

# Approche d'homogénéisation des matériaux à microstructures complexes : Cas des bétons recyclés\*

Ayodele Adessina<sup>a,b</sup>, Jean-François Barthélémy<sup>a</sup>, Amor Ben-Fraj<sup>a</sup>

a. Cerema IdF/ITM, 110 Rue de Paris, BP 214, 77487, Provins France.

b. Laboratoire Navier UMR 8205, 6-8 Avenue Blaise Pascal, F-77455 Marne-la-Vallée cedex 2

## Résumé :

*Dans ce travail, nous revisitons dans un premier temps le problème d'Eshelby ([2]) pour des inhomogénéités composites de type "motif morphologique représentatif" ([3]). Le cas des inhomogénéités composites ou non ellipsoïdales a été déjà traité sous forme analytique pour des motifs à sphères concentriques ([4]), sous forme semi-analytique pour des motifs à ellipsoïdes confocaux ([5]) ou encore sous forme numérique pour des cas plus complexes ([3],[6]). Pour ce dernier cas, nous proposons un modèle numérique qui, moyennant une reformulation de la condition aux limites, permet de résoudre le problème de l'inhomogénéité avec un coût de calcul moindre que les méthodes classiques de résolution numérique du problème d'Eshelby sur un domaine supposé très grand. Dans un second temps, nous présentons une approche d'estimation des propriétés mécaniques effectives des milieux hétérogènes dans le cadre des motifs morphologiques composites complexes, cadre dans lequel, à défaut d'une solution analytique, le recours à une résolution numérique par éléments finis s'avère indispensable. Pour ce faire le modèle éléments finis établi dans un premier temps a été couplé à un code d'homogénéisation pour rendre compte des propriétés mécaniques macroscopiques des matériaux à microstructures complexes comme les bétons recyclés ([7]) dont l'approche micromécanique conduit au problème de l'inhomogénéité composite. En application aux bétons recyclés justement, les propriétés mécaniques effectives de ces matériaux ont été déduites à partir des informations disponibles sur leur microstructure. L'effet des paramètres comme la fraction volumique des granulats recyclés ou de celui du vieux mortier dans le granulats recyclés sur les propriétés macroscopiques ont été aussi évalués. Enfin une confrontation avec les résultats expérimentaux est présentée en vue d'une validation du modèle.*

Bétons recyclés\* : bétons à base de granulats de démolition

**Mots clefs : micromécanique, inclusion composite, bétons recyclés**

## 1 Introduction

Dans l'approche de l'homogénéisation numérique des matériaux à microstructures complexes, le problème de l'inhomogénéité revêt une importance capitale. En effet, la détermination des champs de déformation et de contrainte, solutions du problème d'Eshelby, permet d'évaluer les tenseurs de localisation des déformations et de concentration des contraintes indispensables dans les schémas classiques d'homogénéisation. Dans la littérature, le problème de l'inhomogénéité de type "motif morphologique" a

été déjà abordé avec des solutions analytiques ou semi-analytiques pour des ellipsoïdes confocaux ([5]) ou encore sous forme numérique pour des cas plus complexes ([3],[6]). Dans ce dernier cas particulièrement, la solution issue de la résolution numérique du problème d'Eshelby tient compte du caractère borné du domaine (matrice) supposé infini dans le problème initial. De ce fait, la précision de la solution numérique dépend de la taille du domaine et de la finesse du maillage. Ce dernier facteur est souvent à l'origine du caractère onéreux (en terme de temps de calcul) du processus. Dans ce travail, nous proposons une reformulation du problème de l'inhomogénéité permettant de prendre en compte non seulement des morphologies complexes mais aussi le caractère borné du domaine représentant la matrice avec un coût de calcul moindre que les approches numériques classiques. Dans un second temps, le modèle établi sera associé à un code d'homogénéisation afin d'évaluer les propriétés effectives des matériaux dont la microstructure contient différentes configurations d'inclusions composites complexes. Enfin, une brève application à la microstructure des bétons à base de granulats recyclés sera abordée avec une confrontation des résultats avec les valeurs expérimentales.

## Description des inclusions

On se propose de modéliser les granulats recyclés à l'aide des inclusions composites sphériques pour différentes distributions des phases à l'intérieur de l'inclusion. Ce choix est guidé par la composition structurelle de ces granulats qui sont constitués de granulats naturels entourés complètement ou partiellement par l'ancien mortier comme indiqué sur la figure (1)

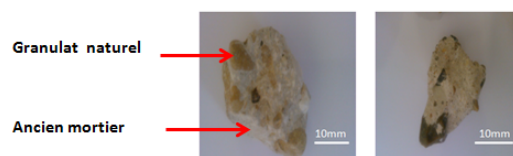


FIGURE 1 – Echantillons de granulats recyclés.

Mis à part le cas des sphères concentriques composites, nous considérons une configuration d'inclusion composite sphérique dont la phase rigide résulte de l'intersection de deux sphères (confère figure 2 ). Par souci de simplification, le paramètre  $\alpha = d/R$  sera considéré comme le paramètre de contrôle des différentes configurations avec  $d, R$  respectivement la distance entre les centres des deux sphères et le rayon de l'inclusion.

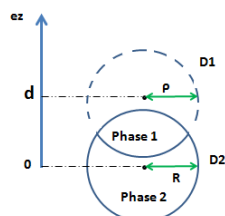


FIGURE 2 – Représentation géométrique de l'inclusion 'Non concentric' (figure 3.b).

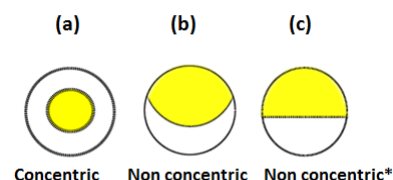


FIGURE 3 – Configurations correspondant aux différentes valeurs de  $\alpha$ .

Bien évidemment le cas  $\alpha = 0$  correspond au cas concentrique (figure 3.a) et le cas  $\alpha \rightarrow \infty$  correspond au cas non concentrique (nommé Non concentric\*) comme représenté sur la figure 3.c. En désignant

par  $w$  la fraction volumique de la phase 1 dans l'inclusion composite, on montre que la configuration 'Non concentric' (figure 3.b) est obtenue pour  $\alpha \geq 1 - \sqrt[3]{w}$  ([1]). A défaut d'une résolution analytique du problème de l'inclusion pour les cas composites non concentriques, une approche numérique basée sur les éléments finis a été adoptée avec une reformulation de la condition aux limites.

## 2 Reformulation du problème de l'inhomogénéité

Considerons le problème d'Eshelby avec une inclusion  $I$  plongée dans une matrice infinie et isotrope ( $D$ ) de rigidité  $\mathbb{C}_0$  soumise à une déformation homogène à l'infini ( $\xi \simeq \mathbf{E}^\infty \cdot \mathbf{x}$   $\|\mathbf{x}\| \rightarrow \infty$ ). Dans ([1]), on montre que la résolution numérique du problème de l'inhomogénéité pour des inclusions composites complexes peut être approchée (avec un coût de calcul amoindri que dans les approches classiques) en considérant un domaine borné comme matrice et moyennant une reformulation de la condition aux limites. Le nouveau problème s'écrit alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (D) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \quad (I) \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{grad} \boldsymbol{\xi} + {}^t \mathbf{grad} \boldsymbol{\xi}) \quad (D) \\ \boldsymbol{\xi} = \mathbf{E}^\infty \cdot \mathbf{x} + V_I \mathbf{grad} \mathbf{G}(x) : \langle \boldsymbol{\sigma} - \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_I \quad (\partial D) \end{array} \right. \quad (1)$$

avec  $\boldsymbol{\varepsilon}(x)$  le champ de déformation (solution du problème) et  $\langle u \rangle_I$  désigne la moyenne de la quantité  $u$  sur l'inclusion  $I$ . En remplaçant provisoirement  $\langle \boldsymbol{\sigma} - \mathbb{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_I$  par un paramètre tensoriel  $\mathbf{P}$ , on se ramène à un problème paramétré par  $\mathbf{E}^\infty$  et  $\mathbf{P}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{div} \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad (D) \\ \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{x}) = \mathbb{C}(\mathbf{x}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{x}) \quad (I) \\ \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2}(\mathbf{grad} \boldsymbol{\xi} + {}^t \mathbf{grad} \boldsymbol{\xi}) \quad (D) \\ \boldsymbol{\xi} = \mathbf{E}^\infty \cdot \mathbf{x} + V_I \mathbf{grad} \mathbf{G}(x) : \mathbf{P} \quad (\partial D) \end{array} \right. \quad (2)$$

Le nouveau problème s'écrit comme une superposition de deux problèmes d'élasticité linéaires avec différentes conditions aux limites ( $\mathbf{E}^\infty \cdot \mathbf{x}$  et  $V_I \mathbf{grad} \mathbf{G}(x) : \mathbf{P}$ ). On désigne alors par  $\mathbb{A}^E, \mathbb{B}^E, \mathbb{A}^P, \mathbb{B}^P$  les tenseurs de localisation des déformations et de contraintes reliant la moyenne des déformations et des contraintes sur l'inclusion au chargement imposé :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^E \rangle_I = \mathbb{A}^E : \mathbf{E}^\infty ; \quad \langle \boldsymbol{\sigma}^E \rangle_I = \mathbb{B}^E : \mathbf{E}^\infty \quad (3)$$

De même :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon}^P \rangle_I = \mathbb{A}^P : \mathbf{P} ; \quad \langle \boldsymbol{\sigma}^P \rangle_I = \mathbb{B}^P : \mathbf{P} \quad (4)$$

En posant  $\mathbf{P} = \langle \mathbf{p} \rangle_I = \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_I - \mathbb{C}_0 : \langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_I$ , la moyenne du champ de polarisation sur l'inclusion s'écrit en fonction du chargement  $\mathbf{E}^\infty$  :

$$\langle \mathbf{p} \rangle_I = (\mathbb{I} - \mathbb{B}^P + \mathbb{C}_0 : \mathbb{A}^P)^{-1} : (\mathbb{B}^E - \mathbb{C}_0 : \mathbb{A}^E) : \mathbf{E}^\infty = \mathbb{D} : \mathbf{E}^\infty \quad (5)$$

avec

$$\mathbb{D} = (\mathbb{I} - \mathbb{B}^p + \mathbb{C}_0 : \mathbb{A}^p)^{-1} : (\mathbb{B}^E - \mathbb{C}_0 : \mathbb{A}^E) \quad (6)$$

On obtient deux nouveaux tenseurs de localisation  $\mathbb{A}_c$  et  $\mathbb{B}_c$  qui tiennent compte de la correction apportée aux limites du système :

$$\langle \boldsymbol{\varepsilon} \rangle_I = \mathbb{A}_c : \boldsymbol{E}^\infty ; \quad \langle \boldsymbol{\sigma} \rangle_I = \mathbb{B}_c : \boldsymbol{E}^\infty \quad (7)$$

avec :

$$\mathbb{A}_c = \mathbb{A}^E + \mathbb{A}^p : \mathbb{D} ; \quad \mathbb{B}_c = \mathbb{B}^E + \mathbb{B}^p : \mathbb{D} \quad (8)$$

## 2.1 Résultats

Pour évaluer l'effet de la correction apportée au problème, une comparaison a été faite avec le modèle classique sans correction dans un code éléments finis. A cet effet le problème d'une inclusion composite sphérique "Non concentric" de rayon  $R$  (figure 3.b) dans une matrice de rayon  $R_{mat}$  a été résolu numériquement à l'aide des fonctions de forme quadratiques sur les 1/4 du volume de l'inclusion en tirant profit des symétries géométriques de cette dernière. L'évolution des composantes du tenseur de localisation des déformations en fonction de la taille du domaine est présentée sur les figures 4-5. Ces résultats ont été obtenus avec  $E_1 = 60$  GPa ;  $\nu_1 = 0.07$  pour la phase 1 ;  $E_2 = 15$  GPa ;  $\nu_2 = 0.2$  pour la phase 2 et  $E_m = 20$  GPa ;  $\nu_m = 0.2$  pour la matrice. La fraction volumique de la phase 1 est fixée à  $w = 0.5$ .

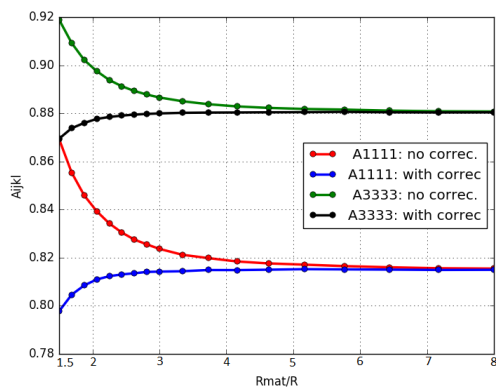


FIGURE 4 –  $A_{1111}$  and  $A_{3333}$  versus  $R_{mat}/R$ .

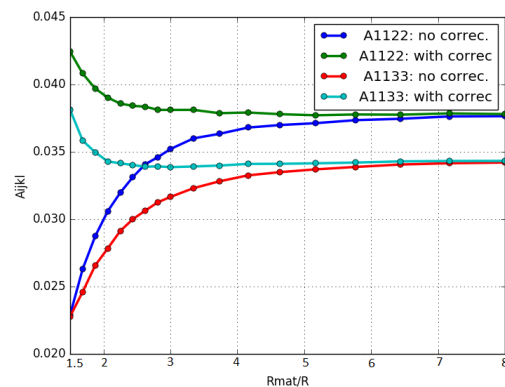
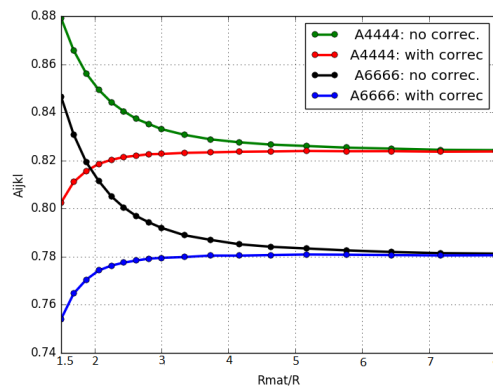


FIGURE 5 –  $A_{1122}$  and  $A_{1133}$  versus  $R_{mat}/R$ .

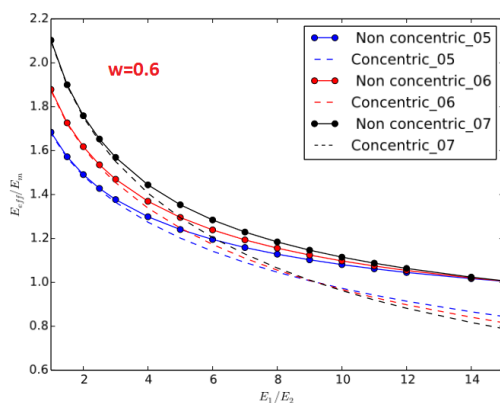
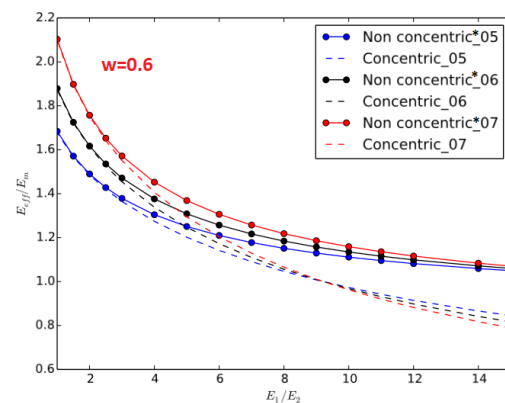
Ces résultats montrent l'efficacité de la correction apportée d'autant plus que, contrairement à l'approche classique, la convergence des résultats est obtenue pour de faibles valeurs du rapport  $R_{mat}/R$ ; ce qui laisse présager la possibilité de résoudre numériquement le problème de l'inhomogénéité avec une taille du domaine (matrice) plus réduite que dans les approches classiques.

Malgré le fait que la correction apportée nécessite un double calcul (lié aux problèmes élémentaires), le temps de calcul demeure nettement moindre par rapport au modèle classique avec une meilleure précision ([1]). La réduction de la taille de la matrice (conséquence de cette correction) permet donc de résoudre numériquement le problème d'Eshelby avec un nombre assez réduit de degrés de liberté et avec comme résultat une précision de la solution difficilement envisageable avec le modèle sans correction.

FIGURE 6 –  $A_{1212}$  and  $A_{2323}$  versus  $R_{mat}/R$ .

### 3 Homogénéisation numérique d'une structure hétérogène

Dans cette partie, nous abordons l'estimation du comportement macroscopique d'un volume élémentaire représentatif (VER) dont la microstructure contient des inhomogénéités composites comme celles représentées sur la figure 3. Pour ce faire, le modèle précédemment établi a été mis à profit en le couplant à un code d'homogénéisation basé sur le schéma de Mori-Tanaka ([8]). L'évolution du module d'élasticité homogénéisé a été évaluée en fonction du contraste entre les différentes phases de l'inclusion. Trois configurations d'inclusions sont testées montrant différentes répartitions des phases comme présentées sur la figure 3. La configuration "Non concentric" (figure 3.b) considérée dans cette partie tout comme dans le reste de cette étude est obtenue pour  $\alpha = 0.4$ ; ( $0.4 \geq 1 - \sqrt[3]{0.6} = 0.33$ ). L'inclusion concentric\_05 représente l'inhomogénéité composite constituée de sphères concentriques (figure 3.a) avec une fraction volumique de 0.5 dans le VER. La même notation a été adoptée pour les autres configurations.

FIGURE 7 – Module d'élasticité effective normalisée  $E_{eff}/E_m$  versus  $E_1/E_2$  for  $w = 0.6$ ,  $E_m = 20GPa$ ,  $E_1 = 60GPa$ ,  $\nu_1 = 0.07$ ,  $\nu_2 = 0.3$ ;  $\nu_m = 0.2$ ;  $w = 0.6$ .FIGURE 8 – Module d'élasticité effective normalisée  $E_{eff}/E_m$  versus  $E_1/E_2$  for  $w = 0.6$ ,  $E_m = 20GPa$ ,  $E_1 = 60GPa$ ,  $\nu_1 = 0.07$ ,  $\nu_2 = 0.3$ ,  $\nu_m = 0.2$ .

Ces résultats montrent l'effet de l'hétérogénéité de l'inclusion sur le comportement macroscopique du VER. Dans une configuration particulière où la phase 1 est la plus rigide, le comportement macroscopique devient sensible non seulement à la fraction volumique  $w$  de cette dernière mais aussi à sa

distribution géométrique dans l'inclusion. En effet, pour une valeur fixé du contraste  $E_1/E_2$  et de  $w$ , le module d'élasticité effectif dépend de la surface de contact entre la phase rigide de l'inclusion et la matrice. Dans le cas de l'inclusion 'concentric', l'absence de cette surface de contact empêche la transmission des efforts et par conséquent rend le milieu moins rigide que les milieux contenant les autres configurations. Cette étude de sensibilité permet de poser les prémices d'une approche de modélisation des matériaux fortement hétérogènes à l'instar des bétons à base de granulats recyclés (voir figure 1) . Ces derniers pouvant être assimilés à des inclusions composites constituées chacune d'une phase rigide (granulat naturel) entourée complètement ou partiellement d'une phase molle (ancien mortier).

## 4 Application au cas des bétons recyclés

Les bétons à base de granulats recyclés sont des bétons obtenus en substituant les granulats naturels par des granulats issus des chantiers de démolition des ouvrages en béton. Ces granulats recyclés en particulier sont assimilés à des inclusions composites comme celles représentées à la figure 3.b. Afin de déterminer l'impact de cette incorporation de granulats recyclés dans le béton, une campagne expérimentale consistant en une phase de fabrication puis d'essais mécaniques sur des bétons contenant différents pourcentages de ces granulats (0, 20, 40, 60, 80, 100%) a été menée . Parallèlement, une caractérisation du mortier a été entreprise ; ce qui a permis d'obtenir le module d'élasticité du mortier à part celui du béton recyclé obtenu dans un premier temps. Du coté du modèle, les granulats naturels ont été assimilés à des inclusions homogènes sphériques tandis que les granulats recyclé sont représentés par des inclusions composites non concentriques (figure 3.b).

Constituants	E (GPa) à 28 jours	E(GPa) à 90 jours	Coefficient de poisson
Granulat (silico-calcaire)	75	75	0.1
Mortier	32	36	0.2

TABLE 1 – Caratérisation de la microstructure

Le schéma de Mori-Tanaka a été choisi pour rendre compte de l'évolution du module d'élasticité macroscopique en fonction des différents taux de substitution. Enfin, tout en choisissant comme paramètre d'optimisation du modèle, le module d'élasticité de l'ancien mortier, les résultats présentés sur la figure (9-10) sont obtenus pour  $E_2 = 15$  GPa pour l'ancien mortier tout en fixant  $w = 0.6$  ([10]) pour des inclusions non concentriques et  $E_2 = 20$  GPa pour des inclusions composites concentriques. Bien évidemment le module de l'ancien mortier est sensible à la morphologie d'inclusion considéré. Le cas "Non concentric" permet davantage, grâce à sa surface de contact, de prendre en compte le caractère 'dégradé' des propriétés mécaniques de l'ancien mortier .

Bien évidemment, les résultats du modèle permettent de prédire la chute du module macroscopique pour des taux croissant de substitution. Cette diminution étant due aux propriétés mécaniques faibles du granulat recyclé (fragilisé par le processus de deconstruction et de concassage). Par conséquent, l'introduction de ces granulats assouplit le milieu, ce qui est bien confirmé par les prédictions du modèle.

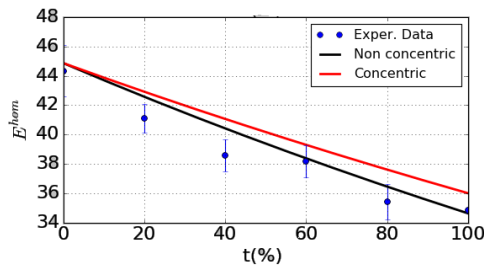


FIGURE 9 – Evolution du module d'élasticité en fonction du taux de substitution à 28 jours.

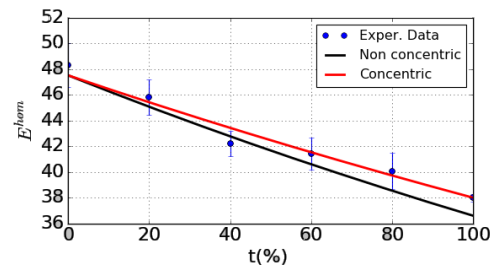


FIGURE 10 – Evolution du module d'élasticité en fonction du taux de substitution à 90 jours.

## 5 Conclusion

Cette étude a permis de revisiter dans un premier temps, le problème de l'inhomogénéité pour des cas complexes avec une approche numérique basée sur les éléments finis. Grâce à une reformulation de la condition aux limites, le nouveau modèle a permis d'obtenir une convergence des résultats pour un temps de calcul assez réduit. Ensuite, l'estimation des propriétés macroscopiques des microstructures hétérogènes a été abordée avec une mise au point sur l'effet du contraste entre les différentes phases de l'inclusion composite ainsi que celui de leurs distributions dans l'inhomogénéité composite. Enfin, une brève comparaison des résultats du modèle avec ceux issus des essais expérimentaux (sur les bétons recyclés) montre la possibilité de prédire l'évolution du module d'élasticité en fonction du taux de substitution des granulats naturels par des granulats recyclés juste en utilisant un schéma classique d'homogénéisation (Mori-Tanaka) avec des inclusions composites non concentriques. Cependant, il convient de noter que, pour une caractérisation complète de ces bétons (propriétés de rupture, de durabilité,...), la prise en compte des interfaces ainsi que de la morphologie réelle de ces granulats recyclés s'avèrent nécessaires en vue de l'amélioration du modèle.

## Références

- [1] A. Adessina, J.F. Barthélémy, F. Lavergne, A. Ben Fraj. *Effective elastic properties of materials with inclusions of complex structure*. International Journal of Engineering Science. (In Press)
- [2] J. D. Eshelby. *The Determination of the Elastic Field of an Ellipsoidal Inclusion, and Related Problems*. Proc. R. Ser. A 241 (A), 376-396. (1957).
- [3] André Zaoui. *Structural Morphology and Constitutive Behaviour of Microheterogeneous Materials*. BookTitle : Continuum Micromechanics. Editor : P. Suquet. Springer (1997).
- [4] Eveline Herve and Andre Zaoui. *n-Layered inclusion-based micromechanical modelling*. International Journal of Engineering Science (31) 1-10. (1993).
- [5] H.L.Duan and J. Wang and Z.P. Huang and Y.Zhong. *Stress fields of a spheroidal inhomogeneity with an interphase in an infinite medium under remote loading*. Proc. R. Soc. A (461) 1055-1080 (2005).
- [6] Fengjuan Chen and Igor Sevostianov and Albert Giraud and Dragan Grgic. *Evaluation of the effective elastic and conductive properties of a material containing concave pores*. Int. Jour. of Eng. Science (97) 60-68 (2015).

- 
- [7] Paula Folino and Hernán Xarguay. *Recycled aggregate concrete-Mechanical behavior under uniaxial and triaxial compression*. Construction and Building Materials (56) 21-31. (2014).
- [8] T. Mori, K. Tanaka *Average stress in matrix and average elastic energy of materials with misfitting inclusions*. Acta Metallurgica 21 (5) (1973) 571-574.
- [9] Dormieux L, Kondo D, Ulm FJ. *Microporomechanics*. John Wiley Sons; 2006.
- [10] M. Sanchez de Juan, P.A. Gutierrez. *Study of the influence of attached mortar content on the properties of recycled concrete aggregate*. Construction and Building Materials (23) 872-877. (2009).