

Diagrammes de stabilité d'un écoulement coaxial de deux fluides viscoélastiques

N. MEHIDI BOUAM^a, H. DJESSAS^a, N. AMATOUSSE^a

a.Laboratoire de Physique Théorique (LPT), Département de Physique-Université A. Mira de Béjaia Targa Ouzemour 06000, Algérie. nadbouam@yahoo.fr

Résumé :

Dans ce travail, notre objectif est de présenter une étude sur l'instabilité de l'interface entre deux couches de fluides viscoélastiques incompressibles s'écoulant à l'intérieur d'un cylindre. Une équation gouvernant la dynamique de l'écoulement est obtenue en utilisant une méthode de développement asymptotique pour résoudre les équations de Navier-Stokes et des conditions aux limites associées. Cette approche est valable aux ondes interfaciales qui sont longues par rapport aux épaisseurs des couches fluides et permet de déterminer avec précision les conditions d'apparition des instabilités à l'interface. Les résultats obtenus dans ce cadre, nous permettent de mettre en évidence l'influence des nombreux paramètres du problème sur le nombre de Reynolds critique.

Abstract :

On this work, we will focus on the interfacial instability between two layer, incompressible viscoelastic fluids flowing concentrically in a straight circular tube. Equation which model the dynamics of the flow is obtained, the analyze adopted is based on a method of asymptotic expansion to solve the Navier-Stokes equations and the associated boundary conditions. This approach is valid for interfacial waves that are long compared to the thickness of the fluid layers. The long wave asymptotic analysis predicts accurately the behavior of the flow close to criticality. Results of our analysis, allow us to highlight the influence of various parameters of the problem on the critical Reynolds number.

Mots clefs : Viscelastic fluids, axisymmetric flow, linear stability, interfacial instability, vertical cylinder, long wave instability.

1 Introduction

Les écoulements de films minces dans les conduites cylindriques ou planes ont suscité de nombreuses études théoriques et expérimentales, en raison de leurs multiples applications industrielles. Le grand intérêt accordé à ces écoulements est dû à la présence d'instabilités interfaciales qui se manifestent à de faibles nombres de Reynolds. Concernant les fluides newtoniens un grand nombre d'études théoriques ont été réalisées sur la stabilité de l'interface, au moyen de la stabilité linéaire.

Yiantsios et al., [1], Amaouche et al.[2] se sont intéressés à la stabilité linéaire d'écoulements de films à deux couches avec une interface. Ces auteurs ont considéré l'influence des nombreux paramètres physiques tels que la stratification de la viscosité, de la densité et des épaisseurs des couches de fluides sur les cartes de stabilité que présentent ces écoulements. Les premiers travaux dans le cas de l'écoulement de deux couches de fluides newtoniens en conduite cylindrique ont commencé par ceux de Hickox [3] qui a effectué une étude numérique des équations d'Orr-Sommerfeld. Dans la même configuration, Preziosi et al [4] a réalisé une étude expérimentale validée par une étude numérique. Ils montrent que les instabilités qui se développent au niveau de l'interface présentent deux longueurs d'ondes distinctes : pour les grandes longueurs d'ondes, le cisaillement peut éliminer l'instabilité capillaire qui se manifeste à faible nombre de Reynolds et pour les courtes longueurs d'ondes l'écoulement se transforme en émulsion.

La plupart des travaux ont considéré des films fluides newtoniens, peu d'études théoriques ont porté sur les écoulements coaxiaux de films fluides non newtoniens. Chen [5] ont proposé une étude de stabilité linéaire pour les écoulements axisymétriques de fluides viscoélastiques. Leurs résultats montrent que l'élasticité a un effet déstabilisant aux grandes ondes, si le fluide le plus élastique occupe une section inférieure à une section critique. Hinch et al. [6] ont proposé un mécanisme physique pour interpréter l'instabilité mentionnée par Chen [5].

Ce travail fait suite à une étude que nous avons menée récemment sur la stabilité de l'écoulement coaxial en conduite circulaire de deux fluides newtoniens visqueux dans lequel nous avons développé un modèle intégral à deux équations basé sur une méthode de Galerkin [7].

Dans cette étude nous proposons de développer une approche asymptotique contenant l'instabilité de grande longueur d'onde pour deux couches de fluides viscoélastiques s'écoulant par gravité à l'intérieur d'une conduite cylindrique verticale. Cette méthode utilise le grand rapport entre épaisseur des couches fluides et longueur d'onde pour faire un développement en ondes longues des équations de Navier-Stokes, qui est une extension du développement effectué par Benney [8] pour l'étude d'un film mince en écoulement sur un plan incliné. L'étude de la stabilité linéaire de l'équation d'évolution ainsi obtenue permet de fournir des prédictions précises du seuil de stabilité en fonction des nombreux paramètres du problème.

2 Position du problème

Nous considérons l'écoulement axisymétrique sous l'effet de la gravité de deux couches de fluides concentriques à l'intérieur d'un cylindre vertical de rayon R_2 . L'épaisseur de la couche interne est notée R_1 et celle de la couche pariétale est $R_2 - R_1$. Les fluides sont viscoélastiques et suivent une loi de comportement de type Walter B' [8]. Le problème est régi par les équations de la quantité de mouvement et de la masse pour chaque fluide $k = 1, 2$. Chaque couche de fluide a une densité ρ_k , une viscosité μ_k et un temps de relaxation λ_k différent. Notons que la tension superficielle σ est prise en considération à travers le saut de la contrainte normale à l'interface entre les deux fluides.

La mise sous forme adimensionnelle des équations est obtenue en prenant en considération la géométrie du problème et les paramètres du fluide interne. Les grandeurs de référence sont w_0 la vitesse considérée finie sur l'axe du cylindre et L une longueur caractéristique suivant la direction de l'écoulement. Pour prendre en considération l'hypothèse de grande longueur d'onde, on introduit le paramètre $\varepsilon = R_1/L \ll 1$.

Les équations adimensionnées du problème s'écrivent donc

$$r_k R_e \left(\frac{\partial v_k}{\partial t} + (v_k \cdot \nabla) v_k \right) = -\nabla p + m_k \Delta v_k + \nabla \cdot \bar{\tau}_k + r_k G \bar{e}_z \quad (1)$$

$$\nabla \cdot v_k = 0 \quad (2)$$

$$\bar{\tau} = R_e \gamma_k \left(\frac{\partial \bar{e}_k}{\partial t} + v_k \cdot \nabla \bar{e}_k - \nabla v_k \bar{e}_k - \bar{e}_k \cdot \nabla v_k^T \right) \quad (3)$$

Où $v_k = (w_k, u_k)$ est la vitesse, p_k la pression, $\bar{\tau}_k$ le tenseur des contraintes et \bar{e}_k le tenseur taux de déformation dans chaque fluide.

Les paramètres sans dimension sont le nombre de Reynolds $R_e = \frac{\rho_1 R_1 w_0}{\mu_1}$, les paramètres

viscoélastiques de chaque couche $\gamma_1 = \frac{\lambda_1 \mu_1}{\rho_1 R_1^2}$, $\gamma_2 = \frac{\lambda_2 \mu_2}{\rho_2 R_1^2}$, $G = \frac{R_e g R_1}{w_0^2}$, le rapport des densité

$r_k = \frac{\rho_k}{\rho_1}$ et le rapport des viscosités $m_k = \frac{\mu_k}{\mu_1}$. Où g est l'accélération gravitationnelle.

En plus des équations (1), (2) et (3), il convient de rajouter les conditions aux limites qui sont :

la condition d'adhérence à la paroi du cylindre $d = \frac{R_2}{R_1}$:

$$w_2 = u_2 = 0 \quad (4)$$

Les conditions aux limites à l'interface $r = h(x, t)$ sont

la continuité des vitesses : $v_2 = v_2 \quad (5)$

la condition cinématique :

$$u_k = \frac{\partial h}{\partial t} + w_k \frac{\partial h}{\partial z} \quad (6)$$

la condition de saut dynamique :

$$[\gamma R_e \varepsilon (\tau_{rr} - 2h_z \tau_{zr} + h_z^2 \tau_{zz}) - p] = 2(u_{1r} - \mu u_{2r}) + \varepsilon W_e \left(\frac{1}{h} - \varepsilon^2 \frac{h_z^2}{2h} - \varepsilon^2 h_{zz} \right) \quad (7)$$

$$[\gamma R_e \varepsilon (h_z \tau_{rr} - h_z \tau_{zz} + (1 - h_z^2) \tau_{zr}) + \mu \{ (1 - h_z^2) (w_{1r} + u_{1z}) + 2h_z (u_{2r} - w_{2z}) \}] = 0 \quad (8)$$

Où $W_e = \frac{\sigma}{\rho_1 w_0^2 R_1} = J/R_e d$ est le nombre de Weber.

3 Développement aux grandes ondes

L'instabilité des films se manifeste par la croissance d'ondes dont la longueur d'onde est grande ce qui correspond à un nombre d'onde ($k \rightarrow 0$) et à de faibles nombres de Reynolds. Nous considérons donc

$\varepsilon R_e = O(1)$ ce qui correspond à de faibles effets inertiels et $\varepsilon^2 W_e = O(1)$ cas de grande tension superficielle. On a considéré $\varepsilon \gamma_k = O(1)$ ce qui correspond à des fluides faiblement viscoélastiques.

Le modèle que nous présentons résulte d'un développement des variables du problème sous forme d'une série de puissance du petit paramètre ε

$$(w_k, u_k, p_k) = (w_k^{(0)}, u_k^{(0)}, p_k^{(0)}) + \varepsilon (w_k^{(1)}, u_k^{(1)}, p_k^{(1)}) + O(\varepsilon^2) \quad .$$

Ces développements sont introduits dans les équations adimensionnelles et on obtient un système d'équations à résoudre pour chaque ordre [8]. Les solutions du problème à l'ordre zéro et à l'ordre 1 en sont données analytiquement. L'équation d'évolution de l'interface est obtenue en introduisant la décomposition $\partial_t = \partial_t + \varepsilon \partial_t + O(\varepsilon^2)$ dans la condition cinématique (6). Les solutions sont

cherchées sous forme $h(x, t) = 1 + e^{i(kz - \omega t)}$ et la linéarisation de l'équation d'évolution autour de l'état de base conduit à une relation de dispersion analytique qui s'écrit en fonction des nombreux paramètres du problème. On développe le taux d'accroissement de la perturbation par rapport à ω , $\omega = \omega_0 + k\omega_1 + \dots$, le terme ω_0 est réel et n'affecte pas la stabilité de l'écoulement.

Le développement de l'instabilité est déterminé par le signe de ω_1 qui est donné par la relation suivante : $\omega_1 = i \left(F_1(\rho, \mu, d) W_e - R_e \left(F_2(\rho, \mu, d) + F_3(\rho, \mu, d) \gamma_1 + F_4(\rho, \mu, d) \gamma_2 \right) \right)$ (9)

Où les $F_i(\rho, \mu, d)$ sont des fonctions polynomiales de ρ , μ et d .

Si on néglige l'effet de la stratification de la densité ($\rho = 1$), la relation (9) devient :

$$\omega_1 = i \frac{\Delta_1}{\mu d \Delta_2} \left(\frac{1}{16} \frac{J}{R_e} - R_e \frac{(\mu - 1)d}{\Delta_1^2 \Delta_3^2} (F(\mu, d) + \mu \Delta_3^2 \gamma_1 + d^2 \Delta_4 \gamma_2) \right) \quad (10)$$

Où Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 sont des fonctions positives données par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= 3\mu - 4 \ln(d) - 4 + 4\mu \ln(d) + 8d^2 - 4\mu d^2 + 4d^4 \ln(d) + \mu d^4 - 4d^4 \\ \Delta_2 &= d^4 - 1 + \mu, \quad \Delta_3 = d^2 - 1 + \mu \text{ et } \Delta_4 = 2 - 2d^2 - 2\mu + \mu d^2 \end{aligned}$$

Le nombre de Reynolds est obtenu en posant $\omega_1 = 0$, si on pose $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ dans (10) les deux fluides sont newtoniens et on retrouve exactement les courbes $\frac{R_e}{\sqrt{J}}$ fonction de μ données par la résolution numérique des équations d'Orr-Sommerfeld [4] d'un écoulement axisymétrique de deux fluides de même densité.

4 Analyse de stabilité linéaire

Nous étudions l'influence de la viscoélasticité sur les instabilités à travers les paramètres viscoélastiques γ_1 et γ_2 . On peut conclure à leurs effets stabilisants ou déstabilisants sur l'interface comme on peut le voir sur les figures 1, 2 et 3. Au voisinage du Reynolds critique, les figures 1, 2 et 3 montrent des cartes de stabilité dans le plan (h_1, μ) pour différentes valeurs de ρ et pour différentes valeurs des paramètres viscoélastiques. Notons que $h_1 = R_1/R_2$ avec $0 \leq h_1 \leq 1$. Les résultats de la figure 1 correspondent aux cas où les deux couches de fluides sont newtoniennes, obtenus en posant $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$ dans l'équation (10). Pour $\rho = 1$ les zones stables et instables sont séparées par la surface $(\mu - 1)F(\mu, h_1) = 0$ (figure 1(a)). Ces résultats sont conformes à ceux de la littérature [5, 6], on retrouve l'effet de couche mince qui caractérise un écoulement stable lorsque le fluide le moins visqueux est minoritaire dans l'écoulement. Sur la figure 1(b), nous pouvons observer clairement que lorsqu'on diminue le rapport des densités $\rho_2 < \rho_1$, cela entraîne une augmentation des zones instables. Dans le cas où l'une des deux couches est newtonienne et l'autre viscoélastique, les résultats de l'influence des coefficients viscoélastiques sur les cartes de stabilité de l'écoulement sont représentés sur la figure 2. La figure 2(a) correspond au cas où la couche interne est viscoélastique et l'autre couche est newtonienne. Les résultats de cette configuration montrent que la viscoélasticité peut stabiliser ou déstabiliser l'interface en présence de la différence de viscosité suivant une épaisseur critique h_{1c} des fluides. La figure 2 (a) indique qu'augmenter γ_1 à un effet déstabilisant sur l'interface lorsque le fluide le moins visqueux est minoritaire. Par ailleurs, la viscoélasticité réduit considérablement la zone d'instabilité, lorsque le fluide le plus visqueux est minoritaire : $\mu > 1$, l'écoulement redevient instable pour $h_{1c} = 0.85$ correspondant à $\gamma_1 = 0.125$ et $h_{1c} = 0.7$

correspondant à $\gamma_1 = 0.05$. l'effet inverse est observé sur la figure 2 (b) pour μ , alors que les résultats obtenus dans la région $\mu > 1$, restent relativement inchangés par rapport au cas où les deux fluides sont newtoniens.

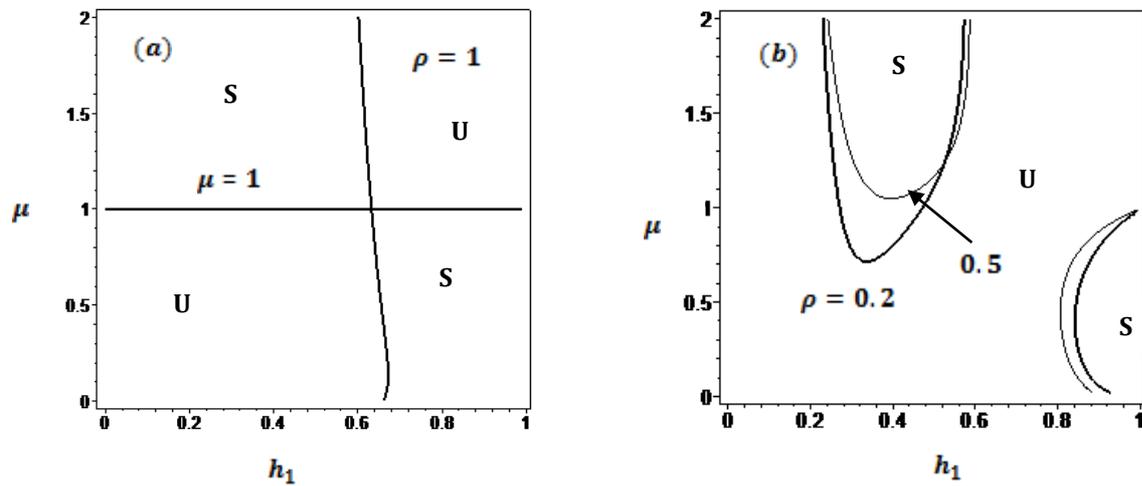


Figure 1: Diagrammes de stabilité dans le plan (h_1, μ) au seuil des grandes longueurs d'onde ($k \rightarrow 0$), les fluides sont newtoniens : $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$.

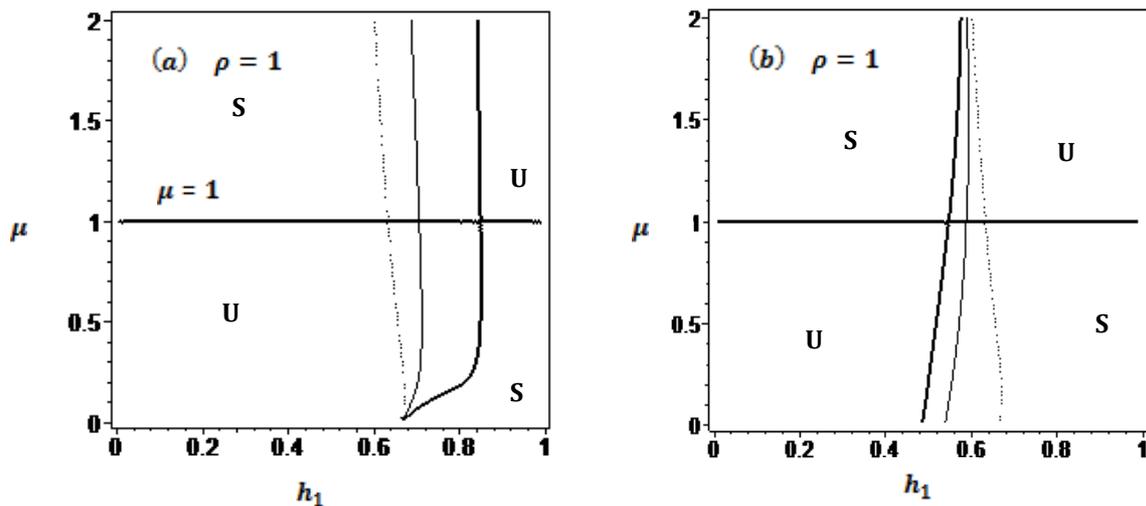


Figure 2: Diagrammes de stabilité dans le plan (h_1, μ) au seuil des grandes longueurs d'onde ($k \rightarrow 0$), (a) la couche interne est viscoélastique avec $\gamma_1 = 0$ (ligne pointillée), $\gamma_1 = 0.05$ (ligne fine), $\gamma_1 = 0.125$ (ligne épaisse), celle externe est newtonienne $\gamma_2 = 0$, (b) la couche interne est newtonienne $\gamma_1 = 0$, celle externe est viscoélastique $\gamma_2 = 0, \gamma_2 = 0.05, \gamma_2 = 0.125$.

Dans le cas où les deux couches sont viscoélastiques, les effets de la stratification d'élasticité sont examinés sur les figures 3 (a) et (b) pour différentes valeurs de γ_1 et γ_2 . Sur ces figures sont également représentés les résultats concernant le cas où les deux couches sont newtoniennes. Une augmentation des coefficients viscoélastiques entraîne un déplacement des zones stables, donc leur élargissement en fonction de l'épaisseur des couches de fluide et de leur

viscosité. Concernant la figure 3 (b) les effets conjugués de la stratification de la densité et de la viscoélasticité a pour conséquence la création d'une nouvelle zone instable comprise entre $0.4 < h_1 < 0.6$, dans la région $\mu > 0.6$.

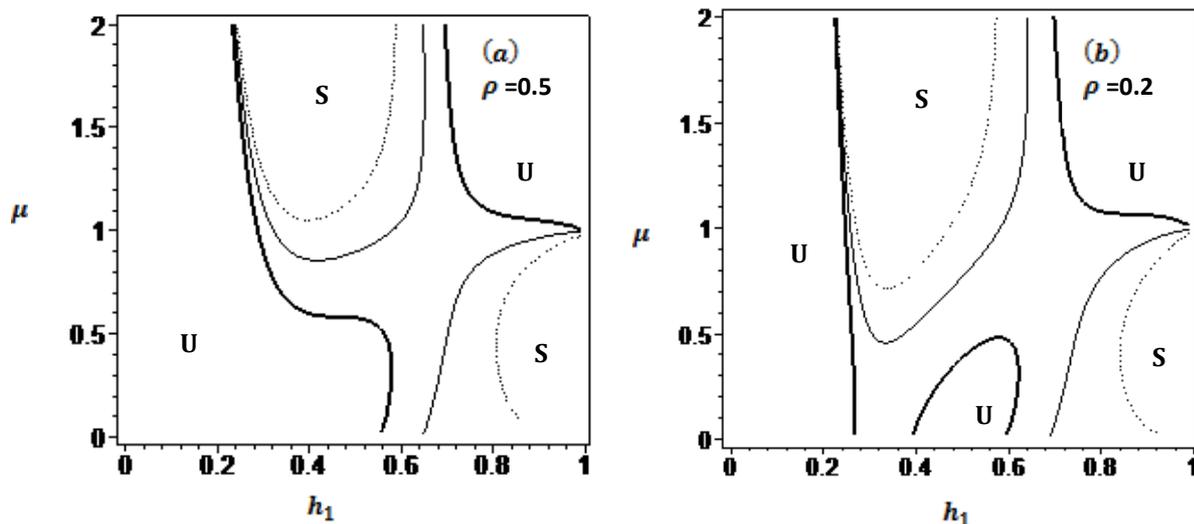


Figure 3 : Diagrammes de stabilité dans le plan (h_1, μ) pour $\rho = 0.5$ et $\rho = 0.2$, au seuil des grandes longueurs d'onde ($k \rightarrow 0$), les fluides sont viscoélastiques :

... $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$; $\gamma_1 = 0.03, \gamma_2 = 0.05$ (ligne fine); $\gamma_1 = 0.05, \gamma_2 = 0.125$ (ligne épaisse).

5 Conclusion

Nous avons proposé dans cette étude un modèle à une équation décrivant l'évolution de l'interface entre deux fluides viscoélastiques en écoulement axisymétrique coaxial. Ce modèle fournit des prédictions précises du seuil de stabilité des ondes longues. L'analyse de la stabilité linéaire aux grandes ondes a permis de monter les effets stabilisants et déstabilisants des nombreux paramètres du problème. On a pu observer des configurations stables pour des écoulements viscoélastiques dans les conditions pour lesquelles des fluides newtoniens de même rapport des viscosités et des densités sont instables.

Références

- [1] S.G. Yiantsios, B.G Higgins, Linear stability of plane Poiseuille flow of two superposed fluids, Phys. Fluids, 31 (1988) 3225-3237.
- [2] M. Amaouche, N. Mehidi, N. Amatusse, Linear stability of two-layer film flow an inclined channel: A second order weighted residual approach, Phys. Fluids, 19 (8) (2007) 0841106.
- [3] C. E., Hickox, Instability due to viscosity and density stratification in axisymmetric pipe flow, Phys. Fluids 14 (1971)251-.
- [4] L. Preziosi, K. Chen, D.D. Joseph, Lubricated pipelining: stability of core-annular flow, J. Fluid Mech. 201 (1989)323-356.
- [5] K.P. Chen, Interfacial instability due to elastic stratification in concentric of two viscoelastic fluids, J. Non Newtonian Fluid Mech. 40 (1991)155-175.
- [6] E.J.Hinch,O.J.Harris, J.M. Rallison, The stability mechanism of two elastic liquids being coextruded, J. Non Newtonian Fluid Mech. 43 (1992)311-.
- [7] N. Mehidi, N. Amatusse, Modélisation d'un écoulement coaxial en conduite circulaire de deux fluides visqueux, C.R.Mécanique, 337(2009)112-118.
- [8] N. Benney, Long wave on liquid films, J.Maths. & Phys., 45(1966)150-155.