Sur le cadre thermodynamique d'une classe de modèles de plasticité de milieux poreux ductiles

C. Bouby[a], D. Kondo[b]

a. LEMTA, UMR 7563 CNRS, Université de Lorraine, 2, rue Jean Lamour
54500 Vandoeuvre-Lès-Nancy, France. Celine.Bouby@univ-lorraine.fr
b. Institut Jean Le Rond d'Alembert, UMR 7190, Universite Pierre et Marie Curie, Tour 55-65,
4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05, France. Djimedo.Kondo@upmc.fr

Résumé :

Le critère de Gurson [6] et ses nombreuses extensions sont aujourd'hui largement utilisés pour étudier le comportement et la rupture des matériaux poreux ductiles. Ce critère est développé dans un cadre micromécanique assez connu et basé sur des résultats d'analyse limite d'une sphère creuse fournissant principalement le critère macroscopique de plasticité du matériau poreux. La loi de normalité, déduite des principes de l'homogénéisation, fournit alors l'évolution de la déformation plastique, tandis que celle de la porosité est donnée par l'équation de conservation de la masse en mettant à profit l'incompressibilité de la matrice plastique. L'objectif de cette communication est de préciser le cadre thermodynamique de lecture des modèles de type Gurson en nous appuyant sur la poroplasticité des milieux saturés tels que décrits principalement dans les travaux de Coussy [3]. Dans ce cadre qui est celui des Matériaux Standards Généralisés (MSG), les variables internes étant la déformation plastique et la porosité plastique lagrangienne, on établit pour le modèle de poroplasticité une expression du pseudo-potentiel de dissipation, fonction de la vitesse de déformation plastique et du taux de porosité plastique lagrangienne. On retrouve alors le modèle classique de Gurson avec porosité évolutive comme un cas particulier correspondant à la pression de fluide nulle, ce qui en confirme le caractère Standard Généralisé.

Abstract :

Gurson's criterion [6] and its numerous extensions are widely used nowadays for the study of behaviour and fracture of porous ductile materials. This criterion is developped using a well-known micromechanical framework, based on limit analysis results of a hollow sphere, mainly providing the macroscopic criterion of plasticity for the porous material. The normality rule, derived from homogenization principles, gives plastic strain evolution whereas the porosity evolution is obtained by mass conservation equation using the incompressibility of the plastic matrix. The aim of this communication is to clarify the reading thermodynamic framework of Gurson type model, using the poroplasticity of staturated media such as mainly described by Coussy [3]. In this frame which is that of Generalized Standard Materials (GSM), the internal variables being the plastic strain and the lagrangian plastic porosity, an expression of the pseudo-potential of dissipation is established for the poroplasticity model in terms of the plastic strain rate and the lagrangian plastic porosity rate. The well-known Gurson model with evolving porosity is then recovered as a particular case corresponding to a vanishing fluid pressure, confirming its Generalized Standard nature.

Mots clefs : Modèle de Gurson, poroplasticité, milieux poreux ductiles, matériaux standards généralisés.

1 Introduction

Le critère de Gurson [6] et ses nombreuses extensions sont aujourd'hui largement utilisés pour étudier le comportement et la rupture des matériaux poreux ductiles. Ce critère est développé dans un cadre micromécanique assez connu et basé sur des résultats d'analyse limite d'une sphère creuse qui fournissent notamment un critère macroscopique de plasticité sous la forme

$$F(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f \cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\right) - 1 - f^2 = 0 \tag{1}$$

Le passage de la loi de normalité à l'échelle macroscopique, résultat issu de l'homogénéisation, fournit alors l'évolution de la déformation plastique

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

tandis que l'évolution de la porosité (eulérienne) est donnée par l'équation de conservation de la masse en mettant à profit l'incompressibilité de la matrice plastique

$$\dot{f} = 3(1-f)\varepsilon_m^p$$

Comme cela a été souligné par de nombreux auteurs (par exemple Chaboche et al. dans [2]), c'est cette dernière équation qui pilote l'endommagement sans qu'une variable indépendante supplémentaire soit introduite. Bien entendu, il n'y a pas de contribution de ce processus à la dissipation intrinsèque qui se réduit à la puissance plastique $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ et on peut s'interroger sur le statut thermodynamique de la porosité f. Une telle interrogation peut s'avérer d'une certaine utilité du point de vue de la mise en œuvre numérique du modèle (on peut d'ailleurs noter les différences de traitement de la porosité dans les algorithmes de résolution, explicite ou implicite) ou de l'analyse de certaines extensions du modèle initial de Gurson (on pense par exemple à la modification proposée par Nahshon et Hutchinson [11]). Enfin, et bien qu'il ne soit pas considéré dans cette communication, on mentionnera le modèle de matériau poreux ductile proposé par Rousselier [14, 15] en s'appuyant sur une formulation thermodynamique et dans laquelle la porosité est d'emblée considérée comme une variable interne dissipative

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \mathcal{F}\dot{f}$$

$\mathcal{F}$ étant une force thermodynamique associée à la porosité.

Dans cette communication, on se propose de présenter un cadre de lecture des modèles de type Gurson en nous appuyant sur la poroplasticité des milieux saturés tels que décrits dans [3]. Il convient de souligner d'emblée que dans ce cadre les variables internes sont la déformation plastique et la porosité plastique lagrangienne, variables auxquelles sont respectivement associées la contrainte et la pression du fluide saturant. A ce propos, on pourra aussi se référer à l'article récent de Bignonnet et al [1].

2 Cadre thermodynamique de la plasticité des milieux poreux saturés appliqué au modèle de Gurson

Pour la présentation détaillée du cadre thermodynamique pour la plasticité des milieux poreux saturés, il convient de se reporter à Coussy dans [3]. Dans cette communication, on ne présentera que les éléments essentiels à la relecture du modèle de Gurson.

2.1 Quelques éléments de thermodynamique pour la poroplasticité des milieux saturés

Considérons un matériau poreux soumis à un état de contrainte $\boldsymbol{\sigma}$ et une pression fluide saturant p.

On se place dans le contexte des transformations isothermes et infinitésimales, et de comportements indépendants du temps physique. Dans le cas de la poroplasticité qui nous intéresse ici, outre les variables observables -déformations $\boldsymbol{\varepsilon}$ et porosité lagrangienne ϕ-, les deux variables internes sont les déformations plastiques $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ et la porosité plastique ϕ^p, auxquelles sont respectivement associées $\boldsymbol{\sigma}$ et p. Ces variables internes qui traduisent les irréversibilités liées à la plasticité admettent les décompositions additives suivantes :

$$\phi = \phi^e + \phi^p$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}^e + \boldsymbol{\varepsilon}^p$$

où $\boldsymbol{\varepsilon}^e$ et ϕ^e désignent respectivement les déformations élastiques et la porosité réversible.

L'énergie libre, Ψ_s, s'écrit

$$\rho\Psi^s(\boldsymbol{\varepsilon}^e, \phi^e) = \rho\Psi^s(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p, \phi - \phi^p)$$

De manière classique, les lois d'état s'en déduisent

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial\Psi^s}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}} = -\rho\frac{\partial\Psi^s}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^p}; \qquad p = -\frac{\partial\Psi^s}{\partial\phi^p}$$

L'inégalité de Clausius-Duhem, traduisant la positivité de la dissipation intrinsèque liée aux évolutions irréversibles du squelette prend la forme

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho p\dot{\phi} - \rho\dot{\Psi}^s \geq 0$$

et la dissipation intrinsèque s'écrit

$$\mathcal{D} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + p\dot{\phi}^p \tag{2}$$

On notera qu'en l'absence de pression, la dissipation intrinsèque se réduit trivialement à la puissance plastique $\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ bien que la variable dissipative $\dot{\phi}^p$ soit bien présente, ce qui est le cas du modèle de Gurson.

2.2 Lien entre porosité lagrangienne et eulérienne

Comme déjà exposé dans Bignonnet et al. [1], on rappelle et précise très brièvement ici le lien entre la porosité lagrangienne et la porosité eulérienne présente dans le critère de Gurson (1). Pour des changements de volume des pores au sein d'un VER, noté $|\Omega_p|$, irréversibles entre deux instants notés t et

$t + dt$, le taux de variation de la porosité plastique lagrangienne est définie par

$$\dot{\phi}^p = \lim_{dt \to 0} \frac{1}{dt} \left(\frac{|\Omega_p(t + dt)| - |\Omega_p(t)|}{|\Omega(t)|} \right)$$

tandis que le taux de porosité eulérienne f s'exprime comme :

$$\dot{f} = \lim_{dt \to 0} \frac{1}{dt} \left(\frac{|\Omega_p(t + dt)|}{|\Omega(t + dt)|} - \frac{|\Omega_p(t)|}{|\Omega(t)|} \right)$$

Dans l'hypothèse où toutes les modifications de volume du VER sont irréversibles, les taux de porosités lagrangienne et eulérienne sont reliées par

$$\dot{\phi}^p = \dot{f} + f \text{tr}(\dot{\varepsilon}^p)$$

Si de plus la phase solide est supposée incompressible, c'est à dire $\dot{\phi}^p = \text{tr}(\dot{\varepsilon}^p)$, il vient immédiatement

$$\dot{f} = (1 - f) \text{tr}(\dot{\varepsilon}^p)$$

soit

$$\dot{f} = (1 - f) \dot{\phi}^p$$

Cette dernière égalité peut être intégrée

$$\frac{\dot{f}}{1 - f} = \dot{\phi}^p$$

pour obtenir le lien suivant entre porosités lagrangienne et eulérienne

$$\phi^p - \phi^p_0 = \ln \left(\frac{1 - f_0}{1 - f} \right) \tag{3}$$

que l'on suggérera dans la suite en écrivant $\phi^p(f)$ ou $f(\phi^p)$.

2.3 Equations du modèle de Gurson prenant en compte la saturation par un fluide

Revenons maintenant à la forme du critère original de Gurson (1). Il dépend de l'état de contrainte mais également de la porosité eulérienne $f(\phi^p)$ perçue à présent comme une fonction de la porosité plastique lagrangienne. Pour le milieu poreux saturé avec une matrice incompressible (ici de von Mises), un résultat classique de de Buhan et Dormieux [4] (voir également Lydzba et Shao [7]) permet de montrer que le critère de plasticité, fonction de $(\boldsymbol{\sigma}, p, \phi^p)$, prend la forme

$$F(\boldsymbol{\sigma}, p, \phi^p) = \frac{\sigma_{eq}^2}{\sigma_0^2} + 2f(\phi^p) \cosh \left(\frac{3}{2} \frac{\sigma_m + p}{\sigma_0} \right) - 1 - f^2(\phi^p) = 0 \tag{4}$$

ce qui correspond à la validité d'une contrainte effective de Terzaghi, la nullité de p permettant trivialement de retrouver le critère de Gurson. Ce paramétrage du critère (4) avec ϕ^p suggère la possibilité d'inscrire le modèle de Gurson dans un cadre des matériaux standards généralisés tel que décrit par Nguyen [13] et autorisant la présence des variables d'état dans le potentiel de dissipation ou son dual (voir également à ce propos Maitournam [9]). La règle d'écoulement s'écrit alors :

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}}(\boldsymbol{\sigma}, p, \phi^p); \quad \dot{\phi}^p = \dot{\lambda}\frac{\partial F}{\partial p}(\boldsymbol{\sigma}, p, \phi^p)$$

3 Formulation thermodynamique du modèle de poroplasticité

On se propose de préciser dans ce paragraphe le potentiel d'énergie et le potentiel de dissipation permettant la formulation complète du modèle.

3.1 Potentiel d'énergie

On introduit l'énergie libre sous la forme suivante

$$\rho\Psi^s(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}^p, \phi^p) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + m(\phi^p)$$

où $\mathbb{C}$ désigne le tenseur d'élasticité d'ordre quatre et m une fonction de ϕ^p permettant de respecter la convexité de l'énergie libre par rapport aux variables d'état. Il en résulte les lois d'état

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho\frac{\partial \Psi^s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = -\rho\frac{\partial \Psi^s}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^p} = \mathbb{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$$

$$p = -\frac{\partial \Psi^s}{\partial \phi^p} = -m'(\phi^p)$$

3.2 Pseudo potentiel de dissipation

Le pseudo potentiel de dissipation φ est donné par la transformée de Legendre-Fenchel de la fonction indicatrice du domaine K défini à l'aide de l'expression (4) du critère

$$U_K(\boldsymbol{\sigma}, p) = \begin{cases} 0 \text{ if } F(\boldsymbol{\sigma}, p, \phi^p) \leq 0 \\ +\infty \text{ otherwise} \end{cases}$$

ce qui permet d'écrire

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\phi}^p) = [U_K(\boldsymbol{\sigma}, p)]^* = \sup_{\boldsymbol{\sigma}, p}\left[\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + p\dot{\phi}^p - U_K(\boldsymbol{\sigma}, p)\right] = \sup_{\boldsymbol{\sigma}, p \in K}\left[\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + p\dot{\phi}^p\right]$$

On cherche donc une majoration de

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + p\dot{\phi}^p \leq \sigma_0\left[\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0}\dot{\varepsilon}_{eq} + 3\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\dot{\varepsilon}_m\right] + p\dot{\phi}^p$$

Le critère (4) nous fournit

$$\frac{\sigma_{eq}}{\sigma_0} \leq \sqrt{1 + f^2(\phi^p) + 2f(\phi^p)\cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma_m + p}{\sigma_0}\right)}$$

d'où il vient

$$\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + p\dot{\phi}^p \leq \sigma_0\left[\dot{\varepsilon}_{eq}\sqrt{1 + f^2(\phi^p) + 2f(\phi^p)\cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma_m + p}{\sigma_0}\right)} + 3\frac{\sigma_m}{\sigma_0}\dot{\varepsilon}_m\right] + p\dot{\phi}^p$$

Le membre de droite ne dépendant plus de σ_{eq}, on cherche donc son maximum par rapport à σ_m/σ_0. Le calcul de sa dérivée par rapport à σ_m/σ_0 permet d'obtenir :

$$\frac{\dot{\varepsilon}_m}{\dot{\varepsilon}_{eq}} = \frac{f(\phi^p)\sinh\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{\sigma_m+p}{\sigma_0}\right)}{2\sqrt{1+f^2(\phi^p)+2f(\phi^p)\cosh\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{\sigma_m+p}{\sigma_0}\right)}}$$

De manière classique, on pose (voir par exemple Leblond [8])

$$\alpha = 2\frac{\dot{\varepsilon}_m}{\dot{\varepsilon}_{eq}}$$

et on calcule α^2. On obtient alors un polynôme de degré deux d'inconnue $\cosh\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{\sigma_m+p}{\sigma_0}\right)$. Sa résolution nous permet de retrouver (au terme p près) l'une des deux relations déjà établies par Leblond dans [8] :

$$\cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma_m+p}{\sigma_0}\right) = \frac{1}{f(\phi^p)}\left[\sqrt{(1+\alpha^2)(f^2+\alpha^2)}-\alpha^2\right]$$

de laquelle on déduit

$$\cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma_m+p}{\sigma_0}\right) = \cosh\left(\text{argsinh}\,\frac{\alpha}{f(\phi^p)} - \text{argsinh}\,\alpha\right)$$

puis

$$\frac{\sigma_m+p}{\sigma_0} = \frac{2}{3}\left(\text{argsinh}\,\frac{\alpha}{f(\phi^p)} - \text{argsinh}\,\alpha\right)$$

Il reste à déterminer l'expression de $\sqrt{1+f^2(\phi^p)+2f(\phi^p)\cosh\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{\sigma_m+p}{\sigma_0}\right)}$ ce qui ne pose pas de difficultés particulières compte tenu de l'expression de $\cosh\left(\dfrac{3}{2}\dfrac{\sigma_m+p}{\sigma_0}\right)$ trouvée précédemment. Avec

$$1+f^2(\phi^p)+2f(\phi^p)\cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma_m+p}{\sigma_0}\right) = \left(\sqrt{1+\alpha^2}-\sqrt{f^2(\phi^p)+\alpha^2}\right)^2$$

on obtient

$$\sqrt{1+f^2(\phi^p)+2f(\phi^p)\cosh\left(\frac{3}{2}\frac{\sigma_m+p}{\sigma_0}\right)} = \sqrt{1+\alpha^2}-\sqrt{f^2(\phi^p)+\alpha^2}$$

d'où finalement

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}:\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + p\dot{\phi}^p \leq \sigma_0 \Bigg[\Bigg(&\sqrt{\dot{\varepsilon}_{eq}^2+4\dot{\varepsilon}_m^2}-\sqrt{f^2\dot{\varepsilon}_{eq}^2+4\dot{\varepsilon}_m^2}\Bigg)\\ &+2\dot{\varepsilon}_m\left(\text{argsinh}\left(\frac{2\dot{\varepsilon}_m}{f\dot{\varepsilon}_{eq}}\right)-\text{argsinh}\left(\frac{2\dot{\varepsilon}_m}{\dot{\varepsilon}_{eq}}\right)\right)\Bigg] + p(\dot{\phi}^p-3\dot{\varepsilon}_m) \qquad (5)\end{aligned}$$

Le pseudo poteniel de dissipation s'écrit donc

$$\varphi(\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p, \dot{\phi}^p) = \sigma_0 \left[\left(\sqrt{\dot{\varepsilon}_{eq}^2 + 4\dot{\varepsilon}_m^2} - \sqrt{f^2 \dot{\varepsilon}_{eq}^2 + 4\dot{\varepsilon}_m^2} \right) \right. \\ \left. + 2\dot{\varepsilon}_m \left(\text{argsinh} \left(\frac{2\dot{\varepsilon}_m}{f \dot{\varepsilon}_{eq}} \right) - \text{argsinh} \left(\frac{2\dot{\varepsilon}_m}{\dot{\varepsilon}_{eq}} \right) \right) \right] + U_{\{0\}}(\dot{\phi}^p - 3\dot{\varepsilon}_m) \quad (6)$$

A la fonction indicatrice $U_{\{0\}}(\dot{\phi}^p - 3\dot{\varepsilon}_m)$ près, on retrouve ainsi le potentiel de dissipation telle qu'il est classiquement exprimé (voir Leblond [8] et notamment Garajeu et Suquet [5] qui ont même fournit une version correspondant à l'extension GTN [16] du modèle de Gurson). On notera que la construction qui en est proposée ici est du même type que ce qui se fait pour des critères usuels. De façon plus notable, il est remarquable que la loi de conservation de la masse apparaisse dans la définition (6) du pseudo potentiel de dissipation, en lien avec la pression p (cf. équation (5)), et ce quelle que soit la valeur de p, et donc en particulier pour $p = 0$ (cas du modèle de Gurson original).

4 Conclusion

Dans cette communication, en nous appuyant sur le cadre thermodynamique fourni par la poroplasticité des milieux saturés, nous avons pu proposer une relecture des modèles de type Gurson, le modèle classique de Gurson étant obtenu en considérant la pression du fluide nulle. Cette relecture a notamment permis de vérifier le caractère standard généralisé du modèle, moyennant une clarification du statut thermodynamique de la porosité eulérienne. On notera que cette dernière entre en fait dans la définition de la porosité plastique lagrangienne qui est véritablement la variable interne du modèle. On peut également mentionner que l'analyse qui vient d'être faite peut se transposer entièrement aux modèles basés sur des critères elliptiques tels que ceux issus des travaux de Ponte Castañeda [12] ou de Michel et Suquet [10].

Références

[1] F. Bignonnet, L. Dormieux, D. Kondo A micro-mechanical model for the plasticity of porous granular media and link with the Cam Clay model, International Journal of Plasticity 79 (2016), 259–274.

[2] J.L.Chaboche, M. Boudifa et K. Saanouni, A CDM approach of ductile damage with plastic compressibility, International Journal of Fracture, 137 (2006), 51–75.

[3] O. Coussy, Poromechanics, John Wiley and Sons, New York, 2004.

[4] P. de Buhan and L. Dormieux, A micromechanics-based approach to the failure of saturated porous media. Transport in Porous Media, 34 (1999), 47–62.

[5] M. Gărăjeu and P. Suquet, Effective properties of porous ideally plastic or viscoplastic materials containing rigid particles, J. Mech. Phys. Solids, 45 (1997), 873–902.

[6] A.L. Gurson, Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth : Part I-Yield criteria and flow rules for porous ductile media, ASME J. Engng. Materials Technol., 99 (1977), 2–15.

[7] D. Lydzba and J.F. Shao, Study of poroelasticity material coefficients as response of microstructure, Mechanics of cohesive-frictional material, 5 (2000), 149–171.

[8] J.-B. Leblond, Mécanique de la rupture ductile et fragile, Hermès, Paris, 2003.

[9] H. Maitournam, Matériaux et structures anélastiques, Editions École Polytechnique, Paris, 2017.

[10] J.C. Michel and P. Suquet, The constitutive law of nonlinear viscous and porous materials, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 40 (1992), 783–812.

[11] K. Nahshon and J. W. Hutchinson, Modification of the Gurson Model for shear failure, European Journal of Mechanics A/Solids, 27, (2008), 1–17.

[12] P. Ponte Castañeda, The effective mechanical properties of nonlinear isotropic composites, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 39 (1991), 45–71.

[13] N. Quoc Son, Stability and Nonlinear Solid Mechanics, Wiley, 2000.

[14] G. Rousselier, Ductile fracture models and their potential in local approach of fracture, Nuclear Engineering and Design, 105 (1987), 97-111.

[15] G. Rousselier, Dissipation in porous metal plasticity and ductile fracture, Journal of the Mechanics and Physics of Solids, 49 (2001), 1727–1746.

[16] V. Tvergaard and A. Needleman, Analysis of the cup-cone fracture in a round tensile bar, Acta Met., 32 (1984), 157–169.