

## Réseau d'antennes à chevauchement d'éléments pour la détection passive cohérente d'échos radar à faible puissance

Louis-Philippe Gill, Dominic Grenier, Jean-Yves Chouinard

Laboratoire de Radio-communication et de Traitement du Signal (LRTS)  
Université Laval  
Québec, P.Q.  
Canada, G1K 7P4  
{gill,dgrenier,chouinar}@gel.ulaval.ca

---

**RÉSUMÉ.** Cet article expose des solutions pour pallier les deux difficultés majeures qu'engendre l'emploi d'un système de détection passive cohérente ; soit la forte interférence causée par le signal direct, annulée par la projection dans un sous-espace complémentaire à celui-ci, et la faiblesse de l'écho de la cible, solutionnée par l'utilisation d'un réseau d'antennes à chevauchement d'éléments formant des sous-réseaux. Les expressions mathématiques de la matrice de covariance du signal et du bruit sont présentées pour expliquer le comportement de la sortie du filtre adapté selon le nombre de sous-réseaux employé. À partir de l'expression analytique de la valeur propre, on dérive une expression analytique permettant d'établir le nombre de sous-réseaux à employer en fonction de l'orientation de la cible et du nombre d'éléments d'antenne disponibles afin d'optimiser la sortie du filtre adapté.

**ABSTRACT.** This paper expose solutions to mitigate the two major difficulties caused by the use of a passive coherent location system, namely the strong interference from the direct signal, canceled by the projection in a subspace complementary to the direct signal subspace, and the weakness of the target echo, resolve by using an overlapped antenna array made up of subarrays. The mathematical expressions of the signal covariance matrix and the noise covariance matrix are presented to describe the behavior of the matched filter output according to the number of subarrays employed. From the analytical expression of the eigenvalues, an equation is presented that determine the optimal number of subarrays to be used according to orientation of the target and to the number of antennae elements available to optimize the matched filter output.

**MOTS-CLÉS :** réseau à chevauchement d'éléments, détection passive cohérente, traitement de signaux radar

**KEYWORDS:** overlapped array, passive coherent location, radar signal processing

---

## Extended Abstract

Among the most promising techniques for removing the direct path signal acting as a source of major interference, projection in an orthogonal subspace (Guner *et al.*, 2003, Colone *et al.*, 2006) allows for the separation of multiple components of a spatially directed signal without attenuation. Also it does not require the a priori knowledge of the direct signal characteristics to be subtracted from the received composite signal. Using the covariance matrix built with received signals from  $P$  array antenna elements, it is possible to obtain  $P$  orthogonal eigenvectors. Since the direct path signal is by far the largest component of the received signal, and since the echo returns, with their associated delays and Doppler shifts, are non-correlated with the direct path signal, it is reasonable to assume that the direct path signal is almost exclusively contained in the subspace of the first eigenvector. Then the direct path signal can be isolated from the remaining of the received signal by forming a complementary subspace defined by the eigenvectors associated with the  $P - 1$  lowest eigenvalues and thus construct a projection matrix.

As the echo-to-noise ratio from a target is very low, a directional gain is needed to increase the echo power. However, in order to isolate the direct path signal within a subspace, one must ensure a sufficient resolution of the covariance matrix. For this purpose, an overlapped antenna array from which  $J$  subarrays are created by summing the outputs of  $L$  antenna elements out of all  $P$  (where  $P = J + L - 1$ ) elements is formed.

A series of simulations were conducted to determine the detection capability of the proposed methods. It was thus possible to assess the behavior of a matched filter as a function of the number of subarrays used ( $J$ ), in the presence of white noise. For this, it was assumed that the direct signal was emitted from a geostationary satellite and that a target was located at 10 kms from the receiver (passive detector). The receiver noise power was set to according to typical components offered by manufacturers.

It is observed that for a small number of subarrays, the direct path signal is always present, despite being projected into an orthogonal subspace. This is because the covariance matrix resolution is not sufficient to properly separate the direct path signal from the other received signal components. Also, for specific values of the number of subarrays, there are null points where the output of the matched filter decreases dramatically. At these null points, the direct path signal interferes with the echo thus preventing correct target detection. Finally, the simulations allows for the determination of a specific number of subarrays that will optimize the passive detection process.

The analysis of the covariance matrix, formed from the  $J$  subarrays outputs, explains the origin of null points. In an environment without noise, the first eigenvalue is linked to the direct path signal while the second eigenvalue is linked to the target echo since the direct path signal has a higher power. It is possible to demonstrate analytically that similar relationships exist between the direct path signal power at the subarray output ( $\alpha$ ) and the first eigenvalue, and also between the target echo power at the subarray output ( $\gamma$ ) and the second eigenvalue. In this paper, we show that parameter  $\alpha$  varies sinusoidally with  $J$ , unlike  $\gamma$ , when the array antenna is aligned to the target. Thus, the value of  $\alpha$  can be set to zero for specific

values of  $J$ . In this case,  $\alpha$  is smaller than  $\gamma$  : this indicates that the radar target echo is not linked anymore to the second eigenvalue, but rather with the first eigenvalue. This means that the echo is no longer projected into a subspace orthogonal to the first eigenvalue subspace during the eigendecomposition process. It is thus possible to determine analytically, using the angular difference between the source of the direct path signal and the observation angle ( $\Omega_R$ ), the values of  $J$  for which one may encounter a null.

As the second eigenvalue have the same behavior as the matched filter output, it is possible to determine the number of subarrays needed to achieve an optimal matched filter response, by analysis of the behavior of the second eigenvalue (as a function of  $\Omega_R$  and  $J$ ). Since the expression of the optimal value of  $J$  is difficult to derive analytically from the second eigenvalue, a polynomial approximation of the surface, obtained from the analytical expression of the second eigenvalue, was used instead. From this approximation, an expression is given which determines the optimal number of subarrays as a function of the observation angle  $\Omega_R$ , and that provides the optimum response of the matched filter.

In conclusion, we derived the analytic expression of the signal and noise covariance matrices for the case of overlapped array antenna. We then show that the noise is now correlated. Also, we obtained in an analytic fashion, the optimal number of subarrays needed to get directivity gain and an efficient separation of reflected signal from direct path signal.

## 1. Introduction

La détection passive cohérente (PCL<sup>1</sup>) est un principe de détection de cibles radar utilisant une source non associée au récepteur. Qu'il s'agisse de sources coopératives (un récepteur radar utilisant le signal d'un système monostatique pour appuyer la surveillance) ou non coopératives (une source dont la fonction n'est pas la détection, mais dont l'emploi peut y être dédié comme les signaux de télévision ou de radio commerciale), le système radar PCL exclut la transmission d'un signal et mise plutôt sur l'exploitation de signaux déjà présents. Son fonctionnement se base sur la réception du signal direct et de l'écho radar, captés par deux antennes différentes, dans le but d'établir une cohérence et de pouvoir ainsi extraire l'information sur une cible potentielle.

L'emploi de la détection passive cohérente présente généralement deux difficultés majeures : l'interférence du signal en trajet direct et la faiblesse de l'écho radar. Le premier inconvénient est l'apanage de tout système passif puisqu'en mode bistatique, le signal provenant de l'émetteur est inévitablement le plus puissant et sa présence, lorsqu'il est continu, cause invariablement de l'interférence. De puissance plusieurs fois supérieure à celle d'un possible écho, le trajet direct noie littéralement ce dernier rendant la détection impossible. Le second inconvénient, celui qu'engendre la faiblesse de la puissance de l'écho radar est aussi répandu et très problématique, surtout pour des sources non coopératives situées à des distances importantes telles que les satellites. Il est donc nécessaire, pour pallier ces deux principales difficultés,

---

1. En anglais : Passive Coherent Location.

de combiner une technique de suppression du signal en trajet direct à une autre visant l'augmentation du gain à la réception d'un écho radar venant d'une cible à détecter. Comme l'utilisation d'une antenne très directive est à éviter puisque la dimension du lobe principal ne peut permettre un balayage rapide de l'espace et que le rapport signal direct à écho, dont la valeur peut atteindre 100 dB dans le cas d'un système PCL (Saini *et al.*, 2003), demande l'application d'une technique de suppression de l'interférence plus efficace que la diminution de lobes secondaires par traitement d'antennes, des méthodes alternatives doivent être envisagées.

Dans le présent article, outre le traitement en analyse propre qui est utilisé pour la suppression du signal en trajet direct, nous posons principalement l'idée d'utiliser un réseau d'antennes à chevauchement d'éléments comme moyen d'effectuer un gain directif visant à augmenter la capacité de détection d'une cible. Nous présenterons tout d'abord la généralité du système de détection élaboré et le traitement en analyse propre effectuant la suppression du signal en trajet direct. Nous présenterons ensuite le concept de réseau d'antennes à chevauchement d'éléments suivi de résultats simulés de la sortie d'un filtre adapté au signal en trajet direct et à l'écho radar. Nous effectuerons l'analyse mathématique des matrices de covariance du signal et du bruit obtenues à partir desquelles nous expliquerons les différents comportements du procédé selon certaines caractéristiques de sa structure. Nous en déduirons les valeurs (nombre d'éléments de l'antenne et nombre de sous-réseaux employés) qui assurent une optimisation au niveau du rapport signal à bruit. Finalement, nous poserons un paramètre optimal assurant une réponse maximale à la détection d'une cible.

## 2. Généralités du système de détection radar

La figure 1 présente le schéma simple d'un système de détection passive cohérente.

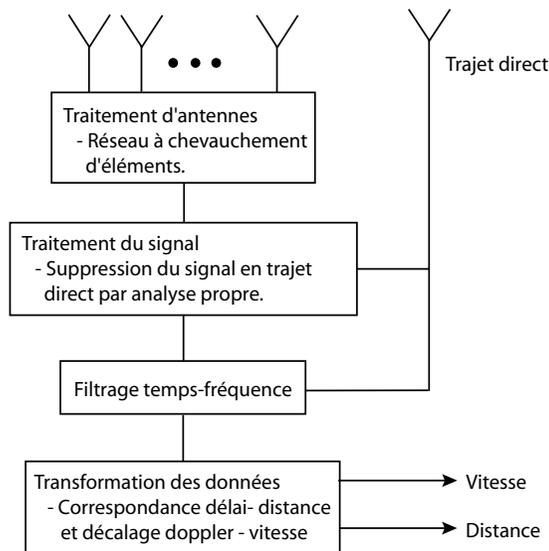


Figure 1. Schéma du système de détection passive cohérente

### 2.1. Description du système de détection passive

Le signal est d'abord capté par une antenne-réseau. Un traitement à la sortie des éléments de l'antenne est ensuite effectué afin d'accentuer le gain de réception d'un écho potentiel. Par la suite, un traitement sur les signaux reçus supprime le trajet direct. Le signal est finalement soumis au filtre temps-fréquence qui mesure sa corrélation avec le signal en trajet direct capté par l'antenne indépendante dirigée vers la source d'opportunité, ceci dans le but d'extraire les paramètres utiles à la détection : la position de la cible et sa vitesse.

Ainsi, par l'emploi d'une antenne-réseau alignée vers la cible, il est possible d'obtenir un gain par la sommation des signaux présents sur chaque élément. Ce gain est proportionnel au nombre d'éléments sommé. Par contre, puisqu'il est nécessaire de conserver une résolution suffisante au traitement en analyse propre, ce gain se trouve ainsi limité. Il est donc primordial de faire cohabiter ces deux principes de manière optimale.

Il est à noter que le traitement du signal visant la suppression d'autres types d'interférences, comme le multitrajet ou le fouillis radar, ainsi que le processus permettant la correspondance des sorties du filtre temps-fréquence avec les paramètres d'une cible sortent des limites de cet article.

### 2.2. Suppression du trajet direct par le traitement en analyse propre

Plusieurs techniques existent afin de pallier les problèmes qu'engendre l'interférence du signal direct. Que ce soit par l'emploi d'un filtre adaptatif (Howland *et al.*, 2005), par rétroaction et soustraction (Saini *et al.*, 2003, Kulpa *et al.*, 2005), ou par l'application de l'algorithme CLEAN<sup>2</sup> (Kubica *et al.*, 2006), la difficulté principale réside dans l'évaluation de l'amplitude du signal à soustraire dans ce qui est capté.

Parmi les techniques existantes permettant de supprimer le signal direct agissant comme source d'interférence majeure, la méthode par projection dans un sous-espace orthogonal (Guner *et al.*, 2003, Colone *et al.*, 2006) offre l'avantage de pouvoir séparer plusieurs composantes d'un signal sans atténuation spatialement dirigée ou sans l'obligation de déterminer les caractéristiques du signal direct à soustraire au signal reçu. Cette méthode exploite les notions d'espace à partir de la matrice de covariance ( $P \times P$ ) des signaux reçus  $\mathbf{R}_{xx} = E\{\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^*(t)\} \approx \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \mathbf{x}(t_k)\mathbf{x}^*(t_k)$  où  $\mathbf{x}(t_k)$  représente une épreuve, c'est-à-dire le vecteur colonne ( $P \times 1$ ) des signaux échantillonnés au temps  $t_k$  à chacun des  $P$  éléments de l'antenne-réseau, tandis que  $\mathbf{x}^*(t_k)$  est le vecteur transposé conjugué d'une épreuve. Une estimation de  $\mathbf{R}_{xx}$  s'obtient à partir de  $K$  épreuves.

La décomposition en système propre de la matrice  $\mathbf{R}_{xx}$  s'écrit ainsi :

---

2. L'algorithme CLEAN est utilisé en astronomie pour extraire d'images télescopiques la présence de sources lumineuses masquées par d'autres d'intensité plus importante.

$$\mathbf{R}_{xx} = \sum_{p=1}^P \lambda_p \mathbf{v}_p \mathbf{v}_p^* = \mathbf{V} \Lambda \mathbf{V}^H \quad [1]$$

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_P] \quad [2]$$

$$\Lambda = \text{diag} \{ \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_P \} \quad [3]$$

où  $\mathbf{v}_p$  est le  $p^{\text{ème}}$  vecteur propre associé à la valeur propre  $\lambda_p$  ;  $\mathbf{V}$  est formée de la juxtaposition de tous les vecteurs propres,  $\mathbf{V}^H$  est la matrice transposée conjuguée et  $\Lambda$  est une matrice diagonale formée des valeurs propres. Il convient d'ordonner les vecteurs et valeurs propres de manière à ce que  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \dots \geq \lambda_P$ .

En raison de la structure hermitienne de  $\mathbf{R}_{xx}$  (c-à-d  $\mathbf{R}_{xx} = \mathbf{R}_{xx}^H$ ), les valeurs propres  $\lambda_p$  sont réelles et semi-positives. De plus, les vecteurs propres  $\mathbf{v}_p$  sont orthogonaux entre eux. Ainsi, les vecteurs propres  $\mathbf{v}_p$  forment une base de l'espace entier de dimension  $P$ . Si les signaux captés ne proviennent que de  $N < P$  sources  $s_n(t)$  indépendantes ( $E\{s_i(t)s_j(t)\} = 0$  pour  $i \neq j$ ) alors l'espace des signaux (appelé sous-espace signal) est de dimension  $N$  orthogonal au sous-espace complémentaire (appelé sous-espace bruit) de dimension  $P - N$ . Par exemple, la projection du signal capté provenant d'une source unique dans le sous-espace bruit est nulle. La projection du vecteur  $\mathbf{x}(t_k)$  dans le sous-espace bruit forme un nouveau signal  $\mathbf{x}_n(t_k)$  de dimension  $((P - N) \times 1)$  compatible à celle du nouvel espace (l'espace complémentaire). Elle s'exprime mathématiquement comme :

$$\mathbf{x}_n(t_k) = \mathbf{E}_n^H \mathbf{x}(t_k) \quad [4]$$

$$\mathbf{E}_n = [\mathbf{v}_{N+1} \ \mathbf{v}_{N+2} \ \dots \ \mathbf{v}_P] \quad [5]$$

où  $\mathbf{E}_n$  est la matrice  $(P \times (P - N))$  de projection qui comprend uniquement les vecteurs propres de la base du sous-espace bruit.

En supposant, ce qui est d'ailleurs le cas sans problème, que le signal du trajet direct  $s_d(t)$  représente de loin la principale composante du signal reçu ; que les échos  $s_{ek}(t) = \delta s_d(t - \tau_k) e^{j\omega_{dk}(t - \tau_k)}$ , où  $\delta$  est une constante de proportionnalité, ont suffisamment de retard  $\tau_k$  et présentent un décalage Doppler  $\omega_{dk}$  tel qu'ils sont pratiquement décorrélés du signal direct ( $E\{s_d(t)s_{ek}(t)\} \approx 0$ ), alors on peut prétendre que le trajet direct est contenu presque exclusivement dans le sous-espace défini par le premier vecteur propre (celui associé à la plus grande valeur propre). Cette affirmation est vérifiable par l'étude de la fonction d'ambiguïté radar du signal employé. Il est alors possible d'isoler le trajet direct du reste du signal capté en excluant la base qui lui est reliée afin de constituer un sous-espace complémentaire qui inclut les signaux provenant des échos, dit sous-espace échos-bruit, défini par les vecteurs propres associés aux  $P - 1$  valeurs propres les moins élevées car les échos ont une puissance beaucoup plus faible que le signal direct. La matrice de projection du sous-espace échos-bruit est :

$$\mathbf{E}_{en} = [\mathbf{v}_2 \ \mathbf{v}_3 \ \dots \ \mathbf{v}_P] \quad [6]$$

Ainsi, le calcul de la norme de la projection du signal reçu sur chacun des  $P - 1$  vecteurs propres formant  $\mathbf{E}_{en}$  annule la présence du signal direct dans le nouvel espace réduit à la dimension  $P - 1$ . Soumis à un filtre temps-fréquence qui mesure la corrélation entre le signal capté et des copies décalées temporellement et fréquentiellement du signal direct, ce nouveau signal dans le nouvel espace incluant maintenant seulement l'écho permet la détection d'échos radars qui, autrement, passeraient inaperçus, noyés dans le signal direct nettement plus puissant.

Par contre, cette manière de procéder exige des ressources informatiques énormes (le calcul de la matrice de projection  $\mathbf{E}_{en}$  nécessite une décomposition propre d'une matrice de grande dimension ; lorsque le gain directif nécessaire demande un grand nombre d'éléments,  $P = 100$  éléments dans le cas considéré, le coût de calcul devient important) et un rapport signal à bruit minimal. Or, le rapport signal à bruit des échos  $SNR_e$  demeure très faible, bien en deça du seuil. Il faut donc trouver une manière d'augmenter le  $SNR_e$  par un gain d'antenne, tout en diminuant la dimension de  $\mathbf{R}_{xx}$  mais en conservant une longueur totale du réseau assez grande (c'est cette longueur qui détermine la résolution de la localisation). C'est pourquoi, nous suggérons une technique utilisant la construction de sous-réseaux par chevauchement d'éléments.

### 3. Étude du réseau d'antennes à chevauchement d'éléments

Le réseau d'antennes à chevauchement d'éléments est constitué de  $J$  sous-réseaux qui, eux-mêmes, sont formés de l'addition de  $L$  éléments du réseau principal comprenant  $P$  éléments. Les  $L$  éléments d'un sous-réseau forment une antenne-réseau qui pointe dans une direction spécifique par formation de voie. La figure 2 montre l'arrangement et l'équation (7) relie les paramètres.

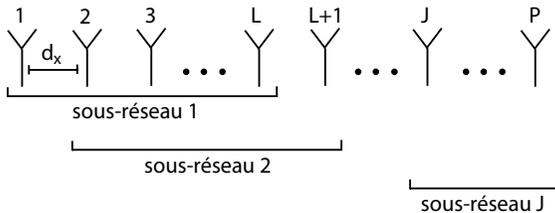


Figure 2. Structure d'un réseau d'antennes à chevauchement d'éléments

$$P = J + L - 1 \quad [7]$$

La sortie  $x_{SR_k}(t)$  du  $k^{\text{ème}}$  sous-réseau est formée de l'addition de tous ses éléments afin d'obtenir un gain directif. Nous définissons la sortie du  $k^{\text{ème}}$  sous-réseau comme :

$$x_{SR_k}(t) = \sum_{n=k}^{L+k-1} x_n(t) \quad \text{pour } k \in [1, J] \quad [8]$$

Le réseau d'antennes à chevauchement d'éléments sert principalement au lissage spatial afin de décorrélérer plusieurs sources dans la formation de voie (Godara, 1990, Takao *et al.*, 1986, Shan *et al.*, 1985, Reddy *et al.*, 1987, Raghunath *et al.*, 1992) ou pour diminuer le coût de calcul en estimant la matrice de covariance à partir de la sortie de sous-réseaux au lieu de la sortie des éléments de l'antenne principale (Wang *et al.*, 2002). Pour les présents besoins, le réseau d'antennes à chevauchement d'éléments est utilisé comme technique combinant à la fois le gain directif par l'addition de  $L$  éléments et la diversité spatiale par l'estimation de la matrice de covariance à partir de la sortie des  $J$  sous-réseaux.

#### 4. Résultats simulés de la sortie d'un filtre adapté au signal direct et à l'écho

Afin de déterminer la capacité de détection selon la configuration des sous-réseaux, nous effectuons une simulation reproduisant la réception d'un signal satellite continu, dont l'angle d'élévation  $\theta_d$  est de  $63^\circ$  et l'angle azimutal  $\phi_d$  est de  $0^\circ$ , avec un seul écho radar généré par une cible dont les caractéristiques sont présentées au tableau 1 ; le tout en présence d'un bruit blanc gaussien. Le rapport écho sur trajet direct est de  $-71$  dB tandis que le rapport écho à bruit est de  $-12.2$  dB. Ces valeurs sont calculées en considérant un satellite géostationnaire à 38157.28 km du récepteur fournissant une puissance effective isotrope de 68.5 dBW, en obtenant un temps d'intégration du signal de 1.8 ms et en employant des composantes pour le récepteur conformes à celles offertes par les manufacturiers. Une antenne-réseau de 100 éléments isotropes est considérée pour la réception des signaux. La figure 3 présente simultanément, par une simulation Monte Carlo de 1000 itérations dans laquelle le bruit blanc gaussien et la séquence de symboles QPSK caractérisant le signal émis sont les variables aléatoires, l'amplitude de la sortie du filtre adapté à l'écho radar et au signal direct en fonction du nombre de sous-réseaux employé à la réception.

Il est possible de constater que :

1) Pour un nombre peu élevé de sous-réseaux ( $J < 18$ ), le signal direct est toujours présent et il interfère avec l'écho malgré l'emploi de la méthode des sous-espaces. La résolution fournie par le traitement du signal à partir de la matrice de covariance du signal reçu est insuffisante pour permettre de séparer le signal direct du reste.

2) Pour certaines valeurs du nombre de sous-réseaux ( $J = 13, 35, 57$  et  $79$ ), il existe des points nuls pour lesquels l'amplitude de la sortie du filtre adapté à l'écho radar diminue radicalement et, comme pour le cas d'un nombre peu élevé de sous-réseaux, le signal direct interfère avec celui de la cible, empêchant la détection de celle-ci.

Tableau 1. Caractéristiques de la cible en simulation

Surface efficace radar ( $\sigma$ )	100 m <sup>2</sup>
Distance du récepteur ( $R_R$ )	10 km
Vitesse projetée sur la bissectrice de l'angle bistatique ( $v_{\text{cible}} \cos \delta$ )	500 km/h
Angle d'élévation $\theta_d$	$55^\circ$
Angle azimutal $\phi_d$	$20^\circ$

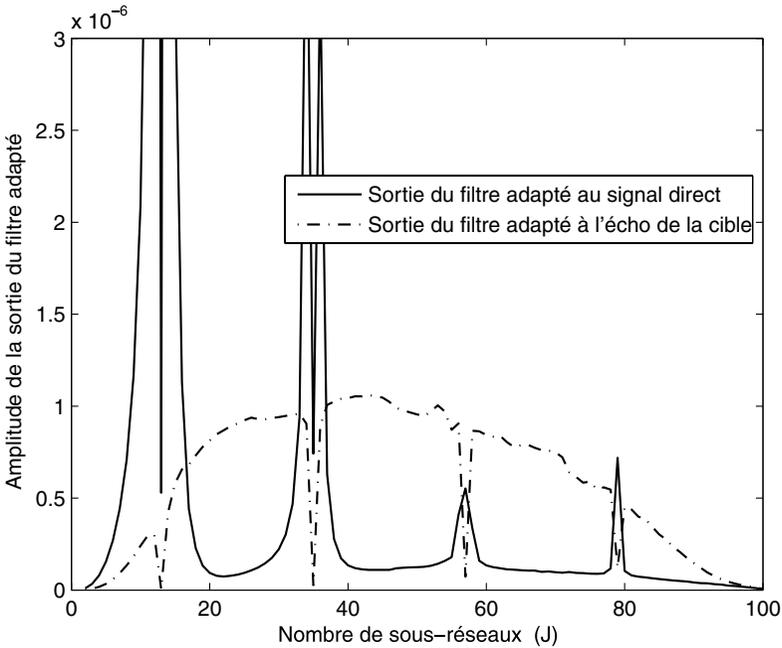


Figure 3. Amplitude de la sortie du filtre adapté en fonction du nombre de sous-réseaux employé

3) Il existe un nombre précis de sous-réseaux à employer permettant de maximiser l'amplitude de la sortie du filtre adapté à l'écho radar et ainsi d'optimiser le processus de détection de la cible ( $J = 38$ ).

Puisque le signal soumis au filtre adapté est la projection du signal reçu dans le sous-espace échos-bruit formé comme à l'équation (6), il est pertinent d'observer la variation des valeurs propres en fonction du nombre de sous-réseaux ; plus particulièrement les variations de la seconde valeur propre (en importance) en fonction du nombre de sous-réseaux (voir la figure 4). En effet, le signal de l'écho, lorsque sa puissance en permet la détection suite au gain directif produit par les  $J$  sous-réseaux, se retrouve principalement dans le sous-espace du second vecteur propre.

Il est possible de remarquer sur la figure 4 que les valeurs du nombre de sous-réseaux liées aux points nuls de l'amplitude de la sortie du filtre adapté à l'écho radar correspondent à celles liées aux points nuls de la seconde valeur propre et que les formes des deux courbes, à quelques variations près, concordent entre elles. Ainsi, l'amplitude de la sortie du filtre adapté à l'écho est directement liée à la seconde valeur propre. C'est donc par l'étude de la seconde valeur propre de la matrice de covariance qu'il est envisageable d'expliquer la présence des points nuls et de déterminer le nombre optimal de sous-réseaux à employer. Il est toutefois à noter que ceci n'est valable que pour la présence d'un seul écho suffisamment décorrélié du signal direct.

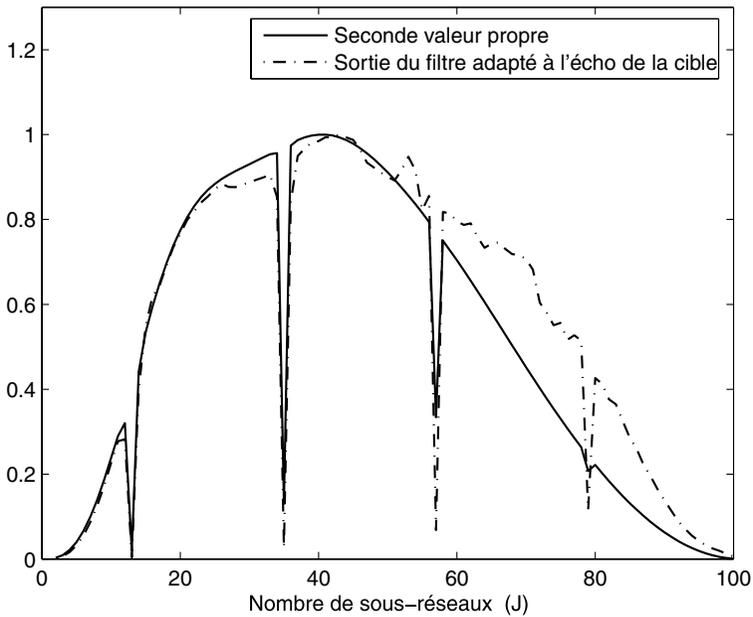


Figure 4. Seconde valeur propre et amplitude de la sortie du filtre adapté à l'écho radar en fonction du nombre de sous-réseaux employé

## 5. Analyse mathématique de la matrice de covariance des signaux et du bruit

Suite aux observations apportées sur le comportement de la seconde valeur propre en fonction du nombre de sous-réseaux, principalement la présence de valeurs nulles qui empêchent la détection, une analyse mathématique des matrices de covariance (signal et bruit) est présentée.

### 5.1. Matrice de covariance des signaux

Soit  $\mathbf{x}(t)$  le vecteur colonne du signal reçu à chaque élément du réseau sans bruit :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}s(t) \quad [9]$$

où  $s(t)$  est le vecteur des signaux reçus (sources) et  $\mathbf{A}$  est la matrice des vecteurs d'orientation liés à chaque source. En présence du signal direct  $s_d(t)$  et d'une seule réflexion  $s_e(t)$  sans bruit (voir la figure 5), l'équation (9) devient :

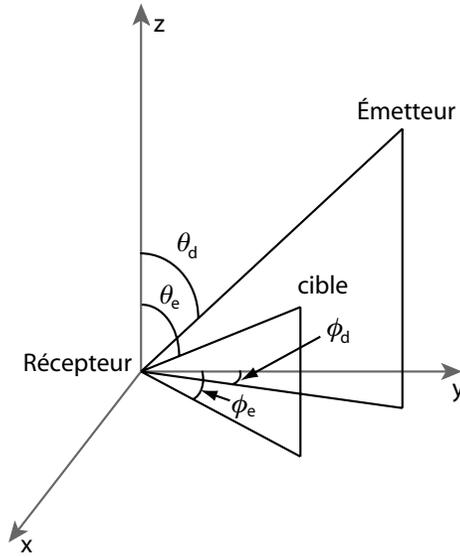


Figure 5. Géométrie du cas étudié

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_P(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^{j\beta d_x \cos \phi_d \sin \theta_d} & e^{j\beta d_x \cos \phi_e \sin \theta_e} \\ e^{j2\beta d_x \cos \phi_d \sin \theta_d} & e^{j2\beta d_x \cos \phi_e \sin \theta_e} \\ \vdots & \vdots \\ e^{j(P-1)\beta d_x \cos \phi_d \sin \theta_d} & e^{j(P-1)\beta d_x \cos \phi_e \sin \theta_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_d(t) \\ s_e(t) \end{bmatrix} \quad [10]$$

où  $\beta = 2\pi/\lambda$  est la constante de phase,  $\lambda$  est la longueur d'onde,  $d_x$  la distance entre deux éléments du réseau d'antennes,  $(\phi_d, \theta_d)$  l'orientation du signal direct et  $(\phi_e, \theta_e)$  l'orientation de l'écho. Partant de l'équation (8), en utilisant l'équation (10) et en posant que :

$$\Omega_d = \beta d_x \cos \phi_d \sin \theta_d \quad [11]$$

$$\Omega_e = \beta d_x \cos \phi_e \sin \theta_e \quad [12]$$

la sortie du  $k^{\text{ème}}$  sous-réseau donne :

$$\begin{aligned}
 x_{SR_k}(t) &= s_d(t)e^{j(k-1)\Omega_d} + s_e(t)e^{j(k-1)\Omega_e} \\
 &\quad + s_d(t)e^{j(k)\Omega_d} + s_e(t)e^{j(k)\Omega_e} \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + s_d(t)e^{j(L+k-2)\Omega_d} + s_e(t)e^{j(L+k-2)\Omega_e}.
 \end{aligned}
 \tag{13}$$

Chacun des  $J$  sous-réseaux de  $L$  éléments est électroniquement orienté vers la cible. L'équation (8) devient alors :

$$\begin{aligned}
 x_{SR_k \text{ orient.}}(t) &= \sum_{n=k}^{L+k-1} x_n(t) e^{-j(n-1)\Omega_e} \\
 &= x_k(t)e^{-j(k-1)\Omega_e} + x_{k+1}(t)e^{-j(k)\Omega_e} + \dots \\
 &\quad + x_{L+k-1}(t)e^{-j(L+k-2)\Omega_e}.
 \end{aligned}
 \tag{14}$$

Les valeurs de l'équation (10) mises dans (14) donnent :

$$\begin{aligned}
 x_{SR_k \text{ orient.}}(t) &= s_d(t)e^{j(k-1)(\Omega_d - \Omega_e)} + s_e(t) \\
 &\quad + s_d(t)e^{j(k)(\Omega_d - \Omega_e)} + s_e(t) \\
 &\quad + \dots \\
 &\quad + s_d(t)e^{j(L+k-2)(\Omega_d - \Omega_e)} + s_e(t).
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

En mettant les termes  $s_d(t)$  et  $e^{j(k-1)\Omega_R}$  en facteur et en posant :

$$\Omega_R = (\Omega_d - \Omega_e), \tag{16}$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned}
 x_{SR_k \text{ orient.}}(t) &= s_d(t)e^{j(k-1)\Omega_R} [1 + e^{j\Omega_R} + \dots + e^{j(L-1)\Omega_R}] \\
 &\quad + L \cdot s_e(t).
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Puisque le développement en série :

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{N-1} = \frac{1 - a^N}{1 - a}, \tag{18}$$

il est possible de réécrire l'équation (17) de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 x_{SR_k \text{ orient.}}(t) &= s_d(t)e^{j(k-1)\Omega_R} \left[ \frac{1 - e^{jL\Omega_R}}{1 - e^{j\Omega_R}} \right] \\
 &\quad + L \cdot s_e(t).
 \end{aligned}
 \tag{19}$$

Tout est en place pour obtenir l'expression analytique de la matrice de covariance  $\mathbf{R}_{x_t x_t}$ . Le développement se retrouve à l'annexe A.

Ainsi, nous trouvons :

$$\mathbf{R}_{x_t x_t} = \sigma_d^2 \left( \frac{\sin^2 \left( \frac{L\Omega_R}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)} \right) \cdot \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\Omega_R} & \dots & e^{-j(J-1)\Omega_R} \\ e^{j\Omega_R} & 1 & \dots & e^{-j(J-2)\Omega_R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(J-1)\Omega_R} & e^{j(J-2)\Omega_R} & \dots & 1 \end{bmatrix} \quad [20]$$

$$+ \sigma_e^2 \begin{bmatrix} L^2 & L^2 & \dots & L^2 \\ L^2 & L^2 & \dots & L^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L^2 & L^2 & \dots & L^2 \end{bmatrix}.$$

Pour simplifier davantage l'expression, nous posons que :

$$\alpha = \sigma_d^2 \left( \frac{\sin^2 \left( \frac{L\Omega_R}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)} \right) \quad [21]$$

$$\gamma = \sigma_e^2 L^2, \quad [22]$$

pour finalement obtenir la matrice de covariance  $\mathbf{R}_{x_t x_t}$  construite à partir des signaux reçu au temps  $t$  :

$$\mathbf{R}_{x_t x_t} = \begin{bmatrix} \alpha + \gamma & \alpha e^{-j\Omega_R} + \gamma & \dots & \alpha e^{-j(J-1)\Omega_R} + \gamma \\ \alpha e^{j\Omega_R} + \gamma & \alpha + \gamma & \dots & \alpha e^{-j(J-2)\Omega_R} + \gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha e^{j(J-1)\Omega_R} + \gamma & \alpha e^{j(J-2)\Omega_R} + \gamma & \dots & \alpha + \gamma \end{bmatrix}. \quad [23]$$

L'équation (23) exprime la matrice de covariance des signaux reçus sur le réseau d'antennes à chevauchement d'éléments. Elle possède bien une symétrie hermitienne, mais elle est, en plus, du type Toeplitz (MathWorld, n.d.). Il est aussi possible de constater, à partir des équations (21) et (22), que la puissance du signal direct et la puissance de l'écho à la sortie d'un sous-réseau correspondent respectivement à  $\alpha$  et à  $\gamma$ .

**5.2. Matrice de covariance du bruit**

Dans le cas du réseau d’antennes à chevauchement d’éléments, la détermination de la matrice de covariance du bruit est telle que

$$\mathbf{R}_{nn} \neq \sigma_n^2 \mathbf{I}$$

où  $\sigma_n^2$  est la puissance de bruit liée au récepteur à chaque élément du réseau principal d’antennes. Le traitement en réseau d’antennes à chevauchement d’éléments produit l’intégration de signaux issus des  $L$  éléments pour un sous-réseau donné. Parmi les  $L$  signaux sommés du sous-réseau adjacent, il y a  $L - 1$  signaux identiques au sous-réseau précédent. C’est donc dire qu’une fraction de l’ensemble des signaux, et donc du bruit, se répète d’un sous-réseau à l’autre. Il est alors inexact de prétendre que le bruit est indépendant pour chaque sous-réseau.

L’annexe B présente le développement menant à l’expression analytique de la matrice de covariance du bruit  $\mathbf{R}_{nn}$ . Ainsi, nous trouvons :

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{nn} &= \sigma_n^2 \begin{bmatrix} L & L-1 & \dots & L-(J-1) \\ L-1 & L & \dots & L-J \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L-(J-1) & L-J & \dots & L \end{bmatrix} \\ &\qquad\qquad\qquad \text{pour } J < \frac{P}{2} + 1 \\ &= \sigma_n^2 \begin{bmatrix} L & L-1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L-1 & L & \dots & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & L & L-1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & L-1 & L & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & \dots & L \end{bmatrix} \qquad [24] \\ &\qquad\qquad\qquad \text{ailleurs.} \end{aligned}$$

La relation (24) informe sur la corrélation du bruit et de son impact variable sur chacune des valeurs propres.

## 6. Présence des points nuls

La figure 4 montre que la seconde valeur propre devient nulle pour certaines valeurs du nombre de sous-réseaux employé. Comme le comportement de cette valeur propre est directement lié à la caractérisation de la matrice de covariance, l'explication de la présence des points nuls se retrouve à l'équation (23). De manière générale dans un environnement sans bruit, la première valeur propre est liée au signal direct tandis que la seconde est liée à l'écho par le fait que le signal direct possède une puissance supérieure à l'écho. Par les équations (21) et (22), nous posons un lien direct entre la puissance du signal direct à la sortie du sous-réseau et  $\alpha$  ainsi qu'entre la puissance de l'écho à la sortie du sous-réseau et  $\gamma$  ; ces mêmes valeurs de puissance étant, par principe, reliées respectivement à la première et la seconde valeur propre. Comme  $\alpha$  varie de manière sinusoïdale, contrairement à  $\gamma$  lorsque le réseau est aligné vers la cible, sa valeur peut être nulle pour certaines valeurs du nombre de sous-réseaux. Dans de pareils cas,  $\alpha$  devient inférieur à  $\gamma$  ; c'est-à-dire que l'écho radar, de par sa relation avec  $\gamma$ , n'est plus lié à la seconde valeur propre, mais plutôt lié à la première. Et comme la projection du signal reçu exclut le sous-espace du premier vecteur propre afin de s'affranchir de la présence interférente du signal direct, la réponse du filtre adapté à un tel signal devient nulle. Il est donc important d'identifier les valeurs engendrant le renversement de l'association de la première valeur propre avec le signal direct et celle de la seconde avec l'écho.

Ainsi,  $\alpha = 0$  implique que :

$$\sin\left(\frac{L\Omega_R}{2}\right) = 0. \quad [25]$$

De (25), nous comprenons que :

$$L_{\text{points nuls}} \approx \frac{2\pi}{\Omega_R}, \frac{4\pi}{\Omega_R}, \frac{6\pi}{\Omega_R}, \dots \quad [26]$$

où  $L_{\text{points nuls}}$  prend la valeur entière arrondie du calcul précédent.

Comme :

$$L_{\text{point nul 1}} \approx \frac{2\pi}{\Omega_R}, \quad [27]$$

alors :

$$L_{\text{point nul } k} = \frac{k2\pi}{\Omega_R} = kL_{\text{point nul 1}} \quad \text{où } k < \frac{P+1}{L_{\text{point nul 1}}}. \quad [28]$$

Il est possible de déterminer  $N$ , le nombre de points nuls présents :

$$N = \left\lfloor \frac{P+1}{L_{\text{point nul 1}}} \right\rfloor. \quad [29]$$

Partant de l'équation (7), le nombre de sous-réseaux correspondant aux points nuls vaut :

$$J_{\text{points nuls}} = P + 1 - k (L_{\text{point nul } 1}) \quad \text{où } k = [1, N] \quad [30]$$

À titre d'exemple pour le cas présenté aux figures 3 et 4 où  $\Omega_R = 0.286$ , nous obtenons, selon l'équation (27) :

$$L_{\text{point nul } 1} \approx \frac{2\pi}{0.286} \approx 22.$$

Ainsi, par l'équation (29), nous comptons :

$$N = \left\lfloor \frac{101}{22} \right\rfloor = 4 \text{ points nuls}$$

qui sont situés, selon l'équation (30), à :

$$J_{\text{points nuls}} = 13, 35, 57 \text{ et } 79.$$

### 7. Analyse du nombre optimal de sous-réseaux

Un aspect important dans l'emploi du réseau d'antennes à chevauchement d'éléments est la détermination du nombre de sous-réseaux à employer permettant une optimisation de la sortie du filtre adapté à l'écho radar. Comme le montre la figure 4, la sortie du filtre adapté est proportionnelle à la valeur propre associée à l'écho. Ainsi, en sélectionnant le nombre de sous-réseaux à employer correspondant à la seconde valeur propre la plus élevée, nous maximisons la sortie du filtre adapté associée à l'écho radar; optimisant alors la détection de la cible.

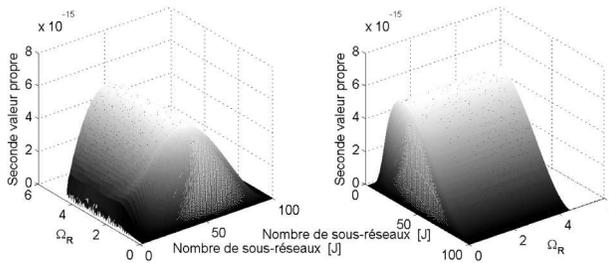


Figure 6. Valeurs analytiques de la seconde valeur propre en fonction de  $J$  et de  $\Omega_R$  selon deux vues différentes

Soit l'expression analytique de la seconde valeur propre d'une matrice de covariance formée par deux signaux non-corrélés de puissance  $\sigma_1^2$  et  $\sigma_2^2$  (Ermolaev et al., 1992) :

$$\lambda_2 = \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)N}{2} - \sqrt{\frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 N^2}{4} - \sigma_1^2 \sigma_2^2 N^2 (1 - (g(N))^2)} \quad [31]$$

avec

$$g(N) = \frac{\sin(N\beta d_x/2(\cos\phi_1\sin\theta_1 - \cos\phi_2\sin\theta_2))}{N\sin(\beta d_x/2(\cos\phi_1\sin\theta_1 - \cos\phi_2\sin\theta_2))} \quad [32]$$

dans lequel  $N$  est le nombre d'éléments de l'antenne-réseau,  $(\phi_1, \theta_1)$  l'orientation du premier signal et  $(\phi_2, \theta_2)$  l'orientation du second. En adaptant (31) aux sous-réseaux alignés vers la cible, c'est-à-dire que  $N = J$ ,  $\sigma_1^2 = \alpha$  et  $\sigma_2^2 = \gamma$ , nous obtenons :

$$\lambda_2 = \frac{(\alpha + \gamma)J}{2} - \sqrt{\frac{(\alpha + \gamma)^2 J^2}{4} - \alpha\gamma J^2(1 - (g(J))^2)} \quad [33]$$

avec

$$g(J) = \frac{\sin(J\Omega_R/2)}{J\sin(\Omega_R/2)} \quad [34]$$

Ainsi, soit  $J$  le nombre de sous-réseaux employés et  $\Omega_R$  une variable que nous définissons à partir des équations (11), (12) et (16) et dont le domaine de valeurs possibles est  $[-0.26, 4.46]^3$  ; la figure 6 présente<sup>4</sup>, selon l'équation (33) la valeur propre selon  $\Omega_R$ , pour une antenne-réseau de 100 éléments dont le nombre de sous-réseaux employé va de 2 à 100. Nous constatons que la seconde valeur propre dépend non seulement du nombre de sous-réseaux employés, mais aussi de la variable  $\Omega_R$  ; notamment pour des petites valeurs de celle-ci.

Puisqu'il est difficile d'obtenir de l'équation (33) une expression analytique simple de la valeur optimale du nombre de sous-réseaux à employer, nous devons la définir autrement. Ainsi, soit  $\lambda_2(J, \Omega_R)$  la relation définissant le comportement de la seconde valeur propre et caractérisant la surface présentée à la figure 6, il est possible d'obtenir cette équation par une interpolation polynomiale selon  $N_1$  et  $N_2$  :  $N_1$  étant le degré des polynômes interpolant  $\lambda_2(J)$  pour chaque valeur de  $\Omega_R$  et  $N_2$ , le degré du polynôme interpolant les coefficients des polynômes précédemment obtenus. Ainsi :

$$\lambda_2(J, \Omega_R) = A_{N_1}(\Omega_R) J^{N_1} + A_{N_1-1}(\Omega_R) J^{N_1-1} + \dots + A_0(\Omega_R) \quad [35]$$

où

$$\begin{aligned} A_0(\Omega_R) &= a_{0,N_2} |\Omega_R|^{N_2} + a_{0,N_2-1} |\Omega_R|^{N_2-1} + \dots + a_{0,0} \\ A_1(\Omega_R) &= a_{1,N_2} |\Omega_R|^{N_2} + a_{1,N_2-1} |\Omega_R|^{N_2-1} + \dots + a_{1,0} \\ &\vdots \\ A_{N_1}(\Omega_R) &= a_{N_1,N_2} |\Omega_R|^{N_2} + a_{N_1,N_2-1} |\Omega_R|^{N_2-1} + \dots + a_{N_1,0}. \end{aligned} \quad [36]$$

3. En considérant la position du satellite à  $(\phi_d = 0^\circ, \theta_d = 63^\circ)$  et pour  $\phi_e \in [0^\circ, 359^\circ]$  et  $\theta_e \in [0^\circ, 89^\circ]$ .

4. Il est à noter que la figure 6 ne présente pas le résultat pour des valeurs de  $\Omega_R$  inférieures à zéro puisque la fonction 34 est paire.

Dans (36), les  $a_{i,j}$  correspondent aux coefficients de degré  $j$  de  $|\Omega_R|$  dans le polynôme définissant  $A_i(\Omega_R)$ , lui-même caractérisant le coefficient de degré  $i$  de  $J$  dans le polynôme définissant  $\lambda_2(J, \Omega_R)$ .

Avec  $N_1 = 3$  et  $N_2 = 5$ , nous obtenons l'équation de la surface<sup>5</sup> :

$$\lambda_2(J, \Omega_R) = A_3(\Omega_R) J^3 + A_2(\Omega_R) J^2 + A_1(\Omega_R) J + A_0(\Omega_R) \tag{37}$$

dans laquelle les coefficients polynomiaux, définis selon (36), sont affichés au tableau 2. La figure 7 présente la surface caractérisée par l'équation (37). Nous

Tableau 2. Coefficients polynomiaux pour  $\lambda_2(J, \Omega_R)$

Coeff.	Valeur $\times 10^{-21}$	Coeff.	Valeur $\times 10^{-19}$
$a_{3,5}$	1.438	$a_{2,5}$	-2.535
$a_{3,4}$	-17.623	$a_{2,4}$	30.97573
$a_{3,3}$	79.287	$a_{2,3}$	-138.79464
$a_{3,2}$	-158.398	$a_{2,2}$	275.47647
$a_{3,1}$	131.833	$a_{2,1}$	-226.45919
$a_{3,0}$	9.678	$a_{2,0}$	-30.71528
Coeff.	Valeur $\times 10^{-17}$	Coeff.	Valeur $\times 10^{-17}$
$a_{1,5}$	1.1416567	$a_{0,5}$	-2.3121915
$a_{1,4}$	-13.879464	$a_{0,4}$	23.7467258
$a_{1,3}$	61.4963073	$a_{0,3}$	-75.3401559
$a_{1,2}$	-120.017107	$a_{0,2}$	-226.45919
$a_{1,1}$	95.2040891	$a_{0,1}$	159.7116053
$a_{1,0}$	22.3992471	$a_{0,0}$	-189.3584636

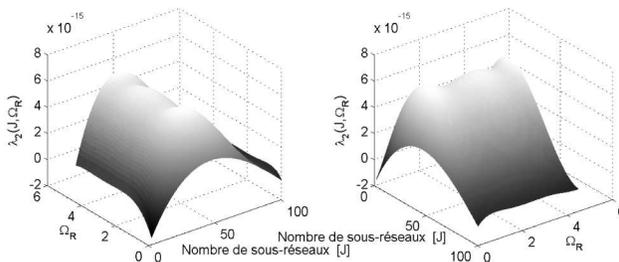


Figure 7. Valeurs de la seconde valeur propre obtenues par l'équation (37) selon deux vues différentes

5. Par le calcul de l'erreur moyenne sur tout le domaine du modèle polynomial, nous obtenons une équation optimale en utilisant  $N_1 = 7$  et  $N_2 = 17$ . Par contre, nous constatons que la différence entre l'erreur moyenne du cas optimal et celle pour  $N_1 = 3$  et  $N_2 = 5$  est négligeable. Ainsi, le pourcentage de l'erreur moyenne par rapport au point d'amplitude maximale est de 0.91 % pour le cas optimal contre 2.41 % pour le cas considéré. Le dernier choix simplifie donc l'équation polynomiale résultante tout en restant une approximation valable.

pouvons noter les similitudes avec la surface obtenue analytiquement et présentée à la figure 6. Ceci prouve la validité de l'équation (37).

Ayant maintenant une équation définissant les résultats simulés, il est possible d'obtenir le nombre de sous-réseaux qui maximise la seconde valeur propre ( $J_{\text{optimal}}$ ) simplement en trouvant les racines de :

$$\frac{\partial \lambda_2(J, \Omega_R)}{\partial J} = 3A_3(\Omega_R) J^2 + 2A_2(\Omega_R) J + A_1(\Omega_R). \quad [38]$$

Nous obtenons donc :

$$J_{\text{optimal, P=100 él.}} = \frac{-A_2(\Omega_R) - \sqrt{A_2^2(\Omega_R) - 3A_3(\Omega_R) A_1(\Omega_R)}}{3A_3(\Omega_R)}. \quad [39]$$

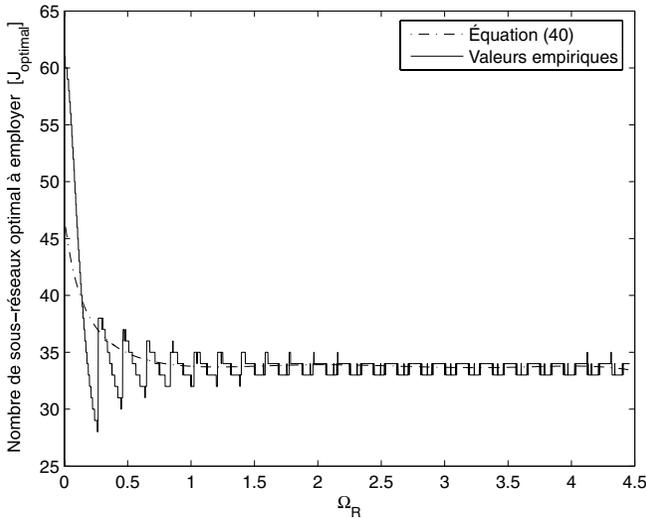


Figure 8. Comparaison entre le nombre de sous-réseaux optimal obtenu analytiquement et celui calculé par l'équation (39)

La figure 8 présente la comparaison du nombre de sous-réseaux optimal à employer selon la manière analytique et selon l'équation (39). Nous pouvons constater une similitude des courbes qui présentent une différence moyenne de 1.07 sous-réseau. L'erreur maximale de 15.01 sous-réseaux est atteinte pour une très petite valeur de  $\Omega_R$  où le signal direct et l'écho proviennent pratiquement de la même direction, ce qui n'est pas une situation enviable de toute manière.

À titre d'exemple, de nouveau selon le cas présenté à la section 4 où  $\Omega_R = 0.286$ , nous obtenons par l'équation (39) :

$$J_{\text{optimal}} \approx 37$$

alors que la valeur maximale de la seconde valeur propre analytique, calculée à partir de l'équation 33, est obtenue avec 38 sous-réseaux. La relation (39), associée aux coefficients du tableau 2, permet ainsi de déterminer correctement le nombre de sous-réseaux à employer pour une antenne-réseau de 100 éléments, permettant d'optimiser la seconde valeur propre et donc la réponse du filtre adapté à l'écho.

Puisque la relation (39) n'est valide que pour le cas d'une antenne principale de 100 éléments, nous pouvons étendre la définition de  $J_{\text{optimal}}$  à  $P$  éléments ;  $P$  étant une variable entière quelconque comprise entre 4 et 500<sup>6</sup>. La figure 9 présente le nombre de sous-réseaux optimal à employer en fonction de  $P$  et de  $\Omega_R$ , selon la manière analytique, obtenu à partir de l'équation (33) et de l'équation (7) de telle sorte que :

$$J_{\text{optimal}} = \arg \max_J [\lambda_2(J)] \quad \text{pour } J \in [2, P]. \quad [40]$$

En reprenant le principe d'interpolation polynomiale décrit précédemment pour  $N_1 = 1$  et  $N_2 = 12$ , nous redéfinissons la relation (39) pour  $P$  éléments de telle sorte que<sup>7</sup> :

$$J_{\text{optimal}}(P, \Omega_R) = B_1(\Omega_R)P + B_0(\Omega_R) \quad [41]$$

et dans laquelle les coefficients polynomiaux  $b_{i,j}$ , définissant  $B_i$  de la même manière que  $A_i$  dans la relation (36), sont affichés au tableau 3. Nous obtenons bien, à la figure 10, une surface similaire à celle des données empiriques de la figure 9.

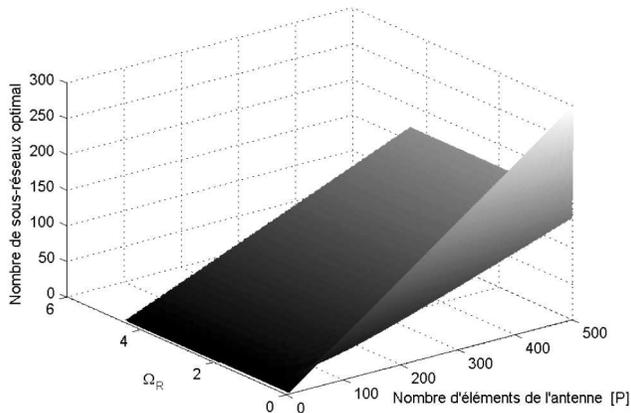


Figure 9. Valeurs analytiques du nombre de sous-réseaux optimal en fonction de  $P$  et de  $\Omega_R$

6. Nous posons à 500 éléments la limite supérieure du nombre d'éléments d'une antenne-réseau employée pour ce système.

7. Comme expliqué dans la note précédente, ce choix se veut un compromis entre la minimisation de l'erreur moyenne et la facilité de manipulation de l'équation résultante.

Tableau 3. Coefficients polynômiaux pour  $J_{\text{optimal}}(P, \Omega_R)$ 

Coeff.	Valeur $\times 10^{-4}$	Coeff.	Valeur $\times 10^{-4}$
$b_{1,12}$	9.9718	$b_{0,12}$	- 410.1264
$b_{1,11}$	- 277.9850	$b_{0,11}$	11186.3276
$b_{1,10}$	3415.8630	$b_{0,10}$	- 133811.7875
$b_{1,9}$	- 24338.2411	$b_{0,9}$	921692.6071
$b_{1,8}$	111278.4157	$b_{0,8}$	- 4033489.1402
$b_{1,7}$	- 341234.2646	$b_{0,7}$	11662321.4356
$b_{1,6}$	712381.2812	$b_{0,6}$	- 22409997.7144
$b_{1,5}$	- 1006749.3618	$b_{0,5}$	27933143.1599
$b_{1,4}$	938853.8048	$b_{0,4}$	- 21036771.4404
$b_{1,3}$	- 549181.9868	$b_{0,3}$	7762435.2793
$b_{1,2}$	183842.0865	$b_{0,2}$	42962.5764
$b_{1,1}$	- 29466.4269	$b_{0,1}$	- 902579.1493
$b_{1,0}$	4764.2612	$b_{0,0}$	179077.1609

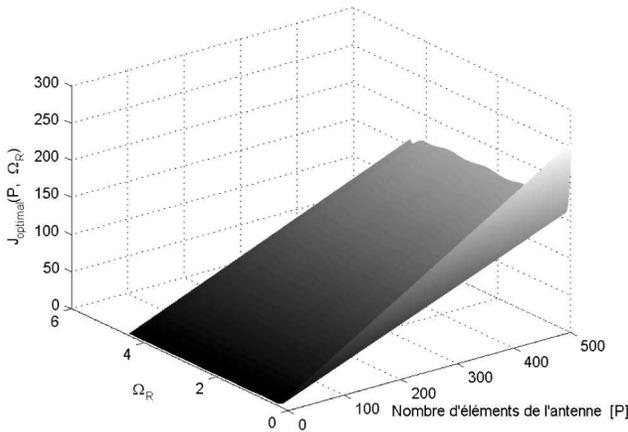


Figure 10. Nombre de sous-réseaux optimal calculé par l'équation (41)

Afin de vérifier l'équation (41), nous reprenons l'exemple ( $P = 100$  éléments et  $\Omega_R = 0.286$ ). Nous obtenons :

$$J_{\text{optimal}} \approx 33.$$

De même que pour l'équation (39), la relation (41) permet de déterminer avec une précision valable le nombre de sous-réseaux optimal à employer pour une antenne-réseau d'un nombre  $P$  compris entre 4 et 500 éléments. La valeur diffère de celle obtenue par l'équation (39), car en introduisant une seconde variable, ici  $P$ , l'équation polynomiale approximant la surface de la figure 9 est moins précise.

## 8. Conclusion

Cet article a présenté comment configurer un réseau d'antennes à chevauchement d'éléments afin d'améliorer la détection d'un écho radar de faible puissance, en présence du trajet direct supprimé par traitement en analyse propre. Nous avons décrit la méthode de suppression du signal direct par projection dans les sous-espaces liés aux vecteurs propres. En effectuant des essais par simulation, nous avons constaté que :

1) Pour un choix adéquat du nombre de sous-réseaux, le réseau d'antennes à chevauchement d'éléments permet au traitement en analyse propre d'isoler le signal direct et offre un gain directif de l'écho.

2) Pour certaines valeurs du nombre de sous-réseaux  $J$ , la seconde valeur propre ne devient plus liée à l'écho radar. La sortie du filtre adapté à l'écho, lorsque ce nombre de sous-réseaux est utilisé, invalide alors la détection de cet écho.

3) Il existe une valeur du nombre de sous-réseaux permettant de maximiser la sortie du filtre adapté à l'écho radar et ainsi en faciliter la détection.

Nous avons défini mathématiquement la matrice de covariance du signal et celle du bruit, dans laquelle nous avons exposé l'existence de bruit corrélé à la sortie des sous-réseaux. Nous avons, par la suite, expliqué la provenance de points nuls qui provoquent, selon certains choix du nombre de sous-réseaux employé, la disparition de l'écho à la sortie du filtre adapté et nous avons déterminé les valeurs à éviter de ces nombres de sous-réseaux dans la structure d'un récepteur radar. Finalement, nous avons exprimé une relation analytique permettant d'obtenir le nombre de sous-réseaux garantissant une sortie optimale du filtre adapté à l'écho conduisant à une maximisation de la détection.

## Bibliographie

- Colone F., al. (2006), « Cancellation of clutter and multipath in passive radar using a sequential ap-proach », *IEEE Conference on Radar*.
- Ermolaev V. T., Gershman A. B. (1992), « Eigenvalue Analysis of Spatial Covariance Matrices for Correlated Signals », *Electronics Letters*, vol. 28, n° 12, p. 1114-1115, Juin.
- Godara L. C. (1990), « Beamforming in the Presence of Correlated Arrivals Using Structured Correlation Matrix », *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 38, n° 1, p. 532-533, Janvier.
- Guner A., al. (2003), « Direct-path filtering of DAB waveform from PCL receiver target channel », *Electronics Letters*, vol. 39, n° 1, p. 118-119, Janvier.
- Howland P. E., al. (2005), « FM radio based bistatic radar », *IEE Proc. on Radar, Sonar and Navigation*, vol. 152, n° 3, p. 107-115, Juin.
- Kubica M., al. (2006), « Optimum target detection using illuminators of opportunity », *IEEE Conference on Radar*.
- Kulpa K. S., Czekala Z. (2005), « Masking effect and its removal in PCL radar », *IEE Proc. on Radar, Sonar and Navigation*, vol. 152, n° 3, p. 174-178, Juin.

- MathWorld W., « Toeplitz Matrix », n.d. en ligne, <http://mathworld.wolfram.com/ToeplitzMatrix.html>.
- Raghunath K., Reddy V. U. (1992), « A Note on Spatially Weighted Subarray Covariance Averaging Schemes », *IEEE Trans. on Antennas and Propagation*, vol. 40, n° 6, p. 720-723, Juin.
- Reddy V. U., al. (1987), « Performance Analysis of the Optimum Beamformer in the Presence of Correlated Sources and Its Behavior Under Spatial Smoothing », *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and Signal Processing*, vol. 35, n° 7, p. 927-936, Juillet.
- Saini R., al. (2003), « Direct path interference suppression in bistatic system : DTV based radar », *Proceedings of the International Radar Conference*.
- Shan T. J., Kailath T. (1985), « Adaptive Beamforming for Coherent Signals and Interference », *IEEE Trans. on Acoustics, Speech and signal Processing*, vol. 33, n° 3, p. 527-536, Juin.
- Takao K., al. (1986), « Toeplitzization of Correlation Matrix in Multipath Environment », *IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing*.
- Wang L. L., al. (2002), « An Equivalent Overlapping Array with Optimized Sub-Array Pattern », *3rd International Conference on Microwave and Millimeter Wave Technology Proceeding*.

## Annexe A

La matrice de covariance du réseau d'antennes à chevauchement d'éléments  $\mathbf{R}_{x_t x_t}$  est définie comme :

$$\mathbf{R}_{x_t x_t} = E \{ \mathbf{x}_t \mathbf{x}_t^H \} \quad [42]$$

avec :

$$\mathbf{x}_t = \begin{pmatrix} x_{SR_{1orient.}} \\ x_{SR_{2orient.}} \\ \vdots \\ x_{SR_{Jorient.}} \end{pmatrix} \quad [43]$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\Omega_R} \\ e^{j2\Omega_R} \\ \vdots \\ e^{j(J-1)\Omega_R} \end{bmatrix} \left( s_d(t) \left[ \frac{1 - e^{jL\Omega_R}}{1 - e^{j\Omega_R}} \right] \right) + \begin{bmatrix} L \\ L \\ L \\ \vdots \\ L \end{bmatrix} s_e(t)$$

avec  $s_d(t)$ , le signal direct reçu et  $s_e(t)$ , le signal issu de l'écho.

Ainsi, nous obtenons :

$$\mathbf{R}_{x_t x_t} = E \left\{ \left[ \begin{array}{c} 1 \\ e^{j\Omega_R} \\ e^{j2\Omega_R} \\ \vdots \\ e^{j(J-1)\Omega_R} \end{array} \right] \left( s_d(t) \left[ \frac{1 - e^{jL\Omega_R}}{1 - e^{j\Omega_R}} \right] \right) + \left[ \begin{array}{c} L \\ L \\ L \\ \vdots \\ L \end{array} \right] s_e(t) \right. \\
 \cdot \left[ \begin{array}{c} 1 \\ e^{-j\Omega_R} \\ e^{-j2\Omega_R} \\ \vdots \\ e^{-j(J-1)\Omega_R} \end{array} \right]^T \\
 \left. + s_e^*(t) \left[ \begin{array}{c} L \\ L \\ L \\ \vdots \\ L \end{array} \right]^T \right\}. \tag{44}$$

En distribuant la multiplication de l'équation (44) :

$$\mathbf{R}_{x_t x_t} = E \left\{ \left[ \begin{array}{c} 1 \\ e^{j\Omega_R} \\ e^{j2\Omega_R} \\ \vdots \\ e^{j(J-1)\Omega_R} \end{array} \right] \left( s_d(t) \left[ \frac{1 - e^{jL\Omega_R}}{1 - e^{j\Omega_R}} \right] \right) \right. \\
 \cdot \left( s_d^*(t) \left[ \frac{1 - e^{-jL\Omega_R}}{1 - e^{-j\Omega_R}} \right] \right) \left[ \begin{array}{c} 1 \\ e^{-j\Omega_R} \\ e^{-j2\Omega_R} \\ \vdots \\ e^{-j(J-1)\Omega_R} \end{array} \right]^T$$

$$\begin{aligned}
& + \begin{bmatrix} L \\ L \\ L \\ \vdots \\ L \end{bmatrix} s_e(t) \bullet s_e^*(t) \begin{bmatrix} L \\ L \\ L \\ \vdots \\ L \end{bmatrix}^T \\
& + \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\Omega_R} \\ e^{j2\Omega_R} \\ \vdots \\ e^{j(J-1)\Omega_R} \end{bmatrix} \left( s_d(t) \begin{bmatrix} 1 - e^{jL\Omega_R} \\ 1 - e^{j\Omega_R} \end{bmatrix} \right) \bullet s_e^*(t) \begin{bmatrix} L \\ L \\ L \\ \vdots \\ L \end{bmatrix}^T \\
& + \left. \begin{bmatrix} L \\ L \\ L \\ \vdots \\ L \end{bmatrix} s_e(t) \bullet \left( s_d^*(t) \begin{bmatrix} 1 - e^{-jL\Omega_R} \\ 1 - e^{-j\Omega_R} \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\Omega_R} \\ e^{-j2\Omega_R} \\ \vdots \\ e^{-j(J-1)\Omega_R} \end{bmatrix}^T \right\}. \quad [45]
\end{aligned}$$

Puisque :

$$(1 - e^{j\theta})(1 - e^{-j\theta}) = 4 \sin^2 \left( \frac{\theta}{2} \right), \quad [46]$$

alors :

$$\mathbf{R}_{x_t, x_t} = E \{ |s_d(t)|^2 \} \left( \frac{\sin^2 \left( \frac{L\Omega_R}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)} \right)$$

$$\begin{aligned}
& \bullet \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\Omega_R} & \dots & e^{-j(J-1)\Omega_R} \\ e^{j\Omega_R} & 1 & \dots & e^{-j(J-2)\Omega_R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(J-1)\Omega_R} & e^{j(J-2)\Omega_R} & \dots & 1 \end{bmatrix} \\
& + E \{ |s_e(t)|^2 \} \begin{bmatrix} L^2 & L^2 & \dots & L^2 \\ L^2 & L^2 & \dots & L^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L^2 & L^2 & \dots & L^2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ E \{ s_d(t) s_e^*(t) \} \cdot L \cdot \left[ \frac{1 - e^{jL(\Omega_d - \Omega_e)}}{1 - e^{j(\Omega_d - \Omega_e)}} \right] \\
 &\bullet \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ e^{j\Omega_R} & e^{j\Omega_R} & \dots & e^{j\Omega_R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(J-1)\Omega_R} & e^{j(J-1)\Omega_R} & \dots & e^{j(J-1)\Omega_R} \end{bmatrix} \\
 &+ E \{ s_e(t) s_d^*(t) \} \cdot L \cdot \left[ \frac{1 - e^{-jL(\Omega_d - \Omega_e)}}{1 - e^{-j(\Omega_d - \Omega_e)}} \right] \\
 &\bullet \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\Omega_R} & \dots & e^{-j(J-1)\Omega_R} \\ 1 & e^{-j\Omega_R} & \dots & e^{-j(J-1)\Omega_R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & e^{-j\Omega_R} & \dots & e^{-j(J-1)\Omega_R} \end{bmatrix} \cdot
 \end{aligned} \tag{47}$$

Comme nous supposons que  $s_d$  et  $s_e$  sont non-corrélés<sup>8</sup>, alors :

$$E \{ s_d(t) s_e^*(t) \} = E \{ s_e(t) s_d^*(t) \} = 0. \tag{48}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_{x_t x_t} &= \sigma_d^2 \left( \frac{\sin^2 \left( \frac{L\Omega_R}{2} \right)}{\sin^2 \left( \frac{\Omega_R}{2} \right)} \right) \\
 &\bullet \begin{bmatrix} 1 & e^{-j\Omega_R} & \dots & e^{-j(J-1)\Omega_R} \\ e^{j\Omega_R} & 1 & \dots & e^{-j(J-2)\Omega_R} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e^{j(J-1)\Omega_R} & e^{j(J-2)\Omega_R} & \dots & 1 \end{bmatrix} \\
 &+ \sigma_e^2 \begin{bmatrix} L^2 & L^2 & \dots & L^2 \\ L^2 & L^2 & \dots & L^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L^2 & L^2 & \dots & L^2 \end{bmatrix} \cdot
 \end{aligned} \tag{49}$$

---

8. Bien que jamais indépendants, il est permis de considérer le signal direct et l'écho comme non corrélés lorsque les paramètres (délai et décalage Doppler par rapport au signal direct) permettent de les considérer suffisamment décorrélés selon la fonction d'ambiguïté du signal.

## Annexe B

Afin de définir la matrice de covariance du bruit, l'équation (9) comprend un terme supplémentaire qui constitue le bruit :

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{s}(t) + \mathbf{n}(t) \quad [50]$$

avec

$$\mathbf{n}(t) = \begin{bmatrix} n_1(t) \\ n_2(t) \\ n_3(t) \\ \vdots \\ n_P(t) \end{bmatrix} \quad [51]$$

L'équation (19) devient alors :

$$x_{SR_{k \text{ orient.}}}(t) = s_d(t)e^{j(k-1)\Omega_R} \left[ \frac{1 - e^{jL\Omega_R}}{1 - e^{j\Omega_R}} \right] + L \cdot s_e(t) + \sum_{n=k}^{L+k-1} n_n(t). \quad [52]$$

Le bruit du  $k^{\text{ème}}$  sous-réseau vaut donc :

$$N_k(t) = \sum_{n=k}^{L+k-1} n_n(t). \quad [53]$$

Ainsi, la matrice de covariance possède maintenant une expression plus élaborée que celle de (44) à l'annexe A. Elle est :

$$\mathbf{R}_{x_t x_t} = E \left\{ \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ e^{j\Omega_R} \\ e^{j2\Omega_R} \\ \vdots \\ e^{j(J-1)\Omega_R} \end{bmatrix} \left( s_d(t) \left[ \frac{1 - e^{jL\Omega_R}}{1 - e^{j\Omega_R}} \right] \right) + \begin{bmatrix} L \\ L \\ L \\ \vdots \\ L \end{bmatrix} s_e(t) \end{bmatrix} \right.$$

$$\left. + \begin{bmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \\ \vdots \\ N_J(t) \end{bmatrix} \right.$$

$$\bullet \left[ \left( s_d^*(t) \left[ \frac{1 - e^{-jL\Omega_R}}{1 - e^{-j\Omega_R}} \right] \right) \begin{bmatrix} 1 \\ e^{-j\Omega_R} \\ e^{-j2\Omega_R} \\ \vdots \\ e^{-j(J-1)\Omega_R} \end{bmatrix}^T + s_e^*(t) \begin{bmatrix} L \\ L \\ L \\ \vdots \\ L \end{bmatrix}^T \right. \\
 \left. + \begin{bmatrix} N_1^*(t) \\ N_2^*(t) \\ N_3^*(t) \\ \vdots \\ N_J^*(t) \end{bmatrix}^T \right] \quad [54]$$

En distribuant la multiplication, comme à l'équation (45), et puisque le bruit est indépendant des signaux, i.e. :

$$\begin{aligned}
 E \{ s_d(t) N_k^*(t) \} &= 0, \\
 E \{ s_e(t) N_k^*(t) \} &= 0, \\
 E \{ s_d^*(t) N_k(t) \} &= 0 \quad \text{et} \\
 E \{ s_e^*(t) N_k(t) \} &= 0 \quad \text{pour tout } k \in [1, J],
 \end{aligned} \quad [55]$$

alors nous obtenons, pour la matrice de covariance du bruit :

$$\mathbf{R}_{nn} = E \left\{ \begin{pmatrix} N_1(t) \\ N_2(t) \\ N_3(t) \\ \vdots \\ N_J(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1^*(t) & N_2^*(t) & N_3^*(t) & \cdots & N_J^*(t) \end{pmatrix} \right\} \\
 = \begin{bmatrix} E \{ N_1(t) N_1^*(t) \} & E \{ N_1(t) N_2^*(t) \} & \cdots & E \{ N_1(t) N_J^*(t) \} \\ E \{ N_2(t) N_1^*(t) \} & E \{ N_2(t) N_2^*(t) \} & \cdots & E \{ N_2(t) N_J^*(t) \} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E \{ N_J(t) N_1^*(t) \} & E \{ N_J(t) N_2^*(t) \} & \cdots & E \{ N_J(t) N_J^*(t) \} \end{bmatrix} \quad [56]$$

Comme expliqué précédemment,  $N_k(t)$  et  $N_l(t)$  peuvent être corrélés, alors :

$$E \{N_k(t)N_l^*(t)\} \neq E \{N_k(t)\} \cdot E \{N_l^*(t)\} \neq 0. \quad [57]$$

$N_k(t)$  et  $N_l(t)$  sont indépendants si et seulement si aucun élément du réseau d'antennes dans un sous-réseau ne se retrouve dans l'autre. C'est donc dire que :

$$E \{N_k(t)N_l^*(t)\} = E \{N_k(t)\} \cdot E \{N_l^*(t)\} = 0$$

si et seulement si  $|k - l| \geq L. \quad [58]$

À partir de l'équation (53), il est possible de déterminer la covariance du bruit entre deux sous-réseaux quelconques :

$$\begin{aligned} E \{N_k(t)N_l^*(t)\} &= E \left\{ \sum_{n=k}^{L+k-1} n_n(t) \cdot \sum_{n=l}^{L+l-1} n_n^*(t) \right\} \\ &= E \{ (n_k(t) + n_{k+1}(t) + \dots + n_{L+k-1}(t)) \\ &\quad \cdot (n_l^*(t) + n_{l+1}^*(t) + \dots + n_{L+l-1}^*(t)) \} \\ &= E \{ N_k(t)N_l^*(t) \} + E \{ N_k(t)N_{l+1}^*(t) \} + \dots + E \{ N_k(t)N_{L+l-1}^*(t) \} \\ &\quad + E \{ N_{k+1}(t)N_l^*(t) \} + E \{ N_{k+1}(t)N_{l+1}^*(t) \} + \dots \\ &\quad + E \{ N_{k+1}(t)N_{L+l-1}^*(t) \} \\ &\quad + \dots \\ &\quad + E \{ N_{L+k-1}(t)N_l^*(t) \} + E \{ N_{L+k-1}(t)N_{l+1}^*(t) \} + \dots \\ &\quad + E \{ N_{L+k-1}(t)N_{L+l-1}^*(t) \}. \end{aligned} \quad [59]$$

En étudiant l'équation (59), nous pouvons déterminer une règle générale :

$$\begin{aligned} E \{N_k(t)N_l^*(t)\} &= (L - |k - l|) \sigma_n^2 \quad \text{pour } |k - l| < L \\ &= 0 \quad \text{ailleurs} \end{aligned} \quad [60]$$

Finalement, la matrice de covariance du bruit vaut :

$$\mathbf{R}_{nn} = \sigma_n^2 \begin{bmatrix} L & L-1 & \dots & L-(J-1) \\ L-1 & L & \dots & L-J \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ L-(J-1) & L-J & \dots & L \end{bmatrix}$$

$$\text{pour } J < \frac{P}{2} + 1$$

$$= \sigma_n^2 \begin{bmatrix} L & L-1 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ L-1 & L & \dots & 2 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 2 & \dots & L & L-1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & L-1 & L & \dots & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & \dots & L \end{bmatrix} \quad [61]$$

ailleurs.

Article reçu le 10/01/2010

Accepté le 15/09/2010



**Louis-Philippe Gill** a obtenu un baccalauréat, une maîtrise ainsi qu'un doctorat en génie électrique respectivement en 2001, 2004 et 2010 à l'Université Laval, Canada. Il a effectué ses recherches au sein du Laboratoire de Radiocommunication et de Traitement du Signal (LRTS). Son sujet de recherche doctorale portait sur l'application du concept de détection passive cohérente avec l'emploi d'une source d'opportunité satellite. Il travaille présentement chez MDA Corporation. Il est aussi membre de la nation Innu du Lac-Saint-Jean, Canada.



**Dominic Grenier** a un diplôme de Ph.D. en génie électrique de l'Université Laval, Québec, Canada en 1989. Il a reçu une bourse d'études postdoctorales qui lui a permis d'enrichir ses connaissances dans la division Radar du Centre de recherche pour la défense à Ottawa. Embauché comme professeur à l'Université Laval en 1990, il apporte une certaine expertise dans plusieurs domaines de recherche dont l'imagerie radar par ouverture synthétique inversée (ISAR), le traitement d'antenne-réseau pour analyse spatiale haute-résolution, la propagation des ondes électromagnétiques dans les matériaux (paramétrisation de sols) et la fusion de données pour identification de cibles. Il est auteur ou co-auteur de 35 articles publiés dans des revues scientifiques et de 80 autres dans des actes de conférences. Depuis 1992, plus de 40 étudiants gradués ont complété leur thèse sous sa direction. Le professeur Grenier est aussi reconnu pour son enseignement sur les ondes électromagnétiques et les antennes ; il a d'ailleurs reçu récemment un des prix d'enseignement du Ministre de l'éducation du Québec et le prix de distinction en enseignement de l'université Laval.



**Jean-Yves Chouinard** a reçu un doctorat en génie électrique de l'Université Laval, Québec, Canada, en 1987. Il a été ensuite chercheur post-doctoral au Centre National d'Études des Télécommunications (CNET), Paris, France. De 1988 à 2002, il a été professeur en génie électrique à l'École d'Ingénierie et de Technologie de l'Information (ÉITI) à l'Université d'Ottawa. En 1996, il a été professeur invité à l'École Nationale Supérieure des Télécommunications (ENST) à Paris. Depuis 2003, il est professeur au département de génie électrique et de génie informatique à l'Université Laval. Ses intérêts en recherche portent sur la théorie des communications et ses applications, les systèmes à large bande mobiles et sans fil intérieurs, la détection de signaux et les méthodes de codage de source et de canal pour les systèmes de télévision avancés. Il est auteur ou co-auteur de plus 160 articles publiés dans des revues scientifiques et dans des compte-rendus de conférences, co-éditeur d'un livre sur la théorie de l'information et ses applications ainsi que co-auteur de chapitres de livres sur la radio logicielle reconfigurable pour les systèmes de communication MIMO sans fil ainsi que sur les méthodes de synchronisation temps-fréquence pour la télédiffusion mobile multiporteuse OFDM. Il a été corépondant du 1999 Neal Shepherd Best Propagation Paper Award de la IEEE Vehicular Society et du 2004 Signal Processing Best Paper Award de l'European Journal of Signal Processing. Il est éditeur associé pour les IEEE Transactions on Broadcasting.

