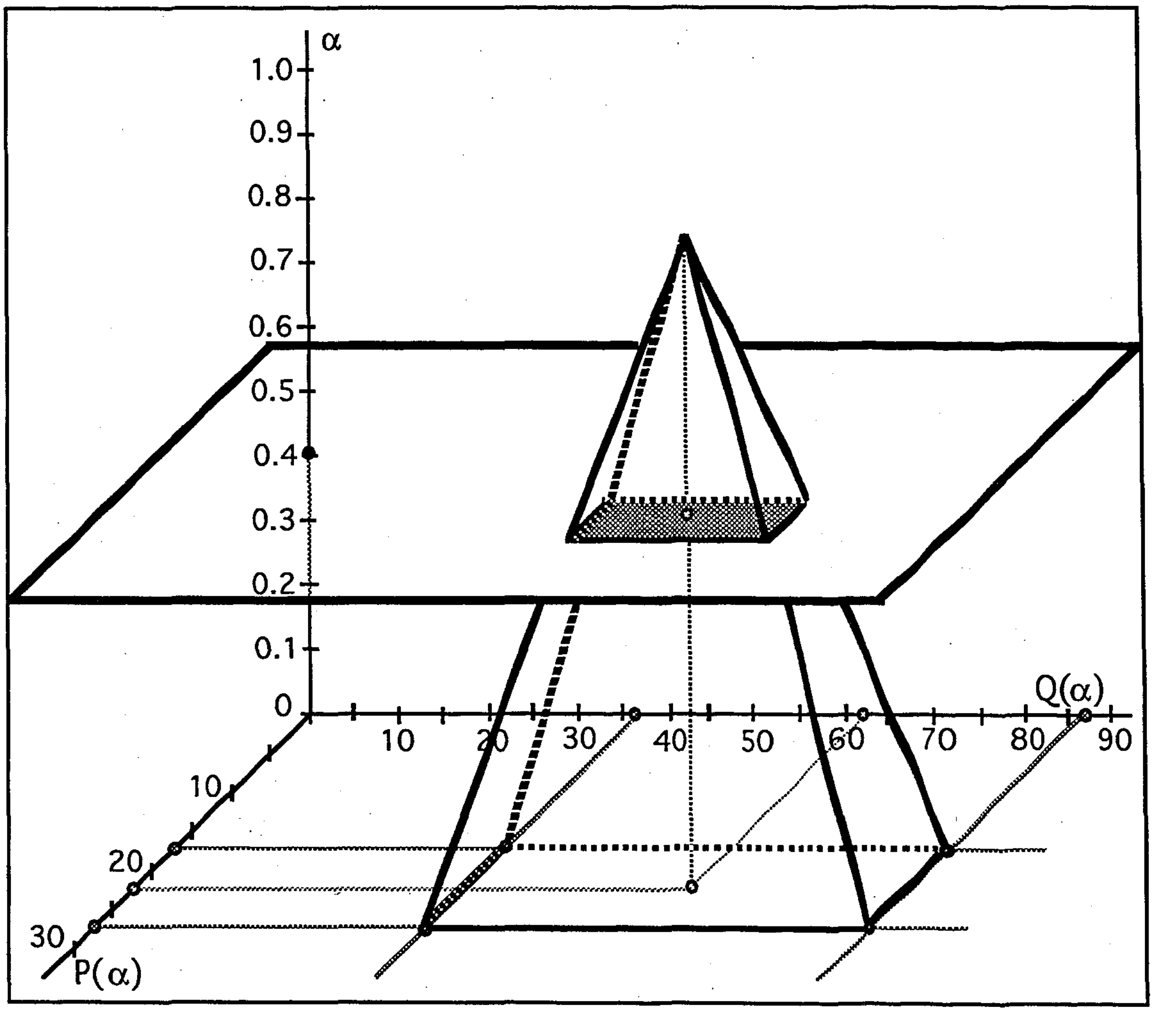


Fig.6.4 Zona d'equilibri borrosa

6.2 MODEL DINÀMIC LINEAL D'EQUILIBRI

6.2.1 EL MODEL CRISP DINÀMIC

Considerem en aquest apartat l'estudi d'un model econòmic d'oferta i demanda on s'inclou una variable temporal. Ens interessa doncs, l'anàlisi de l'estabilitat de l'equilibri en un context dinàmic.

Considerem com abans un sol producte, on les quantitats demandada i ofertada són funcions lineals del preu P(t), que suposem és funció del temps.

El model d'equilibri ve donat per les funcions de demanda i d'oferta següents, on a, b, c, d>0 i on els paràmetres a i b s'anomenen respectivament la *demanda* *i l'oferta a l'origen.*

$$\boxed{Q_d=a-c.P} \quad \text{i} \quad \boxed{Q_s=-b+d.P} \qquad [6.14\text{-}15]$$

Aleshores la *demanda excedent* és

$$\boxed{D_e=Q_d-Q_s} \qquad [6.16]$$

Lògicament, es dirà que el mercat es troba en equilibri quan la demanda excedent sigui igual a zero.

Suposem a continuació que el mercat no està en equilibri i fem la hipòtesi que la variació instantània del preu respecte al temps és proporcional a la demanda excedent, és a dir:

$$\boxed{dP/dt=j.(Q_d-Q_s)} \qquad [6.16]$$

on la constant de proporcionalitat és positiva, j>0, i on s'ha de complir la condició inicial $P(0)=P_0$.

Substituint Q_d i Q_s per [6.14-15], obtindrem la condició

$$\boxed{dP/dt=j.[(a+b)-(c+d).P} \qquad [6.17]$$

Aquesta condició garanteix el comportament bàsic del mercat en els casos en què existeixi excés d'oferta o de demanda. En altres paraules, en un mercat on existeixi excés d'oferta la tendència del preu és a baixar, mentre que en un mercat que existeixi excés de demanda la tendència del mercat és a pujar.

Amb aquestes consideracions ens plantegem el problema de determinar l'existència d'un temps t, pel qual el preu P(t) sigui tal que el mercat estigui en equilibri (dinàmic).

Resolent l'equació diferencial de primer ordre [6.17], veurem que té per solució:

$$\boxed{P(t)=[Po- (a+b)/(c+d)].e^{-kt} +[(a+b)/(c+d)]} \qquad [6.18]$$

on k=j.(c+d) és positiu, k>0.

Amb aquesta solució, la funció de demanda, Q_d=a-c.P, expressada en funció del temps, és:

$$\boxed{Q_d=a-c.\{[P_o- (a+b)/(c+d)].e^{-kt} +[(a+b)/(c+d)]\}} \qquad [6.19]$$

i la funció d'oferta, Q_s=-b+d.P, és:

$$\boxed{Q_s=-b+d.\{[P_o- (a+b)/(c+d)].e^{-kt} +[(a+b)/(c+d)]\}} \qquad [6.20]$$

Notem que l'equilibri s'assoleix quan $Q_d=Q_s$ i aquest fet es dóna en un temps infinit. En efecte, en aquest cas $e^{-kt}=0$ i, per tant,

$$Q_d= a - c.\frac{a+b}{c+d} = \frac{ac+ad-ac-bc}{c+d} = \frac{ad-bc}{c+d}$$

$$Q_s=-b +d.\frac{a+b}{c+d} = \frac{-bc-bd+ad+bd}{c+d} = \frac{ad-bc}{c+d}$$

En conseqüència, si $t \to \infty$ tenim $Q_d=Q_s$.

6.1.2 MODEL BORRÓS DINÀMIC D'EQUILIBRI

Tot seguit volem analitzar el comportament del model anterior en situació d'incertesa, en considerar que la demanda i l'oferta inicials s'expressen a través de nombres borrosos.

D'aquesta manera, les funcions de demanda i d'oferta es convertiran en:

$$\boxed{\tilde{Q}_d= \tilde{a} - c.\tilde{P}} \quad i \quad \boxed{\tilde{Q}_s= -\tilde{b} + d.\tilde{P}} \qquad [6.21\text{-}22]$$

on c i d són nombres reals positius.

En les dues expressions anteriors $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$ són números borrosos definits pels seus respectius grafs:

$$\tilde{a}=\{(x\,,\mu_{\tilde{a}}(x))\,/\,x\in R\} \quad \text{i} \quad \tilde{b}=\{(x\,,\mu_{\tilde{b}}(x))\,/\,x\in R\}$$

o, equivalentment, pels seus α-talls:

$$a_\alpha=[\,\underline{a}(\alpha)\,,\,\overline{a}(\alpha)\,] \qquad b_\alpha=[\,\underline{b}(\alpha)\,,\,\overline{b}(\alpha)\,]$$

Amb aquestes condicions, podem determinar el preu en un temps t a partir de l'equació [6.18], transformant-la en l'equació borrosa

$$\boxed{\tilde{p}(t)=\left(P_0-\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{c+d}\right)e^{-kt}+\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{c+d}} \qquad [6.23]$$

Observem que P_0, que en el cas crisp era la condició inicial, al fuzzificar s´ha convertit en el valor de màxima presumpció de $\tilde{p}(0)=\tilde{P}_0$ que es pot considerar la condició inicial en el cas borrós.

A més a més, si haguéssim fuzzificat abans d´obtenir la constant d'integració de la solució, haguéssim hagut de resoldre una equació borrosa, la solució de la qual hagués estat la que hem obtingut si haguéssim utilitzat el mètode de resolució d'equacions borroses en el sentit de Buckley & Qu.

Així, doncs, fent t=0 en [6.23] resulta

$$\boxed{\tilde{p}(0)=P_0-\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{c+d}+\frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{c+d}} \qquad [6.24]$$

Calculem a continuació la funció de pertinença del preu, fent prèviament els canvis de variables següents:

$$\boxed{\tilde{m}=\tilde{a}+\tilde{b}} \quad \boxed{\tilde{A}=\frac{\tilde{m}}{c+d}} \quad \boxed{\tilde{B}=P_0-\tilde{A}} \qquad [6.25\text{-}28]$$

Per tant, com que

$$\mu_{\tilde{m}}(z)=\text{màx}\,\{\,\mu_{\tilde{a}}(x)\wedge\mu_{\tilde{b}}(y)\ /\ x+y=z\}$$

resultaran les funcions de pertinença

$$\mu_{\tilde{A}}(x)=\mu_{\tilde{m}}\big((c+d)x\big) \quad i \quad \mu_{\tilde{B}}(x)=\mu_{\tilde{A}}(P_0 - x)$$

Aleshores, com que

$$\tilde{P}(t)=\tilde{B}\,e^{-kt}+\tilde{A}$$

i si anomenem

$$\tilde{M}=\tilde{B}\,e^{-kt}$$

trobarem finalment la funció de pertinença del preu

$$\boxed{\mu_{\tilde{P}(t)}(z) = \text{màx}\left\{ \mu_{\tilde{M}}(x) \wedge \mu_{\tilde{B}}(y) \;/\; x+y=z \right\}} \qquad [6.29]$$

Aquesta última expressió resulta a la pràctica poc operativa, per la qual cosa pensem que és més convenient abordar el problema amb números borrosos triangulars i treballar amb els seus α-talls.

Així, doncs, siguin $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$ els números borrosos triangulars

$$\tilde{a}=(a_1\,,\,a_2\,,\,a_3) \quad i \quad \tilde{b}=(b_1\,,\,b_2\,,\,b_3)$$

que tenen per α-talls respectius

$$a_\alpha=[a_1+\alpha.(a_2-a_1)\,,\,a_3-\alpha.(a_3-a_2)]$$

$$b_\alpha=[b_1+\alpha.(b_2-b_1)\,,\,b_3-\alpha.(b_3-b_2)]$$

Anatitzem a continuació la TRAJECTÒRIA QUE DESCRIU EL PREU a partir dels seus α-talls. Sabem que

$$P_\alpha(t)=\left[\underline{P}(\alpha)(t)\,,\,\overline{P}(\alpha)(t)\right]$$

on, per [6.23], l'extrem inferior és

$$\underline{P}(\alpha)(t)=\left(P_0-\frac{a_3+b_3}{c+d}\right).e^{-k.t}+\frac{a_1+b_1}{c+d}+$$

$$+\,\alpha.\left(\frac{(a_3+b_3)-(a_2+b_2)}{c+d}.e^{-k.t}+\frac{(a_2+b_2)-(a_1+b_1)}{c+d}\right)$$

i l'extrem superior és

$$\overline{P}(\alpha)(t)=\left(P_0 - \frac{a_1+b_1}{c+d}\right).e^{-k.t}+\frac{a_3+b_3}{c+d}+$$
$$+\ \alpha.\left(\frac{(a_2+b_2)-(a_1+b_1)}{c+d}.e^{-k.t}+\frac{(a_3+b_3)-(a_2+b_2)}{c+d}\right)$$

Per motius de simplificació fem els següents canvis de variables:

$$\boxed{q_1=\frac{a_1+b_1}{c+d}} \quad \boxed{q_2=\frac{a_2+b_2}{c+d}} \quad \boxed{q_3=\frac{a_3+b_3}{c+d}} \qquad [6.30\text{-}32]$$

De manera que els extrems de $P_\alpha(t)$ seran

$$\boxed{\underline{P}(\alpha)(t)=\left(P_0 - q_3\right).e^{-kt}+q_1 + \alpha\left((q_3-q_2)\ .e^{-kt}+q_2-q_1\right)} \qquad [6.33]$$

$$\boxed{\overline{P}(\alpha)(t)=\left(P_0 - q_1\right).e^{-kt}+q_3 - \alpha\left((q_2-q_1)\ .e^{-kt}+q_3-q_2\right)} \qquad [6.34]$$

Quant a la condició inicial borrosa, [6.24], observem que ens queda definida a partir del número borrós triangular

$$\boxed{\tilde{P}_0=\left(P_0-(q_3-q_1)\ ,\ P_0\ ,\ P_0+(q_3-q_1)\right)} \qquad [6.35]$$

Estudiem ara el PREU D'EQUILIBRI BORRÓS, calculant el límits dels seus α-talls, [6.33-34], quan t tendeix a $+\infty$, i tenint en compte que en aquest cas $e^{-kt}=0$,

$$\lim_{t\to+\infty} \underline{P}(\alpha)(t) = q_1 + \alpha.(q_2 - q_1)$$

$$\lim_{t\to+\infty} \overline{P}(\alpha)(t) = q_3 + \alpha.(q_3 - q_2)$$

Conseqüentment, resulta que el *preu d'equilibri* $\tilde{P}_e$ ve donat pel número borrós triangular

$$\boxed{\tilde{P}_e=(q_1\ ,\ q_2\ ,\ q_3)} \qquad [6.36]$$

Estudiem ara el COMPORTAMENT DE LES DIFERENTES TRAJECTÒRIES DEL PREU segons els diversos valors que pot prendre el valor de P_0.

Calculem les dues derivades respecte al temps dels seus α-talls, expressats per les fórmules [6.33-34],

$$\left(\underline{P}(\alpha)(t)\right)' = -k.(P_0-q_3).e^{-kt} - k.\alpha.(q_3-q_2).e^{-kt}$$

$$\left(\overline{P}(\alpha)(t)\right)' = -k.(P_0-q_1).e^{-kt} - k.\alpha.(q_2-q_1).e^{-kt}$$

Traient factor comú $-k.e^{-kt}$,

$$\boxed{\left(\underline{P}(\alpha)(t)\right)' = -k.e^{-kt}.\left(P_0-q_3+\alpha.(q_3-q_2)\right)} \qquad [6.37]$$

$$\boxed{\left(\overline{P}(\alpha)(t)\right)' = -k.e^{-kt}.\left(P_0-q_1+\alpha.(q_2-q_1)\right)} \qquad [6.38]$$

Considerem els QUATRE CASOS següents, segons la situació del valor inicial del preu P_0 dins la terna expressada pel preu d'equilibri $\tilde{P}_e=(q_1, q_2, q_3)$:

<u>PRIMER CAS</u>: $\boxed{P_0 \leq q_1}$

a) <u>Extrems inferiors</u>: Com que $q_1<q_2$ serà $P_0<q_2$ i com que $\alpha\leq 1$, tindrem

$$P_0 - q_3 \leq q_2 - q_3 \leq \alpha.(q_2 - q_3) = -\alpha.(q_3 - q_2)$$

Per tant,

$$P_0 - q_3 + \alpha.(q_3 - q_2) \leq 0$$

Així, doncs, la derivada de l'extrem inferior és

$$\left(\underline{P}(\alpha)(t)\right)' = -k.e^{-kt} \left(P_0 - q_3 + \alpha\ (q_3-q_2)\right) \geq 0$$

Notem que en aquest cas la trajectòria dels α-talls inferiors del preu és creixent per qualsevol α.

b) <u>Extrems superiors</u>: Per la mateixa raó que abans

$$P_0 - q_1 \leq q_2 - q_1 \leq \alpha.(q_2 - q_1)$$

Per tant,

$$P_0 - q_1 + \alpha.(q_2 - q_1) \leq 0$$

La derivada de l'extrem superior és

$$\left(\overline{P}(\alpha)(t)\right)' = -k.e^{-kt}\left(P_0 - q_1 - \alpha\,(q_2 - q_1)\right) \geq 0$$

Deduïm que la trajectòria dels α-talls superiors del preu és també creixent per qualsevol α.

SEGON CAS: $\boxed{q_1 \leq P_0 \leq q_2}$

a) Extrems inferiors: Com que $P_0 < q_2$ i $\alpha \leq 1$, tindrem

$$P_0 - q_3 \leq q_2 - q_3 \leq \alpha.(q_2 - q_3) = -\alpha.(q_3 - q_2)$$

Per tant,

$$P_0 - q_3 + \alpha.(q_3 - q_2) \leq 0$$

Així, doncs, la derivada de l'extrem inferior és

$$\left(\underline{P}(\alpha)(t)\right)' = -k.e^{-kt}\left(P_0 - q_3 + \alpha\,(q_3 - q_2)\right) \geq 0$$

El signe positiu de la derivada ens indica que la trajectòria dels α-talls inferiors del preu és creixent per qualsevol α.

b) Extrems superiors: Per l'estudi de la trajectòria dels α-talls superiors s'han de distingir dos subcasos:

PRIMER SUBCAS: $\boxed{\alpha \leq \dfrac{P_0 - q_1}{q_2 - q_1}}$

Per aquests valors d'α es verifica

$$P_0 - q_1 \geq \alpha.(q_2 - q_1)$$

Així, doncs, $P_0 - q_1 - \alpha\,(q_2 - q_1) \geq 0$, per la qual cosa

$$\left(\overline{P}(\alpha)(t)\right)' = -k.e^{-kt}\left(P_0 - q_1 - \alpha\,(q_2 - q_1)\right) \leq 0$$

Per tant, en aquest subcas la trajectòria dels α-talls superiors del preu és decreixent pels α considerats.

SEGON SUBCAS: $\boxed{\alpha \geq \frac{P_0 - q_1}{q_2 - q_1}}$

Per aquests valors d'α es verifica

$$P_0 - q_1 \leq \alpha.(q_2 - q_1)$$

Així, doncs, com que $P_0 - q_1 - \alpha\ (q_2 - q_1) \leq 0$, tindrem

$$\left(\overline{P}(\alpha)(t)\right)' = -k.e^{-kt}\ \left(P_0 - q_1 - \alpha\ (q_2 - q_1)\right) \geq 0$$

En conseqüència, en aquest segon subcas la trajectòria dels α-talls superiors del preu és creixent pels α considerats.

<u>TERCER CAS</u>: $\boxed{q_2 \leq P_0 \leq q_3}$

a) <u>Extrems inferiors</u>: Per la trajectòria dels α-talls inferiors s'han de distingir els dos subcasos següents:

PRIMER SUBCAS: $\boxed{\alpha \leq \frac{q_3 - P_0}{q_3 - q_2}}$

Per aquests valors d'α es verifica $q_3 - P_0 \geq \alpha.(q_3 - q_2)$.

Mutiplicant per -1,

$$P_0 - q_3 \leq -\alpha.(q_3 - q_2)$$

Així, doncs, $P_0 - q_3 + \alpha\ (q_3 - q_2) \geq 0$, i per tant

$$\left(\underline{P}(\alpha)(t)\right)' = -k.e^{-kt}\ \left(P_0 - q_3 + \alpha\ (q_3 - q_2)\right) \geq 0$$

Resulta que, en aquest subcas, la trajectòria dels α-talls inferiors del preu és creixent pels α considerats.

SEGON SUBCAS: $\boxed{\alpha \geq \frac{q_3 - P_0}{q_3 - q_2}}$

De manera similar al subcas anterior, per aquests valors d'α es verifica $P_0 - q_3 \geq -\alpha.(q_3 - q_2)$

Així, doncs, com que $P_0 - q_3 + \alpha\ (q_3 - q_2) \leq 0$, tindrem

$$\left(\underline{P}(\alpha)(t)\right)' = -k.e^{-kt}\ \left(P_0 - q_3 + \alpha\ (q_3 - q_2)\right) \leq 0$$

Deduïm, doncs, que en aquest segon subcas la trajectòria dels α-talls superiors del preu és decreixent per als α considerats.

b) Extrems superiors: Amb arguments similars als del cas anterior es demostra que

$$\left(\overline{P}(\alpha)(t)\right)' = -k.e^{-kt}\ \left(P_0 - q_1 - \alpha\ (q_2 - q_1)\right) \leq 0$$

Per tant, la trajectòria dels α-talls superiors del preu és decreixent per qualsevol α.

QUART CAS: $\boxed{P_0 \geq q_3}$

a) Extrems inferiors: Com que $q_3 > q_2$ també és

$$P_0 - q_3 \geq q_2 - q_3 \geq \alpha.(q_2 - q_3) = -\ \alpha.(q_3 - q_2)$$

En resum, $P_0 - q_3 + \alpha\ (q_3 - q_2) \geq 0$, i així la derivada és

$$\left(\underline{P}(\alpha)(t)\right)' = -k.e^{-kt}\ \left(P_0 - q_3 + \alpha\ (q_3 - q_2)\right) \leq 0$$

Per tant, en aquest quart cas la trajectòria dels α-talls inferiors del preu és decreixent per qualsevol α.

b) Extrems superiors: Operant de manera anàloga, tenim

$$P_0 - q_1 \geq q_3 - q_1 \geq q_2 - q_1 \geq \alpha.(q_2 - q_1)$$

D'aquesta cadena de desigualtats resulta

$$P_0 - q_1 - \alpha\ (q_2 - q_1) \leq 0$$

La derivada de l'extrem superior és

$$\left(\overline{P}(\alpha)(t)\right)' = -k.e^{-kt}\ \left(P_0 - q_1 - \alpha\ (q_2 - q_1)\right) \leq 0$$

Concloem, observant que la trajectòria dels α-talls superiors del preu és decreixent per qualsevol α.

Resumim a continuació l'estudi del creixement/decreixement de les diferents trajectòries dels extrems inferiors i superiors del preu, [6.33-34], segons els casos analitzats que depenen de la posició del preu inicial P_0 dins la terna (q_1, q_2, q_3):

P	1r CAS	2n CAS	3r CAS	4t CAS
Ext Inf	Creix	Creix	1r Subcas **Creix** 2n Subcas **Decreix**	**Decreix**
	q_1	q_2	q_3	
Ext Sup	Creix	1r Subcas **Decreix** 2n Subcas **Creix**	**Decreix**	**Decreix**

A continuació particularitzarem numèricament l'estudi anterior, desenvolupant un cas concret.

Exemple

Sigui un model borrós dinàmic lineal d'equilibri de mercat, que ve representat per les equacions [6.21-22]:

$$\tilde{Q}_d = \tilde{a} - c.\tilde{P} \quad \text{i} \quad \tilde{Q}_s = -\tilde{b} + d.\tilde{P}$$

on $\tilde{a}=(4\ ,5\ ,5'5)$, $\tilde{b}=(2\ ,4\ ,4'5)$, $c=3$ i $d=1$, i on suposem que el preu inicial és $P_0=2$.

Sabem que les trajectòries del preu, [6.23], vénen donades per la família de corbes exponencials

$$\tilde{p}(t) = \left(P_0 - \frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{c+d}\right) e^{-kt} + \frac{\tilde{a}+\tilde{b}}{c+d}$$

on k és una constant de proporcionalitat. Suposem en aquest cas que k=2.

Recordem que els extrems del preu d'equilbri, vénen donats per les fórmules [6.33-34]; és a dir,

$$\underline{P}(\alpha)(t)=\left(P_0 - q_3\right).e^{-kt} + q_1 + \alpha\left((q_3-q_2)\ .e^{-kt} + q_2- q_1\right)$$

$$\overline{P}(\alpha)(t)=\left(P_0 - q_1\right).e^{-kt} + q_3 - \alpha\left((q_2-q_1)\ .e^{-kt} + q_3- q_2\right)$$

on, per [6.30-32], en aquest exemple tenim

$$q_1=\frac{4+2}{4}=1'5 \qquad q_2=\frac{5+4}{4}=2'25 \qquad q_3=\frac{5'5+4'5}{4}=2'5$$

Substituint, obtindrem

$$\boxed{\underline{P}(\alpha)(t)= -0'5.e^{-2t} +1'5 + \alpha.\left(0'25.e^{-2t} +0'75\right)} \qquad [6.39]$$

$$\boxed{\overline{P}(\alpha)(t)= 0'5.e^{-2t} +2'5 - \alpha.\left(0'75.e^{-2t} +0'25\right)} \qquad [6.40]$$

El preu d'equilibri borrós tindrà d'extrems

$$\underset{t\to+\infty}{\text{Lím}}\ \underline{P}(\alpha)(t) = 1'5 + 0'75.\alpha$$

$$\underset{t\to+\infty}{\text{Lím}}\ \overline{P}(\alpha)(t) = 2'5 - 0'25.\alpha$$

Comprovem que el *preu d'equilibri* $\tilde{P}_e$ ve donat [6.36], és a dir és el número borrós triangular (q_1, q_2, q_3), doncs

$$\tilde{P}_e=(1'5,\ 2'25,\ 2'5)$$

Calculem ara la derivada dels extrems del preu borrós

$$\left(\underline{P}(\alpha)(t)\right)' = e^{-2t} - 0'5.\alpha.e^{-2t} = (1-0'5.\alpha).e^{-2t}$$

$$\left(\overline{P}(\alpha)(t)\right)' = -e^{-2t} + 1'5.\alpha.e^{-2t} = (1'5.\alpha-1).e^{-2t}$$

Observem que com que $P_0=2$, i com que $1'5<2<2'25$, estem en el 2n cas, és a dir $q_1<P_0<q_2$, i que es complirà l'estudi efectuat.

En efecte, com que $\alpha\in[0, 1]$ i $e^{-2t}>0$, la trajectòria dels extrems inferiors del preu sempre serà creixent, perquè

$$\left(\underline{P}(\alpha)(t)\right)'\geq 0$$

En canvi, degut al factor 1'5.α-1, el signe de la derivada de l'extrem superior dependrà del valor d'α.

Si fem 1'5.α-1=0, obtindrem α=2/3. Així, doncs, si α<2/3 el signe del factor serà negatiu i, per tant,

$$\left(\overline{P}(\alpha)(t)\right)' \leq 0$$

Llavors, veiem que la trajectòria dels extrems superiors del preu serà decreixent per aquests valors d'α, tal com vam provar en el 1r subcas. Si fos α>2/3, tindríem que 1'5.α-1>0 i així

$$\left(\overline{P}(\alpha)(t)\right)' \geq 0$$

Per tant, la trajectòria dels extrems superiors del preu serà creixent per aquests valors d'α, cosa que confirma el 2n subcas.

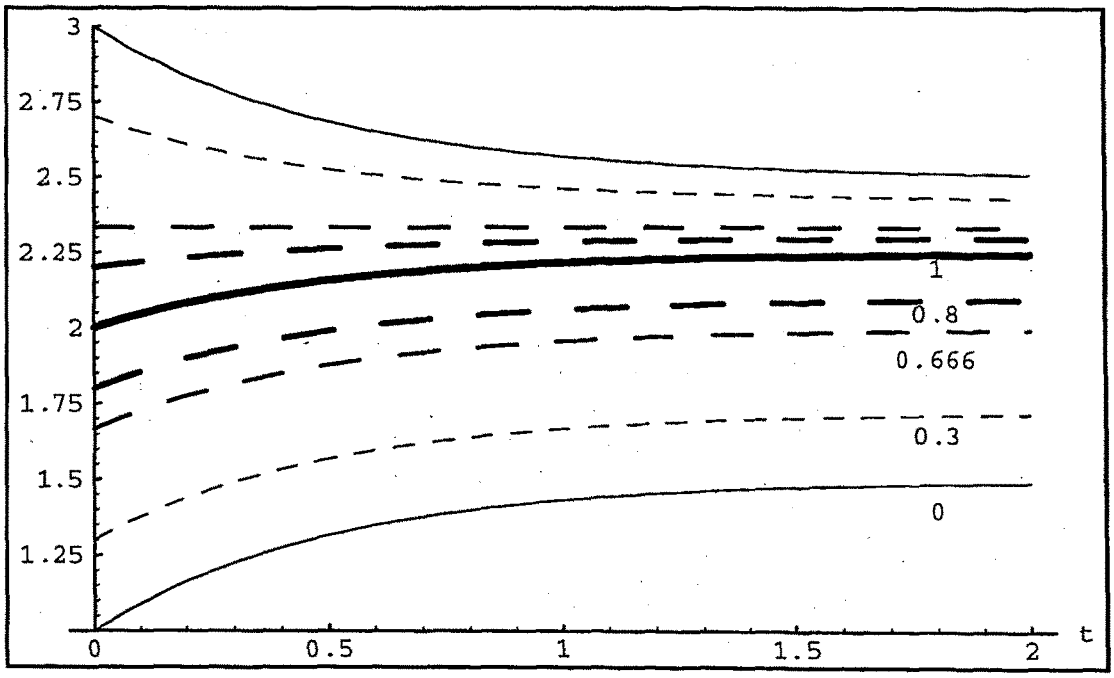


Fig.6.5 Extrems del preu d'equilibri

Comprovarem el creixement o decreixement de les trajectòries del preu d'equilibri, particularitzant per diferents valors d'α en els seus extrems inferior i superior, [6.39-40], és a dir en

$$\underline{P}(\alpha)(t) = (0'25.\alpha - 0'5).e^{-2t} + (0'75.\alpha + 1'5)$$

$$\overline{P}(\alpha)(t) = (0'5 - 0'75.\alpha).e^{-2t} + (2'5 - 0'25.\alpha)$$

Per α=0, apuntem les fórmules dels extrems, formem unes taules de valors i tot observant-ne la monotonia

$$\underline{P}(0)(t)= -0'5.e^{-2t} +1'5 \qquad \overline{P}(0)(t)= 0'5.e^{-2t} +2'5$$

t	0	0´5	1	+∞	
$\underline{P}(0)(t)$	1	1´32	1´43	1´5	Creix
$\overline{P}(0)(t)$	3	2´68	2´57	2´5	Decreix

Per α=0´3, resulta

$$\underline{P}(0'3)(t)= -0'425.e^{-2t} +1'725 \qquad \overline{P}(0'3)(t)= 0'275.e^{-2t} +2'425$$

t	0	0´5	1	+∞	
$\underline{P}(0'3)(t)$	1´3	1´57	1´67	1´725	Creix
$\overline{P}(0'3)(t)$	2´7	2´53	2´46	2´425	Decreix

Per α=2/3=0´666, tenim

$$\underline{P}(0'\widehat{6})(t)= -0'\widehat{3}.e^{-2t} +2 \qquad \overline{P}(0'\widehat{6})(t)= 2'\widehat{3}$$

t	0	0´5	1	+∞	
$\underline{P}(0'\widehat{6})(t)$	1´66	1´87	1´95	2	Creix
$\overline{P}(0'\widehat{6})(t)$	$2'\widehat{3}$	$2'\widehat{3}$	$2'\widehat{3}$	$2'\widehat{3}$	Constant

Per α=0´8, ens dóna

$$\underline{P}(0'8)(t)= -0'3.e^{-2t} +2'1 \qquad \overline{P}(0'8)(t)= -0'1.e^{-2t} +2'3$$

t	0	0´5	1	+∞	
$\underline{P}(0'8)(t)$	1´8	1´99	2´06	2´1	Creix
$\overline{P}(0'8)(t)$	2´2	2´26	2´29	2´3	Creix

Per α=0´1, resulta

$$\underline{P}(1)(t)= \overline{P}(1)(t)= -0'25.e^{-2t} +2'25$$

t	0	0´5	1	+∞	
$\underline{P}(1)(t)=\overline{P}(1)(t)$	2	2´16	2´22	2´25	Creix

6.3 ANÀLISI DE L'ESTABILITAT EN UN MODEL ECONÒMIC

6.3.1 EL MODEL DE LA TERANYINA

Un cas analític que es troba en qualsevol curs bàsic d'introducció a l'economia és l'anomenat *model de la teranyina.*

Considerem doncs, l'estudi d'un model econòmic d'oferta i demanda, en el qual tenim un únic producte, i on tant la quantitat demandada com l'ofertada són funcions lineals respecte al preu, considerant el preu en funció del *temps discret*, és a dir que varia en forma discontínua.

El model vé donat per les expressions següents:

$$\boxed{Q_D^t = c - a.P_{t+1}} \qquad \boxed{Q_S^t = -d + b.P_t} \qquad [6.41\text{-}42]$$

on tots els coeficients són positius, a,b,c,d>0.

A més, coneixem el preu a l'instant t=0, és a dir

$$\boxed{P(0)=P_0} \qquad [6.43]$$

En aquestes condicions volem trobar si existeix un temps (t) en el qual el mercat es trobi en *equilibri dinàmic*, és a dir, si es verifica:

$$\boxed{Q_D^t = Q_S^t} \qquad [6.44]$$

Si imposem aquesta condició i ordenem termes, obtindrem:

$$c-a.P_{t+1}=-d+b.P_t \quad , \quad a.P_{t+1}+b.P_t=c+d$$

Dividint per a, resulta

$$\boxed{P_{t+1}+\frac{b}{a}P_t=\frac{c+d}{a}} \qquad [6.45]$$

Observem que es tracta d'una equació en diferències de primer ordre de tipus lineal.

Resolent l'anterior equació en diferències , obtindrem

$$\boxed{P_t=\left(P_0 - \frac{c+d}{a+b}\right).(-1)^t.\left(\frac{b}{a}\right)^t+\frac{c+d}{a+b}} \qquad [6.46]$$

que ens dóna la relació entre el preu d'equilibri, P_t, i el temps.

Substituïnt aquest valor en les funcions de demanda i oferta, [6.41-42], respectivament, tindrem:

$$\boxed{Q_d= c - a.\left[\left(P_0- \frac{c+d}{a+b}\right).(-1)^{t+1}.\left(\frac{b}{a}\right)^{t+1} + \frac{c+d}{a+b}\right]} \qquad [6.47]$$

$$\boxed{Q_s= -d + b.\left[\left(P_0- \frac{c+d}{a+b}\right).(-1)^{t}.\left(\frac{b}{a}\right)^{t} + \frac{c+d}{a+b}\right]} \qquad [6.48]$$

De les dues expressions anteriors veiem que no existeix cap valor finit de t pel qual el mercat es trobi en equilibri. No obstant, si fem tendir el temps cap a l'infinit, i sempre que la relació b/a es mantingui inferior a la unitat amb valor absolut, llavors la demanda és igual a l'oferta.

En aquest cas el preu tendeix a un *preu límit* donat per [6.46]:

$$\boxed{P_\infty= \frac{c+d}{a+b}} \qquad [6.49]$$

amb el qual diem que la trajectòria temporal és convergent.

6.3.2 ESTUDI DE LA CONVERGÈNCIA DEL PREU CAP A L'EQUILIBRI EN EL MODEL ANTERIOR EN CONTEXT D'INCERTESA

A continuació volem analitzar la convergència de la trajectòria del preu en el model de la teranyina quan considerem la demanda i l'oferta números borrosos com a conseqüència de suposar que els coeficients del preu són números borrosos.

Suposem, doncs, que les funcions d'oferta i demanda vénen donades per les expressions

$$\boxed{\tilde{Q}_d = c - \tilde{a}.\tilde{P}_{t+1}} \qquad \boxed{\tilde{Q}_s = -d - \tilde{b}.\tilde{P}_t} \qquad [6.50\text{-}51]$$

on c i d són dos números reals positius, i $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$ dos números borrosos definits per les seves respectives funcions de pertinença o, equivalentment, pels seus α-talls:

$$\tilde{a} = \{(x, \mu_{\tilde{a}}(x))\} \quad \text{o} \quad a_\alpha = [\underline{a}(\alpha)\ ,\ \overline{a}(\alpha)]$$

$$\tilde{b} = \{(x, \mu_{\tilde{b}}(x))\} \quad \text{o} \quad b_\alpha = [\underline{b}(\alpha)\ ,\ \overline{b}(\alpha)]$$

A més, suposarem que els dos números borrosos anteriors són del tipus L-R definits positius i de suport acotat. Amb aquestes hipòtesis tindrem:

$$a_0 = [\underline{a}(0)\ ,\ \overline{a}(0)] \subset R^+ \qquad b_0 = [\underline{b}(0)\ ,\ \overline{b}(0)] \subset R^+$$

La funció de pertinença d'$\tilde{a}$ és

$$\mu_{\tilde{a}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \underline{a}(0) \\ L_a(x) & \text{si } \underline{a}(0) \leq x < a(1) \\ 1 & \text{si } x = a(1) \\ R_a(x) & \text{si } a(1) < x \leq \overline{a}(0) \\ 0 & \text{si } x > \overline{a}(0) \end{cases}$$

D'altra banda, la funció de pertinença de $\tilde{b}$ és

$$\mu_{\tilde{b}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < \underline{b}(0) \\ L_b(x) & \text{si } \underline{b}(0) \leq x < b(1) \\ 1 & \text{si } x = b(1) \\ R_b(x) & \text{si } b(1) < x \leq \overline{b}(0) \\ 0 & \text{si } x > \overline{b}(0) \end{cases}$$

Amb aquestes condicions podem determinar el preu per l'equació borrosa, que ve expressat per:

$$\boxed{\tilde{P}_t = \left(P_0 - \frac{c+d}{\tilde{a}+\tilde{b}}\right)(-1)^t \left(\frac{\tilde{b}}{\tilde{a}}\right)^t + \frac{c+d}{\tilde{a}+\tilde{b}}} \qquad [6.52]$$

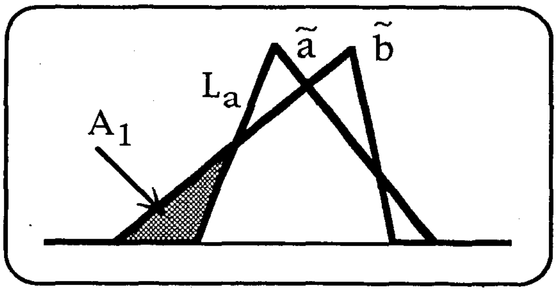
Per poder estudiar la convergència de la trajectòria del preu des d'un punt de vista de números borrosos, hem de comparar $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$.

Una manera podria ser a partir de la funció de pertinença de $\tilde{b}/\tilde{a}$, calculant la part proporcional d'àrea situada a l'esquerra de la recta x=1 i dins de la gràfica de la funció de pertinença de $\tilde{b}/\tilde{a}$ i de l'àrea tancada per aquesta funció de pertinença. Això, però, té el greu inconvenient de què la funció de pertinença de $\tilde{b}/\tilde{a}$ en general serà complicada i el càlcul d'aquestes àrees pot ser molt laboriós.

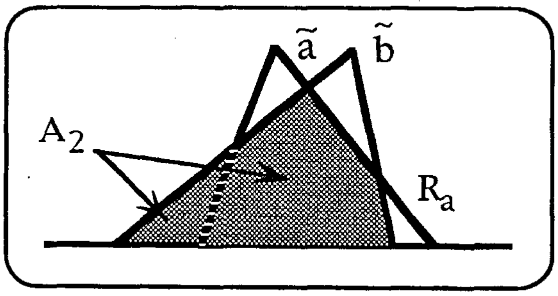
Proposem un mètode alternatiu definint el que anomenem el *coeficient de convergència del preu* que designarem per β.

$$\boxed{\beta=\frac{A_1+A_2}{2.A_T}} \qquad [6.53]$$

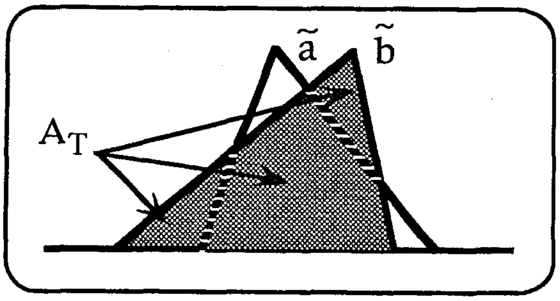
on A_1 és l'àrea situada a l'esquerra de L_a i dins de $\tilde{b}$:



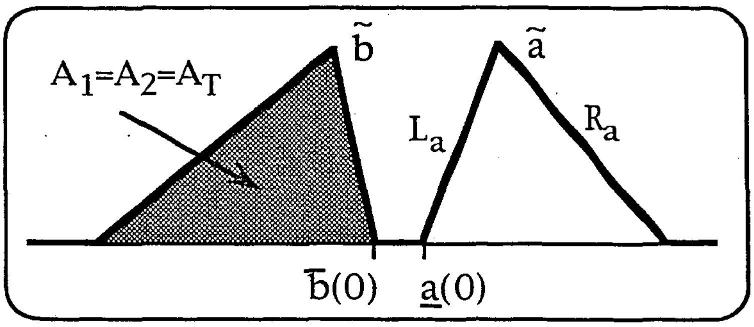
A_2 és l'àrea situada a l'esquerra de R_a i dins de $\tilde{b}$:



i A_T és l'àrea total limitada pel número borròs $\tilde{b}$:



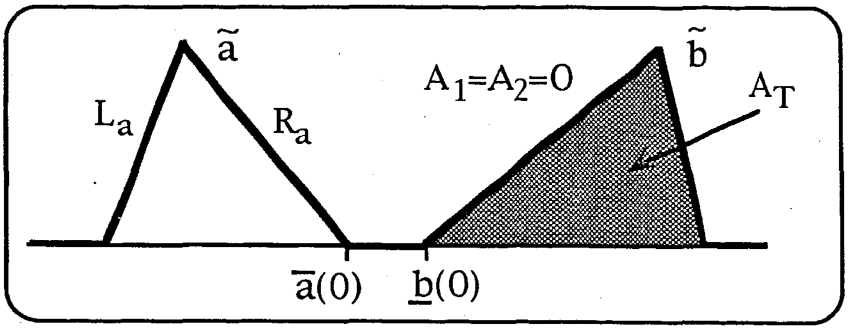
Notem que si $\overline{b}(0) \leq \underline{a}(0)$, llavors s'obté $\beta=1$, o sigui que la trajectòria serà convergent:



En efecte, simbolitzant per B l'àrea ombrejada en la figura

$$\beta=\frac{A_1+A_2}{2.A_T}=\frac{B+B}{2.B}=1\ .$$

En canvi, si $\underline{b}(0) \geq \overline{a}(0)$, tindrem $\beta=0$ i, per tant, la trajectòria no serà convergent:



Clarament, tindrem

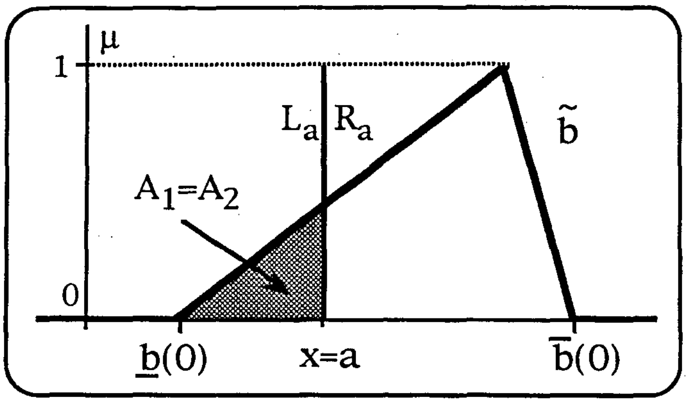
$$\beta=\frac{A_1+A_2}{2.A_T}=\frac{0+0}{2.B}=0\ .$$

En resum, el coeficient de convergència del preu β ens dóna la possibilitat de què la trajectòria del preu convergeixi cap al número borròs $(c+d)/(\tilde{a}+\tilde{b})$.

6.3.3 CAS PARTICULAR

Suposem que el número borròs $\tilde{a}$ sigui nítid. Si denominem $\tilde{c}=\tilde{b}/a$, llavors la funció de pertinença de $\tilde{c}$ serà $\mu_{\tilde{c}}(x)=\mu_{\tilde{b}}(a.x)$.

En aquest cas, podem observar que el coeficient de convergència del preu és la proporció entre l'àrea limitada a l'esquerra de la recta x=a amb la funció de pertinença del número borròs, i l'àrea total limitada per la funció de pertinença d'aquest número.



Es pot provar que el resultat anterior és equivalent a la proporció entre l'àrea situada a l'esquerra de la recta x=1 amb la funció de pertinença del número borròs $\tilde{c}=\tilde{b}/a$ i l'àrea limitada per la funció de pertinença del número borròs anterior.

En efecte, com que $A_1=A_2$ tindrem

$$\beta=\frac{A_1+A_2}{2.A_T}=\frac{2.A_1}{2.A_T}=\frac{A_1}{A_T}$$

En general, per a números borrosos no triangulars, serà

$$\beta=\int_{\underline{b}(0)}^{a}\mu_{\tilde{b}}(x).dx\Big/\int_{\underline{b}(0)}^{\overline{b}(0)}\mu_{\tilde{b}}(x).dx$$

Fent el canvi de variable x=a.t, tenim dx=a.dt, i els límits d'integració, com que t=x/a, s'hauran de dividir per a:

$$\beta=\int_{\underline{b}(0)/a}^{1}\mu_{\tilde{b}}(a.t).a.dt\Big/\int_{\underline{b}(0)/a}^{\overline{b}(0)/a}\mu_{\tilde{b}}(a.t).a.dt$$

Simplificant,

$$\beta=\int_{\underline{c}(0)}^{1}\mu_{\tilde{c}}(t).dt\Big/\int_{\underline{c}(0)}^{\overline{c}(0)}\mu_{\tilde{c}}(t).dt$$

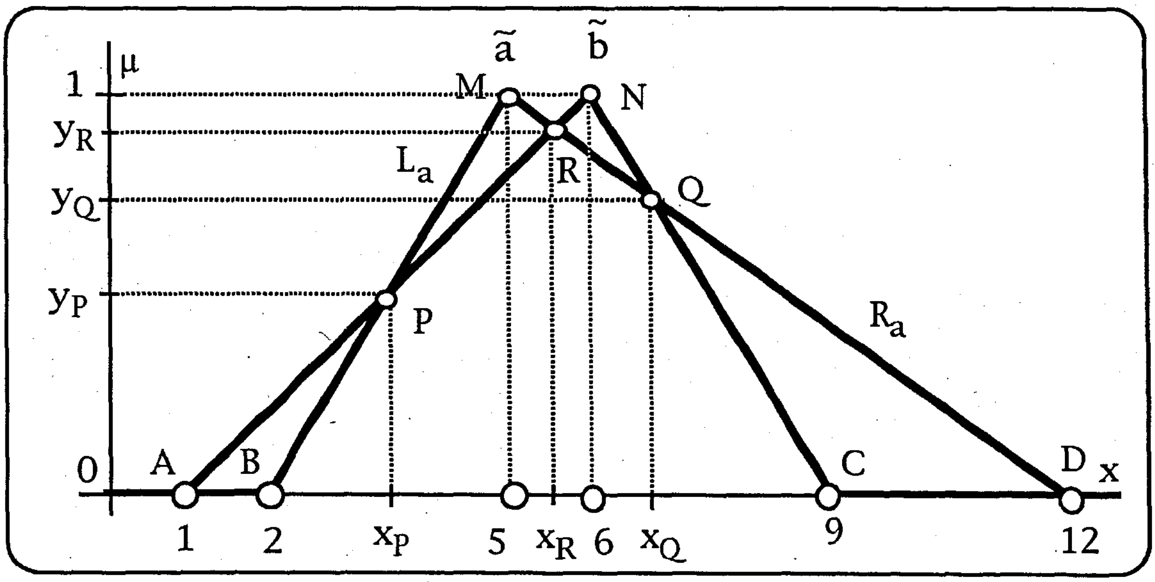
Per acabar, desenvoluparem dos exemples numèrics en els quals utilitzarem números borrosos triangulars.

EXEMPLE 1

Siguin els números borrosos triangulars $\tilde{a}=(2, 5,12)$ i $\tilde{b}=(1, 6,9)$, que tenen per funcions de pertinença respectives:

$$\mu_{\tilde{a}}(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{3} & \text{si } 2\leq x<5\\ \frac{12-x}{7} & \text{si } 5\leq x\leq 12\end{cases} \qquad \mu_{\tilde{b}}(x)=\begin{cases}\frac{x-1}{5} & \text{si } 1\leq x<6\\ \frac{9-x}{3} & \text{si } 6\leq x\leq 9\end{cases}$$

Fem la seva representació gràfica:



Trobem en primer lloc els punts d'intersecció:

$P=BM\cap AN$	$P\{y=(x-2)/3,\ y=(x-1)/5\}$	$P(3'5,\ 0'5)$
$Q=MD\cap NC$	$Q\{y=(12-x)/7,\ y=(9-x)/3\}$	$Q(6'75,\ 0'75)$
$R=MD\cap AN$	$R\{y=(12-x)/7,\ y=(x-1)/5\}$	$R(5'58,\ 0'92)$

Les àrees que hem de trobar són

$$A_1=[ABP]=(2-1).0'5/2=\ 0'25$$

$$A_2=[APRQC]=[ARx_R]+[x_RRQx_P]+[x_QQC]=$$

$$=\frac{(5'58-1).0'92}{2}+\frac{0'92+0'75}{2}.(6'75-5'58)+\frac{(9-6'75).0'75}{2}\cong 2'1068$$

$$A_T=[ANC]= (9\text{-}1).1/2= 4$$

Aleshores, el coeficient de convergència del preu serà

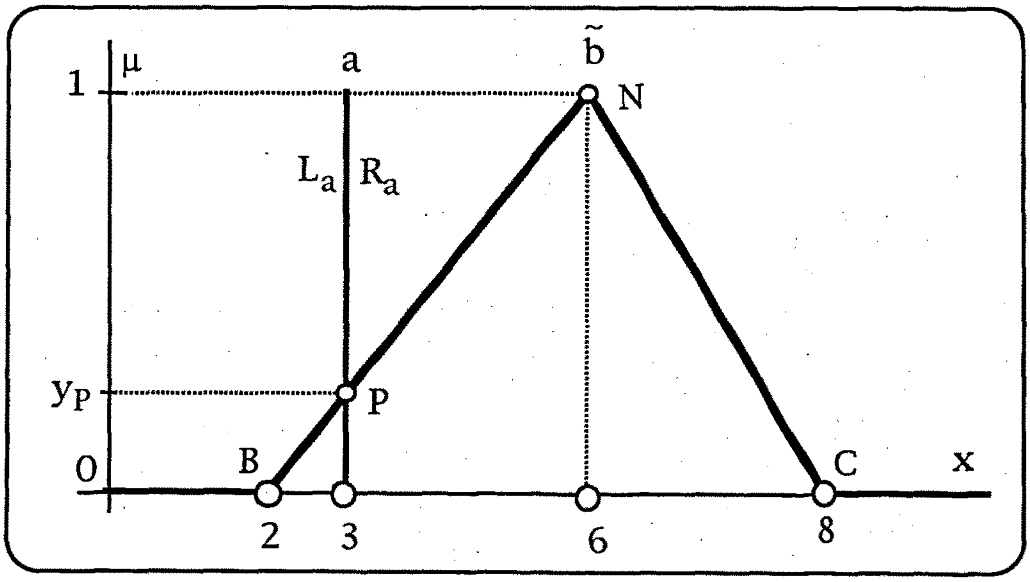
$$\beta=\frac{A_1+A_2}{2.A_T}=\frac{0'25+2'1068}{2.4}\cong 0'2946\ .$$

EXEMPLE 2

Suposem ara que el primer número borròs sigui nítid, que el seu valor sigui a=3 i que el segon número borròs sigui $\tilde{b}$=(2, 6, 8). La funció de pertinença de $\tilde{b}$ serà

$$\mu_{\tilde{b}}(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{4} & \text{si } 2\leq x<6\\ \frac{8-x}{2} & \text{si } 6\leq x\leq 8\end{cases}$$

En aquest cas tindrem la figura



Com que P={y=(x-2)/4, x=3}=(3, 0´25). Per tant, les àrees són

$$A_1=A_2=(3\text{-}2).0'25/2=0'125 \qquad A_T=(8\text{-}2).1/2=3$$

Així, el coeficient de convergència ens dóna

$$\beta=(A_1+A_2)/(2A_T)=0'125/3\approx\ 0'041.$$

CAPÍTOL 7

DUOPOLI: EQUILIBRI COURNOT-NASH EN CONTEXT D'INCERTESA

En el model de Cournot-Nash la variable de decisió de les dues empreses que competeixen en el mercat és el nivell de producció. En aquest capítol es pretén avançar en l'estudi del comportament de les empreses que competeixen en un context d'incertesa.

Per això, primer es presenta el model de Cournot-Nash en la seva versió més standard per analitzar a continuació el desenvolupament del mateix model en l'àmbit d'incertesa.

7.1 EL MODEL DE COURNOT-NASH

7.1.1 FORMALITZACIÓ MATEMÀTICA DEL MODEL

Suposem un mercat on només hi ha dues empreses 1 i 2 i sigui x el nivell de producció de l'empresa 1 i sigui y el nivell de producció de l'empresa 2. Aleshores el preu que els consumidors estan disposats a pagar dependrà de les quantitats produïdes per les dues empreses.

En conseqüència, el preu serà una funció que dependrà de la suma x+y, funció que l'expresarem com p(x+y).

Per tant la funció de benefici de l'empresa 1 vindrà donada per

$$\boxed{B_1= p(x+y).x- C_1(x)} \qquad [7.1]$$

on $C_1(x)$ és la funció de costos d'aquesta empresa.

De la mateixa manera, la funció de beneficis de l'empresa 2 serà

$$\boxed{B_2= p(x+y).x- C_2(y)} \qquad [7.2]$$

on $C_2(y)$ és la funció de costos d'aquesta empresa.

Fixat un nivell de producció de l'empresa 2, $\bar{y}$, l'empresa 1 ha de calcular quina és la quantitat de producció que maximitza els seus beneficis, B1, és a dir, l'empresa 1 determina el valor d'x* que verifica l'equació

$$dB_1/dx=0$$

Derivant [7.1] tindrem

$$\boxed{p'(x+\bar{y}).x + p(x+\bar{y}) - C_1'(x) =0} \qquad [7.3]$$

Igualment, fixat un nivell de producció de l'empresa 1, $\bar{x}$, l'empresa 2 calcula quina serà la quantitat de producció que maximitza els seus beneficis, és a dir, el valor y* tal que

$$dB_2/dx=0$$

Derivant [7.2] tindrem

$$\boxed{p'(\bar{x}+y).y + p(\bar{x}+y) - C_2'(y) = 0} \qquad [7.4]$$

Amb aquestes condicions, sigui $x=f_1(y)$ la funció que descriu l'elecció òptima del nivell de producció de l'empresa 1, donat el nivell de producció de l'empresa 2.

De manera similar, sigui $y=f_2(x)$ la funció que descriu l'elecció òptima del nivell de producció de l'empresa 2, donat el nivell de producció de l'empresa 1.

Notem que aquestes funcions s'anomenen respectivament *funció de reacció* de l'empresa 1 i funció de reacció de l'empresa 2.

El punt (x_1, y_1) que verifica les dues funcions de reacció (en cas d'existir), dóna lloc al que anomenem *equilibri de Cournot-Nash.*

7.1.2 Cas particular d'una funció lineal

Suposem ara que el preu que els consumidors estan disposats a pagar, $p(x+y)$, sigui una funció lineal de la suma dels nivells de producció, $x+y$, de les dues empreses. Per tant,

$$\boxed{p(x+y)= a -b.(x+y)} \qquad [7.5]$$

on els coeficients són positius, $a,b>0$.

Llavors, les funcions d'ingressos respectives seran

$$\boxed{I_1(x+y)=[a-b(x+y)].x} \qquad [7.6]$$

$$\boxed{I_2(x+y)=[a-b(x+y)].y} \qquad [7.7]$$

Suposem, a més, que

$$\boxed{C_1(x)=F_1+c.x} \qquad [7.8]$$

on F_1 representa els costos fixos i c el cost marginal per unitat de producció de l'empresa 1.

i també que

$$\boxed{C_2(y)=F_2+c'.y} \qquad [7.9]$$

on F_2 representa els costos fixos i c' el cost marginal per unitat de producció de l'empresa 2.

Aleshores, les funcions de beneficis de les empreses 1 i 2 són respectivament:

$$B_1= I_1(x,\ y)-C_1(x) \qquad B_2= I_2(x,\ y)-C_2(y)$$

Substituint per les expressions [7.6-9], tindrem

$$B_1= [a-b(x+y)].x - (F_1+c.x)$$

$$B_2= [a-b(x+y)].y - (F_2+c'.y)$$

Operant i ordenant,

$$B_1= (a-c).x - b.(x^2 + x.y) - F_1$$

$$B_2= (a-c').y - b.(y^2 + x.y) - F_2$$

En el cas que l'empresa 1 suposi que l'empresa 2 tingui un nivell de producció, $y=\overline{y}$, llavors la funció beneficis de l'empresa 1 serà:

$$\boxed{B_1= (a-c).x - b.(x^2 +.x.\overline{y})- F_1} \qquad [7.10]$$

Així, la quantitat de producció, x^*, que maximitza els beneficics de l'empresa 1, $dB_1/dx=0$, vindrà donada per l'equació

$$(a-c)-b.(2x + \overline{y}) =0$$

Aïllant x obtindrem la funció de reacció de l'empresa 1

$$\boxed{x= \frac{a-c}{2b} - \frac{y}{2}} \qquad [7.11]$$

De forma similar, l'empresa 2 suposa que l'empresa 1 té un nivell de producció $x=\overline{x}$, amb la qual cosa la funció de beneficis de l'empresa 2 serà:

$$\boxed{B_2= (a-c').y - b.(y^2 +.\overline{x}.y) - F_2} \qquad [7.12]$$

Aleshores la quantitat de producció, y*, que maximitza els beneficis de l'empresa 2, dB_2/dx, vindrà donada per l'equació:

$$(a-c')-b.(2y + \bar{x}) = 0$$

Aïllant y obtindrem la funció de reacció de l'empresa 2

$$\boxed{y = \frac{a-c'}{2b} - \frac{x}{2}} \qquad [7.13]$$

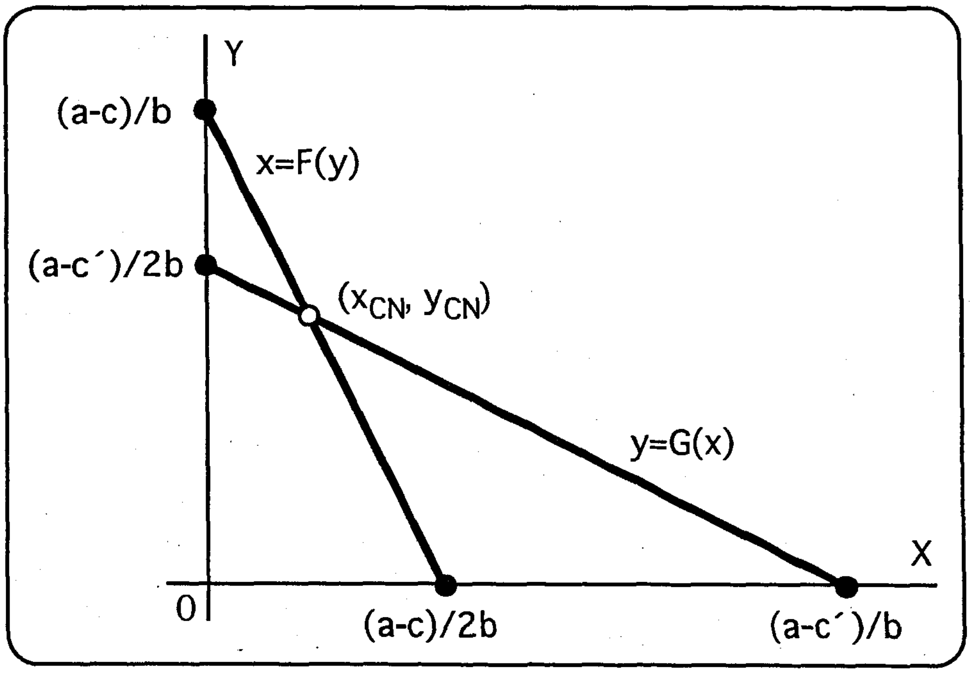


Fig.7.1 Punt d'equilibri de Cournot-Nash

Resolent el sistema format per les dues equacions lineals [7.11] i [7.13], obtenim:

$$\boxed{x_{CN} = \frac{a-2c+c'}{3b}} \qquad \boxed{y_{CN} = \frac{a-2c'+c}{3b}} \qquad [7.14\text{-}15]$$

on CN simbolitza que es tracta de l'equilibri de Cournot-Nash.

7.2 EQUILIBRI DE COURNOT-NASH EN UN CONTEXT D'INCERTESA

7.2.1 FORMALITZACIÓ MATEMÀTICA EN LA INCERTESA

En la realitat és difícil donar per suposat que cadascuna de les empreses coneix amb certesa el comportament de la seva competidora, per la qual cosa creiem que l'anàlisi del model de Cournot-Nash en un context d'incertesa, pot oferir una nova i interessant perspectiva d'estudi.

En primer lloc, desenvoluparem el cas general en el qual la funció p(x+y) només li exigim que sigui decreixent respecte a les variables x i y. Suposarem també que l'empresa 2 no coneix amb exactitud quins són els costos marginals per unitat de producció de l'empresa 1, i recíprocament.

Per aquest motiu cosiderarem que aquests costos s'expressen a través de dos números borrosos triangulars; en altres paraules, l'empresa 2 suposa que els costos marginals per unitat de producció de l'empresa 1 vénen donats pel número borrós triangular:

$$\tilde{c} = (c_1, c_2, c_3)$$

De la mateixa manera, l'empresa 1 suposa que els costos marginals per unitat de producció de l'empresa 2 vénen donats pel número borrós triangular:

$$\tilde{c}' = (c'_1, c'_2, c'_3)$$

En conseqüència, per cada nivell y de producció de l'empresa 2, resultarà que la funció de reacció de l'empresa 1 vindrà donada pel número borrós triangular:

$$\boxed{\tilde{x} = \tilde{F}(y) = (F_1(y), F_2(y), F_3(y))} \qquad [7.16]$$

De la mateixa manera, per cada nivell x de producció de l'empresa 1, la funció de reacció de l'empresa 2 vindrà donada pel NBT:

$$\boxed{\tilde{y} = \tilde{G}(x) = (G_1(x), G_2(x), G_3(x))} \qquad [7.17]$$

Notem que l'equació [7.16] engendra per cada valor de y=k un número borrós $\widetilde{A}$ en R^2, definit a partir dels següents punt de R^3:

$$P=(F_1(k), k, 0)\ ,\ Q=(F_2(k), k, 1)\ ,\ R=(F_3(k), k, 0)$$

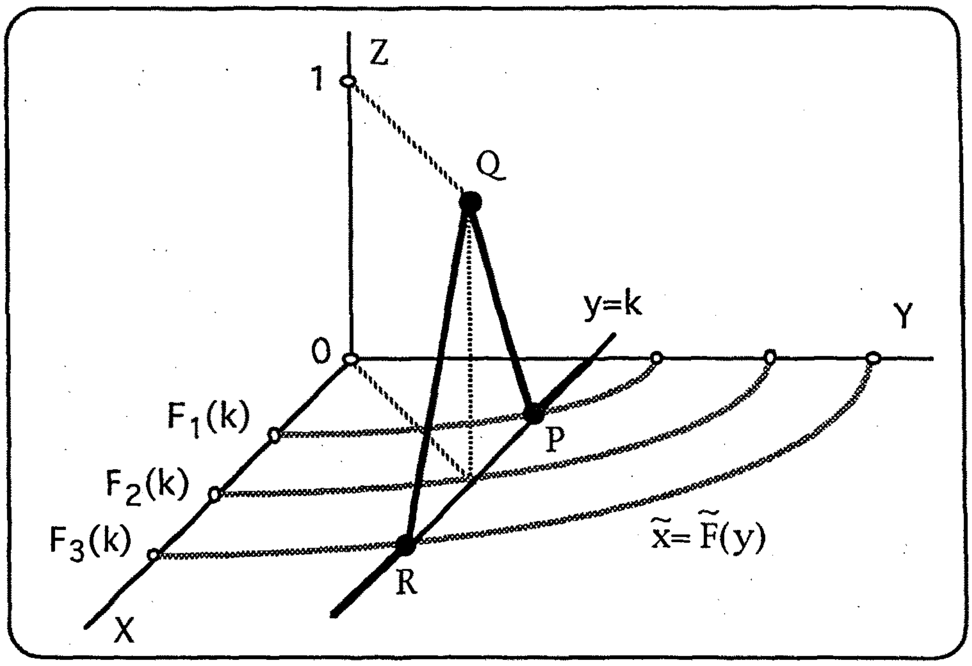


Fig.7.2 Número borrós triangular $\widetilde{A}$

Tot seguit, anem a calcular la funció de pertinença d'aquest número borrós. Calculem la diferència entre els punts P i Q, obtenint el següent vector director de la recta que uneix aquests punts;

$$v= P-Q= (F_1(k)-F_2(k), 0, -1)$$

Conseqüentment, l'equació de la recta, $x=x_P+\lambda.v_x$, $y=y_P+\lambda.v_y$ i $z=z_P+\lambda.v_z$, serà

$$\boxed{x=F_1(k) + \lambda.(F_1(k)-F_2(k))\ ,\quad y=k\ ,\quad z=-\lambda} \qquad [7.18]$$

Eliminant en [7.18] els paràmetres k i λ, obtenim

$$x= F_1(y) + z.(F_1(y)-F_2(y))\ ,\quad z.(F_1(y)-F_2(y)=F_1(y)-x$$

I aïllant la variable z,

$$\boxed{z=\frac{F_1(y) - x}{F_1(y) - F_2(y)}} \qquad [7.19]$$

Notem que z és una funció de les variables x i y amb domini D_1, que és la regió d'R^2 definida per

$$D_1 = \left\{(x,\ y) \in R^2 \ /\ F_1(y) \le x \le F_3(y)\right\}$$

De manera similar, calculant la diferència entre els punts Q i R, obtenim el següent vector director de la recta que uneix aquests punts

$$w = Q\text{-}R = (F_2(k)-F_3(k),\ 0,\ 1)$$

i, per tant, l'equació de la recta, $x=x_Q+\lambda.w_x$, $y=y_Q+\lambda.w_y$ i $z=z_Q+\lambda.w_z$, serà:

$$\boxed{x= F_2(k) + \lambda.(F_2(k)-F_3(k)) \ ,\ y=k \ ,\ z=1+\lambda} \qquad [7.20]$$

Eliminant en [7.20] els paràmetres k i λ,

$$x= F_2(y) + (z-1)(F_2(y)-F_3(y)) \quad , \quad z.(F_2(y)-F_3(y)= x-F_3(y)$$

I aïllant la variable z, obtenim

$$\boxed{z = \frac{x - F_1(y)}{F_2(y) - F_3(y)}} \qquad [7.20]$$

Igual que abans, z és una funció de les variables x i y amb domini D_2, que és la regió d'R^2 definida per

$$D_2 = \left\{(x,\ y) \in R^2 \ /\ G_1(x) \le y \le G_3(x)\right\}$$

Finalment, la funció de pertinença del número borrós $\widetilde{A}$, resulta que ve donada per:

$$\boxed{\mu_{\widetilde{A}}(x\ ,y) = \begin{cases} \dfrac{F_1(y)-x}{F_1(y)-F_2(y)} & \text{si } F_1(y) \le x \le F_2(y) \\[2ex] \dfrac{x - F_1(y)}{F_2(y)-F_3(y)} & \text{si } F_2(y) \le x \le F_3(y) \end{cases}} \qquad [7.21]$$

Seguint un camí similar a partir de l'equació [7.17], s'engendra per cada valor x=k un número borrós $\tilde{B}$ en R^2, tal com podem veure en la figura següent:

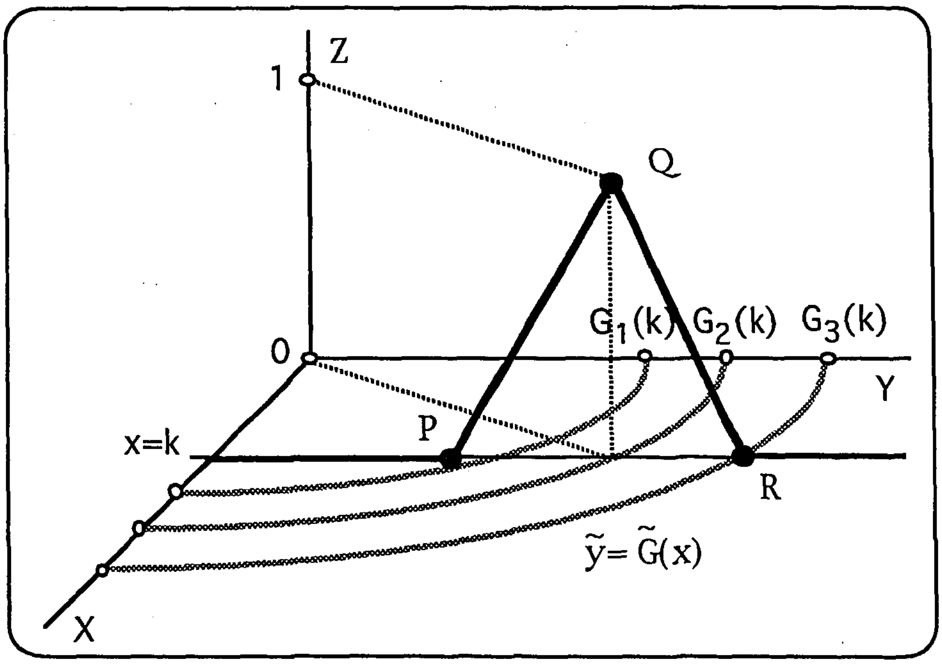


Fig.7.3 Número borrós triangular $\tilde{B}$

Es comprova que la seva funció de pertinença és

$$\mu_{\tilde{B}}(x\ ,y)=\begin{cases} \dfrac{G_1(x)-y}{G_1(x)-G_2(x)} & \text{si } G_1(x) \leq y \leq G_2(x) \\ \dfrac{y - G_1(x)}{G_2(x)-G_3(x)} & \text{si } G_2(x) \leq y \leq G_3(x) \end{cases} \qquad [7.22]$$

Notem que aquestes dues funcions de pertinença es podrien haver obtingut a partir del fet que els números borrosos $\tilde{x}$ i $\tilde{y}$ són triangulars, però hem preferit fer el seu desenvolupament per veure millor els suports dels números borrosos que s'engendren a partir d'ells

Efectuant la intersecció dels números borosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, obtenim el conjunt borrós $\tilde{D}$ que representa el valor incert per l'equilibri de Cournot-Nash, és a dir

$$\tilde{D}=\tilde{A}\cap\tilde{B}$$

La seva funció de pertinença és

$$\mu_{\tilde{D}}(x , y)=\mu_{\tilde{A}}(x , y) \wedge \mu_{\tilde{B}}(x , y)$$

Des del punt de vista econòmic, per tal que tingui sentit l'expresió anterior cal que

$$\tilde{D} \subset \left(R^2\right)^+$$

El número borrós D ens dóna lloc a la regió d'equilibri de Cournot-Nash i ve representat pel número borrós D. Desfuzzificant,

$$\boxed{\overline{x}_{CN}=\frac{\iint_D x.\mu_{\tilde{D}}(x, y).dx.dy}{\iint_D \mu_{\tilde{D}}(x, y).dx.dy}} \qquad [7.23]$$

$$\boxed{\overline{y}_{CN}=\frac{\iint_D y.\mu_{\tilde{D}}(x, y).dx.dy}{\iint_D \mu_{\tilde{D}}(x, y).dx.dy}} \qquad [7.24]$$

7.2.2 CAS PARTICULAR DE FUNCIONS LINEALS

Considerem el cas particular en què la funció p(x+y) sigui lineal, és a dir, del tipus següent, on a,b>0,

$$\boxed{p(x+y)= a-b(x+y)} \qquad [7.25]$$

Si tenim en compte [7.11] aplicada al cas borrós, resulta

$$\tilde{x}= \tilde{F}(y)= \frac{a - \tilde{c}}{2b} - \frac{y}{2}$$

Substituint i operant,

$$\tilde{x}= \frac{(a, a, a) - (c_1, c_2, c_3)}{2b} - \frac{(y, y, y)}{2} = \left(\frac{a-c_3}{2b} - \frac{y}{2}, \frac{a-c_2}{2b} - \frac{y}{2}, \frac{a-c_1}{2b} - \frac{y}{2} \right)$$

Per tant, el número borrós triangular $\tilde{x}$ vindrà expressat per la terna de funcions

$$F_1(y)=\frac{a-c_3}{2b}-\frac{y}{2}\ ,\quad F_2(y)=\frac{a-c_2}{2b}-\frac{y}{2}\ ,\quad F_3(y)=\frac{a-c_1}{2b}-\frac{y}{2}$$

La seva funció de pertinença serà,

$$\mu_{\tilde{A}}(x, y)=\begin{cases}\dfrac{x-F_1(y)}{F_2(y)-F_1(y)} & \text{si } F_1(y)\le x\le F_2(y)\\[2ex] \dfrac{F_3(y)-x}{F_3(y)-F_2(y)} & \text{si } F_2(y)\le x\le F_3(y)\end{cases}$$

Substituint per les expressions anteriors,

$$\boxed{\mu_{\tilde{A}}(x, y)=\begin{cases}\dfrac{-a+c_3+by+2bx}{c_3-c_2} & \text{si } \dfrac{a-c_3}{2b}-\dfrac{y}{2}\le x\le \dfrac{a-c_2}{2b}-\dfrac{y}{2}\\[2ex] \dfrac{a-c_1-by-2bx}{c_2-c_1} & \text{si } \dfrac{a-c_2}{2b}-\dfrac{y}{2}\le x\le \dfrac{a-c_1}{2b}-\dfrac{y}{2}\end{cases}} \qquad [7.26]$$

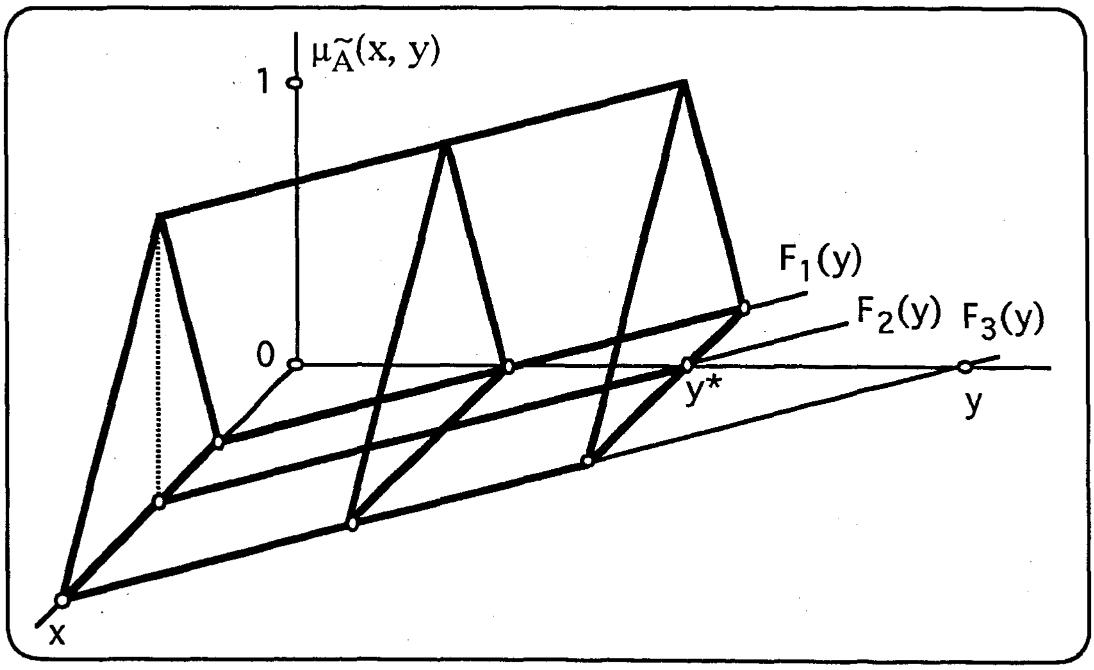


Fig.7.4 Representació gràfica de $\tilde{x}=\tilde{F}(y)$

De manera similar, aplicant [7.13] al cas borrós,

$$\tilde{y}=\tilde{G}(x)=\frac{a-\tilde{c}'}{2b}-\frac{x}{2}$$

Substituint i operant,

$$\tilde{y}=\frac{(a,\ a,\ a)-(c'_1,\ c'_2,\ c'_3)}{2\,b}-\frac{(x,\ x,\ x)}{2}=\left(\frac{a-c'_3}{2\,b}-\frac{x}{2},\frac{a-c'_2}{2\,b}-\frac{x}{2},\frac{a-c'_1}{2\,b}-\frac{x}{2}\right)$$

En conseqüència, el NBT $\tilde{y}$ vindrà expressat per la terna

$$G_1(x)=\frac{a-c'_3}{2\,b}-\frac{x}{2}\ ,\quad G_2(x)=\frac{a-c'_2}{2\,b}-\frac{x}{2}\ ,\quad G_3(x)=\frac{a-c'_1}{2\,b}-\frac{x}{2}$$

La seva funció de pertinença serà, doncs,

$$\mu_{\tilde{B}}(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{y-G_1(x)}{G_2(x)-G_1(x)} & \text{si } G_1(x)\le y\le G_2(x)\\[2ex] \dfrac{G_3(x)-y}{G_3(x)-G_2(x)} & \text{si } G_2(x)\le y\le G_3(x)\end{cases}$$

$$\boxed{\mu_{\tilde{B}}(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{-a+c'_3+by+2bx}{c'_3-c'_2} & \text{si } \dfrac{a-c'_3}{2\,b}-\dfrac{x}{2}\le y\le\dfrac{a-c'_2}{2\,b}-\dfrac{x}{2}\\[2ex] \dfrac{a-c'_1-by-2bx}{c'_2-c'_1} & \text{si } \dfrac{a-c'_2}{2\,b}-\dfrac{x}{2}\le y\le\dfrac{a-c'_1}{2\,b}-\dfrac{x}{2}\end{cases}} \qquad [7.27]$$

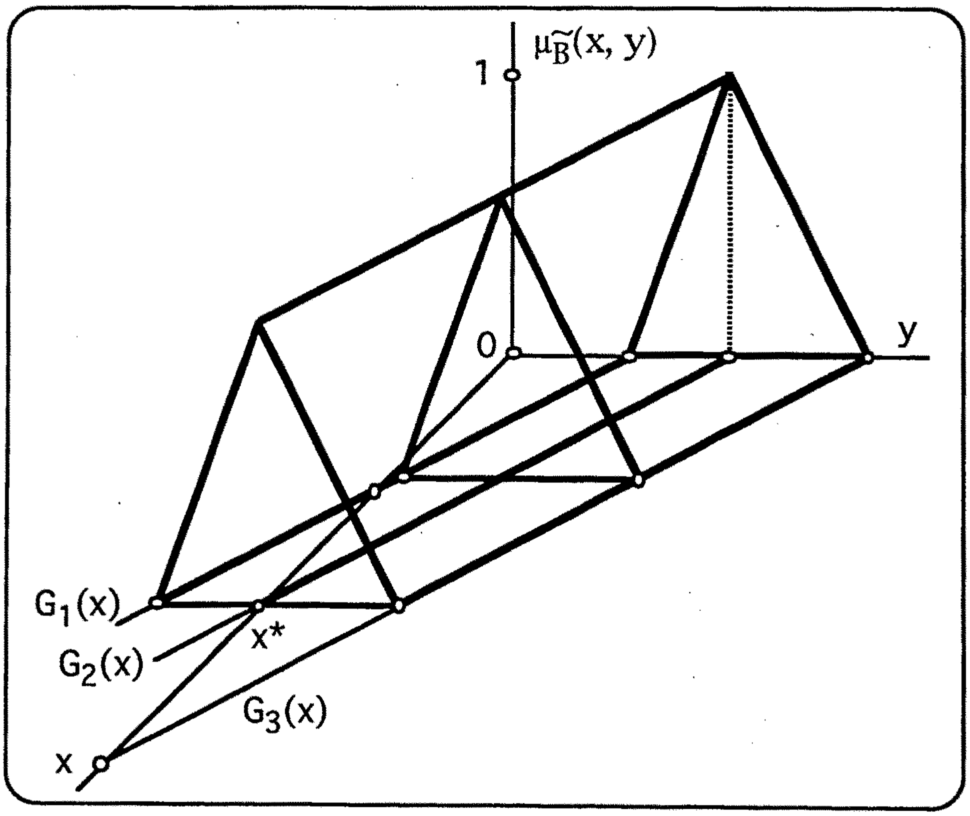


Fig.7.5 Representació gràfica de $\tilde{y}=\tilde{G}(x)$

És clar que, en l'equilibri de Cournot-Nash en el cas borrós, s'hauran de verificar conjuntament les expressions [7.11] i [7.13], originant-se el número borrós

$$\tilde{D}=\tilde{A}\cap\tilde{B}$$

que tindrà per funció de pertinença la que es dedueix de les funcions de pertinença dels NBTs $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, és a dir de les equacions [7.26] i [7.27].

La gràfica del número borrós $\tilde{D}$ serà evidentment la intersecció dels prismes esquematitzats en les figures 7.4 i 7.5:

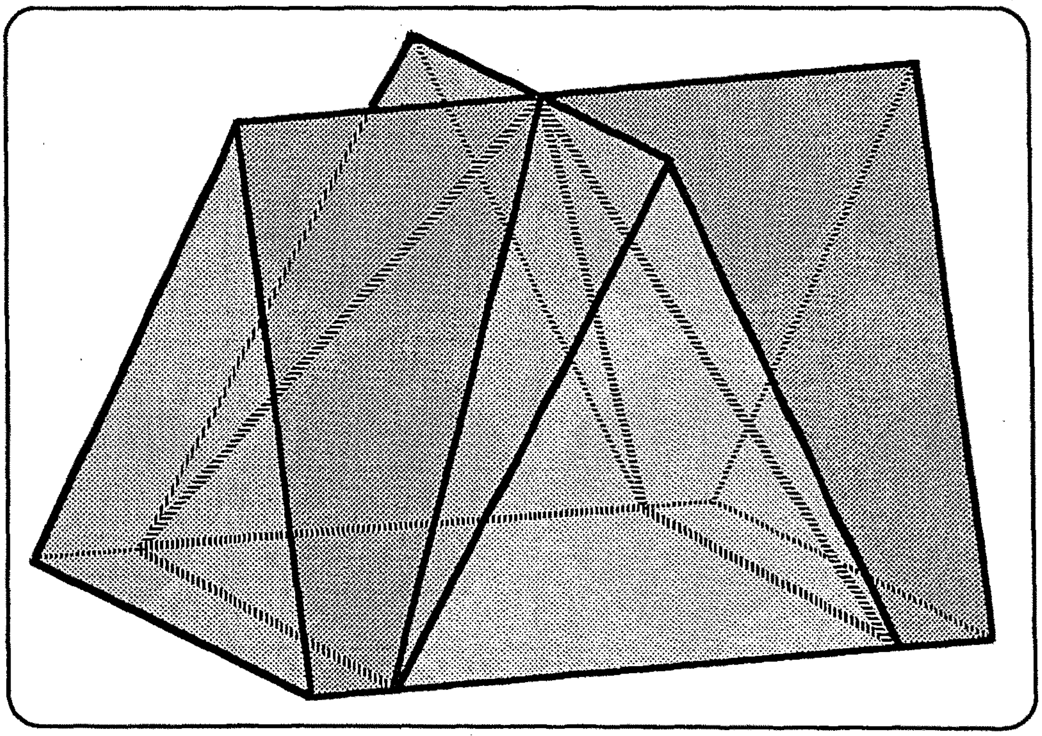


Fig.7.6 Representació gràfica de $\tilde{D}=\tilde{A}\cap\tilde{B}$

Amb la finalitat de realitzar un estudi més acurat d'aquesta intersecció, realitzarem a continuació una operació de canvi de coordenades, transformant els antics eixos X i Y en uns de nous, U i V. D'aquesta manera, pretenem que la base de la intersecció dels dos prismes (figures 7.4 i 7.5), en forma de paral·lelogram, es transformi en un rectangle que tingui els costats paral·lels als eixos, amb la qual cosa l'anàlisi de la figura 7.6 serà més senzilla.

Emprant els canvis de coordenades

$$\boxed{u=\frac{2x+y}{3}}\ ,\ \boxed{p=\frac{a-c_3}{3\,b}}\ ,\ \boxed{q=\frac{a-c_2}{3\,b}}\ ,\ \boxed{r=\frac{a-c_1}{3\,b}} \qquad [7.28\text{-}31]$$

$$\boxed{v=\frac{x+2y}{3}}\ ,\ \boxed{p'=\frac{a-c'_3}{3\,b}}\ ,\ \boxed{q'=\frac{a-c'_2}{3\,b}}\ ,\ \boxed{r'=\frac{a-c'_1}{3\,b}} \qquad [7.32\text{-}35]$$

les funcions de pertinença [7.26-27]

$$\mu_{\tilde{A}}(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{-a+c_3+by+2bx}{c_3-c_2} & \text{si } \dfrac{a-c_3}{2\,b}-\dfrac{y}{2}\leq x\leq\dfrac{a-c_2}{2\,b}-\dfrac{y}{2}\\[2ex] \dfrac{a-c_1-by-2bx}{c_2-c_1} & \text{si } \dfrac{a-c_2}{2\,b}-\dfrac{y}{2}\leq x\leq\dfrac{a-c_1}{2\,b}-\dfrac{y}{2}\end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x,\ y)=\begin{cases}\dfrac{-a+c'_3+by+2bx}{c'_3-c'_2} & \text{si } \dfrac{a-c'_3}{2\,b}-\dfrac{x}{2}\leq y\leq\dfrac{a-c'_2}{2\,b}-\dfrac{x}{2}\\[2ex] \dfrac{a-c'_1-by-2bx}{c'_2-c'_1} & \text{si } \dfrac{a-c'_2}{2\,b}-\dfrac{x}{2}\leq y\leq\dfrac{a-c'_1}{2\,b}-\dfrac{x}{2}\end{cases}$$

es transformen en

$$\boxed{\mu_{\tilde{A}}(u,\ v)=\begin{cases}\dfrac{u-p}{q-p} & \text{si } p\leq u\leq q\\[2ex] \dfrac{r-u}{r-q} & \text{si } q<u\leq r\end{cases}} \qquad [7.36]$$

$$\boxed{\mu_{\tilde{B}}(u,\ v)=\begin{cases}\dfrac{v-p'}{q'-p'} & \text{si } p'\leq v\leq q'\\[2ex] \dfrac{r'-v}{r'-q'} & \text{si } q'<v\leq r'\end{cases}} \qquad [7.37]$$

En efecte. Comprovem per exemple el primer interval de [7.36],

$$\frac{u-p}{q-p}=\frac{\dfrac{2x+y}{3}-\dfrac{a-c_3}{3\,b}}{\dfrac{a-c_2}{3\,b}-\dfrac{a-c_3}{3\,b}}=\frac{b(2x+y)\ -\ (a-c_3)}{(a-c_2)\ -\ (a-c_3)}=\frac{-a+c_3+by+2bx}{c_3-c_2}$$

A més tenim que $p\leq u\leq q$ és equivalent a

$$\frac{a-c_3}{3\,b}\leq\frac{2x+y}{3}\leq\frac{a-c_2}{3\,b}\quad,\quad\frac{a-c_3}{2\,b}\leq\frac{2x+y}{2}\leq\frac{a-c_2}{2\,b}\quad,$$

$$\frac{a-c_3}{2b} \leq x + \frac{y}{2} \leq \frac{a-c_2}{2b} \quad , \quad \frac{a-c_3}{2b} - \frac{y}{2} \leq x \leq \frac{a-c_2}{2b} - \frac{y}{2} \;. \blacklozenge$$

A continuació trobarem la funció de pertinença del número borrós $\tilde{D}$, intersecció de $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$. Amb aquesta finalitat dividirem el rectangle engendrat en el pla UV en els quatre triangles indicats en la figura següent:

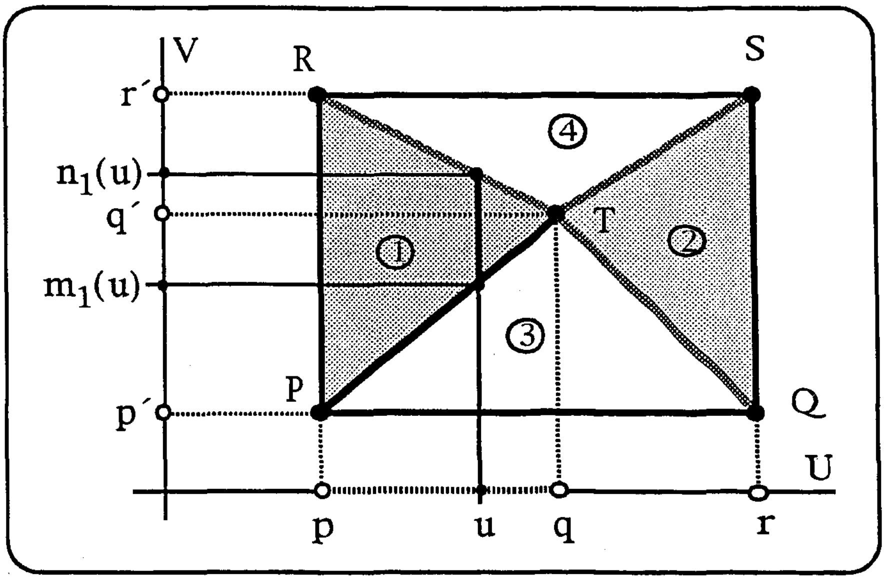


Fig.7.7 Càlcul dels valors de v en funció de u

Partim del primer triangle i calculem l'equació de la recta que passa pels punts P(p, p´) i T(q, q´):

$$\frac{u-p}{q-p} = \frac{v-p'}{q'-p'}$$

Aïllant v i simplificant,

$$v = \frac{u-p}{q-p}.(q'-p') + p' = \frac{uq'-up'-pq'+pp'+p'q-pp'}{q-p} = \frac{uq'-up'-pq'+p'q}{q-p}$$

Traient factor comú i com que $v=m_1(u)$, tindrem

$$\boxed{m_1(u) = \frac{q'(u-p) + p'(q-u)}{q-p}} \qquad [7.38]$$

Notem que en aquesta recta PT hi podem distingir:

- Els extrems inferior i superior de les u: $E_i(u)=p$ i $E_s(u)=q$

- Els extrems inferior i superior de les v: $E_i(v)=p'$ i $E_s(v)=q'$
- Els intervals inferior i superior de les u: $I_i(u)=u-p$ i $I_s(u)=q-u$

Substituint en [7.38] resulta

$$\boxed{v = \frac{E_s(v).I_i(u) + E_i(v).I_s(u)}{E_s(u)-E_i(u)}} \qquad [7.39]$$

Operant de manera similar en els triangles 1r i 2n, obtenim

$$\boxed{n_1(u) = \frac{q'(u-p) + r'(q-u)}{q-p}} \qquad [7.40]$$

$$\boxed{m_2(u) = \frac{q'(r-u) + p'(u-q)}{r-q}} \qquad [7.41]$$

$$\boxed{n_2(u) = \frac{q'(r-u) + r'(u-q)}{r-q}} \qquad [7.42]$$

Treballarem ara amb els triangles 3 i 4, tal com indiquem en la figura següent:

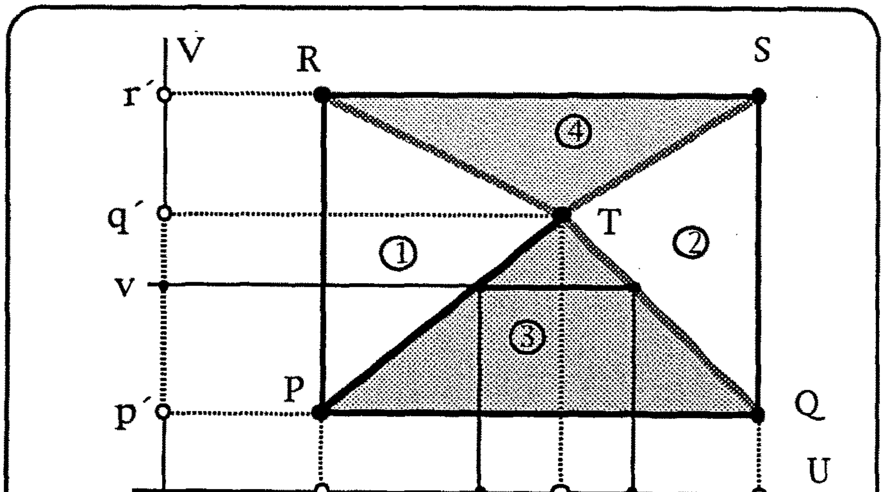


Fig.7.8 Càlcul dels valors de u en funció de v

Partim també de l'equació de la recta PT, on P(p, p´) i T(q, q´)

$$\frac{u-p}{q-p} = \frac{v-p'}{q'-p'}$$

Però ara aïllarem u,

$$u=\frac{v-p'}{q'-p'}.(q-p)+p=\frac{vq-vp-p'q+p'p+pq'-pp'}{q'-p'}=\frac{vq-vp-p'q+pq'}{q'-p'}$$

Traient factor comú i com que $u=m_3(v)$, tindrem

$$\boxed{m_3(v)=\frac{q(v-p')+p(q'-v)}{q'-p'}} \qquad [7.43]$$

En general, pels triangles 3 i 4 resultarà la mateixa expressió que [7.39], però intercanviant u per v

$$\boxed{u=\frac{E_s(u).I_i(v)+E_i(u).I_s(v)}{E_s(v)-E_i(v)}} \qquad [7.44]$$

Procedint així, o bé intercanviant en [7.40-42] les p, q, r i u per p´, q´, r´i v, respectivament, veurem que

$$\boxed{n_3(v)=\frac{q(v-p')+r(q'-v)}{q'-p'}} \qquad [7.45]$$

$$\boxed{m_4(v)=\frac{q(r'-v)+p'(v-q')}{r'-q'}} \qquad [7.46]$$

$$\boxed{n_4(v)=\frac{q(r'-v)+r(v-q')}{r'-q'}} \qquad [7.47]$$

En conseqüència, el número borrós $\tilde{D}=\tilde{A}\cap\tilde{B}$, tenint en compte les expressions anteriors tindrà per funció de pertinença la expressada en les quatre regions triangulars que hem dividit el rectangle de la base en el pla UV,

$$\boxed{\mu_{\tilde{D}}(u,v)=\begin{cases}\dfrac{u-p}{q-p} & \text{si } p\le u\le q \text{ i } m_1(u)\le v\le n_1(u)\\[2mm] \dfrac{r-u}{r-q} & \text{si } q\le u\le r \text{ i } m_2(u)\le v\le n_2(u)\\[2mm] \dfrac{v-p'}{q'-p'} & \text{si } m_3(v)\le u\le n_3(v) \text{ i } p'\le v\le q'\\[2mm] \dfrac{r'-v}{r'-q'} & \text{si } m_4(v)\le u\le n_4(v) \text{ i } q'\le v\le r'\end{cases}} \qquad [7.48]$$

Sabem que la gràfica del número borrós $\tilde{D}$ és una piràmide recta de base rectangular, tal com vam mostrar en la figura 7.6, on $\tilde{D}$ venia representat per la intersecció dels dos prismes $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$.

Per tal de calcular a continuació el *centre de gravetat* d'aquesta piràmide, observem que ve engendrada per la funció de pertinença anterior, [7.48].

Els càlculs pertinents els efectuarem descomposant la piràmide en els quatre tetraedres següents :

$$\boxed{T_1 = \left\{ (u,v,z) \in R^3 \;/\; z = \frac{u-p}{q-p} \;,\; p \le u \le q \;,\; m_1(u) \le v \le n_1(u) \right\}} \quad [7.49]$$

$$\boxed{T_2 = \left\{ (u,v,z) \in R^3 \;/\; z = \frac{r-u}{r-q} \;,\; q \le u \le r \;,\; m_2(u) \le v \le n_2(u) \right\}} \quad [7.50]$$

$$\boxed{T_3 = \left\{ (u,v,z) \in R^3 \;/\; z = \frac{v-p'}{q'-p'} \;,\; m_3(v) \le u \le n_3(v) \;,\; p' \le v \le q' \right\}} \quad [7.51]$$

$$\boxed{T_4 = \left\{ (u,v,z) \in R^3 \;/\; z = \frac{r'-v}{r'-q'} \;,\; m_4(v) \le u \le n_4(v) \;,\; q' \le v \le r' \right\}} \quad [7.52]$$

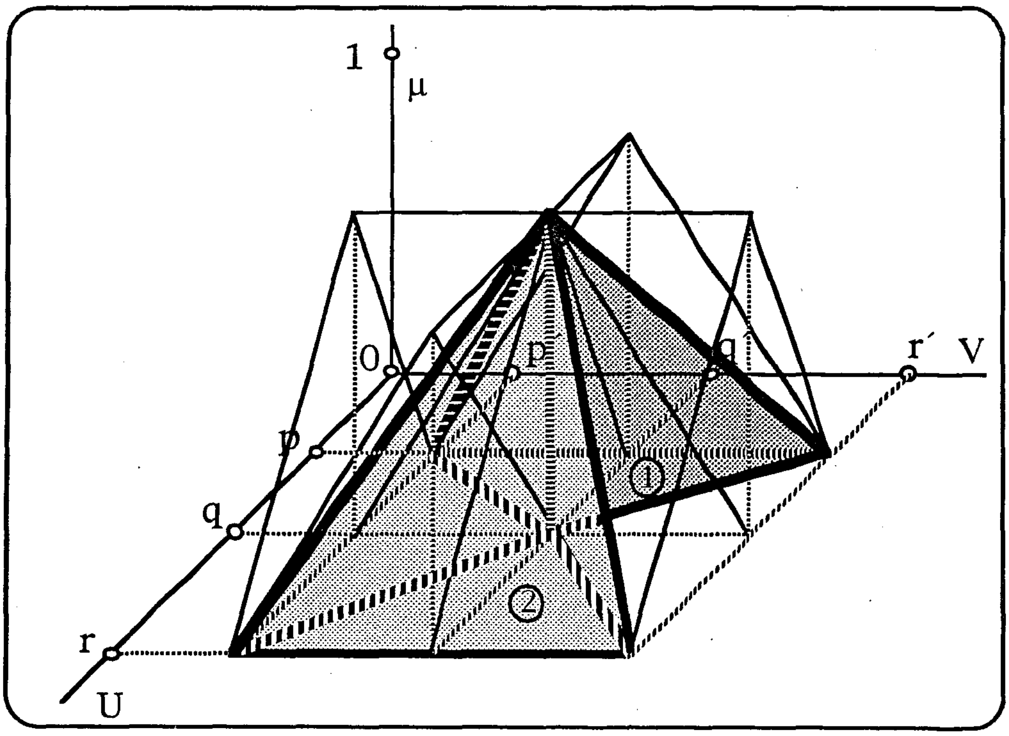


Fig.7.9 Esquema dels tetraedres 1 i 2

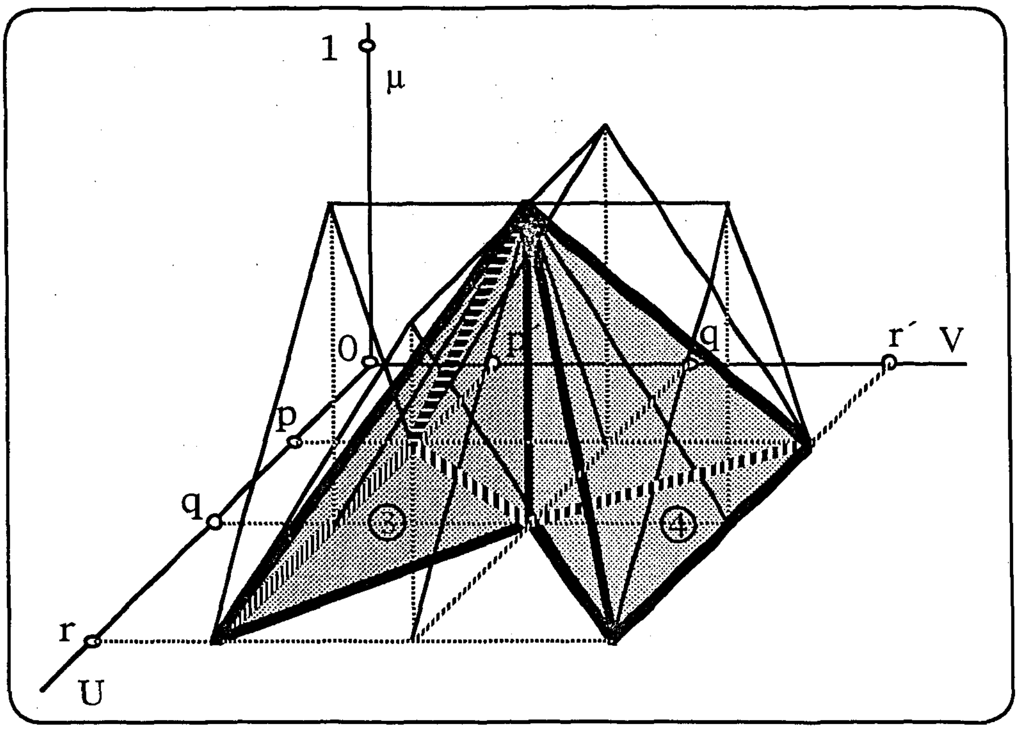


Fig.7.10 Esquema dels tetraedres 3 i 4

Per a calcular el centre de gravetat dels tetraedres, utilitzarem un símil físic, tot considerant que les masses de les àrees dels triangles originats per les interseccions dels tetraedres amb plans paral·lels al pla UV, tenen una densitat superficial de massa igual a la funció de pertinença (ρ=z), tal com podem veure en la figura 7.11 de la pàgina següent.

Partim del diferencial d'àrea dA=du.dv, per la qual cosa el diferencial de massa, dM=ρ.dA serà

$$dM=z.du.dv$$

Recordem que les coordenades del centre de massa vénen donades en general per

$$\overline{u}=\iint_R u.dM \Big/ \iint_R dM \qquad \overline{v}=\iint_R v.dM \Big/ \iint_R dM$$

on R és el recinte d'integració.

Notem que de [7.49] en el primer tetraedre, T_1, la densitat (igual a la funció de pertinença) serà $z=(u-p)/(q-p)$, mentre que la u variarà entre p i q, i la v entre $m_1(u)$ i $n_1(u)$, doncs dependrà del valor de la variable u.

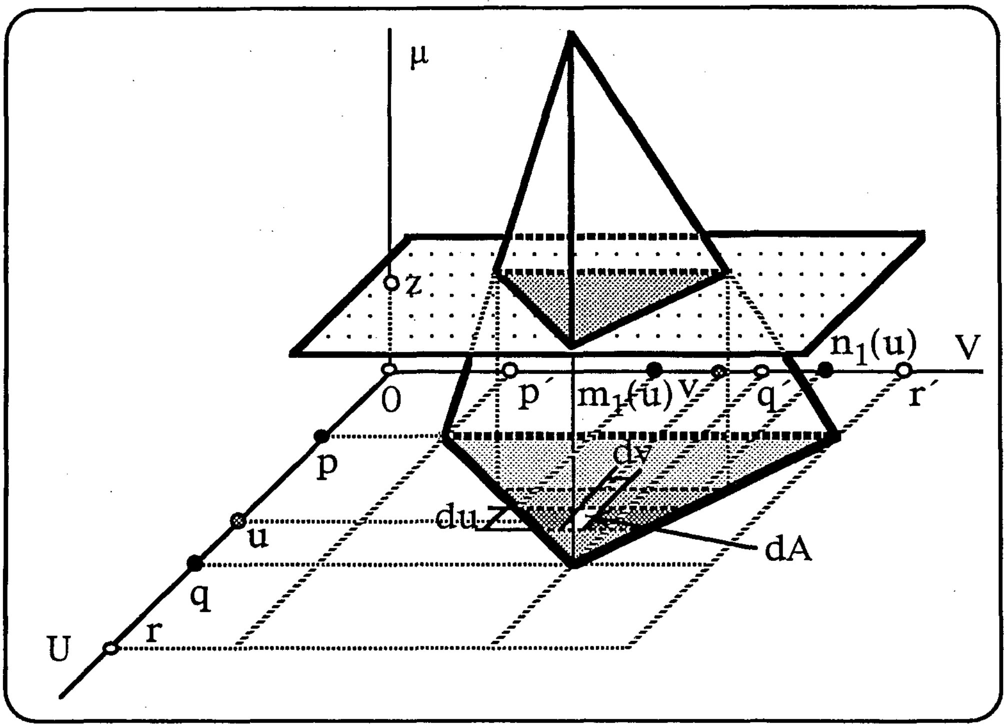


Fig.7.11 Càlcul del centre de gravetat de T_1

En conseqüència, les coordenades $(\overline{u}_1, \overline{v}_1)$ del centre de gravetat del tetraedre T_1 vindran expressades per

$$\overline{u}_1 = \int_{u=p}^{q}\int_{v=m_1(u)}^{n_1(u)} u.\frac{u-p}{q-p}.du.dv \Bigg/ \int_{u=p}^{q}\int_{v=m_1(u)}^{n_1(u)} \frac{u-p}{q-p}.du.dv$$

$$\overline{v}_1 = \int_{u=p}^{q}\int_{v=m_1(u)}^{n_1(u)} v.\frac{u-p}{q-p}.du.dv \Bigg/ \int_{u=p}^{q}\int_{v=m_1(u)}^{n_1(u)} \frac{u-p}{q-p}.du.dv$$

Indiquem en les fórmules anteriors que hem efectuat aquestes integrals dobles integrant en primer lloc respecte a v i després respecte a u.

Integrant obtenim

$$\overline{u}_1=\frac{(r'-p')(q-p)(q+p)/12}{(r'-p')(q-p)/6} \qquad \overline{v}_1=\frac{(r'-p')(q-p)(2q'+r'+p')/24}{(r'-p')(q-p)/6}$$

Simplificant,

$$\overline{u}_1=\frac{p+q}{2} \qquad \overline{v}_1=\frac{p'+2q'+r'}{4}$$

Fixem-nos que en la base del tetraedre T_1 utilitzem (p, q) en l'eix de les U, i (p', q', r') en l'eix de les V, per la qual cosa l'abscissa del centre de gravetat és la mitjana de (p, q), (p+q)/2, mentre que l'ordenada és la mitjana de les mitjanes de (p', q') i (q', r'):

$$\overline{v}_1=\frac{[(p'+q')/2]+[(q'+r')/2]}{2}=\frac{p'+2q'+r'}{4}$$

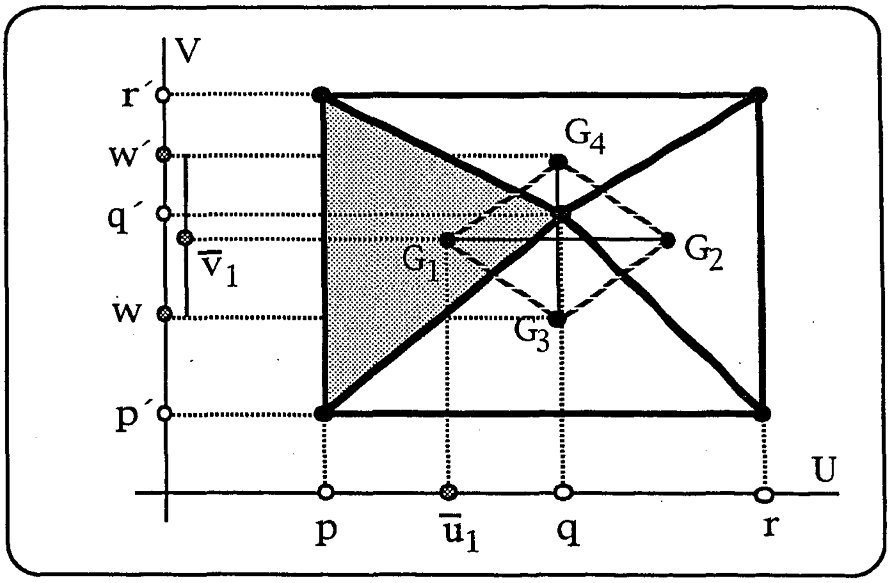


Fig.7.12 Centres de gravetat dels tetraedres

Efectuant els mateixos càlculs per la resta de tetraedres, obtenim els centres de gravetat:

$$\overline{u}_2=\frac{q+r}{2} \qquad \overline{v}_2=\frac{p'+2q'+r'}{4}$$

$$\overline{u}_3=\frac{p+2q+r}{4} \qquad \overline{v}_3=\frac{p'+q'}{2}$$

$$\overline{u}_4=\frac{p+2q+r}{4} \qquad \overline{v}_4=\frac{q'+r'}{2}$$

Si designem per M_1, M_2, M_3 i M_4 les masses dels tetraedres T_1, T_2, T_3 i T_4, respectivament, llavors les coordenades $(\overline{u}, \overline{v})$ del centre de gravetat de la piràmide es comproven que vénen donades per

$$\overline{u}=\frac{M_1.\overline{u}_1 + M_2.\overline{u}_2 + M_3.\overline{u}_3 + M_4.\overline{u}_4}{M_1+M_2+M_3+M_4}$$

$$\overline{v}=\frac{M_1.\overline{v}_1 + M_2.\overline{v}_2 + M_3.\overline{v}_3 + M_4.\overline{v}_4}{M_1+M_2+M_3+M_4}$$

Substituint les masses que ja hem calculat amb anterioritat per determinar els centres de gravetat

$$M_1=\iint_{R_1} dM = \frac{(r'-p')(q-p)}{6}$$

i també

$$M_2=\frac{(r'-p')(r-q)}{6} \qquad M_3=\frac{(r-p)(q'-p')}{6} \qquad M_4=\frac{(r-p)(r'-q')}{6}$$

obtindrem que

$$\boxed{\overline{u}=\frac{3p+2q+3r}{8}} \quad \boxed{\overline{v}=\frac{3p'+2q'+3r'}{8}} \qquad [7.53\text{-}54]$$

Notem que aquests dos valors resulten de fer tres mitjanes consecutives. En efecte, així $\overline{u}$ ve de la terna (p, q, r) i fem les següents mitjanes tal com indiquem

$$\overline{x}_{CN}=\frac{\dfrac{\dfrac{\frac{p+q}{2}+\frac{q+r}{2}}{2}+\dfrac{p+r}{2}}{2}}{2}=\frac{\dfrac{p+2q+r}{4}+\dfrac{p+r}{2}}{2}=\frac{3p+2q+3r}{8}$$

Emprant les fórmules [7.28] i [7.32]

$$u=(2x+y)/3 \qquad i \qquad v=(x+2y)/3$$

podem aïllar x i y donant

$$\boxed{x=2u-v} \quad i \quad \boxed{y=-u+2v} \qquad [7.55\text{-}56]$$

Desfent aquests canvis, el centre de gravetat del punt borrós d'equilibri de Cornot-Nash resultarà

$$\overline{x}_{CN}= 2.\overline{u}-\overline{v} \quad \text{i} \quad \overline{y}_{CN}= -\overline{u}+2.\overline{vv}$$

Substituint per [7.53-54] i simplificant, resulta

$$\boxed{\overline{x}_{CN}= \frac{8a - 2.(3c_1+2c_2+3c_3) + (3c'_1+2c'_2+3c'_3)}{24b}} \qquad [7.57]$$

$$\boxed{\overline{y}_{CN}= \frac{8a - 2.(3c'_1+2c'_2+3c'_3) + (3c_1+2c_2+3c_3)}{24b}} \qquad [7.58]$$

Com a conclusió, podem dir que el punt d'equilibri de Cournot-Nash del model de duopoli en context d'incertesa, donat pel número borrós $\tilde{D}$, pot desfuzzificar-se en el valor crisp $(\overline{x}_{CN}, \overline{y}_{CN})$ i que la possibilitat de que es veriqui és igual a la imatge de la seva funció de pertinença. És a dir,

$$\mu_{\tilde{D}}(\overline{x}_{CN}, \overline{y}_{CN}).$$

Exemple

Prenent com a cas particular del model de duopoli en context d'incertesa les constants i els números borrosos respectius

$$a=21 \;,\; b=1 \;,\; \tilde{c}=(3, 12, 15) \quad \text{i} \quad \tilde{c}'=(6, 9, 18)$$

tindrem que les funcions de pertinença dels números borrosos $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$, expressades per [7.26-27], són:

$$\mu_{\tilde{A}}(x, y)= \begin{cases} \dfrac{-6+2x+y}{3} & \text{si } \dfrac{6-x}{2} \leq y \leq \dfrac{9-x}{2} \\ \dfrac{18-2x-y}{9} & \text{si } \dfrac{9-x}{2} \leq y \leq \dfrac{18-x}{2} \end{cases}$$

$$\mu_{\tilde{B}}(x, y)= \begin{cases} \dfrac{-3+2x+y}{9} & \text{si } \dfrac{3-y}{2} \leq x \leq \dfrac{12-y}{2} \\ \dfrac{15-2x-y}{3} & \text{si } \dfrac{12-y}{2} \leq x \leq \dfrac{15-y}{2} \end{cases}$$

La intersecció $\tilde{D}=\tilde{A}\cap\tilde{B}$, en forma de piràmide, donarà lloc a diferents paral·lelograms, segons els diferents valors del grau de verosimilitud α.

En aquesta figura hem representat els α-talls corresponents a les alçades 0, 0´3, 0´8 i 1, on suposem també que $x\geq 0$ i $y\geq 0$ degut a la no negativitat de les variables econòmiques que en el nostra cas són el preu i la quantitat d'equilibri:

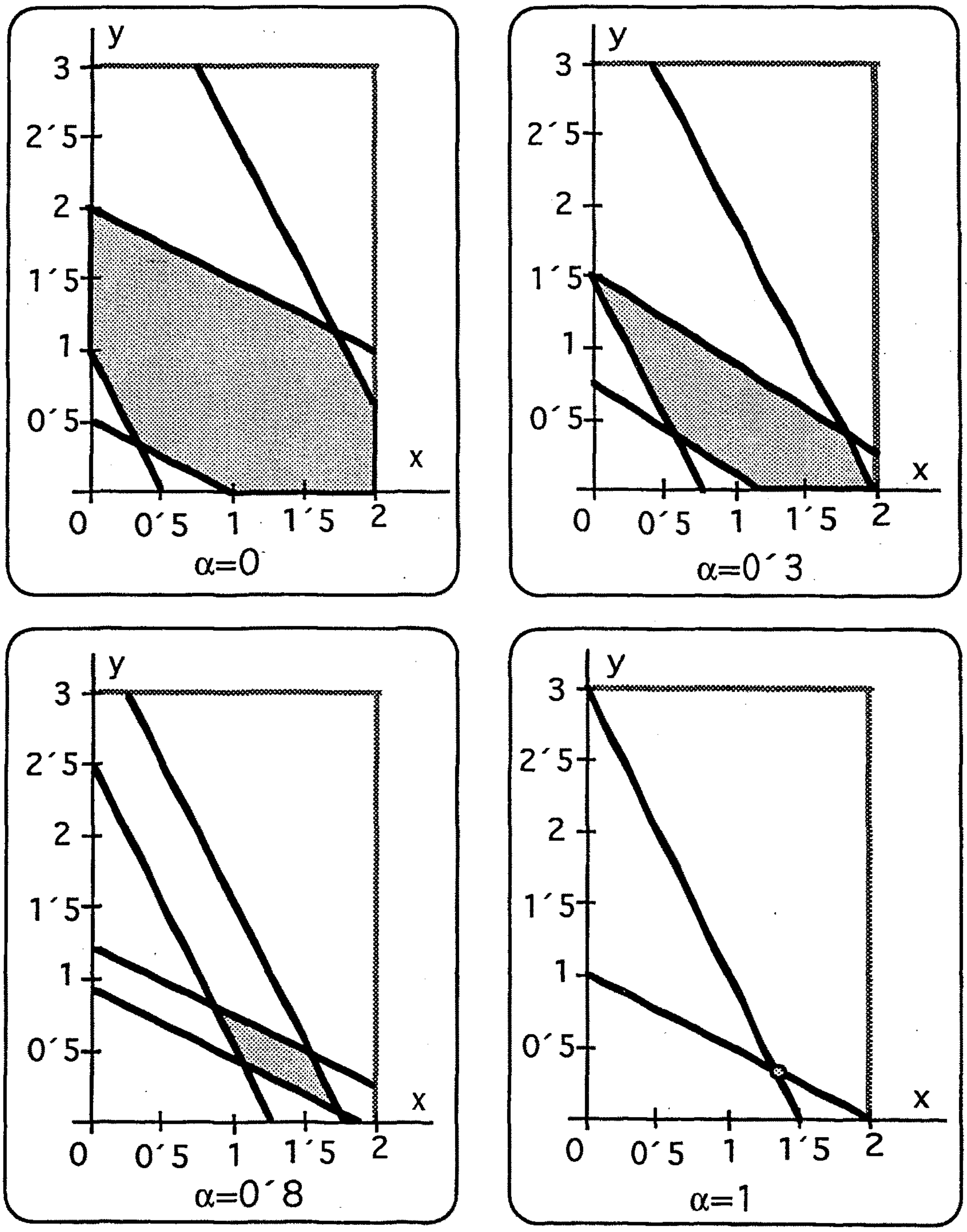


Fig.7.13 α-talls del número borrós $\tilde{D}$

Fent els canvis [7.28-35] obtindrem que

$$u=(2x+y)/3 \qquad i \qquad v=(x+2y)/3$$

i on els nous paràmetres seran

$$p=2 \;,\; q=3 \;,\; r=6 \;,\; p'=1 \;,\; q'=4 \;,\; r'=5$$

Les funcions de pertinença es transformaran en les fórmules [7.36-37], és a dir en

$$\mu_{\tilde{A}}(u,v)=\begin{cases} \frac{u-2}{1} & \text{si } 2 \leq u \leq 3 \\ \frac{6-u}{3} & \text{si } 3 < u \leq 6 \end{cases} \qquad \mu_{\tilde{B}}(u,v)=\begin{cases} \frac{v-1}{3} & \text{si } 1 \leq v \leq 4 \\ \frac{5-v}{1} & \text{si } 4 < v \leq 5 \end{cases}$$

Efectuant la intersecció $\tilde{D}=\tilde{A}\cap\tilde{B}$, la nova funció de pertinença, [7.48], es convertirà en

$$\mu_{\tilde{D}}(u,v)=\begin{cases} u-2 & \text{si } 2\leq u\leq 3 \text{ i } 3u-5\leq v\leq 7-u \\ \frac{6-u}{3} & \text{si } 3\leq u\leq 6 \text{ i } 7-u\leq v\leq (u/3)+3 \\ \frac{v-1}{3} & \text{si } (v+5)/3\leq u\leq 7-v \text{ i } 1\leq v\leq 4 \\ 5-v & \text{si } 7-v\leq u\leq 3v-9 \text{ i } 4\leq v\leq 5 \end{cases}$$

Per tant, els quatre tetraedres seran

$$T_1=\left\{(u,v,z)\in R^3 \;/\; z=u-2 \;,\; 2 \leq u \leq 3 \;,\; 3u-5 \leq v \leq 7-u\right\}$$

$$T_2=\left\{(u,v,z)\in R^3 \;/\; z=\frac{6-u}{3} \;,\; 3 \leq u \leq 6 \;,\; 7-u \leq v \leq \frac{u}{3}+3\right\}$$

$$T_3=\left\{(u,v,z)\in R^3 \;/\; z=\frac{v-1}{3} \;,\; 1 \leq v \leq 4 \;,\; \frac{v+5}{3} \leq u \leq 7-v\right\}$$

$$T_4=\left\{(u,v,z)\in R^3 \;/\; z=5-v \;,\; 4 \leq v \leq 5 \;,\; 7-v \leq u \leq 3v-9\right\}$$

Les coordenades $(\overline{u}_i, \overline{v}_i)$ dels centres de gravetat d'aquests tetraedres són respectivament

$$(\overline{u}_1, \overline{v}_1)= (5/2,\ 7/2) \qquad (\overline{u}_2, \overline{v}_2)= (9/2,\ 7/2)$$

$$(\overline{u}_3, \overline{v}_3)= (7/2,\ 5/2) \qquad (\overline{u}_4, \overline{v}_4)= (7/2,\ 9/2)$$

El centre de gravetat de la piràmide serà, doncs, per [7.53-54],

$$G(\bar{u}, \bar{v})=(15/4,\ 13/4)=(3'75,\ 3'25)$$

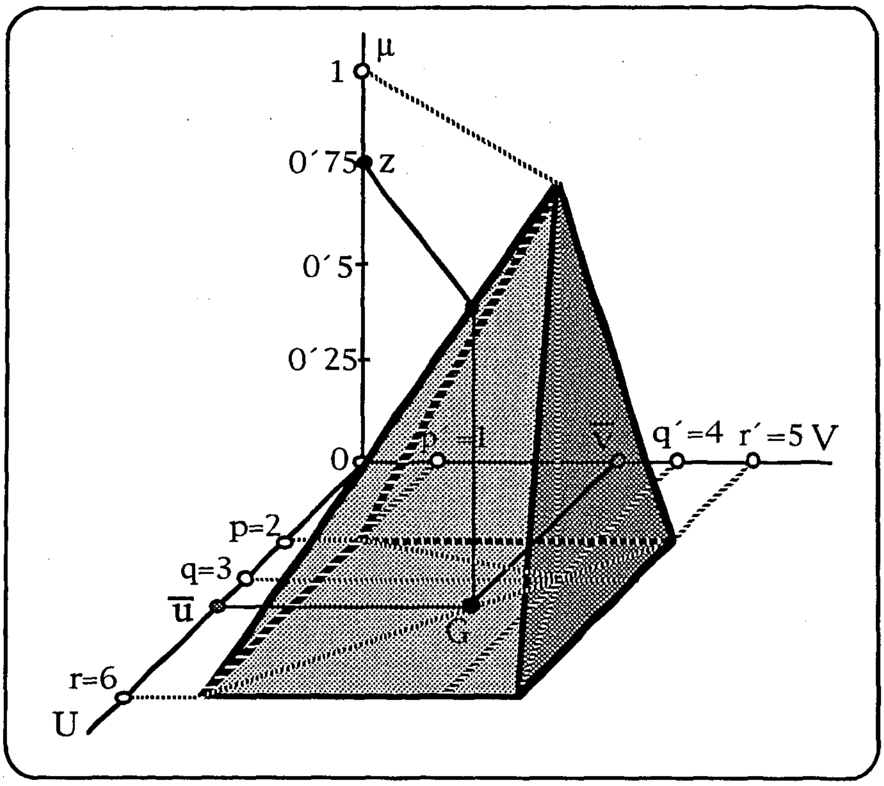


Fig.7.14 Centre de gravetat de l'exemple

Observem de la gràfica que G pertany a les fronteres de T_2 i T_3. Per tant, la funció de pertinença la podem donar per alguna de les dues maneres següents:

$$z=(6-u)/3=(6-3'75)/3=0'75 \quad , \quad z=(v-1)/3=(3'25-1)/3=0'75$$

Finalment, passant a les coordenades originals x i y,

$$\bar{x}_{CN}=2\bar{u}-\bar{v}=17/4=4'25 \qquad \bar{y}_{CN}=-\bar{u}+2\bar{v}=11/4=2'75$$

En resum, podem dir que el punt d'equilibri és (4'25, 2'75) amb una possibilitat de 0'75, o sigui del 75%.

CAPÍTOL 8

OPTIMITZACIÓ DINÀMICA BORROSA

En aquest capítol analitzem el cas d'un monopoli que desitja llançar al mercat un nou producte, la demanda del qual sigui una funció lineal tant del preu (p) com de la seva taxa de canvi (p´). Normalment els estudis de marketing realitzats ens indiquen que els preus inicials i finals del producte, en un període de prova determinat, poden considerar-se com a conjunts borrosos.

El nostre objectiu serà el de determinar la funció de preus del producte, durant aquest període, de manera que es puguin maximitzar els beneficis totals obtinguts en la seva venda.

Amb aquesta finalitat els mitjans que emprarem seran les tècniques de l'optimització dinàmica clàsica de funcionals, amb particular la coneguda equació d'Euler. El model econòmic que utilitzarem serà el model d'Evans d'una empresa monopolística destinat a la maximització dels beneficis totals.

8.1 OPTIMITZACIÓ DINÀMICA CLÀSSICA

8.1.1 CONCEPTE DE FUNCIONAL

Resumim en primer lloc la part de l'Annex B, «Equacions diferencials i en diferències finites», que fa referència a aquesta important noció de l'Anàlisi.

Un *funcional* és una aplicació que fa correspondre a cada funció o trajectòria y(t), definida en un interval [0, T], un valor numèric real, que el simbolitzarem per V[y(t)]. Esquemàticament, i dins un context econòmic, podem partir d'una funció de preus i deduir el funcional dels beneficis totals:

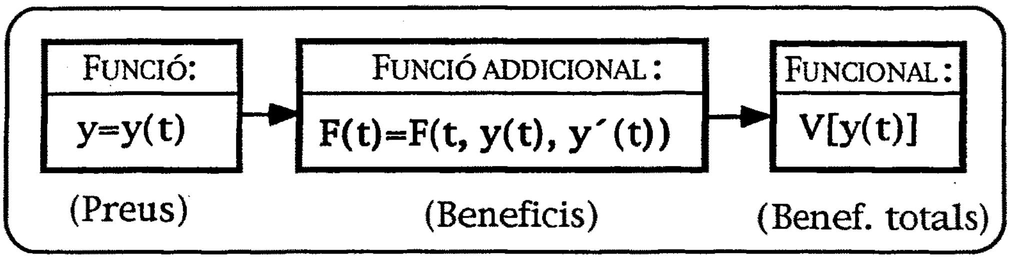


Fig.8.1 Definició de funcional

Observem que, a partir de la funció de preus y=y(t), fem servir una *funció addicional* F(t), que pot dependre del temps, del preu i del ritme de variació d'aquest preu, y´(t).

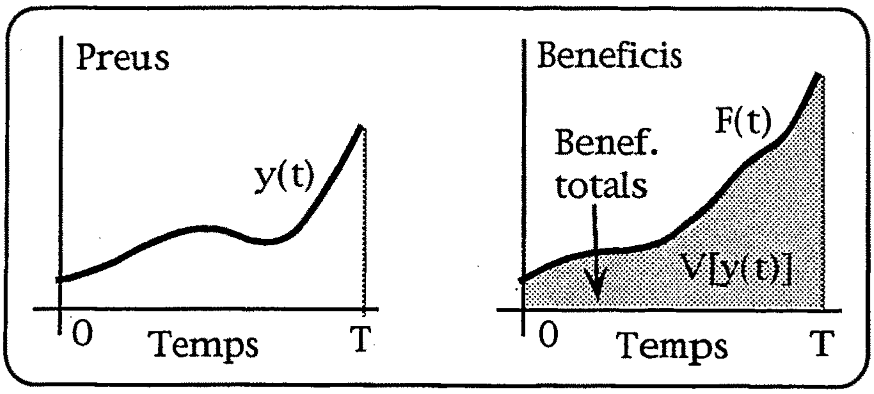


Fig.8.2 Gràfica de y(t), F(t) i V[y(t)]

El funcional, que haurem d'optimitzar, V[y(t)], serà l'àrea tancada per F(t), els eixos i la recta vertical en el temps final T.

Matemàticament, el funcional equivalent a l'àrea sota la corba de beneficis vindrà expressat per

$$\boxed{V[y(t)] = \int_0^T F(t,\ y(t),\ y'(t)).dt} \qquad [8.1]$$

8.1.2 EQUACIÓ D'EULER

El problema a resoldre serà, doncs, el d'optimitzar el funcional anterior sota les que anomenem *condicions de frontera*:

$$\boxed{y(0)=a} \quad \text{i} \quad \boxed{y(T)=b} \qquad [8.2\text{-}3]$$

És a dir, els preus inicial i final de l'interval de temps considerat seran a i b, respectivament.

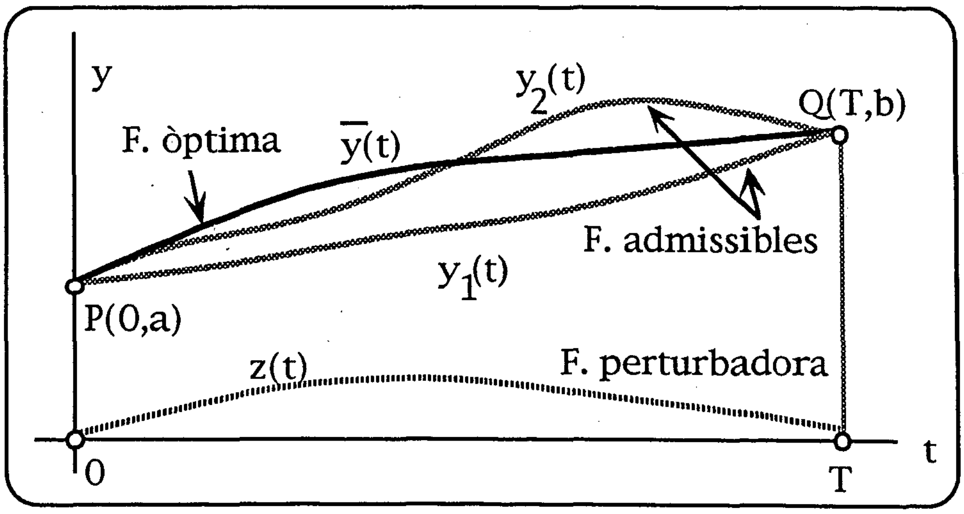


Fig.8.3 Funcions utilitzades

Com podem veure en la gràfica anterior emprarem:

- Unes *funcions admissibles*, y(t), que suposem contínues fins a la segona derivada i que compleixen les condicions de frontera.

- Una *funció òptima*, $\overline{y}(t)$, o sigui una funció admissible que s'ha de determinar amb la finalitat de què optimitzi el funcional.

- Una *funció pertorbadora*, z(t), és a dir, una funció de valors nuls al principi i al final del període que introduïm per calcular la funció òptima.

Quant a aquesta última funció z(t) considerarem que les funcions admissibles y(t) provenen de la funció óptima $\overline{y}(t)$, però afectades d'una pertorbació proporcional a la funció pertorabadora, ε.z(t), on ε és un nombre real. Per tant,

$$\boxed{y(t)= \overline{y}(t) + \varepsilon.z(t)} \qquad [8.4]$$

Fixem-nos que quan el paràmetre ε és nul llavors la funció admissible coincideix amb la funció òptima.

La finalitat d'introduir la funció pertorbadora és que així totes les funcions admissibles y(t), entre les quals hem de trobar la funció òptima, dependran únicament del paràmetre ε, perquè $\overline{y}(t)$ i z(t) són fixes.

En conseqüència, el funcional V[y(t)] dependrà només d'ε, i podem escriure

$$\boxed{V(\varepsilon)= \int_0^T F(t, \overline{y}(t)+\varepsilon.z(t), \overline{y}'(t)+\varepsilon.z'(t)).dt} \qquad [8.5]$$

Evidentment, la condició que ens permetrà trobar l'òptim serà l'anul·lació de la seva derivada

$$\boxed{\left[\frac{dV(\varepsilon)}{dt}\right]_{\varepsilon=0} = 0} \qquad [8.6]$$

Observem que hem posat ε=0 perquè ja hem dit que en aquest cas la funció admissible és l'òptima.

En l'Annex B, situat al final de la tesi doctoral, hem efectuat tots els càlculs necessaris, com els de derivació sota el signe integral, la regla de la cadena per funcions de varies variables i la integració per parts.

El resultat d'aquestes operacions és la coneguda *equació d'Euler*:

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0} \qquad [8.7]$$

Com que F(t)=F(t, y(t), y´(t)), també $\partial F/\partial y'$ serà funció del temps t, de y(t) i de y´(t), per la qual cosa podem continuar transformant l'equació [8.7], obtenint al final l'*equació d'Euler desenvolupada*:

$$\boxed{\frac{\partial^2 F}{\partial y' . \partial y'}.y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' . \partial y}.y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' . \partial t} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0} \qquad [8.8]$$

8.2 OPTIMITZACIÓ DINÀMICA BORROSA

8.2.1 OPTIMITZACIÓ D'UN FUNCIONAL AMB CONDICIONS BORROSES A LA FRONTERA

El problema que plantegem és optimitzar un funcional del tipus analitzat en el cas crisp

$$V[y(t)] = \int_0^T F(t, y(t), y'(t)).dt$$

però amb les condicions de frontera borroses:

$$\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0 \quad \text{i} \quad \tilde{y}(T) = \tilde{y}_T \qquad [8.9\text{-}10]$$

on, com ja hem dit, y(t) representa totes les funcions admissibles en l'interval [0,T] i F és una funció de classe C^2, és a dir, és contínua amb derivades parcials primeres i segones contínues. A més $\tilde{y}_0$ i $\tilde{y}_T$ són dos números borrosos discrets que prenen valors en els subconjunts A i B d'R definits per:

$$A = \{x_i \in R \ / \ i=1,2,...,n\} \quad \text{i} \quad B = \{y_j \in R \ / \ j=1,2,...,m\}$$

Per tant, les condicions de frontera borroses seran

$$\tilde{y}_0=\left\{\left(x_i\,,\,\mu_{\tilde{y}_0}(x_i)\right)/\,x_i\in A\right\}\ \text{ i }\ \tilde{y}_T=\left\{\left(y_j\,,\,\mu_{\tilde{y}_T}(y_j)\right)/\,y_j\in B\right\}$$

Per tal d'optimitzar aquest funcional, utilitzarem també l'equació d'Euler desenvolupada

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y'.\partial y'}.y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'.\partial y}.y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'.\partial t} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

on t ha de pertànyer a l'interval d'extrems 0 i T.

Suposant que es pugui resoldre aquesta equació diferencial de segon ordre a partir de funcions elementals, la solució general serà del tipus

$$y(t)= G(t, C_1, C_2)$$

Imposant les condicions de frontera considerades anteriorment, tenim per t=0 i t=T, respectivament,

$$\tilde{y}_0= G(0, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2) \quad \text{i} \quad \tilde{y}_T= G(T, \tilde{C}_1, \tilde{C}_2)$$

En resoldre aquest sistema d'equacions borroses discret s'obté

$$\boxed{\tilde{C}_1= g_1(\tilde{y}_0, \tilde{y}_T)} \quad \text{i} \quad \boxed{\tilde{C}_2= g_2(\tilde{y}_0, \tilde{y}_T)} \qquad [8.11\text{-}12]$$

Finalment, per cada valor que prenen els números borrosos discrets $\tilde{y}_0$ i $\tilde{y}_T$ obtenim n×m trajectòries òptimes del tipus

$$\boxed{\bar{y}_{ij}(t)= G\left(t,\, g_1(x_i,\, y_j),\, g_2(x_i,\, y_j)\right)} \qquad [8.13]$$

on i=1, 2,..., n i j=1, 2,...,m.

El conjunt format per totes aquestes trajectòries òptimes és el conjunt borrós

$$\boxed{\tilde{y}(t)=\left\{\left(\bar{y}_{ij}(t)\,,\,\mu_{\tilde{y}(t)}(\bar{y}_{ij}(t))\right)\right\}} \qquad [8.14]$$

on la funció de pertinença és

$$\mu_{\tilde{y}(t)}(\bar{y}_{ij})= \mu_{\tilde{y}_0}(x_i) \wedge \mu_{\tilde{y}_T}(y_j)$$

Així doncs, queda definit un conjunt borrós en el referencial de totes les trajectòries admissibles definides a l'interval [0,T].

Molts dels problemes dinàmics que es plantegen en la teoria econòmica involucren l'ús de l'optimització de funcionals. En el següent apartat ho aplicarem al cas d'una empresa monopolista.

8.2.2 EL MODEL DINÀMIC D'EVANS

Considerem el cas d'una empresa monopolista que produeix un sol article amb la següent *funció de costos totals*

$$\boxed{C(t)= \alpha\ [q(t)]^2 + \beta\ q(t) +\gamma} \qquad [8.15]$$

on $\alpha,\beta,\gamma>0$ i on $q=q(t)$ representa la *quantitat produïda*, que en l'equilibri és igual a la quantitat demandada.

Aquesta quantitat q suposarem que no només depèn del preu p(t), sinó també de la raó de canvi del preu p´(t) segons l'equació

$$\boxed{q(t)= r - s.p(t) + h.p'(t)} \qquad [8.16]$$

on $a,b>0$ i $h\neq 0$.

D'altra banda, el *benefici* de l'empresa ve donat per

$$\boxed{B(t)= p(t).q(t) - C(t)} \qquad [8.17]$$

Substituint per [8.16] i després per [8.15], resulta que els beneficis dependran del preu p i de la seva derivada p´, en la forma

$$\boxed{B(p, p')= a_{11}.p^2 +a_{12}.p.p' +a_{22}.(p')^2 +a_{10}.p +a_{20}.p' +a_{00}} \qquad [8.18]$$

on els coeficients són

$a_{11}= -s.(1+\alpha.s)$ $\qquad a_{12}= h.(1+\alpha.s)$ $\qquad a_{22}= -\alpha.h^2$

$a_{10}= r+2\alpha.r.s+\beta.s$ $\qquad a_{20}= -h.(2\alpha.r+\beta)$ $\qquad a_{00}= -\alpha.r^2-\beta.r+\gamma.$

L'objectiu de l'empresa monopolista serà el de calcular la trajectòria òptima del preu p(t) que maximitzi el benefici total B en un període de temps finit [0, T].

Per tant, caldrà maximitzar el funcional

$$\boxed{V[p(t)] = \int_0^T B(p(t),\ p'(t)).dt} \qquad [8.19]$$

subjecte a les condicions borroses de frontera

$$\tilde{p}(0) = \tilde{p}_0 \quad \text{i} \quad \tilde{p}(T) = \tilde{p}_T \qquad [8.20\text{-}21]$$

on T, $\tilde{p}_0$ i $\tilde{p}_T$ són expressions conegudes.

Recordem que $\tilde{p}_0$ i $\tilde{p}_T$ són dos números borrosos discrets que prenen valors en els subconjunts finits A i B, de n i m elements respectivament, dels nombres reals

$$\tilde{p}_0 = \left\{\left(x_i, \mu_{\tilde{p}_0}(x_i)\right) / x_i \in A\right\} \text{ i } \tilde{p}_T = \left\{\left(y_j, \mu_{\tilde{p}_T}(y_j)\right) / y_j \in B\right\}$$

8.2.3 SOLUCIÓ DE L'EQUACIÓ D'EULER

Per tal d'aplicar l'equació d'Euler que optimitza el funcional V, calculem les derivades parcials de primer i segon ordre següents en [8.18]:

$$\frac{\partial B}{\partial p} = 2.a_{11}.p + a_{12}.p' + a_{10} \qquad \frac{\partial B}{\partial p'} = a_{12}.p + 2.a_{22}.p' + a_{20}$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial p'.\partial p'} = 2.a_{22} \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial p.\partial p'} = a_{12} \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial t.\partial p'} = 0$$

Substituint pels valors dels coeficients a_{ij},

$$\frac{\partial B}{\partial p} = -2b(1+\alpha\ b)p(t) + (a+2\alpha ab+\beta b) + h(1+2\alpha b)p'(t)$$

$$\frac{\partial B}{\partial p'} = -2\alpha\, h^2\, p'(t) - h(2\alpha a+\beta) + h(1+2\alpha b)\, p(t)$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial p' \partial p'} = -2\alpha\, h^2 \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial p \partial p'} = h(1+2\alpha b) \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial t \partial p'} = 0$$

Substituint en l'equació d'Euler desenvolupada [8.8], que, com que F=B i y=p(t), es transforma en

$$\frac{\partial^2 B}{\partial p'.\partial p'}.p'' + \frac{\partial^2 B}{\partial p'.\partial p}.p' + \frac{\partial^2 B}{\partial p'.\partial t} - \frac{\partial B}{\partial p} = 0$$

tenim, després d'operar,

$$\boxed{p''(t) - \frac{b.(1+\alpha.b)}{\alpha.h^2}.p(t) = -\frac{\alpha+2\alpha.a.b+\beta.b}{2\alpha.h^2}} \qquad [8.22]$$

Si a continuació fem els canvis

$$r = \frac{b(1+\alpha\, b)}{\alpha h^2} \quad \text{i} \quad s = \frac{\alpha+2\alpha ab+\beta b}{2\alpha h^2}$$

l'equació diferencial [8.22] ens quedarà en la forma

$$\boxed{p''(t) - r.p(t) = -s} \qquad [8.23]$$

Resolent aquesta equació diferencial de segon ordre de coeficients constants, obtenim

$$\boxed{p(t) = C_1 e^{\sqrt{r}.t} + C_2 e^{-\sqrt{r}.t} + \frac{s}{r}} \qquad [8.24]$$

A continuació deduirem els coeficients C_1 i C_2 imposant les condicions de frontera, que per t=0 i t=T són respectivament

$$\boxed{\tilde{p}_0 = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + \frac{s}{r}} \qquad [8.25]$$

$$\boxed{\tilde{p}_T = \tilde{C}_1.e^{\sqrt{r}.T} + \tilde{C}_2.e^{-\sqrt{r}.T} + \frac{s}{r}} \qquad [8.26]$$

Resolem el sistema lineal amb incògnites borroses

$$\begin{cases} \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 = \tilde{p}_0 - \frac{s}{r} \\ e^{\sqrt{r}.T}.\tilde{C}_1 + e^{-\sqrt{r}.T}.\tilde{C}_2 = \tilde{p}_T - \frac{s}{r} \end{cases}$$

emprant la notació matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{r}.T} & e^{-\sqrt{r}.T} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{p}_0 - \frac{s}{r} \\ \tilde{p}_T - \frac{s}{r} \end{pmatrix}$$

Multiplicant cada membre per la matriu inversa

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{\sqrt{r}.T} & e^{-\sqrt{r}.T} \end{pmatrix}^{-1} . \begin{pmatrix} \tilde{p}_0 - \frac{s}{r} \\ \tilde{p}_T - \frac{s}{r} \end{pmatrix}$$

Trobant directament aquesta inversa

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_1 \\ \tilde{C}_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{e^{-\sqrt{r}.T} - e^{\sqrt{r}.T}} . \begin{pmatrix} e^{-\sqrt{r}.T} & -1 \\ -e^{\sqrt{r}.T} & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \tilde{p}_0 - \frac{s}{r} \\ \tilde{p}_T - \frac{s}{r} \end{pmatrix}$$

Multiplicant i identificant termes, tindrem

$$\boxed{\tilde{C}_1 = \frac{\left(\tilde{p}_0 - \frac{s}{r}\right).e^{-\sqrt{r}.T} - \left(\tilde{p}_T - \frac{s}{r}\right)}{e^{-\sqrt{r}.T} - e^{\sqrt{r}.T}}} \quad [8.27]$$

$$\boxed{\tilde{C}_2 = \frac{-\left(\tilde{p}_0 - \frac{s}{r}\right).e^{\sqrt{r}.T} + \left(\tilde{p}_T - \frac{s}{r}\right)}{e^{-\sqrt{r}.T} - e^{\sqrt{r}.T}}} \quad [8.28]$$

Finalment, substituint pels valors x_i i y_j que prenguin els números borrosos discrets $\tilde{p}_0$ i $\tilde{p}_T$, respectivament, obtindrem unes trajectòries òptimes del tipus

$$\boxed{\tilde{p}_{ij}(t) = \frac{\left(x_i - \frac{s}{r}\right).e^{-\sqrt{r}.T} - \left(y_j - \frac{s}{r}\right)}{e^{-\sqrt{r}.T} - e^{\sqrt{r}.T}}.e^{\sqrt{r}.t} + \frac{-\left(x_i - \frac{s}{r}\right).e^{\sqrt{r}.T} + \left(y_j - \frac{s}{r}\right)}{e^{-\sqrt{r}.T} - e^{\sqrt{r}.T}}.e^{-\sqrt{r}.t} + \frac{s}{r}} \quad [8.29]$$

on i=1, 2, ..., n i j=1, 2, ..., m.

Aleshores, el conjunt borrós format per totes les m×n trajectòries de [8.29] és

$$\tilde{p}(t)=\{(\,\bar{p}_{ij}(t)\;,\;\mu_{\tilde{p}(t)}(\bar{p}_{ij}(t)))\}$$

on la funció de pertinença és

$$\mu_{\tilde{p}(t)}(\bar{p}_{ij})=\mu_{\tilde{p}_0}(x_i)\wedge\mu_{\tilde{p}_T}(y_j)$$

Observem que aquest conjunt borrós està definit en el referencial de totes les trajectòries admissibles en l'interval [0,T]. Per tant, queda definit un conjunt borrós de les trajectòries del preu que maximitza el benefici amb el seu corresponent grau de pertinença.

Fent ús de la *mitjana ponderada* respecte als graus de pertinença podem *desfuzzificar* el conjunt borrós anterior, prenent p*(t) com la *trajectòria òptima esperada*, és a dir:

$$\boxed{p^*(t)=\frac{\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{p}_{ij}(t).\mu_{\tilde{p}(t)}(\bar{p}_{ij})\right)}{\sum_{j=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n}\mu_{\tilde{p}(t)}(\bar{p}_{ij})\right)}}\qquad [8.30]$$

Exemple

Mostrarem a continuació un exemple numèric desenvolupant tots els càlculs amb la finalitat de clarificar els conceptes que apareixen al llarg de tot aquest capítol.

Considerem en primer lloc les variables següents, conjuntament amb els símbols i les unitats de mesura:

- Quantitat demandada: q (unit.)
- Preu: p (u.m./unit.)
- Taxa de canvi del preu: p´ (u.m./per.)
- Costos: C (u.m.)
- Temps: t (per.)
- Beneficis: B (u.m.)

Suposem que la funció de costos C(t) i la funció de demanda q(t), que simplifiquem per C i q, són, respectivament,

$$C=0'1.q^2 +1.000 \qquad \text{i} \qquad q=144-8.p+100.p'$$

on també hem simplificat el preu p(t) i la seva derivada p´(t) per p i p´, respectivament.

En aquest cas, la funció de beneficis de l'empresa monopolista és, emprant [8.18],

$$B(p,\ p')= -14'4.p^2 -1000.(p')^2 +260.p.p' +374'4.p -2880.p' -3073'6$$

Si, a més, suposem que el període és T=5 anys, llavors el problema d'optimització dinàmica que ens proposem calcular és optimitzar el funcional de p(t) en aquest període.

És a dir, es tracta de calcular el màxim de

$$V[p]=\int_0^5 B(p,\ p').dt$$

amb les condicions borroses en la frontera

$$p(0)=\tilde{p}_0 \qquad p(5)=\tilde{p}_T$$

essent, per exemple, el preu borrós de llançament, t=0, de 9 u.m. amb grau de confiança 0´1, de 10 u.m. amb grau 1 i de 12 u.m. amb grau 0´3. Ho escriurem com

$$\tilde{p}_0=\{(9,\ 0'1),\ (10,\ 1'0),\ (12,\ 0'3)\}$$

i el preu borrós al final del període, t=5,

$$\tilde{p}_T=\{(13,\ 0'2),\ (15,\ 1'0),\ (16,\ 0'7)\}$$

Comencem, com és lògic, per l'equació diferencial de segon ordre d'Euler

$$\frac{\partial^2 B}{\partial p'.\partial p'}.p'' + \frac{\partial^2 B}{\partial p'.\partial p}.p' + \frac{\partial^2 B}{\partial p'.\partial t} - \frac{\partial B}{\partial p} = 0$$

Calculant les derivades parcials pertinents, obtenim els cinc valors següents

$$\frac{\partial B}{\partial p} = -28'8.p+260.p'+374'4 \qquad \frac{\partial B}{\partial p'} = -2000.p'+260.p-2880$$

$$\frac{\partial^2 B}{\partial p.\partial p'} = 260 \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial p'.\partial p'} = -2000 \qquad \frac{\partial^2 B}{\partial t.\partial p'} = 0$$

Substituint aquestes derivades en l'equació d'Euler, i simplificant, ens queda l'equació diferencial

$$p'' - 0'0144.p = - 0'1872$$

Resolent-la, calculant amb aquesta finalitat la solució de l'equació homogènia, la solució de l'equació particular, i sumant, ens queda

$$\overline{p}(t) = C_1.e^{0'12.t} + C_2.e^{-0'12.t} + 13$$

Ara bé, suposem que en diferents estudis del mercat, dissenyats pel llançament del nou producte, s'han obtingut els següents preus unitaris, conjuntament amb les seves respectives possibilitats o graus de confiança que ens mereixen els preus.

$$\tilde{p}_0 = \{(9,\ 0'1),\ (10,\ 1'0),\ (12,\ 0'3)\}$$

$$\tilde{p}_T = \{(13,\ 0'2),\ (15,\ 1'0),\ (16,\ 0'7)\}$$

Notem que aquests números borrosos discrets, ja indicats en la pàgina anterior, són les condicions de frontera per t=0 i t=T=5.

En el cas borrós la funció òptima vindrà expressada per

$$\tilde{p}(t) = \tilde{C}_1.e^{0'12.t} + \tilde{C}_2.e^{-0'12.t} + 13$$

Imposant les condicions en la frontera, obtindrem el sistema que ens permetrà deduir els coeficients $\tilde{C}_1$ i $\tilde{C}_2$,

$$\begin{cases} \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 = \tilde{p}_0 - 13 \\ e^{0'6}.\tilde{C}_1 + e^{-0'6}.\tilde{C}_2 = \tilde{p}_T - 13 \end{cases}$$

Resolent el sistema anterior, emprant l'aritmètica dels intervals per aquests subconjunts borrosos de caràcter discret, ens queda

$$\tilde{C}_1 = -0'431.\tilde{p}_0 + 0'7853.\tilde{p}_T - 4'6059$$

$$\tilde{C}_2 = 1'431.\tilde{p}_0 - 0'7853.\tilde{p}_T - 8'3941$$

Finalment, substituint pels valors x_i i y_j que prenguin els números borrosos discrets $\tilde{p}_0$ i $\tilde{p}_T$, resultaran les diferents trajectòries òptimes

$$\bar{p}_{ij}(t) = (-0'431.x_i + 0'7853.y_j - 4'6059).e^{0'12.t} +$$

$$+ (1'431.x_i - 0'7853.y_j - 8'3941).e^{-0'12.t} + 13$$

on i=1, 2, 3 i j=1, 2, 3.

De $\tilde{p}_0$ i $\tilde{p}_T$ deduïm que $x_1=9$, $x_2=10$ i $x_3=12$ amb nivells de presumpció 0'1, 1'0 i 0'3, respectivament, i $y_1=13$, $y_2=15$ i $y_3=16$ amb graus 0'2, 1'0 i 0'7, respectivament.

En conseqüència, les 3×3=9 trajectòries que maximitzen el benefici total vénen donades per

$$\bar{p}_{11}(t) = 1'724.e^{0'12.t} - 5'724.e^{-0'12.t} + 13$$

$$\bar{p}_{12}(t) = 3'294.e^{0'12.t} - 7'294.e^{-0'12.t} + 13$$

$$\bar{p}_{13}(t) = 4'080.e^{0'12.t} - 8'080.e^{-0'12.t} + 13$$

$$\bar{p}_{21}(t) = 1'293.e^{0'12.t} - 4'293.e^{-0'12.t} + 13$$

$$\bar{p}_{22}(t) = 2'863.e^{0'12.t} - 5'863.e^{-0'12.t} + 13$$

$$\bar{p}_{23}(t) = 3'649.e^{0'12.t} - 6'649.e^{-0'12.t} + 13$$

$$\bar{p}_{31}(t) = 0'431.e^{0'12.t} - 1'431.e^{-0'12.t} + 13$$

$$\bar{p}_{32}(t) = 2'001.e^{0'12.t} - 3'001.e^{-0'12.t} + 13$$

$$\bar{p}_{33}(t) = 2'787.e^{0'12.t} - 3'787.e^{-0'12.t} + 13$$

Quant als graus de possibilitat μ, serà el mínim dels graus de possiblitat dels preus.

Construïm a continuació una taula de valors per les 9 trajectòries anteriors i pels anys t=0, 1, 2, 3, 4 i 5, indicant també el grau de possibilitat:

$\overline{p}$ \ t	0	1	2	3	4	5	μ
$\overline{p}_{11}$	9	9'867	10'689	11'478	12'245	13	0'2
$\overline{p}_{12}$	9	10'245	11'450	12'633	13'810	15	0'5
$\overline{p}_{13}$	9	10'434	11'830	13'211	14'594	16	0'5
$\overline{p}_{21}$	10	10'650	11'267	11'858	12'433	13	0'2
$\overline{p}_{22}$	10	11'028	12'028	13'013	13'999	15	1'0
$\overline{p}_{23}$	10	11'217	12'408	13'592	14'783	16	0'7
$\overline{p}_{31}$	12	12'217	12'422	12'619	12'811	13	0'2
$\overline{p}_{32}$	12	12'594	13'183	13'774	14'377	15	0'3
$\overline{p}_{33}$	12	12'783	13'564	14'352	15'160	16	0'3

A la pàgina següent, hem dibuixat aquestes 9 trajectòries, tot observant que les *trajectòries òptimes mínima i màxima* són la 1a i la 9a, és a dir

$$\overline{p}_{mín}(t)= 1'724.e^{0'12.t} - 5'724.e^{-0'12.t} + 13$$

$$\overline{p}_{màx}(t)= 2'787.e^{0'12.t} - 3'787.e^{-0'12.t} + 13$$

Realitzant la mitjana aritmètica ponderada de les 9 trajectòries

$$p^*(t)= \frac{\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3} \overline{p}_{ij}(t).\tilde{\mu}_{\tilde{p}(t)}(\overline{p}_{ij})\right)}{\sum_{j=1}^{3}\left(\sum_{i=1}^{3} \tilde{\mu}_{\tilde{p}(t)}(\overline{p}_{ij})\right)}$$

Substituint, obtindrem la trajectòria òptima ponderada

$$p^*(t) = 2'879.e^{0'12.t} - 5'777.e^{-0'12.t} + 13$$

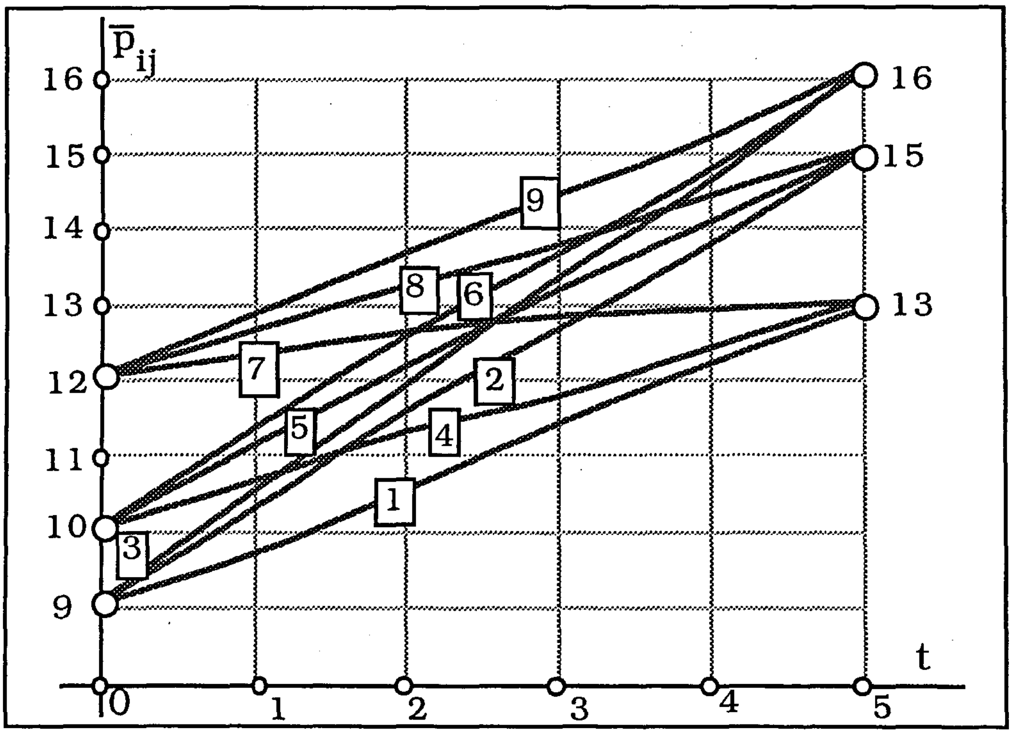


Fig.8.4 Trajectòries que maximitzen el benefici total

Dibuixem les trajectòries de preus màxima, mínima i ponderada:

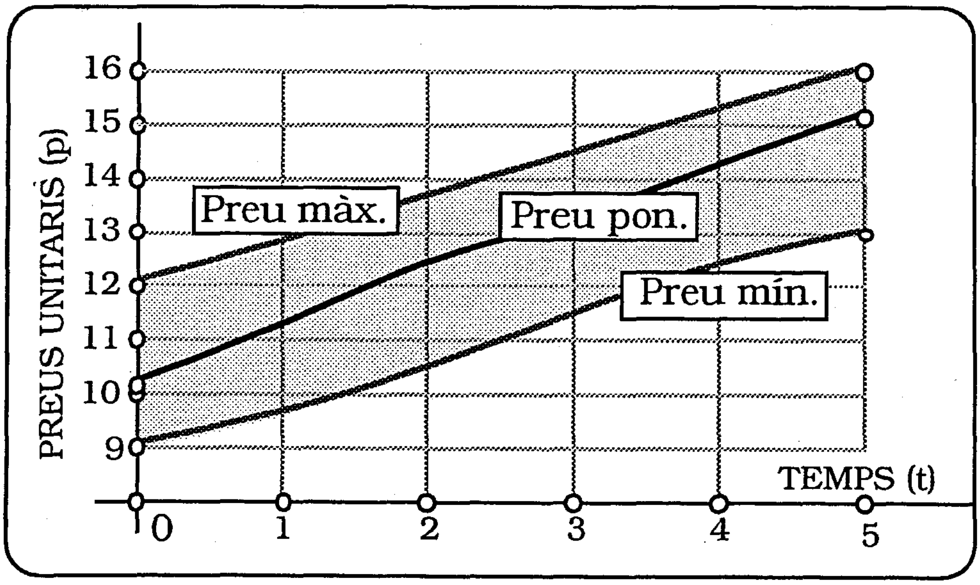


Fig.8.5 Trajectòries dels preus òptims

Si considerem el temps discret i que els preus variïn anualment, els preus òptims vénen representats per la gràfica següent;

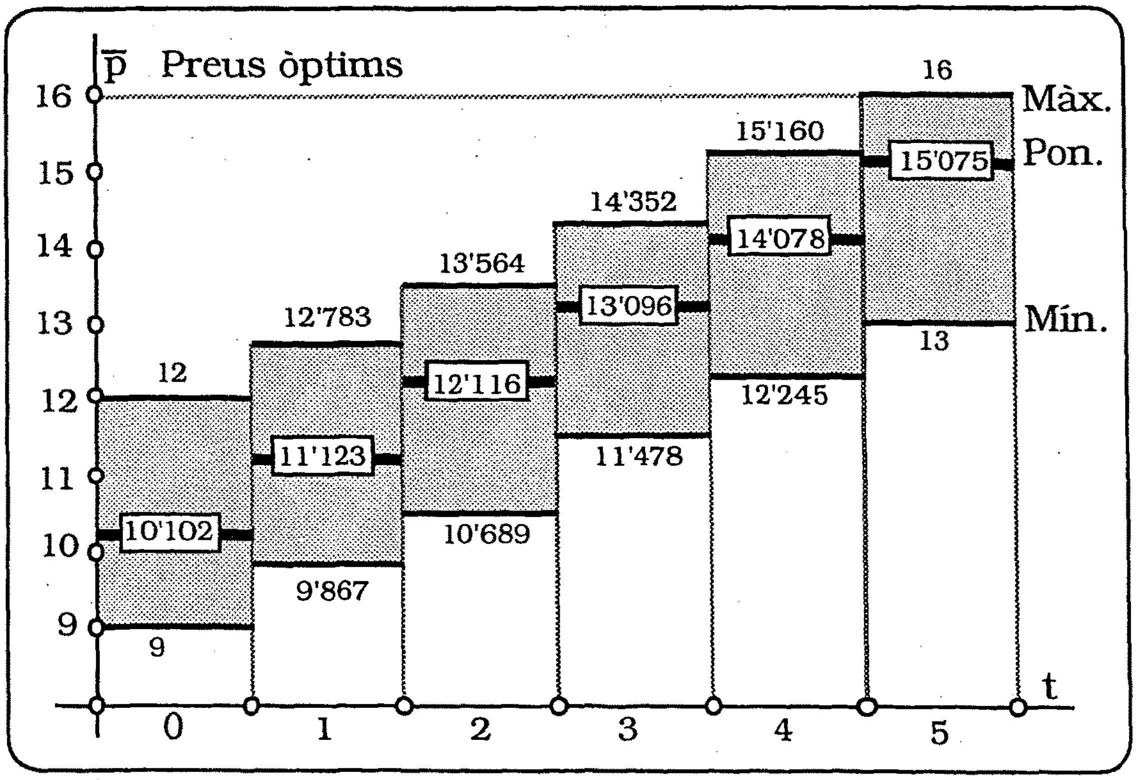


Fig.8.6 Trajectòries òptimes en temps discret

Observem que els preus de venda del producte, en els diferents anys, que proporcionen un benefici total màxim, estan situats en la zona ombrejada.

Finalment, prendrem com a millor solució la trrajectòria dels preus ponderats, requadrats en la figura anterior.

IV. ANNEXOS

ANNEX A

CONJUNTS ORDINARIS

Tots els objectes del nostre pensament es consideren ben definits si tenim un criteri que ens permeti afirmar si dos d'aquests objectes x i y són iguals o diferents. Escriurem

A) $x = y$ (iguals) B) $x \neq y$ (diferents).

El concepte d'igualtat entre objectes s'ha d'entendre de la següent manera: «havent considerat un mateix objecte de dues maneres diferents, aquest ha pogut rebre dues denominacions diferents representades per x i y. Aleshores, cal tenir un criteri per adonar-nos-en que es tracta del mateix objecte». Per exemple, el resultat d'elevar 2 al quadrat li diem x, el resultat de dividir 8 per 2 li diem y, llavors les regles de l'aritmètica ens asseguren que $x = y$.

Cantor[1] defineix un conjunt com: «qualsevol col·lecció d'objectes ben determinats i ben diferenciats en la nostra percepció o pensament, agrupats en un tot».

---

[1] CANTOR, G. *Gesammelte Abhandlungen*. Ed. Springer. Berlín. 1932. p.282.

Aquesta noció primària de conjunt donada per Cantor és molt àmplia, fet que ens porta a algunes paradoxes com la coneguda paradoxa de Russell[2]: «considerem el conjunt A format per tots els conjunts B que no es contenen a ells mateixos (B no és un element de B), aleshores ens preguntem, està el conjunt A contingut en ell mateix?

La resposta a aquesta pregunta pot ser "sí" o "no". Si contestem que "sí" , estem afirmant que A està contingut en A, és a dir, que A és un element d'A, però això està en contradicció amb la definició donada del conjunt A, atès que aquest conjunt està format per tots els conjunts que no es contenen a ells mateixos. Si contestem que "no", aleshores A no està contingut en A. D'altra banda, per la pròpia definició del conjunt A, aquest és un element del conjunt, la qual cosa és absurda. Concluïm doncs que la pregunta plantejada no admet cap de les respostes anteriors.

Deixant de banda aquesta paradoxa i altres anàlogues a ella, observem que el concepte de conjunt donat per Cantor és suficientment general i simple per als conjunts que nosaltres utilitzarem, però perquè no doni lloc a confusió, tindrem en compte els següents tres punts:

1) Donat un objecte qualsevol, podem decidir si pertany o no pertany al conjunt.

2) Tots els elements que constitueixen un conjunt són diferents.

3) Un element d'un conjunt no pot ser el propi conjunt.

[2] RUSSELL, B.; WHITEHEAD, A.N. *Principia Mathematica*. Cambridge. 1910-1913. Tom I, Vol 3. pàg.40.

A.1 GENERALITATS SOBRE CONJUNTS ORDINARIS

A.1.1 DEFINICIÓ DE CONJUNT

Per definir un conjunt haurem de precisar quins són tots i cadascun dels seus objectes que el formen i això es pot fer essencialment de dues maneres diferents:

1) **PER EXTENSIÓ:** anomenant cadascun dels elements del conjunt. Per exemple, el conjunt A format per tots els nombres naturals parells compresos entre 1 i 9, escriurem

$$A=\{2, 4, 6, 8\}$$

Quan un conjunt ve definit per extensió, per saber si un objecte determinat pertany o no a aquest conjunt, només ens cal observar si ha estat nombrat o no entre els elements del conjunt. Aquesta definició per extensió, tot i ser la més natural, no sempre és l'adequada.

Si per exemple ens demanessin que definíssim el conjunt de totes les persones que viuen a Catalunya en un cert període de temps, és evident que el podríem donar enumerant tots i cadascun dels seus elements, però això comportaria un cost important de temps i una dificultat afegida degut a la freqüència de naixements, defuncions, immigracions i emigracions que es produeixen durant aquest període de temps.

2) **PER COMPRENSIÓ:** enunciant una propietat que la compleixin tots els elements del conjunt i només ells. Podem dir que aquesta propietat és la propietat característica del conjunt. Si designem per p aquesta propietat, podem escriure el conjunt A de la següent manera:

$$A=\{x \ / \ x \text{ compleix la propietat } p\}$$

Per exemple, el conjunt A de tots els punts del pla situats sobre la circumferència de centre l'origen i de radi unitat, l'expressarem com

$$A=\{(x,y) \ / \ x^2+y^2=1\}$$

La definició per comprensió és l'única possible si el conjunt té infinits elements. Notem que en una definició d'un conjunt per comprensió per saber si un objecte pertany al conjunt, és suficient veure si compleix la propietat característica del conjunt.

Per indicar que x és un element dels que constitueixen el conjunt A, utilitzarem el símbol $\in$, anomenat *signe de pertinença* i llavors escriurem $x \in A$. Quan x no sigui un dels objectes que formen el conjunt A, escriurem $x \notin A$.

A.1.2 CONJUNTS BUIT I UNIVERSAL

1) **CONJUNT BUIT:** Definim el conjunt buit i el representem per $\emptyset$ com aquell conjunt que no té cap element:

$$\emptyset = \{x \ / \ x \neq x\}$$

Aquesta definició ens porta a una situació compromesa amb la definició de conjunt segons Cantor, ja que hem dit que un conjunt és una agrupació d'objectes i ara no tenim objectes per agrupar i, per tant, no podem construir el conjunt. Per evitar aquest problema hauríem d'entrar en la teoria axiomàtica de classes de Zermelo, que, com ja hem dit anteriorment, no és l'objectiu d'aquest treball analitzar aquest tipus de qüestions. Per tant, aquesta definició l'entenem des d'un punt de vista totalment intuïtiu.

No obstant això, la introducció del conjunt buit portarà, com ja anirem comprovant al llarg d'aquest annex, molts avantatges.

2) **CONJUNT UNIVERSAL:** En les aplicacions de la teoria de conjunts, és important utilitzar un conjunt que contingui tots els elements que formen els conjunts que es fan servir en cada cas. Aquest conjunt, format per tots els subconjunts que són objecte d'estudi li direm conjunt universal o també *referencial* i el representarem generalment per E. Podem dir que el referencial ens proporciona l'àmbit en què opera aquesta teoria.

A.1.3 OPERACIONS ENTRE CONJUNTS

1) **INCLUSIÓ DE CONJUNTS:** Direm que un conjunt B està *inclòs* en un conjunt A quan tots els elements de B pertanyen a la vegada a A i, en aquest cas, escriurem

$$B \subseteq A \quad \Leftrightarrow \quad (x \in B \;\Rightarrow\; x \in A)$$

Sinònims de B està inclòs en A sòn per exemple que B és una part d'A, que B és un subconjunt d'A o que A conté a B.

Si B està inclos en A i existeix almenys un element d'A que no pertany a B, direm que es tracta d'una una *inclusiò estricta*, a diferència de l'anterior que li diem *inclusió àmplia.* Escriurem

$$B \subset A$$

Considerem totes les parts d'un conjunt A, les quals defineixen un nou conjunt anomenat *conjunt de les parts* d'A que designarem per P(A). Així doncs, tenim que

$$B \subseteq A \;\Leftrightarrow\; B \in P(A)$$

Cal no confondre els símbols de pertinença i d'inclusió. Així, per exemple, si a és un element d'A, aleshores

$$a \in A \;\Leftrightarrow\; \{a\} \subseteq A \;\Leftrightarrow\; \{a\} \in P(A) \;\Leftrightarrow\; \{\{a\}\} \subseteq P(A)$$

Notem que per qualsevol conjunt A, es verifica

$$\emptyset \in P(A) \quad i \quad A \in P(A)$$

2) **IGUALTAT DE CONJUNTS:** Direm que dos *conjunts* són *iguals* i escriurem A=B si tenen els mateixos elements. En conseqüència deduïm que cadascun d'ells haurà d'estar contingut en l'altre:

$$A=B \quad \Leftrightarrow \quad (A \subseteq B \;\; i \;\; B \subseteq A)$$

En cas contrari, és a dir si no són iguals, direm que els *conjunts* són *diferents* i escriurem $A \neq B$.

3) INTERSECCIÓ DE CONJUNTS: Donats dos conjunts A i B d'un mateix referencial E s'anomena *intersecció*, i es designa per $A \cap B$, el conjunt descrit pels elements comuns a A i B. És a dir,

$$A \cap B = \{x \in E \, / \, x \in A \text{ i } x \in B\}$$

Quan la intersecció de dos conjunts A i B és buida, direm que A i B són dos *conjunts disjunts*.

4) UNIÓ DE CONJUNTS: S'anomena *unió* de dos conjunts A i B d'un mateix referencial E i es designa per $A \cup B$, el conjunt dels elements que pertanyen almenys a un dels dos conjunts. Per tant,

$$A \cup B = \{x \in E \, / \, x \in A \text{ o } x \in B\}$$

5) COMPLEMENTACIÓ D'UN CONJUNT: Donat un conjunt A d'un referencial E, s'anomena *complementari* de A i es representa per A' el conjunt format per tots els elements del referencial que no pertanyen al conjunt A. Simbòlicament

$$A' = \{x \in E \, / \, x \notin A\}$$

A.1.4 PROPIETATS DE LES OPERACIONS CONJUNTISTES

Si A, B i C són tres conjunts qualsevols d'un referencial E, llavors es verifiquen les següents propietats, totes elles de demostració immediata:

1) COMMUTATIVA:

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A$$

2) ASSOCIATIVA:

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \qquad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

3) IDEMPOTENT:

$$A \cap A = A \qquad A \cup A = A$$

4) DISTRIBUTIVA:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \qquad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

5) ABSORCIÓ:

$$A \cup (A \cap B) = A \qquad A \cap (A \cup B) = A$$

6) LLEIS DE MORGAN:

$$(A \cap B)' = (A') \cup (B)' \qquad (A \cup B)' = (A') \cap (B)'$$

7) PRINCIPI DEL TERÇ EXCLÒS:

$$A \cap (A)' = \emptyset$$

8) PRINCIPI DE NO-CONTRADICCIÓ:

$$A \cup (A)' = E$$

Les propietats associatives de la intersecció i de la unió ens permeten escriure $A \cap B \cap C$ i $A \cup B \cup C$, és a dir podem prescindir dels parèntesis. Per tant, juntament amb la propietat commutativa, podem definir la intersecció i la unió de més de dos conjunts sense necessitat d'establir un determinat ordre per a la realització d'aquestes operacions.

A més, el principi del terç exclòs comporta que no existeix cap element que sigui d'un conjunt i del seu complementari alhora. Quant al principi de no-contradicció ens afirma que els elements d'un conjunt i els del seu complementari són tots els elements del referencial.

Aquests dos principis són molt importants per a nosaltres, tal com veurem en el proper tema.

A.2 RELACIONS ENTRE CONJUNTS

A.2.1 PRODUCTE CARTESIÀ

1) **PARELLA ORDENADA:** Siguin dos conjunts qualsevols A i B diferents del conjunt buit. Donats x i y elements d'A i d'B, respectivament , definim la *parella ordenada* de primer element x i segon element y i la representem per (x, y) com el conjunt

$$(x, y)= \{\{x\}, \{x, y\}\}$$

TEOREMA A.1. CARACTERITZACIÓ DE LA IGUALTAT DE PARELLES ORDENADES «Donades dues parelles ordenades (x, y) i (z, t), es verifica $(x, y)=(z, t) \Leftrightarrow x=z \text{ i } y=t$.»

Demostració: Resulta de les següents equivalències

$$(x, y)=(z, t) \Leftrightarrow \{\{x\}, \{x, y\}\}=\{\{z\}, \{z, t\}\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{x\}=\{z\} \text{ i } \{x, y\}=\{z, t\} \Leftrightarrow x=z \text{ i } \{x, y\}=\{z, t\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=z \text{ i } \{x, y\}=\{x, t\} \Leftrightarrow x=z \text{ i } y=t. \blacklozenge$$

2) **PRODUCTE CARTESIÀ DE CONJUNTS:** Donats dos conjunts A i B, s'anomena *producte cartesià* d'A per B i es representa per A×B el conjunt que té com a elements totes les parelles ordenades de primer element x pertanyent al conjunt A i segon element y pertanyent al conjunt B. Matemàticament,

$$A\times B=\{(x, y) \mid x\in A \text{ i } y\in B \}$$

Les definicions de parella ordenada i de producte cartesià de dos conjunts es poden generalitzar al cas d'un número finit de conjunts $A_1, A_2 ,..., A_n$ de la següent manera:

Donats $x_1\in A_1, x_2\in A_2 , ... , x_n\in A_n$, definim la *n-tupla* de primer element x_1, de segon element x_2 , ... i d'enèssim element x_n com el conjunt definit per recurrència per:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) = ((x_1,,x_2, ..., x_{n-1}), x_n)$$

Observem que el producte cartesià d'aquests conjunts és el conjunt format per totes les possibles n-tuples; és a dir,

$$A_1 \times A_2 \times \ldots\ldots \times A_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2,\ \ldots\ldots,\ x_n \in A_n\}$$

En el cas particular que $A_1=A_2=\ldots\ldots=A_n=A$ el producte cartesià el representem per A^n i tenim

$$A^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in A \quad i=1,2,\ldots,n\}$$

A.2.2 RELACIONS BINÀRIES

En el llenguatge ordinari diem que dos elements estan relacionats quan aquests compleixen una determinada propietat. Així, donada una propietat, hi haurà parelles d'objectes que la compliran.

1) **RELACIÓ BINÀRIA:** Donats dos conjunts A i B, diferents del conjunt buit, una *relació binària* R entre A i B és qualsevol subconjunt del producte cartesià d'A per B. Simbòlicament,

$$R \subseteq A \times B$$

Per indicar que dos elements estan relacionats per R ho escriurem xRy. Per tant,

$$(x,y) \in R \quad \Leftrightarrow \quad xRy$$

Si succeix que A=B direm que R és una relació en A.

2) **COMPOSICIÓ DE RELACIONS:** Donats tres conjunts A, B i C diferents del buit, R una relació binària entre A i B i S una relació binària entre B i C, definim la relació *composició* SoR entre A i C com el subconjunt d'A×C definit com

$$SoR = \{(x, z) \in A \times C \mid \exists y \in B \quad (x, y) \in R \ \text{ i } \ (y, z) \in S\}$$

És a dir,

$$x(SoR)z \quad \Leftrightarrow \quad \exists y \in B \ \text{ tal que } xRy \ \text{ i } \ yRz$$

3) **RELACIÓ INVERSA:** Donada una relació R entre els conjunts A i B, construïm a partir d'ella una altra relació R^{-1} en el conjunt B×A que li direm *relació inversa* d'R i que ve definida per

$$R^{-1}= \{(y, x)\in B\times A \ / \ (x, y)\in A\times B\}$$

o bé

$$yR^{-1}x \Leftrightarrow xRy$$

4) **DOMINI I RECORREGUT D'UNA RELACIÓ:** Si R és una relació definida en A×B el *domini* d'R, denotat per Dom(R), es defineix com

$$Dom(R)= \{x\in A \ / \ (x, y)\in R \text{ per qualsevol } y\in B\}$$

D'altra banda, el *recorregut* d'una relació R, denotat per Rec(R), es defineix com

$$Rec(R)= \{y\in B \ / \ (x, y)\in R \text{ per qualsevol } x\in A\}$$

5) **RELACIÓ D'EQUIVALÈNCIA:** Una relació R definida en un conjunt A direm que és una *relació d'equivalència* si compleix les tres propietats següents:

1. Reflexiva: $\forall x\in A \quad \Rightarrow \quad xRx$
2. Simètrica: $\forall x,y\in A \quad xRy \ \Rightarrow \ yRx$
3. Transitiva: $\forall x,y,z\in A \quad xRy \text{ i } yRz \ \Rightarrow \ xRz$

5) **CLASSE D'EQUIVALÈNCIA I CONJUNT QUOCIENT:** Donat un conjunt A i una relació d'equivalència R definida en A, anomenem *classe d'equivalència* d'element "a" al següent conjunt

$$[a]= \{x\in A \ / \ xRa\}$$

Al conjunt format per totes les classes d'equivalència li direm *conjunt quocient* i el denotarem per A/R, és a dir,

$$A/R=\{[a] \ / \ [a] \text{ és una classe d'equivalència}\}$$

6) **RELACIÓ DE PREORDRE:** Una relació binària $\leq$ definida en un conjunt A direm que és una *relació de preordre* si verifica les propietats reflexiva i transitiva. A la parella(A, $\leq$) l'anomenem *conjunt preordenat.*

7) **RELACIÓ D'ORDRE:** Una relació binària $\leq$ definida en un conjunt A diem que és una *relació d'ordre* si verifica les propietats:

1. Reflexiva: $\forall x \in A \Rightarrow x \leq x$
2. Antisimètrica: $\forall x,y \in A$ si $x \leq y$ i $y \leq x \Leftrightarrow x=y$
3. Transitiva: $\forall x,y,z \in A$ si $x \leq y$ i $y \leq z \Rightarrow x \leq z$

A la parella(A, $\leq$) l'anomenem *conjunt ordenat.*

8) **ELEMENTS COMPARABLES:** Donat un conjunt ordenat (A, $\leq$), diem que x, x' d'A són dos *elements comparables* si es verifica que $x \leq x'$ o bé que $x' \leq x$.

Si tots els elements d'un conjunt ordenat són comparables, diem que A és un *conjunt totalment ordenat.* En cas contrari, direm que A és un *conjunt parcialment ordenat.*

9) **COTA SUPERIOR:** Donat un conjunt ordenat (E, $\leq$) i un subconjunt ordenat (A, $\leq$) d'E diem que un element $a \in E$ és una *cota superior* d'A si es compleix que

$$x \in A \Rightarrow x \leq a$$

Observem que qualsevol $b \in E$ tal que $a \leq b$ també serà una cota superior d'A. Conseqüentment, un conjunt ordenat pot tenir més d'una cota superior.

Si A té almenys una cota superior, diem que A és un *conjunt acotat superiorment.*

Si un conjunt A està acotat superiorment, a la més petita de les seves cotes superiors li diem el *suprem* del conjunt A, simbolitzat per sup(A). Així, a és suprem si compleix les condicions següents:

1. El suprem a és una cota superior d'A.

2. Si b és una cota superior d'A i $b \leq a$, llavors $a=b$.

En cas que $a=\sup(A) \in A$, direm que "a" és el *màxim* d'A.

10) **COTA INFERIOR:** Donat un conjunt ordenat $(E, \leq)$ i un subconjunt ordenat $(A, \leq)$ d'E diem que un element $a \in E$ és una *cota inferior* d'A si es compleix que

$$x \in A \Rightarrow a \leq x$$

Observem, igual que en el cas anterior de cota superior, que un conjunt A pot tenir més d'una cota inferior. Si A té almenys una cota inferior, diem que A és un conjunt *acotat inferiorment.*

Si un conjunt A està acotat inferiorment, a la més gran de les seves cotes inferiors li diem l'*ínfim* del conjunt A. És a dir, serà $a=\text{ínf}(A)$ si compleix les dues condicions següents:

1. L'ínfim a és una cota inferior d'A.

2. Si b és una cota inferior d'A i $a \leq b$, llavors $a=b$.

En cas que $a=\text{ínf}(A) \in A$, direm que "a" és el *mínim* d'A.

A.3 APLICACIONS ENTRE DOS CONJUNTS

A.3.1 CONCEPTE D'APLICACIÓ

Considerem dos conjunts A i B diferents del buit i una relació f entre A i B. Diem que f és una *aplicació* entre A i B si f verifica les dues condicions següents:

1. Dom(f)=A

2) $\forall y,z \in B$ tal que $(x, y) \in f$ i $(x, z) \in f$ per algun $x \in A$, llavors $y=z$.

Intuïtivament podem dir que una aplicació entre A i B és una llei (relació) tal que a cada element $x \in A$ se li associa un i només un element $y \in B$.

Seguint la nomenclatura habitual, a un element arbitrari $x \in A$ l'anomenem *variable, original* o *argument* de l'aplicació f i l'únic element $y \in B$ que està relacionat amb x l'anomenem *imatge* d'x per f i el denotem per f(x). Al conjunt de totes les imatges del conjunt A l'anomenem *conjunt imatge* d'A i el denotem per f(A) o Im(f).

Per designar una funció d'una manera simplificada utilitzem la següent notació:

$$\begin{aligned} f\colon A &\to B \\ x &\to f(x)=y \end{aligned}$$

A més, donada l'aplicació $f\colon A \to B$, anomenem *graf* de l'aplicació f el conjunt G(f) definit per

$$G(f)= \{(x, y) \in A \times B \ / \ y=f(x)\}$$

Notem que el conjunt anterior és igual al

$$G(f)= \{(x, f(x)) \in A \times B\}$$

A.3.2 ANTIIMATGE D'UN ELEMENT

Sigui $f\colon A \to B$ una aplicació. Per la definició de f, sabem que tot element $x \in A$ té una i només una imatge en B. Ara bé, donat un element en B, poden presentar-se qualsevol de les següents possibilitats:

1. Que no sigui imatge de cap element d'A.
2. Que sigui imatge d'un únic element d'A.
3. Que sigui imatge de més d'un element d'A.

El conjunt de tots els elements d'A que tenen per imatge l'element $y \in B$ rep el nom d'*antiimatge* d'y i es denota per $f^{-1}(y)$, és a dir, expressat matemàticament

$$f^{-1}(y)=\{x \in A \ / \ f(x)=y\}$$

En general, si $B_1 \subseteq B$, l'antiimatge del conjunt B_1 serà

$$f^{-1}(B_1)=\{x \in A \ / \ f(x) \in B_1\}$$

A.3.3 TIPUS D'APLICACIONS

1. APLICACIÓ INJECTIVA. Sigui $f: A \rightarrow B$ una aplicació. Direm que f és *injectiva* si i només si

$$\forall x,x' \in A, \ f(x)=f(x') \ \Rightarrow \ x=x'$$

2. APLICACIÓ EXHAUSTIVA. Direm que l'aplicació f és *exhaustiva* si i només si

$$\forall y \in B, \ \exists x \in B \quad \text{tal que} \quad f(x)=y$$

3. APLICACIÓ BIJECTIVA. Direm que f és una aplicació *bijectiva* si i només si és injectiva i exhaustiva.

A.3.4 COMPOSICIÓ D'APLICACIONS

1) **APLICACIÓ COMPOSTA:** Donades les aplicacions $f: A \rightarrow B$ i $g: B \rightarrow C$, a l'aplicació $h: A \rightarrow C$ definida per a tot x d'A com

$$h(x) = g[f(x)]$$

s'anomena *aplicació composta* de les aplicacions f i g i la representem per gof. Llavors, per a tot x d'A, es verifica

$$h(x) = (gof)(x) = g[f(x)]$$

2) APLICACIÓ INVERSA: Sigui $f: A \to B$ una aplicació bijectiva entre els conjunts A i B:

$$\begin{aligned} f: A &\to B \\ x &\to f(x)=y \end{aligned}$$

Aleshores, l'aplicació $f^{-1}: B \to A$ definida per a tot y de B com

$$f^{-1}(y)=x \Leftrightarrow f(x)=y$$

l'anomenem *aplicació inversa* de l'aplicació f.

Notem que la condició de què f sigui una aplicació bijectiva és per assegurar que f^{-1} sigui també una aplicació.

A.3.5 FUNCIÓ CARACTERÍSTICA D'UN CONJUNT

Sigui E un referencial i A un subconjunt qualsevol d'E. A la funció

$$\begin{aligned} \mu_A: E &\to \{0\ ,\ 1\} \\ x &\to \mu_A(x)= \begin{cases} 1 & \text{si } x\in A \\ 0 & \text{si } x\notin A \end{cases} \end{aligned}$$

se l'anomena *funció característica* del conjunt A.

Observem que donat un referencial E, qualsevol dels seus subconjunts queda perfectament determinat donant el graf de la seva funció caracteristica:

$$G(\mu_A)=\{\ (x,\ \mu_A(x))\in E\times\{0,1\}\ \}$$

TEOREMA A.2. «Si E és un referencial i A i B són dos subconjunts d'E, es verifiquen les set propietats següents

1. $\forall x\in E \quad \mu_E(x)=1$
2. $\forall x\in E \quad \mu_\varnothing(x)=0$
3. $\mu_A\leq \mu_B \Leftrightarrow A\subseteq B$
4. $\mu_A=\mu_B \Leftrightarrow A=B$
5. $\mu_{A'} = 1-\mu_A$
6. $\mu_{A\cap B} = \mu_A.\mu_B$
7. $\mu_{A\cup B} = \mu_A+\mu_B-\mu_{A\cap B}$ »

Demostració:

1. És evident que $\mu_E(x)=1$ per tot $x \in E$, atès que E conté tots els elements per definició de referencial.

2. Tenim que $\mu_\varnothing(x)=0$ perquè el conjunt buit no té cap element.

3. Suposem en primer lloc que $\mu_A \leq \mu_B$. Sigui $x \in A$, aleshores $\mu_A(x)=1$ i per tant, $1 \leq \mu_B(x)$. Per definició de funció característica $\mu_B(x) \leq 1$. De les dues desigualtats deduïm que $\mu_B(x)=1$ llavors $x \in B$ i, conseqüentment, $A \subseteq B$.

En segon lloc suposem que $A \subseteq B$. Prenent un element qualsevol $x \in E$, pot passar que $x \in A$ o que $x \notin A$. Si $x \in A$ tenim per hipòtesi que $x \in B$. Per tant, $\mu_B(x)=\mu_A(x)$.

Si $x \notin A$ hi ha dues possibilitats: $x \in B$ o $x \notin B$. Si $x \in B$, llavors $\mu_B(x)=1$, però $\mu_A(x)=0$ i així $\mu_A(x)<\mu_B(x)$. Si $x \notin B$, llavors $\mu_B(x)=0$, però $\mu_A(x)=0$ i així $\mu_B(x)=\mu_A(x)$. En qualsevol cas $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.

4. És una conseqüència immediata de l'apartat anterior.

5. Si $x \in A' \Leftrightarrow x \notin A$. Per tant, $\mu_{A'}=1$ i $\mu_A=0$, $\mu_{A'}=1-0=1-\mu_A$. Si $x \notin A' \Leftrightarrow x \in A$. Per tant, $\mu_{A'}=0$ i $\mu_A=1$, $\mu_{A'}=1-1=1-\mu_A$.

6. Si $x \in A \cap B$, aleshores $x \in A$ i $x \in B$. Per tant, $\mu_{A\cap B}=1$ $\mu_A=1$ i $\mu_B=1$, i conseqüentment, $\mu_{A\cap B}=1=1.1=\mu_A.\mu_B$. Si $x \notin A \cap B$, aleshores $x \notin A$ o $x \notin B$. Per tant, $\mu_{A\cap B}=0$, $\mu_A=0$ o $\mu_B=0$. En tots els casos, $\mu_{A\cap B} = \mu_A.\mu_B$.

7. Es dedueix de la següent cadena d'igualtats:

$$\mu_{A\cup B}(x) = \mu_{(A'\cap B')'}(x) = 1-\mu_{A'\cap B'}(x) = 1-\mu_{A'}(x).\mu_{B'}(x) =$$

$$= 1-(1-\mu_A(x))(1-\mu_B(x)) = 1-1+\mu_A(x)+\mu_B(x)\mu_A(x)\mu_B(x) =$$

$$= \mu_A(x)+\mu_B(x)-\mu_A(x)\mu_B(x). \ \blacklozenge$$

A.3.6 OPERACIÓ INTERNA

Donat un conjunt A diferent del conjunt buit, anomenem *operació interna* en A a qualsevol aplicació d'A×A en A tal que a cada parella (x, y) d'elements d'A se li associa un únic element z d'A:

$$f: A\times A \to A$$
$$(x,y) \to f(x,y)=z$$

Una operació interna la representem utilitzant un símbol, per exemple un asterisc que, situat entre els elements amb què opera, expressa el resultat de l'operació. És a dir, per expressar que z és el resultat d'operar x amb y, escrivim

$$z=x*y$$

A.4 ESTRUCTURA DE RETICLE

A.4.1 RETICLE PER LES LLEIS DE SUPREM I ÍNFIM

Un conjunt ordenat $(A, \leq)$ diem que és un *reticle* si qualsevol subconjunt d'A format per dos elements x i y, té suprem i ínfim, els quals indiquem respectivament per

$$\sup\{x,y\}=x\vee y \qquad \text{ínf}\{x,y\}= x\wedge y$$

En un reticle $(A, \leq)$ es verifiquen les següents propietats, totes elles de demostració immediata, $\forall x,y,z\in A$:

1. IDEMPOTÈNCIA: a) $x\vee x=x$ b) $x\wedge x=x$
2. COMMUTATIVA: a) $x\vee y=y\vee x$ b) $x\wedge y=y\wedge x$
3. ASSOCIATIVA: a) $x\vee(y\vee z)=(x\vee y)\vee z$ b) $x\wedge(y\wedge z)=(x\wedge y)\wedge z$
4. ABSORCIÓ: a) $x\vee(x\wedge y)=x$ b) $x\wedge(x\vee y)=x$

A.4.2 RETICLES DISTRIBUTIU I COMPLEMENTARI

1) **RETICLE DISTRIBUTIU:** Diem que (A, $\leq$) és un *reticle distributiu* si verifica les propietats:

1. Distributiva de $\vee$ respecte a $\wedge$: $x\vee(y\wedge z)=(x\vee y)\wedge(x\vee z)$
2. Distributiva de $\wedge$ respecte a $\vee$: $x\wedge(y\vee z)=(x\wedge y)\vee(x\wedge z)$

2) **RETICLE COMPLEMENTARI:** Diem que un reticle (A, $\leq$) és un *reticle complementari* si compleix la següent propietat:

Hi ha dos elements en A anomenats universal (1) i nul (0) de manera que $\forall x\in A$ $\exists x'\in A$ (complementari d'x) que verifica

$$x\vee x'=1 \qquad x\wedge x'=0$$

Notem que si (A, $\leq$) és un reticle complementari, llavors es verifiquen les següents propietats:

1. $x\wedge 0=0$ 2. $x\wedge 1=x$ 3. $x\vee 0=x$
4. $x\vee 1=1$ 5. $((x)')'=x$

La seva demostració es dedueix directament de les definicions de suprem, ínfim i també pel fet de ser un reticle complementari.

TEOREMA A.3. «Si (A, $\leq$) és un reticle complementari i distributiu, es verifiquen les següents propietats anomenades lleis de Morgan:

1. $(x\vee y)'=x'\wedge y'$ 2. $(x\wedge y)'=x'\vee y'$ »

Demostració:

1. En efecte, tenim que

$$(x\vee y)\vee(x'\wedge y')=(x\vee y\vee x')\wedge(x\vee y\vee y')=(1\vee y)\wedge(x\vee 1)=1\wedge 1=1$$

$$(x\vee y)\wedge(x'\wedge y')=(x'\wedge y'\wedge x)\vee(x'\wedge y'\wedge y)=(0\wedge x)\vee(0\wedge y)=0\vee 0=0$$

2. Es demostra de forma similar al primer apartat. ♦

A.4.3 RETICLE EN SENTIT ALGEBRAIC

Un reticle en sentit algebraic és un conjunt A amb dues opreracions internes $*$ i $*'$, és a dir, es verifica $\forall x,y \in A$,

$$x*y \in A \qquad \text{i} \qquad x*'y \in A$$

que compleixin les següents propietats:

1. IDEMPOTÈNCIA: a) $x*x=x$ b) $x*'x=x$
2. COMMUTATIVA: a) $x*y=y*x$ b) $x*'y=y*'x$
3. ASSOCIATIVA: a) $x*(y*z)=(x*y)*z$ b) $x*'(y*'z)=(x*'y)*'z$
4. ABSORCIÓ: a) $x*(x*'y)=x$ b) $x*'(x*y)=x$

TEOREMA A.4. EQUIVALÈNCIA DE LES DUES DEFINICIONS DE RETICLE «A és un reticle en el sentit de suprem i ínfim si i només si A és un reticle en sentit algebraic.»

Demostració:

1. Suposem en primer lloc que A és un reticle en el sentit de les lleis de suprem i ínfim, i definim les operacions $*$ i $*'$ de la següent manera, $\forall x,y \in A$:

$$x*y=x \vee y \qquad \text{i} \qquad x*'y=x \wedge y$$

És evident que les operacions anteriors són internes en A, atès que donat un subconjunt de dos elements d'A, el suprem i l'ínfim sempre pertanyen a A.

D'altra banda, les altres quatre propietats són justament les propietats que es dedueixen de la definició de reticle en el sentit que estem tractant.

2. Suposem en segon lloc que A és un reticle en sentit algebraic i definim en A la relació binària:

$$x \leq y \iff x*y=y$$

o, equivalentment, $x \leq y \iff x*'y=x$.

Suposem a continuació que $x*y=y$. Aleshores, per l'axioma d'absorció, $x*'(x*y)=x$, resulta que $x*'y=x$. De la mateixa manera, si $x*'y=x$, deduïm que $x*y=y$

Comprovem ara que la relació definida anteriorment és d'ordre. En efecte, és reflexiva: $\forall x \in A$ per l'axioma d'idempotència $x*x=x$ i per tant, $x \leq x$. És antisimètrica: $\forall x,y \in A$ tal que $x \leq y$ i $y \leq x$. Per definició de $\leq$ tenim $x*y=y$ i $y*x=x$ i aplicant la propietat commutativa resulta $x=y$. És transitiva: $\forall x,y,z \in A$ tal que $x \leq y$ i $y \leq z$. Per definició de $\leq$ és $x*y=y$ i $y*z=z$ i, aleshores, $x*z=x*(y*z)=(x*y)*z=y*z=z$ i, per tant, $x \leq z$.

Resta per demostrar que tot subconjunt format per dos elements $\{x, y\}$ d'A té suprem i ínfim. Anem a demostrar que $x*y$ és el suprem de $\{x,y\}$.

En efecte, $x*y$ és una cota superior de$\{x, y\}$, atès que aplicant les propietats associativa i idempotent de reticle tenim $x*(x*y)=(x*x)*y=x*y$ i per tant $x \leq x*y$. Sigui z una cota superior de$\{x,y\}$ i $z \leq x*y$. Per ser z cota superior del conjunt $\{x,y\}$, tenim $x \leq z$ i $y \leq z$ i, per tant, $x*z=z$ i $y*z=z$.

D'altra banda, $z=x*z=x*(y*z)=(x*y)*z$ la qual cosa vol dir que $x*y \leq z$. Hem arribat, doncs, a $x*y \leq z$ i a $z \leq x*y$ i com a conseqüència tenim $x*y=z$.

D'una manera similar, provaríem que $x*'y$ és l'ínfim del conjunt $\{x, y\}$. ♦

A.4.4 EXEMPLES DE RETICLES

1) **EXEMPLE 1:** Considerem el conjunt $\Psi(E)$ de totes les funcions característiques d'un referencial E:

$$\Psi(E)= \{\mu_A \,/\, \mu_A: E \longrightarrow \{0,1\}\}$$

A continuació definim en $\Psi(E)$ la relació

$$\mu_A \leq \mu_B \quad \Leftrightarrow \quad \forall \mu_A, \mu_B \in \Psi(E) \quad \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

En aquest cas, tenim que $\sup\{\mu_A,\mu_B\}=\mu_A \vee \mu_B=\mu_{A\cup B}$. En efecte, $\mu_A \leq \mu_{A\cup B}$ i $\mu_B \leq \mu_{A\cup B}$, atès que $A \subseteq A\cup B$ i $B \subseteq A\cup B$. Per tant, $\mu_{A\cup B}$ és cota superior del conjunt $\{\mu_A,\mu_B\}$.

Sigui μ_C una cota superior de $\{\mu_A, \mu_B\}$ i $\mu_C \leq \mu_{A\cup B}$. Com que μ_C és una cota superior de $\{\mu_A, \mu_B\}$, tenim $\mu_A \leq \mu_C$ i $\mu_A \leq \mu_C$. Per tant, $A \subseteq C$ i $B \subseteq C$ i aleshores $A\cup B \subseteq C \Leftrightarrow \mu_{A\cup B} \leq \mu_C$. Deduïm doncs que $\mu_{A\cup B}=\mu_C$, i així queda demostrat que $\mu_{A\cup B}$ és la més petita de les cotes superiors.

De la mateixa manera, es comprova que l'ínfim ens veé donat com $\text{ínf}\{\mu_A,\mu_B\}=\mu_A \wedge \mu_B=\mu_{A\cap B}$.

També es compleixen els dos axiomes de distributivitat:

a) $\mu_A \vee (\mu_B \wedge \mu_C)=(\mu_A \vee \mu_B)\wedge(\mu_A \vee \mu_B)$

b) $\mu_A \wedge (\mu_B \vee \mu_C)=(\mu_A \wedge \mu_B)\vee(\mu_A \wedge \mu_B)$

Observem, finalment, que $\forall \mu_A \in \Psi(E)$ existeix $\mu_{A'} \in \Psi(E)$ $(\mu_{A'}=1-\mu_A)$ de manera que $\mu_A \vee \mu_{A'}=\mu_{A\cup A'}=\mu_E$ i $\mu_A \wedge \mu_{A'}=\mu_{A\cap A'}=\mu_\varnothing$.

Concloem que $(\Psi(E), \leq)$ és un reticle distributiu i complementari.

2) **EXEMPLE 2:** Sigui E el conjunt format pels divisors de 36:

$$E=\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

Definim en E la següent relació:

$$\forall x,y \in E \quad x \leq y \quad \Leftrightarrow \exists n \in N-\{0\} \text{ tal que } y=n.x$$

En aquest cas, prenent $\sup\{x, y\}=\text{mcm}(x, y)$ i $\text{ínf}\{x, y\}=\text{mcd}(x, y)$ resulta que E és un reticle en el sentit del suprem i l'ínfim. Observem que el número 2 no té complementari, per la qual cosa E no és un reticle complementari.

Podem definir el mateix reticle en el sentit algebraic, on les operacions internes en E ens vénen donades, $\forall x,y \in E$, per

$$x*y=\text{mcm}(x, y) \qquad \text{i} \qquad x*'y=\text{mcd}(x, y)$$

La relació d'ordre induïda per l'operació $*$ és

$$x \le y \quad \Leftrightarrow \quad x * y = mcm(x,y) = y \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, n \in N - \{0\} \text{ tal que } y = n.x$$

o equivalentment amb la operació $*'$

$$x \le y \quad \Leftrightarrow \quad x *' y = mcd(x,y) = x \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, n \in N - \{0\} \text{ tal que } y = n.x.$$

A.5 RETICLE DEL CONJUNT DE PROPOSICIONS

A.5.1 RELACIONS DE DESIGUALTAT

En el conjunt Π de totes les proposicions lògiques definim dues relacions de la següent manera:

1) **PRIMERA RELACIÓ**: Relació $\le$ respecte a la $\vee$, on $\forall p,q \in \Pi$, es te

$$p \le q \quad \text{sii} \quad p \vee q \equiv q$$

És fàcil veure que la relació anterior és d'ordre. En efecte:

1. REFLEXIVA: $\forall p \in \Pi$, $p \vee p \equiv p \Rightarrow p \le p$.
2. ANTISIMÈTRICA: $\forall p,q \in \Pi$ tal que $p \le q$ i $q \le p \Rightarrow p \vee q \equiv q$ i $q \vee p \equiv p$ i per la propietat commutativa de la $\vee$ concloem que $p \equiv q$.
3. TRANSITIVA: $p,q \in \Pi$ tal que $p \le q$ i $q \le r \Rightarrow p \vee q \equiv q$ i $q \vee r \equiv r$. Per tant, $p \vee r \equiv p \vee q \vee q \vee r \equiv q \vee r \equiv r \Rightarrow p \le r$.

2) **SEGONA RELACIÓ**: Relació $\le$ respecte a la $\wedge$, on $\forall p,q \in \Pi$, es te

$$p \le q \quad \text{sii} \quad p \wedge q \equiv p$$

La relació anterior també és d'ordre i es demostra com en la primera relació.

TEOREMA A.5. «Els dos ordres respecte a $\vee$ i a $\wedge$, definits anteriorment, coincideixen.»

Demostració:

1. Suposem que les proposicions p i q estiguin relacionades per l'ordre respecte a $\vee$. LLavors.

$$p\vee q\equiv q \Leftrightarrow (\neg p)\wedge(\neg q)\equiv\neg q \Leftrightarrow (\neg q)\wedge(\neg p)\equiv\neg q \Leftrightarrow \neg q \text{ i } \neg p$$

estan relacionats per l'ordre respecte a $\wedge$ i així $(\neg q)\leq(\neg p)$ $\Leftrightarrow$ $p\leq q$.

2. De la mateixa manera, es demostra si p i q estan relacionades per l'ordre respecte a $\wedge$. ♦

A.5.2 PROPOSICIONS LÒGICAMENT EQUIVALENTS

Donades dues proposicions p i q del conjunt Π, diem que estan relacionades, $p\Upsilon q$, si i només si les dues proposicions són lògicament equivalents, és a dir $\forall p,q\in\Pi$ es té

$$p\Upsilon q \Leftrightarrow p\equiv q$$

La relació anterior és clarament una relació d'equivalència en el conjunt de les proposicions Π. Representem per [p] la *classe d'equivalència* de representant p

$$[p]=\{q\in\Pi \;/\; p\equiv q\}$$

Com a casos particulars simbolitzem per [0] la classe que consta de les proposicions lògicament equivalents a la proposició $p\wedge(\neg p)$ i per [1] la classe de totes les proposicions lògicament equivalents a $p\vee(\neg p)$.

Si $\Pi/\equiv$ és el conjunt quocient, definim en $\Pi/\equiv$ les següents operacions entre classes, $\forall[p],[q]\in\Pi/\equiv$

$$[p]\vee[q]=[p\wedge q] \quad \text{i} \quad [p]\wedge[q]=[p\vee q]$$

TEOREMA A.6. «El conjunt quocient $\Pi/\equiv$ amb la relació entre classes $\leq$ definida per

$$[p]\leq[q] \quad \Leftrightarrow \quad p\leq q \quad (p\wedge q\equiv p \text{ o } p\vee q\equiv q)$$

és un conjunt ordenat.»

Demostració:

1. REFLEXIVA: $\forall[p]\in\Pi/\equiv \quad p\equiv p \Rightarrow p\wedge p\equiv p \Rightarrow p\leq p \Rightarrow [p]\leq[p]$.

2. ANTISIMÈTRICA: $\forall[p],[q]\in\Pi/\equiv$, $[p]\leq[q]$ i $[q]\leq[p] \Rightarrow p\wedge q\equiv p$ i $q\wedge p\equiv q \Rightarrow p\equiv q \Rightarrow [p]=[q]$

3. TRANSITIVA: $\forall[p],[q],[r]\in\Pi/\equiv$, $[p]\leq[q]$ i $[q]\leq[r] \Rightarrow p\wedge q\equiv p$ i $q\wedge r\equiv q \Rightarrow p\wedge r\equiv p\wedge q\wedge q\wedge r\equiv p\wedge q\equiv p \Rightarrow [p]\leq[r]$. ♦

TEOREMA A.7. «El parell $(\Pi/\equiv, \leq)$, on $\leq$ és la relació definida anteriorment, és un reticle distributiu i complementari.»

Demostració:

1. RETICLE: Per a qualssevol classes $[p],[q]\in\Pi/\equiv$ definim

$$\sup\{[p],[q]\}= [p\vee q] \quad \text{i} \quad \text{ínf}\{[p],[q]\}= [p\wedge q]$$

Donades dues proposicions qualssevol p i q es verifica que $p\vee(p\vee q)\equiv p\vee q$ i $q\vee(p\vee q)\equiv p\vee q \Leftrightarrow [p]\leq[p\vee q]$ i $[q]\leq[p\vee q]$. Per tant, $[p\vee q]$ és cota superior del conjunt $\{[p], [q]\}$.

Sigui $[r]$ una cota superior del conjunt $\{[p], [q]\}$ i sigui $[r]\leq[p\vee q]$. Com que $[r]$ és una cota superior tenim $[p]\leq[r]$ i $[q]\leq[r] \Rightarrow p\leq r$ i $q\leq r \Rightarrow p\vee r\equiv r$ i $q\vee r\equiv r \Rightarrow p\vee q\vee r\equiv r \Rightarrow [p\vee q]\leq[r]$.

Concloem que $[p\vee q]=[r]$ i, per tant, $\sup\{[p],[q]\}=[p\vee q]$.

Demostrarem a continuació que $\text{ínf}\{[p],[q]\}= [p\wedge q]$. Donades dues proposicions qualssevol p i q es verifica que $p\wedge(p\wedge q)\equiv p\wedge q$ i $q\wedge(p\wedge q)\equiv p\wedge q \Leftrightarrow [p\wedge q]\leq[p]$ i $[p\wedge q]\leq[q]$. Per tant $[p\wedge q]$ és cota inferior del conjunt $\{[p],[q]\}$.

Si $[r]$ és una cota inferior del conjunt $\{[p],[q]\}$ i $[p\vee q]\leq[r]$ tenim $[r]\leq[p]$ i $[r]\leq[p] \Rightarrow r\leq p$ i $r\leq q \Rightarrow p\wedge r\equiv r$ i $q\wedge r\equiv r \Rightarrow p\wedge q\wedge r\equiv r\Rightarrow [r]\leq[p\wedge q]$.

Concluïm que $[p\wedge q]=[r]$ i, per tant, $\text{ínf}\{[p],[q]\}=[p\wedge q]$.

2. DISTRIBUTIVITAT: Distributiva de $\vee$ respecte a $\wedge$. Per a qualssevol $[p],[q],[r]\in \Pi/\equiv$ tenim

$$[p]\vee([q]\wedge[r])= [p]\vee[q\wedge r]= [p\vee(q\wedge r)] =[(p\vee q)\wedge(p\vee r)]$$

De manera similar es compleix la propietat distributiva de $\wedge$ respecte a $\vee$:

$$[p]\wedge([q]\vee[r])= [p]\wedge[q\vee r] =[p\wedge(q\vee r)]=[(p\wedge q)\vee(p\wedge r)].$$

3. COMPLEMENTARIETAT: Les dues classes $[0]=[p\wedge(\neg p)]$ i $[1]=[p\vee(\neg p)]$ són respectivament els elements nul i universal del reticle i, donada una classe qualsevol $[p]$ existeix la classe $\neg[p]=[\neg p]$, que verifica

$$\neg[p]\vee[p]=[(\neg p)\vee p]=[1] \quad \text{i} \quad \neg[p]\wedge[p]=[(\neg p)\wedge p]=[0]. \ \blacklozenge$$

A.6 CONJUNTS CONVEXOS

A.6.1 CONCEPTE DE CONJUNT CONVEX

1) SEGMENT: Siguin dos elements qualssevol x i y de R^n. Geomètricament el *segment* ens representa la porció de recta que uneix aquests dos punts el conjunt.

D'una manera més formal el segment S és el conjunt de punts de R^n tals que verifiquen:

$$S= \{ \alpha.x+(1-\alpha)y \ / \ 0\leq\alpha\leq1 \} \subseteq R^n$$

2) **CONJUNT CONVEX:** Un subconjunt $A \subseteq R^n$ és un conjunt convex si per qualsevol parella d'elements x i y del conjunt A, el segment S que uneix aquest dos punts està contingut en A. És a dir,

$$\forall x,y \in A \qquad S \subseteq A.$$

A.6.2 EXEMPLES DE CONJUNTS CONVEXOS

1) **EXEMPLE 1:** Sigui f una aplicació lineal de R^n en R i $\lambda \in R$. Llavors són conjunts convexos els conjunts:

$$H_\lambda = \{x \in R^n \ / \ f(x) \leq \lambda\} \quad i \quad H^*_\lambda = \{x \in R^n \ / \ f(x) \geq \lambda\}$$

En efecte, siguin $x_1, x_2 \in H_\lambda$ i considerem S el segment que uneix aquests dos punts i $z \in S$, $z = \alpha.x_1 + (1-\alpha).x_2$ i $0 \leq \alpha \leq 1$ $\alpha \in R$. Per tant,

$$f(z) = f(\alpha.x_1 + (1-\alpha).x_2) = \alpha.f(x_1) + (1-\alpha) f(x_2) \leq \alpha..\lambda + (1-\alpha).\lambda = \lambda$$

Aleshores, $z = \alpha.x_1 + (1-\alpha).x_2 \in H_\lambda$ i, per tant, $S \subseteq H_\lambda$.

De la mateixa manera, es demostraria en l'altre conjunt.

2) **EXEMPLE 2:** El conjunt $A = \{(x,y) \in R^2 \ / \ x^2 + y^2 \leq 1\}$ és convex. Observem que si fem $\bar{z} = (x, y)$, el conjunt A el podem escriure com

$$A = \{\bar{z} \in R^2 \ / \ \|\bar{z}\| \leq 1\}$$

on recordem que $\|\bar{z}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Per a dos elements qualssevol $\bar{z}_1, \bar{z}_2 \in A$ tenim $\|\bar{z}_1\| \leq 1$ i $\|\bar{z}_2\| \leq 1$, sigui S el segment que uneix els dos punts anteriors. Llavors un punt $\bar{z} \in S$ serà de la forma $\bar{z} = \alpha.\bar{z}_1 + (1-\alpha).\bar{z}_2$ on $0 \leq \alpha \leq 1$ i $\alpha \in R$, d'on

$$\|\bar{z}\| = \|\alpha.\bar{z}_1 + (1-\alpha).\bar{z}_2\| \leq \|\alpha.\bar{z}_1\| + \|(1-\alpha).\bar{z}_2\| =$$

$$= \alpha.\|\bar{z}_1\| + (1-\alpha).\|\bar{z}_2\| \leq \alpha.1 + (1-\alpha).1 = 1 \ .$$

A.6.3 PROPIETATS DELS CONJUNTS CONVEXOS

TEOREMA A.8. «Donats dos conjunts convexos A i B de R^n i $k\in R$, els següents conjunts A+B, k.A i $A\cap B$ són també convexos.»

Demostració:

1. Recordem que $A+B=\{ x+y/ x\in A \text{ i } x\in B\}$ i siguin $z_1\in A+B$ i $z_2\in A+B$ dos elements qualsevols de A+B. Considerem S el segment que uneix aquest dos punts i prenem un element quasevol $z\in S$ i $0\leq\alpha\leq 1$ on $\alpha\in R$. Aleshores es verifica

$$z=\alpha.z_1+(1-\alpha)z_2 = \alpha.(x_1+y_1)+(1-\alpha)(x_2+y_2) =$$

$$= \alpha.x_1+\alpha.y_1+(1-\alpha).x_2+(1-\alpha).y_2 =$$

$$= \alpha.x_1+(1-\alpha).x_2+\alpha.y_1+(1-\alpha).y_2\in A+B. \text{ Per tant, } S\subseteq A.$$

2. Recordem que $k.A=\{z=k.x/ x\in A \text{ i } k\in R\}$ i siguin $z_1\in k.A$ i $z_2\in k.A$ dos elements qualsevols de kA. Considerem el segment S que uneix aquests dos punts i $z \in S$. Aleshores,

$$z=\alpha.z_1+(1-\alpha)z_2= \alpha.k.x_1+(1-\alpha).kx_2= k.[\alpha.x_1+(1-\alpha).x_2]\in k.A.$$

Per tant, $S\subseteq kA$.

3. Recordem que $A\cap B=\{x\in R^n/ x\in A \text{ i } x\in B\}$. Prenem dos elements qualsevols d'aquest conjunt $x_1\in A\cap B$ i $x_2\in A\cap B$ i considerem el segment S que uneix aquest dos punts. Si $z\in S$, aleshores per ser A i B convexos

$$z=\alpha.x_1+(1-\alpha).x_2\in A \quad \text{i} \quad z=\alpha.x_1+(1-\alpha).x_2\in B$$

llavors, $z=\alpha.x_1+(1-\alpha).x_2\in A\cap B$ i per tant, $S\subseteq A\cap B$. ♦

TEOREMA A.9. «Els únics conjunts convexos de la recta real són intervals, és a dir $A\subseteq R$ i A convex $\Leftrightarrow$ A és un interval.»

Demostració:

1. És evident que si A és un interval, aleshores A és convex per la pròpia definició d'interval.

2. Recíprocament, suposem que A és convex i siguin a=ínf(A) (incloent el cas $a=-\infty$) i b=sup(A) (incloent el cas $b=+\infty$).

Si x és un element qualsevol d'R tal que $a<x<b$, aleshores $x \in A$. Si no fos així, per la definició d'ínfim i de suprem, existirien x_1 i x_2 pertanyents a A tals que $a<x_1<x<x_2<b$ i, per tant, el segment $S=\{\alpha.x_1+(1-\alpha)x_2 \ / \ 0\leq\alpha\leq 1\}$ no estaria contingut en A, i això contradiu el fet que A és convex. ♦

ANNEX B

EQUACIONS DIFERENCIALS I EN DIFERÈNCIES FINITES

L'origen de les equacions diferencials es pot considerar que comença amb els treballs de Newton (1642-1727) i de Leibniz (1646-1716). En efecte, l'11 de novembre de 1675 Leibniz va escriure la integral

$$\int y.dy=\frac{1}{2}.y^2$$

D'aquesta manera, sorgeix , no només la teoria de les equacions diferencials, sinó que també presenta la introducció del signe integral, una poderosa eina de càlcul que facilitarà l'estudi posterior del Càlcul Infinitesimal.

Els problemes que motivaren la resolució d'equacions diferencials foren l'estudi de la dinàmica puntual i alguns problemes geomètrics, conduint, a través dels mètodes del Càlcul Diferencial i Integral, als tipus més senzills d'equacions de primer i segon ordre.

Amb l'alemany Euler (1707-1783) la teoria de les equacions diferencials es transforma en una disciplina independent, amb les seves dues grans branques, que encara segueixen utilitzant-se, equacions diferencials ordinàries i en derivades parcials. El mètode que desenvoluparem a continuació en les equacions diferencials de segon ordre en coeficients constants fou publicat en un treball d'Euler l'any 1743.

A partir d'aquí hi hagué grans matemàtics com D'Alembert (1717-1783), Lagrange (1736-1813), Clairaut (1713-1765) i la família dels Bernouilli, que desenvoluparen alguns mètodes de resolució per alguns tipus particulars d'equacions diferencials. Així, per exemple, Lagrange va estudiar un procediment per reduir l'ordre d'una equació lineal homogènia d'ordre per mitjà del coneixement d'algunes solucions particulars.

El desenvolupament en el coneixement de les equacions diferencials ha anat evolucionant constantment fins a l'actualitat, en què matemàtics com Poincaré i Liapunov estudiaren l'estabilitat i els estats d'equilibri en els punts crítics. Les equacions diferencials surten de manera natural en la matemàtica de l'economia actual com ara el model de Philips, que tracta de la interacció de la inflació i l'atur, els models de creixement de Domar i de Solov, etc.

B.1 EQUACIONS DIFERENCIALS DE PRIMER ORDRE

B.1.1 CONCEPTES PREVIS

1) **DEFINICIÓ:** Una *equació diferencial de primer ordre* és una equació del tipus f(t, y, y')=0, on y és una funció desconeguda de la variable t i y' la derivada primera de la funció respecte de t.

Si és possible aïllar la y' en funció de t i de y direm que l'equació diferencial està expressada en *forma normal*, és a dir:

$$y'=F(t,y)$$

2) **SOLUCIONS PARTICULAR I GENERAL:** Una *solució particular* de f(t, y, y')=0 és una funció y=h(t) definida en un cert interval real I, tal que la verifica. Per tant, f(t, h(t), h'(t))=0.

Des del punt de vista econòmic a la solució particular se la sol anomenar *trajectòria temporal*, que és aquella trajectòria que ens dóna una relació entre una funció econòmica i el temps.

Anomenem *solució general* de l'equació diferencial f(t, y, y')=0 a un conjunt de funcions $F=\{y=h(t, C), C\in R\}$, definides en un interval $I\subseteq R$ tal que:

$$\forall t\in I, \forall C\in R \qquad f(t, h(t, C), h'(t, C))=0$$

3) **CONDICIÓ INICIAL:** Coneguda la solució general d'una equació diferencial de primer ordre, podem obtenir una solució particular, si imposem una condició per poder determinar la constant C. Aquesta condició s'anomena *condició inicial* i s'expressa com

$$y(t_0)=y_0$$

La solució general d'una equació diferencial de primer ordre representa geomètricament una família de corbes que depenen d'un paràmetre. Aleshores, en imposar la condició inicial, estem buscant aquella corba de la família que passa pel punt $P(t_0, y_0)$.

D'entre totes les equacions diferencials de primer ordre les dues úniques que utilitzarem en aquest treball són les anomenades de variables separades i les lineals.

4) **Eq. diferencial de 1r ordre de variables separades:** Direm que una equació diferencial de primer ordre f(t, y, y')=0 és de *variables separades* si es pot expressar de la forma:

$$y'=f_1(t).f_2(y)$$

on f_1 és una funció contínua en un cert interval $I \subseteq R$ i f_2 contínua en un cert interval $J \subseteq R$ i $\forall y \in J$ és $f_2(y) \neq 0$.

La solució general vé donada per

$$\frac{dy}{dt} = f_1(t)\ f_2(y) \quad \Leftrightarrow \quad dy= f_1(t)\ f_2(y)dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{dy}{f_2(y)} = f_1(t)dt \quad \Leftrightarrow$$

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(t)dt + C$$

Encara que la resolució teòrica d'aquests tipus d'equacions diferencials és molt simple, en la pràctica les dues integrals que s'han de resoldre poden ser complicades o, en el pitjor dels casos, no es poden expressar mitjançant funcions elementals. D'altra banda la funció y que busquem vindrà donada habitualment en forma implícita.

B.1.2 EQUACIÓ DIFERENCIAL DE PRIMER ORDRE LINEAL

1) **EQUACIÓ DIFERENCIAL LINEAL COMPLETA:** Si p(t) i r(t) són funcions contínues definides en un cert interval real I, anomenarem *equació diferencial lineal de primer ordre completa* a tota equació del següent tipus:

$$y'=p(t).y+r(t)$$

La utilització del terme "lineal" prové del fet que tant la funció (y) com la seva derivada (y'), tenen exponents lineals.

2) **EQUACIÓ HOMOGÈNIA ASSOCIADA:** Anomenarem *equació homogènia associada* a l'equació diferencial anterior a l'equació:

$$y'=p(t)\ y$$

TEOREMA B.1. «Si y_p és una solució particular de l'equació completa i y_h és la solució general de l'homogènia associada, llavors la solució general de la completa és $y=y_h+y_p$.»

Demostració: Desenvolupem-la en dues parts:

1. Provem primer que y és solució de $y'=p(t)\ y+r(t)$. Per veure que y és solució de $y'=p(t).y+r(t)$ només caldrà derivar i substituir la funció i la derivada $y'=y'_h+y'_p$.

Substituïnt, doncs, en l'equació, tenim

$$y'_h + y'_p= p(t).(y_h+y_p) +r(t) = p(t).y_h +p(t).y_p +r(t)=$$
$$= y'_h+p(t).y_p +r(t)= y'_h+y'_p$$

2. Provem ara que qualsevol solució u d'aquesta equació diferencial es pot expressar com $u=y_h+y_p$. Sigui u una solució de l'equació diferencial lineal completa; és a dir,

$$u'=p(t)\ u+r(t)$$

Ara bé, per hipòtesi $y_p'=p(t).y_p+r(t)$.

Restant les dues equacions anteriors obtenim:

$$u' - y_p' = p(t).(u -y_p)$$

Aleshores, $u-y_p$ és solució de l'equació diferencial homogènia associada.

Llavors $u-y_p=y_h$, la qual cosa implica que $u= y_h+y_p$. ♦

3) **CÀLCUL DE LA SOLUCIÓ:** Comencem en primer lloc per l'homogènia $y'=p(t).y$.

$$\frac{dy}{dt}=p(t).y \Leftrightarrow dy=p(t).y.dt \Leftrightarrow \frac{dy}{y}=p(t).dt \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int\frac{dy}{y}=\int p(t).dt \Leftrightarrow Ln(y)=\int p(t).dt \Leftrightarrow y=e^{\int p(t).dt+C_1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=e^{\int p(t).dt}.e^{C_1} \Leftrightarrow y=C.e^{\int p(t).dt}$$

Per tant, la solució general de l'homogènia és

$$y=C.e^{\int p(t).dt}$$

Efectuem ara el càlcul de la solució particular de la completa $y_p=u(t).y_1$, on $u(t)$ és una funció a determinar i y_1 una solució qualsevol de l'homogènia associada, diferent de zero, com per exemple

$$y_1=e^{\int p(t).dt} \qquad \text{prenent } C=1$$

Derivant $y_p=u(t).y_1$,

$$y'_p=u'(t).y_1+u(t).y'_1$$

Per tant, substituint en l'equació diferencial, $y'_p=p(t).y_p+r(t)$, i com que $y_p=u(t).y_1$, tenim

$$p(t).u(t).y_1+r(t)=u'(t).y_1+u(t).y'_1$$

I com que y_1 és solució de l'homogènia, $y'_1=p(t).y_1$, i així

$$p(t).u(t).y_1+r(t)=u'(t).y_1+u(t).p(t).y_1$$

Simplificant, $r(t)=u'(t).y_1$ i, per tant,

$$u'(t)=\frac{r(t)}{y_1} \Leftrightarrow u(t)=\int\frac{r(t)}{y_1}.dt \Leftrightarrow y_p=y_1.\int\frac{r(t)}{y_1}.dt$$

Substituint la y_1 pel seu valor ens queda

$$y_p = e^{\int p(t)dt} \int r(t)\, e^{-\int p(t)dt}\, dt$$

Sumant, finalment, les solucions de l'homogènia i la particular, y_h i y_p, obtindrem la solució general de l'equació diferencial de primer ordre $y=p(t).y+r(t)$,

$$y=y_h+y_p = C\, e^{\int p(t)dt} + e^{\int p(t)dt} \int r(t)\, e^{-\int p(t)dt}\, dt =$$

$$= e^{\int p(t)dt} \left(C + \int r(t)\, e^{-\int p(t)dt}\, dt \right)$$

4) **Cas particular:** Quan en l'equació diferencial $y'=p(t).y+r(t)$ els termes $p(t)$ i $r(t)$ són constants i la condició inicial està avaluada en zero, l'expressió anterior ens queda

$$y= e^{\int p\, dt} \left(C + \int r\, e^{-\int p dt}\, dt \right) = e^{pt} \left(C - \frac{r}{p}\, e^{-pt} \right) = C\, e^{pt} - \frac{r}{p}$$

Imposant la condició inicial amb $t=0$, $y(0)=y_0$

$$y_0=C-\frac{r}{p} \quad \Leftrightarrow \quad C= y_0 + \frac{r}{p}$$

Substituint, la solució serà

$$y= \left(y_0 + \frac{r}{p} \right) e^{pt} - \frac{r}{p}$$

que és una família de corbes exponencials.

B.2 EQ. DIFERENCIALS LINEALS DE SEGON ORDRE

B.2.1 EQUACIONS DIFERENCIALS DE SEGON ORDRE

1) **DEFINICIÓ:** Una *equació diferencial de segon ordre* és una equació del tipus f(t, y, y', y'')=0, on y, y', y'' són les derivades primera i segona d'y respecte de t.

Si és possible aïllar la y'' en funció de t, y, y' direm que està expressada en *forma normal*:

$$y''=F(t, y, y')=0$$

2) **SOLUCIONS PARTICULAR I GENERAL:** Una *solució particular* de f(t, y, y', y'')=0 és una funció y=h(t) definida en un cert interval real I, tal que la verifica. Per tant,

$$f(t, h(t), h'(t), h''(t))=0.$$

D'altra banda, anomenem *solució general* de l'equació diferencial f(t, y, y', y'')=0 a un conjunt de funcions $F=\{y=h(t,C_1,C_2),\ C_1,C_2\in R\}$, definides en un interval $I\subseteq R$ tals que la verifiquen.

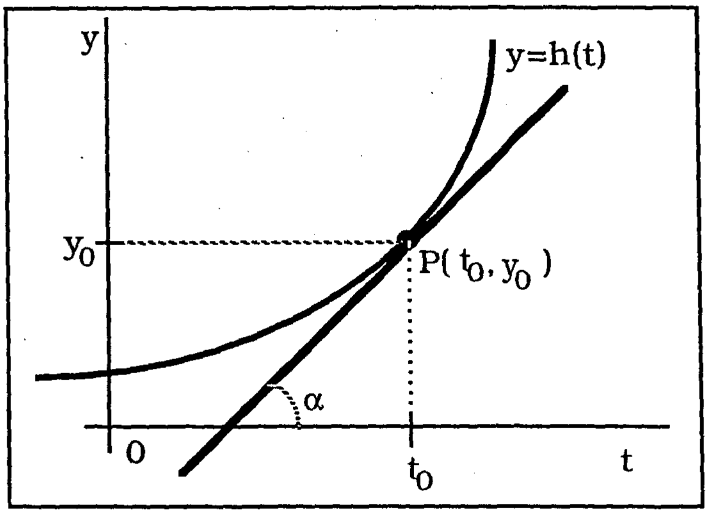
3) **CONDICIONS INICIALS I DE CONTORN:** A partir de la solució general d'una equació diferencial de segon ordre podem obtenir una solució particular, si imposem a aquella dues condicions per poder trobar les constants.

Aquestes condicions solen ser de dos tipus:

- Condicions inicials: $y(t_0)=y_0$ $y'(t_0)=y'_0$
- Condicions de contorn: $y(t_0)=y_0$ $y(t_1)=y_1$

La solució general és una família biparamètrica de corbes depenent de dos paràmetres. En fixar la condició $y(t_0)=y_0$ estem imposant que la família passa pel punt $P(t_0, y_0)$, mentre que amb la condició $y'(t_0)=y'_0$ exigim que el pendent de la recta tangent en el punt $P(t_0, y_0)$ sigui y'_0.

Expressant les condicions inicials, $y(t_0)=y_0$ i $y'(t_0)=y'_0$, obtenim la gràfica següent:



Notem que y'_0 és el pendent de la recta tangent en el punt $P(t_0,y_0)$; és a dir, tenim que $y'_0=tg(\alpha)$.

B.2.2 EQUACIONS DIFERENCIALS LINEALS DE SEGON ORDRE

1) **DEFINICIONS**: D'entre totes les equacions diferencials de segon ordre, les més importants per les seves nombroses aplicacions a la ciència i especialment a l'economia, són les anomenades lineals. Entre elles hi distingim:

a) L'EQUACIÓ DIFERENCIAL LINEAL DE SEGON ORDRE COMPLETA. Si p(t),q(t) i r(t) són funcions contínues definides en un cert interval real, anomenem *equació diferencial lineal de segon ordre completa* a tota equació del següent tipus:

$$\boxed{y'' + p(t).y' + q(t).y = r(t)} \qquad [B.1]$$

b) L'EQUACIÓ HOMOGÈNIA ASSOCIADA. Anomenem equació homogènia associada a l'equació diferencial anterior a la que té per equació:

$$\boxed{y'' + p(t).y' + q(t).y = 0} \qquad [B.2]$$

TEOREMA B.2. «Si y_1 i y_2 són dues solucions de l'equació homogènia associada, la combinació lineal $y_3=c_1.y_1+c_2.y_2$, on c_1 i c_2 són nombres reals, també serà solució.»

Demostració:

1. En efecte, substituint $y_3=c_1.y_1+c_2.y_2$ en l'homogènia tindrem:

$$y_3''+p(t).y_3'+q(t).y_3= (c_1.y_1+c_2.y_2)'' +p(t).(c_1.y_1+c_2.y_2)' +$$

$$+q(t).(c_1.y_1+c_2.y_2)' = (c_1.y_1''+c_2.y_2'')+$$

$$+ (p(t).c_1.y_1'+p(t).c_2.y_2') + (q(t).c_1.y_1+q(t).c_2.y_2) =$$

$$=c_1.\left(y_1''+p(t).y_1'+q(t).y_1\right)+c_2.\left(y_2''+p(t).y_2'+q(t).y_2\right) = c_1.0+c_2.0 = 0.$$

perquè y_1, y_2 són per hipòtesis solucions de l'equació homogènia. ♦

El teorema anterior ens assegura que si coneixem dues solucions particulars de l'homogènia podem obtenir un nombre infinit d'elles. Malauradament, el recíproc no es verifica excepte quan s'imposin condicions a les solucions.

EXEMPLE: Tres solucions de l'equació $y''+2y'=0$ són evidentment $y_1=e^{-2t}$, $y_2=2e^{-2t}$ e $y_3=5$. Veurem que no existeixen dos nombres reals c_1, c_2 tals que $y_3=c_1.y_1+c_2.y_2$.

En efecte, suposem que existeixin, llavors $5=c_1.e^{-2x}+c_2.2e^{-2x}$, o sigui $5=(c1+2c2).e^{-2x}$ amb el qual e^{-2x} hauria de ser una constant, la qual cosa és falsa.

2) **SOLUCIONS LINEALMENT INDEPENDENTS**: Si y_1 i y_2 són dues solucions de l'equació diferencial lineal homogènia, direm que són *solucions linealment independents* en un interval I d'R si i només si es verifica:

$$W(y_1,y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} \neq 0$$

Simbolitzarem aquest determinant per $W(y_1,y_2)$ i l'anomenarem determinant *Wronskià*, nom donat en honor del matemàtic polac H. Wronski.

TEOREMA B.3. «Si y_1 i y_2 són dues solucions linealment independents de l'equació diferencial homogènia, llavors existeixen dues constants c_1 i c_2 tals que qualsevol solució y_3 es pot expressar de la forma $y_3=c_1.y_1+c_2.y_2$.»

Demostració:

1. Demostrem primer que donades dues solucions qualssevol y_i i y_j de l'homogènia, on $i\neq j$, es verifica la següent identitat d' Abel:

$$W(y_i,y_j)=K_{ij}.e^{-\int p(t).dt}$$

En efecte, com que y_i i y_j són solucions de l'homogènia, podem escriure:

$$y_i'' + p(t).y_i' + q(t).y_i = 0 \quad \text{i} \quad y_j'' + p(t).y_j' + q(t).y_j = 0$$

Multiplicant la primera per y_j i la segona per y_i, obtenim

$$y_j.y_i'' + y_j.p(t).y_i' + y_j.q(t).y_i = 0$$

$$y_i.y_j'' + y_i.p(t).y_j' + y_i.q(t).y_j = 0$$

Restant a la segona la primera, s'anul.larà el terme sense derivades

$$\left(y_i.y_j'' - y_j.y_i''\right) + p(t).\left(y_i.y_j' - y_j.y_i'\right) = 0$$

Veiem en aquesta equació que els dos termes del parèntesis corresponen al wronskià:

$$W(y_i,y_j)=\begin{vmatrix} y_i & y_j \\ y_i' & y_j' \end{vmatrix} = y_i.y_j'-y_j.y_i'$$

En canvi, els dos primers corresponen a la seva derivada:

$$W'(y_i,y_j)=\left(y_i.y_j'-y_j.y_i'\right)'=\left(y_i'.y_j'+y_i.y_j''\right)-\left(y_j'.y_i'+y_j.y_i''\right)$$

Simplificant, $W'(y_i, y_j) = y_i.y_j'' - y_j.y_i''$

L'equació anterior ens quedarà

$$W'(y_i,y_j) + p(t).W(y_i,y_j) = 0$$

és a dir, $W'(y_i,y_j) = -p(t).W(y_i,y_j)$

Passant al primer membre i integrant,

$$\int \frac{W'(y_i,y_j)}{W(y_i,y_j)}.dt = \int -p(t).dt$$

Si anomenem C_{ij} a la constant d'integració, ens queda

$$\text{Ln } W(y_i,y_j) = -\int p(t).dt + C_{ij} \quad \Rightarrow \quad W(y_i,y_j) = e^{-\int p(t).dt + C_{ij}}$$

Finalment, anomenant $K_{ij}=e^{C_{ij}}$, ens quedarà l'expressió que volíem provar:

$$W(y_i,y_j) = K_{ij}.e^{-\int p(t).dt}$$

2. Continuant amb la demostració del teorema, apliquem aquest resultat als dos parells de solucions (y_3,y_1), (y_3,y_2):

$$W(y_3,y_1) = K_{31}.e^{-\int p(t).dt} \qquad W(y_3,y_2) = K_{32}.e^{-\int p(t).dt}$$

Desenvolupant els dos wronskians:

$$y_3.y_1' - y_1.y_3' = K_{31}.e^{-\int p(t).dt} \qquad y_3.y_2' - y_2.y_3' = K_{32}.e^{-\int p(t).dt}$$

Aïllarem únicament la incògnita y_3 d'aquest sistema per la regla de Cramer. El determinant D_1 de la incògnita y_3 és:

$$D_1 = \begin{vmatrix} K_{31}.e^{-\int p(t).dt} & -y_1 \\ K_{32}.e^{-\int p(t).dt} & -y_2 \end{vmatrix} = (K_{32}.y_1 - K_{31}.y_2).e^{-\int p(t).dt}$$

Mentre que el determinant dels coeficients és:

$$D_c = \begin{vmatrix} y_1' & -y_1 \\ y_2' & -y_2 \end{vmatrix} = y_2'.y_1 - y_1'.y_2 = W(y_1,y_2)$$

La incògnita y_3 serà el quocient d'aquests dos determinants. A més, substituïnt el wronskià per la identitat d'Abel:

$$y_3=\frac{(K_{32}.y_1 - K_{31}.y_2).e^{-\int p(t).dt}}{K_{12}.e^{-\int p(t).dt}}=\frac{K_{32}.y_1 - K_{31}.y_2}{K_{12}}$$

Finalment, anomenant $C_1=K_{32}/K_{12}$ i $C_2=-K_{31}/K_{12}$, ens queda provat el teorema, $y_3=C_1.y_1+C_2.y_2$. ♦

A partir d'ara el nostre objectiu serà intentar trobar dues solucions particulars de l'equació homogènia de tal manera que el seu wronskià sigui diferent de zero (és a dir, que les solucions siguin linealment independents). A un parell de solucions d'aquest tipus les anomenarem un *sistema fonamental de solucions.*

Malauradament, no existeix un mètode general per trobar un sistema fonamental. No obstant, si es coneix una solució particular y_1, diferent de zero, sí que és possible trobar-lo.

TEOREMA B.4. «Si $y_1\neq 0$ és una solució particular de l'equació diferencial homogènia, llavors també serà solució

$$y_2= y_1.\int \frac{e^{-\int p(t).dt}}{y_1^2}.dt$$

i a més, el wronskià $W(y_1,y_2)\neq 0$.»

Demostració:

1. Fem $y_2=g(t).y_1$. Trobem $g(t)$ amb la condició que y_2 sigui solució de l' equació diferencial homogènia.

Calculant les derivades primera i segona d'y_2,

$$y_2'=g'(t).y_1+g(t).y_1'$$

$$y_2''= g''(t).y_1 +2.g'(t).y_1' +g(t).y_1''$$

Susbstituint a l'equació homogènia tenim

$$\left(g''(t).y_1 + 2.g'(t).y_1' + g(t).y_1''\right) + p(t).\left(g'(t).y_1 + g(t).y_1'\right) +$$
$$+ q(t).g(t).y_1 = 0$$

Operant i traient factor comú g(t) ens queda

$$g(t).\left(y_1'' + p(t).y_1' + q(t).y_1\right) +$$
$$+\left(g''(t).y_1 + 2.g'(t).y_1' + p(t).g'(t).y_1\right) = 0$$

Atès que $y_1''+p(t).y_1'+q(t).y_1=0$ degut a què y_1 és solució de l'homogènia, tindrem

$$g''(t).y_1 + 2.g'(t).y_1' + p(t).g'(t).y_1 = 0$$

Traient factor comú g'(t) als dos últims termes i passant al segon membre

$$g''(t).y_1 = -g'(t).\left(2.y_1' + p(t).y_1\right)$$

Transposant termes

$$\frac{g''(t)}{g'(t)} = -\frac{2.y_1' + p(t).y_1}{y_1}$$

Integrant els dos membres

$$\int \frac{g''(t)}{g'(t)}.dt = -\int \frac{2.y_1' + p(t).y_1}{y_1}.dt$$

ens queda

$$\mathrm{Ln}\,|g'(t)| = -2.\mathrm{Ln}\,|y_1| - \int p(t).dt = \mathrm{Ln}\,|y_1|^{-2} - \int p(t).dt$$

Aïllant | g'(t)|

$$|g'(t)| = |y_1|^{-2} \,.\, e^{-\int p(t).dt}$$

Observem que el segon membre de la igualtat sempre és positiu, llavors

$$g'(t) = (y_1)^{-2} \,.\, e^{-\int p(t).dt}$$

Tornant a integrar

$$g(t) = \int \left((y_1)^{-2} \cdot e^{-\int p(t).dt} \right).dt$$

Però,com $y_2=g(t).y_1$, obtindrem el resultat proposat:

$$y_2= y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p(t).dt}}{y_1^2}.dt$$

2. Demostrem ara la segona part del teorema, en la que el wronskià és diferent de zero, $W(y_1,y_2)\neq 0$. En efecte, com que $W(y_1, y_2)= y_1.y_2' - y_2.y_1'$, substituint

$$W(y_1, y_2)= y_1 \cdot \left(y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p(t).dt}}{(y_1)^2}.dt \right)' - y_1' \left(y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p(t).dt}}{(y_1)^2}.dt \right)$$

Derivant,

$$W(y_1, y_2)= y_1 \cdot \left(y_1' \cdot \int \frac{e^{-\int p(t).dt}}{(y_1)^2}.dt + y_1 \cdot \frac{e^{-\int p(t).dt}}{(y_1)^2} \right) -$$

$$- y_1' \cdot y_1 \cdot \int \frac{e^{-\int p(t).dt}}{(y_1)^2}.dt$$

Traient parèntesis i simplificant ens quedarà

$$W(y_1,y_2)= e^{-\int p(t).dt}$$

Com que l'exponencial és una funció sempre positiva, tindrem que $W(y_1,y_2)\neq 0$. ♦

B.2.3 EQUACIONS DIFERENCIALS LINEALS HOMOGÈNIES AMB COEFICIENTS CONSTANTS

1) **DEFINICIÓ:** Existeix un tipus d'equació diferencial de segon ordre homogènia en què és possible trobar de forma senzilla dues solucions particulars linealment independents i, segons el teorema anterior, la solució general. Aquestes són les que estudiarem en aquest apartat.

Anomenem *equació diferencial lineal homogènia amb coeficients constants* a tota equació diferencial del tipus, on $p,q \in R$:

$$\boxed{y'' + p.y' + q.y = 0} \qquad [B.3]$$

2) **EQUACIÓ CARACTERÍSTICA:** Anomenem equació característica, associada a l'equació diferencial [B.3], a l'equació de segon grau:

$$\lambda^2 + p.\lambda + q = 0$$

TEOREMA B.5. «Si λ_1 i λ_2 són les dues solucions de l'equació característica, llavors ens podem trobar en algun dels tres casos següents:

1. Si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ on $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, aleshores $y_1 = e^{\lambda 1t}$ i $y_2 = e^{\lambda 2t}$ són dues solucions linealment independents de [B.3].
2. Si $\lambda_1 = \lambda_2$ on $\lambda_1, \lambda_2 \in R$, aleshores $y_1 = e^{\lambda 1t}$ i $y_2 = t.e^{\lambda 2t}$ són dues solucions linealment independents de [B.3].
3. Si $\lambda_1 = a+b.i$, $\lambda_2 = a-b.i$ on $b \neq 0$, aleshores $y_1 = e^{at}.\cos(b.t)$ i $y_2 = e^{at}.\sin(b.t)$ són dues solucions linealment independents de [B.3] .»

Demostració:

1. En aquest apartat és immediat comprovar que y_1 i y_2 són solucions de [B.3]. Comprovem que el wronskià és diferent de zero. En efecte,

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 . t} & e^{\lambda_2 . t} \\ \lambda_1 . e^{\lambda_1 . t} & \lambda_2 . e^{\lambda_2 . t} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{\lambda_1 . t}.e^{\lambda_2 . t}.\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{vmatrix} = e^{\lambda_1 . t}.e^{\lambda_2 . t}.(\lambda_2 - \lambda_1) \neq 0$$

atès que $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

2. En aquest apartat és immediat comprovar que y_1 és solució. Comprovem que $y_2 = t.e^{\lambda_1 t}$ també ho és.

Derivant respecte a t,

$$y_2' = e^{\lambda_1 . t} + t.\lambda_1.e^{\lambda_1 . t} = e^{\lambda_1 . t}.(1 + t.\lambda_1)$$

$$y_2'' = \lambda_1.e^{\lambda_1 . t}.(1 + t.\lambda_1) + \lambda_1.e^{\lambda_1 . t} = 2.\lambda_1.e^{\lambda_1 . t} + t.\lambda_1^2.e^{\lambda_1 . t}$$

Substituint,

$$y_2'' + p.y_2' + q.y_2 = 2.\lambda_1.e^{\lambda_1 . t} + t.\lambda_1^2.e^{\lambda_1 . t} +$$

$$+ p.\left(e^{\lambda_1 . t} + t.\lambda_1.e^{\lambda_1 . t}\right) + q.e^{\lambda_1 . t} =$$

$$= e^{\lambda_1 . t}.\left(2.\lambda_1 + t.\lambda_1^2 + p + p.t.\lambda_1 + q.t\right) =$$

$$= e^{\lambda_1 . t}.\left[2.\lambda_1 + p + t.\left(\lambda_1^2 + p.\lambda_1 + q\right)\right] = e^{\lambda_1 . t}.(0 + t.0) = 0$$

El resultat anterior és nul atès que λ_1 és solució doble de l'equació característica, ja que en aquest cas podem posar $\lambda^2 + p.\lambda + q = (\lambda - \lambda_1)^2$. Derivant $2.\lambda + p = 2.(\lambda - \lambda_1)$. Substituint λ per λ_1 s'anul.lan aquest dos termes.

Acabem veient que les solucions són linealment independents:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{\lambda_1 . t} & t.e^{\lambda_1 . t} \\ \lambda_1.e^{\lambda_1 . t} & e^{\lambda_1 . t} + t.\lambda_1.e^{\lambda_1 . t} \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2.\lambda_1 . t}.\begin{vmatrix} 1 & t \\ \lambda_1 & 1 + t.\lambda_1 \end{vmatrix} = e^{2.\lambda_1 . t}.1 \neq 0$$

3. En aquest apartat comprovem primerament que $y_1 = e^{at}.\cos(bt)$ és solució de l'equació diferencial [B.3]:

$$y'_1 = e^{at}.a.\cos(bt) + e^{at}.[-b.\mathrm{sen}(bt)] =$$

$$= e^{at}.[a.\cos(bt) - b.\mathrm{sen}(bt)].$$

$$y''_1 = a.e^{at}.[a.\cos(bt)-b.\sin(bt)] + e^{at}.[-a.b.\sin(bt)-b^2.\cos(bt)] =$$

$$= e^{at}.[a^2.\cos(bt) - a.b.\sin(bt) - a.b.\sin(bt) - b^2.\cos(bt)] =$$

$$= e^{at}.[a^2.\cos(bt) - 2.a.b.\sin(bt) - b^2.\cos(bt)].$$

Substituint en l'equació diferencial ens queda:

$$y''_1+p.y'_1+q.y_1 = e^{at}.[a^2.\cos(bt)-2.a.b.\sin(bt)-b^2.\cos(bt)] +$$

$$+ p.e^{at}.[a.\cos(bt)- b.\sin(bt)] +q.e^{at}.\cos(bt) =$$

$$= e^{at}.[a^2.\cos(bt)-2.a.b.\sin(bt)-b^2.\cos(bt) +$$

$$+ p.a.\cos(bt) - p.b.\sin(bt) + q.\cos(bt)] =$$

$$= e^{at}.[(a^2-b^2+pa \ +q).\cos(bt)-b.(2.a+p).\sin(bt)]$$

Ara bé, donada l'equació de segon grau $\lambda^2+p.\lambda+q=0$, sabem que la suma de les arrels λ_1 i λ_2 és $\lambda_1+\lambda_2=-p$, mentre que el seu producte és $\lambda_1.\lambda_2=q$. En el nostre cas tindrem

$$(a+b.i)+(a-b.i)=-p \Rightarrow 2a=-p \Rightarrow p=-2a$$

$$(a+b.i).(a-b.i)=a^2-(b.i)^2=a^2+b^2=q \Rightarrow q=a^2+b^2.$$

Substituint en l'expressió trigonomètrica anterior,

$$y''_1+p.y'_1+q.y_1 = e^{at}.[(a^2-b^2-2.a^2 +a^2+b^2).\cos(bt)-$$

$$-b.(2.a-2.a).\sin(bt)]=0.$$

Anàlogament es comprova per la solució $y_2=e^{at}.\sin(bt)$.

Veiem per últim que el wronskià és diferent de zero:

$$W(y_1,y_2)=\begin{vmatrix} e^{at}.\cos(bt) & e^{at}.\sin(bt) \\ e^{at}.(a.\cos(bt)-b.\sin(bt)) & e^{at}.(a.\sin(bt)+b.\cos(bt)) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{at}.e^{at}.\begin{vmatrix} \cos(bt) & \sin(bt) \\ a.\cos(bt)-b.\sin(bt) & a.\sin(bt)+b.\cos(bt) \end{vmatrix} =$$

$$= e^{2at}.[a.\cos(bt).\sin(bt) + b.\cos^2(bt) - a.\cos(bt).\sin(bt) +$$

$$+ b.\sin^2(bt)] = b.e^{2at}.[\cos^2(bt) + \sin^2(bt)] = b.e^{2at} \neq 0$$

atès que $b\neq 0$. ♦

Del teorema anterior i del teorema B.3 es desprèn com a COROL·LARI que les solucions generals de l'equació (3) seran respectivament,

1. $y= C_1.e^{\lambda_1.t} + C_2.e^{\lambda_2.t}$ 2. $y= (C_1+C_2.t).e^{\lambda_1.t}$

3. $y= e^{a.t}[C_1.\cos(bt) + C_2.\sin(bt)]$

B.2.4 SOLUCIÓ DE L' EQUACIÓ LINEAL COMPLETA

Anem ara a solucionar l'equació lineal completa que ve donada per l'expressió:

$$y'' + p(t).y' + q(t).y = r(t)$$

Començarem amb un teorema fonamental.

TEOREMA B.6. «Si $Y(t)$ és una solució particular de l'equació completa i $Z(t)$ és la solució general de l'homogènia associada, llavors resulta que la solució general de la completa serà igual a la seva suma, $y(t) = Z(t) + Y(t)$.»

Demostració: Desenvolupem la demostració en dues parts: 1. $y(t)$ és solució de $y''+p(t).y'+q(t).y=r(t)$, i 2. Qualsevol solució $u(t)$ d'aquesta equació diferencial es pot expressar com $u(t)=Z(t)+Y(t)$.

1. Provem que $y(t)$ és solució de $y''+p(t).y'+q(t)y=r(t)$.

En efecte, calculant les derivades,

$$y'(t) = Z'(t) + Y'(t) \qquad y''(t) = Z''(t) + Y''(t)$$

Substituint en l' equació,

$$Z''(t) + Y''(t) + p(t).[Z'(t) + Y'(t)] + q(t).[Z(t) + Y(t)] =$$

$$= [Z''(t) +p(t).Z'(t) +q(t).Z(t)] + [Y''(t) +p(t).Y'(t) +q(t).Y(t)] =$$

$$= 0 + r(t) = r(t).$$

2. Provem ara que qualsevol solució u(t) de l'equació diferencial $y''+p(t).y'+q(t).y=r(t)$ es pot expressar com la suma $u(t)=Z(t)+Y(t)$.

Suposem, doncs, que u(t) sigui una solució de l'equació diferencial lineal completa; és a dir,

$$u''(t) + p(t).u'(t) + q(t).u(t) = r(t)$$

Sabem per hipòtesis que

$$Y''(t) + p(t).Y'(t) + q(t).Y(t) = r(t).$$

Restant les dues equacions anteriors obtenim:

$$u''(t) - Y''(t) + p(t).[u'(t) - Y'(t)] + q(t).[u(t) - Y(t)] = 0$$

Deduïm, per tant, que $u(t)-Y(t)$ és una solució de l'equació diferencial homogènia associada. Llavors $u(t)-Y(t)=Z(t)$, la qual cosa implica que $u(t)=Y(t)+Z(t)$. ♦

B.2.5 CÀLCUL D'UNA SOLUCIÓ PARTICULAR DE L'EQUACIÓ DIFERENCIAL COMPLETA

A) MÈTODE DE VARIACIÓ DELS PARÀMETRES. Siguin y_1 i y_2 dues solucions linealment independents de l'homogènia associada.

Anem a provar ara que $Y=U.y_1+V.y_2$ serà una solució particular de la completa, sempre que U y V siguin dues funcions, dependents de la variable t, que verifiquin les dues condicions següents:

a) $U'.y_1 + V'.y_2 =0$ b) $U'.y'_1 + V'.y'_2 =r(t)$

En efecte, calculant les dues primeres derivades de la funció donada $Y=U.y_1+V.y_2$ i imposant les condicions, tindrem

$$Y' = (U'.y_1 + U.y'_1) + (V'.y_2 + V.y'_2)= (U'.y_1 + V'.y_2) + (U.y'_1+V.y'_2) =$$

$$= 0 + (U.y'_1 + V.y'_2) = U.y'_1 + V.y'_2.$$

$$Y'' = (U'.y'_1 + U.y''_1) + (V'.y'_2 + V.y''_2) = (U'.y'_1 + V'.y'_2) + (U.y''_1 + V.y''_2) =$$
$$= r(t) + U.y''_1 + V.y''_2.$$

Substituint en l'equació diferencial, obtenim

$$Y'' + p(t).Y' + q(t).Y = r(t) + U.y''_1 + V.y''_2 + p(t).(U.y'_1 + V.y'_2) +$$
$$+ q(t).(U.y_1+V.y_2).$$

Operant i traient factor comú U i V resulta

$$Y'' + p(t).Y' + q(t).Y = U.[y''_1 + p(t).y'_1 + q(t).y_1] + V.[y''_2 + p(t).y'_2 +$$
$$+ q(t).y_2] + r(t) = U.0 + V.0 + r(t) = r(t).$$

Observem que el sistema de l'enunciat que ens serveix per obtenir U i V és compatible determinat, ja que el determinant de la matriu del sistema coincideix amb el wronskià i aquest és diferent de zero perquè, per hipòtesis, les solucions y_1 e y_2 són linealment independents.

CÀLCUL DE LES FUNCIONS U i V:

Partim del sistema $\begin{cases} y_1.U' + y_2.V' = 0 \\ y'_1.U' + y'_2.V' = r(t) \end{cases}$

Trobem primer U' i V' utilitzant la regla de Cramer:

$$U' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ r(t) & y'_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} = \frac{-y_2.r(t)}{W(y_1,y_2)} \qquad V' = \frac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & r(t) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix}} = \frac{y_1.r(t)}{W(y_1,y_2)}$$

Integrant obtindrem U i V:

$$U = \int \frac{-y_2.r(t)}{W(y_1,y_2)}.dt \qquad V = \int \frac{y_1.r(t)}{W(y_1,y_2)}.dt$$

B) MÈTODE DELS COEFICIENTS INDETERMINATS. Per aplicar aquest mètode és necessari que el primer membre de l'equació diferencial sigui de coeficients constants. Pel que fa al segon membre ens limitarem a alguna de les tres formes següents:

a) $r(t) = a_0 + a_1.t + a_2.t^2 + \ldots + a_n.t^n$ amb $a_n \neq 0$ i $a_i \in R$.

b) $r(t) = a_0.e^{\alpha t}$

c) $r(t) = a_0.\cos(\beta t) + b_0.\sin(\beta t)$

a) PRIMER CAS: Suposem que $r(t) = a_0 + a_1.t + a_2.t^2 + \ldots + a_n.t^n$. Provarem que $Y = A_0 + A_1.t + A_2.t^2 + \ldots + A_n.t^n$, on $A_0, A_1, \ldots, A_n$ són coeficients indeterminats, és una solució particular de l'equació diferencial completa.

Trobarem els coeficients indeterminats A_0, A_1, ... i A_n per mitjà de les dues primeres derivades:

$$Y' = A_1 + 2.A_2.t + 3.A_3.t^2 + \ldots + n.A_n.t^{n-1}$$

$$Y'' = 2.A_2 + 6.A_3.t + \ldots + n(n-1).A_n.t^{n-2}$$

Imposant que sigui solució,

$$2.A_2 + 6.A_3.t + \ldots + n(n-1).A_n.t^{n-2} + p.(A_1 + 2.A_2.t + 3.A_3.t^2 + \ldots$$

$$\ldots + n.A_n.t^{n-1}) + q.(A_0 + A_1.t + A_2.t^2 + \ldots + A_n.t^n) =$$

$$= a_0 + a_1.t + a_2.t^2 + \ldots + a_n.t^n.$$

Operant i identificant coeficients:

$$\left|\begin{array}{l} 2A_2 + A_1.p + A_0.q = a_0 , \\ 6A_3 + 2.A_2.p + A_1.q = a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n.A_n.p + A_{n-1}.q = a_{n-1} \\ A_n.q = a_n \end{array}\right.$$

Distingim els següents subcasos:

a_1) Si $q \neq 0$ el sistema anterior és compatible determinat. Trobarem A_n a l' última equació. Substituint A_n a la penúltima, deduirem A_{n-1}, i així successivament.

a_2) Si $q=0$ el sistema és incompatible i en aquest cas es prova com a possible solució:

$$Y = t.(A_0 + A_1.t+. A_2.t^2 + \ldots +A_n.t^n)$$

Derivant dues vegades

$$Y' = A_0 + 2.A_1.t + 3.A_2.t^2 + \ldots + (n+1).A_n.t^n$$

$$Y'' = 2.A_1 + 6.A_2.t + \ldots + n(n + 1).A_n.t^{n-1}$$

Substituint en l'equació diferencial,

$$2.A_1 + 6.A_2.t + \ldots + n(n + 1).A_n.t^{n-1} + p.[A_0 + 2.A_1.t + 3.A_2.t^2 + \ldots$$
$$+ \ldots + (n+1).A_n.t^n] = a_0 + a_1.t + a_2.t^2 + \ldots + a_n.t^n.$$

Operant i identificant coeficients ens queda

$$\left|\begin{array}{l} 2.A_1 + A_0.p = a_0 \\ 6.A_2 + 2.A_1.p = a_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ n(n + 1).A_n + n.A_{n-1}.p = a_{n-1} \\ (n+1).A_n.p = a_n \end{array}\right.$$

Distingim les dues possibilitats següents:

a_{21}) Si $p \neq 0$ el sistema és compatible determinat i trobarem A_n a l'última equació. Substituint-la en la penúltima equació podrem deduir A_{n-1}, i així successivament

a_{22}) Si $p=0$ l'equació diferencial queda $y''=a_0 + a_1.t + \ldots +a_n.t^n$ en la que una solució particular és

$$Y= a_0.\frac{t^2}{2} + a_1.\frac{t^3}{6} + \ldots + a_{n-1}.\frac{t^{n+1}}{n.(n+1)} + a_n.\frac{t^{n+2}}{(n+1).(n+2)}$$

b) SEGON CAS. Suposem ara que el segon membre de l'equació diferencial és del tipus $r(t)=a_0.e^{\alpha t}$. Provarem que una possible solució particular és de la forma $Y=A.e^{\alpha t}$.

Derivant dues vegades, $Y'=A.\alpha.e^{\alpha t}$, $Y''=A.\alpha^2.e^{\alpha t}$.

Substituint Y, Y' i Y" en l' equació diferencial:

$$A.\alpha^2.e^{\alpha t} + p.A.\alpha.e^{\alpha t} + q.A.e^{\alpha t} = a_0.e^{\alpha t}.$$

Simplificant per e^{at} tindrem, $A.\alpha^2 + p.A.\alpha + q.A = a_0$, és a dir

$$A.(\alpha^2 + p.\alpha + q) = a_0.$$

Distingim dos casos:

b_1) Si $\alpha^2 + p.\alpha + q \neq 0$ llavors $A=a_0/(\alpha^2 + p.\alpha + q)$.

b_2) Si $\alpha^2 + p.\alpha + q=0$, una possible solució serà $Y=t.A.e^{at}$. Anem a provar-ho.

Derivant, $Y'=A.e^{\alpha t} + t.\alpha.A.e^{\alpha t} = A.(1+t.\alpha).e^{\alpha t}$.

$$Y''=A.\alpha.e^{\alpha t} + A.(1+t.\alpha).\alpha.e^{\alpha t} = A.\alpha.(2+t.\alpha).e^{\alpha t}.$$

Substituint en l'equació,

$$A.\alpha.(2+t.a).e^{\alpha t} + p.A.(1+t.\alpha).e^{\alpha t} + q.t.A.e^{\alpha t} = a_0.e^{\alpha t}.$$

Operant i simplificant,

$$A.(2.\alpha + t.\alpha^2 + p + p.t.\alpha + q.t)=a_0 \Rightarrow$$

$$A.[t.(\alpha^2+p.\alpha+q)+2.\alpha+p]=a_0 \Rightarrow A.[t.0+2.\alpha+p]=a_0 \Rightarrow A.(2.\alpha+p)=a_0.$$

Podem distingir dues possibilitats:

b_{21}) Si $2.\alpha+p\neq 0$ llavors $A=a_0/(2.\alpha+p)$.

b22) Si $2.\alpha+p=0$ podríem provar anàlogament que la solució és del tipus $Y=t^2.A.e^{\alpha t}$ amb $A=a_0/2$.

c) TERCER CAS: Suposem, per acabar, que el segon membre de l'equació diferencial sigui del tipus $r(t)=a_0.\cos(\beta t)+b_0.\sin(\beta t)$. Provarem com a possible solució particular $Y=A.\cos(\beta t)+B.\sin(\beta t)$.

Calculant les derivades:

$$Y'= -A.\beta.\sin(\beta t) + B.\beta.\cos(\beta t) \qquad Y''= -A.\beta^2.\cos(\beta t) - B.\beta^2.\sin(\beta t)$$

Substituint en l'equació diferencial,

$$-A.\beta^2.\cos(\beta t) - B.b^2.\sin(\beta t) + p.[-A.\beta.\sin(\beta t) + B.\beta.\cos(\beta t)] +$$

$$+ q.[A.\cos(\beta t)+B.\sin(\beta t)] = a_0.\cos(\beta t)+b_0.\sin(\beta t)$$

Operant,

$$(-A.\beta^2+B.\beta.p+A.q).\cos(\beta t) + (-B.\beta^2-A.\beta.p+B.q).\sin(\beta t)=$$

$$= a_0.\cos(\beta t)+b_0.\sin(\beta t)$$

Identificant coeficients,

$$-A.\beta^2+B.\beta.p+A.q=a_0 \quad \text{i} \quad -B.\beta^2-A.\beta.p+B.q=b_0$$

Tindrem el sistema d' equacions lineals:

$$\begin{cases} \left(q-\beta^2\right).A + p.\beta.B = a_0 \\ -p.\beta.A + \left(q-\beta^2\right).B = b_0 \end{cases}$$

Aquest sistema serà compatible determinat sempre que el determinant dels coeficients sigui diferent de zero; és a dir, quan $(q-\beta^2)^2+p^2.\beta^2\neq 0$. Estudiem, doncs, els dos casos següents:

c_1) Si $(q-\beta^2)^2+p^2.\beta^2\neq 0$, podrem trobar A i B per la regla de Cramer:

$$A=\frac{\begin{vmatrix} a_0 & p.\beta \\ b_0 & q-\beta^2 \end{vmatrix}}{\left(q-\beta^2\right)^2+ p^2.\beta^2} \qquad B=\frac{\begin{vmatrix} q-\beta^2 & a_0 \\ -p.\beta & b_0 \end{vmatrix}}{\left(q-\beta^2\right)^2+p^2.\beta^2}$$

c_2) Si $(q-\beta^2)^2+p^2.\beta^2=0$, el que equivaldria a què $q=\beta^2$ i $p=0$ perquè $p,q,\beta \in R$. Provarem com a solució particular de l'equació diferencial:

$$Y=t.[A.\cos(bt)+B.\text{sen}(bt)].$$

Trobarem la primera i segona derivada,

$$Y'=A.\cos(\beta t)+B.\sin(\beta t) + t.[-A.b.\sin(\beta t)+B.b.\cos(\beta t)] =$$

$$= (A+B.\beta.t).\cos(\beta t) + (B-A.\beta.t).\sin(\beta t)$$

$$Y''=B.\beta.\cos(\beta t) - \beta.(A+B.\beta.t).\sin(\beta t) - A.\beta.\text{sen}(\beta t) + \beta.(B-A.\beta.t).\cos(\beta t)=$$

$$= (2.B.\beta - A.\beta^2.t).\cos(\beta t) + (-2.A.\beta + B.\beta^2.t).\sin(\beta t).$$

Com que en aquest cas $q=\beta^2$ i $p=0$, l'equació diferencial quedarà en la forma

$$y''+0.y'+\beta^2.y = a_0.\cos(\beta t)+b_0.\sin(\beta t).$$

Substituïnt,

$$(2.B.\beta-A.\beta^2.t).\cos(bt) + (-2.A.\beta+B.\beta^2.t).\sin(bt) +$$

$$+ \beta^2.t.[A.\cos(\beta t)+B.\sin(\beta t)]= \; = a_0.\cos(\beta t)+b_0.\sin(\beta t).$$

Operant i simplificant ens queda,

$$2.B.\beta.\cos(\beta t) - 2.A.\beta.\sin(\beta t) = a_0.\cos(\beta t)+b_0.\sin(\beta t)$$

Identificant coeficients,

$$2.B.\beta=a_0 \quad i \quad -2.A.\beta=b_0.$$

Cal observar que com que $\beta\neq 0$ resulta:

$$A=-b_0/2.\beta \quad i \quad B=a_0/2.\beta.$$

B.3 EQUACIONS EN DIFERÈNCIES FINITES DE PRIMER ORDRE

B.3.1 CONCEPTES PREVIS

1) **DEFINICIÓ:** Una *equació en diferències finites de primer ordre* és una equació del tipus $f_1(t, y_t, \Delta y_t)=0$, on y_t és una funció discreta desconeguda, Δy_t la diferència de primer ordre de la funció y_t i t la variable discreta.

Tenint en compte que $\Delta y_t=y_{t+1}-y_t$ podem escriure una equació en diferències de primer ordre com una equació del tipus

$$f(t, y_{t+1}, y_t)=0.$$

2) **SOLUCIÓ PARTICULAR I GENERAL:** Una *solució particular* de $f(t, y_{t+1}, y_t)=0$ és una funció discreta $y_t=h(t)$ definida en un cert conjunt de nombres naturals I, tal que verifica l'equació, és a dir,

$$\forall\ t \in I \qquad f(t, h(t), h(t+2))=0.$$

De la mateixa manera que en les equacions diferencials i des del punt de vista econòmic, a la solució particular se la sol anomenar *trajectòria temporal*.

Anomenem a continuació *solució general* de l'equació en diferències $f(t, y_{t+1}, y_t)=0$ a un conjunt de funcions discretes $F=\{y_t=h(t, C), C\in R\}$, definides en un interval $I\subseteq N$ tal que

$$\forall\ t \in I, \forall\ C \in R \qquad f(t, h(t, C), h(t+1, C))=0$$

3) **CONDICIÓ INICIAL:** Coneguda la solució general d'una equació en diferències de primer ordre, a partir d'ella podem obtenir una solució particular, si imposem una condició per poder trobar la constant. Aquesta condició s'anomena *condició inicial* i s'expressa com $y_0=A$

B.3.2 EQUACIÓ EN DIFERÈNCIES DE PRIMER ORDRE LINEAL

Distingirem, com en el cas de les equacions diferencials, l'equació en diferències lineal completa i l'equació homogènia associada.

1) EQUACIÓ EN DIFERÈNCIES LINEAL COMPLETA: Si p(t) i r(t) són funcions discretes definides en un cert interval I dels nombres naturals, anomenarem *equació en diferències lineal de primer ordre completa* a tota equació del següent tipus:

$$y_{t+1}= p(t)\ y_t+r(t) \qquad [B.4]$$

2) EQUACIÓ HOMOGÈNIA ASSOCIADA: A continuació anomenarem *equació homogènia associada* a l'equació en diferencies [B.4] a l'equació:

$$y_{t+1}=p(t)\ y_t$$

TEOREMA B.7. «Si y_t^p és una solució particular de l'equació completa i y_t^h és la solució general de l'homogènia associada, llavors la solució general de la completa és: $y_t= y_t^h + y_t^p$.»

Demostració: És similar a l'efectuada en el cas de les equacions diferencials. ♦

B.3.3 CÀLCUL DE LA SOLUCIÓ

Realitzarem ara el càlcul de la solució en el cas particular en què p(t) i r(t) siguin constants.

A) L'EQUACIÓ HOMOGÈNIA associada és: $y_{t+1}=p\ y_t$

Obtenim la successió: $y_0=C$, $y_1=p.y_0=p.C$, $y_2=p.y_1=p.p.C=p^2.C$, ...

I, en general, $y_t=p^t\ C$, per la qual cosa la solució general de l'homogènia és $y_t^h = p^t\ C$

B) Trobem ara la SOLUCIÓ PARTICULAR DE LA COMPLETA. Partim de $y_t^p = u(t)p^t$, on u(t) és una funció discreta que haurem de determinar.

El terme següent serà $y_{t+1}^p = u(t+1)p^{t+1}$, d'on resulta

$$u(t+1)p^{t+1} = pu(t)p^t + r \Leftrightarrow u(t+1)p^{t+1} = u(t)p^{t+1} + r \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^{t+1}[u(t+1)-u(t)] = r \Leftrightarrow u(t+1)-u(t) = r/p^{t+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u(t+1)-u(t) = r/p^{t+1}$$

Observem que les diferències successives són

$$u(1)-u(0) = r/p \ , \quad u(2)-u(1) = r/p^2 \ , \quad u(3)-u(2) = r/p^3$$

En general, es verifica $u(t)-u(t-1) = r/p^t$

Sumant membre a membre totes aquestes igualtats tenim

$$u(t)-u(0) = \frac{r}{p} + \frac{r}{p^2} + \frac{r}{p^3} + \ldots + \frac{r}{p^{t-1}} + \frac{r}{p^t} =$$

$$= r.\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p^3} + \ldots + \frac{1}{p^{t-1}} + \frac{1}{p^t} \right) =$$

$$= \frac{r}{p} . \frac{1 - (1/p)^t}{1 - (1/p)} = \frac{r.(p^t-1)}{p^t.(p-1)}$$

Notem que u(0) és una constant que pot prendre qualsevol valor, on aquí la prenem igual a zero.

Per tant, una solució particular de la completa és:

$$y_t^p = u(t)\ p^t = \frac{r(p^t-1)}{p-1}$$

Aplicant el teorema anterior, podem escriure la solució general de l'equació en diferències com

$$y_t = y_t^h + y_t^p = C\,p^t + \frac{r(p^t-1)}{p-1} = \left(C + \frac{r}{p-1}\right) p^t - \frac{r}{p-1}$$

B.4 CÀLCUL DE VARIACIONS

B.4.1 OPTIMITZACIÓ DINÀMICA

L'optimització és un tema predominant en l'anàlisi econòmica. Per aquesta raó, els mètodes clàssics del càlcul de trobar extrems lliures i en restriccions ocupen un lloc important en l'eina diària dels economistes. Útils com són, tals eines són només aplicables als problemes d'optimització estàtica.

La solució buscada en aquests problemes normalment consisteix en una única magnitud òptima per a cada variable d'elecció. En contrast, un problema d'optimització dinàmica presenta la qüestió de quina és la magnitud òptima d'una variable d'elecció en cada temps puntual en un interval de temps donat [0, T] (cas de temps continu).

Un problema d'optimització dinàmica contindrà, doncs, els següents ingredients bàsics:

1. Un punt inicial donat i un punt final donat.

2. Un conjunt de trajectòries admissibles des del punt inicial al punt final.

3. Un conjunt de valors de trajectòria servint com a índexs de compliment (cost, benefici, etc) associades amb algunes trajectòries.

4. Un objectiu específic -o maximitzar o minimitzar- el valor de l'índex de compliment elegint la trajectòria óptima.

B.4.2 PROBLEMA FONAMENTAL DEL CÀLCUL DE VARIACIONS

Començarem l'estudi del càlcul de variacions amb l'anàlisi del seu problema fonamental que consistirà en optimitzar una integral subjecte a una sèrie de restriccions.

Expressat matemàticament, tenim que el problema fonamental del càlcul de variacions és:

Maximitzar o minimitzar el funcional

$$V[y(t)]=\int_0^T F[t,y(t),y'(t)]\ dt$$

subjecte a $y(0) = A$ (A donat)

i a $y(T) = B$ (T i B donats)

En principi, existeixen moltes trajectòries que compleixen les condicions anteriors. La tasca del càlcul de variacions serà la d'intentar trobar aquelles solucions que maximitzin o minimitzin el funcional $V[y(t)]$.

Atès que el càlcul de variacions es basa en els mètodes clàssics del càlcul, requerint l'ús de primeres i segones derivades parcials, restringirem el conjunt de trajectòries admissibles a aquelles corbes contínues amb derivades contínues.

Una trajectòria $y(t)$ que optimitzi el funcional $V[y(t)]$ s'anomena una *trajectòria extremal*. També suposarem que la funció F és dues vegades derivable en l'interval $[0,T]$.

B.4.3 L'EQUACIÓ D'EULER

La condició necessària de primer ordre en el càlcul de variacions és l'*equació d'Euler*. Per bé que la formulació data de començaments de 1744, roman el resultat més important d'aquesta branca de les matemàtiques.

Suposem que existeix una trajectòria extremal $y^*(t)$ del funcional $V[y(t)]$. És evident que aquesta trajectòria compleix alguna propietat que no compleixen les altres corbes en un entorn d'$y^*(t)$.

Sigui, doncs, p(t) una trajectòria qualsevol amb la condició

$$p(0)=p(T)=0$$

Totes les trajectòries y(t) que es troben en un entorn d'y*(t) i compleixen les condicions y(0)=A i y(T)=B les podrem escriure com

$$y(t)= y^*(t) + \varepsilon.p(t)$$

Derivant respecte a t obtenim

$$y'(t)= y^{*\prime}(t) + \varepsilon\ p'(t)$$

Substituint y(t) i y'(t) en el funcional V[y(t)] resulta

$$V[y(t)]=f(\varepsilon).$$

Sabem que, per construcció, f(0)=y*(t) és un valor extremal i, per tant, es verifica f'(0)=0. Aquesta, és doncs, la condició necessària perquè el funcional V tingui una trajectòria extremal.

A continuació anem a calcular f'(0) en termes d'y(t) i y'(t)

$$f(\varepsilon)=\int_0^T F\left[t,y^*(t)+\varepsilon.p(t),y^{*\prime}(t)+\varepsilon.p'(t)\right] dt$$

Derivant sota el signe integral obtenim:

$$f'(\varepsilon)=\int_0^T \frac{\partial F}{\partial y}.dt=\int_0^T \left[\frac{\partial F}{\partial y}.\frac{dy}{d\varepsilon}+\frac{\partial F}{\partial y'}.\frac{dy'}{d\varepsilon}\right].dt$$

i derivant les expressions y(t)= y*(t)+ε.p(t) i y'(t)=y*'(t)+ε.p'(t) respecte a ε,

$$\frac{dy}{d\varepsilon}=p(t) \qquad \frac{dy'}{d\varepsilon}=p'(t)$$

Substituint

$$f'(\varepsilon)=\int_0^T \left[\frac{\partial F}{\partial y}.p(t)+\frac{\partial F}{\partial y'}.p'(t)\right] dt$$

De l'equació f'(0)=0 deduïm

$$\int_0^T \frac{\partial F}{\partial y}.p(t)dt + \int_0^T \frac{\partial F}{\partial y'}.p'(t)dt = 0$$

Integrant per parts el segon terme de l'equació anterior,

$$\int_0^T \frac{\partial F}{\partial y'}.p'(t)\ dt = \frac{\partial F}{\partial y'}(0).p(0) - \frac{\partial F}{\partial y'}(T).p(T) - \int_0^T p(t).\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dt$$

Donat que p(0)=p(T)=0, resulta

$$\int_0^T \frac{\partial F}{\partial y'}.p'(t)\ dt = -\int_0^T p(t).\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dt$$

Substituint i operant,

$$\int_0^T \frac{\partial F}{\partial y}.p(t)\ dt - \int_0^T p(t).\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)dt = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_0^T \left[\frac{\partial F}{\partial y}.p(t) - p(t).\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \int_0^T p(t).\left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]dt = 0$$

Atès que p(t) és una funció arbitrària

$$\forall t \in [0\ ,\ T] \qquad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$$

I com que

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right).\frac{dy}{dt} + \frac{\partial}{\partial y'}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right).\frac{dy'}{dt} =$$

$$= \frac{\partial^2 F}{\partial y'.\partial t} + \frac{\partial^2 F}{\partial y'.\partial y}.y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y'.\partial y'}.y''$$

Finalment, l'equació d'Euler és

$$\forall t \in [0\ ,\ T] \qquad \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}\, y'' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial y}\, y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y' \partial t} - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Observem que l'equació d'Euler és, en general, una equació diferencial de segon ordre no lineal. Així, la seva solució general contindrà dues constants arbitràries. Atès que el nostre problema ve donat amb dues condicions de frontera (una inicial i l'altra final), normalment tindrem prou informació que ens permetrà determinar les dues constants.

V. APÈNDIX

CONCLUSIONS

Les reflexions que poden sorgir de tot aquest estudi són molt variades i d´interpretacions diverses, no obstant això, hi ha unes línies principals i fonamentals que volem ressaltar a títol de conclusions. Això hauria de permetre clarificar els continguts i conseqüències bàsiques d'aquest treball i deixar entreveure les possibles vies d'aprofundiment en el tractament de la incertesa en els problemes econòmics.

1. No considerem adequat que per tal de tractar la incertesa en la ciència econòmica, disciplina que sovint ha de modelitzar problemes definits per predicats vagues, empréssim únicament les tècniques de la lògica binària Ha quedat palès en el primer capítol que el rang de les estructures matemàtiques que es poden utilitzar és molt ampli, i les englobem dintre les diverses lògiques multivalents que conformen la lògica borrosa. Tot i així, si no ens restringim a aquelles que verifiquen alguna estructura algebraica, ens podem trobar en la impossibilitat d'arribar a cap tipus de resultat. Es per això que s´ha imposat l'estructura de reticle, que d´altra banda no exigeix als seus elements que verifiquin propietats molt restrictives, i d'aquí es justifica la importància de la t-norma, la t-conorma i la negació de Zadeh.

2. Totes les disciplines científiques que estudien problemes amb components desconeguts, siguin aleatoris, caòtics o incerts, intenten mesurar la dispersió o el desordre que existeix en el problema tractat. D'aquesta forma queda palesa la importància de conceptes com la variància en estadística i l´entropia en química. En el cas que ens ocupa, tradicionalment també s´ha emprat el terme d'entropia per mesurar el grau de borrositat d´un subconjunt borrós, elecció que ens sembla molt correcte i de gran aplicabilitat La relació d'aquest concepte amb el de distància és evident, i d'aquí la importància de formalitzar amb rigor aquestes idees. S'ha d'entendre la formalització com un esforç per clarificar els

conceptes, tot i que algunes vegades la simbologia utilitzada pot semblar que en dificulta la comprensió.

3. En l´economia, les matemàtiques i la ciència en general moltes vegades relacionar és operar. La matemàtica pròpia per al tractament de la incertesa com a disciplina científica també necessita introduir les seves pròpies operacions i models. De la intuició i el sentit comú que tenim en els casos simples, s'arriba al plantejament del principi de l'extensió de les operacions entre subconjunts borrosos. Com ha quedat clar al llarg del capítol tres, el principi d'extensió de les operacions amb números borrosos és fonamental en tot el càlcul Malauradament quan treballem en casos no habituals i d'una certa complexitat, és totalment inoperant. Utilitzant l'aritmètica dels intervals de confiança els càlculs se simplifiquen molt, són més operatius i d'una execució elegant i inmediata. L'inconvenient és que no sempre és adequada la seva utilització,ja que el grau d´incertesa dels punts que componen l´interval de confiança no té perquè ser uniforme.

4. En el capítol de subconjunts borrosos hem intentat formalitzar els conceptes fonamentals i donar demostracions rigoroses dels principals resultats.

En el tractament de números borrosos hem continuat formalitzant els conceptes que ens ocupen conscients que una de les dificultats de l'aritmètica borrosa és l'increment de la incertesa que es va acumulant amb les operacions entre números borrosos, principalment amb el producte i amb el quocient. A partir d'un treball de M.Jiménez que dóna un mètode per aproximar números borrosos qualssevol per números borrosos triangulars o trapezoïdals, hem proposat un mètode d'aproximació del producte de dos números borrosos triangulars per un número borrós poligonal, amb un error prefixat per tal d'obtenir el grau d'aproximació que cada problema requereix. Entenem que els càlculs son laboriosos però necesaris en aquells problemes en que es requereix molta precisió.

L´aproximació proposada permet, com a cas particular, determinar un grau d´error d´aproximació d´un número borrós per la seva corresponent aproxiamció triangular; i, si es desitja minimitzar l´error, es pot determinar el grau de l´aproximació poligonal corresponent.

5. Pel que fa referència a l´estudi realitzat de les equacions borroses, i prenent com a referència aportacions anteriors que han estat esmentades en el capítol corresponent, hem realitzat l´estudi de l´equació $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$ amb $\tilde{A}$ i $\tilde{B}$ números borrosos triangulars, rebaixant la condició de igualtat per una inclusió en el sentit $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}+\tilde{X}$.

D'entre tots els possibles números borrosos $\tilde{X}$ que verifiquen $\tilde{B} \subseteq \tilde{A}+\tilde{X}$, hem construit el número borrós $\tilde{X}_0$ tal que $\tilde{A}+\tilde{X}_0$ és el mínim que compleix la inclusió, i obtenim d´aqueta manera una aproximació a la solució de l'equació $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$.

L'aproximació $\tilde{X}_0$ a la solució de l'equació $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$, no és en general un número borrós triangular, per la qual cosa hem introduït una aproximació triangular $\tilde{X}_1$ de $\tilde{X}_0$, construïda a partir d'un índex d'aproximació prefixat.

6. Per al cas de l'equació lineal borrosa $\tilde{A}\cdot\tilde{X}=\tilde{B}$, hem desenvolupat un procés similar al de l'equació $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$, amb la diferència que en aquest cas no ha estat possible conservar l'estructura triangular de l'aproximació de $\tilde{X}_0$. Per tal de solventar aquesta dificultat hem construït un número borrós $\tilde{X}_1$ amb funció de pertinença contínua a partir també d'un index d'aproximació prefixat.

7. Hem constatat que, amb el mètode proposat, resulta en ambdós casos, que si les equacions $\tilde{A}+\tilde{X}=\tilde{B}$ i $\tilde{A}\cdot\tilde{X}=\tilde{B}$ tenen solució, aquesta coincideix amb l'aproximació $\tilde{X}_0$.

8. Com a proposta de recerca futura, creiem de gran interés analitzar vies de generalització del mètode desenvolupat a qualsevol equació del tipus $f(\tilde{A},\tilde{X})=\tilde{B}$. Esperem tenir prou elements de judici en un futur proper per tal de decidir si aquest nou mètode pot ser aplicat en equacions borroses del tipus esmentat.

9. Les equacions diferencials borroses que ens han ocupat el cinquè capítol tenen la particularitat que per a cada valor de la variable independent, el valor particular de la funció solució de l´equació diferencial és un número borrós triangular. Aquest fet ens ha portat a fer un estudi exhaustiu de les derivades de funcions borroses triangulars. Ens hem concentrat en un tipus particular d'equacions, les lineals amb coeficients constants, que rsulten ser força manejables, i potser per aquesta raó s´utilitzen sovint en les aplicacions econòmiques. L´estructura dels resultats són significativament diferents dels obtinguts amb les eines matemàtiques ordinàries No obstant, pel que fa referència al nivell de significació amb grau 1, coincideixen ambdues interpretacions, el que ens permet concloure que, també en aquest àmbit, la matemàtica *fuzzy* generalitza els conceptes i resultats que obtenim amb els mètodes matemàtics ordinaris, quan reduim els coeficients de l´equació diferencial a un sol valor.

10. Resoldre una equació diferencial no borrosa és ja d'entrada un repte difícil i sovint impossible. Al *fuzzyficar* les equacions diferencials per introduir les equacions diferencials borroses, aquesta dificultat es veu augmentada per la complexitat que hi introdueix la incertesa.

Resoldre una equació diferencial borrosa és, entre d´altres coses, resoldre una equació borrosa, i hem vist amb l´estudi de les equacions borroses que hi ha moltes limitacions per dur a terme la seva resolució. Tot i així aquest tema ens ha motivat perquè creiem que pot tenir molt d´interés en les aplicacions econòmiques que, encara que sigui en models d´un caire eminentment teòric, també poden donar noves i productives idees.en el terreny purament pràctic.

11. llevat La triangularitat de la derivada no es conserva llevat en els casos en què la derivada que correspon al màxim de presunció es mantingui sempre entre les derivades de les dues funcions extremes.

12. A l´exigir que la solució d'una equació diferencial borrosa lineal a coeficients constants sigui un número borrós triangular, ens troben davant dues possibilitats.de solució. Una d´elles és valida en un interval infinit (semirecta) i l'altra en un interval finit.

D´entre aquestes dues possibilitats de solució, a partir del domini intersecció d´amdós dominis demostrem que sempre una de les solucions resulta inclosa en l'altra.

13. Hem analitzat el comportament, sota condicions d´incertesa, del model corresponent al anàlisi entre l´oferta i la demanda en un mercat perfecte d'una sola mercaderia, considerant les funcions d' oferta i demanda linials., però amb coeficients incerts

Hem fet l´estudi des de tres punts de vista diferents: model estàtic, model dinàmic amb temps continu i model dinàmic amb temps discret.

En general, es constata que si considerem que les quantitats inicials ofertades i demandades són números borrosos, resulta un estudi més realista de la situació que el realitzat amb magnituds precises.

14. En el model estàtic presentat, a partir dels nombres borrosos $\tilde{a}$ i $\tilde{b}$, arribem a les expressions corresponents del preu $\tilde{P}$ i la quantitat $\tilde{Q}$ en l'equilibri, determinades tan a partir de les seves

respectives funcions de pertinença $\mu_{\tilde{P}}$ i $\mu_{\tilde{Q}}$, com també mitjançant els seus corresponents α-talls.

El producte cartesià $\tilde{P} \times \tilde{Q}$ defineix un conjunt borròs de R^2, podent-se considerar el producte cartesià $P_\alpha x Q_\alpha$ dels seus α-talls, per a cada nivell, com una successió de figures poligonals encaixades monòtonament. Si apliquem el model proposat al cas particular en que els nombres borrosos implicats són triangulars, obtenim un resultat molt operatiu per a la zona d´equlibri borrosa entre l´oferta i la demanda.

15. En el cas del model dinàmic en temps continu, la determinació de la trajectòria del preu quan hi ha un excés de demanda depèn del preu inicial i es pot determinar completament a partir dels α-talls.

Totes les trajectòries tendeixen al preu d´equilibri intertemporal, que s´expressa a través d´un número borrós $\tilde{P}_e$. Aquest número borrós $\tilde{P}_e$ l´obtenim com a *limit* dels preus incerts que són solució de l'equació diferencial borrosa que conté tots els possibles valors del preu amb els seus respectius graus de pertinença.

En general, no es manté el comportament monoton de les diferents trajectories temporals de la variable No obstant, imposant certes condicions al preu inicial podem assegurar el creixement o decreixement de les trajectories cap al preu d'equilibri.

16. En el cas del comportament del model dinàmic sota incertesa en temps discret (anomenat comunment *model de la teranyina*), hem determinat les condicions per a la convergència de la trajectoria del preu. Aquesta interpretació ens proporciona un valor per al preu d'equilibri donant una visió més realista, i alhora permet establir un coeficient de convergència del preu que ens dóna un número borrós que expressa els possibles valors d'equilibri, cadascún amb el seu corresponent grau de possibilitat. Aquest grau de possibilitat és més gran quan menys intersecció

tenen els suports dels pendents de la demanda i de la oferta, i com més petita sigui la distància del pendent de l'oferta a l'origen respecta a la distància del pendent de la demanda a l'origen. En realitat, quan més intersecció hi ha, més s'apropa la possibilitat de convergencia al nivell 0,5.

17. Pel que fa al model estàtic de Cournot-Nash de determinació de la producció de cadascuna de les dues empreses implicades en el problema, si considerem els costos marginals de cada empresa expresats per números borrosos triangulars, es determinen les dues funcions de pertinença de les funcions de reacció de cadascuna d´elles.

En aquest context la regió que conté els punts d'equilibri és la intersecció de dos conjunts borrosos en forma de piràmide de base un paral.lelogram. Per a cada punt d'aquest paral.lelogram ens queda determinat el grau de possibilitat de que l'equilibri s'assoleixi en aquest punt, grau que s'expressa a partir del valors de la corresponent funció de pertinença.

A través d'un procés de *desfuzzyficació*, consistent en calcular el centre de gravetat d'una determinada regió borrosa, obtenim el punt que considerem significatiu i que ens dóna el valor de producció que permet igualar el valor del benefici de les dues empreses, la qual cosa permet donar finalment un resultat nítid de determinació del valor d'equilibri alternatiu a la solució tradicional.

18. Finalment, l'aplicació de la lògica borrosa al model d'Evans d´un monopoli condueix a un conjunt de trajectòries òptimes del preu, cadscuna d'elles amb el seu corresponent grau de possibilitat.

Fent ús de la mitjana ponderada, ja que en aquest cas hem considerat que les condicions de frontera són incertes i s'expressen a través de números borrosos discrets, hem obtingut una trajectòria òptima que ens proporciona una nova alternativa de solució del problema.

BIBLIOGRAFIA

A

AGUILAR, J. (1992): *"Clasificación borrosa (Lamda Fuzzy clustering)"* a *Aplicaciones de la lógica borrosa, pàgs.121-131.* C.S.I.C. Madrid.

ALSINA, C. (1985): *"On a family of connectives for fuzzy sets"* a *Fuzzy sets and Systems, 16, 231-235.*

ALSINA, C. (1992): *"El cálculo con subconjuntos borrosos"* a *Aplicaciones de la lógica borrosa, pàgs.23-32.* C.S.I.C. Madrid.

B

BANDEMER, H., GOTTWALD, S. (1995): *Fuzzy sets, Fuzzy logic, Fuzzy methods with applications.* John Wiley & Sons Ltd, Baffins Lane, Chichester.

BANON, G. (1981): *"Distinction between several subsets of fuzzy measures"* a *Fuzzy Sets and Systems, 5, 291-305.*

BELLMAN, R. E., ZADEH, L. A. (1970): *"Decision-Making in a Fuzzy Environment"* a *Management Science 17, 141-164.*

BIGNOLI, A. J. (1996): *"El ajuste de números borrosos"* a *Actas III Congreso SIGEF, Vol. 2, 2.19.* Buenos Aires.

BIGNOLI, A. J. (1996): *"Las manifestaciones de la incertidumbre y su evaluación"* a *Actas III Congreso SIGEF, Vol. 3, 2.36.* Buenos Aires.

BILLOT, A. (1995): *Economic Theory of Fuzzy Equilibria: An Axiomatic Analysis.* Ed. Springer. Berlín.

BOJADZIEV, GEORGE; BOJADZIEV, MARIA. (1997): *Fuzxzy Logic for Business, Finance and Management.* Ed. World Scientific. Singapore.

BORTOLAN, G., DEGANI, R. (1985): *"A review of some methods for ranking fuzzy subsets"* a *Fuzzy Sets and Systems, 15, 1-19.*

BRAUN, M. (1976): *Equaciones diferenciales y sus aplicaciones.* Grupo editorial Iberoamérica.

BUCKLEY, J. J. (1985): *"Ranking alterntives usinfg fuzzy numbers"* a *Fuzzy Sets and Systems, 15, 21-31.*

BUCKLEY, J. J. (1989): *"A fuzzy ranking of fuzzy numbers"* a *Fuzzy Sets and Systems, 33, 119-121.*

BUCKLEY, J. J. (1990): *"On using a-cuts to evaluate fuzzy equations" a Fuzzy Sets and Systems, 38, 309-312.*

BUCKLEY, J. J., QU, Y. (1991): *"Solving fuzzy equations: A new solution concept"* a *Fuzzy Sets and Systems, 39, 291-301.*

BURILLO, P., SOLER, J. (1985): *Introducción a la teoría de conjuntos difusos y aplicaciones económicas.* Pub. Universidad de Valencia. València.

C

CASPARRI, Mª. T., GARCÍA, J. (1996): *"Inversión en ambiente incierto. Pseudo-TIR"* a *Actas III Congreso SIGEF, Vol. 2, 2.21.* Buenos Aires.

CASSÚ, C., FERRER, J. C., BONET, J., BERTRAN, X. (1996): *"Analysis of the Partial Equilibrium of Market in a Fuzzy Linear Model"* a *Proceedings International Conference on Intelligent Technologies in Human-Related Sciences, Vol. 1, 311-314.* León.

CASSÚ, C., FERRER, J. C., BONET, J., BERTRAN, X. (1996): *"Distribution of the Possibility of Risk in Determining the Marginal Efficiency of Investment in the Context of Uncertainty"* a *Proceedings International Conference on Intelligent Technologies in Human-Related Sciences, Vol. 1, 307-310.* León.

CASSÚ, C., FERRER, J. C., BONET, J., BERTRAN, X., ROCHER, F. (1995): *"Estudio de un modelo borroso simple para la determinación de la renta nacional"* a *Actas II Congreso SIGEF, Vol. II, 49-62.* Santiago de Compostela.

CASSÚ, C., FERRER, J. C., BONET, J., BERTRAN, X., ROCHER, F. (1995): *"Obtention of the membership function of the national income value in an expanding economy according to Harrod growth model with uncertain parameters"* a *Proceedings Systems Analysis, Control and Design, Vol. I, 283-293.* Brno. Txèquia.

CHANG, P.T., LEE, E.S. (1994): *"Fuzzy arithmetics and comparison of fuzzy numbers"* a *Studies in Fuzziness: Fuzzy Optimization, 68-82.* Springer-Verlag Company. New York.

CHENG, CHING-HSUE (1998): *A new approach for ranking fuzzy numbers by distance method.* Fuzzy sets and systems 95, 307-317.

CHIANG, ALPHA C. (1987): *Métodos fundamentales de Economía Matemática.* Ed. McGraw-Hill. Madrid.

CHORAFAS, D. N. (1994): *Chaos Theory in the Financial Markets.* Irwin, Professional Publishing. Chicago.

D

DE LUCA, A., TERMINI, S. (1972): *"A definition of a nonprobabilistic entropy in the setting of fuzzy sets theory"* a *Information and Control 20, 301-312.*

DELGADO, M. (1992): *"Toma de decisiones en ambiente borroso"* a *Aplicaciones de la lógica borrosa, pàgs.75-88.* C.S.I.C. Madrid.

DELGADO, M., KACPRZYK, J., VERDEGAY, J. L., VILA M. A. (1994): *Fuzzy Optimization.* Physica-Verlag, A Spriger Verlag Company.

DELGADO, M., VERDEGAY, J. L., VILA, M. A. (1988): *"A procedure for ranking fuzzy numbers using fuzzy relations"* a *Fuzzy Sets and Systems, 26, 49-62.*

DELGADO, M., VERDEGAY, J. L., VILA, M. A. (1989): *"A General Model for Fuzzy Linear Programming"* a *Fuzzy Sets and Systems, 29, 21-29.*

DUBOIS, D. (1983): *Modèles Mathématiques de l'imprecis et de l'incertain en vue d'applications aux techniques d'aide à la decision.* Tesi Doctoral. Université Scientifique et Médicale de Grenoble.

DUBOIS, D., FARGIER, H., PRADE, H. (1994): *"Propagation and Satisfaction of Flexible Constraints"* a *Fuzzy Sets, Neural Networks and Soft Computing.* Ed. Van Nostrand Reinhold. New York.

DUBOIS, D., PRADE, H. (1978): *"Operations on fuzzy numbers"* a *International Journal of Systems and Science, 6, 613-626.*

DUBOIS, D., PRADE, H. (1979): *"Fuzzy real algebra: some results"* a *Fuzzy Sets and Systems, 2, 327-348.*

DUBOIS, D., PRADE, H. (1980): *Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications.* Academic Press. California.

DUBOIS, D., PRADE, H. (1982): *"A class of fuzzy measures based on triangular norms"* a *International Journal of General Systems, 8, 43-61.*

DUBOIS, D., PRADE, H. (1987): *"Expected value of a fuzzy number"* a *Fuzzy Sets and Systems, 24, 279-300.*

DUBOIS, D., PRADE, H. (1988): *Théorie des possibilités.* Ed. Masson. París.

E

ELSGOLTZ, L. (1977): *Ecuaciones diferenciales y calculo veriacional.* Mir. Moscu.

ERWE, F. (1970): *Ecuaciones diferenciales ordinarias.* Selecciones Cientificas. Madrid.

ESTEVA, F. (1992): *"Cálculo con relaciones borrosas"* a *Aplicaciones de la lógica borrosa, pàgs.33-49.* C.S.I.C. Madrid.

ESTRIN, S., LAIDLER, D. (1995): *microeconomía.* Prentice Hall internetionel (UK) Ltd. Madrid.

F

FLEMING, WENDELL H.; RISHEL, RAYMOND W. (1975): *Deterministic and Stochastic Optimal Control.* El. Springer-Verlag. Berlín.

G

GIL ALUJA, J. (1994): *"La incertidumbre en la Economía y la Gestión de Empresas"* a *Actas IV Congreso de la Asociación Española sobre Tecnología y Lógica Fuzzy.* Blanes.

GIL ALUJA, J. (1995): *"Modelos no numéricos de asignación en la gestión de personal"* a *Actas II Congreso SIGEF, Vol. 2, 93-120.* Santiago de Compostela.

GIL ALUJA, J. (1995): *"Towards a new concept of economic research"* a *Fuzzy Economic Review, núm. 0, págs. 5-23.*

GIL ALUJA, J. (1996): *"Lances y desventuras del nuevo paradigma de la teoría de la decisión"* a *Actas III Congreso SIGEF, Vol. 1, 2.10.* Buenos Aires.

GIL ALUJA, J. (1996): *"Towards a new paradigm of investment selection in uncertainty"* a *Fuzzy Sets and Systems* (en publicació).

GIL LAFUENTE, A. Mª (1990): *El análisis financiero en la incertidumbre.* Ed. Ariel. Barcelona.

GIL LAFUENTE, A. Mª (1993): *Fundamentos de análisis financiero.* Ed. Ariel. Barcelona.

GIL LAFUENTE, J. (1996): *"El control de las actividades de marketing"* a *Actas III Congreso SIGEF, vol. 3, 2.44.* Buenos Aires.

GIL LAFUENTE, J. (1996): *Marketing numérico y no numérico en la incertidumbre (el producto y su entorno).* Tesi Doctoral. Universitat de Barcelona.

GOGUEN, J. A. (1967): *"L-fuzzy sets"* a *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 18, 145-174.*

GOLDBERG, S. (1996): *Introduction to difference equations.* Dover publications, Inc. New York.

GOTWALD, S. (1979): *"A note on measures of fuzziness"* a *Elektronische Informationsverarbeitung und Kybernetik, 15, 221-223.*

H

HAMACHER, H. (1978): *"Über logische Aggregationen nicht-binär expliciter Entscheidungskriterien"* a *Progress in Cybernetics and Systems Research 3, 276-288.*

HEILPERN, S. (1992): *"The expected value of a fuzzy number"* a *Fuzzy Sets and Systems, 47, 81-86.*

HEILPERN, S. (1995): *"Using fuzzy data analysis in economy"* a *Proceedings II Meeting SIGEF, I, 315-326.* Santiago de Compostela.

HIGASHI, M., KLIR, G.J. (1982): *"Measures of uncertainty and information based on possibility distributions"* a *International Journal of General Systems, 9, 43-58.*

I

IMAZ, C., VOREL, Z. (1968): *Ecuaciones diferenciales ordinarias.* Limusa s.a. Mexico.

J

JIMÉNEZ, M. (1994): *"La matemática borrosa aplicada a las matemáticas de las operaciones financieras"* a *Actas I Congreso SIGEF. Vol. I, 295-317.* Reus.

JIMÉNEZ, M. (1994): *Modelos matemáticos aplicados a la toma de decisiones financieras en condiciones de incertidumbre.* Tesis Doctoral. Euskal Erriko Unibersitatea.

JIMÉNEZ, M., RIVAS, J. A. (1996): *"Aproximación de números borrosos"* a *Actas III Congreso SIGEF, Vol. 1, 2.12.* Buenos Aires.

K

KANDEL, A., LEE, S. C. (1979): *Fuzzy Switching and Automata: theory and applications.* Crane, Russak Editors. New York.

KAUFMANN, A. (1973): *Introduction a la théorie des sous-ensembles flous. Tome I: Eléments théoriques de base.* Ed. Masson. París.

KAUFMANN, A. (1973): *Introduction a la théorie des sous-ensembles flous. Tome III: Applications à la classification et à la reconnaissance des formes, aux automates et aux systèmes, au choix des critères.* Ed. Masson. París.

KAUFMANN, A. (1975): *Introduction a la théorie des sous-ensembles flous. Tome II:Applications à la linguistique, à la logique et à la sémantique.* Ed. Masson. París.

KAUFMANN, A. (1977): *Introduction a la théorie des sous-ensembles flous.*

KAUFMANN, A. (1987): *"Nouvelles logiques pour l'intelligence artificielle".* Ed. Hermes. París.

KAUFMANN, A. (1987): *Les expertons.* Ed. Hermes. París.

KAUFMANN, A., GIL ALUJA, J. (1986): *Introducción de la teoría de los subconjuntos borrosos a la gestión de las empresas.* Ed. Milladoiro. Santiago de Compostela.

KAUFMANN, A., GIL ALUJA, J. (1987): *Técnicas operativas de gestión para el tratamiento de la incertidumbre.* Ed. Hispano-Europea. Barcelona.

KAUFMANN, A., GIL ALUJA, J. (1988): *Models per la recerca d'efectes oblidats*. Ed. Milladoiro. Barcelona.

KAUFMANN, A., GIL ALUJA, J. (1990): *Las matemáticas del azar y de la incertidumbre*.Ed. CEURA. Madrid.

KAUFMANN, A., GIL ALUJA, J. (1991): *"Selection of affinities by means of fuzzy relations and Galois Lattices"* a *Actas Congreso Euro XI*. Aachen.

KAUFMANN, A., GIL ALUJA, J. (1992): *Técnicas de gestión de empresa. Previsiones, decisiones y estrategias*. Ed. Pirámide. Madrid.

KAUFMANN, A., GIL ALUJA, J. (1993): *Técnicas especiales para la gestión de expertos*. Ed. Milladoiro. Santiago de Compostela.

KAUFMANN, A., GIL ALUJA, J. (1995): *Grafos neuronales para la economía y la gestión de las empresas*. Ed. Pirámide. Madrid.

KAUFMANN, A., GIL ALUJA, J., GIL LAFUENTE, A. Mª. (1994): *La Creatividad en la Gestión de Empresas*. Ed. Pirámide. Madrid.

KAUFMANN, A., GIL ALUJA, J., TERCEÑO, A. (1994): *Matemática para la economía y la gestión de empresas. Vol. I: aritmética de la incertidumbre*. Ed. Foro Científico. Barcelona.

KAUFMANN, A., GUPTA, M. M. (1991): *Introduction to fuzzy arithmetic. Theory and Applications*. International Thomson Computer Press. EUA.

KLIR, G. J., YUAN, B. (1995): *Fuzzy sets and Fuzzy logic theory and applications*. Prentice Hall PTR, New Jersey.

KLIR,G., FOLGER,T. (1988): *Fuzzy sets, uncertainty, and information*. Ed. Prentice-Hall. E.U.A.

KNOPFMACHER, J. (1975): *"On measures of fuzziness"* a *Journal of Mathematics, Analysis and Applications, 49, 529-534.*

KOSKO, B. (1992): *Neural Networks and Fuzzy Systems. A Dynamical Systems Approach to Machine Intelligence.* Ed. Prentice-Hall. New Jersey.

KOSKO, B., ISAKA, S. (1993): *"Lógica borrosa"* a *Investigación y Ciencia, sept. 93.*

KRASNOPROSHIN, V. (1995): *"Problemas de Dirección de Empresas: Aspectos Matemáticos e Informáticos." Notes de Conferència. El autor.*

KRASNOPROSHIN, V., OBRATZTSOV, V. (1991): *"Hybrid Algorithms for Decision Support System in Weakly Formalised Areas"* a *Proceedings I Conference Pattern Recognition and Image Analysis, Vol. 3, 88-91.* Minsk.

KRASNOPROSHIN, V., OBRATZTSOV, V. (1995): *"Fuzzy Algorithms in Decision-Making and Management Problems"* a *Actas II Congreso SIGEF, Vol. 2, 181-190.* Santiago de Compostela.

KWIESIELEWICZ, M. (1993): *"On explicit and implicit solutions of fuzzy linear equations".* Reports of the Faculty of Technical Mathematics and Informatics. Delft University of Technology. Netherlands.

L

LAZZARI, L. L., MACHADO, E. A., PÉREZ, R. H. (1995): *"Decision theory in conditions of uncertainty (fuzzy decision)"* a *Fuzzy Economic Review, núm. 0, págs. 87-101.*

LLERENA, F., VILELLA, M. (1994): *"Comparació formal entre probabilitat, possibilitat i necessitat"* a *Actas I Congreso SIGEF, Vol. 1, 339,346.*

LOO, S.G. (1977): *"Measures of fuzziness"* a *Cybernetica, 20, 201-210.*

LOWEN, R. (1996): *Fuzzy sets theory. Basic concepts, techniques and bibliography.* Kluwer Academic publishers. Netherlands.

LÓPEZ, E., MENDAÑA, C. (1994): *"The outsourcing decision in Fuzzy Economic Environments"* a *Proceedings International AMSE Symposium: Fuzzy Systems and Neural Networks, 39-54.* Lyon.

M

MANSUR, Y. M. (1995): *Fuzzy Sets and Economics.* Edward Elgar Publishing. Vermont. E.U.A.

MIZUMOTO, M. (1989): *"Pictorial representations of fuzzy connectives: cases of t-norms, t-conorms and averaging operators"* a *Fuzzy Sets and Systems,31, 217-242.*

MIZUMOTO, M., ZIMMERMANN, H.J. (1982): *"Comparison of Fuzzy Reasoning Methods"* a *Fuzzy Sets and Systems, 8, 253-283.*

MOORE, R. (1979): *Methods and applications of interval analysis.* Ed. SIAM. Filadelfia.

N

NAKAMURA, K. (1986): *"Preference relations on a set of fuzzy utilities as a basis for decision making"* a *Fuzzy Sets and Systems, 20, 147-162.*

NGUYEN, H. T. (1978): *"A note on the Extension Principle for Fuzzy Sets"* a *Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2, 369-380.*

NGUYEN, H. T., WALKER, E. A. (1997): *A First Course in Fuzzy logic..* CRC Press, Inc. Florida.

0

OKUDA, T., TANAKA, H., ASAI, K. (1978): *"A Formulation of Fuzzy Decision with Fuzzy Information using Probability Measures of Fuzzy Events"* a *Information and Control, 38, 135-147.*

ORLOVSKY, S. A. (1978): *"Decision-making with a fuzzy preference relation"* a *Fuzzy Sets and Systems, 1, 155-167.*

OSTASIEWICZ, W. (1996): "*Some philosophical aspects of fuzzy sets*" a *Fuzzy Economic Review, Vol I, 2, 3-33.*

P

PEDRYCZ, W. (1983): "*Numerical and applicational aspects of fuzzy relational equations*" a *Fuzzy Sets and Systems, 11, 1-18.*

PEDRYCZ, W. (1994): "*Hierarchical Fuzzy Modelling for Heterogeneus Information Processing*" a *Fuzzy Sets, Neural Networks and Soft Computing.* Ed. Van Nostrand Reinhold. New York.

PIAGET, J. (1979): *Tratado de Lógica y Conocimiento Científico.* Ed. Paidós. Buenos Aires.

PONSARD, C. (1980): "*Fuzzy Economic Spaces*" a *First World Regional Science Congress.* Harvard University.

PONSARD, C. (1982): "*Partial Spatial Equilibria with Fuzzy Constraints*" a *Journal of Regional Science, 22, 159-175.*

R

RADU, G., TOFAN, I. (1992): "*A Categorical Frame for Fuzzy Sets*" a *Proceedings Fuzzy Systems and Signals, 57-63, Geneva (Switzerland).*

RAMÍREZ, D. (1988): *Fundamentos metodológicos para el análisis económico en contexto de incertidumbre.* Tesi Doctoral. Universitat de Barcelona.

RAMÍREZ, D. (1995): "*On the logical treatment of vague knowledge*" a *Proceedings International AMSE Conference: Systems Analysis, Control and Design, Vol. 3, 1-10.* Brno.

ROSS, S. L. (1980): *Introducción a las equaciones diferenciales.* Jonh Wiley & sons. Mexico.

S

SAMBUG, R. (1975): *Fonctions F-flous. Application au diagnostic en pathologie thiroïdienne.* Tesi Doctoral. Universitat de Marseille.

SAMUELSON, P. A. (1948): *"La matemática elemental de la determinación de la renta"* a *Lecturas de Macroeconomía, págs. 25-38.* Ed. CECSA. México.

SANTALÓ, LL. A. (1975): *La educación matemática, hoy.* Ed. Teide. Barcelona.

SANTALÓ, LL. A. (1993): *La matemàtica: una filosofia i una tècnica.* Ed. Eumo. Barcelona.

SOKAL, R. R., ROHLF, F. J. (1962): *"The comparison of dendograms by objective methods"* a *Taxon, 11, 33-40.*

STEFANESCU, M., TOFAN, I. (1992): *"On Fuzzy Groups"* a *Proceedings Fuzzy Systems and Signals, 53-56, Geneva (Switzerland).*

SUGENO, M. (1977): *"Fuzzy measures and fuzzy integrals. A survey"* a *Fuzzy Automata and Decision Processes, 89-102.* Gupta, Saridis and Gaines, eds. New York.

SÁNCHEZ, E. (1979): *"Medical diagnosis and composite fuzzy relations"* a *Advances in Fuzzy Set Theory and Applications.* Ed. North-Holland. New York.

SÁNCHEZ, E. (1984): *"Solutions of fuzzy equations with extended operations"* a *Fuzzy Sets and Systems, 12, 237-248.*

T

TEODORESCU, H.N., AROTARITEI, D., LÓPEZ, E., MENDAÑA, C. (1996): *"Trail-and-Error Algorithm for Algebraic Fuzzy Neural Networks Using Triangular Fuzzy Numbers"* a *Proceedings of the International Conference on Intelligent Technologies in Human-Related Sciences, Vol. 1, 81-85.* León.

TERCEÑO, A. (1995): *Instrumentos para el análisis de operaciones financieras con datos inciertos.* Tesis Doctoral. Universitat de Barcelona.

TERCEÑO, A., MÁRQUEZ, N., BARBERÁ, M.G. (1994): *"Función de pertenencia del término amortizativo de un préstamo a interés incierto"* a *Actas I Congreso SIGEF, Vol. I, 107-130.* Reus.

TERCEÑO, A., MÁRQUEZ, N., BARBERÁ, M.G. (1995): *"An approach to the membership function of the annuity of a loan"* a *Proceedings International AMSE Conference: Systems Analysis, Control and Design, Vol. 4, 166-181.* Brno.

TERCEÑO, A., SÁEZ, J. B., ORTÍ, F. J. (1996): *"Tratamiento de la incertidumbre en la modelización del problema de constitución de carteras óptimas"* a *Actas III Congreso SIGEF, 3, 2.59.*

TERMINI, S. (1992): *"Notas sobre las medidas de borrosidad"* a *Aplicaciones de la lógica borrosa, pàgs.189-199.* C.S.I.C. Madrid.

TERRICABRAS, J.M. (1992): *"El análisis lógico de la vaguedad"* a *Aplicaciones de la lógica borrosa, pàgs.15-22.* C.S.I.C. Madrid.

TOFAN, I. (1992): *"Une introduction dans la théorie des ensembles flous et dans la logique flou".* Univ. Al.I.Cuza. Iasi.

TONG, M., BONISSONE, P. (1984): *"Linguistic solutions to fuzzy decision problems"* a *TIMS/Studies in the Management Sciences, 20, 323-334.*

TRILLAS, E. (1980): *Conjuntos borrosos.* Ed. Vicens-Vives. Barcelona.

TRILLAS, E. (1992): *"La lógica borrosa"* a *Aplicaciones de la lógica borrosa, pàgs.1-13.* C.S.I.C. Madrid.

V

VALVERDE, L. (1992): *"Razonamiento aproximado y lógica borrosa"* a *Aplicaciones de la lógica borrosa, pàgs.107-120.* C.S.I.C. Madrid.

VARIANT, H. R. (1986): *Análisis microeconómico.* Antoni bosh editor. Barcelona.

W

WANG, L. (1994): *Adaptative Fuzzy Systems and Control.* Ed. Prentice-Hall. New Jersey.

WANG, L. (1994): *Adaptative Fuzzy Systems and Control.* PTR prentice Hall, Inc. New Jersey.

WANG, L. (1997): *A Course in Fuzzy Systems and Control.* PTR prentice Hall, Inc. New Jersey.

Y

YAGER, R. R. (1979): *"On the measure of fuzziness and negation"* a *International Journal of General Systems, 5, 221-229.*

YAGER, R. R. (1980): *"On a general class of fuzzy connectives"* a *Fuzzy Sets and Systems 4, 235-242.*

YAGER, R. R. (1984): *"A representation of the probability of fuzzy subsets"* a *Fuzzy Sets and Systems, 13, 273-283.*

YAGER, R. R., FILEV, D. P. (1994): *Essentials of Fuzzy Modeling and Control.* John Wiley & Sons. New York.

YEH, R. T. (1975): *"Fuzzy relations, fuzzy graphs and their applications to clustering analysis"* a *Fuzzy Sets and their Applications to Cognitive and Decision Processes.* Academic Press. New York.

YUAN, Y. (1991): *"Criteria for evaluating fuzzy ranking methods"* a *Fuzzy Sets and Systems, 44, 139-157.*

YUE, Z., ZHONG, Q., GUANGYUAN, W. (1998): *Solving processes for a system of first-order fuzzy differential equations.* Fuzzy sets and systems 95, 333-347.

Z

ZADEH, L. A. (1965): *"Fuzzy sets"* a *Information and Control, Vol. 8, 338-353.*

ZADEH, L. A. (1968): *"Probability Measures of Fuzzy Events"* a *Journal Mathematical Analysis and Applications, 10, págs. 421-427.*

ZADEH, L. A. (1971): *"Similarity Relations and Fuzzy Orderings"* a *Information Sciences, 3, 177-200.*

ZADEH, L. A. (1978): *"Fuzzy sets as a basis for a Theory of Possibility"* a *Fuzzy Sets and Systems, 1, 3-28.*

ZADEH, L. A. (1978): *"PRUF-A Meaning Representation Language for Natural Languages"* a *International Journal Man-Machine Studies, 10, 395-460.*

ZADEH, L. A. (1979): *"A Theory of Approximate Reasoning"* a *Machine Intelligence, 9, 149-194.*

ZADEH, L. A. (1992): *"Representación del conocimiento en lógica borrosa"* a *Aplicaciones de la lógica borrosa, pàgs.51-73.* C.S.I.C. Madrid.

ZADEH, L. A. (1995): *Nacimiento y Evolución de la Lógica Borrosa, el Soft Computing y la Computación con Palabras: Un Punto de Vista Personal.*Text del discurs de recepció del Doctorat Honoris Causa per la Universitat de Oviedo.

ZADEH, L.A. (1972): *"A Fuzzy-Set-Theoretic Interpretation of Linguistic Hedges"* a *Journal of Cybernetics 2, 4-34.*

ZADEH, L.A. (1975): *"The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. Part 1"* a *Information Sciences, 8, 199-249.*

ZADEH, L.A. (1975): *"The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. Part 2"* a *Information Sciences, 8, 301-357.*

ZADEH, L.A. (1976): *"The concept of a linguistic variable and its applications to approximate reasoning. Part 3"* a *Information Sciences, 9, 43-80.*

ZIMMERMANN, H. J. (1994): *Fuzzy set theory and its applications.* Kluwer Academic Publishers. Boston.

ZIMMERMANN, H. J. (1995): *Fuzzy set theory and advanced mathematical applications.* Kluwer Academic Publishers. Boston.

ÍNDEX

O. INTRODUCCIÓ .... **VII**

1. PRÒLEG IX

2. ESTRUCTURA DE LA TESI XIII

3. SUMARI XV

I. FONAMENTS DE LA MATEMÀTICA BORROSA 1..

1. NOCIONS DE LÒGICA 1

1.1 LÒGICA BINÀRIA 2

1.1.1 Proposiciò lògica i predicat 2

1.1.2 Valuació d'una proposició lògica 2

1.1.3 Operacions amb proposicions lògiques 3

1.1.4 Principis de la lògica binària 7

1.1.5 Àlgebra de proposicions 8

1.1.6 Raonament lògic, premisses i conclusió 9

1.2 LÒGICA BORROSA 9

1.2.1 Proposicions vagues 9

1.2.2 Valuació d'una proposició vague 10

1.2.3 Normes triangulars 12

1.2.4 Conormes triangulars 16

1.2.5 Les negacions o complementacions 20

1.2.6 Valuacions en proposicions vagues 22

2. SUBCONJUNTS BORROSOS 25

2.1 SUBCONJUNTS BORROSOS 26

2.1.1 Principi de simultaneïtat gradual 26

2.1.2 Funció de pertinença 26

2.1.3 Generalitats sobre subc. borrosos 30

2.2 OPERACIONS AMB SUBC. BORROSOS 36

2.2.1 Intersecció de subc. borrosos 36

2.2.2 Unió de subc. borrosos 41

2.2.3 Complementari d'un subc. borrós 43

2.2.4 Intersecció, unió i compl. de Zadeh 44

2.3 REPRESENTACIÓ D'UN SUBC. BORRÓS
PER MITJÀ DELS SEUS α-TALLS 49

2.4 SUBCONJUNTS BORROSOS CONVEXES 53

2.5 PROPIETATS SEMÀNTIQUES DELS
SUBCONJUNTS BORROSOS 54

2.5.1 Translació 54

2.5.2 Compressió 54

2.5.3 Dilatació 55

2.6 DISTÀNCIA ENTRE SUBC. BORROSOS 57

2.6.1 Definició de distància 57

2.6.2 Diferents tipus de distància 57

2.6.3 Distàncies relatives 60

2.7 MESURES DE BORROSITAT O D'ENTROPIA 61

2.7.1 Definició d'entropia 61

2.7.2 Diferents classes d'entropia 62

2.8 PRINCIPI D'EXTENSIÓ 64

2.8.1 Extensió d'un subconjunt borrós 64

2.8.2 Casos particulars 65

2.8.3 Generalització del principi d'extensió......66

3. NÚMEROS BORROSOS...6 9

3.1 NÚMEROS BORROSOS EN R...7 0

3.1.1 Primeres definicions.......................................7 0

3.1.2 Teoremes dels α-talls....................................7 1

3.2 PRINCIPI D'EXTENSIÓ DE LES OPERACIONS 7 2

3.2.1 Operació monària...7 2

3.2.2 Operació binària...7 2

3.3 OPERACIONS AMB NÚMEROS BORROSOS.............7 3

3.3.1 Suma de números borrosos.........................7 3

3.3.2 Diferència de números borrosos................7 4

3.3.3 Producte de números borrosos..................7 6

3.3.4 Quocient de números borrosos...................7 7

3.3.5 Producte d'un escalar per un n. borrós..7 9

3.3.6 Màxim de números borrosos.......................8 0

3.3.7 Mínim de números borrosos.......................8 1

3.4 ARITMÈTICA DELS α-TALLS 8 1

3.4.1 Teoremes dels α-talls....................................8 1

3.4.2 Exemple d'operació binària.........................8 2

3.4.3 Corolari del Teorema 3.4..............................8 6

3.4.4 Aritmètica dels intervals de confiança...8 7

3.5 OPERACIONS EN FUNCIÓ DELS α-TALLS.............8 7

3.5.1 Suma de números borrosos.........................8 8

3.5.2 Diferència de números borrosos................8 8

3.5.3 Producte de números borrosos..................8 8

3.5.4 Quocient de números borrosos...................8 9

3.5.5 Producte d'un escalar per un n. borrós..9 0

3.5.6 Màxim de números borrosos....................... 91

3.5.7 Mínim de números borrosos....................... 91

3.6 NÚMEROS BORROSOS TRIANGULARS.................... 92

3.6.1 Número borrós triangular........................... 92

3.6.2 Suport i nucli d'un NBT................................ 92

3.6.3 α-talls d'un NBT.. 93

3.7 OPERACIONS AMB NBTS.................................... 94

3.7.1 Suma de NBTs.. 94

3.7.2 Diferència de NBTs.. 95

3.7.3 Producte de NBTs.. 96

3.7.4 Quocient de NBTs.. 99

3.7.5 Producte d'un n. real per un NBT........... 100

3.7.6 Màxim i mínim de NBTs............................ 102

3.8 NÚMEROS BORROSOS TRAPEZOÏDALS............. 102

3.8.1 Concepte de N. B. Trapezoïdal................. 102

3.8.2 Suport i nucli d'un N. B. Trapezoïdal..... 102

3.8.3 α-talls d'un N. B. Trapezoïdal.................. 103

3.8.4 Operacions amb N. B. Trapezoïdals........ 104

3.9 NÚMEROS BORROSOS L-R.................................... 104

3.9.1 Funció de referència.................................. 104

3.9.2 Número borrós de Dubois i Prade.......... 105

3.9.3 α-talls d'un número borrós L-R.............. 107

3.10 OPERACIONS AMB N. B. L-R................................ 108

3.10.1 Suma de N. B. L-R.. 108

3.10.2 Diferència de N. B. L-R.............................. 108

3.10.3 Producte de N. B. L-R................................ 109

3.10.4 Quocient de N. B. L-R................................ 109

3.10.5 Producte d'un real per un N. B. L-R....1 1 1

3.11 COMPARACIÓ DE NÚMEROS BORROSOS..........1 1 2

3.11.1 Interval esperat..1 1 3

3.11.2 Valor esperat..1 1 4

3.11.3 Centre de gravetat....................................1 1 4

3.11.4 Coeficient de variació..............................1 1 5

3.11.5 Distància a través dels α-talls...............1 1 6

3.12 RELACIONS DE PREFERÈNCIA ORDINÀRIA ...1 1 7

3.12.1 Comparació a partir de n. reals............1 1 7

3.12.3 Comparació a partir dels α-talls 1 1 8

3.13 RELACIONS DE PREFERÈNCIA BORROSA.........1 1 8

3.13.1 Relació de preferència de Yuan.............1 1 9

3.13.2 Relació de preferència de Jiménez.......1 2 0

3.14 APROCIMACIÓ DE NÚMEROS BORROSOS........1 2 1

3.14.1 Aproximació i error màxim....................1 2 1

3.14.2 Càlcul de l'error màxim..........................1 2 1

3.14.3 Aproximació del producte.......................1 2 2

3.14.4 Aproximació del quocient........................1 2 3

3.14.5 Aproximació amb un error prefixat....1 2 4

II. NOVES APORTACIONS A LA M.BORROSA1 3 1

4. EQUACIONS BORROSES..1 3 3

4.1 GENERALITATS 1 3 4

4.1.1 Equació borrosa..1 3 4

4.1.2 Solució d'una equació borrosa.................1 3 4

4.2 MÈTODE DE RESOLUCIÓ DE BUCKLEY I QU 135

4.3 RESOLUCIÓ DE L'EQ. BORROSA "SUMA" 140

4.3.1 Existència de la solució 141

4.3.2 Mètode aproximatiu 143

4.3.3 Mètode d'aproximació triangular 149

4.4 RESOLUCIÓ DE L'EQ. BORROSA "PRODUCTE" 154

4.4.1 Existència de la solució 154

4.4.2 Mètode aproximatiu 156

4.4.3 Mètode d'aproximació contínua 163

5. DERIVADES I EQ. DIFERENC. BORROSES 171

5.1 DERIVADA D'UNA FUNCIÓ BORROSA 172

5.1.1 Funció borrosa 172

5.1.2 Derivada d'una f. borrosa en un punt .. 173

5.1.3 Teoremes de derivació borrosa 175

5.2 EQ. DIFERENCIALS BORROSES TRIANGULARS . 182

5.2.1 Definició 182

5.2.2 Resolució d'eq. diferencials borroses triangulars de segon terme constant 182

5.2.3 Resolució d'eq. diferencials borroses triangulars lineals homogènies amb coeficients constants 185

5.2.4 Resolució d'eq. diferencials borroses triangulars lineals completes amb coeficients constants 202

III. APLICACIONS EN L'ÀMBIT ECONÒMIC..2 0 7

6. ANÀLISI DE L'EQUIL. PARCIAL DE MERCAT..2 0 9

6.1 MODEL ESTÀTIC LINEAL D'EQUILIBRI..............2 1 0

6.1.1 El model crisp estàtic..............2 1 0

6.1.2 Model borrós estàtic d'equilibri..............2 1 2

6.1.3 Model borrós en el cas de NBTs..............2 1 5

6.2 MODEL DINÀMIC LINEAL D'EQUILIBRI..............2 1 9

6.2.1 El model crisp dinàmic..............2 1 9

6.2.2 Model borrós dinàmic d'equilibri..............2 2 1

6.3 ANÀLISIS DE L'ESTABILITAT..............2 3 3

6.3.1 El model de la teranyina..............2 3 3

6.3.2 Estudi de la convergència..............2 3 4

6.3.3 Cas particular..............2 3 7

7. DUOPOLI; EQUILIBRI DE COURNOT-NASH.......2 4 1

7.1 EL MODEL DE COURNOT-NASH..............2 4 2

7.1.1 Formalització matemàtica..............2 4 2

7.1.2 Cas particular d'una funció lineal..............2 4 3

7.2 EQUILIBRI EN CONTEXT D'INCERTESA..............2 4 6

7.2.1 Formalització matemàtica..............2 4 6

7.2.2 Cas particular de funcions lineals..............2 5 0

8. OPTIMITZACIÓ DINÀMICA BORROSA..............2 6 7

8.1 OPTIMITZACIÓ DINÀMICA CLÀSSICA..............2 6 8

8.1.1 Concepte de funcional..............2 6 8

8.1.2 Equació d'Euler..............2 6 9

8.2 OPTIMITZACIÓ DINÀMICA BORROSA..............271
8.2.1 Optimització d'un funcional..............271
8.2.2 El model dinàmic d'Evans..............273
8.2.3 Solució de l'equació d'Euler..............274

IV. ANNEXOS..............285

A. CONJUNTS ORDINARIS..............287

A.1 GENERALITATS SOBRE C. ORDINARIS..............289
A.1.1 Definició de conjunt..............289
A.1.2 Conjunts buit i universal..............290
A.1.3 Operacions entre conjunts..............291
A.1.4 Propietats de les operacions..............292

A.2 RELACIONS ENTRE CONJUNTS..............294
A.2.1 Producte cartesià..............294
A.2.2 Relacions binàries..............295

A.3 APLICACIONS ENTRE CONJUNTS..............298
A.3.1 Concepte d'aplicació..............298
A.3.2 Antiimatge d'un element..............299
A.3.3 Tipus d'aplicacions..............300
A.3.4 Composició d'aplicacions..............300
A.3.5 Funció característica d'un conjunt..............301
A.3.6 Operació interna..............303

A.4 ESTRUCTURA DE RETICLE..............303
A.4.1 Reticle pel suprem i l'ínfim..............303
A.4.2 Reticles distributiu i complementari..............304
A.4.3 Reticle en sentit algebraic..............305
A.4.4 Exemples de reticles..............306

A.5 RETICLES DEL CONJUNT DE PROPOSICIONS......3 08

A.5.1 Relacions de desigualtat............................3 08

A.5.2 Proposicions lògicament equivalents....3 09

A.6 CONJUNTS CONVEXES..3 11

A.6.1 Concepte de conjunt convex.....................3 11

A.6.2 Exemples de conjunts convexos..............3 12

A.6.3 Propietats dels conjunts convexos.........3 13

B. EQ. DIFERÈNCIALS I EN DIF. FINITES 3 1 5

B.1 EQ. DIFERENCIALS DE PRIMER ORDRE.................3 17

B.1.1 Conceptes previs..3 17

B.1.2 Eq. diferencial de 1r ordre lineal............3 18

B.2 EQ. DIFERENCIALS LINEALS DE 2n ORDRE........3 22

B.2.1 Eq. diferencials de segon ordre...............3 22

B.2.2 Eq. diferencial lineals de 2n ordre.........3 23

B.2.3 Eq. dif. lineals homogènies.........................3 30

B.2.4 Solució de l'eq. lineal completa...............3 33

B.2.5 Càlcul d'una solució particular.................3 34

B.3 EQ. EN DIFERÈNCIES FINITES DE 1r ORDRE......3 41

B.3.1 Conceptes previs..3 41

B.3.2 Eq. en diferències de 1r ordre lineal.....3 42

B.3.3 Càlcul de la solució.....................................3 42

B.4 CÀLCUL DE VARIACIONS.......................................3 44

B.4.1 Optimització dinàmica.................................3 44

B.4.2 Problema fonamental....................................3 44

B.4.3 L'equació d'Euler..3 45

V. APÈNDIX **349**

CONCLUSIONS 351

BIBLIOGRAFIA 359

ÍNDEX 377