

# Contribution à l'optimisation des coques sphériques par l'analyse limite et les algorithmes génétiques

M. BIDEQ<sup>a</sup>, L. BOUSSHINE<sup>b</sup>, G. GUERLEMENT<sup>c</sup>

a. LMPEQ, Ecole Nationale des Sciences Appliquées (ENSA) de Safi, Université Cadi Ayyad, Maroc.

b. Ecole Nationale Supérieure d'Electricité et de Mécanique (ENSEM), Université Hassan II, Casablanca, Maroc.

c. Faculté polytechnique de Mons, Université de Mons, Belgique.

## Résumé :

*Nous proposons dans ce travail un nouvel algorithme d'optimisation des coques minces sphériques en utilisant la théorie de l'analyse et les algorithmes génétiques. L'analyse limite permet de calculer la charge limite de la structure à l'amorce de l'écoulement plastique ce qui permet de tirer profit du maximum de résistance de la coque, car la coque est « optimale » lorsqu'elle travaille à la limite de sa résistance avec un minimum de matière pour supporter un chargement donné. Pour calculer la charge limite de la structure on applique les théorèmes généraux de l'analyse limite qui mènent vers une méthode directe combinant la programmation mathématique et la méthode des éléments finis. Pour converger vers la coque optimale, la méthode proposée transforme le problème d'optimisation en la résolution d'une série de problèmes d'analyse limite en faisant appel à un algorithme génétique. Ainsi, cette méthode permet de rapprocher la plasticité, la recherche opérationnelle et la génétique.*

## Abstract :

*We propose in this work a new algorithm of optimization of the spherical thin shells using limit analysis theory and genetic algorithms. The shell is "optimal" means that it works to the limit of its resistance with a minimum of material to support a given load. The limit analysis allows calculating the limit load of the structure at the beginning of the plastic flow which makes it possible to take advantage of the maximum resistance of the shell. To calculate the limit load of the structure we apply the general theorems of the limit analysis which lead to a direct method combining the mathematical programming and the finite element method. To converge to the optimal shell, the proposed method uses a genetic algorithm. The proposed method brings together plasticity, operational research and genetics.*

**Mots clefs : optimisation, coques de révolution, plasticité, analyse limite, éléments finis, algorithmes génétiques.**

## 1 Introduction

Le calcul optimal des structures a pour objectif de chercher « la meilleure » structure qui répond à une mise en service donnée et qui tient compte de tous les critères et contraintes de conception et de réalisation. Le coût global de la structure est l'un des paramètres les plus importants dont il faut tenir compte. Il englobe, entre autres, le coût de la conception (dessins et calculs), le coût de la réalisation (fabrication et assemblage) et le coût de la matière.

La minimisation du coût global de la structure doit s'opérer simultanément lors de la conception et de la réalisation en concertation entre les différents intervenants. Dans la phase de la conception, la

détermination des formes et des dimensions de la structure doit aboutir à l'utilisation du minimum de matière.

L'utilisation du minimum de matière signifie que toutes les parties de la structure travaillent à la limite de leur résistance. C'est pour cette raison que nous faisons appel à la théorie de l'analyse limite. On calcule la charge limite de la structure à l'amorce de l'écoulement plastique et la compare à la charge limite imposée. L'algorithme génétique guide la recherche vers la coque optimale en ajustant de façon heuristique les dimensions qui constituent les variables design [1, 2]. Pour être du côté de la sécurité, nous avons utilisé l'approche statique de l'analyse limite qui exige que le champ des contraintes soit statiquement et plastiquement admissible.

L'utilisation d'un algorithme génétique [3] est dictée par la nature du problème. En effet, l'utilisation des méthodes déterministes suppose que le problème est dérivable et convexe pour garantir l'obtention d'un optimum global. Les algorithmes génétiques se passent volontiers de cette hypothèse. En plus, les coques considérées sont à épaisseurs variables par tronçon (figure 1), les variables design du problème peuvent être considérées discrètes. Dans ce cas, le problème ne peut être résolu par les méthodes déterministes de la programmation mathématique.

Dans un premier temps, nous présentons la formulation du problème d'analyse limite pour les coques minces axisymétriques. Ensuite, nous utilisons un élément fini d'équilibre pour écrire le problème discrétisé. Nous proposons une nouvelle méthode d'optimisation qui fait appel à un algorithme génétique. Nous terminons par quelques exemples où les résultats obtenus seront discutés.

## 2 Le problème d'optimisation

Les coques sphériques sont obtenues par la rotation d'une génératrice de forme circulaire autour de l'axe  $\vec{z}$ .  $L$  est une longueur caractéristique de la coque qui peut présenter une ouverture de rayon  $\rho$  située dans sa partie supérieure (figure 1). On travaille dans un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

On souhaite minimiser le poids de la structure (volume de la matière utilisée) soumise à une pression interne uniforme  $P = P_0$ . Tous les éléments de la structure doivent rester en équilibre. La condition de plasticité doit être vérifiée en tout point de la structure. Grâce à la programmation mathématique, le problème de dimensionnement optimal peut être exprimé de la façon naturelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } V \\ \text{Sous les conditions suivantes:} \\ \quad P = P_0 \\ \quad \text{Equations d'équilibre} \\ \quad \text{Condition de plasticité} \\ \quad \text{Contraintes technologiques} \end{array} \right. \quad (1)$$

$V$  est le volume de la matière qui constitue la coque.

$P$  est la charge limite que peut supporter la structure et  $P_0$  la valeur imposée pour cette charge. Dans cette étude on suppose qu'il s'agit d'une pression interne uniformément répartie.

Pour garantir la stabilité de la coque, les équations d'équilibre et la condition de plasticité doivent être respectées en tout point de la structure.

Enfin, des contraintes technologiques qui rendent le dimensionnement pratique en fixant les valeurs minimale et maximale des variables design.

Les hypothèses de base adoptées sont les suivantes :

- Le matériau est macroscopiquement homogène et isotrope et possède un palier de plasticité suffisamment grand pour être considéré comme parfaitement plastique (acier, aluminium, ...).
- La coque est mince et obéit à l'hypothèse de Kirchhoff-Love concernant la conservation des normales. Ce qui ramène l'étude de la coque à celle de sa surface moyenne.
- Les déformations se passent dans des conditions isothermes.
- Le chargement est suffisamment lent, on se trouve dans des conditions quasi-statiques ; tout effet dynamique est exclu.
- Les déformations sont supposées petites ; l'expression infinitésimale des déformations est donc suffisante. On exclut tout effet d'instabilité géométrique.
- Les hypothèses générales de la théorie de la plasticité sont vérifiées.

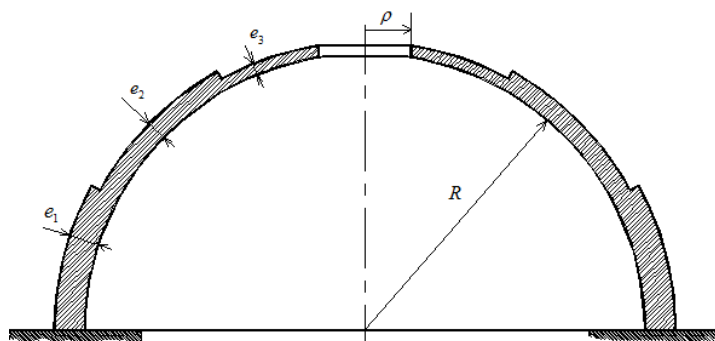


Figure 1 : Coque mince sphérique.

### 3 Equations d'équilibre

Les équations d'équilibre traduisent l'équilibre d'un tétraèdre de la coque (figure 2). Il est plus commode d'écrire ces équations utilisant les variables généralisées adimensionnelles suivantes :

$$n = \frac{N_x}{N_p}, \quad n_\theta = \frac{N_\theta}{N_p}, \quad t = \frac{T}{N_p}, \quad m = \frac{M_x}{M_p}, \quad m_\theta = \frac{M_\theta}{M_p}, \quad (2)$$

$$P = \frac{P_0 L}{2N_p}, \quad h = \frac{M_p}{N_p L} = \frac{e}{4L} \quad \text{et} \quad r = \frac{R}{L}.$$

Les lettres majuscules désignent les variables dimensionnelles.  $N$  et  $N_\theta$  sont les efforts normaux,  $T$  l'effort tranchant et  $M$  et  $M_\theta$  sont les moments de flexion.  $L$  est une longueur caractéristique de la coque.

$M_p$  et  $N_p$  sont respectivement le moment et l'effort normal limite par unité de longueur :

$$M_p = \frac{\sigma_0 e^2}{4} \quad \text{et} \quad N_p = \sigma_0 e \quad (3)$$

$\sigma_0$  est la limite élastique à la traction du matériau.

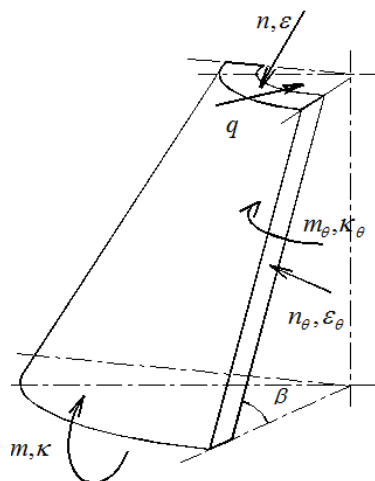


Figure 2 : Variables généralisées dans un élément de la coque axisymétrique.

Les équations d'équilibre de la coque conique, écrites en fonction des variables adimensionnelles dans un système de coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ , sont les suivantes [4,5] :

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(sn) - n_\theta &= 0, \\ \frac{d}{ds}(st) + n_\theta \operatorname{tg} \beta + 2sP &= 0, \\ h \frac{d}{ds}(sm) - hm_\theta - st &= 0, \end{aligned} \quad (4)$$

où  $m$  et  $m_\theta$  sont les moments de flexion,  $n$  l'effort normal axial,  $n_\theta$  l'effort normal circonférentiel et  $t$  l'effort tranchant adimensionnels. On précise que les efforts et les moments sont exprimés par unité de longueur,  $P$  est la pression interne adimensionnelle.

#### 4 Critère de plasticité

On adopte dans ce travail le critère de plasticité de von Mises valable pour les coques « sandwich ». L'idée de départ consiste à remplacer le matériau homogène qui constitue la coque pleine par un « sandwich idéal » constitué de deux feuillets métalliques séparés par un matériau de remplissage (figure 3).

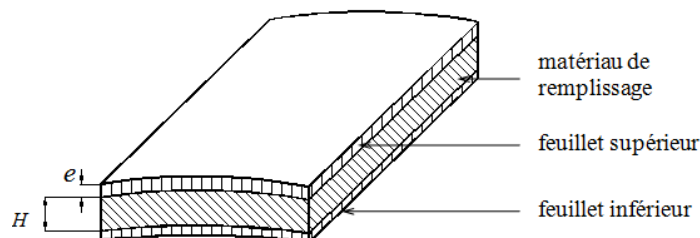


Figure 3 : Coque sandwich.

Ce critère est exprimé par les deux inégalités suivantes [6] :

pour le feuillelet supérieur :

$$(n_\theta - m_\theta)^2 - (n_\theta - m_\theta)(n - m) + (n - m)^2 \leq 1, \quad (5)$$

pour le feuillelet inférieur :

$$(n_\theta + m_\theta)^2 - (n_\theta + m_\theta)(n + m) + (n + m)^2 \leq 1. \quad (6)$$

Dans le cas des coques «Sandwich», il est préférable de remplacer les contraintes généralisées par les variables auxiliaires suivantes [7] :

$$\begin{aligned} \sigma_i &= (n + m), & \sigma_s &= (n - m) \\ \sigma_\alpha &= (n_\theta + m_\theta), & \sigma_{\alpha s} &= (n_\theta - m_\theta) \end{aligned} \quad (7)$$

où  $i$  et  $s$  indiquent respectivement les feuillets inférieur et supérieur.

L'introduction des variables auxiliaires permet de simplifier l'expression de la fonction de charge. La condition de plasticité pour les deux feuillets peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\{\sigma\}^T [D_1] \{\sigma\} \leq 1 \text{ et } \{\sigma\}^T [D_2] \{\sigma\} \leq 1 \quad (8)$$

où  $\{\sigma\}$  est le vecteur des contraintes :  $\{\sigma\} = [n_\theta \quad m_\theta \quad n \quad m]^T$ .

## 5 Formulation du problème discrétisé

Le champ des contraintes doit être statiquement admissible. Pour cette raison, il sera construit directement à partir des équations d'équilibre 4. Le concept d'élément fini d'équilibre a été proposé pour la première fois par F. De Veubeke en 1965 [8]. La première application de ce concept en plasticité est proposée par N. D. Hung [9, 10]. Les équations d'équilibre de la coque conique sont couplées, ce qui ne permet pas d'approcher les contraintes par une fonction de forme. La discrétisation retenue pour les contraintes comprend une partie qui satisfait l'équilibre homogène et une partie qui équilibre une pression uniforme le long de l'élément. Ainsi, on peut écrire le vecteur des contraintes sous la forme suivante :

$$\{\sigma\} = [M_1] \{a_1\} + [M_2] \{a_2\}, \quad (9)$$

$\{a_1\}$  et  $\{a_2\}$  sont deux systèmes de paramètres arbitraires considérés comme des variables du problème et qui s'ajouteront aux variables design.

L'équation 9 peut aussi s'écrire sous la forme matricielle condensée suivante :

$$\{\sigma\} = [M] \{a\}, \quad (10)$$

Où  $[M] = [M_1 \quad M_2]$  et  $\{a\} = [a_1 \quad a_2]^T$

Pour déterminer les éléments de la matrice  $[M]$ , on fait des hypothèses sur les composantes du vecteur  $\{a\}$  qui sont arbitraires et on pose :

$$n_\theta = a_1, \quad m_\theta = a_2 \quad (11)$$

Ces hypothèses permettent de découpler les équations d'équilibre ; leur intégration sera donc sans difficulté. Le remplacement dans les équations 4 et l'intégration par rapport à  $s$  fournissent trois autres constantes  $a_3$ ,  $a_4$  et  $a_5$ . La sixième composante du vecteur  $\{a\}$  sera la pression réduite  $P$  elle-même.

$$\begin{aligned} n &= a_1 + \frac{a_3}{s}, & t &= -tg\beta a_1 + \frac{a_4}{s} - sp, \\ m &= -\frac{tg\beta s}{2h} a_1 + a_2 + \frac{a_4}{h} + \frac{a_5}{s} - \frac{s^2}{3h} p, \end{aligned} \quad (12)$$

Un système de forces généralisées adéquat est fixé sur les facettes de l'élément de sorte que la continuité des tractions de surface soit assurée. Généralement ce système est constitué par les éléments de réduction. Dans le cas de l'élément tronconique on prend :

$$\{g\} = [n_1 \quad t_1 \quad m_1 \quad n_2 \quad t_2 \quad m_2]^T \quad (13)$$

Une matrice de connexion  $[C]$  permet d'exprimer le vecteur  $\{g\}$  en fonction de  $\{a\}$ .

$$\{g\} = [C]\{a\} \quad (14)$$

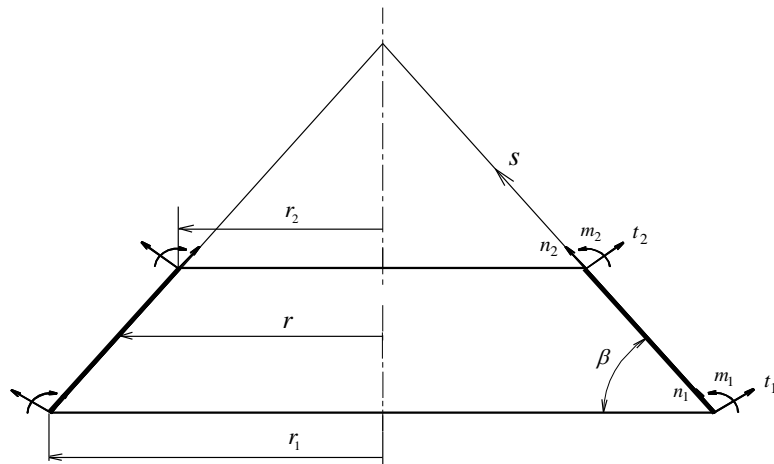


Figure 4: Elément fini tronconique d'équilibre.

Le critère de plasticité que nous avons utilisé est non linéaire, il est constitué de deux inégalités :

$$\{\sigma\}^T [D_1] \{\sigma\} \leq 1 \quad (15)$$

$$\{\sigma\}^T [D_2] \{\sigma\} \leq 1$$

L'expression (10) permet d'écrire ce critère en fonction du vecteur  $\{a\}$  sous la forme suivante :

$$\{a\}^T [K_1] \{a\} \leq 1 \quad (16)$$

$$\{a\}^T [K_2] \{a\} \leq 1$$

avec

$$[K_1] = [M]^T [D_1] [M] \quad (17)$$

$$[K_2] = [M]^T [D_2] [M]$$

En utilisant les développements précédents, le problème de dimensionnement optimal peut s'écrire sous la forme discrétisée suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } v, \\ \text{sous les conditions suivantes} \\ P = P_0 \\ \{g\} - [C]\{a\} = 0, \\ \{a\}^T [K_1] \{a\} - 1 \leq 0, \\ \{a\}^T [K_2] \{a\} - 1 \leq 0. \end{array} \right. \quad (18)$$

A ces contraintes s'ajoutent les conditions aux limites imposées aux bords de la coque.

La première condition du problème précédent traduit le fait que la pression interne soit imposée, la deuxième exprime l'équilibre de la coque et les deux dernières la condition de plasticité. Ainsi, on est certain que le champ des contraintes sera licite.

Les matrices  $[C]$ ,  $[K_1]$  et  $[K_2]$  sont des matrices globales obtenues par assemblage des matrices élémentaires correspondantes.

Le problème de dimensionnement optimal, tel qu'il a été posé ci-dessus, met en jeu plusieurs types de variables : les variables design telles que les épaisseurs de la structure  $h$ , les contraintes généralisées qui représentent les connecteurs dans chaque nœud de l'élément fini et les paramètres arbitraires

introduits par la construction de l'élément fini d'équilibre. Le vecteur des inconnues s'écrit sous la forme suivante :

$$\{x\} = [h, n_1, q_1, m_1, \dots, n_N, q_N, m_N, a_1, a_2, \dots, a_{3N}, P]^T \quad (19)$$

En plus, les matrices élémentaires  $[C]$ ,  $[K_1]$  et  $[K_2]$  dépendent de l'épaisseur  $h$ .

L'idée de base de l'introduction de l'analyse limite dans le problème d'optimisation est de faire en sorte que les variables design soient séparées des autres variables dites auxiliaires. Ainsi, le problème de dimensionnement sera transformé en une série de problèmes d'analyse limite. Dans ce cas, le problème de dimensionnement sera formulé simplement de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Minimiser } v, \\ \text{Sous la condition suivante:} \\ P = P_0 \end{array} \right. \quad (20)$$

A ce problème on peut éventuellement ajouter des contraintes technologiques.

$P$  dépend implicitement des variables design. Le problème de dimensionnement, proprement dit, ne compte plus que les variables design.

L'équation d'équilibre et la condition de plasticité se trouvent déplacées vers le problème d'analyse limite qui permet de calculer la charge limite  $P$  en appliquant le théorème de la borne supérieure. L'algorithme de résolution proposé est le suivant :

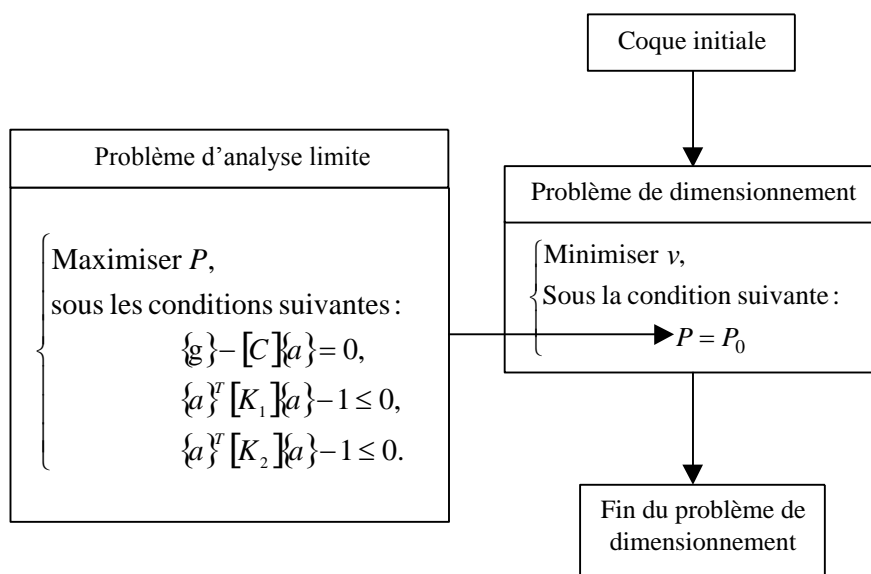


Figure 5 : Algorithme de dimensionnement par la méthode statique.

A chaque fois que le problème de dimensionnement a besoin d'évaluer la valeur de  $P$ , c'est le problème auxiliaire d'analyse limite qui fournit cette valeur calculée en fonction des variables design actuelles.

## 6 Utilisation des algorithmes génétiques

Dans le problème d'optimisation des coques, tel que nous l'avons posé ci-dessus, la charge limite  $P$  est une fonction implicite des variables design du fait qu'elle est obtenue par la résolution d'un autre problème de programmation mathématique. Il est donc difficile de s'assurer de sa convexité dans le

domaine de recherche. Pour éviter le risque de tomber dans un minimum local nous avons opté pour l'utilisation des algorithmes génétiques pour la résolution de ce problème.

## 7 Formulation du problème de dimensionnement

La règle dans les algorithmes génétiques veut que le problème soit posé comme la recherche d'un maximum contrairement à ce que l'on trouve habituellement dans les problèmes de programmation mathématique. Le problème 20 sera écrit de la façon suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Maximiser } f(h) = -v, \\ \text{Sous la conditionsuivante:} \\ P - P_0 = 0 \end{array} \right. \quad (21)$$

Les algorithmes génétiques traitent des problèmes de programmation mathématique sans contraintes. Dans le cas où les variables design sont subordonnées à des contraintes d'égalité, il est judicieux d'adjoindre les contraintes à la fonction objectif et de transformer le problème initial en un problème sans contraintes en utilisant une méthode de pénalité [11]. Le problème 21 devient alors :

$$\left\{ \text{Maximiser } f(h) = -(v + r(P - P_0)^2) \right. \quad (22)$$

où  $r$  est le coefficient de pénalité ( $r > 0$ ).

On peut également éliminer les contraintes en utilisant la fonction de Lagrange  $L(v, \lambda)$ .

$$L(vh, \lambda) = v + \lambda(P - P_0) \quad (23)$$

Le problème devient alors :

$$\left\{ \text{Maximiser } -L(v, \lambda) = -(v + \lambda(P - P_0)) \right. \quad (24)$$

$\lambda$  est un multiplicateur de Lagrange ( $\lambda \geq 0$ ) qui est considéré comme une variable du problème.

Soit  $h_1$  la valeur de  $h$ , parmi plusieurs valeurs choisies, dans un premier temps, au hasard et qui donne la plus grande valeur de  $f$ ,  $h_1$  sera considéré comme le maximum de  $f$  dans l'ensemble de départ, appelé génération 1.

La qualité de ce maximum est bien entendu très médiocre puisqu'il a été choisi au hasard. Cependant, l'algorithme génétique va tirer parti des meilleurs éléments à sa disposition pour fabriquer de toutes pièces un nouvel ensemble d'éléments répondant en moyenne de mieux en mieux au problème.

Le volume de la matière qui constitue la structure est la somme des volumes élémentaires de chaque élément fini tronconique (figure 4) :

$$v = \sum_{i=1}^{Nelt} v_i \quad (25)$$

$$v_i = 2\pi \cdot s \cdot r \cdot h$$

$$\text{avec } s = \frac{r_1 - r_2}{\cos\beta} \text{ et } r = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

L'algorithme génétique génère la première génération de coques dont le nombre d'individus est fixé au départ. L'algorithme crée une nouvelle génération en utilisant les opérateurs génétiques tels que le croisement, la mutation et l'élitisme [3]. Au bout de quelques générations, l'algorithme converge vers la coque optimale.

## 8 Résultats numériques

Nous présentons dans ce paragraphe des résultats numériques relatifs au problème de dimensionnement optimal dans le cas des coquessphériques à plusieurs tronçons.



La figure 6 montre l'évolution de l'épaisseur aux cours des générations dans le cas d'une coque hémisphérique comportant un trou de rayon 0,10. La charge limite imposée est  $P_0 = 0,2$  (adimensionnelle) [12]. La courbe montre une convergence rapide de la solution dans le cas d'un nombre d'individus plus grand, mais le temps de calcul est plus important dans ce cas.

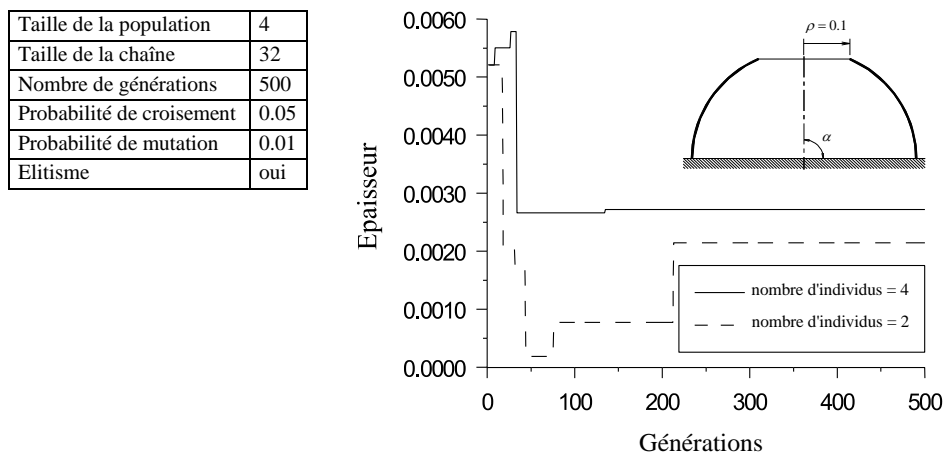


Figure 6 : Evolution de l'épaisseur en fonction des générations.

La figure 7 montre qu'une probabilité de mutation de l'ordre de 0,08 favorise l'exploration de l'espace des solutions et le problème converge après une cinquantaine de générations. Une valeur plus grande de ce paramètre engendre des oscillations de la solution comme le montre la figure 8.

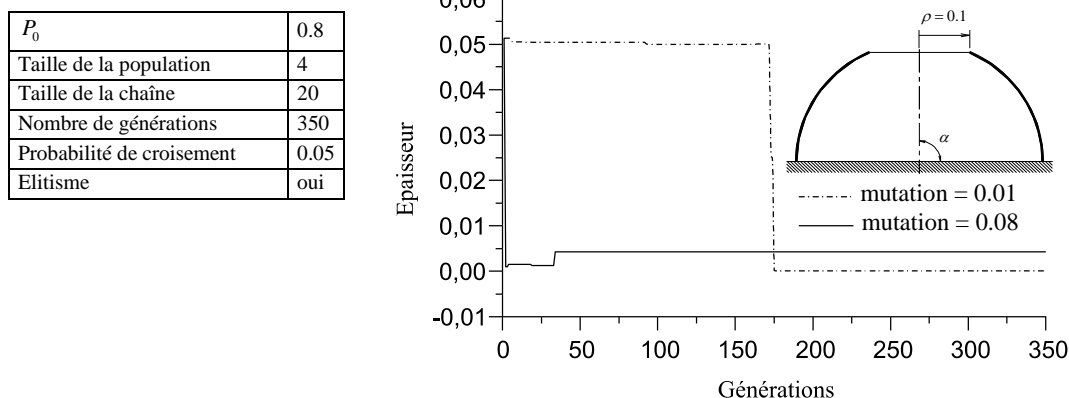


Figure 7: Influence de la probabilité de mutation.

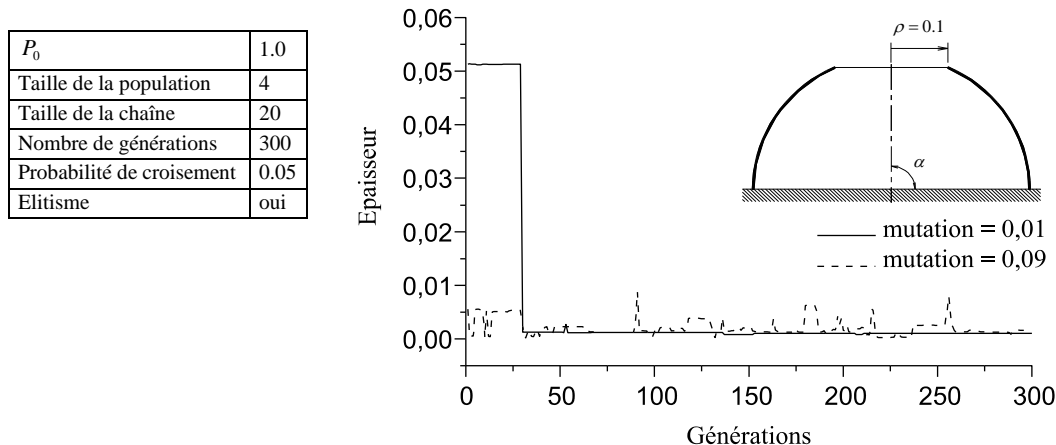


Figure 8: Influence de la probabilité de mutation.

La figure 9 montre que l'utilisation de la technique de l'élitisme améliore nettement le temps de calcul et la qualité de la solution obtenue.

$P_0$	1.0
Taille de la population	4
Taille de la chaîne	20
Nombre de générations	150
Probabilité de croisement	0.05

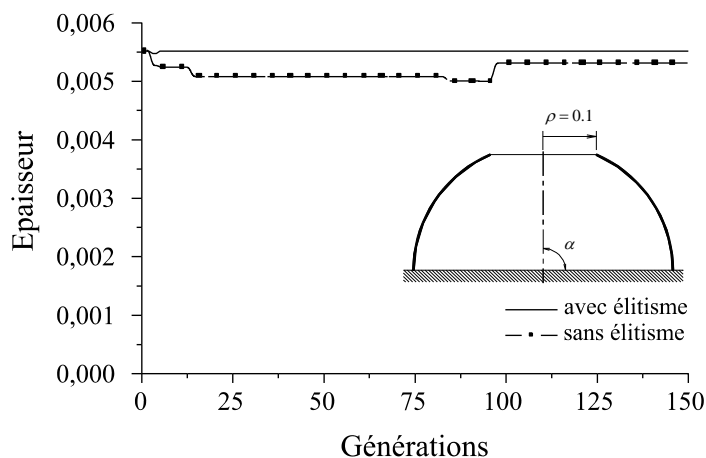


Figure 9: Influence de l'utilisation de la technique de l'élitisme.

Coque sphérique à deux tronçons

$P_0$	0.8
Taille de la population	4
Taille de la chaîne	30
Nombre de générations	50
Probabilité de croisement	0.5
Probabilité de mutation	0.05

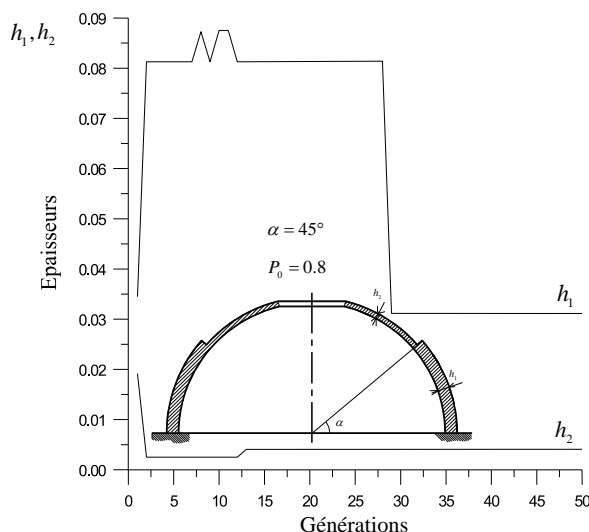


Figure 10 : Epaisseurs dans le cas d'une sphère encastrée-libre à deux tronçons ( $\alpha = 45^\circ$ ).

La figure ci-dessus montre l'évolution des épaisseurs au cours des générations dans le cas d'une coque à deux tronçons. L'épaisseur  $h_2$  atteint l'optimum au bout d'une douzaine de générations. L'algorithme continue de chercher pour trouver un autre minimum pour l'épaisseur  $h_1$  au bout d'une trentaine de générations.

## 9 Conclusion

Un algorithme de dimensionnement optimal des coques minces sphériques a été proposé. Il combine la méthode statique de l'analyse limite et les algorithmes génétiques. L'utilisation de l'algorithme génétique est justifiée par le fait que l'on possède peu d'informations sur la fonction objectif et les contraintes et leurs dérivées ; le risque de confondre un optimum local avec un optimum global est majeur. L'AG permet de contourner cette difficulté.

Cependant le réglage des paramètres de l'algorithme génétique doit passer par plusieurs essais pour déterminer les valeurs qui donnent de bons résultats dans un temps raisonnable.

Dans les exemples que nous avons traités, nous avons pu constater qu'une population de 4 individus donne de bons résultats. Mais il faut être conscient que cette taille de population dépend de la puissance de calcul dont on dispose, des méthodes utilisées (sélection, opérateurs génétiques, ...), du nombre de variables considérées et de la fonction d'adaptation.

Si la fonction à optimiser comporte peu d'optima locaux et un optimum global net, la population nécessaire sera plus petite que dans le cas d'une fonction comportant de nombreux optima locaux. Une probabilité de mutation de l'ordre de 0.08 et l'utilisation de la technique de l'élitisme donnent de meilleurs résultats.

L'utilisation d'un nombre d'éléments finis important rend le temps de calcul très élevé du fait du caractère itératif du problème.

## 10 Références

- [1] L. Bousshine, M. Bideq, M. Kouam, G. Guerlement, Analyse limite des coques cylindriques à plusieurs tronçons par les méthodes cinématique et statique, *European Journal of Computational Mechanics*, vol. 11, n° 1, Hermes, 2002, pp. 9-37
- [2] M. Bideq, L. Bousshine, M. Kouam, G. Guerlement, Dimensionnement optimal des coques minces par l'approche statique de l'analyse limite et les algorithmes génétiques, *European Journal of Computational Mechanics*, vol.12, n° 5, Hermes,2003, pp. 623-654
- [3] Holland J. H. *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, The University of Michigan Press, 1976.
- [4] Hodge Jr. P. G., *Limit analysis of rotationally symmetric plates and shells*, Prentice Hall, New York, 1963
- [5] Flugge W., *Stress in shells*, Springer, Berlin, 1960
- [6] Hodge Jr. P. G., The linearisation of plasticity problems by means of non-homogeneous materials, *Proc. I.U.T.A.M. Symp.* 1958.
- [7] Nguyen D. H., *Sur la plasticité et le calcul des états limites par éléments finis*, Collection des publications de la Faculté des Sciences Appliquées n° 98, Liège, Belgique, 1985
- [8] Freijs de Veubeke B., *Displacement and Equilibrium Models in the Finite Element Method. Stress Analysis*, ed. Zienkiewicz, Wiley and Sons, 1965
- [9] Nguyen D. H., *Analyse limite rigide-plastique par une méthode quasi-directe*, Sciences et Techniques de l'Armement, Mémorial de l'Artillerie Française, 2nd facc, 1973
- [10] Nguyen D. H., *Direct limit analysis via rigid-plastic finite element*, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol 8 N° 1, 1976
- [11] Fiacco A. V. and McCormick G. P., *Non-linear programming, sequential unconstrained minimization techniques*, WILEY, New-York, 1968
- [12] M. Bideq, S. Jalal, L. Bousshine, *Borne inférieure de la charge limite des coques cylindriques par une approche directe*, 1er Congrès International sur les Ingénieries Civile, Mécanique et Electrique pour l'Energie CMEE 2015, Marrakech, 16-19 novembre 2015