

Contact entre particules déformables : de la limite de Hertz aux grandes déformations

Thi-Lo Vu^{a,*}, Serge Mora^{b,*}, Jonathan Barés^{c,*}, Saeid Nezamabadi^{d,*}

*. Laboratoire de Mécanique et Génie Civil, Université de Montpellier, CNRS, France

a. thi-lo.vu@umontpellier.fr

b. serge.mora@umontpellier.fr

c. jb@jonathan-bares.eu

d. saeid.nezamabadi@umontpellier.fr

Résumé :

La plupart des études bi-dimensionnelles sur de matériaux granulaires considèrent l'assemblage de particules cylindriques dans le régime des petites déformations, en utilisant la description du contact de Hertz. Néanmoins, dans plusieurs cas, les déformations subies par les particules ne sont pas infinitésimales. L'étude de validité de l'hypothèse des petites déformations représente donc un enjeu important pour déterminer la pertinence des prévisions issues de ces études bi-dimensionnelles. Au moyen de nouvelles approches expérimentales, nous étudions la déformation d'un assemblage de particules soumis à de grandes déformations.

Abstract :

Most of the two-dimensional studies on granular materials consider the assembly of cylindrical particles in the regime of small deformations, using Hertz's contact law. Nevertheless, in several cases, the deformations experienced by the particles are not infinitesimal. The study of the validity of the infinitesimal strain hypothesis represents an important stake to determine the relevance of the forecasts resulting from these two-dimensional studies. By means of new experimental approaches, this paper studies the deformation of an assembly of particles subjected to large deformations.

Mots clefs : Corrélations d'images numériques, hyperélasticité, méthode des éléments finis, contact.

1 Introduction

En physique des milieux granulaires, lorsque la force est mesurée ou calculée, que ce soit pour les études numériques [1,2] ou expérimentales [3–5], on considère très couramment l'assemblage de particules se déformant dans le régime des faibles polydispersités et des faibles déformations. Cette limite permet de se conformer à la loi de contact de Hertz [6] qui fournit la description mécanique la plus courante pour le contact entre grains. Néanmoins, dans plusieurs cas pratiques, la plupart des problèmes granulaires

impliquent des grains de forme irrégulière, sur une très large gamme de tailles et dans des situations présentant de grandes déformations [7–9]. L'absence d'une ligne claire de démarcation séparant le régime de petites déformations des régimes où il est nécessaire de prendre en compte de grandes déformations au sein des grains est source de confusions. Par exemple, dans le cas de systèmes granulaires bloqués, certains grains (comme ceux impliqués dans les chaînes de force [1]) peuvent être bien sollicités au-delà du domaine de validité de l'hypothèse des petites déformations, ce qui peut remettre en cause la description macroscopique de l'ensemble du système.

Par conséquent, afin d'observer, de modéliser et de simuler correctement des milieux granulaires réels, il est nécessaire d'obtenir une description complète du comportement du grain au-delà de la limite élastique linéaire. Cela permettra de vérifier des modèles numériques déjà existants [10–12] et de fournir des bases pour les améliorer.

Au moyen de nouvelles approches expérimentales en 2D, nous étudions des situations où le champ de contrainte de Hertz n'est plus valable afin de déterminer comment il doit être modifié au-delà de l'élasticité linéaire. Pour cela, nous proposons une nouvelle méthode de mesure expérimentale adaptée aux matériaux granulaires. Nous avons mis en place une expérience de compression d'une particule, étape par étape, associée à un appareil d'imagerie à très haute résolution (précision de $5\mu\text{m}$ sur un disque de 5.8cm de diamètre). Le disque est la surface de base d'un cylindre constitué d'un matériau hyperélastique. Le champ de déplacement sur la surface du disque est mesuré par la technique de corrélation d'images numériques (DIC). La déformation est directement déduite puis comparée avec des résultats numériques obtenus par des simulations d'élément finis (FEM). Les limitations issues de la théorie élastique non linéaire sont alors mises en évidence.

Dans la première partie de cet article nous présentons le principe de l'expérience. Ensuite, dans la deuxième partie, nous donnons des détails sur les techniques utilisées de traitement d'images pour mesurer le champ de déplacement à l'intérieur de la particule. Le champ de déformation est calculé et comparé avec celui qui est obtenu par FEM. Enfin, dans la dernière partie, nous présentons quelques résultats, conclusions et perspectives.

2 Dispositif expérimental et matériau

Le choix du matériau, dans le cadre de ce travail, est le silicone qui présente un comportement élastique non linéaire modèle, suivant l'équation constitutive du solide néo-hookéen pour une large gamme de déformations [13]. En plus, ce matériau est stable chimiquement et thermiquement. On fabrique une particule cylindrique noire en silicone [14] (Module de Young 0.38 MPa). Une surface de la particule est garnie avec des paillettes très fines [15] (taille moyenne $30\mu\text{m}$), puis est placée sur la vitre supérieure d'un scanner à plat tel qu'indiqué à la fig.1-A. Le diamètre de la particule est de 5.8 cm, son épaisseur est de 9.5 mm. Comme présenté à la fig.1-B, le revêtement en paillettes forme un motif aléatoire, homogène et très mince sur la face inférieure de la particule avec un contraste noir/blanc élevé. Etape par étape, le cylindre plat est comprimé dans une direction radiale dans le régime quasi-statique par un appareil de compression uniaxial fabriqué au laboratoire (voir fig. 1-A). Ce dispositif est actionné pas à pas d'une manière précise par un moteur et une tige filetée avec un rapport distance/pas très faible. La force est mesurée grâce à deux cellules de force de 1kg. De l'huile de faible viscosité (60 mPa.s) est ajoutée sur la vitre supérieure du scanner pour supprimer tout frottement statique et améliorer la transmission optique. Après chaque étape de compression de 0.5mm, le scanner prend une image de la surface de la particule. Comme présenté à la fig.1-C & D, on visualise la surface de la particule avec une extrême précision.

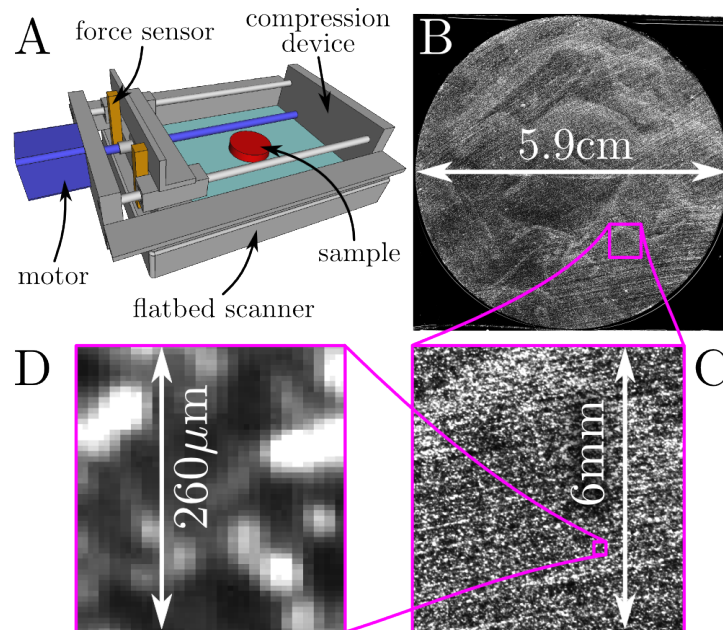


Figure 1: A: Dispositif expérimental. Une particule cylindrique (5.8cm de diamètre et 9.5mm d'épaisseur) est posée sur un scanner. L'appareil de compression uniaxial comprime la particule, étape par étape. La particule est scannée par en dessous et la force est mesurée. B: Image en noir et blanc de la surface de la particule. C: Vue agrandie de la particule D: Vue agrandie à l'échelle des cellules de corrélation. La taille d'un pixel est $5.29\mu\text{m}$.

3 Post-traitement de l'image

La technique de corrélation d'images pour un matériau granulaire a été couramment utilisée à 2D et à 3D à l'échelle du milieu [16] pour mesurer les mouvements des grains, mais à notre connaissance, elle n'a jamais été utilisée à l'échelle de chaque grain pour mesurer leur déformation. Cependant, comme cela a été souligné plus haut, il est très intéressant d'étudier les milieux granulaires dans les cas où les grains sont irréguliers, fortement déformés, ou avec un comportement rhéologique quelconque. Jusqu'à maintenant, la seule façon de mesurer la force à l'échelle du grain est la photoélasticité [5, 17], la thermoélasticité [4] ou l'étude des frontières [3]. Cependant, pour chacune de ces techniques, les matériaux et les formes des particules sont très limités et elles ne peuvent être effectuées que dans le régime des petites déformations. Nous proposons ici une méthode capable de mesurer complètement le champ de contrainte pour tous types de grains et de chargement, en 2D.

Grâce à la technique de corrélation d'images numérique (DIC) [18, 19] couplée avec la méthode de vélocimétrie de particules [20] adaptée à une taille d'image élevée et au régime de grandes déformations, nous mesurons l'évolution du champ de déplacement à l'intérieur d'une particule de silicone comprimée. Un maillage régulier de $260 \times 260 \mu\text{m}^2$ ($50 \times 50 \text{px}^2$) est d'abord construit sur l'image initiale non déformée. Pour chaque maille, également appelée cellule de corrélation, le déplacement selon les directions x et y est mesuré entre deux images successives en utilisant les coordonnées initiales de chaque maille de l'image non déformée et le déplacement trouvé de l'image précédente avec celle non déformée. Pour ce faire, une première mesure est effectuée, avec une précision de 1 pixel, à l'aide d'un algorithme basé sur la transformation de Fourier [19]. Ensuite, la mesure est améliorée jusqu'à une précision sub-pixels en utilisant un algorithme d'optimisation [21] maximisant la corrélation entre deux images successives. Pour tenir compte des grandes déformations, les deux étapes de l'algorithme

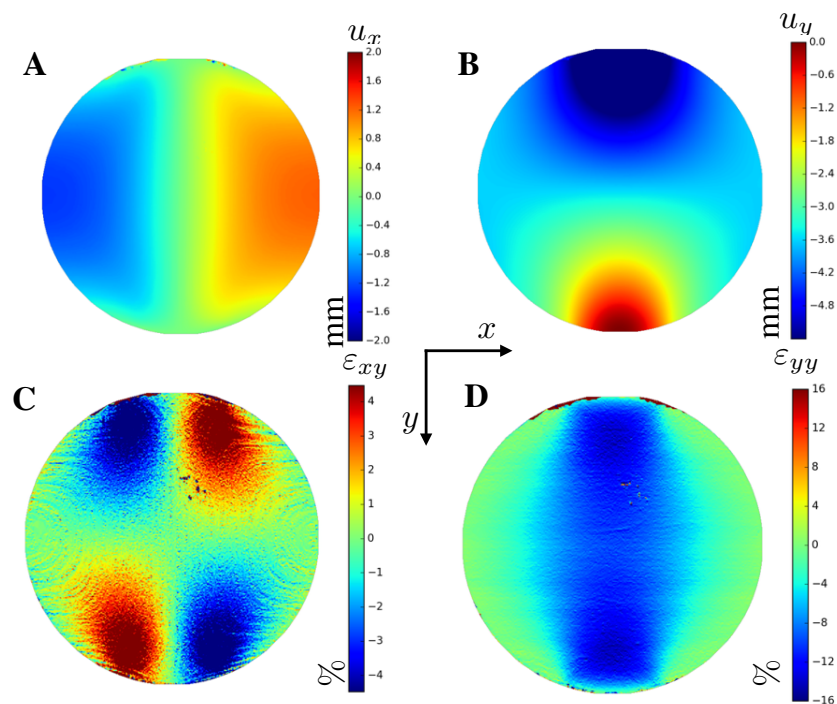


Figure 2: A,B: Le champ de déplacement mesuré par corrélation d'images selon les directions x et y . C,D: Champ de déformation de deux composantes ε_{xy} et ε_{yy} . Les champs sont tracés sur la géométrie non déformée pour une déformation globale de 14% de la particule. Les mesures sont bruitées à la frontière car les cellules de corrélation impliquant une zone hors du disque présentent un déficit d'information.

sont exécutées séquentiellement pour des cellules de corrélation allant de 3 fois la taille de $50 \times 50 \text{px}^2$. Parallélisé sur 12 processeurs, 3GHz de noeuds, le calcul prend environ 6 heures pour une série de 30 étapes de compression.

4 Résultats et discussions

Comme montré sur la fig.2-A&B pour une compression globale de 14%, les composantes x et y du déplacement, u_x et u_y (y est la direction de la compression globale, x est la direction orthogonale dans le plan) sont mesurées avec une excellente qualité et précision par rapport à ce qui est fait dans le régime des petites déformations pour la compression de disque [18]. Cependant, les données sont bruitées quand les cellules de corrélation se situent à la périphérie du disque: l'information de corrélation dans la particule est mélangée avec une zone noire autour du disque où aucune corrélation n'est possible.

A partir du déplacement, on calcule la déformation de Green-Lagrange (comme dans la fig.2-C & D) qui est adaptée pour le matériau grande déformable.

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2} [(\nabla_X \mathbf{u})^T + \nabla_X \mathbf{u} + (\nabla_X \mathbf{u})^T \cdot \nabla_X \mathbf{u}] \quad (1)$$

où $\nabla_X \mathbf{u}$ est le gradient de déplacement:

$$\nabla_X \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial X} & \frac{\partial u_x}{\partial Y} \\ \frac{\partial u_y}{\partial X} & \frac{\partial u_y}{\partial Y} \end{bmatrix} \quad (2)$$

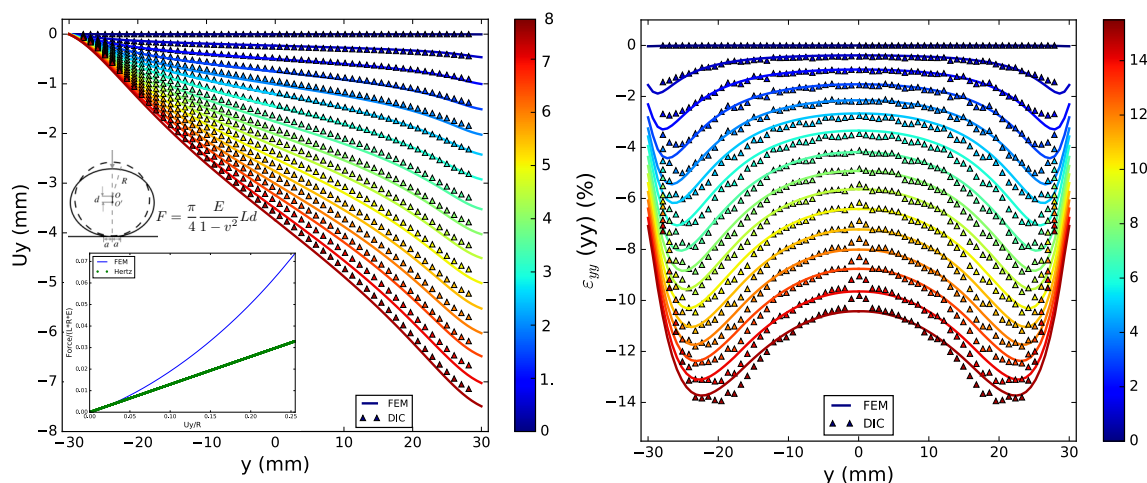


Figure 3: Comparaison l'évolution de la déformation (A) et du déplacement (B) pendant le processus de compression du long de la ligne centrale de la particule, selon la direction de compression en fonction y pour les taux de compression du 0% au 14% du test expérimental et numérique (FEM).

Notons que la ∂X est égale la taille chaque cellule de corrélation d'image $260 \times 260 \mu\text{m}^2$. Il est très important de noter que ces résultats sont obtenus sans lissage ni filtrage. Comme on peut s'y attendre à partir de la théorie de Hertz [6], on trouve (ε_{yy}) que la déformation parallèle avec la direction de compression est symétrique et maximale dans une zone reliant les deux points de contact. À la fig.2-D, on observe aussi de légères variations horizontales. Elles correspondent à une légère irrégularité de la vitesse du moteur du scanner. C'est le seul artéfact provenant de l'utilisation du scanner. Cet inconvénient doit être mis en perspective avec le fait qu'aucun filtrage de bruit n'a été appliqué aux images ni au post-traitement d'image. De même, pour ε_{xy} , on observe des résultats qualitativement concordants avec la théorie de Hertz puisque la déformation de cisaillement est symétrique avec deux zones de fortes déformations partant de la zone de contact.

En parallèle, la simulation numérique est réalisée par la méthode des éléments finis sur le logiciel LMGC90 [22]. Comme la déformation de la particule est symétrique, on simule 1/8 de la particule, avec les mêmes conditions limites que celles des tests expérimentaux. Le matériau est non-linéaire, élastique et isotrope. Dans la fig.3-A & B, on présente l'évolution du déplacement U_y et de la déformation ε_{yy} du long de la ligne centrale de la particule, selon la direction de compression. Ces courbes sont tracées pour plusieurs niveaux de compression du 0% au 14%. On constate que les déplacements obtenus numériquement et expérimentalement coïncident. Concernant les déformations, les résultats de deux approches sont proches. Au niveau des pics, on remarque la différence entre ces deux courbes surtout pour les petites déformations. Elle s'explique par des imperfections (dont la taille caractéristique est proche du déplacement imposé) au niveau de la surface de contact de l'échantillon. Cet effet devient négligeable pour les plus grandes déformations. On observe que les déformations augmentent rapidement du point de contact jusqu'à peu près 5 mm de ce point sur les deux côtés. Ensuite, elles commencent à diminuer jusqu'au centre de la particule.

On considère que le contact entre la particule cylindrique et le paroi est le contact entre deux cylindres. La longueur de contact est $2a$. Dans le cas la friction entre la particule et le paroi nulle, la force est

proportionnée au déplacement d du centre de cylindre [6]:

$$F = \frac{\pi}{4} \frac{E}{1 - \nu^2} Ld \quad (3)$$

où L est l'épaisseur de l'échantillon, E est le module de Young et ν est le coefficient de Poisson. Dans la fig.3, les forces en fonction du déplacement qui sont obtenues par la simulation FEM et la théorie de Hertz sont tracées. On remarque que la formule de Hertz est valable dans le domaine de petite déformation (3%) où le matériau présente le comportement d'élasticité linéaire.

5 Conclusion et perspective

En conclusion, dans le cadre de cet article, nous avons présenté un dispositif expérimental original qui capable de comprimer des particules cylindriques. Parallèlement, avec un algorithme de DIC rapide et adapté pour prendre en compte les grandes déformations, l'évolution du champ de déplacement à l'intérieur de la particule est mesurée avec une excellente précision. Le champ de déformation a été dérivé du champ de déplacement et comparé à ce qui est attendu de la loi de contact de Hertz. Un bon accord qualitatif a été observé tant que le système reste dans le régime des petites déformations.

Cet article valide une méthode expérimentale pour mesurer les champs de déformation et de contrainte à l'échelle d'un grain pour tout le type de chargement et ouvre une nouvelle approche expérimentale pour une large gamme de matériaux granulaires : grandes déformations, mélanges de grains, *etc.* Dans le futur, des expériences seront réalisées avec différents types de matériaux: plastiques, fragiles, compressibles, *etc.* Les résultats seront comparés à ceux obtenus avec des modèles numériques (méthode d'éléments finis par exemple) pour différentes conditions aux limites. Cette nouvelle approche expérimentale peut également s'étendre à des milieux granulaires 3D.

References

- [1] Farhang Radjai, Michel Jean, Jean-Jacques Moreau, and Stéphane Roux. Force distributions in dense two-dimensional granular systems. *Phys. Rev. Lett.*, 77:274–277, Jul 1996.
- [2] Frédéric da Cruz, Sacha Emam, Michaël Prochnow, Jean-Noël Roux, and François Chevoir. Rheo-physics of dense granular materials: Discrete simulation of plane shear flows. *Phys. Rev. E*, 72:021309, Aug 2005.
- [3] Nicolas Brodu, Joshua A. Dijksman, and Robert P. Behringer. Spanning the scales of granular materials through microscopic force imaging. *Nature Communications*, 6, March 2015.
- [4] Pawarut Jongchansitto, Xavier Balandraud, Michel Grédiac, Clément Beitone, and Itthichai Preechawuttipong. Using infrared thermography to study hydrostatic stress networks in granular materials. *Soft matter*, 10(43):8603–8607, 2014.
- [5] Trushant S Majmudar and Robert P Behringer. Contact force measurements and stress-induced anisotropy in granular materials. *Nature*, 435:021309, Jul 2005.
- [6] K.L. Johnson and K.L. Johnson. *Contact Mechanics*. Cambridge University Press, 1987.

- [7] Noura Ouhbi, Charles Voivret, Guillaume Perrin, and Jean-Noël Roux. Railway ballast: Grain shape characterization to study its influence on the mechanical behaviour. *Procedia Engineering*, 143:1120 – 1127, 2016.
- [8] Giovanni Romeo and Massimo Pica Ciamarra. Elasticity of compressed microgel suspensions. *Soft Matter*, 9:5401–5406, 2013.
- [9] Paul Menut, Sebastian Seiffert, Joris Sprakel, and David A. Weitz. Does size matter? elasticity of compressed suspensions of colloidal- and granular-scale microgels. *Soft Matter*, 8:156–164, 2012.
- [10] Emilien Azéma, Farhang Radjai, Robert Peyroux, and Gilles Saussine. Force transmission in a packing of pentagonal particles. *Phys. Rev. E*, 76:011301, Jul 2007.
- [11] V. Topin, J. Y. Delenne, F. Radjai, L. Brendel, and F. Mabilie. Strength and failure of cemented granular matter. *The European Physical Journal E*, 23(4):413–429, 2007.
- [12] Saeid Nezamabadi, Farhang Radjai, Julien Averseng, and Jean-Yves Delenne. Implicit frictional-contact model for soft particle systems. *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 83:72 – 87, 2015.
- [13] L. Meunier, G. Chagnon, D. Favier, L. Orgéas, and P. Vacher. Mechanical experimental characterisation and numerical modelling of an unfilled silicone rubber. *Polymer Testing*, 27(6):765 – 777, 2008.
- [14] Silicone. *Smooth-On[®], Cast Magic[®], 15 SLOW colored with few drop of black Silc Pig[®]*.
- [15] Silver bullet. *Smooth-On[®], Cast Magic[®]*.
- [16] Mikael Sjudahl, Clive R. Siviour, and Fredrik Forsberg. Digital volume correlation applied to compaction of granular materials. *Procedia IUTAM*, 4:179 – 195, 2012.
- [17] Meredith Cox, Dong Wang, Jonathan Barés, and Robert P Behringer. Self-organized magnetic particles to tune the mechanical behavior of a granular system. *EPL (Europhysics Letters)*, 115(6):64003, 2016.
- [18] François Hild and Stéphane Roux. Digital image correlation: from displacement measurement to identification of elastic properties—a review. *Strain*, 42(2):69–80, 2006.
- [19] Bing Pan, Kemao Qian, Huimin Xie, and Anand Asundi. Two-dimensional digital image correlation for in-plane displacement and strain measurement: a review. *Measurement science and technology*, 20(6):062001, 2009.
- [20] Ajay K Prasad. Particle image velocimetry. *Current Science-Bangalore-*, 79(1):51–60, 2000.
- [21] M. Bornert, F. Brémand, P. Doumalin, J.-C. Dupré, M. Fazzini, M. Grédiac, F. Hild, S. Mistou, J. Molimard, J.-J. Orteu, L. Robert, Y. Sirel, P. Vacher, and B. Wattrisse. Assessment of digital image correlation measurement errors: Methodology and results. *Experimental Mechanics*, 49(3):353–370, 2009.
- [22] LMGC. Lmgc90. https://git-xen.lmgc.univ-montp2.fr/lmgc90/lmgc90_user/wikis/home.