

# Utilisation d'une base temporelle a priori issue d'une analyse TFR pour accélérer la prédiction du comportement d'un polymère sous chargement cyclique

A. AL TAKASH<sup>a,b</sup>, M. BERINGHIER<sup>a</sup>, M. HAMMOUD<sup>b</sup>, J-C. GRANDIDIER<sup>a</sup>

a. Institut Pprime, Département Physique et mécanique des matériaux, UPR CNRS 3346, ISAE-ENSMA, 86360 Chasseneuil-du-Poitou, France. ahmad.Altakash@ensma.fr

b. Structure Dynamics Materials Group, Mechanical Department, School of Engineering, Lebanese International University (LIU) Mouseitbeh, Beirut, Lebanon.

## Résumé :

*Dans ce travail, nous proposons une méthode de réduction de modèle type PGD (Proper Generalized Decomposition) pour accélérer les temps de calcul relatifs aux simulations concernant la fatigue des polymères. Cette méthode procède en deux temps : la TFR (Transformée de Fourier Rapide) est tout d'abord utilisée pour déterminer les bases temporelles a priori qui sont ensuite utilisées dans l'algorithme type PGD. Nous nous limitons dans ce papier au cas du cyclage thermique.*

## Abstract :

*The aim of this work is to propose an alternative method to accelerate the computation time of the prediction of the behaviour of polymer under cyclic loading. To overcome this difficulty, we here propose to use an a priori time basis deduced from a FFT study to compute the time-space solution via an algorithm close to the PGD one. The application is here limited to the thermal behaviour under cyclic loading.*

**Mots clefs : Fatigue cyclique, Polymère, Temps de calcul, Réduction de modèle.**

## 1 Introduction

La mise en place d'un critère de fatigue pour les matériaux polymères présentant un comportement visqueux nécessite de simuler un nombre important de cycles afin de prédire le cycle stabilisé [3]. De plus, pour déterminer correctement ce cycle stabilisé, il est nécessaire de prendre en compte le comportement thermoviscoélastique de ces matériaux. Cela a été notamment étudié dans le cas du polyéthylène haute densité dans la thèse de Thao Nguyen et al. en 2013 [5] avec une approche éléments finis. L'utilisation

de la méthode des éléments finis combinée à un schéma incrémental en temps a mené à des temps de calculs prohibitifs liés à l'utilisation d'un petit pas de temps et à la simulation d'un grand nombre de cycles. Le choix du petit pas de temps est lié à la présence de temps caractéristiques agissant à des échelles différentes : le temps lié au chargement cyclique, le temps caractéristique de la viscosité et celui de la thermique. De plus, pour certaines valeurs des paramètres, une non convergence des simulations éléments finis a été notée.

Afin de pallier ce problème, les méthodes de réduction de modèle peuvent être envisagées. La méthode PGD a déjà été éprouvée dans ce type de problématique et donne des résultats encourageants [4], [1], [2].

Nous proposons ici une méthode de réduction de modèle type PGD (Proper Generalized Decomposition) pour accélérer les temps de calcul relatifs aux simulations concernant la fatigue des polymères. Cette méthode procède en deux temps : la TFR (Transformée de Fourier Rapide) est tout d'abord utilisée pour déterminer les bases temporelles a priori qui sont ensuite utilisées dans l'algorithme type PGD.

Dans ce papier, l'approche est mise en place dans un cas plus simple que le cas multiphysique visé et se restreint à étudier un problème thermique 3D sous chargement cyclique. Néanmoins, cette étude mène à considérer deux temps caractéristiques : un lié au problème thermique appelé temps physique et un lié au cycle appelé le temps du cycle.

## 2 Présentation de la méthode de résolution

L'idée de base s'appuie sur le constat que dans le cadre des problèmes transitoires alternés, la solution se compose en une part temporelle relative à la mise en place des conditions aux limites et un terme de fluctuation qui lui traduit la combinaison des temps caractéristiques présents dans le phénomène à savoir le temps physique lié au matériau et le temps du cycle lié au chargement. La réponse temporelle dépend du point choisi dans la structure. Toutefois, si on s'appuie sur un nombre d'échantillons de points suffisant, une base temporelle suffisamment représentative peut être créée. Il est alors envisageable de l'utiliser dans une large gamme de problèmes s'inscrivant dans cette famille. La question de la représentativité de la base a priori se pose ainsi que la convergence d'une telle technique. Pour valider une telle approche, la démarche est la suivante : sur un problème générique une analyse TFR est faite afin de construire une base temporelle dans l'espace fréquentiel qui est projetée par la transformée de Fourier inverse dans l'espace réel. Cette base est construite sur un problème donné et va servir à la résolution d'un second problème différent dans sa formulation mais générant une réponse temporelle de la même famille.

Pour évaluer la robustesse de l'algorithme, une solution est recherchée avec une base fréquentielle évaluée sur le même problème par éléments finis. Il est ainsi aisé de comparer directement les deux réponses afin de valider la convergence et la précision de la méthode de résolution proposée.

Dans ce qui suit, est abordé la construction d'une base temporelle a priori, la présentation et la validation de l'algorithme de résolution et une première évaluation de sa capacité à résoudre un problème transitoire donné avec une base temporelle élaborée a priori sur un problème avec d'autres conditions.

### 3 Présentation de l'algorithme

#### 3.1 Le problème étudié

On considère un cube de côté  $L$  soumis à un cyclage en température  $T_{ref}(t)$  (de forme triangulaire et de rapport de charge  $R = 0$ ) imposée à travers une source de chaleur volumique et on cherche à prédire le champ de température  $T(\underline{x}, t)$  où  $\underline{x} = (x, y, z)$ .

Le problème de conduction thermique étudiée est le suivant :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = k \Delta T + q \quad (1)$$

où  $\rho$  représente la densité,  $c$  la chaleur spécifique,  $k$  la conductivité thermique du matériau et  $q$  la source de chaleur volumique ;  $\Delta$  représente ici le laplacien tridimensionnel.

Par souci de simplicité, les conditions aux bords et initiales sont supposées nulles pour cette simulation.

Le modèle thermique présente 2 temps caractéristiques : le temps du cycle et le temps lié au phénomène physique  $\frac{\rho c}{k} L^2$ .

#### 3.2 Algorithme pour déterminer les modes spatiaux

Supposons que la base temporelle notée  $S_i(t)$ ,  $i = 1..n$  est connue et recherchons la base spatiale associée  $R_i(\underline{x})$ ,  $i = 1..n$  où  $\underline{x} = (x, y, z)$  telle que la solution spatio-temporelle s'écrit sous la forme séparée :

$$T(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^n R_i(\underline{x}) S_i(t).$$

Les modes spatiaux sont obtenus via la procédure itérative suivante.

Supposons connues les  $k$  premières bases spatiales et calculons la  $k + 1$  soit  $R_{k+1}(\underline{x})$ . Elle est solution de la formulation variationnelle de Galerkin liée à Eq. (1) avec les champs réels et virtuels suivants :

$$T(\underline{x}, t) = \sum_{i=1}^k R_i(\underline{x}) S_i(t) + R_{k+1}(\underline{x}) S_{k+1}(t)$$

$$T^*(\underline{x}, t) = R_{k+1}^*(\underline{x}) S_{k+1}(t)$$

où le champ  $R_{k+1}^*$  est cinématiquement admissible.

Après intégration par parties et prise en compte des conditions aux limites, cela mène à l'équation suivante :

$$\rho c \int_{\Omega \times \Omega_t} T^* \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega dt + k \int_{\Omega \times \Omega_t} \vec{\nabla} T \cdot \vec{\nabla} T^* d\Omega dt = \int_{\Omega \times \Omega_t} q T^* d\Omega dt \quad (2)$$

Pour déterminer  $R_{k+1}(\underline{x})$ , il suffit donc de résoudre un problème uniquement spatial. En utilisant, la méthode des éléments finis, cela revient à résoudre le système linéaire qui s'écrit sous la forme discrétisée

suivante :

$$\left( \rho c \chi_t^{k+1} [M] + k \gamma_t^{k+1} [K] \right) \{R_{k+1}\} = \quad (3)$$

$$- \sum_{i=1}^k \left( \rho c \chi_t^{ik} [M] \{R_i\} + k \gamma_t^{ik} [K] \{R_i\} \right) + q_{tk} [M] q_x \quad (4)$$

avec  $\gamma_t^{ik} = \int_{\Omega_t} S_i(t) S_k(t)$ ,  $\chi_t^{ik} = \int_{\Omega_t} (S_k(t) \frac{\partial S_i(t)}{\partial t}) dt$ ,  $q_t^k = \int_{\Omega_t} S_k(t) q_t(t) dt$ ,

$[K]$  est la matrice de rigidité,  $[M]$  la matrice de masse et  $R_{k+1}$  sont les valeurs nodales de la fonction spatiale  $R_{k+1}$  et  $q_x$  sont les valeurs nodales de la fonction spatiale associée à  $q$ .

Remarque. Par souci de simplicité, nous avons supposé que  $q$  peut se mettre sous la forme séparée espace-temps  $q = q_x(\underline{x}) q_t(t)$  où  $q_t$  est cyclique.

Dans la suite, cette méthode de résolution sera notée *MBT*.

## 4 Résultats numériques

### 4.1 Validation par comparaison à la méthode des éléments finis

Les paramètres de la simulation notée  $ST_1$  sont les suivants :

- $\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$ ,  $c = 100 \text{ Joule.kg}^{-1}.\text{C}^{-1}$ ,  $k = 1 \text{ W.m}^{-1}.\text{C}^{-1}$
- $L = 0.05\text{m}$
- $q_x = 1$
- $q_t$  cyclique de forme triangulaire (amplitude du cycle = 25, temps du cycle = 4s, nombre de cycles = 5).

Une simulation avec la méthode des éléments finis est réalisée avec ces paramètres et sera notée  $ST_1^{EF}$ .

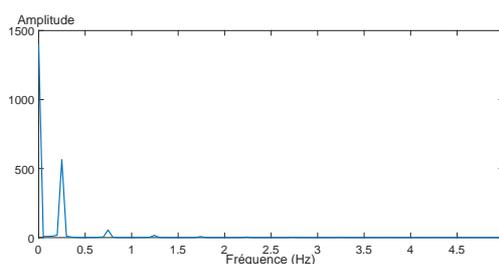


FIGURE 1 – Transformée de Fourier de la fonction temporelle issue de  $ST_1^{EF}$

A partir de la simulation  $ST_1^{EF}$ , l'évolution temporelle du point au centre du cube est utilisée afin de déterminer les bases temporelles. La transformée de Fourier de cette fonction temporelle est représentée Figure 1. Elle contient 4 pics. La fonction fréquentielle est ensuite décomposée en 4 fonctions fréquentielles (une pour chaque pic). Les modes temporels  $S_k^1(t) \forall k = 1..4$  (où l'exposant 1 réfère à la simulation  $ST_1$ ) sont ensuite obtenus en réalisant la transformée de Fourier inverse de chacune des fonctions fréquentielles. Ces modes temporels sont ensuite normalisés en utilisant la norme  $L^2$  et sont

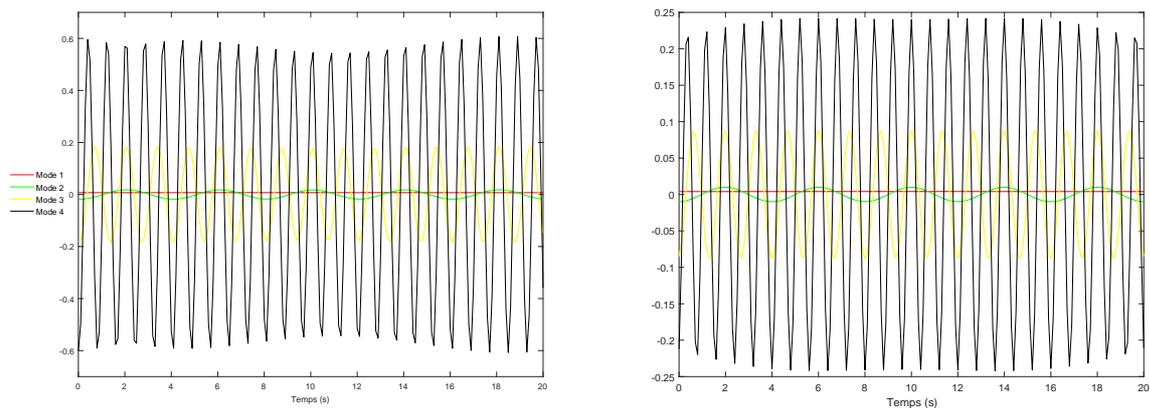


FIGURE 2 – Modes temporels normalisés issus de  $ST_1^{EF}$  (à gauche) et de  $ST_2^{EF}$  (à droite)

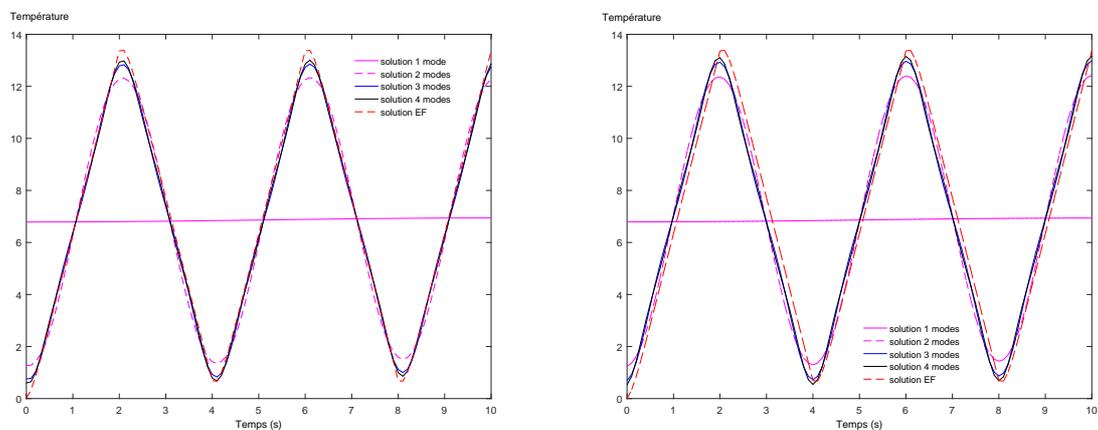


FIGURE 3 – Comparaison de la méthode *MBT* avec les éléments finis en fonction du nombre de modes et de la base temporelle a priori : base issue de  $ST_1^{EF}$  (à gauche) et de  $ST_2^{EF}$  (à droite)

représentés Figure 2 à gauche.

Ces modes temporels sont ensuite utilisés comme des modes a priori dans l'algorithme de résolution *MBT*. L'évolution temporelle du point au centre du cube en fonction du nombre de modes est représentée et comparée à la solution éléments finis sur la figure 3 à gauche. Cette figure illustre la convergence de la méthode numérique. Nous avons aussi vérifié la décroissance des coefficients des modes spatiaux en fonction du nombre de mode.

Notons que ces coefficients ne sont pas identiques pour un point fixé de l'espace car les modes temporels ont été normalisés.

## 4.2 Evaluation de la méthode proposée

Dans  $ST_1$ , nous avons utilisé les modes temporels issus d'une simulation éléments finis identique  $ST_1^{EF}$  afin de valider la convergence de la méthode.

Nous proposons ici de générer les modes temporels à partir d'une simulation éléments finis du même type (même temps de cycle, même temps physique) mais avec des conditions aux bords différentes et

une source volumique  $q$  nulle. Les conditions aux bords envisagées sont des conditions de convection :  $-k \vec{\nabla} T \cdot \vec{n} = H(T - T_{ref}(t))$  où  $H$  représente le coefficient d'échange thermique et  $T_{ref}(t)$  est le cyclage thermique imposé de forme triangulaire (amplitude du cycle = 25, temps du cycle = 4s, nombre de cycles = 5). Ces conditions sont imposées sur toutes les faces du cube pour  $H = 6000 \text{W.m}^2.\text{K}^{-1}$ . Les modes temporels normalisés construits à partir de cette simulation sont représentés Figure 2 à droite. Nous pouvons noter qu'ils sont différents des modes temporels issus de  $ST_1^{EF}$ .

Ces modes temporels notés  $S_k^2(t) \forall k = 1..4$  sont ensuite utilisés dans l'algorithme de résolution pour générer les modes spatiaux pour la simulation  $ST_1$ .

Les résultats obtenus représentés Figure 3 à droite pour le point au centre du cube montrent que la solution converge vers la solution EF lorsque le nombre de modes augmente même si la base temporelle a priori utilisée est obtenue pour des conditions aux limites différentes. On notera néanmoins que la solution avec 4 modes présente un déphasage en temps plus marquée comparativement à la simulation précédente (cf. Figure 3 à gauche). L'origine de ce déphasage est à discuter notamment lors de la construction de la base temporelle a priori.

Dans cet exemple, la méthode proposée permet de réduire d'un facteur 70 le temps de calcul obtenu avec la méthode des éléments finis pour un pas de temps de 0.1s (même maillage spatial pour les deux méthodes). Ceci est lié au fait que 4 modes temporels sont utilisés dans l'algorithme, ce qui mène à la résolution de 4 systèmes linéaires. Pour la simulation EF, 200 résolutions de systèmes linéaires sont nécessaires, soit 50 fois plus.

## 5 Discussion et conclusion

Les premiers résultats de simulation semblent probants. Néanmoins, il est nécessaire de comprendre quelles sont les simulations à réaliser afin de déterminer un dictionnaire de modes temporels valide pour une large gamme de paramètres. Les résultats d'une série de simulations avec comme variables les paramètres temps du cycle et temps du phénomène physique sont en cours d'analyse. L'idée est d'étudier l'impact de ces paramètres sur la base temporelle mais aussi fréquentielle afin de construire un dictionnaire efficace. L'expression des modes temporels issus de la transformée de Fourier en fonction de ses paramètres permettrait en effet de déterminer a priori les modes en fonction des simulations envisagées. L'impact du choix du point spatial est à évaluer pour consolider l'algorithme.

Cette étude sera ensuite étendue à des cas plus complexes : des modèles non linéaires (paramètres dépendant de la température), des modèles thermoviscoélastique présentant plusieurs temps caractéristiques en vue de prédire la fatigue des polymères avec des temps de simulation réduits.

Ce travail est mené dans le cadre d'une thèse ISAE-ENSMA où le thésard passe 8 mois au Liban et 4 mois en France. Il s'agit d'une collaboration entre l'ISAE-ENSMA et la LIU à Beyrouth. Le thésard est rémunéré par chacun de ces établissements au prorata du nombre de mois dans chaque établissement.

## Références

- [1] A. Ammar, A. Zighal, F. Morel, F. Chinesta, On the space-time separated representation of integral linear viscoelastic models, CRAS 343(4) (2015) 247-263.

- [2] J. M. Bergheau, S. Zuchiatti, J.C. Roux, E. Feulvarch, S. Tissot, G. Perrin, The Proper Generalized Decomposition as a space-time integrator for elastoplastic problems, CRAS 344 (2016) 759-768.
- [3] A. Berrehili, Y. Nadot, S. Castagnet, J.C. Grandidier, C. Dumas, Multiaxial fatigue criterion for polypropylene-Automotive applications, Int J Fatigue 32(8) (2010) 1389-1392.
- [4] M. Hammoud, M. Beringhier, J.C. Grandidier, A reduced simulation applied to the viscoelastic fatigue of polymers, CRAS 342(12) (2014) 671-691.
- [5] S.T.T. Nguyen, Caractérisation expérimentale et modélisation thermomécanique de l'accommodation cyclique du polyéthylène, Thèse, ENSMA (2013).