Sur le principe fondamental de la dynamique

Alexandre WATZKY

Laboratoire Modélisation et Simulation Multi Echelle, MSME UMR 8208 CNRS
Université Paris-Est Créteil — Faculté des Sciences & Technologie
61 avenue du Général de Gaulle, 94010 CRÉTEIL Cedex
watzky@u-pec.fr

Résumé : *On propose de reconstruire le principe fondamental de la dynamique de Newton en ne s'appuyant que sur les concepts intuitifs de masse et force, et en invoquant tout l'Univers pour aboutir à sa forme habituelle mais où le sens des différentes grandeurs et le mode d'emploi se trouvent précisés.*

Abstract : *The aim of this work is to show that Newton's laws of motion and their interpretation can ensue from the basic concepts of mass and force by considering the whole Universe.*

Mots-clés : Newton, galiléen, masse, force, PFD

« La Mécanique Rationnelle sera la Science du Mouvement qui résulte de forces quelconques, et des forces nécessaires pour engendrer un mouvement quelconque, précisément proposée et démontrée. »

Isaac NEWTON, 1686 [1, Préface]

Introduction

La Mécanique classique repose sur les trois axiomes (lois) du mouvement, ou *principe fondamental de la dynamique* (PFD), de NEWTON posés en tête de ses *Principia* [1] pour des *points matériels* et assortis de définitions préliminaires et de commentaires.

Généralement adoptés tels quels pour être ensuite généralisés aux systèmes étendus, avec un formalisme *ad hoc* et un cadre mathématique que les progrès de ces dernières auront permis de préciser, on peut légitimement se poser la question de leur origine. En effet, les résultats antérieurs des *« géants »* GALILÉE (chute des corps, relativité du mouvement), DESCARTES (principe d'inertie, chocs), HUYGENS (chocs, force centrifuge) ont fait que ces lois étaient généralement admises à l'époque, de sorte que le PFD peut apparaître comme une synthèse dont la forme a le mérite d'une présentation axiomatique sur le modèle grec que NEWTON pose comme *principe* général permettant ensuite une démarche entièrement déductive, et aussi vrai en Mécanique céleste, ce qui constitue un apport majeur lui ayant permis d'établir la loi universelle de la gravitation à partir des lois de KEPLER.

Certains points méritent cependant éclaircissement et, en particulier, ces lois ne sont elles donc que le fruit de cette synthèse ou *y-a-t-il une raison plus profonde ?* C'est ce que nous proposons d'examiner ici, où nous verrons qu'en abordant directement l'étude de systèmes étendus et moyennant quelques hypothèses "raisonnables", la *relation fondamentale de la dynamique* (RFD) s'impose assez naturellement et que le *principe des actions réciproques* se réduit à un théorème.

Les problèmes posés par le PFD, la plupart identifiés par NEWTON lui-même dans ses remarques très fouillées, ont déjà largement été discutés et critiqués, notamment par MACH [2] et TRUESDELL [3]. Au-delà de la question du *référentiel absolu* (et de la *relativité galiléenne* souvent considérée comme porte d'entrée pour des formulations alternatives) et du délicat concept de *force*, rien ne justifie *a priori* la *conservation de la quantité de mouvement* si ce n'est l'expérience "terrestre", et le fait de recourir classiquement à des *points matériels* (ou des *corps*, sous-entendus "inertes") contient implicitement le *principe des actions réciproques*. D'ALEMBERT [4] et LAPLACE [5] étaient d'ailleurs gênés sur ce point puisque jugeant nécessaire de préciser qu'*« un corps est incapable de se donner un mouvement à lui-même »*, ce qui paraît un peu "léger" s'agissant d'un *principe fondamental* (voir aussi EULER [6]) ...

D'autre part, la notion de *masse* [1, Déf. 1, p.1] est intrinsèquement liée à la RFD et donc sa mesure dépendante de celle des forces (voir à ce sujet MACH [2] et POINCARÉ [7]).

La *mécanique des milieux continus* (MMC) a conduit, depuis EULER, NAVIER et CAUCHY, à une reformulation des lois dont l'aboutissement pourrait être celle axiomatique de TRUESDELL et NOLL [3]. Cependant, si formellement on dispose maintenant de ce cadre théorique robuste auquel nous renvoyons notamment pour le cadre mathématique de validité, *la RFD ne semble jamais remise en cause.*

Enfin, si les *forces d'inertie* seraient dues aux actions de l'Univers (voir entre autres MACH [2] et NOLL [8]), pourquoi ne pas essayer de les faire directement apparaître comme telles plutôt que d'en faire une interprétation ? Cet aspect nous permettra en particulier de mettre en évidence la problématique du choix du contexte et du référentiel adapté.

Il ne s'agit pas ici de faire une exégèse des *Principia*, ni de proposer une formulation alternative, mais de reprendre les *concepts* intuitifs de *masse* et *force* sur lesquels s'appuie le PFD sous sa forme initiale pour mieux reconstruire la RFD dans un contexte général de systèmes étendus sans faire appel à des systèmes assimilables à des points matériels et aux acquis de l'époque. Ces derniers ne serviront qu'à la validation expérimentale du résultat. Le recours à des référentiels barycentriques pour la cinématique et la prise en compte de l'Univers entier permettra d'en clarifier la forme et, en faisant notamment apparaître naturellement les *forces d'inertie*, d'en préciser le "mode d'emploi".

L'exercice est délicat puisqu'on connaît le résultat et qu'il suppose d'oublier les idées reçues, et en particulier la RFD généralement admise.

0 Entrée en matière

La Physique s'intéresse au tangible et donc à des *objets matériels*, c'est-à-dire composés de *matière*. Ce que nous appelons *matière* n'est alors autre que *« ce dont une chose est faite, un corps est constitué »*.[1] Bien qu'au cœur du sujet, nous ne tenterons pas d'en dire plus, et notamment de la caractériser plus précisément, ce qui serait vain et surtout inutile ici.

1 Préliminaires

1.1 Système, Monde

La première chose consiste à définir l'objet auquel on s'intéresse, et par là-même le reste, ou son environnement. On appellera *système matériel* Σ une portion de l'Univers $\Sigma^\star$ définie par la *matière* qui le constitue. L'Univers est alors décomposé en le système Σ étudié et le reste $\overline{\Sigma}$, aussi appelé *extérieur*, susceptibles d'interagir (fig. 1).

Cependant, outre Σ, on ne peut pratiquement que considérer une partie *finie* de l'Univers que l'on notera $\overline{\Sigma}_\circ$ (*e.g.* selon le problème, l'environnement immédiat, la Terre, Mars, le reste du système solaire, ...). On définit ainsi le *Monde* $\Sigma^\circ = \Sigma \cup \overline{\Sigma}_\circ$ (avec $\Sigma \cap \overline{\Sigma}_\circ = \emptyset$) qui regroupe l'ensemble des objets avec lesquels on travaille, de sorte que $\overline{\Sigma} = \overline{\Sigma}_\circ \cup \overline{\Sigma}_\star$ (avec $\overline{\Sigma}_\circ \cap \overline{\Sigma}_\star = \emptyset$) où $\overline{\Sigma}_\star$ représente la partie ignorée (volontairement mais notamment motivé par un manque de connaissances) de l'extérieur, mais qui existe néanmoins, telle que $\Sigma^\star = \Sigma^\circ \cup \overline{\Sigma}_\star$ (avec $\Sigma^\circ \cap \overline{\Sigma}_\star = \emptyset$).[2]

Un autre point de vue, équivalent, consiste à commencer par définir le Monde Σ° puis d'y choisir la partie Σ que l'on étudie.

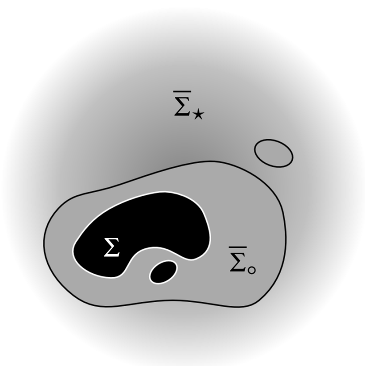

FIG. 1 – *Un système Σ et le Monde $\Sigma^\circ = \Sigma \cup \overline{\Sigma}_\circ$ dans l'Univers $\Sigma^\star$.*

[1] [*Dictionnaire de l'Académie française*, 9e édition, T. 3, Fayard, Paris (2011)]

[2] Attention, les barres identifient *des* extérieurs à Σ, et ne signifient pas ici le complément de $\Sigma_\circ$ ou $\Sigma_\star$ (non définis).

L'idée directrice des raisonnements qui suivent repose sur ce découpage de l'Univers $\Sigma^\star$ et la mise en évidence, dans un Monde Σ°, des contributions et des effets sur un système Σ des interactions avec lui-même, le reste du Monde $\overline{\Sigma}_\circ$, et le reste de l'Univers $\overline{\Sigma}_\star$.

1.2 Espace, temps, référentiel

La description d'un système matériel passe par sa représentation dans un espace physique. On se place alors comme il est fait habituellement dans un espace affine euclidien tridimensionnel $\mathcal{E}$ muni d'un repère cartésien $\mathcal{R} = (O; \mathcal{B})$ où O est une origine et $\mathcal{B}$ une base. Pour caractériser une évolution, il faut aussi se définir une chronologie, c'est-à-dire un *temps* t orienté > 0 avec une origine et une échelle de *durées*, constituant un repère temporel de l'espace unidimensionnel $\mathcal{I}$ assimilé à l'axe des réels. Un référentiel $\mathscr{R}$ de $\mathcal{E} \times \mathcal{I}$ est constitué d'un repère spatial *et* d'un repère temporel. (Voir [3])

Les grandeurs cinématiques considérées dans la suite seront donc relatives à un espace assimilable à un solide rigide. Elle seront supposées suffisamment régulières pour autoriser les dérivations par rapport au temps nécessaires.

Changement de repère — L'échelle de durées étant supposée partagée pour tous les référentiels, le repère spatial reste arbitraire, et on peut envisager de décrire la cinématique dans un autre repère $\mathcal{R}' = (O'; \mathcal{B}')$ se déduisant de $\mathcal{R}$ par une transformation isométrique (pouvant dépendre du temps) caractérisée par une translation d'origine $\overrightarrow{OO'}$ et une rotation de la base *via* un tenseur orthogonal $\mathbb{Q}$ tel que dét $\mathbb{Q} = 1$ et qu'à tout instant $\mathcal{B}' = \mathbb{Q}^\mathsf{T}\, \mathcal{B}$.

2 Liminaires

Tout système matériel Σ est susceptible d'interagir avec le reste de l'Univers $\overline{\Sigma}$. Ne sachant *a priori* rien de ces interactions, nous ne pouvons que nous appuyer sur leurs éventuelles *manifestations observables*, c'est-à-dire leur influence sur la cinématique dans Σ°. L'objectif est donc de *modéliser* ces interdépendances.

Plutôt que d'admettre les trois lois de Newton, posées en *principe* et comme il est couramment fait, voyons comment celles-ci *pourraient* avoir été obtenues, ou du moins essayons de les justifier.

Commençons par envisager les ingrédients *a priori* nécessaires et des propriétés associées, en ne précisant que le *minimum*, posé comme axiomes,[3] afin de ne pas préjuger de la suite.

2.1 Masse

Extensivité — Une grandeur A_Σ (scalaire, vecteur, tenseur, ...) associée à un système Σ est dite *extensive* si sa valeur pour ce système est égale à la somme de ses valeurs pour tout sous-système d'une partition dénombrable quelconque de Σ, ce qui s'écrit formellement pour un système continu (par morceaux, au sens de la MMC) :[4]

$$A_\Sigma = \int_\Sigma \mathrm{d}A \tag{2.1a}$$

Axiome 1 : *Existence de la masse* — Un système matériel étant défini par la matière qui le constitue, *on suppose que pour tout système matériel Σ, il existe une mesure scalaire* (invariante par rotation) *strictement positive de sa quantité de matière.* Celle-ci sera notée m et appelée *masse*. Elle est *extensive* par construction :

$$m_\Sigma = \int_\Sigma \mathrm{d}m \tag{2.1b}$$

[3] Naturellement, il y a des axiomes sous-jacents relatifs au cadre mathématique de validité et nécessaires pour une formulation complète auto-consistante. Cependant, pour ne pas noyer notre propos, nous renvoyons le lecteur à TRUESDELL et NOLL [3] qui définissent précisément le contexte dans lequel nous nous plaçons.

[4] Pour tout système matériel, nous écrirons systématiquement des intégrales (*cf.* note précédente).

Conséquence : *Densité massique* — Le caractère scalaire de la masse permet, pour toute grandeur extensive A (de nature tensorielle quelconque), d'en définir une *densité massique* a telle que

$$A_\Sigma = \int_\Sigma a \,\mathrm{d}m \tag{2.1c}$$

Système fermé — On appelle système *fermé* un système n'échangeant pas de matière avec l'extérieur. Par définition, sa masse est donc *constante*. On a alors la propriété

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} A_\Sigma = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Sigma a\,\mathrm{d}m = \int_\Sigma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} a\,\mathrm{d}m \tag{2.2}$$

En particulier, le Monde Σ° et le système Σ (donc aussi $\overline{\Sigma}_\circ$) seront considérés fermés.

Particule matérielle — On appelle *particule matérielle* (au sens de la MMC) une portion élémentaire de l'Univers située en M et constituée d'une quantité de matière de masse $\mathrm{d}m$ (*constante*).[5]

Conséquence : *Centre de masse* — Notant M la position des particules courantes d'un système Σ de masse finie auxquelles on associe la masse élémentaire $\mathrm{d}m$, on peut alors toujours construire un point *géométrique* G_Σ tel qu'à tout instant et dans n'importe quel référentiel $\mathscr{R}$ d'origine O :[6]

$$\int_\Sigma \overrightarrow{G_\Sigma M}\,\mathrm{d}m = \vec{0} \qquad \Leftrightarrow \qquad \int_\Sigma \overrightarrow{OM}\,\mathrm{d}m = m_\Sigma \overrightarrow{OG_\Sigma} \tag{2.3}$$

Référentiel barycentrique — Une fois montrée l'existence de G_Σ pour tout système matériel, on peut définir $G_\circ$ celui du Monde Σ° et lui attacher un référentiel $\mathscr{R}_\circ$ d'origine $G_\circ$ en *translation* par rapport à $\mathscr{R}$ (il ne s'agit donc que d'un changement d'origine, qui peut dépendre du temps).

Conséquence : *Conservation de la quantité de mouvement du Monde dans $\mathscr{R}_\circ$* — La dérivation de (2.3)$_1$ conduit immédiatement à la relation cruciale, vraie pour tout système fermé dans un référentiel barycentrique, et en particulier à un Monde Σ° *fermé* :

$$\frac{\mathrm{d}^{(n)}}{\mathrm{d}t^{(n)}}\int_{\Sigma^\circ} \overrightarrow{G_\circ M}\,\mathrm{d}m = \int_{\Sigma^\circ} \frac{\mathrm{d}^{(n)}}{\mathrm{d}t^{(n)}} \overrightarrow{G_\circ M}\,\mathrm{d}m = \vec{0} \qquad (n \in \mathbb{N}) \tag{2.4}$$

Ce résultat important pour la suite et vrai dans n'importe quel référentiel pourvu qu'il soit barycentrique apparaît comme conséquence de la seule *définition de la masse*.

En particulier, pour $n = 2$, on a la conservation de la *quantité de mouvement*[7] dans $\mathscr{R}_\circ$.

2.2 Forces

On appellera *force* l'"action" mécanique d'une partie matérielle de l'Univers sur une autre, et dont elle est susceptible de *modifier la cinématique* (*cf.* section 3 *infra*).
On pourra, si nécessaire, distinguer les *forces de contact* et les *forces à distance*.

Isolant une particule matérielle, l'ensemble des actions qu'elle subit du reste de l'Univers résulte du cumul des actions de toutes les autres particules de l'Univers, et il semble légitime de considérer ces actions *additives*.
D'autre part, les forces étant susceptibles de modifier la cinématique du système, décrite par des vecteurs, elles sont *a priori* orientées dans l'espace, de sorte qu'il apparaît raisonnable de les représenter par des *vecteurs liés*, qui s'appliqueraient sur la particule considérée et qui sont bien additifs.

Axiome 2 : *Force* — *On suppose qu'il existe un* vecteur *appelé* force *représentant l'action mécanique sur toute particule matérielle M de toute autre portion de l'Univers.*

---

[5] Pour ne pas alourdir les notations, nous confondrons les éléments de matière avec leur position actuelle M.

[6] À ce stade, ne sachant mesurer la masse, on ne sait pas où est G_Σ. Il nous suffit de savoir que ce point existe. Naturellement, le recours au centre de masse suppose un système de taille *finie* (géométrie et quantité de matière).

[7] Nous lui donnons ce nom dès maintenant, mais ne l'exploiterons pas immédiatement, gardant un sens volontairement flou à *mouvement* (grandeur cinématique), qui se révélera la grandeur "sensible".

Notations — On notera $\mathrm{d}\vec{F}$ la force agissant sur une particule matérielle (de masse $\mathrm{d}m$).

Tout système Σ pouvant être soumis à de multiples forces, on appellera *résultante* $\vec{F}$ la somme de ces forces telle que :

$$\vec{F}_{\to\Sigma} = \int_\Sigma \mathrm{d}\vec{F}_{\to M} \tag{2.5}$$

Celles-ci peuvent avoir diverses origines et il convient dès à présent d'envisager divers découpages.

Ainsi, on notera $\vec{F}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma}$ la résultante des actions mécaniques de l'extérieur sur Σ et que l'on appellera *forces extérieures*, elles-mêmes pouvant s'écrire

$$\vec{F}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma} = \vec{F}_{\overline{\Sigma}_\star\to\Sigma} + \vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to\Sigma} \tag{2.6a}$$

Naturellement, les constituants de Σ peuvent interagir entre eux, et on notera $\vec{F}_{\Sigma\leftrightarrow\Sigma}$ la résultante de ces forces dites *intérieures*,[8] de sorte que finalement la totalité des forces auxquelles est soumis un système Σ peut s'écrire

$$\vec{F}_{\Sigma^\star\to\Sigma} = \vec{F}_{\overline{\Sigma}\to\Sigma} + \vec{F}_{\Sigma\leftrightarrow\Sigma} \tag{2.6b}$$

Des forces à distance[9] — Supposant leurs effets instantanés, *les forces à distance entre deux particules sont portées par la droite qui les joint.*

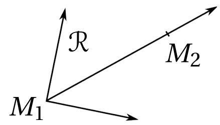

FIG. 2 – *Repère lié à deux particules.*

En effet, quelles que soient deux particules matérielles situées en M_1 et M_2 distincts, il existe un référentiel (*e.g.* d'origine l'un des deux points et avec un axe tourné vers l'autre, fig. 2) tel qu'à tout instant les vitesses (et donc leurs dérivées temporelles) soient alignées avec $\overrightarrow{M_1M_2}$. Or si les forces $\vec{F}_{M_2\to M_1}$ et $\vec{F}_{M_1\to M_2}$ sont supposées indépendantes d'éventuelles autres forces et s'appliquant respectivement en M_1 et M_2, aucune autre direction que la droite (M_1, M_2) n'étant privilégiée (invariance par rotation d'axe (M_1, M_2)), elles sont elles-mêmes nécessairement portées par cette droite.

Des forces d'interaction — Le résultat précédent et le fait que pour des forces de contact $\overrightarrow{M_1M_2} = \vec{0}$ permet d'écrire *dans tous les cas* :

$$\overrightarrow{M_2M_1} \times \vec{F}_{M_2\to M_1} = \vec{0} \tag{2.7}$$

3 Relation constitutive et ses conséquences

« On entend en général par force [...] la cause, quelle qu'elle soit, qui imprime ou tend à imprimer du mouvement au corps auquel on la suppose appliquée. » Joseph-Louis LAGRANGE, 1788 [9, p. 1]

On cherche une loi régissant le mouvement, c'est-à-dire reliant les interactions mécaniques (*forces*) à leur *manifestation observable*, donc à une modification de la cinématique. Celle-ci peut notamment se caractériser par les trajectoires datées dans un référentiel $\mathscr{R}$ donné, c'est-à-dire positions, vitesses, accélérations...

3.1 Postulat : *Relation constitutive* (définition métonymique)

Comme à ce stade aucune des grandeurs physiques précitées n'est définie autrement que conceptuellement, on *postule* alors la forme de l'interdépendance *linéaire* suivante où la faculté d'une force de modifier la cinématique est inversement proportionnelle à la quantité de matière (constante pour un système *fermé*) :[10]

$$\mathrm{d}\vec{F}_{\to M} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{c}_{M/\mathscr{R}}\,\mathrm{d}m \quad\Rightarrow\quad \int_\Sigma \mathrm{d}\vec{F}_{\to M} = \int_\Sigma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{c}_{M/\mathscr{R}}\,\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Sigma \vec{c}_{M/\mathscr{R}}\,\mathrm{d}m \tag{3.1}$$

où $\vec{c}$ est un champ purement *cinématique* indéterminé à ce stade et rendant compte de la *variation du mouvement dans le Monde*, donc *relative au référentiel* $\mathscr{R}$ (ce qui n'est pas le cas des forces). Ainsi le second membre est une grandeur *extensive*.

8 La possibilité de choisir n'importe quelle portion Σ de Σ° met en lumière la notion relative de forces *extérieures* et *intérieures*.

9 Cette propriété n'est pas nécessaire pour l'instant et ne sera utilisée que § 5.1, à la fin.

10 Ce *postulat*, très fort, n'est pas encore posé comme *axiome* puisque, à ce stade, il n'en constitue qu'un embryon.

Outre qu'une telle relation devra naturellement être mise à l'épreuve par l'expérience, il faudra qu'elle reste compatible avec (2.4).

Une fois $\vec{c}$ déterminé, cette *relation constitutive* définirait donc *simultanément* une *force* $\vec{F}$ comme la grandeur mécanique modifiant, dans un référentiel donné, le mouvement d'une quantité de matière *mesurée par sa masse m*. Ainsi, pour une variation observée de la cinématique, la connaissance de l'une donnera accès à l'autre.

Candidats naturels pour $\vec{c}$: *Hypothèse de travail* — La position $\overrightarrow{G_\circ M}$ et ses dérivées que sont vitesse $\vec{V}_{M/\mathscr{R}_\circ}$, accélération $\vec{\Gamma}_{M/\mathscr{R}_\circ}$..., directement mesurables dans $\mathscr{R}_\circ$, apparaissent comme des candidats de choix pour $\vec{c}$.[11]

Nous allons nous y restreindre pour l'instant et vérifier *a posteriori* que l'une d'elle convient. Dans ce cas, on a avec (2.3) :

$$\int_\Sigma \vec{c}_{M/\mathscr{R}}\, \mathrm{d}m = m_\Sigma\, \vec{c}_{G_\Sigma/\mathscr{R}} \qquad \forall\,\Sigma \quad \text{et} \quad \forall\,\mathscr{R} \tag{3.2}$$

ce qui, si l'on ne s'intéresse pas à la déformation du système Σ, justifie *d'un point de vue purement cinématique* le recours à des systèmes assimilables à des *points matériels*, de masse m_Σ et géométriquement réduits à leur centre de masse G_Σ.

3.2 Conséquence : *Équilibre global des forces*

Dans le cas précédent, l'application de (3.1) au Monde Σ° avec *toutes* les forces qui s'y appliquent conduit, dans un référentiel barycentrique $\mathscr{R}_\circ$ et d'après (2.4), à :

$$\int_{\Sigma^\circ} \mathrm{d}\vec{F}_{\Sigma^\star\to M} = \vec{F}_{\overline{\Sigma}^\circ\to\Sigma^\circ} + \vec{F}_{\Sigma^\circ\leftrightarrow\Sigma^\circ} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Sigma^\circ} \vec{c}_{M/\mathscr{R}_\circ}\, \mathrm{d}m = \vec{0} \qquad \forall\,\Sigma^\circ \tag{3.3}$$

Ce résultat reste vrai dans n'importe quel référentiel et pour n'importe quel système Σ puisque le Monde peut s'y réduire. Ainsi :

Théorème 1 — *La résultante de* toutes *les forces s'appliquant à un système est* nulle.

Si la prise en compte de l'ensemble des forces rend leur action globalement inobservable dans un Monde Σ°, elle peut l'être localement. Or le découpage des forces dans (3.3) s'impose naturellement pour rendre compte des interactions entre objets. Réécrivons cette relation en faisant apparaître un système $\Sigma \subset \Sigma^\circ$:

$$\vec{F}_{\overline{\Sigma}^\circ\to\Sigma^\circ} + \vec{F}_{\Sigma^\circ\leftrightarrow\Sigma^\circ} = \left(\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\star\to\overline{\Sigma}_\circ} + \vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\leftrightarrow\overline{\Sigma}_\circ} + \vec{F}_{\Sigma\to\overline{\Sigma}_\circ}\right) + \left(\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\star\to\Sigma} + \vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to\Sigma} + \vec{F}_{\Sigma\leftrightarrow\Sigma}\right) = \vec{0} \qquad \forall\,\Sigma\subset\Sigma^\circ\subset\Sigma^\star \tag{3.4}$$

où chaque parenthèse est nulle en vertu de (3.3).

3.3 Mise en œuvre de la relation constitutive

Les forces étant additives, la relation constitutive (3.1) permettrait donc d'en remplacer certaines parmi $\int_\Sigma \mathrm{d}\vec{F}_{\Sigma^\star\to\Sigma}\,\mathrm{d}m$ par leur *contribution* à la modification de la cinématique. Or il apparaît immédiatement que suivant celles choisies on aura des cinématiques différentes ![12]

Revenons au problème initial où l'on cherche à décrire, *dans* un Monde Σ°, l'influence des interactions mécaniques sur le mouvement d'un système Σ *observable à l'intérieur de ce Monde* (c'est-à-dire la seconde parenthèse de (3.4)) en ne sachant *a priori* rien du reste de l'Univers. Autrement dit, on n'a pas les moyens de prendre en compte l'influence de ce dernier et le fait d'avoir choisi un Monde particulier revient à sélectionner le domaine matériel dans (et avec) lequel on travaille.

Ainsi, caractérisant la modification de la cinématique du système Σ du seul fait des forces intérieures au Monde Σ°, il viendrait :

$$\vec{F}_{\Sigma^\circ\to\Sigma} = \vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to\Sigma} + \vec{F}_{\Sigma\leftrightarrow\Sigma} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Sigma \vec{c}_{M/\mathscr{R}_\circ}\,\mathrm{d}m = m_\Sigma\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{c}_{G_\Sigma/\mathscr{R}_\circ} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Sigma \vec{c}_{M/\mathscr{R}_\circ}\,\mathrm{d}m = -\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\star\to\Sigma} \tag{3.5}$$

[11] Mais on pourrait imaginer d'autres combinaisons, telles que $\overrightarrow{G_\circ M}\times\vec{V}_{M/\mathscr{R}_\circ}$, $\vec{V}_{M/\mathscr{R}_\circ}\times\vec{\Gamma}_{M/\mathscr{R}_\circ}$, ..., voire plus compliqué.

[12] Ce qui montre la fragilité du concept de force (voir aussi [1, Def. III]).

où, dans cette opération, le fait de remplacer certains efforts par leurs effets en se basant sur un découpage correspondant à celui de l'Univers attribue aux actions de ce dernier une forme permettant d'assurer l'équilibre (3.4). On devrait alors considérer *toutes* les forces intérieures au Monde, et *aucune* du reste de l'Univers.[13]

Les deux relations précédentes montrent que, au signe près, on eut pu choisir le contraire. La seconde n'est autre que le *principe d'équivalence* d'EINSTEIN où la variation du mouvement d'un système, observable dans un référentiel barycentrique $\mathscr{R}_\circ$ du Monde Σ°, peut aussi bien être due à celui du centre de masse du Monde[14] qu'à la résultante des forces du reste de l'Univers.

Conséquence : ***Forces d'inertie*** — Toutes les forces étant prises en compte, l'équation d'*équilibre* que traduit la nullité de la seconde parenthèse de (3.4) se trouve formellement analogue à celle de D'ALEMBERT qui ramène tout problème de *dynamique* à un problème de *statique*. Ainsi $\vec{F}_{\Sigma^\circ\to\Sigma}$ sont les forces appliquées au système par le Monde (dont on peut espérer avoir une certaine connaissance), et $-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Sigma \vec{c}_{M/\mathscr{R}_\circ}\,\mathrm{d}m = \vec{F}_{\Sigma_\star\to\Sigma}$ les actions du reste de l'Univers (dont on ne connaît *a priori* rien), appelées *forces d'inertie* (voir MACH [2] et NOLL [8], et qui ne sont donc en rien *fictives*).[15]

Ces dernières ont ainsi bien été nommées par NEWTON [1, Def. III, p. 2] puisqu'elles traduisent effectivement la propension de l'Univers à conserver une certaine grandeur.

3.4 Théorèmes des actions réciproques

Théorème 2 : ***Nullité de la résultante des efforts intérieurs*** — Appliquant $(3.5)_1$ à un Monde Σ° entier, il vient pour tout système Σ puisque Σ° peut s'y réduire

$$\vec{F}_{\Sigma^\circ\leftrightarrow\Sigma^\circ} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Sigma^\circ} \vec{c}_{M/\mathscr{R}_\circ}\,\mathrm{d}m = \vec{0} \quad \forall\,\Sigma^\circ \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\Sigma\leftrightarrow\Sigma} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Sigma} \vec{c}_{M/\mathscr{R}}\,\mathrm{d}m = \vec{0} \quad \forall\,\Sigma \text{ et } \forall\,\mathscr{R} \tag{3.6a}$$

résultat qui finit de justifier le recours à des systèmes assimilables à des *points matériels* (voir éq. (3.2)) où rien ne permettait d'affirmer *a priori* que la résultante des efforts auxquels ils sont soumis se résume aux efforts extérieurs [4,5].

Théorème 3 : ***Théorème des actions réciproques*** — Le résultat précédent montre avec (3.3) que, quels que soient deux systèmes Σ_1 et Σ_2 disjoints :

$$\int_{\Sigma_1\cup\Sigma_2} \mathrm{d}\vec{F}_{\Sigma_1\cup\Sigma_2\to M} = \cancel{\vec{F}_{\Sigma_1\leftrightarrow\Sigma_1}} + \vec{F}_{\Sigma_2\to\Sigma_1} + \cancel{\vec{F}_{\Sigma_2\leftrightarrow\Sigma_2}} + \vec{F}_{\Sigma_1\to\Sigma_2} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{F}_{\Sigma_1\to\Sigma_2} = -\vec{F}_{\Sigma_2\to\Sigma_1} \tag{3.6b}$$

c'est-à-dire que *les résultantes des actions mutuelles entre deux systèmes sont égales et opposées.*

Conséquence : ***Sur la forme de la relation constitutive*** — Injectant $(3.6a)_2$ dans (3.5), il viendrait finalement :

$$\vec{F}_{\Sigma_\circ\to\Sigma} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Sigma \vec{c}_{M/\mathscr{R}_\circ}\,\mathrm{d}m = m_\Sigma\,\vec{c}_{G_\Sigma/\mathscr{R}_\circ} \quad \left(= -\vec{F}_{\Sigma_\star\to\Sigma}\right) \tag{3.7}$$

où n'interviendraient donc que les forces *intérieures* au Monde Σ° et *extérieures* au système Σ.

3.5 Des forces exercées par le reste de l'Univers

L'application de $(3.5)_2$ à un Monde Σ° entier conduit elle à (résultat qui s'obtient aussi, "au signe près", avec (3.3) et $(3.6a)_1$) :

$$\vec{F}_{\Sigma_\star\to\Sigma^\circ} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Sigma^\circ} \vec{c}_{M/\mathscr{R}_\circ}\,\mathrm{d}m = \vec{0} \qquad \forall\,\Sigma^\circ \tag{3.8}$$

qui montre que toute partie de l'Univers serait globalement à l'équilibre sous l'action de *toutes* les

[13] Si ce découpage peut sembler arbitraire, il apparaît immédiatement que ne pas remplacer dans $(3.5)_1$ certaines des forces par leurs effets amputerait le second membre de leur contribution à la cinématique du système dans $\mathscr{R}_\circ$, ainsi que dans $(3.5)_2$ sans changer le reste de l'Univers... Pour retrouver un résultat compatible avec (3.4), il faudrait donc basculer la matière à l'origine de ces forces dans l'Univers, donc modifier le Monde et par suite $\mathscr{R}_\circ$.

[14] mouvement relativement à un observateur extérieur, donc renvoyant à l'intérieur du Monde aux mouvements de tous ses constituants.

[15] Terminologie habituelle malheureuse qui renvoie à l'inventaire des seules forces à l'intérieur du Monde.

forces extérieures, de sorte que la seule prise en compte de l'Univers entier, *si tant est que ce fût possible*, sans se référer à un Monde (ce qui reviendrait à considérer $\overline{\Sigma}_\circ = \emptyset$) ne permettrait pas de mettre en évidence une modification de la cinématique d'un système comme l'effet de *certaines* forces (*a priori* accessibles), comme dans la construction de (3.5).

On aboutit donc à une sorte de *paradoxe*[16] où, si l'on pourrait légitimement espérer avoir une précision croissante en considérant un Monde de plus en plus gros, il n'en est rien et la relation constitutive ne serait finalement applicable que dans un monde restreint, dont le choix sera donc crucial.

4 Classe de référentiels privilégiés

Du choix du Monde — Ainsi, pour que la relation constitutive (3.7) soit applicable, il est nécessaire de travailler dans un référentiel associé à un Monde contenant strictement le système ($\overline{\Sigma}_\circ \neq \emptyset$) afin de pouvoir y exprimer la cinématique de ce dernier en fonction des forces exercées par $\overline{\Sigma}_\circ$.

Du choix du référentiel — Si les forces ne dépendent pas du référentiel, leur manifestation cinématique si. *Supposons* qu'il existe un référentiel barycentrique $\mathscr{R}^\circ$ dans lequel (3.7) serait valable, et soit un autre référentiel $\mathscr{R}'$ qui se déduirait donc de $\mathscr{R}^\circ$ par une translation d'origine et une rotation $\mathcal{Q}(t)$, *a priori* quelconques. Il vient :

$$\int_\Sigma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{c}_{M/\mathscr{R}'}\,\mathrm{d}m = \int_\Sigma \mathcal{Q}\,\mathrm{d}\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to M} = \mathcal{Q}\int_\Sigma \mathrm{d}\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ\to M} = \mathcal{Q}\int_\Sigma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{c}_{M/\mathscr{R}^\circ}\,\mathrm{d}m \qquad \forall\,\Sigma\subseteq\Sigma^\circ$$

de sorte que la cinématique dans les deux référentiels doit être telle que :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{c}_{M/\mathscr{R}'} = \mathcal{Q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{c}_{M/\mathscr{R}^\circ} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\mathcal{Q}\left(\vec{c}_{M/\mathscr{R}^\circ} - \vec{c}_{O'/\mathscr{R}^\circ}\right)\right] \qquad \text{avec} \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\mathcal{Q} = \mathbb{O} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{c}_{O'/\mathscr{R}^\circ} = \vec{0} \qquad (4.1)$$

Ainsi, *si*, parmi les référentiels associés à un Monde Σ°, *il en existe un* $\mathscr{R}^\circ$ dans lequel on peut vérifier (3.7), alors cette relation ne reste valide qu'à une orientation des axes et un "mouvement" $\vec{c}_{O'}$ de l'origine constants près (résultat vrai quel que soit le champ cinématique $\vec{c}$), ce qui définit une classe particulière de référentiels dits *inertiels* (identifiés par un indice haut).

Or rien ne permet de garantir l'existence de $\mathscr{R}^\circ$ et des $\mathscr{R}'$ qui s'en déduiraient, et seule une validation expérimentale, nécessitant la détermination préalable de $\vec{c}$, rendrait (3.7) applicable dans un Monde, astucieusement choisi pour les forces à prendre en compte, et un référentiel *ad hoc*.

Du référentiel absolu — Il apparaît naturellement que $\mathscr{R}^\circ$ serait dépendant du Monde Σ°, donc de son complément $\overline{\Sigma}_\star$, ce qui balaye tout espoir de trouver un *référentiel absolu*,[17] notamment attaché au centre de masse de l'Univers, à partir duquel on pourrait en déduire tous les autres référentiels inertiels respectivement attachés aux centres de masses de Mondes différents (donc soumis à des forces différentes puisque de $\overline{\Sigma}_\star$ différents).

5 Principe fondamental de la dynamique

5.1 Conservation du moment cinétique

Afin de caractériser la rotation du Monde dans $\mathscr{R}^\circ$ (*si ce dernier existe*), calculons le moment en $G_\circ$ de ses forces intérieures en regroupant par paires les particules qui le constituent :

[16] déjà explicitement présent, bien que non soulevé à notre connaissance dans la formulation habituelle avec l'interprétation des forces d'inertie.

[17] Newton écrit *« Le centre [...] du monde est au repos »* [1, L. 3, Hypothèses], ce qui renvoie naturellement à son *« espace absolu, sans relation aux choses externes »* [1, L. 1, Scholie aux Définitions], d'où une certaine ambigüité : son *repère absolu* serait donc bien attaché au Monde (*matériel*) constitué du système solaire, et ce n'est que si le reste de l'Univers était assimilable à une "coque sphérique" homogène qu'il ne serait attiré ni d'un côté, ni de l'autre (théorème de Newton–Gauß [1, L. 1, Sect. XII]). Cette assertion est donc compatible avec notre point de vue d'un hypothétique référentiel relatif au Monde considéré dans lequel on pourrait poser notre loi.

$$\int_{\Sigma^\circ} \overrightarrow{G_\circ M} \times \mathrm{d}\vec{F}_{\Sigma^\circ \to M} = \frac{1}{2}\int_{\Sigma^\circ} \left(\overrightarrow{G_\circ M_1} \times \vec{F}_{M_2 \to M_1} + \overrightarrow{G_\circ M_2} \times \vec{F}_{M_1 \to M_2}\right) = \frac{1}{2}\int_{\Sigma^\circ} \overrightarrow{M_2 M_1} \times \vec{F}_{M_2 \to M_1} = \vec{0}$$

en vertu du théorème 3 des actions réciproques et de (2.7). L'application de la relation constitutive (3.7) conduit alors à :

$$\vec{0} = \int_{\Sigma^\circ} \overrightarrow{G_\circ M} \times \mathrm{d}\vec{F}_{\Sigma^\circ \to M} = \int_{\Sigma^\circ} \overrightarrow{G_\circ M} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{c}_{M/\mathscr{R}^\circ}\,\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Sigma^\circ} \overrightarrow{G_\circ M} \times \vec{c}_{M/\mathscr{R}^\circ}\,\mathrm{d}m - \int_{\Sigma^\circ} \vec{V}_{M/\mathscr{R}^\circ} \times \vec{c}_{M/\mathscr{R}^\circ}\,\mathrm{d}m$$

qui montre que, choisissant $\vec{c} = \vec{V}$, on obtiendrait une nouvelle relation de conservation :

$$\int_{\Sigma^\circ} \overrightarrow{G_\circ M} \times \mathrm{d}\vec{F}_{\Sigma^\circ \to M} = \int_{\Sigma^\circ} \overrightarrow{G_\circ M} \times \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{V}_{M/\mathscr{R}^\circ}\,\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{\Sigma^\circ} \overrightarrow{G_\circ M} \times \vec{V}_{M/\mathscr{R}^\circ}\,\mathrm{d}m = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{\sigma}_{\Sigma^\circ/\mathscr{R}^\circ} = \vec{0} \tag{5.1}$$

où $\vec{\sigma}$ est appelé le *moment cinétique*.[7]

Ce choix est *le seul* garantissant la *conservation du moment cinétique* du Monde dans un référentiel barycentrique inertiel $\mathscr{R}^\circ$, et apparaît donc comme naturel,[18] puisque ne dépendant que de conditions initiales et empêchant un Monde fini de voir, sous l'effet de ses seules forces intérieures, sa vitesse de rotation autour de $G_\circ$ croître indéfiniment (argument déjà utilisé par Newton pour le *principe des actions réciproques* [1]), et par voie de conséquence les accélérations donc les forces...

5.2 Choix de $\vec{c}$

Nous avons jusqu'ici différé ce choix pour montrer qu'il n'était pas nécessaire à l'obtention de certains résultats dès lors qu'on admettait une relation constitutive de la forme (3.1) et sous réserve que $\vec{c}$ soit la position ou une de ses dérivées temporelles, c'est-à-dire vérifiant (3.2).

Or une loi physique doit être validée expérimentalement, et les résultats antérieurs de Galilée, Descartes, Huygens et Kepler sont justement aussi en accord avec le choix précédent $\vec{c} = \vec{V}$.

Enfin, dans tout référentiel, il est *a priori* possible de prescrire positions et vitesses à un instant donné (*conditions initiales*).

Ce qui précède montre que ce choix est une *condition suffisante*, et nous allons donc prendre la vitesse $\vec{V}$ comme la grandeur cinématique $\vec{c}$ modifiée par les forces !

5.3 Conséquence : *Invariance galiléenne*

Les résultats (4.1) montrent alors, avec $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{c}_{O/\mathscr{R}^\circ} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{V}_{O/\mathscr{R}^\circ} = \vec{0}$, que si vérifiée dans $\mathscr{R}^\circ$, la relation constitutive (3.7) reste donc vraie dans tout référentiel d'origine O en translation rectiligne uniforme par rapport à $\mathscr{R}^\circ$, c'est pourquoi ces référentiels inertiels sont aussi dits *galiléens* et notés $\mathscr{R}^{\mathrm{g}}$.

5.4 Principe fondamental de la dynamique

Finalement, une fois admises l'existence d'une mesure m de quantité de matière (axiome 1) et la modélisation des interactions matérielles par des forces indépendantes du référentiel (axiome 2) vérifiant (2.7) et dont la *manifestation* est une modification de la cinématique (*relation constitutive*), on pourrait poser :

Axiome 3 — *Pour tout système fermé Σ, il est possible de trouver un Monde Σ° fermé ($\Sigma \subsetneq \Sigma^\circ \subsetneq \Sigma^\star$) et une classe de référentiels $\mathscr{R}^{\mathrm{g}}$ dits galiléens (ou inertiels) qui lui est associée et se déduisant d'un référentiel barycentrique $\mathscr{R}^\circ$ particulier par translation rectiligne uniforme, dans lesquels on a :*

$$\boxed{\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ \to \Sigma}} = \int_\Sigma \mathrm{d}\vec{F}_{\overline{\Sigma}_\circ \to M} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Sigma \vec{V}_{M/\mathscr{R}^{\mathrm{g}}}\,\mathrm{d}m = m_\Sigma \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{V}_{G_\Sigma/\mathscr{R}^{\mathrm{g}}} = \boxed{m_\Sigma \vec{\Gamma}_{G_\Sigma/\mathscr{R}^{\mathrm{g}}}} \tag{5.2}$$

On aboutit donc à une formulation proche de celle de Newton, les deux premiers axiomes étant ici réunis en un seul (avec toujours une référence circulaire), et le troisième disparaissant du fait de la

[18] On pourra d'ailleurs vérifier avec des contre-exemples que position et accélération sont de mauvais candidats.

seule considération (explicite) des forces extérieures au système et ne nécessitant aucune précision supplémentaire en pratique puisqu'il apparaît clairement que les forces intérieures n'ont aucune incidence sur la cinématique du centre de masse du système. On le retrouve d'ailleurs directement en travaillant dans le référentiel barycentrique $\mathscr{R}^\circ$ (*e.g.* découpage du système pour les forces de contact, *problème à deux corps* pour celles à distance).

Cependant, contrairement au "confortable" repère absolu de Newton,[17] on met clairement en évidence la problématique du *choix* du Monde Σ° et du référentiel adapté, que seule l'expérience permet de guider en fonction du contexte.

Conclusion

Ce travail aura permis, en appliquant l'intervertibilité des expressions des *causes* (forces *inobservables*) et des *effets* (modification de la cinématique *observable*) dans les équations d'*équilibre global* dans un référentiel barycentrique, de réduire les grandeurs nécessaires pour un problème de Mécanique à celles à l'intérieur d'un Monde en faisant naturellement apparaître les *forces d'inertie*, et d'en préciser le sens. En particulier, le *choix du Monde* se révèle crucial et montre les limites de la Mécanique newtonienne dont l'applicabilité des lois, validée par l'expérience, ne peut se faire que sur une (petite) partie de l'Univers.

La signification des différents termes, ici donnée par *construction*, coïncide (heureusement !) avec leur *interprétation* habituelle, et explicite les *choix* nécessaires à la mise en œuvre de la RFD dont la forme (*conservation de la quantité de mouvement*) se trouve argumentée autrement que par l'expérience (qui la valide).

On a aussi montré que seules les forces extérieures influent sur le mouvement du centre de masse d'un système. Naturellement, les forces intérieures réapparaissent en découpant le système en sous-systèmes (*e.g.* efforts de liaisons, milieux déformables).

L'approche directe sur un système étendu aura permis de contourner, tout en le validant, le concept, inutile *a priori*, de point matériel qui ne pourrait modifier seul son mouvement. Malgré ses problèmes de fond, la formulation de Newton (qui considère aussi, sans notre formalisme, des milieux continus dans son ouvrage) apparaît finalement optimale avant d'envisager des alternatives.

Références

[1] I. Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, Londres, 1687 (traduction française de la 3e Éd. par É. du Châtelet, 1756).

[2] E. Mach, *Die Mechanik in ihrer Entwicklung*, Chap. II, Brockhaus, Leipzig, 1883 (*La mécanique - Exposé historique et critique de son développement* (trad. É. Bertrand), Hermann, Paris, 1904).

[3] C. Truesdell, *A First Course in Rational Continuum Mechanics*, Chap. I, Academic Press, 1977.

[4] J. Le Rond d'Alembert, Article *"Force" in L'Encyclopédie*, T. XIV, 950-977, Pellet, Genève, 1778.

[5] P.-S. de Laplace, *Traité de Mécanique céleste*, T. I, L. I, Chap. II, J.B.M. Duprat, Paris, an VII (1798).

[6] L. Euler, *Recherches sur l'origine des forces*, E181, Mém. acad. sci. Berlin **6**, 419-447, 1752.

[7] H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, Chap. VI, Flammarion, Paris, 1902.

[8] W. Noll, *On the concept of force*, 2007 (http://www.math.cmu.edu/~wn0g/).

[9] J.-L. Lagrange, *Méchanique analitique*, Vve Desaint, Paris, 1788.

Ce travail résulte de multiples et récurrentes interrogations, et doit beaucoup au passage de Paolo Podio-Guidugli dans notre laboratoire au printemps 2016.

L'auteur tient également à remercier Aziz Hamdouni pour les fructueux échanges qui ont notamment permis d'améliorer la rédaction de ce texte.