

# Méthode de régularisation évanescence pour l'identification à partir de mesures de champs partielles

L. CAILLÉ<sup>a</sup>, F. DELVARE<sup>b</sup>, N. MICHAUX-LEBLOND<sup>c</sup>, J-L. HANUS<sup>d</sup>

a. LMNO, Université de Caen Normandie, laetitia.caille@unicaen.fr

b. LMNO, Université de Caen Normandie, franck.delvare@unicaen.fr

c. LMNO, Université de Caen Normandie, nathalie.leblond@unicaen.fr

d. PRISME, INSA Centre Val de Loire, jean-luc.hanus@insa-cvl.fr

## Résumé :

*Nous nous intéressons à un problème d'identification en élasticité à partir de mesures de champs partielles. Le problème inverse est résolu en utilisant la méthode de régularisation évanescence combinée à la méthode des éléments finis. L'approche proposée consiste à rechercher parmi les solutions de l'opérateur de Lamé celle qui s'approche au mieux des mesures de champs partielles. Les performances de la méthode sont mises en évidence en utilisant d'une part un cas test numérique et d'autre part un essai de flexion trois points où les mesures de champs partielles sont obtenues par corrélation d'images numériques.*

## Abstract :

*We investigate the application of the fading regularization method combined with the finite element method to an identification problem. The main idea of the method is to seek, among all solutions of the equilibrium equation, those that fits the best the data. From the knowledge of partial full-field measurements in a part of the domain, we present a numerical reconstruction of missing data and boundary conditions. The performances of the method are highlighted by both using a numerical test and using DIC data corresponding to a three-point bending test.*

**Mots clefs : Identification ; problème inverse ; régularisation ; complétion de données ; méthode des éléments finis ; corrélations d'images numériques.**

## 1 Contexte de l'étude

Les limites de l'instrumentation expérimentale actuelle engendrent plusieurs difficultés comme par exemple le fait que les mesures, éventuellement entachées d'un bruit, ne se font que sur une partie de l'échantillon ou que les conditions aux limites sont mal connues. Ces difficultés donnent naissance à des problèmes d'identification qui peuvent être considérés comme des problèmes inverses.

Une méthode inverse (méthode de régularisation évanescence) a été introduite précédemment pour résoudre des problèmes inverses d'identification de conditions aux limites inaccessibles à la mesure à partir de mesures surabondantes disponibles sur une partie de la frontière (problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace [1, 2] ou à l'équation de Lamé [3]). La méthode de régularisation évanescence repose sur l'idée de chercher parmi toutes les solutions satisfaisant l'équilibre celle qui s'approche au mieux des conditions aux limites disponibles sur une partie de la frontière. La résolution du problème inverse est ramenée à une suite de problèmes d'optimisation sous contraintes (algorithme de point fixe) faisant intervenir plusieurs termes. Le premier terme des fonctionnelles est un terme de relaxation qui représente l'écart entre les données et la solution optimale calculée. Le second terme agit sur tout le domaine et exprime la distance entre deux solutions optimales. Ce terme de régularisation tend vers zéro au fur et à mesure des itérations. La solution ainsi calculée ne dépend pas d'un coefficient de régularisation, vérifie l'équation d'équilibre et est stable vis à vis du bruit sur les données puisque celles-ci sont recalculées afin d'être compatibles. La méthode est en particulier, capable de débruiter les données. Elle est de plus généralisable à tout opérateur elliptique et peut être implémentée par différentes méthodes numériques (méthode des éléments finis, méthode des éléments de frontière, méthode des solutions fondamentales,...).

Nous présentons ici la généralisation de la méthode de régularisation évanescence aux problèmes d'identification à partir de mesures de champs partielles où le champ est uniquement mesurable sur une zone centrale du domaine étudié. Avec notre technique, nous reconstruisons le champ solution de l'équation d'équilibre sur l'ensemble du domaine et les conditions aux limites qui étaient inaccessibles à la mesure. La méthode est implémentée, en élasticité linéaire, en utilisant la méthode des éléments finis. Elle est validée avec des données synthétiques mais est aussi appliquée à une situation expérimentale en utilisant des mesures de champs de déplacements obtenues par corrélations d'images. L'exploitation de ces mesures permet de mettre en évidence les performances et la robustesse, vis à vis de données bruitées, de la méthode.

## 2 Méthode d'identification à partir de mesures de champs partielles

### 2.1 Le problème modèle en élasticité linéaire

Nous considérons un matériau élastique à comportement linéaire et isotrope. Le solide décrit le domaine  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$ , borné par sa frontière  $\Gamma \equiv \partial\Omega$ , telle que  $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_i$ , voir Figure 1.  $\Gamma_d$  est une partie de la frontière, si elle existe, où des informations sur les conditions aux limites sont accessibles.  $\Gamma_i$  décrit la partie complémentaire de la frontière où aucune information sur les conditions aux limites n'est accessible. Nous définissons également le sous-domaine  $\Omega_d \subset \Omega$ , où le champ de déplacements est mesurable, par exemple en utilisant la corrélation d'images numériques.

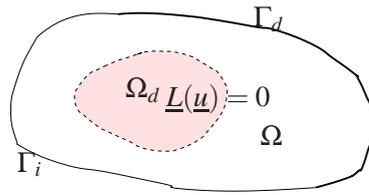


FIGURE 1 – Domaine

L'équation d'équilibre, combinée à la loi de comportement élastique linéaire homogène et isotrope, amène à :

$$\underline{L}(\underline{u}) = 0 \quad \forall x \in \Omega \quad (1)$$

où  $\underline{L}$  désigne l'opérateur de Lamé.

S'il est possible de mesurer le champ de déplacements  $\underline{u}$  sur la partition  $\Omega_d$  de  $\Omega$ , alors la formulation du problème de complétion de données est donnée par l'équation (1) et le champ mesuré :

$$\underline{u} = \underline{\phi}_d \quad \forall x \in \Omega_d \quad (2)$$

Si les données (2) sont compatibles, le problème (3) admet une unique solution. Néanmoins, la solution obtenue est instable, c'est à dire qu'elle est sensible à de petites perturbations des données (2). C'est malheureusement cette situation qui est rencontrée lors de l'analyse de résultats d'essais puisque les données expérimentales sont systématiquement entachées d'un bruit de mesure, même faible.

$$\begin{cases} \underline{L}(\underline{u}) = 0 & \forall x \in \Omega \\ \underline{u} = \underline{\phi}_d & \forall x \in \Omega_d \end{cases} \quad (3)$$

Ce problème est difficile à résoudre par son caractère mal posé ; une méthode de régularisation est alors requise pour trouver la solution stable. Nous faisons le choix d'utiliser une méthode de régularisation évanescence [1, 2] pour régulariser le problème.

## 2.2 Résolution par la méthode de régularisation évanescence

Soit  $H(\Omega)$  l'espace des solutions de l'équation (1) :

$$H(\Omega) = \{ \underline{v} \in H^1(\Omega) \quad / \quad \underline{L}(\underline{v}) = 0 \text{ dans } \Omega \}$$

Une formulation équivalente du problème (3) est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \underline{u} \in H(\Omega) \text{ tel que :} \\ \underline{u} = \underline{\phi}_d \text{ dans } \Omega_d \end{cases} \quad (4)$$

Nous introduisons une méthode de régularisation pour résoudre le problème (4), il s'agit d'une généralisation de la technique inverse initialement introduite par Cimetière et al. [1, 2] pour résoudre le problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace. Avec  $c > 0$  et  $u^0 \in H(\Omega)$ , la solution du problème (3) est définie en tant que point fixe d'un opérateur de  $H(\Omega)$  dans  $H(\Omega)$  obtenu grâce à une suite de problèmes

d'optimisation bien posés :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \underline{u}^{k+1} \in H(\Omega) \text{ tel que :} \\ J_c^k(\underline{u}^{k+1}) \leq J_c^k(\underline{v}) \quad \forall \underline{v} \in H(\Omega) \text{ avec} \\ J_c^k(\underline{v}) = \|\underline{v}|_{\Omega_d} - \underline{\phi}_d\|_{\Omega_d}^2 + \frac{c}{|\Omega|} \|\underline{v} - \underline{u}^k\|_{\Omega}^2 + \frac{c}{|\Gamma|} \|\underline{v} - \underline{u}^k\|_{\Gamma}^2 \end{array} \right. \quad (5)$$

Dans le processus itératif (5), l'équation de Lamé est considérée comme fiable et est prise en compte exactement à chaque itération alors que les mesures  $\phi_d \in \Omega_d$  sont considérées comme non fiables. Les fonctionnelles sont composées de deux termes qui jouent différents rôles. Le premier est un terme de relaxation, qui agit seulement sur  $\Omega_d$ , et représente l'écart entre les mesures et la solution optimale calculée. Les données potentiellement entachées d'un bruit de mesure sont alors recalculées. Le second terme agit sur tout le domaine  $\Omega$ , il s'agit d'un terme de régularisation qui contrôle la distance entre deux itérés successifs. Ce terme tend vers zéro au fur et à mesure des itérations. La solution obtenue à la fin du processus itératif ne dépend pas du coefficient de régularisation, vérifie l'équation de Lamé et est stable vis à vis du bruit sur les données puisque celles-ci sont recalculées afin d'être compatibles.

Pour résoudre le problème (4), il est nécessaire de caractériser de manière discrète l'espace  $H(\Omega)$ . Cette discrétisation est ici réalisée en utilisant la méthode des éléments finis.

Le domaine  $\Omega$  est discrétisé en utilisant  $P$  éléments quadrangulaires et la frontière  $\Gamma$  est discrétisée par les  $N'$  segments correspondants. La discrétisation comporte  $N$  nœuds.

La discrétisation conduit à la définition de l'espace  $H_{NN'}(\Omega)$  caractérisant de manière faible et discrète les solutions de l'équation de Lamé :

$$H_{NN'}(\Omega) = \left\{ \underline{V} = (\underline{U}, \underline{U}') \in \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N'} \quad / \quad A\underline{U} + B\underline{U}' = 0 \right\}$$

où  $A$  et  $B$  sont des matrices qui dépendent uniquement de la géométrie du domaine et des éléments finis choisis.  $\underline{U}$  et  $\underline{U}'$  sont respectivement les valeurs discrétisées du champ de déplacements  $\underline{u}$  aux nœuds du domaine et du vecteur-contrainte  $\underline{p}$  sur chaque segment de la frontière.

La suite de problèmes (5) peut alors s'écrire sous la forme d'une suite de problèmes d'optimisation linéaire dans  $\mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N'}$  sous les  $2N$  contraintes égalités, prises en compte au moyen de multiplicateurs de Lagrange, qui caractérisent de manière discrète les solutions de l'équation d'équilibre :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}, \underline{\lambda}^{k+1}) \in \mathbb{R}^{2N} \times \mathbb{R}^{2N'} \times \mathbb{R}^{2N} \text{ tel que :} \\ \nabla J_c^k(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}) + \underline{\lambda}^{k+1} \nabla H(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}) = 0 \\ H(\underline{U}^{k+1}, \underline{U}'^{k+1}) = A\underline{U}^{k+1} + B\underline{U}'^{k+1} = 0 \end{array} \right. \quad (6)$$

où  $\underline{\lambda}^{k+1}$  est le vecteur composé des multiplicateurs de Lagrange.

## 2.3 Application numérique : cas de la traction biaxiale

Nous considérons le champ de déplacements  $\underline{u}^{an} = (u_1^{an}, u_2^{an})$  qui correspond à un état de traction biaxiale :

$$\begin{aligned} u_1^{an}(x_1, x_2) &= \frac{0.1}{E} x_1 - \frac{0.2\nu}{E} x_2, & (x_1, x_2) \in \Omega, \\ u_2^{an}(x_1, x_2) &= -\frac{0.1\nu}{E} x_1 + \frac{0.2}{E} x_2, & (x_1, x_2) \in \Omega, \end{aligned} \quad (7)$$

avec  $E = 1$  Pa et  $\nu = 0.2$ . Le domaine  $\Omega$ , borné par sa frontière  $\Gamma$ , est représenté par les nœuds du maillage (roses) sur la figure 5(a) et le sous-domaine  $\Omega_d \subset \Omega$  est représenté par les points de mesures (noirs) sur la même figure.

Les figures 2 (a), (b), (c) et (d) représentent respectivement les composantes, horizontale  $u_1$  et verticale  $u_2$  du déplacement et les composantes horizontale  $p_1$  et verticale  $p_2$  du vecteur-contrainte, identifiées sur la frontière  $\Gamma$  en utilisant un maillage constitué de  $8 \times 12$  éléments quadrangulaires à huit nœuds.

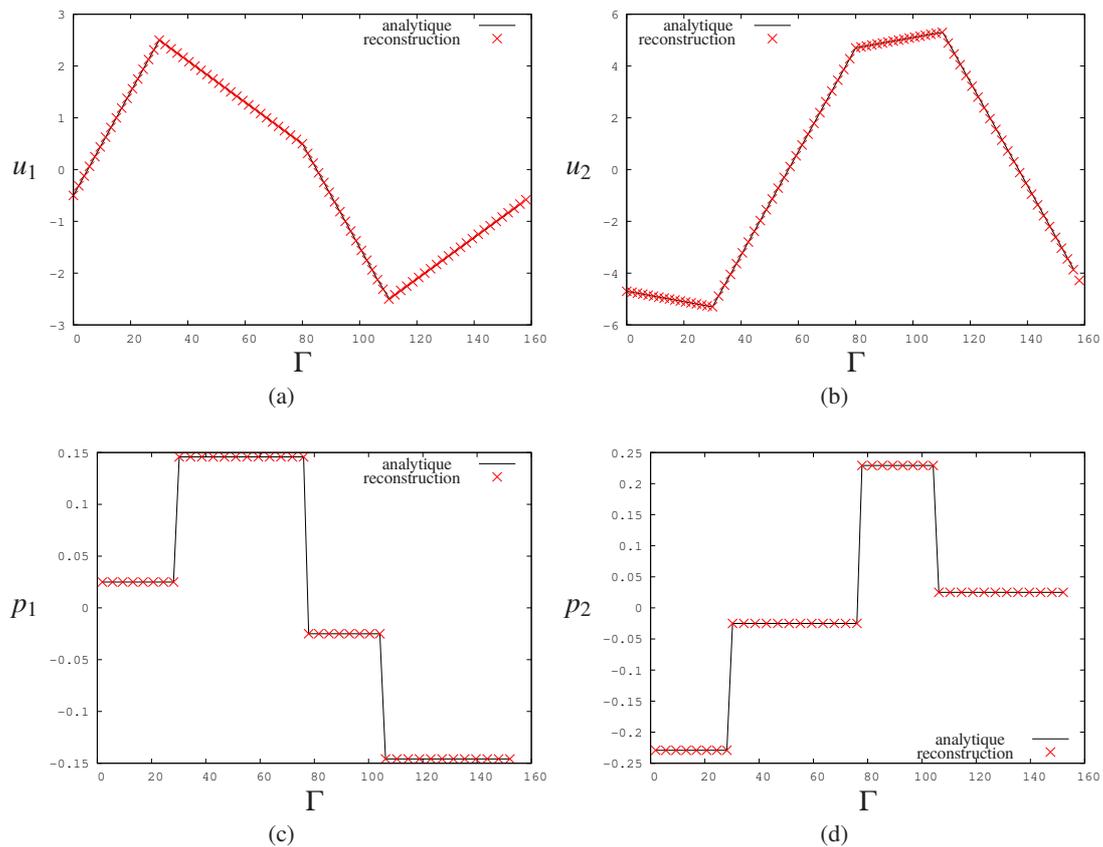


FIGURE 2 – Reconstructions de (a)  $u_1$  et (b)  $u_2$ , les composantes horizontale et verticale du champ de déplacements et (c)  $p_1$  et (d)  $p_2$ , les composantes horizontale et verticale du vecteur-contrainte, sur  $\Gamma$ .

Les figures 3 (a) et (b) représentent les composantes horizontale  $u_1$  et verticale  $u_2$  du champ de déplacements obtenues sur toute la frontière  $\Gamma$  pour différents niveaux de bruit sur le déplacement.

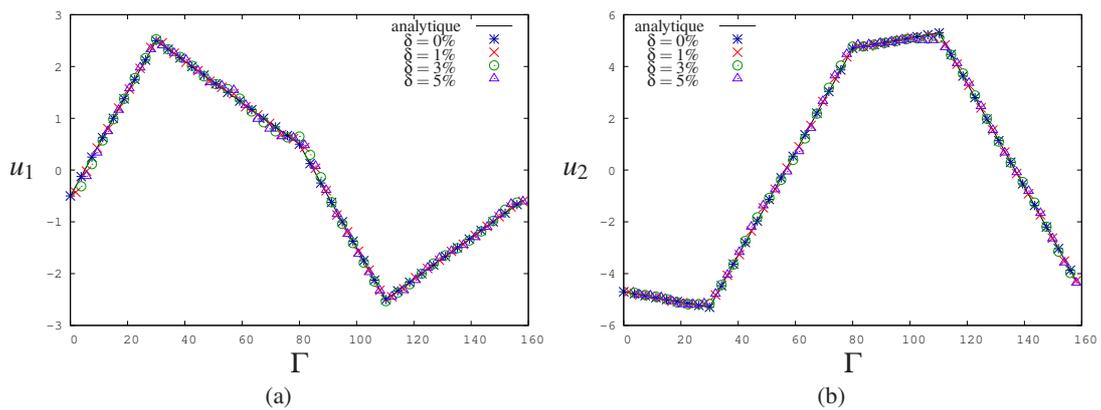


FIGURE 3 – Reconstructions de (a)  $u_1$  et (b)  $u_2$ , les composantes horizontale et verticale, respectivement, du déplacement, sur  $\Gamma$  pour différents niveaux de bruit  $\delta$  sur le déplacement.

Les composantes horizontale  $p_1$  et verticale  $p_2$  du vecteur-contrainte obtenues sur toute la frontière  $\Gamma$  pour différents niveaux de bruit sont représentées sur les figures 4 (a) et (b).

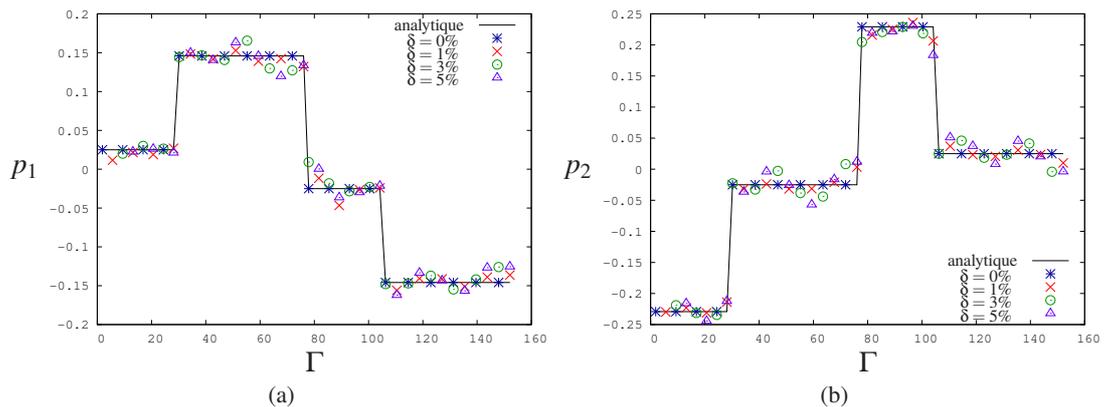


FIGURE 4 – Reconstructions de (a)  $p_1$  et (b)  $p_2$ , les composantes horizontale et verticale du vecteur-contrainte, sur  $\Gamma$ , pour différents niveaux de bruit  $\delta$ .

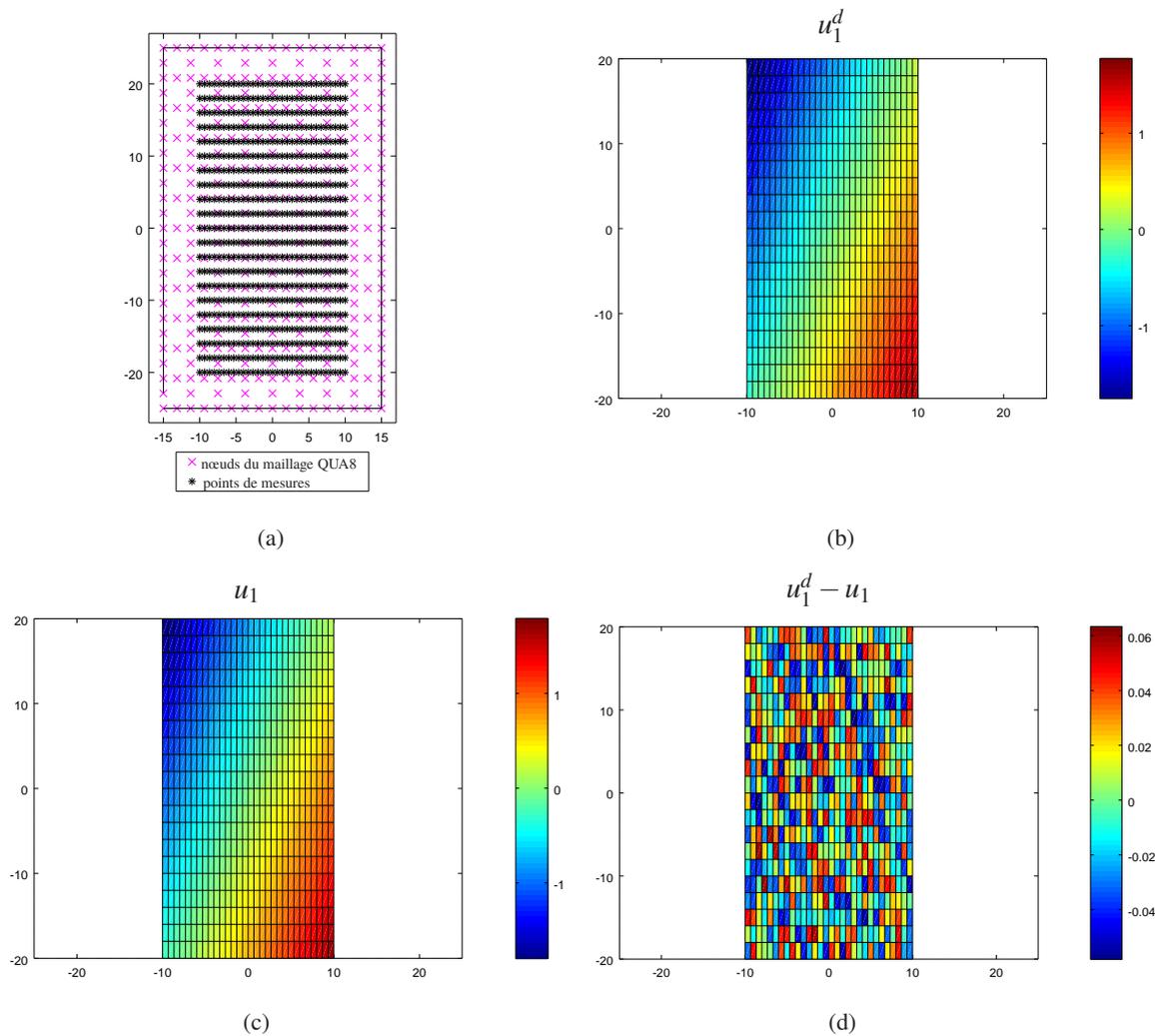


FIGURE 5 – (a) Domaine  $\Omega$  maillé par des éléments QUA8 (nœuds en rose) et sous-domaine  $\Omega_d$  représenté par les points de mesures (noirs), (b) données bruitées (3%),  $u_1^d$ , de la composante horizontale du déplacement sur  $\Omega_d$ , (c) reconstruction de la composante horizontale du déplacement,  $u_1$ , sur  $\Omega_d$ , (d) résidu de déplacement,  $u_1^d - u_1$ , pour la composante horizontale.

Les figures 5 (b), (c) et (d) représentent respectivement pour la composante  $u_1$  du déplacement les données bruitées (3%),  $u_1^d$ , la reconstruction et le résidu,  $u_1^d - u_1$ , sur  $\Omega_d$ . Le résidu correspond en réalité au “débruitage des données”.

Notre technique inverse permet également de reconstruire le champ de déplacements sur tout le domaine  $\Omega$ . La figure 6 (a) représente la composante,  $u_1^\Omega$ , du champ de déplacements reconstruit sur  $\Omega$ . La figure 6 (b) représente la différence entre la solution calculée et la solution analytique,  $u_1^{an}$ , sur  $\Omega_d$ , à partir de données de déplacement sur  $\Omega_d$  bruitées à 3%.

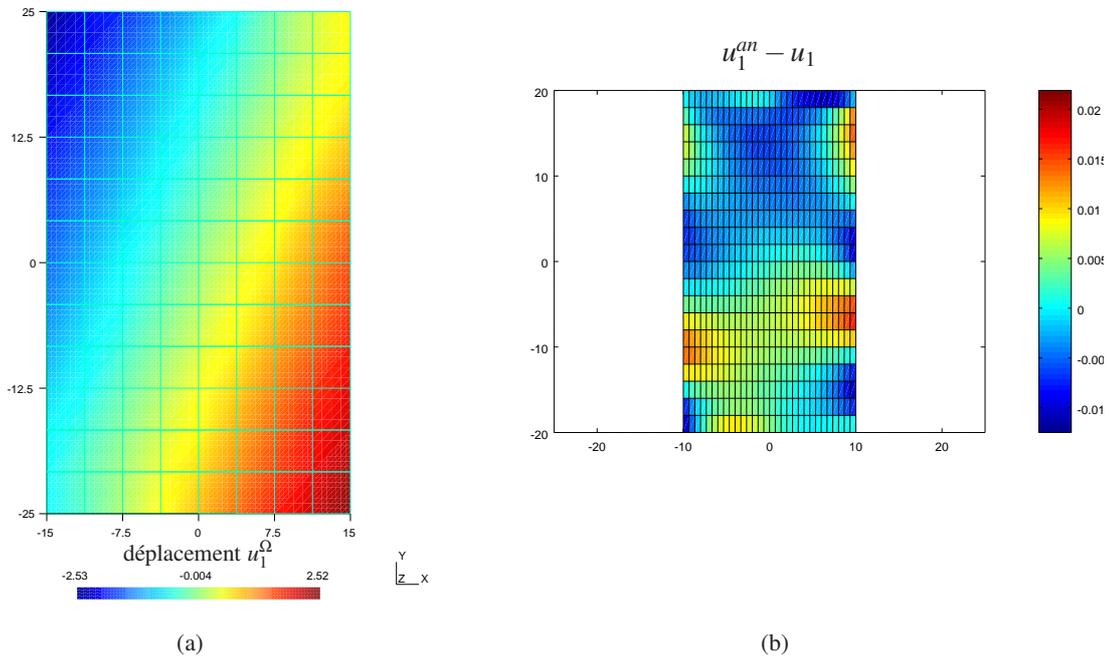


FIGURE 6 – (a) Reconstruction de  $u_1^\Omega$ , la composante horizontale du déplacement, sur  $\Omega$  et (b) erreur  $u_1^{an} - u_1$ , différence entre la solution calculée et la solution analytique sur  $\Omega_d$ , pour des données bruitées (3%) de champ de déplacements sur  $\Omega_d$ .

Cet exemple numérique a permis d'illustrer l'efficacité de la méthode à reconstruire les conditions aux limites (déplacement et répartition d'efforts) et le champ de déplacements sur tout le domaine à partir de données de champs partielles et bruitées.

### 3 Reconstructions à partir de données expérimentales : essai de flexion trois points

Nous utilisons la méthode présentée précédemment pour analyser un essai de flexion sur une éprouvette de béton (figure 7). Le champ de déplacements est obtenu par corrélation d'images numériques (CIN) [4] sur la surface observée. Nous étudions ici l'influence de la taille de la zone où sont données les mesures. Nous notons  $\Omega$  la surface totale de l'éprouvette et  $\Omega_d$  la zone sur laquelle le champ de déplacement est supposé connu par CIN (figure 8 (a)). Nous cherchons à identifier les conditions aux limites inaccessibles à la mesure ainsi que le champ de déplacements (solution) sur toute la surface du solide.



FIGURE 7 – Essai de flexion 3 points sur une éprouvette de béton.

Les mesures de la composante verticale du champ de déplacements, issues de la CIN,  $u_2^{CIN}$ , sur  $\Omega_d$  sont représentées sur la figure 8 (b).

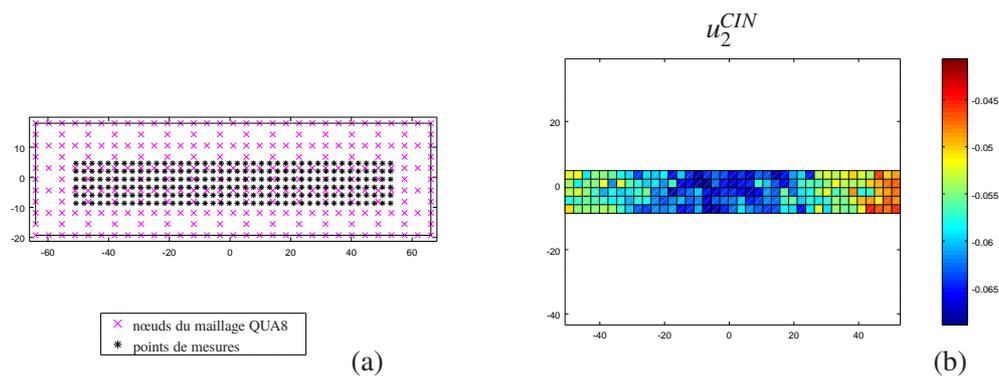


FIGURE 8 – (a) Domaine  $\Omega$  maillé par  $5 \times 15$  éléments (nœuds en rose) et sous-domaine  $\Omega_d$  représenté par les points de mesures (noirs), (b) mesures de la composante verticale du déplacement issues de la CIN,  $u_2^{CIN}$  (mm), sur  $\Omega_d$

Les figures 9 (a) et (b) représentent le résidu  $|u_2^{CIN} - u_2|$ , sur  $\Omega_d$  et la reconstruction,  $u_{2(1)}^\Omega$ , sur tout le domaine, de la composante verticale du champ de déplacements, obtenue à partir de données issues de la CIN et restreintes sur  $\Omega_d$  (points de mesures noirs sur la figure 8 (a)), respectivement.

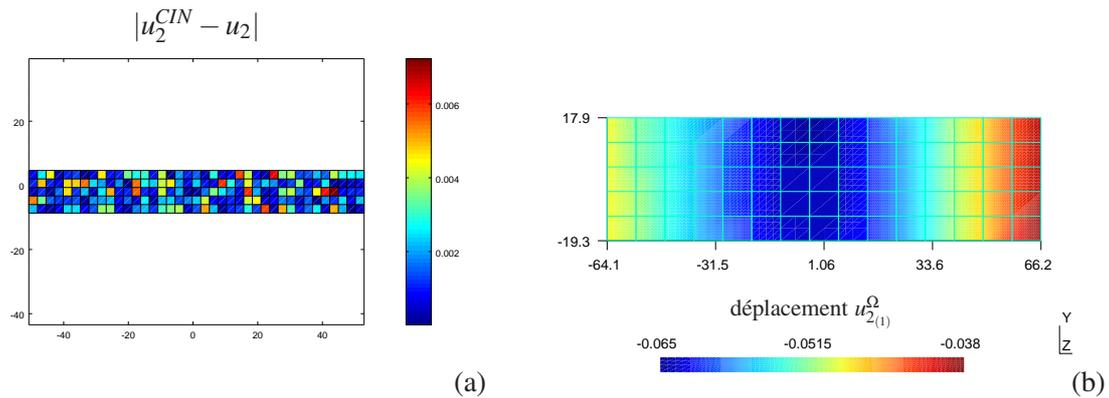


FIGURE 9 – (a) Résidu de déplacement,  $|u_2^{CIN} - u_2|$  (mm), sur  $\Omega_d$ , (b) reconstruction de  $u_{2(1)}^{\Omega}$  (mm), la composante verticale du déplacement, sur  $\Omega$  (nœuds roses des éléments QUA8), à partir de données issues de la CIN sur  $\Omega_d$  (points de mesures noirs).

La reconstruction,  $u_{2(2)}^{\Omega}$ , de la composante verticale du champ de déplacements, obtenue à partir de données issues de la CIN sur  $\Omega$  est représentée sur la figure 10 (a). Sur la figure 10 (b), nous observons la différence des solutions  $u_{2(1)}^{\Omega}$  et  $u_{2(2)}^{\Omega}$  obtenues avec des mesures sur la zone réduite  $\Omega_d$  ou sur tout le domaine  $\Omega$ , respectivement.

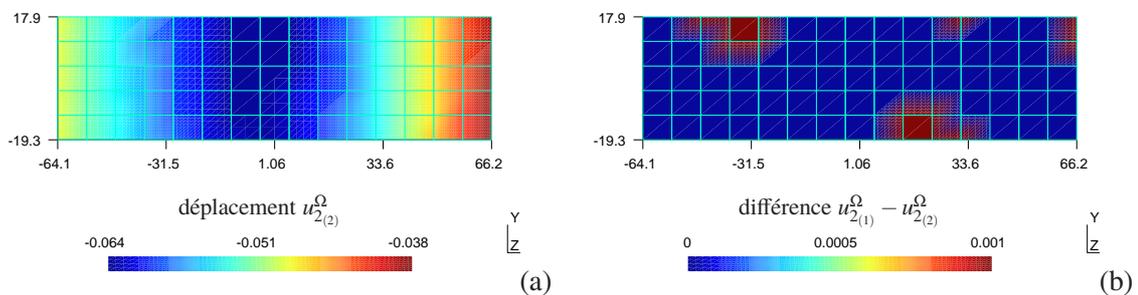


FIGURE 10 – (a) Reconstruction de  $u_{2(2)}^{\Omega}$  (mm), la composante verticale du déplacement, sur  $\Omega$ , à partir de données issues de la CIN sur  $\Omega$ , (b) différence entre les champs solutions  $u_{2(1)}^{\Omega}$  et  $u_{2(2)}^{\Omega}$  obtenus respectivement avec des données sur la zone réduite  $\Omega_d$  ou sur tout le domaine  $\Omega$ .

Les figures 11 (a) et (b) représentent respectivement les composantes horizontale,  $u_1$ , et verticale,  $u_2$ , du champ de déplacements identifiées sur la frontière  $\Gamma$  à partir de données issues de mesures de CIN sur toute la surface  $\Omega$  ou sur la zone réduite  $\Omega_d$ . Nous observons que l'identification des conditions aux limites en terme de déplacement à partir de données issues de la CIN sur  $\Omega_d$  est semblable à celle obtenue à partir de données issues de la CIN sur  $\Omega$ . Les plus grandes différences sont localisées près des coins du domaine.

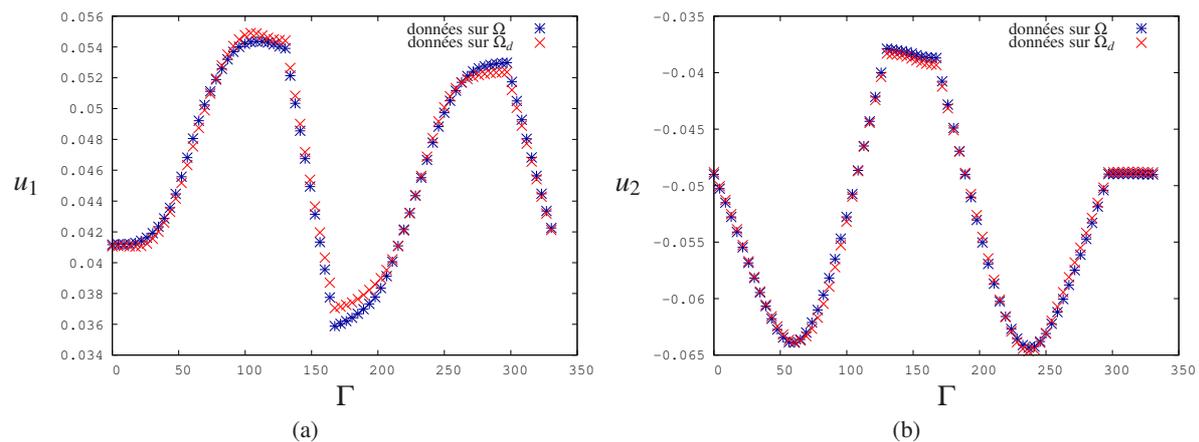


FIGURE 11 – Reconstructions de (a)  $u_1$  et (b)  $u_2$ , les composantes horizontale et verticale du champ de déplacements, sur  $\Gamma$ , à partir de données issues de la CIN sur  $\Omega$  et  $\Omega_d$ .

## 4 Conclusion

Nous avons présenté une généralisation de la méthode de régularisation évanescence pour la résolution de problèmes d'identification à partir de mesures de champs partielles. L'idée principale de la méthode est de chercher parmi toutes les solutions de l'équilibre, celle qui s'approche au mieux des mesures. Ici, l'espace caractérisant les solutions de l'équation d'équilibre est obtenu par la méthode des éléments finis. Nous avons appliqué la méthode pour un exemple numérique avec des données synthétiques et pour un essai de flexion. Nous obtenons la reconstruction du champ de déplacements sur tout le domaine et identifions les conditions aux limites inaccessibles à la mesure. L'application de la méthode à des données réelles issues de CIN souligne la précision et la stabilité de la méthode proposée ainsi que sa capacité à débruiter des mesures.

## Références

- [1] A. Cimetière, F. Delvare, F. Pons, Une méthode inverse à régularisation évanescence, *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences-Series IIB-Mechanics*, 328 (2000) 639–644.
- [2] A. Cimetière, F. Delvare, M. Jaoua, F. Pons, Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization, *Inverse Problems*, 17 (2001) 553–570.
- [3] F. Delvare, A. Cimetière, J.-L. Hanus, P. Bailly, An iterative method for the Cauchy problem in linear elasticity with fading regularization effect, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 (2010) 3336–3344.
- [4] F. Hild, S. Roux, Digital Image Correlation : from displacement measurement to identification of elastic properties – a review, *Strain*, (2006) 69–80.