Condition Inf-Sup vue par les méthodes spectrales

M. Azaïez[a]

a. Bordeaux INP, Institut de Mécanique et d'Ingénierie de Bordeaux I2M - UMR 5295

Résumé :

Il est bien connu que l'approximation des équations aux dérivées partielles sous contraintes nécéssite la prise en compte d'une condition Inf-Sup. C'est le moyen mathématique, introduit dans [6, 7], pour assurer la compatibilité entre l'EDP et la contrainte. Quand celle-ci est assurée par l'Introduction d'un multiplicateur de Lagrange alors la condition Inf-Sup assure l'unicité de ce dernier. Le choix de la méthode d'approximation influe de manière significative sur celui des espaces d'approximation compatibles ainsi que sur le comportement de la condtion Inf-Sup discrète. Dans le cadre de cette contribution, nous ferons le point sur cette question dans le cas d'une approximation par méthodes spectrales. Comme exemples d'EDP, nous allons considérer deux cas :i) les équations de Darcy et ii) les équations de Stokes

Abstract :

It is well known that the approximation of partial differential equations under constraint needs to take care on how to satisfy Inf-Sup condition. It is the mathematical tool, introduced in [6, 7], to ensure the compatibility between EDP and the constraint. When the constraint equation is satisfied by the introduction of a Lagrange multiplier then the Ind-Sup condition ensures the uniqueness of the latter. The choice of the approximation method has a significant influence on the choice of compatible approximation spaces and on the behavior of the discrete Inf-Sup condition. As part of this contribution, we will consider this issue in the case of an approximation by spectral methods. As examples of PDEs, We will consider two : i) the equations of Darcy and ii) Stokes problem

Mots clefs : méthodes spectrales, condition Inf-Sup, modes parasites, convergence spectrale

1 Introduction

La nature de certains problèmes physiques nécessitent une grande précision sur les solutions numériques issues des simulations. Pour cela les méthodes spectrales et des éléments spectraux constituent le bon choix. Ces méthodes sont connues pour leur précision dans l'approximation des équations aux dérivées partielles, en ce sens que la vitesse de convergence n'est limitée que par la régularité des solutions recherchées. De plus en plus, il leur est reconnu dans la communauté scientifique une grande capacité à simuler de façon directe et à un coût raisonnable des écoulements complexes en 3 dimensions. L'emploi des techniques de décomposition de domaines alliées aux méthodes spectrales a permis de traiter des domaines généraux ou encore à géométrie instationnaire. L'existence d'algorithmes performants de résolution (sur des machines séquentielles et/ou à architecture parallèle) des équations algébriques

finales issues d'une discrétisation de type éléments spectraux a contribué à susciter un véritable engouement pour ces méthodes, tant dans le domaine de la recherche que des applications.
Pour l'introduction aux méthodes spectrales plusieurs ouvrages sont disponibles. Le lecteur pourra consulter par exemple [4, 9, 10, 11]

La suite de ce document est dédiée à l'approximation des équations aux dérivées partielles sous contraintes. On s'intéressera aux cas des équation de Darcy [8] et ensuite celle de Stokes. Nous rappelons pour chaque cas le choix des espaces assurant une condition Inf-Sup discrète et donc l'unicité des solutions numériques.

2 Méthodes spectrales pour le problème de Darcy

On s'intéresse ici au système d'équations aux dérivées partielles

$$\mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \tag{2}$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \tag{3}$$

dans un ouvert borné bi- ou tridimensionnel Ω. La donnée est une fonction f, les inconnues sont la vitesse $\mathbf{u}$ et la pression p. On impose en outre à la vitesse d'avoir une composante normale nulle sur la frontière $\partial\Omega$ du domaine.

Usuellement le problème Darcy est transformé en deux équations. Une première portant sur la pression :

$$\Delta p = \nabla.\mathbf{f} \quad \text{dans } \Omega \tag{4}$$

$$\frac{\partial p}{\partial n} = \mathbf{f}.\mathbf{n} \quad \text{sur } \partial\Omega \tag{5}$$

et une seconde sur la vitesse :

$$\mathbf{u} = \mathbf{f} - \nabla p.$$

Cette façon de découpler la vitesse et la pression a l'inconvénient d'une part de faire apparaître une condition aux limites sur la pression, condition qui n'existe pas dans le problème de départ, et d'autre part de fournir une vitesse numérique à divergence non nulle, mais plutôt "tendant vers zéro". Pour remédier à ce défaut, inhérent à cette méthode, nous avons proposé dans [2] (voir document joint) et [3] (voir document joint) une nouvelle technique permettant de répondre à ces exigences dans le cas d'un seul domaine [2] et en multidomaine [3].

La méthode présentée dans [2] utilise des éléments mixtes pour la vitesse et la pression. Elles sont découplées en construisant un opérateur du type Uzawa [5] sur la pression, ce qui n'introduit pas de conditions aux limites sur cette dernière. Dans cette même référence on justifie mathématiquement et numériquement que la vitesse obtenue est à divergence nulle sur tout le domaine frontière comprise. Cette méthode est comparée avec d'autres approches ce qui a permis de prouver son efficacité. Une résolution directe est utilisée pour l'inversion de l'opérateur d'Uzawa dont la matrice est symétrique et aussi mal conditionnée que celle d'un "Laplacien". L'inconvénient de cette méthode est la non unicité de la pression obtenue numériquement. En effet celle-ci est obtenue modulo 4 modes en dimension 2 et

8 en dimension 3. Son filtrage se fait naturellement et sans aucune difficulté.

Si dans le cas d'un seul élément la présence des modes parasites ne pose pas de problème car on les connaît et on sait les filtrer, dans le cas de plusieurs éléments ceux-ci peuvent être difficiles à identifier et à filtrer au moins systématiquement et donc deviennent gênants. Dans le but d'écrire un code multi-domaines, nous avons proposé dans [3] une méthode d'approximation spectrale pour les équations de Darcy basée sur la notion de grilles décalées. Cette méthode sans modes parasites est aussi optimale que celle présentée pour le cas mono-domaine [2]. Cette méthode utilise pour la pression un espace polynomial de degré inférieur d'une unité à celui de la vitesse, tout en fournissant une vitesse à divergence nulle sur tout le domaine frontière comprise. L'opérateur d'Uzawa a les mêmes propriétés que celles énoncées pour le premier choix. Une comparaison de cette méthode avec une résolution du type Poisson–Neumann est effectuée et a montré un avantage au profit des grilles décalées. Dans cette même référence on utilise ce solveur afin d'améliorer l'algorithme de Karniadakis [12] et ce en annulant, à chaque pas de temps, la divergence de la vitesse issue de l'étape diffusion. Les expérimentations numériques montrent un gain dans la précision temporelle.

3 Problème de Stokes

Il est bien connu que mis à part le traitement du terme non linéaire, la principale difficulté pour résoudre numériquement les équations de Naviers-Stokes réside dans l'étape de Stokes.

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u} + \nabla p &= \mathbf{f} \quad \text{dans} \ \ \Omega, && (6)\\ \text{div}\, \mathbf{u} &= 0 \quad \text{dans} \ \ \Omega, && (7)\\ \mathbf{u} &= 0 \quad \text{sur} \ \ \partial\Omega. && (8) \end{aligned}$$

Plus exactement dans la détermination d'un champ de pression assurant une vitesse à divergence nulle. Comment découpler la vitesse et la pression sans dégrader les propriétés de stabilité et de précision du schéma choisi au départ pour discrétiser les équations de Navier-Stokes ?. Historiquement, la première idée a été proposée par Uzawa [5] et plus tard adaptée pour une approximation par méthodes spectrales. Durant les années 80, plusieurs travaux concernant cette question ont été réalisés, on renvoie à [9] pour la description de quelques une d'entre elles. On retient de ces expériences que le choix naturel consistant à prendre le même degré polynomial pour représenter la vitesse et la pression (dit (P_N, P_N) conduit à la présence de modes parasites. Ces modes appartiennent à l'espace vectoriel de dimension fini suivant

$$Z_N = \Big\{ q_N \in P_N(\Omega), \ \ b_N(q_N, \mathbf{v}_N) = 0, \forall \mathbf{v}_N \in (P_N^0(\Omega))^d \Big\}$$

où P_N désigne les polynômes de degré inférieur ou égal à N et b_N est la forme bilinéaire définie par $b_N(q_N, \mathbf{v}_N) = -(q_N, \text{div } \mathbf{v}_N)_N$. Pour ce choix on démontre (voir [9]) que la dimension de Z_N est 7 pour $d = 2$ et $12N + 3$ pour $d = 3$. Pour éviter ces modes parasites et offrir une appoximation stable, Maday et Patera ont introduit dans [13] la méthode dite (P_N, P_{N-2}), qui consiste à prendre pour la pression un espace polynomial de degré inférieur de deux unités par rapport à celui de la vitesse, permet de résoudre le problème de Stokes. Ce choix fournit un opérateur d'Uzawa : $\text{div}\Delta^{-1}\text{grad}$ symétrique et défini positif, avec un nombre de condition en $\mathcal{O}(N)$, voir même en $\mathcal{O}(N^{1/2})$ dans son comportement pré–asymptotique [1],[14]. Toutes les conclusions s'accordent sur le fait que si cette démarche est utilisable avec succès dans le cas stationnaire, elle reste inexploitable, à cause de son caractère particulièrement coûteux, lorsque des écoulements complexes instationnaires sont simulés.

Références

[1] M. Azaiez — Calcul de la pression dans le problème de Stokes pour des fluides visqueux incompressibles par une méthode spectrale de collocation, Thèse, Paris-Sud (1990).

[2] M. Azaïez, C. Bernardi et M. Grundmann Spectral methods applied to porous media equations. East-West J. Numer. Anal., 2, No 2, p. 91–105, (1995).

[3] M. Azaïez, F. Ben Belgacem, M. Grundmann et H Khallouf — Staggered grids hybrid-dual Spectral element method for second order elliptic problems. Application to high-order time splitting for Navier-Stokes equations. Compu. Meth. Appl. Mech. and Engrg. Vol. 166 Nos. 3-4, pp. 183-199, 1998.

[4] M. Azaïez, M. Dauge et Y. Maday — Méthodes spectrales et des éléments spectraux. Collection Didactique, I.N.R.I.A. D012 (1994).

[5] K. Arrow, L. Hurwicz, H. Uzawa Studies in Nonlinear Programming, Stanford University Press, Stanford (1958).

[6] Babuska. The finite element method with Lagrangian multipliers. Numer. Math., 20 :179?192, 1973.

[7] F. Brezzi On the Existence, Uniqueness and Approximation of Saddle Point Problems Arising from Lagrange Multipliers, R.A.I.R.O. Anal. Numér. 8 R2, (1974), 129–151.

[8] J. Bear Dynamics in Porous Media, Elsevier, New-York (1972).

[9] C. Bernardi & Y. Maday — Approximations spectrales de problèmes aux limites elliptiques, Mathématiques et Applications 10, SMAI, Springer-Verlag, Paris (1992).

[10] C. Canuto, M.Y. Hussaini, A. Quarteroni & T.A. Zang — Spectral Methods in Fluid Dynamics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg (1987).

[11] M. O. Deville, P. F. Fischer, E. H. Mund, High-order methods for incompressible fluid flow. Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics, 9. Cambridge University Press, Cambridge, (2002).

[12] G. E. Karniadakis, M. Israeli et S. A. Orszag : High-Order Splitting Methods for the Incompressible Navier–Stokes Equations, J. Compu. Phy., 97, (1991), p. 414–443.

[13] Y. Maday & T. Patera — Spectral element methods for the incompressible Navier-Stokes equations, in State of the Art Surveys in Computational Mechanics, A. K. Noor ed. (1989), 71–143.

[14] E. Rønquist, Optimal Spectral Element Methods for the Unsteady Incompressible Navier-Stokes Equations, Ph. D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge. Ma., (1988).