

Modélisation d'instabilités de films tombants en présence d'un champ électromagnétique

L. ICHALAL^a, N. AMATOUSSE^b, N. MEHIDI-BOUAM^c

a. Laboratoire de Physique Théorique, Faculté des Sciences Exactes, Université de Bejaia, Bejaia, Algérie, e-mail: ichallallynda@yahoo.fr

b. Laboratoire de Physique Théorique, Faculté des Sciences Exactes, Université de Bejaia, Bejaia, Algérie, e-mail: amatousse@yahoo.fr

c. Laboratoire de Physique Théorique, Faculté des Sciences Exactes, Université de Bejaia, Bejaia, Algérie, e-mail: nadbouam@yahoo.fr

Résumé :

Un modèle analytique simple a été développé pour décrire les instabilités à l'interface fluide-air d'un écoulement axisymétrique dans une conduite cylindrique. Les fluides en écoulement sont newtoniens et incompressibles. La technique suivie combine une méthode aux résidus pondérés à un développement aux grandes longueurs du champ de vitesses. L'influence de différents paramètres (diamètre de la conduite, intensité du champ électromagnétique...) sur le taux de croissance des perturbations a été examinée via une étude de stabilité linéaire.

Abstract :

A simple analytical model was developed to describe instabilities at the interface of an electrically conducting fluid. The fluid, considered newtonian and incompressible, is flowing down a cylindrical pipe. The followed technique combines a weighted residual method with a long-wavelength expansion of the velocity field. The influence of various parameters (pipe diameter, electromagnetic field intensity) on the growth rate of the disturbances was examined through a linear stability analysis.

Mots clefs : *Instabilités d'interface, Fluide électroconducteur, résidus pondérés, Stabilité linéaire.*

1 Introduction

La stabilité de l'écoulement d'un film d'un fluide newtonien sur des parois solides a été largement étudiée et commentée dans la littérature scientifique. Hsieh et Ladikov [1,2,3] ont examiné l'effet d'un champ magnétique uniforme sur la stabilité de l'écoulement d'un fluide sur un plan horizontal et incliné. Très récemment, Ruyer Quil et Manneville [4,5] ont développé un modèle simple pour décrire les instabilités de la surface libre dans un écoulement d'un fluide newtonien.

Des modèles à deux équations ont également été élaborés pour l'étude de l'effet d'un champ magnétique vertical [6,7,8,9].

L'étude décrite ici concerne l'écoulement en présence d'un champ électromagnétique d'une couche d'un fluide newtonien. La méthodologie est la même que celle suivie par Ruyer-Quil et Manneville

[4,5]. Elle combine un développement en gradient du champ de vitesse à une méthode aux résidus pondérés.

2 Le problème étudié

Nous nous sommes intéressés à l'écoulement sous l'effet d'un champ électromagnétique d'un film d'un fluide newtonien et incompressible. Le fluide s'écoule à l'intérieur d'une conduite cylindrique verticale de rayon R_a (Voir Figure 1). Les instabilités à l'interface fluide-air sont axisymétriques sur une large gamme de paramètres, d'où le choix d'un système d'axes bidimensionnel, Ox dans la direction de l'écoulement et Or dans la direction radiale.

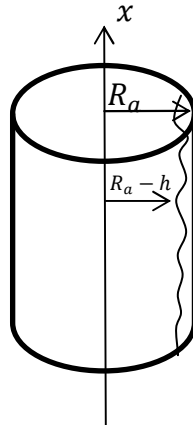


Figure 1. Géométrie du problème

Les équations régissant le mouvement de ce fluide sont celles de la magnétohydrodynamique :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(vr)}{\partial r} + u_x = 0 \quad (1)$$

$$\rho(v_t + vv_r + uv_x) = -P_r + \mu(v_{rr} + \frac{1}{r}v_r - \frac{v}{r^2} + v_{xx}) + \mu_0 \sigma(E_0 H_0 + \mu_0 v H_0^2) \quad (2)$$

$$\rho(u_t + vu_r + uu_x) = -P_x + \mu(u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + u_{xx}) - \rho g \quad (3)$$

Où (v, u) sont les composantes du champ de vitesse \vec{v} , P la pression du fluide, μ la viscosité dynamique, ρ la densité du fluide, σ sa conductivité et μ_0 la perméabilité magnétique.

La surface libre du fluide est définie par l'équation $r = R_a - h(x, t)$, $h(x, t)$ étant l'épaisseur du fluide.

Les conditions aux limites de ce problème sont :

Conditions cinématiques :

L'adhérence du fluide à la paroi du cylindre se traduit par la divergence nulle du champ de vitesses. Autrement dit, en $r = R_a$, on a :

$$u(x, r, t)|_{R_a} = 0, v(x, r, t)|_{R_a} = 0 \quad (4)$$

L'imperméabilité de l'interface fluide-air est décrite par l'équation cinématique :

$$h_t + uh_x = -v \quad (5)$$

Conditions dynamiques :

Les conditions aux limites dynamiques projetées sur la normale et la tangente à l'interface s'écrivent :

$$2h_x (u_x - v_r) + (1-h_x^2)(u_r + v_x) = 0 \quad (6)$$

$$P = \frac{2\mu}{1+h_x^2} [u_x h_x^2 + v_r + h_x(u_r + v_x)] + \frac{\gamma}{(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{1+h_x^2}{r} + h_{xx} \right) \quad (7)$$

γ étant la tension superficielle.

Les équations du mouvement sous forme adimensionnelle :

En passant aux grandeurs sans dimension, les équations du mouvement et les conditions aux limites correspondantes s'écriront comme suit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(vr)}{\partial r} + u_x = 0 \quad (8)$$

$$R\varepsilon (u_t + v u_r + u u_x) = -\varepsilon P_x + (u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \varepsilon^2 u_{xx}) - Fr \quad (9)$$

$$R\varepsilon^2 (v_t + v v_r + u v_x) = -P_r + \varepsilon (v_{rr} + \frac{1}{r} v_r - \frac{v}{r^2} + \varepsilon^2 v_{xx}) + \alpha H_a^2 - \varepsilon H_a^2 v \quad (10)$$

$$h_t + u h_x = -v \quad (11)$$

$$2\varepsilon^2 h_x (u_x - v_r) + (1 - \varepsilon^2 h_x^2)(u_r + \varepsilon^2 v_x) = 0 \quad (12)$$

$$P = \frac{2}{1+\varepsilon^2 h_x^2} [\varepsilon^3 u_x h_x^2 + \varepsilon v_r + \varepsilon h_x(u_r + \varepsilon^2 v_x)] + \frac{RW}{(1+h_x^2)^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{1+\varepsilon^2 h_x^2}{r} + \varepsilon^2 h_{xx} \right] \quad (13)$$

Où $R = \rho U_N h_N / \mu$ est le nombre de Reynolds, $Fr = \rho g h_N^2 / \mu U_N$ le nombre de Froude, $W = \gamma / \rho h_N U_N^2$ le nombre de Weber, $H_a = h_N \mu_0 H_0 \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}$ le nombre de Hartmann et $\alpha = E_0 / \mu_0 H_0 U_N$ le nombre électrique. Le paramètre ε traduit ici le caractère ondes longues des modes instables.

3 Le modèle mathématique :

La cohérence de l'écoulement suivant l'épaisseur du film permet de formuler des modèles simples en termes de l'épaisseur locale et de grandeurs moyennées ne dépendant que de la dimension spatiale x et du temps t [5].

Nous avons pu simplifier les équations obtenues en éliminant la pression du problème. En ne gardant par la suite que les termes d'ordre inférieur à ε^3 , nous avons obtenu l'équation suivante :

$$\begin{aligned} & -R\varepsilon \frac{Du}{Dt} + u_{rr} + \frac{u_r}{r} + \varepsilon^2 \left[u_{xx} - \frac{\partial}{\partial x} (v_r |_{R_a-h} + v_r) \right] + \varepsilon^2 H_a^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_{R_a-h(x,t)}^r v dr \\ & -\varepsilon \alpha H_a^2 h_x - Fr - \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial x} \int_{R_a-h(x,t)}^r \left(\frac{v_r}{r} - \frac{v}{r^2} \right) dr - RW\varepsilon \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{R_a-h(x,t)} \left(1 - \frac{\varepsilon^2 h_x^2}{2} \right) \right) + \varepsilon^2 h_{xxx} \right] \\ & = 0 \end{aligned}$$

La méthode de calcul utilisée pour décrire les instabilités de la surface libre est celle de Galerkin [5]. Comme fonctions tests, nous avons choisi un profil similaire à celui de l'écoulement de base. Il est de type logarithmique.

Ce choix de méthode est inhérent aux résultats satisfaisants obtenus dans l'étude de la dynamique linéaire et non linéaire de films liquides tombants [4,5,10], en présence ou non d'un champ électromagnétique.

Le modèle réduit du second ordre obtenu, cohérent à l'ordre un en ε , ne fait intervenir qu'un nombre restreint de champs hydrodynamiques. Formellement, il s'écrit :

$$F_0(q, h) + \varepsilon R \{ F_1(q, h) q_t + \tilde{F}(\partial_x, q, h) \} + \varepsilon^2 F_2(\partial_{xx}, q, h) = 0 \quad (15)$$

Il sera complété par l'équation cinématique (11) écrite sous forme intégrale :

$$h_t + \frac{q_x}{2\pi(R_a - h(x,t))} = 0 \quad (16)$$

4 Etude de stabilité linéaire :

En étudiant la stabilité de l'écoulement de base suivant une approche temporelle du problème, nous avons pu examiner l'influence de différents paramètres (Rayon de la conduite Ra , intensité des champs électrique et magnétique) sur le taux d'amplification des perturbations. Comme on le remarque sur la figure 1, une augmentation du nombre de Hartmann Ha fait diminuer le taux de croissance ω_i . Le même constat est fait quand on augmente le nombre électrique α en fixant les autres paramètres du problème (figure 3). Cette diminution est cependant beaucoup moins significative. L'influence du rayon de la conduite est représentée sur la figure 4. Pour la gamme de paramètres choisie, on remarque que le taux d'amplification augmente avec l'augmentation du rayon Ra .

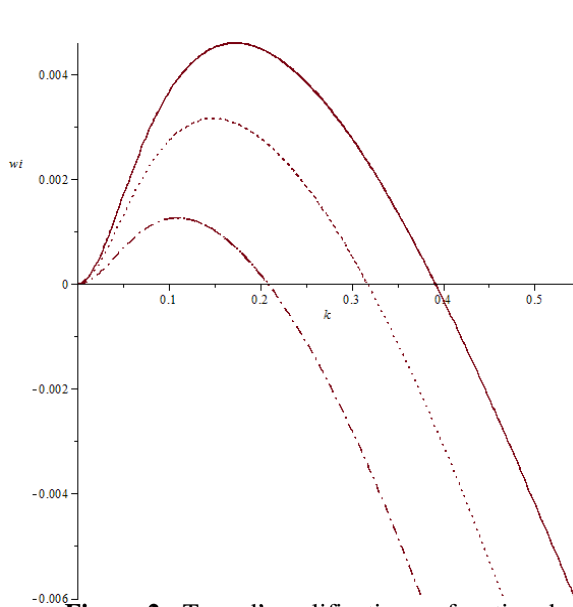


Figure 2 : Taux d'amplification en fonction du nombre d'onde k pour $W = 10/(Ra R)$, $R = 40$, $\alpha = 0.75$
 — $Ha = 0.5$ $Ha = 1$ - - - $Ha = 1.5$

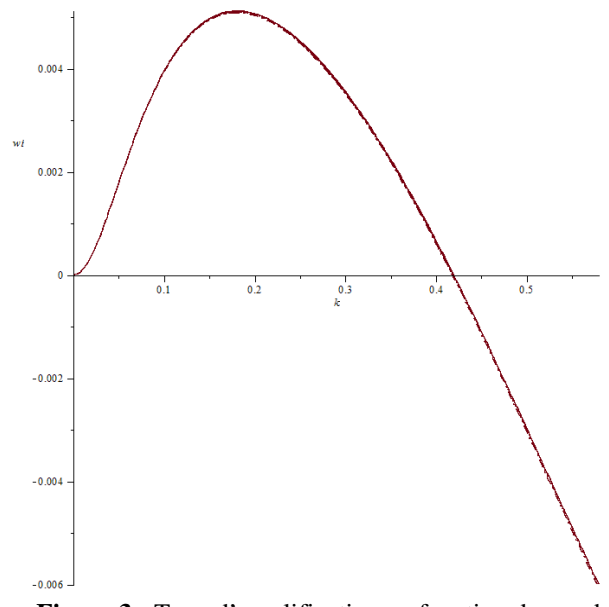


Figure 3 : Taux d'amplification en fonction du nombre d'onde k pour $W = 10/(Ra R)$, $R = 40$, $Ha = 0.1$
 — $\alpha = 0.5$ $\alpha = 1$ - - - $\alpha = 1.5$

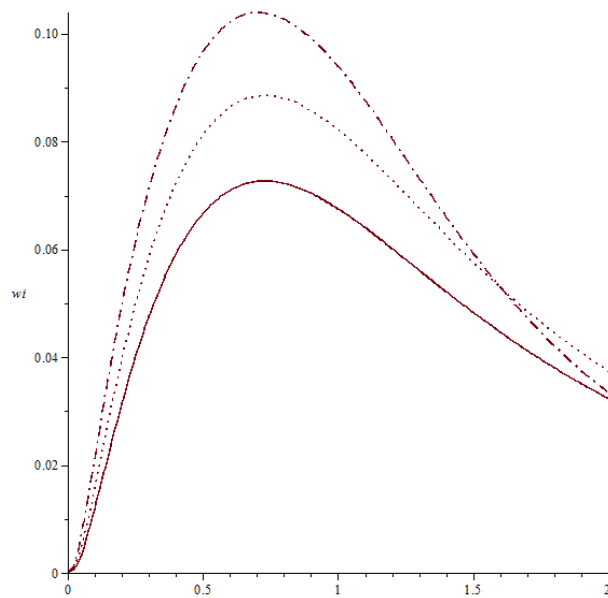


Figure 4 : Taux d'amplification en fonction du nombre d'onde k pour $W = 0$, $\alpha = 0.1$, $Ha = 0.1$, $R = 10$
 — $Ra = 3$ $Ra = 4$ - - - $Ra = 10$

5 Conclusion

Notre travail se veut une contribution à l'étude des instabilités à l'interface de films tombants en présence d'un champ électromagnétique. Le modèle simplifié établi est obtenu au moyen d'une méthode aux résidus pondérés combinée à un développement en gradient du champ de vitesse. Il est représenté par deux équations couplées décrivant l'évolution de l'épaisseur $h(x, t)$ et du débit local $q(x, t)$. Pour analyser l'effet des champs électrique et magnétique, une étude de stabilité linéaire a été effectuée.

6 Références

- [1] D.Y. Hsieh, Stability of a conducting fluid film flowing down inclined plane in a magnetic field. *Phys. Fluid* 8 (1965) 1785-1791.
- [2] Ladikov Yu P., Flow stability of a conducting liquid flowing down inclined plane in the presence of a magnetic field, *Fluid Dynamics*, (1966) 1-4.
- [3] H. Ait Abderrahmane, N. Mehidi, M. Amaouche, Stabilité de la surface libre d'un film mince de fluide conducteur d'électricité en écoulement sur un plan incliné en présence de champ magnétique et électrique, *CFM* 2003.
- [4] C. Ruyer-Quil, P. Treveleyan, F. Giorgiutti-Dauphiné, C. Duprat and S. Kalliadasis, Modelling film flows down fibre, *J. Fluid Mech.* 603 (2008) 431-462.
- [5] C. Ruyer-Quil, Dynamique d'un film mince s'écoulant le long d'un plan incliné, Thèse, Ecole polytechnique, 1999.
- [6] S. Korsunsky, Long waves on a film layer of conducting fluid film flowing down inclined plane in an electromagnetic field. *EurJ.Mech. B/fluids* 18 (1999) 295-313
- [7] B.S. Dandapat, A. Mukhopadhyay, Finite amplitude long wave instability of a film of conducting film flowing down an inclined plane in presence of electromagnetic field, *Int. J. of Applied Mechanics and Engineering* 8 (2003) 379-383.
- [8] M. Amaouche, H. Ait Abderrahmane and L. Bourdache, Hydromagnetic thin film flow: Linear stability. *Physical Review* 88 (2013) 023028.
- [9] H. Ait Abderrahmane, G.H. Vatistas, Effect of uniform and constant electromagnetic fields on the stability of thin layer of liquid metal flow, *Fusion Engineering and Design* 83 (2008) 661-666.
- [10] N. Mehidi, N. Amatousse, Modélisation d'un écoulement coaxial en conduite circulaire de deux fluides visqueux, *C. R. Mécanique* 337 (2009) 112-118.