

Transfert d'énergie passif d'un système linéaire forcé vers une chaîne d'oscillateurs non linéaires

S. CHARLEMAGNE^a, C.-H. LAMARQUE^a, A. TURE SAVADKOOHI^a

a. Université de Lyon, École Nationale des Travaux Publics de l'État, LTDS (UMR CNRS 5513)
Rue Maurice Audin 69518, Vaulx-en-Velin Cedex
simon.charlemagne@entpe.fr

Résumé :

Un système constitué d'un système primaire linéaire, soumis à une excitation harmonique, couplé à une chaîne de N oscillateurs non linéaires en série est considéré. L'étude de la dynamique à différentes échelles de temps de cet assemblage mène au calcul de la variété invariante en temps rapide, ou Slow Invariant Manifold (SIM), autour de laquelle sont détectés les points d'équilibre et les points singuliers. Les premiers prédisent les régimes périodiques du système, sollicitant des modes non linéaires de la chaîne, quand les deuxièmes indiquent la possibilité de l'existence de réponses fortement modulées, dites Strongly Modulated Responses (SMR), durant lesquelles le comportement du système opère des bifurcations répétées entre modes. Ces prédictions analytiques sont comparées avec des résultats issus de simulations numériques, donnant lieu à un bon accord.

Mots clés : chaîne d'oscillateurs, contrôle passif, méthode d'échelles multiples, modes non linéaires

1 Introduction

La capacité d'un système non linéaire à pomper une partie de l'énergie vibratoire d'une structure primaire a fait l'objet de nombreux travaux. Parmi les différents types d'oscillateur secondaires couplés, le "Nonlinear Energy Sink" (NES) [1, 2, 3] a fait l'objet d'une attention particulière. Sa non linéarité essentielle, i.e. non linéarisable, permet de réaliser le contrôle passif pour de larges bandes de fréquences de sollicitation, tout en limitant la masse ajoutée, permettant notamment d'absorber l'énergie de systèmes primaires non-linéaires [4, 5]. Si la non-linéarité du NES la plus répandue est cubique [6, 7, 8], d'autres études ont considéré des NES à vibro-impact [9, 10] ou linéaires par morceaux [11].

Des travaux ont par ailleurs prouvé l'efficacité de NES constitués de 2 [12] ou 3 [13, 14] oscillateurs non linéaires montés en série. Dans ce papier, nous étendons cette idée à l'étude analytique d'un système constitué d'une structure primaire linéaire, soumise à une excitation harmonique, couplée à une chaîne de N oscillateurs non linéaires en série. Le modèle étudié est présenté dans la Sect. 2. L'analyse de son comportement à différentes échelles de temps est réalisée dans la Sect. 3. Dans la Sect. 4, les prédictions analytiques sont confrontées à des résultats numériques issus de l'intégration directe des équations du système.

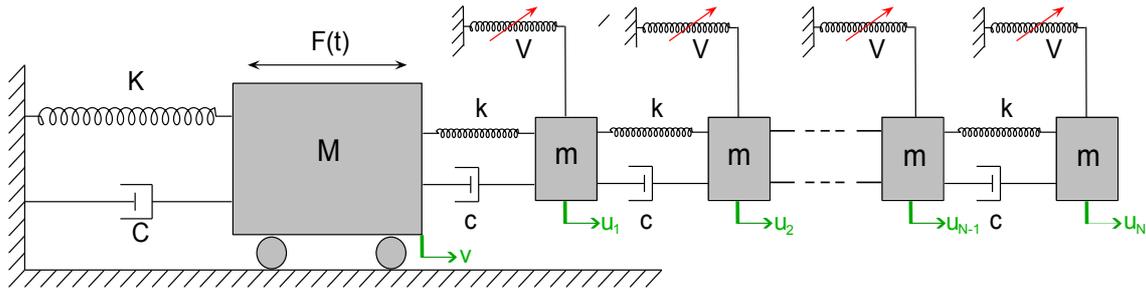


FIGURE 1 – Modèle à $(N+1)$ degrés de liberté comprenant une structure linéaire couplée à N oscillateurs non linéaires ($m = \epsilon M$, $0 < \epsilon \ll 1$)

2 Présentation du modèle et mise en équations

Le système considéré est composé d'une structure linéaire de masse M , raideur K et amortissement C , couplée à une chaîne de N oscillateurs non linéaires de masse m , très faible devant M : $m = \epsilon M$, $0 < \epsilon \ll 1$. Des ressorts de raideur k et des dissipateurs visqueux de coefficient c assurent la liaison des masses de la chaîne entre elles. De plus, une force de rappel non linéaire V , choisie cubique, contraint le déplacement de chaque oscillateur. Enfin, la structure primaire linéaire est soumise à une sollicitation externe $F(t)$. L'équilibre dynamique de ce modèle s'écrit sous la forme du système de $(N+1)$ équations (1), où v représente le déplacement du système principal et u_j le déplacement de la $j^{\text{ème}}$ masse de la chaîne :

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{v} + \epsilon c \dot{v} + \omega_0^2 v + \epsilon c_1 (\dot{v} - \dot{u}_1) + \epsilon \alpha (v - u_1) = \epsilon f \sin(\omega t) \\ \ddot{u}_1 + c_1 (-\dot{v} + 2\dot{u}_1 - \dot{u}_2) + \alpha (-v + 2u_1 - u_2) + \beta u_1^3 = 0 \\ \vdots \\ \ddot{u}_j + c_1 (-\dot{u}_{j-1} + 2\dot{u}_j - \dot{u}_{j+1}) + \alpha (-u_{j-1} + 2u_j - u_{j+1}) + \beta u_j^3 = 0 \quad j = 2, \dots, N-1 \\ \vdots \\ \ddot{u}_N + c_1 (\dot{u}_N - \dot{u}_{N-1}) + \alpha (u_N - u_{N-1}) + \beta u_N^3 = 0 \end{array} \right. \quad (1)$$

où $\frac{K}{M} = \omega_0^2$, $\frac{k}{M} = \epsilon \alpha$, $\frac{V(z)}{M} = \epsilon \beta z^3$, $\frac{C}{M} = \epsilon c$, $\frac{c}{M} = \epsilon c_1$ et $\frac{F(t)}{M} = \epsilon f^0 \sin(\omega t)$.

La sollicitation externe $F(t)$ est ainsi supposée sinusoïdale de pulsation ω . Afin d'étudier le transfert d'énergie depuis la structure primaire vers la chaîne dans des situations potentiellement pathologiques, on se place autour de la résonance du système linéaire, i.e. $\omega^2 = \omega_0^2(1 + \sigma\epsilon)$, où σ joue le rôle d'un paramètre de désaccordage.

Les variables complexes de Manevitch [15] ψ et φ_j , $j = 1 \dots, N$ sont ensuite introduites ($i = \sqrt{-1}$) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi e^{i\omega t} = \dot{v} + i\omega v \\ \varphi_j e^{i\omega t} = \dot{u}_j + i\omega u_j \quad j = 1, \dots, N \\ \Phi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \end{array} \right. \quad (2)$$

On utilise une méthode d'échelles multiples en temps [16] : des échelles de temps $\tau_k = \epsilon^k t$, $k = 0, 1, 2, \dots$ sont introduites.

Une méthode de Galerkin permet de tronquer les hautes harmoniques ($2\omega, 3\omega, \dots$), ce qui pour une fonction arbitraire $\gamma(t)$ s'écrit :

$$\Gamma = \frac{\omega}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \gamma(t) e^{-i\omega t} dt \quad (3)$$

On supposera, quitte à le vérifier par la suite, que ψ et $\varphi_j, \forall j \in [1, N]$ sont indépendants de τ_0 . On gardera de même $\dot{\psi}$ et $\dot{\varphi}_j$ dans les équations

Injectant (2) et utilisant (3), le système (1) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\psi} + \frac{\epsilon}{2} \left(\frac{i\omega_0\sigma}{\sqrt{1+\sigma\epsilon}} \psi + c\psi + c_1(\psi - \varphi_1) - \frac{i\alpha}{\omega_0\sqrt{1+\sigma\epsilon}} (\psi - \varphi_1) \right) = \frac{\epsilon f}{2i} \\ \dot{\varphi}_1 + \frac{i\omega_0\sqrt{1+\sigma\epsilon}}{2} \varphi_1 + \left(\frac{c_1}{2} - \frac{i\alpha}{2\omega_0\sqrt{1+\sigma\epsilon}} \right) (-\psi + 2\varphi_1 - \varphi_2) + \\ \frac{\beta}{(2i\omega_0\sqrt{1+\sigma\epsilon})^3} |\varphi_1|^2 \varphi_1 = 0 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_j + \frac{i\omega_0\sqrt{1+\sigma\epsilon}}{2} \varphi_j + \left(\frac{c_1}{2} - \frac{i\alpha}{2\omega_0\sqrt{1+\sigma\epsilon}} \right) (-\varphi_{j-1} + 2\varphi_j - \varphi_{j+1}) + \\ \frac{\beta}{(2i\omega_0\sqrt{1+\sigma\epsilon})^3} |\varphi_j|^2 \varphi_j = 0 \quad j = 2, \dots, N-1 \\ \vdots \\ \dot{\varphi}_N + \frac{i\omega_0\sqrt{1+\sigma\epsilon}}{2} \varphi_N + \left(\frac{c_1}{2} - \frac{i\alpha}{2\omega_0\sqrt{1+\sigma\epsilon}} \right) (-\varphi_{N-1} + \varphi_N) + \\ \frac{\beta}{(2i\omega_0\sqrt{1+\sigma\epsilon})^3} |\varphi_N|^2 \varphi_N = 0 \end{array} \right. \quad (4)$$

Le système (4) décrit ainsi l'évolution temporelle des variables complexes ψ et φ_j qui décrivent à leur tour la modulation en amplitude des oscillations à la pulsation ω des variables v et u_j , respectivement. Le comportement du système est ensuite étudié à l'échelle de temps rapide $\tau_0 = t$, puis à l'échelle de temps lente $\tau_1 = \epsilon t$, en discriminant les termes d'ordres ϵ^0 et ϵ^1 dans les équations, respectivement.

3 Analyse multi-échelles de la dynamique du système

3.1 À l'échelle de temps rapide τ_0

À l'échelle de temps rapide τ_0 , i.e. à l'ordre ϵ^0 , la première équation du système (4) s'écrit $\frac{\partial \psi}{\partial \tau_0} = 0$, i.e. $\psi = \psi(\tau_1, \tau_2, \dots)$. La variable ψ ne dépend donc pas de l'échelle de temps rapide.

Considérant désormais les points fixes des N équations restantes dérivées à l'ordre ϵ^0 , c'est-à-dire ceux vérifiant $\forall j, \lim_{\tau_0 \rightarrow +\infty} \frac{\partial \phi_j}{\partial \tau_0} = 0$, on obtient la variété invariante en temps rapide, ou Slow Invariant Mani-

fold (SIM), décrite par le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H}_1 = \frac{i\omega_0}{2}\phi_1 + \left(\frac{c_1}{2} - \frac{i\alpha}{2\omega_0}\right)(-\psi + 2\phi_1 - \phi_2) - iB|\phi_1|^2\phi_1 = 0 \\ \vdots \\ \mathcal{H}_j = \frac{i\omega_0}{2}\phi_j + \left(\frac{c_1}{2} - \frac{i\alpha}{2\omega_0}\right)(-\phi_{j-1} + 2\phi_j - \phi_{j+1}) - iB|\phi_j|^2\phi_j = 0 \quad j = 2, \dots, N-1 \\ \vdots \\ \mathcal{H}_N = \frac{i\omega_0}{2}\phi_N + \left(\frac{c_1}{2} - \frac{i\alpha}{2\omega_0}\right)(\phi_N - \phi_{N-1}) - iB|\phi_N|^2\phi_N = 0 \end{array} \right. \quad (5)$$

où $B = \frac{3\beta}{8\omega_0^3}$. Ce SIM réunit tous les comportements asymptotiques du système. En effet, si l'on définit les coordonnées polaires $\psi = N_0 e^{i\delta_0}$ et $\phi_j = N_j e^{i\delta_j}$, il est possible de définir via ce système de N équations complexes une relation liant entre elles les inconnues $N_j, j = 0, \dots, N$ d'une part, et les inconnues $\delta_j, j = 0, \dots, N$ d'autre part. Dans un espace $(N_i, N_j), i \neq j$, cette relation prend la forme d'une courbe dont chacun des points définit entièrement un comportement périodique du système. Un exemple est donné en Fig. 2 dans le plan (N_{20}, N_0) pour les paramètres suivants : $N = 20, \epsilon = 0.001, \omega_0 = 1, \alpha = 50, \beta = 1, c = 0.5$ et $c_1 = 4$. Les potentielles branches instables du SIM (en rouge sur la

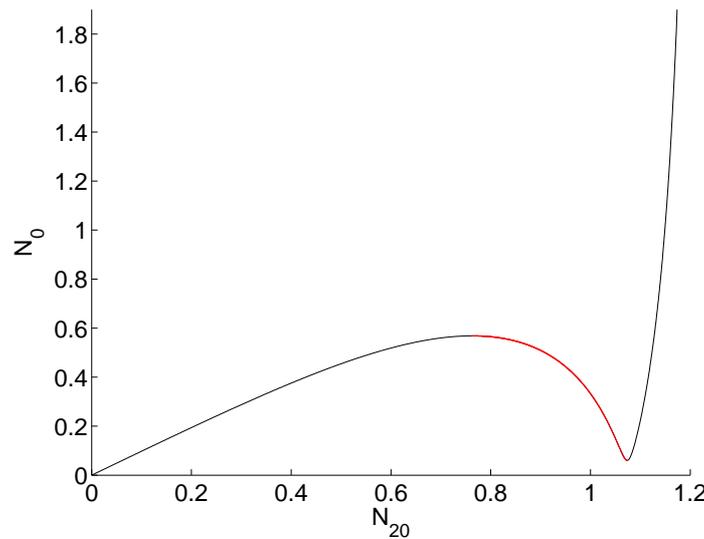


FIGURE 2 – $N = 20, \epsilon = 0.001, \omega_0 = 1, \alpha = 50, \beta = 1, c = 0.5$ et $c_1 = 4$ - SIM du système (ligne noire). Les zones instables du SIM sont tracées en rouge

Fig. 2) sont détectées en introduisant une perturbation infinitésimale autour des solutions du SIM dans le système (4) dérivé à l'ordre ϵ^0 :

$$\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_N \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_N \end{pmatrix} + \Delta\Phi, \quad \Delta\Phi = \begin{pmatrix} \Delta\phi_1 \\ \vdots \\ \Delta\phi_N \end{pmatrix} \quad (6)$$

ψ étant indépendant de τ_0 , il n'est pas nécessaire de le perturber. On obtient un système matriciel linéaire en ne gardant que les termes du premier ordre en $\Delta\Phi$:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial \Delta\Phi}{\partial \tau_0} \\ \frac{\partial \Delta\Phi^*}{\partial \tau_0} \end{pmatrix} = \Sigma \begin{pmatrix} \Delta\Phi \\ \Delta\Phi^* \end{pmatrix} \quad (7)$$

où x^* est le complexe conjugué de x et Σ une matrice $2N \times 2N$. Les points où une valeur propre (au moins) de Σ a une partie réelle positive déterminent les branches instables du SIM.

3.2 À l'échelle de temps lente τ_1

L'utilisation d'une équation supplémentaire est nécessaire à la détermination complète du système. En d'autres termes, si l'on sait que la dynamique de l'assemblage présenté en Fig. 1 évolue autour du SIM après un régime transitoire, i.e. lorsque $\tau_0 \rightarrow \infty$, la détermination d'un couple de variables (N_k, δ_k) supplémentaire permettra de connaître le ou les comportements asymptotiques vers le(s)quel(s) le système pourrait tendre. Cette information est apportée par l'étude de la dynamique du système à l'échelle de temps lente τ_1 .

On considère la première équation du système (4) dérivée à l'ordre ϵ^1 :

$$\frac{\partial \psi}{\partial \tau_1} + \frac{1}{2} \left(i\sigma\omega_0 - \frac{i\alpha}{\omega_0} + c + c_1 \right) \psi + \frac{1}{2} \left(\frac{i\alpha}{\omega_0} - c_1 \right) \varphi_1 = \frac{f}{2i} \quad (8)$$

Autour du SIM, l'équation (8) décrit la variation à l'échelle de temps lente de N_0 et δ_0 en fonction de N_0 , δ_0 et N_1 :

$$\begin{cases} \frac{\partial N_0}{\partial \tau_1} = F_1(N_0, N_1, \delta_0) \\ \frac{\partial \delta_0}{\partial \tau_1} = F_2(N_0, N_1, \delta_0) \end{cases} \quad (9)$$

Par ailleurs, on peut écrire autour du SIM, $\forall j \in \llbracket 1, N \rrbracket$:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathcal{H}_{j,r}}{\partial \tau_1} = 0 \\ \frac{\partial \mathcal{H}_{j,i}}{\partial \tau_1} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \mathbf{S}_2 \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \tau_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial N_N}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial \delta_1}{\partial \tau_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \delta_N}{\partial \tau_1} \end{pmatrix} = -\mathbf{S}_1 \begin{pmatrix} \frac{\partial N_0}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial \delta_0}{\partial \tau_1} \end{pmatrix} \quad (10)$$

où $\mathcal{H}_{j,r}$ et $\mathcal{H}_{j,i}$ sont les parties réelle et imaginaire de \mathcal{H}_j , respectivement, et :

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial N_0} & \frac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial \delta_0} \\ \frac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial N_0} & \frac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial \delta_0} \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial N_1} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial N_N} & \frac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial \delta_1} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{H}_{1,r}}{\partial \delta_N} \\ \frac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial N_1} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial N_N} & \frac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial \delta_1} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{H}_{1,i}}{\partial \delta_N} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial \mathcal{H}_{N,r}}{\partial N_1} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{H}_{N,r}}{\partial N_N} & \frac{\partial \mathcal{H}_{N,r}}{\partial \delta_1} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{H}_{N,r}}{\partial \delta_N} \\ \frac{\partial \mathcal{H}_{N,i}}{\partial N_1} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{H}_{N,i}}{\partial N_N} & \frac{\partial \mathcal{H}_{N,i}}{\partial \delta_1} & \cdots & \frac{\partial \mathcal{H}_{N,i}}{\partial \delta_N} \end{pmatrix} \quad (11)$$

En multipliant par la matrice complémentaire de \mathbf{S}_2 , i.e. $\text{compl}(\mathbf{S}_2)$, et en injectant (9), on obtient :

$$\det(\mathbf{S}_2) \mathbf{Id}_{2N} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \tau_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial N_N}{\partial \tau_1} \\ \frac{\partial \delta_1}{\partial \tau_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \delta_N}{\partial \tau_1} \end{pmatrix} = \underbrace{-\text{compl}(\mathbf{S}_2) \mathbf{S}_1}_{\mathcal{F}} \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

où \mathbf{Id}_{2N} est la matrice identité de taille $2N \times 2N$. Ce système réduit contient toutes les informations nécessaires à la détection de deux types de points sur le SIM :

- Les points d'équilibre prédisent l'existence de régimes périodiques durant lesquels chacune des masses du système oscille de façon périodique à amplitude et phase constantes. Ces points d'équilibre vérifient :

$$\begin{cases} \det(\mathbf{S}_2) \neq 0 \\ F_1 = F_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \det(\mathbf{S}_2) \neq 0 \\ \mathcal{F} = 0 \end{cases} \quad (13)$$

- Les points singuliers indiquent la possibilité de régimes quasi-périodiques, caractérisés par des réponses fortement modulées, ou Strongly Modulated Responses (SMR) [17], durant lesquels le système subit des bifurcations répétées autour des zones instables du SIM. Ces points singuliers vérifient :

$$\begin{cases} \det(\mathbf{S}_2) = 0 \\ \mathcal{F} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

4 Confrontation entre prédictions analytiques et simulations numériques

Dans cette section, les prédictions analytiques obtenues via la méthode expliquée en Sect. 3 sont comparées à des résultats numériques issus de l'intégration directe des équations (1). L'intégration temporelle

numérique est effectuée à l'aide d'un schéma de Runge-Kutta grâce à la fonction *ode45* de Matlab[®]. On considère un système à vingt-et-un degrés de liberté (système principal couplé à vingt oscillateurs non linéaires) avec les paramètres suivants : $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $\alpha = 50$, $\beta = 1$, $c = 0.5$ et $c_1 = 4$. On utilise dans un premier temps les paramètres de forçage suivants : $f = 1$ et $\sigma = 0$ (résonance exacte). Le SIM du système et ses points d'équilibre sont représentés sur la Fig. 3(a). Le système possède trois points d'équilibre stables vers lesquels son comportement peut tendre. Les Figs. 3(b)-(c) prouvent que le comportement évolue vers le point d'équilibre no. 1. En effet, la Fig. 3(b) montre en bleu l'évolution temporelle de N_0 qui tend vers une valeur constante, signe d'un régime périodique. Par ailleurs, la Fig. 3(c) illustre la comparaison entre les amplitudes prévues au point d'équilibre no. 1 (lignes rouges) et celles obtenues numériquement à l'équilibre (cercles bleus), i.e. pour t supérieur à 10^4 ici. Les résultats analytiques et numériques montrent une bonne concordance. De plus, l'amplitude qu'aurait subie le système principal sans la présence de la chaîne d'oscillateurs est tracée en ligne noire pointillée sur la Fig. 3(b). Le couplage de la chaîne a permis dans le cas présent de diviser cette "amplitude linéaire" par six. Enfin, la Fig. 3(d) permet de visualiser le comportement global du système au cours du temps à l'équilibre. Ce comportement correspond en fait à un mode non linéaire [18, 19, 20] du système. On peut en fait prouver que chacune des branches du SIM disposées de part et d'autre de la zone instable sollicite un mode non linéaire différent, correspondant à un niveau d'énergie différent. Le contrôle passif de la structure principale s'opère donc ici par excitation d'un mode de la chaîne.

Pour le second exemple, considérons les paramètres de forçage suivants : $f = 1.4$ et $\sigma = 6$. Le système possède un point d'équilibre instable et un point singulier, représentés par un point rouge et un carré noir sur la Fig. 4(a). Par conséquent, il subira une réponse quasi-périodique (SMR), dont la représentation schématique est donnée en Fig. 4(b) sous la forme d'un cycle $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ sur le SIM, autour de la zone instable, se répétant pendant longtemps. Les sauts $B \rightarrow C$ et $D \rightarrow A$ sont des bifurcations. D'autre part, selon qu'on se trouve sur la branche $A - B$ ou la branche $C - D$, le mode non linéaire de la chaîne excité est différent. La réponse quasi-périodique peut ainsi être définie comme des bifurcations répétées entre modes de la chaîne, ce qui concorde avec l'observation des résultats numériques représentés sur la Fig. 4(d).

5 Conclusion

Cette étude présente une méthode analytique de traitement d'un système comprenant une structure principale linéaire dont on souhaite contrôler les vibrations grâce à l'addition d'une chaîne d'oscillateurs non linéaires légers montés en série. Le calcul de la variété invariante en temps rapide, des points d'équilibre et des points singuliers permet de prédire avec précision les régimes périodiques ou quasi-périodiques du système et leurs amplitudes, posant les bases du design de la chaîne pour opérer un contrôle passif de la structure primaire et/ou de la récupération d'énergie.

Références

- [1] A.F. Vakakis, O.V. Gendelman, L.A. Bergman, D.M. McFarland, G. Kerschen, Y.S. Lee, *Nonlinear Targeted Energy Transfer in Mechanical and Structural Systems*, Springer, Netherlands, 2009
- [2] O.V. Gendelman, L.I. Manevitch, A.F. Vakakis, R. M'Closkey, Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators : part I- dynamics of the underlying hamiltonian systems, *Journal of Applied Mechanics*, 68 (2000) 34-41

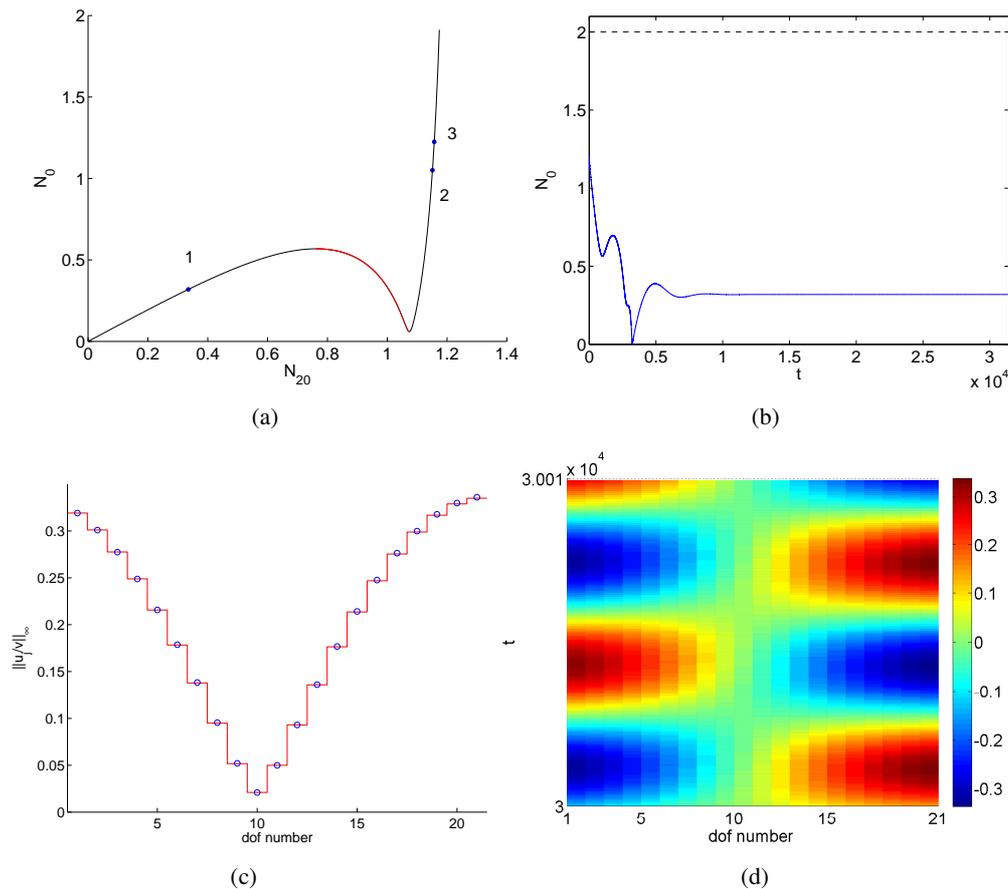


FIGURE 3 – $N = 20$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $\alpha = 50$, $\beta = 1$, $c = 0.5$, $c_1 = 4$, $\sigma = 0$ et $f = 1$ - (a) SIM du système et points d'équilibre : le système présente trois points d'équilibre stables (points bleus), (b) Évolution de N_0 au cours du temps obtenue par intégration numérique du système (1) en bleu et "amplitude linéaire" en ligne pointillée noire, (c) Comparaison des amplitudes du système correspondant au point d'équilibre no. 1 (lignes rouges) et au comportement asymptotique obtenu à partir des résultats numériques (cercles bleus), (d) Évolution des amplitudes du système à l'équilibre issue des résultats numériques

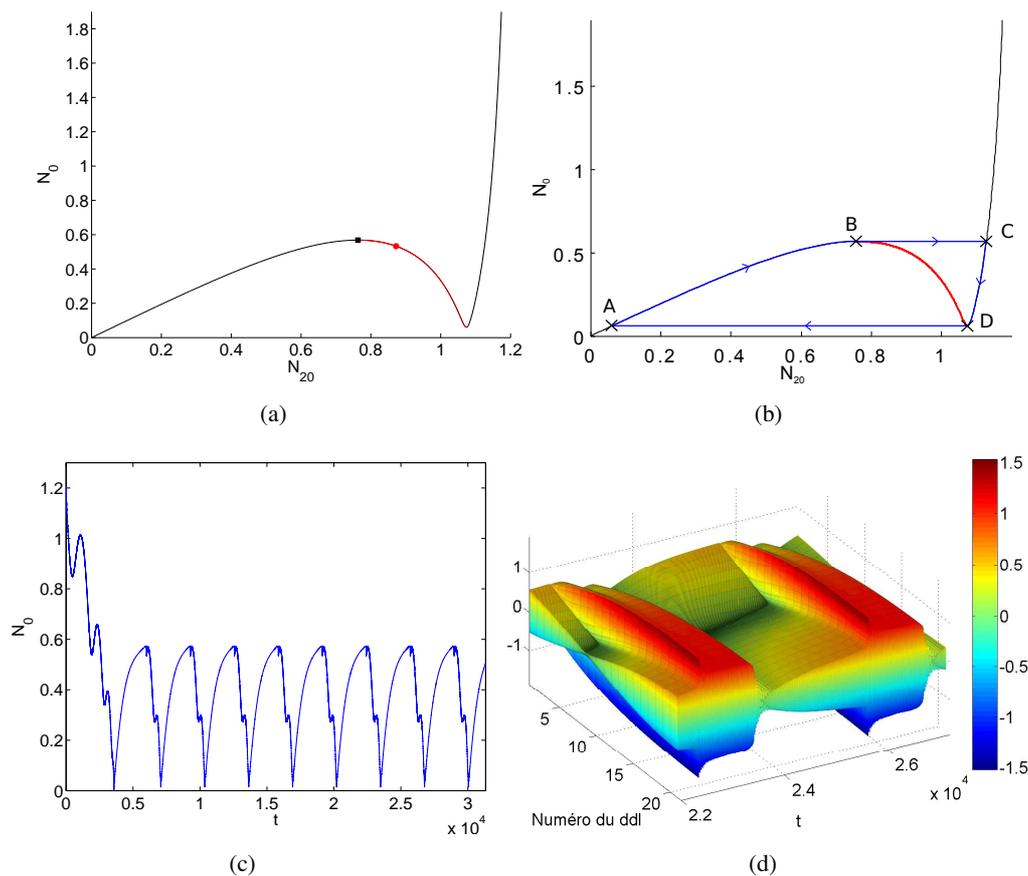


FIGURE 4 – $N = 20$, $\epsilon = 0.001$, $\omega_0 = 1$, $\alpha = 50$, $\beta = 1$, $c = 0.5$, $c_1 = 4$, $\sigma = 6$ et $f = 1.4$ - (a) SIM du système et points d'équilibre et singuliers : le système possède un point d'équilibre instable (point rouge) et un point singulier (carré noir), (b) Représentation schématique du comportement du système durant la SMR, (c) Évolution de N_0 au cours du temps obtenue par intégration numérique du système (1), (d) Évolution des amplitudes du système durant la SMR tirée des résultats numériques

- [3] A.F. Vakakis, O.V. Gendelman, Energy pumping in nonlinear mechanical oscillators : part II - resonance capture, *Journal of Applied Mechanics*, 68 (2000) 42–48
- [4] F. Schmidt, C.-H. Lamarque, Energy pumping for mechanical systems involving non-smooth Saint-Venant terms, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 45 (2010) 866–875
- [5] M. Weiss, M. Chenia, A. Ture Savadkoohi, C.-H. Lamarque, B. Vaurigaud, A. Hammouda, Multi-scale energy exchanges between an elasto-plastic oscillator and a light nonsmooth system with external pre-stress, *Nonlinear Dynamics*, 83 (2016) 109–135
- [6] G. Gatti, M.J. Brennan, On the effects of system parameters on the response of a harmonically excited system consisting of weakly coupled nonlinear and linear oscillators, *Journal of Sound and Vibration*, 330 (2011) 4538–4550
- [7] A. Luongo, D. Zulli, Aeroelastic instability analysis of NES-controlled systems via a mixed multiple scale/harmonic balance method, *Journal of Vibration and Control*, 20 (2014) 1985–1998
- [8] S. Charlemagne, C.-H. Lamarque, A. Ture Savadkoohi, Dynamics and energy exchanges between a linear oscillator and a nonlinear absorber with local and global potentials, *Journal of Sound and Vibration*, 376 (2016) 33–47
- [9] O.V. Gendelman, Analytic treatment of a system with a vibro-impact nonlinear energy sink, *Journal of Sound and Vibration*, 331 (2012) 4599–4608.
- [10] E. Gourc, G. Michon, S. Seguy, A. Berlioz, Targeted energy transfer under harmonic forcing with a vibro-impact nonlinear energy sink : analytical and experimental developments, *Journal of Vibration and Acoustics*, 137 (2015) 031008.
- [11] A. Ture Savadkoohi, C.-H. Lamarque, Z. Dimitrijevic, Vibratory energy exchange between a linear and a nonsmooth system in the presence of the gravity, *Nonlinear Dynamics*, 70 (2012) 1473–1483
- [12] N. Wierschem, J. Luo, M. Al-Shudeifat, S. Hubbard, R. Ott, L. Fahnestock, D. Quinn, D. McFarland, B. Spencer Jr., A. Vakakis, L. Bergman, Experimental testing and numerical simulation of a six-story structure incorporating two-degree-of-freedom nonlinear energy sink, *Journal of Structural Engineering* 140 (2014) 04014027
- [13] S. Tsakirtzis, G. Kerschen, P.N. Panagopoulos, A.F. Vakakis, Multi-frequency nonlinear energy transfer from linear oscillators to mdof essentially nonlinear attachments, *Journal of Sound and Vibration*, 285 (2005) 483–490
- [14] S. Tsakirtzis, P.N. Panagopoulos, G. Kerschen, O. Gendelman, A.F. Vakakis, L.A. Bergman, Complex dynamics and targeted energy transfer in linear oscillators coupled to multi-degree-of-freedom essentially nonlinear attachments, *Nonlinear Dynamics*, 48 (2007) 285–318
- [15] L.I. Manevitch, The description of localized normal modes in a chain of nonlinear coupled oscillators using complex variables, *Nonlinear Dynamics*, 25 (2001) 95–109
- [16] A. Nayfeh, D. Mook, *Nonlinear Oscillations*, Wiley, New York, 1979
- [17] Y. Starosvetsky, O.V. Gendelman, Strongly modulated response in forced 2dof oscillatory system with essential mass and potential asymmetry, *Physica D*, 237 (2008) 1719–1733
- [18] R.M. Rosenberg, Normal modes of nonlinear dual-mode systems, *Journal of Applied Mechanics*, 27 (1960) 263–268
- [19] R.M. Rosenberg, The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems, *Journal of Applied Mechanics*, 29 (1962) 7–14

- [20] R.M. Rosenberg, On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom, *Advances in Applied Mechanics*, 9 (1966) 155–242