

Une méthode numérique robuste et rapide pour la résolution des équations de Serre-Green-Naghdi décrivant les ondes de surfaces de grandes longueurs d'ondes

N. FAVRIE^a, S. GAVRILYUK^b

a. Aix Marseille Univ, CNRS, IUSTI, 5 rue E. Fermi, 13453 Marseille Cedex 13, France,
nicolas.favrie@univ-amu.fr

b. Aix Marseille Univ, CNRS, IUSTI, 5 rue E. Fermi, 13453 Marseille Cedex 13, France,
sergey.gavrilyuk@univ-amu.fr

Résumé :

Une nouvelle méthode numérique pour la résolution des équations de Serre-Green-Naghdi (SGN) décrivant les ondes dispersives pour les écoulements en eau peu profonde est proposée. D'un point de vue mathématique, les équations SGN sont les équations d'Euler-Lagrange pour un Lagrangien soumis à une contrainte différentielle : la conservation de la masse. Une des difficultés principales pour la résolution de ces équations est la nécessité de résoudre un problème elliptique à chaque pas de temps. Cette étape est la plus coûteuse lors de la résolution numérique de ce système. L'idée est ici de remplacer ce Lagrangien par une famille à un paramètre de Lagrangien étendu pour lequel les équations d'Euler-Lagrange correspondantes sont hyperboliques. Avec cette approche, le Lagrangien initial est retrouvé à la limite (par exemple quand le paramètre est grand.). Le modèle hyperbolique est résolu numériquement par une méthode de type Godunov. Les solutions numériques sont comparées avec des solutions exactes des équations de SGN. Cette méthode est appliquée pour l'étude des ondes de 'Favre' pour les ressauts ondulaires produits lors de la réflexion d'un écoulement à surface libre sur un obstacle immobile. Cette nouvelle méthode permet de réduire nettement les temps de calcul par rapport aux méthodes nécessitant l'inversion d'un opérateur elliptique.

Abstract :

A new numerical method for solving the Serre-Green-Naghdi (SGN) equations describing dispersive waves on shallow water is proposed. From the mathematical point of view, the SGN equations are the Euler-Lagrange equations for a 'master' lagrangian submitted to a differential constraint which is the mass conservation law. One major numerical challenge in solving the SGN equations is the resolution of an elliptic problem at each time instant. It is the most time-consuming part of the numerical method. The idea is to replace the 'master' lagrangian by a one-parameter family of 'extended' lagrangians, for which the corresponding Euler - Lagrange equations are hyperbolic. In such an approach, the 'master' lagrangian is recovered by the 'extended' lagrangian in some limit (for example, when the corresponding parameter is large). The corresponding hyperbolic system is numerically solved by a Godunov type method. Numerical solutions are compared with exact solutions of the SGN equations. It appears that

the computational time in solving the hyperbolic system is much lower than in the case where the elliptic operator is inverted. The new method is, in particular, applied to study the 'Favre waves' which are non-stationary undular bores produced after reflection of the fluid flow with a free surface at an immobile wall.

Mots clefs : Equations dispersives, hyperbolicité, méthode de type Godunov

Introduction

Les systèmes dispersifs en physique admettent souvent une formulation variationnelle (ondes de surfaces, mécanique quantique, mécanique des solides, fluides capillaire, liquide à bulles, etc (cf. [33], [1], [31], [8], [2], [16])). L'étude mathématique et la résolution numérique de ce type de problème est difficile. Par exemple, pour les équations de Serre-Green-Naghdi décrivant les ondes de surface ([28], [18], [19], [30]), il est nécessaire d'inverser un opérateur elliptique à chaque pas de temps ([21], [23]). Cette inversion augmente fortement le temps de calcul. Une autre difficulté numérique concerne la difficulté de créer des conditions aux limites transparentes (sans réflexion) permettant de simuler des ondes traversant le domaine de calcul. Ce problème reste ouvert pour les équations dispersives générales alors que pour les équations hyperboliques homogènes cette question est résolue ([20], par exemple).

Une idée naturelle est de remplacer les équations dispersives par des équations hyperboliques approchées. Cette idée a été initialement développée par Cattaneo [5] qui a remplacé l'équation de conduction de la chaleur par un système hyperbolique avec relaxation. Cette approche a été étendue ensuite pour d'autres systèmes dissipatifs ([27],[7]). Cependant, cette approche n'est pas valable quand les équations du mouvement sont celle d'Euler Lagrange pour un Lagrangien. L'énergie doit être conservée alors qu'elle diminue quand une relaxation est ajoutée.

L'idée est de considérer un Lagrangien 'étendu' où les gradients et les dérivées temporelles sont remplacées par de nouvelles variables qui, dans une certaine limite, deviennent des gradients ou des dérivées temporelles véritables. Cette limite n'est pas visqueuse, l'énergie du système est conservée, mais permet de 'dispenser' l'énergie du Lagrangien 'maître' dans des degrés de libertés supplémentaires. Cette approche est proche de celle proposée pour les modèles pour les matériaux micromorphiques ([9], [22], [12], [13]). La formulation du Lagrangien étendu est un processus intuitif car il n'est pas unique, cependant un certain nombre de propriétés doivent être vérifiées :

- Les équations d'Euler-Lagrange pour le Lagrangien étendu doit être inconditionnellement hyperbolique.
- Un paramètre doit être choisi tel que dans une certaine limite, le Lagrangien permette de retrouver le Lagrangien initial.
- Dans le cas linéarisé, une condition du type Whitham doit être vérifiée. Les vitesses de phases du Lagrangien 'étendu' doivent encadrer celle du Lagrangien original. Cette condition implique la stabilité linéaire des solutions en équilibre.

Dans un premier temps, les équations de Serre-Green-Naghdi sont rappelées. Un Lagrangien 'étendu' est ensuite proposé et analysé. Des résultats numériques démontrant les qualités de cette approche, que ce soit au niveau convergence qu'au niveau du temps de calcul, sont proposés.

Equation de Serre-Green-Naghdi (SGN)

Considérons les équations de SGN décrivant les ondes longues dispersives dans les écoulements en couches minces sur un support plat. Les effets dissipatifs sont ici négligés. Sous ces hypothèses, les équations s'écrivent :

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial hu}{\partial x} &= 0, \\ \frac{\partial hu}{\partial t} + \frac{\partial hu^2 + p}{\partial x} &= 0, \text{ avec } p = \frac{gh^2}{2} + \frac{1}{3}h^2\ddot{h}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ici, $h > 0$ est la hauteur d'eau totale et u est la vitesse moyenne horizontale, les 'points' désignent la dérivée matérielle :

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x}, \quad \ddot{h} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \dot{h}. \quad (2)$$

Le système (1) admet une formulation variationnelle avec un Lagrangien (voir [31],[14], [15], [16]) :

$$\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{hu^2}{2} - W(h, \dot{h}) \right) dx, \quad (3)$$

où le potentiel s'écrit :

$$W(h, \dot{h}) = \frac{gh^2}{2} - \frac{h\dot{h}^2}{6}. \quad (4)$$

Pour simplifier la dérivation des équations, nous utiliserons les coordonnées Lagrangiennes massiques q au lieu des coordonnées Eulériennes x :

$$q = \int_0^X h_0(s) ds, \quad (5)$$

où X désigne les coordonnées Lagrangienne classique, et $h_0(X)$ est la valeur initiale de la hauteur d'eau.

On pose $\tau = \frac{1}{h}$. Le Lagrangien s'écrit :

$$\mathcal{L} = \int_{-\infty}^{\infty} L dq, \quad L = \frac{u^2}{2} - \tilde{W}(\tau, \tau_t), \quad (6)$$

avec

$$u = x_t, \quad \tau = x_q, \quad \tilde{W}(\tau, \tau_t) = \frac{g}{2\tau} - \frac{1}{6} \left(\frac{\partial 1/\tau}{\partial t} \right)^2. \quad (7)$$

Les équations de conservations en coordonnées Lagrangiennes massiques s'écrivent :

$$\tau_t - u_q = 0, \quad u_t + p_q = 0, \quad (8)$$

avec

$$p = -\frac{\delta \tilde{W}}{\delta \tau} = -\left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tau} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \tilde{W}}{\partial \tau_t} \right) \right) = \frac{g}{2\tau^2} + \frac{2}{3} \frac{\tau_t^2}{\tau^5} - \frac{1}{3} \frac{\tau_{tt}}{\tau^4}. \quad (9)$$

Ce système admet une équation de conservation sur l'énergie qui s'écrit :

$$\left(\frac{u^2}{2} + e \right)_t + (pu)_q = 0, \quad e = \frac{g}{2\tau} + \frac{1}{6} \frac{\tau_t^2}{\tau^4}. \quad (10)$$

La méthode du Lagrangien 'étendu' pour les équations de SGN

Avec $\tau = x_q$, et $u = x_t$, une variable de déséquilibre η est introduite. Cette variable doit être telle qu'à l'équilibre $\eta = \frac{1}{\tau}$. Le choix de ce Lagrangien est purement intuitif, les équations obtenues devant vérifier les propriétés soulignées en introduction. Nous considérons un Lagrangien étendu de la forme :

$$\hat{\mathcal{L}} = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{L} dq, \quad \hat{L} = \frac{x_t^2}{2} + \frac{\eta_t^2}{6} - \frac{g}{2\tau} - \alpha(\tau, \eta) \frac{(\tau\eta - 1)^2}{6}. \quad (11)$$

Pour garantir la convergence (faible) de la solutions des équation d'Euler-Lagrange pour ce Lagrangien(11) vers les solutions du système original (8)-(9), la fonction $\alpha(\tau, \eta)$ doit être grande. Dans la suite, nous considérerons cette fonction comme constante $\alpha(\tau, \eta) = \lambda$. Une discussion sur le choix de ce Lagrangien est proposée dans Favrie et Gavriluyk (2017) [11] notamment sur l'influence du choix de $\alpha(\tau, \eta)$ sur les propriétés du modèle obtenu.

Les équations d'Euler-Lagrange impliquent :

$$\begin{cases} \tau_t - u_q = 0, \\ u_t + \left(\frac{g}{2\tau^2} - \frac{\lambda}{3}(\tau\eta - 1)\eta \right)_q = 0, \\ \eta_t = w, \\ w_t = -\lambda(\eta\tau - 1)\tau. \end{cases} \quad (12)$$

Ce système est inconditionnellement hyperbolique, les vitesses d'ondes sont :

$$\xi_{1,2} = 0, \quad \xi_{3,4} = \pm \sqrt{\frac{g}{\tau^3} + \frac{\lambda}{3}\eta^2} \quad (13)$$

et admet une équation de conservation sur l'énergie :

$$\left(\frac{u^2}{2} + \frac{w^2}{6} + \frac{g}{2\tau} + \lambda \frac{(\eta\tau - 1)^2}{6} \right)_t + (pu)_q = 0, \quad p = \frac{g}{2\tau^2} - \frac{\lambda}{3}(\tau\eta - 1)\eta. \quad (14)$$

Pour le modèle original, la vitesse de phase $c_p = \omega/k$ pour les ondes linéarisées au voisinage de $u = 0$, $\tau = \tau_0$ s'écrit :

$$c_p^2 = \frac{g}{\tau_0^3 + \frac{k^2}{3\tau_0}} \quad (15)$$

Pour le nouveau modèle, la vitesse de phase s'écrit : (voir [11] pour les détails) :

$$(c_p^\pm)^2 = \frac{\frac{g}{\tau_0^3} + \frac{\lambda}{3\tau_0^2} + \frac{\lambda\tau_0^2}{k^2} \pm \sqrt{\left(\frac{g}{\tau_0^3} + \frac{\lambda}{3\tau_0^2} + \frac{\lambda\tau_0^2}{k^2} \right)^2 - 4\frac{g\lambda}{\tau_0 k^2}}}{2}. \quad (16)$$

La vitesse de phase correspondant au signe 'moins' (plus) est appelée vitesse de phase *lente* (*rapide*). Ces vitesses de phases encadrent la vitesse de phase du system original (voir Figures 1). Une condition de type Whitham est ici satisfaite. On peut voir sur la Figure 1 que les ondes lentes correspondent à la dispersion de SGN (15) si λ est suffisamment grand. L'erreur sur l'équation de dispersion peut s'écrire :

$$(c_p)^2 - (c_p^-)^2 = \frac{g}{\lambda} \frac{g^2 k^4}{(k^2 + 3\tau_0^4)^3} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \quad (17)$$

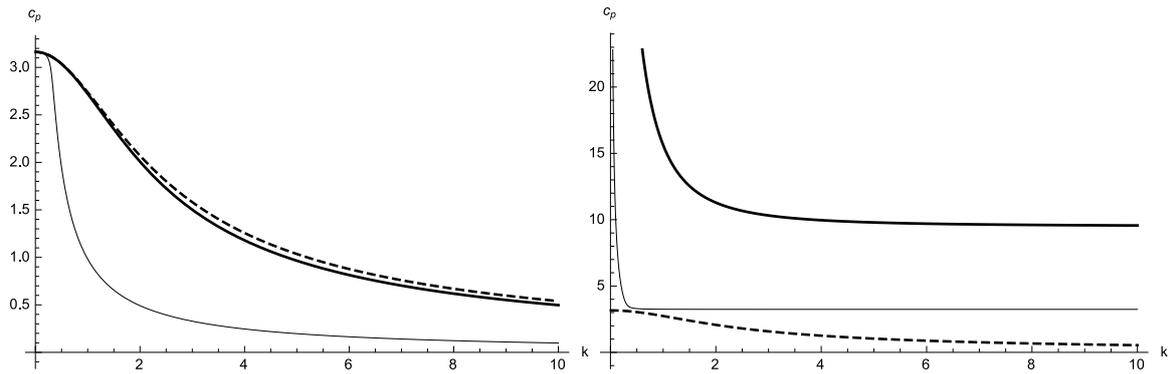


FIGURE 1 – Vitesse de phase lente c_p^- (à gauche) et rapide c_p^+ (à droite) définies par (16) en fonction du nombre d'onde k pour les équations de SGN (trait pointillé) et pour le nouveau modèle $\lambda = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ (trait fin) et $\lambda = 160 \text{ m}^2 \text{ s}^{-2}$ (trait épais). La valeur initiale de τ_0 est 1 m^{-1} . Quand le paramètre λ est suffisamment grand, la vitesse de phase lente est proche de celle obtenue pour le système original (15). La vitesse de phase rapide est toujours plus grande que celle du modèle original. Elle décrit l'évolution de hautes fréquences 'parasites' dues à la modification du Lagrangien.

Le choix sur le paramètre λ sera un compromis entre l'erreur due à l'approximation du modèle et l'erreur liée à l'approximation numérique.

Stratégie de résolution

Nous utilisons ici la forme Eulérienne du système (12) afin de pouvoir comparer les résultats numériques avec les résultats obtenus par d'autres approches. Le système s'écrit :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{S}, \quad (18)$$

avec $\mathbf{U} = (h, hu, h\eta, hw)^T$, $\mathbf{F} = (hu, hu^2 + \frac{gh^2}{2} - \frac{\lambda}{3}(\frac{\eta}{h} - 1)\eta, h\eta u, hwu)^T$ et $\mathbf{S} = (0, 0, hw, -\lambda(\frac{\eta}{h} - 1))^T$.

Le modèle étant hyperbolique, une approche de type Godunov classique avec un découpage de type Strang peut être utilisée. On résout successivement la partie hyperbolique :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = 0, \quad (19)$$

et un système d'équations aux dérivées partielles ordinaires (traitement du terme source \mathbf{S}) :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mathbf{S}. \quad (20)$$

Le détail de ce schéma numérique est disponible dans [11].

Résultats numérique

Onde solitaire

La solution onde solitaire des équations de SGN ($h(\xi), u(\xi)$), où $\xi = x - Dt$ et D est une vitesse d'onde constante, est :

$$\begin{aligned} h(\xi) &= h_1 + (h_2 - h_1) \operatorname{sech}^2 \left(\frac{\xi}{2} \sqrt{\frac{3(h_2 - h_1)}{h_2 h_1^2}} \right), \\ u(\xi) &= D \left(1 - \frac{h_1}{h(\xi)} \right), \end{aligned} \quad (21)$$

avec $D^2 = gh_2$. Dans cet exemple, $h_1 = 10 \text{ m}$, $h_2 = 12.1 \text{ m}$ et $g = 10 \text{ m/s}^2$. La densité et la vitesse sont initialisés avec la solution exacte et on impose $\eta = h$ et $w = 0$. La position du maximum de l'onde solitaire, se propageant de droite à gauche, est initialement situé à $x = 200 \text{ m}$. La condition initiale imposée ici n'est pas la solution exacte de notre système étendu. En effet, la pression donnée par le système SGN $p = \frac{1}{2}gh^2 + \frac{1}{3}h^2\ddot{h}$ n'est pas hydrostatique contrairement à celle du système étendu. La solution du système étendu va donc évoluer. Sur la Figure 2, la solution est représentée pour $\lambda = 300 \text{ m}^2/\text{s}^2$ et $\lambda = 3000 \text{ m}^2/\text{s}^2$, pour la même taille de maille $\Delta x = 0.125 \text{ m}$. Pour $\lambda = 3000 \text{ m}^2/\text{s}^2$ la différence avec la solution exacte du système original (trait fin) est pratiquement invisible à l'oeil nu.

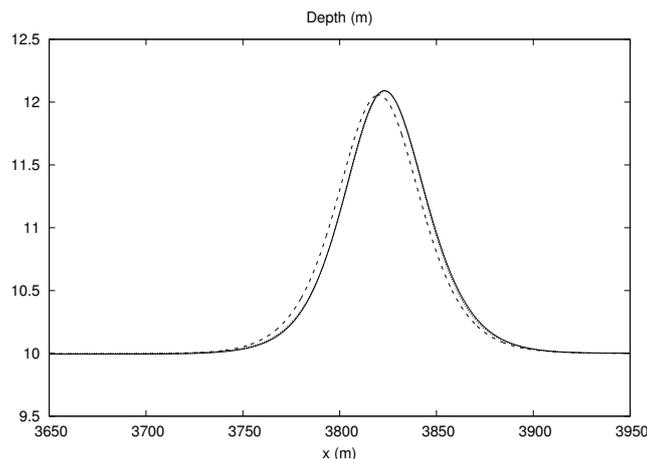


FIGURE 2 – Comparaison entre l'onde solitaire correspondant à $\lambda = 300$ (trait pointillé) et $\lambda = 3000$ (points) avec la solution exacte de l'onde solitaire des équations de SGN (trait fin) pour une taille de maille de $\Delta x = 0.125 \text{ m}$. La différence entre la solution exacte est la solution pour $\lambda = 3000$ est pratiquement invisible.

Ondes de Favre

On considère ici une couche de liquide avec une surface libre impactant un obstacle (coup de bélier avec surface libre) [10], [32]. A cause de la dispersion, l'onde réfléchiée est un train d'onde de différentes longueurs et amplitudes (appelée ondes de Favre, voir Figure 3). Le modèle de SGN permet de résoudre ce problème jusqu'à une certaine vitesse d'impact où le déferlement devra être pris en compte (voir les détails dans [17]). Afin d'éviter les difficultés dues aux conditions aux limites, un impact symétrique est considéré. La vitesse d'impact u_0 est liée au nombre de Froude relatif F par la formule suivante :

$$u_0 = \sqrt{gh_0} \left(F - \frac{1 + \sqrt{1 + 8F^2}}{4F} \right) \quad (22)$$

Sur la Figure 4, les résultats numériques obtenues à l'instant $t = 54 s$ sont comparés pour des maillages de 2000, 4000 et 8000 cellules avec ceux obtenus par [21] (en bleu) sur un maillage de 32000 cellules. La convergence est parfaitement visible. Une bonne estimation de l'amplitude de la première onde peut ainsi être obtenue sur un maillage plus grossier. Sur la Figure 5, l'évolution du temps de calcul avec la

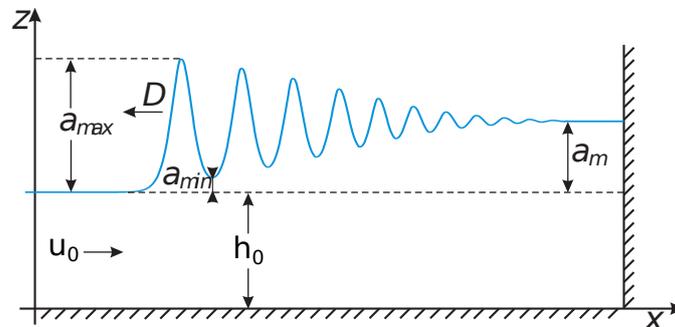


FIGURE 3 – Représentation schématique des ondes de Favre

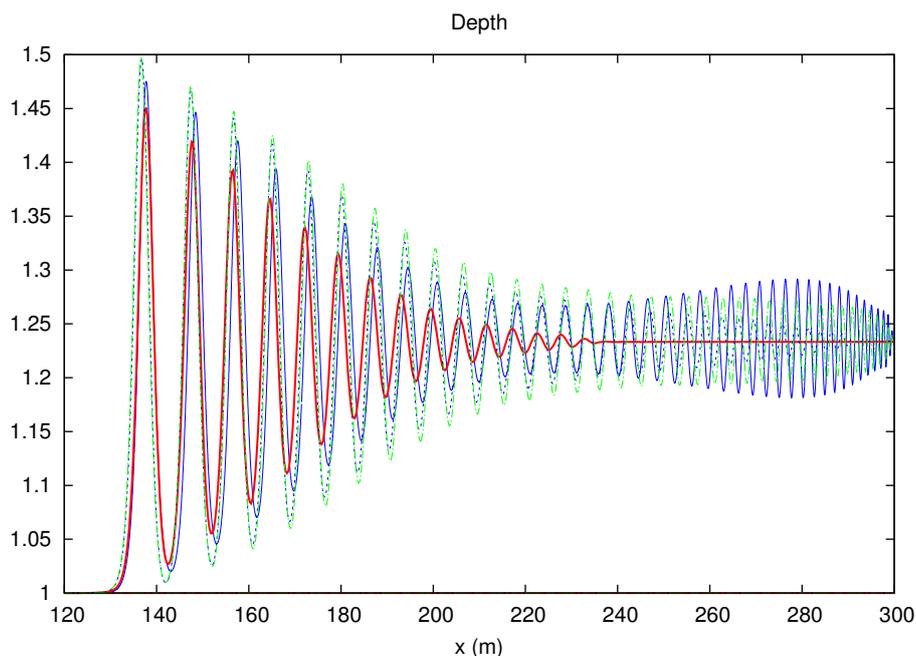


FIGURE 4 – Comparaison à l'instant $t = 54s$ pour un nombre de Froude de $Fr = 1.16$ pour l'expérience de Favre correspondant à une hauteur d'eau initiale de $h_0 = 1 m$ et une vitesse d'impact $u_0 = 0.2\sqrt{gh_0} m/s$, $g = 10 m/s$. Les résultats obtenus par la méthode proposée dans [21] sur un maillage de 32000 cellules (trait bleu) sont comparés avec ceux obtenu avec l'extension à l'ordre 2 (Limiteur Van Leer) pour notre approche avec $\lambda = 300$ pour différents maillage : 2000 (trait fort rouge), 4000 (ligne pointillée bleu), 8000 (Trait mixte vert). L'accord est très bon et la convergence est assurée.

taille de maille (normalisée par le temps de calcul pour 2000 cellules) sont représentés. L'augmentation du temps de calcul avec le raffinement est nettement plus lent avec la nouvelle approche. De plus, la nouvelle approche est facilement parallélisable par décomposition de domaine car les équations sont hyperboliques.

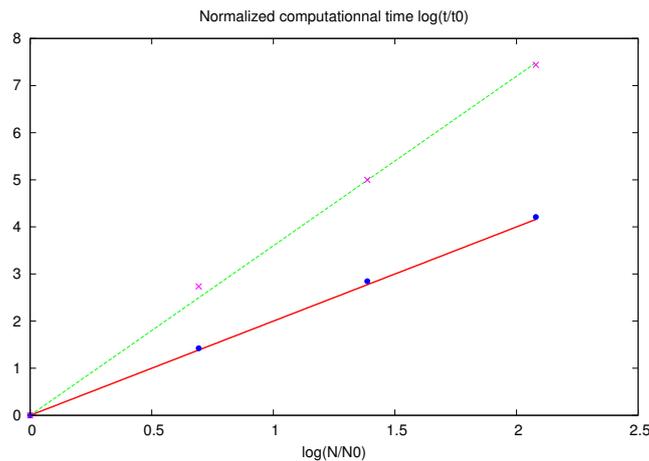


FIGURE 5 – Temps de calcul normalisé par $N_0 = 2000$ pour l’approche [21] (croix) et l’approche hyperbolique (point). Les pentes 3.8 (trait fin vert) et 2 (trait fort rouge) sont représentées. Le temps de calcul augmente nettement plus vite pour l’approche [21].

Sur la Figure 6, les résultats numériques sont comparés avec les résultats expérimentaux de [32]. L’accord est parfait jusqu’au déferlement qui intervient pour des nombres de Froude supérieur à 1.25.

Conclusion

Une nouvelle approche numérique basée sur une approche de Lagrangien étendu est proposée pour résoudre les équations dispersives. Cette approche transforme les équations dispersives de Serre-Green-Nagdhi en équations hyperboliques. Le temps de calcul est fortement réduit et il est maintenant possible de penser à la résolution de calcul multi-D avec un temps de calcul raisonnable. L’extension pour des ordres très élevés (WENO, ADER) peuvent être facilement développées grâce à cette approche.

Références

- [1] Berdichevskii, V. L. Variational Principles of Continuum Mechanics, Springer Verlag, 2009.
- [2] Benzoni-Gavage, S., Noble, P. & Rodrigues, L. M. (2014) Slow modulations of periodic waves in Hamiltonian PDEs, with applications to capillary fluids, *J. Nonlinear Science*, **24**, N 4, 711-768.
- [3] Besse, C., Ehrhardt, M. & Lacroix-Violet (2016) Discrete Artificial Boundary Conditions for the Korteweg-de Vries Equation, *Numer. Meth. for PDEs*, **33**, 5, p. 1455 - 1484.
- [4] Besse, C., Mésognon-Gireauy, B. & Noble, P. (2016) Artificial boundary conditions for the linearized Benjamin-Bona-Mahony equation <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01305360/document>.
- [5] Cattaneo, C. (1958) Sur une forme d’équation de la chaleur éliminant le paradoxe d’une propagation instantanée, *Comptes Rendus de l’Académie des Sciences*, **247**, pp. 431-433.
- [6] Davis, S. F. (1988) Simplified second-order Godunov-type methods. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 9(3), 445-473.
- [7] Dumbser, M., Peshkov, I., Romenski, E. & Zanotti, O. (2016) High order ADER schemes for a unified first order hyperbolic formulation of continuum mechanics : viscous heat - conducting fluids and elastic solids, *J. Comp. Physics*, **314**, 824-862.

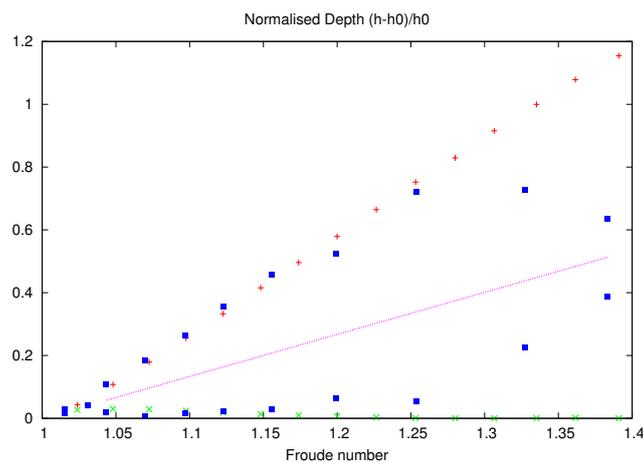


FIGURE 6 – Comparaison entre les résultats expérimentaux de [32] (carré) et les résultats numérique. Les carrés du haut représente l'amplitude de la première ondes, ceux du bas représentent la profondeur du premier creux. L'accord est parfait jusqu'à un nombre de Froude de 1.25 qui correspond au début du déferlement qui ne peut être décrit par ce modèle. (voir [17] pour une meilleure description du déferlement). La ligne médiane correspond à la solution des équations de Saint-Venant.

- [8] El, G. A. & Hoefler, M. (2016) Dispersive shock waves and modulation theory, *Physica D*, **333**, 11-65.
- [9] Eringen, A. C. *Microcontinuum Field Theories, I : Foundation and Solids*, Springer Verlag, 1999.
- [10] Favre, H. 1935 *Ondes de translation dans les canaux découverts*. Dunod (Paris).
- [11] Favrie, N. and Gavriluk, S. (2017), A rapid numerical method for solving Serre-Green-Naghdi equations describing long free surface gravity waves, *Nonlinearity*, 30(7), 2718.
- [12] Forest, S. (2009) Micromorphic approach for gradient elasticity, viscoplasticity and damage, **135**, 117-131.
- [13] Forest, S. (2016) Nonlinear regularisation operators as derived from the micromorphic approach to gradient elasticity, viscoplasticity and damage. *Proc. Royal Soc. A* **472** : 20150755.
- [14] S. Gavriluk (1994) Large amplitude oscillations and their "thermodynamics" for continua with "memory", *European J. Mechanics, B/Fluids*, **13**, N 6, 753-764.
- [15] Gavriluk, S. L. & Teshukov, V. M. (2001) Generalized vorticity for bubbly liquid and dispersive shallow water equations, *Continuum Mechanics and Thermodynamics* **13**, 365 - 382.
- [16] Gavriluk, S. (2011) *Multiphase Flow Modeling via Hamilton's principle*. In the book : *Variational Models and Methods in Solid and Fluid Mechanics, CISM Courses and Lectures, v. 535* (Eds. F. dell'Isola and S. Gavriluk), Springer, 2011.
- [17] Gavriluk, S. L., Liapidevskii, V. Yu. & Chesnokov, A. A. (2016) Spilling breakers in shallow water : applications to Favre waves and to the shoaling and the breaking of the solitary wave (submitted).
- [18] Green, A. E., Laws, N. & Naghdi, P. M. (1974) On the theory of water waves. *Proc. R. Soc. Lond. A*, **338**, 43-55.
- [19] Green, A. E. & Naghdi, P. M. (1976) A derivation of equations for wave propagation in water of variable depth. *J. Fluid. Mechanics*, **78**, 237-246.

- [20] Hedstrom, G. W. (1979) Nonreflecting Boundary Conditions for Nonlinear Hyperbolic Systems, *J. Comp. Physics*, **30**, 222-237.
- [21] Le Métayer, O., Gavriluk, S., & Hank, S. (2010). A numerical scheme for the Green-Naghdi model. *Journal of Computational Physics*, 229(6), 2034-2045.
- [22] Neff, P., Ghiba, I. D., Madeo, A., Placidi, L., and Rosi, G. (2014). A unifying perspective : the relaxed linear micromorphic continuum. *Continuum Mechanics and Thermodynamics*, 26(5), 639-681.
- [23] Lannes, D. & Marche, F. (2015) A new class of fully nonlinear and weakly dispersive Green-Naghdi models for efficient 2D simulations, *J. Comp. Physics*, **282**, 238 - 268.
- [24] Liapidevskii, V. Y., and Gavrilova, K. N. (2008). Dispersion and blockage effects in the flow over a sill. *Journal of applied mechanics and technical physics*, 49(1), 34-45.
- [25] LeVeque, R. J. (2002) *Finite volume methods for hyperbolic problems* (Vol. 31). Cambridge university press.
- [26] Montecinos, G. I., Lopez-Rios, J. C., Lecaros, R., Ortega, J. H. & Toro, E. F. (2016) An ADER-type scheme for a class of equations arising from the water-wave theory, *Computers and Fluids* **132** 76-93.
- [27] Peshkov, I. & Romenski, E. (2016) A hyperbolic model for viscous Newtonian flows. *Continuum Mech. Thermodyn.* **28**, p. 85-104, DOI 10.1007/s00161-014-0401-6.
- [28] Serre, F. (1953) Contribution à l'étude des écoulements permanents et variables dans les canaux. *La Houille blanche*, **8**, 830-872, 1953.
- [29] Toro, E. F. (2013) *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics : a practical introduction*. Springer Science and Business Media.
- [30] Su, C. H. & Gardner, C. S. (1969) Korteweg - de Vries Equation and Generalisations. III. Derivation of the Korteweg - de Vries Equation and Burgers Equation, *J. Math. Physics*, **10**, 536-539.
- [31] Salmon, R. (1998) *Lectures on Geophysical Fluid Mechanics*, Oxford University Press, 1998.
- [32] Treske, A. (1994) Undular bores (favre-waves) in open channels-experimental studies. *Journal of Hydraulic Research*, 32(3), 355-370.
- [33] Whitham, G. B. (1974) *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley & Sons.