

Modélisation d'un film mince viscoélastique en écoulement sur une paroi cylindrique verticale

N. MEHIDI BOUAM^a, H. DJESSAS^a, N. AMATOUSSE^a

a.Laboratoire de Physique Théorique (LPT), Département de Physique-Université A. Mira de Béjaïa Targa Ouzemour 06000, Algérie. nadbouam@yahoo.fr

Résumé :

On s'intéresse à l'instabilité aux grandes ondes d'un écoulement bidimensionnel d'un film mince viscoélastique s'écoulant par gravité sur une paroi cylindrique verticale. Les effets de la tension superficielle sont pris en considération. Un modèle basé sur une méthode aux résidus pondérés est développé. Ceci a permis de ramener le problème à une équation d'évolution de l'interface et du débit local, à laquelle en adjoint l'équation de la conservation de la masse. La stabilité linéaire de l'écoulement est déterminée en cherchant les solutions sous forme de modes normaux. Cela nous a permis de mettre en évidence une instabilité capillaire. Les effets du paramètre viscoélastique et de la courbure sur les diagrammes de stabilité neutre pour cette instabilité sont étudiés.

Abstract :

Our interest is to model the long wavelength instability in a two dimensional flow of a thin viscoelastic fluid film flowing down a vertical cylinder under gravity. The effects of surface tension are included. A weighted residual integral method obtains a nonlinear evolution equation of the film interface and the flow rate, which is completed by a mass conservation equation. A normal mode approach is used to obtain the linear stability solutions for the film flow. It is shown that for certain ranges of the controlling dimensionless parameters the long wave instability is a capillary instability. The influence of viscoelastic parameter and curvature on the neutral stability diagrams for this instability are investigated.

Mots clefs : Fluide viscoélastique, instabilité capillaire, interface, cylindre vertical, résidus pondérés, ondes longues .

1 Modèle et notations

Le travail présenté ci-dessous concerne l'étude de la stabilité d'un film mince viscoélastique en écoulement par gravité le long de la paroi externe d'une conduite cylindrique verticale de section circulaire et de rayon R_c . Le fluide est viscoélastique et suit une loi de comportement de type Walter B' [1], il est caractérisé par une densité ρ , une viscosité μ et un temps de relaxation λ . Le

problème est régi par les équations bidimensionnelles de la quantité de mouvement et de la masse. Notons que la tension superficielle σ est prise en considération à travers le saut de la contrainte normale à l'interface.

La mise sous forme adimensionnelle des équations est obtenue en utilisant u_N la vitesse moyenne de l'écoulement, h_N l'épaisseur uniforme du film et L une longueur caractéristique suivant la direction de l'écoulement. Pour prendre en considération l'hypothèse de grande longueur d'onde, on introduit le paramètre $\varepsilon = h_N/L \ll 1$.

Les équations adimensionnées du problème s'écrivent donc

$$R\varepsilon \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{v}}}{\partial t} + (\bar{\mathbf{v}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{v}} \right) = -\nabla p + \Delta \bar{\mathbf{v}} + \nabla \bar{\boldsymbol{\tau}} + G \bar{\mathbf{e}}_x \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = 0 \quad (2)$$

$$\bar{\boldsymbol{\tau}} = R\gamma\varepsilon \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{e}}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \bar{\mathbf{e}} - \nabla \mathbf{v} \bar{\mathbf{e}} - \bar{\mathbf{e}} \cdot \nabla \mathbf{v}^T \right) \quad (3)$$

Où p est la pression, $\bar{\boldsymbol{\tau}}$ le tenseur des contraintes et $\bar{\mathbf{e}}$ désigne le tenseur taux de déformation du fluide. $\bar{\mathbf{v}} = u \bar{\mathbf{e}}_x + v \bar{\mathbf{e}}_r$, où $\bar{\mathbf{e}}_x$ et $\bar{\mathbf{e}}_r$ sont des vecteur unitaires selon la direction axiale x et transversale r .

Les paramètres sans dimension sont le nombre de Reynolds $R = \frac{\rho h_N u_N}{\mu}$, le paramètre viscoélastique

du fluide $\gamma = \frac{\lambda \mu}{\rho h_N^2}$, la courbure $\frac{1}{\eta} = \frac{h_N}{R_c}$, le nombre de weber $W = \frac{\sigma}{\rho u_N^2 h_N}$, $G = \frac{R g h_N}{u_N^2} = \frac{R}{F^2}$, F est

le nombre de Froude. g désigne l'accélération gravitationnelle. Notons que le paramètre viscoélastique γ est pris d'ordre un en ε .

La méthode de calcul utilisée pour déterminer l'équation d'évolution du film $h(x,t)$ et du débit local $q(x,t)$ est celle de Galerkin [3]. Les fonctions tests et les fonctions poids utilisées sont les mêmes, elles prennent la forme de l'écoulement de base qui est de type logarithmique [4]. L'équation d'évolution est obtenue en évaluant le résidu qui correspond à la fonction poids $g(r)$:

$$\int_{\eta}^{\eta+h} \left(u_{rr} + \frac{u_r}{r} \right) g(r) r dr + \left[G - \varepsilon^2 \left(u_x \Big|_h + 2v_r \Big|_h \right) \Big]_x + WR\varepsilon \left(\varepsilon^2 h_{xxx} - C \Big|_x \right) \int_{\eta}^{\eta+h} g(r) r dr + \int_{\eta}^{\eta+h} \left[-R\varepsilon (u_t + uu_x + vu_r) - \gamma R\varepsilon \left(\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{F}{r} - 4u_r u_{rx} \right) + 2\varepsilon^2 u_{xx} \right] g(r) r dr = 0 \quad (4)$$

$$\text{Où } F = u_{rr} + vu_{rr} + uu_{rx} - 2u_r v_r + \frac{vu_r}{r}, \text{ et } C = \frac{1}{\eta+h} \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon^2 h_x^2 \right)$$

L'équation d'évolution du film est complétée par l'équation de continuité (2) mise sous forme intégrale.

$$\frac{\partial q}{\partial x} + \left(1 + \frac{h}{\eta} \right) \frac{\partial h}{\partial t} = 0 \quad (5)$$

Le modèle ainsi obtenu est constitué de l'équation d'évolution (4) et de l'équation (5). Ce modèle diffère du modèle au premier ordre développé par de Ruyer-Quil [3] par les termes viscoélastiques γ .

2 résultats

A l'écoulement de base, caractérisé par $h=1$ et $q=1+1/2\eta$, on superpose une perturbation infinitésimale (\tilde{h}, \tilde{q}) , périodique suivant la direction de l'écoulement x . La perturbation peut être écrite sous forme de modes normaux : $(\tilde{h}, \tilde{q}) = (H, Q)e^{i(kx - \omega t)}$, où k est le nombre d'onde et $\omega = \omega_r + i\omega_i$ est la pulsation complexe de l'onde. Les résultats de la stabilité neutre, $\omega_i = 0$, sont représentés par la figure 1, pour différentes valeurs de η et de γ .

L'étude de la stabilité aux grandes ondes de l'écoulement du film mince viscoélastique est examinée à travers les courbes neutres ($\omega_i = 0$) dans le plan nombre de Reynolds R et nombre d'onde k . Nous avons regardé l'influence de deux paramètres : la courbure η et le paramètre viscoélastique γ , les autres paramètres comme le nombre de Weber W et le nombre de Froude F sont fixes. On constate sur la figure 1 (a) et (b) que la perte de stabilité de cet écoulement intervient à faible nombre de Reynolds et qu'elle n'est pas due à un seul mode.

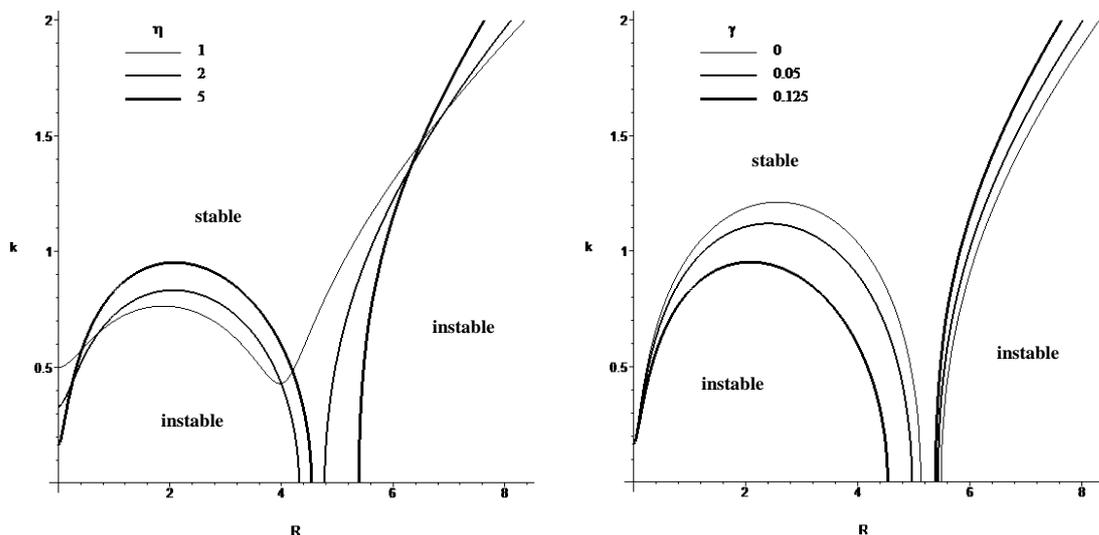


Figure 1 –(a) Courbes de stabilité neutre pour différentes valeurs de la courbure η : $W = 100/\eta R$, $F = 1.5$ et $\gamma = 0.125$. (b) Courbes de stabilité neutre montrant l'influence du coefficient viscoélastique γ pour $\eta = 5$: $W = 100/\eta R$, $F = 1.5$.

La figure 1 (a) montre que pour $\eta = 1$ et $\gamma = 0.125$, c'est l'instabilité capillaire (mode 1) qui prédomine et correspond à l'apparition d'une seule branche. En diminuant la courbure ($\eta = 2, \eta = 5$), on voit apparaître une deuxième branche qui correspond à une instabilité déjà décrite dans le cas d'un écoulement d'un film mince sur un plan incliné (mode 2). Le nombre de Reynolds d'apparition de cette instabilité augmente lorsque la courbure diminue. On représente sur la figure 1 (b) l'influence du paramètre viscoélastique γ sur les deux modes obtenus pour $\eta = 5$, $\gamma = 0$ correspond à un fluide newtonien. Les résultats mettent en évidence une réduction importante de la zone instable du mode 1 avec l'augmentation de γ , un effet inverse est observé pour le mode 2.

Références

- [1] K. Walters, Non-Newtonian effects in some elastico-viscous liquids whose behaviour at small rates of shear is characterized by a general linear equation of state, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, 15 (1962) 63–76.
- [2] B. Uma, & R. Usha, Dynamics of a thin viscoelastic film on an inclined plane. *International Journal of Engineering Science*, 44(2006)1449–1481.
- [3] C. Ruyer-Quil, P. Treveleyan, F. Giorgiutti-Dauphiné, C. Duprat and S. Kalliadasis, Modelling film flows down fibre, *J. Fluid Mech.* 603 (2008) 431-462.
- [4] N. Mehidi, N. Amatusse, Modélisation d'un écoulement coaxial en conduite circulaire de deux fluides visqueux, *C. R. Mécanique*, 337 (2009) 112-118.