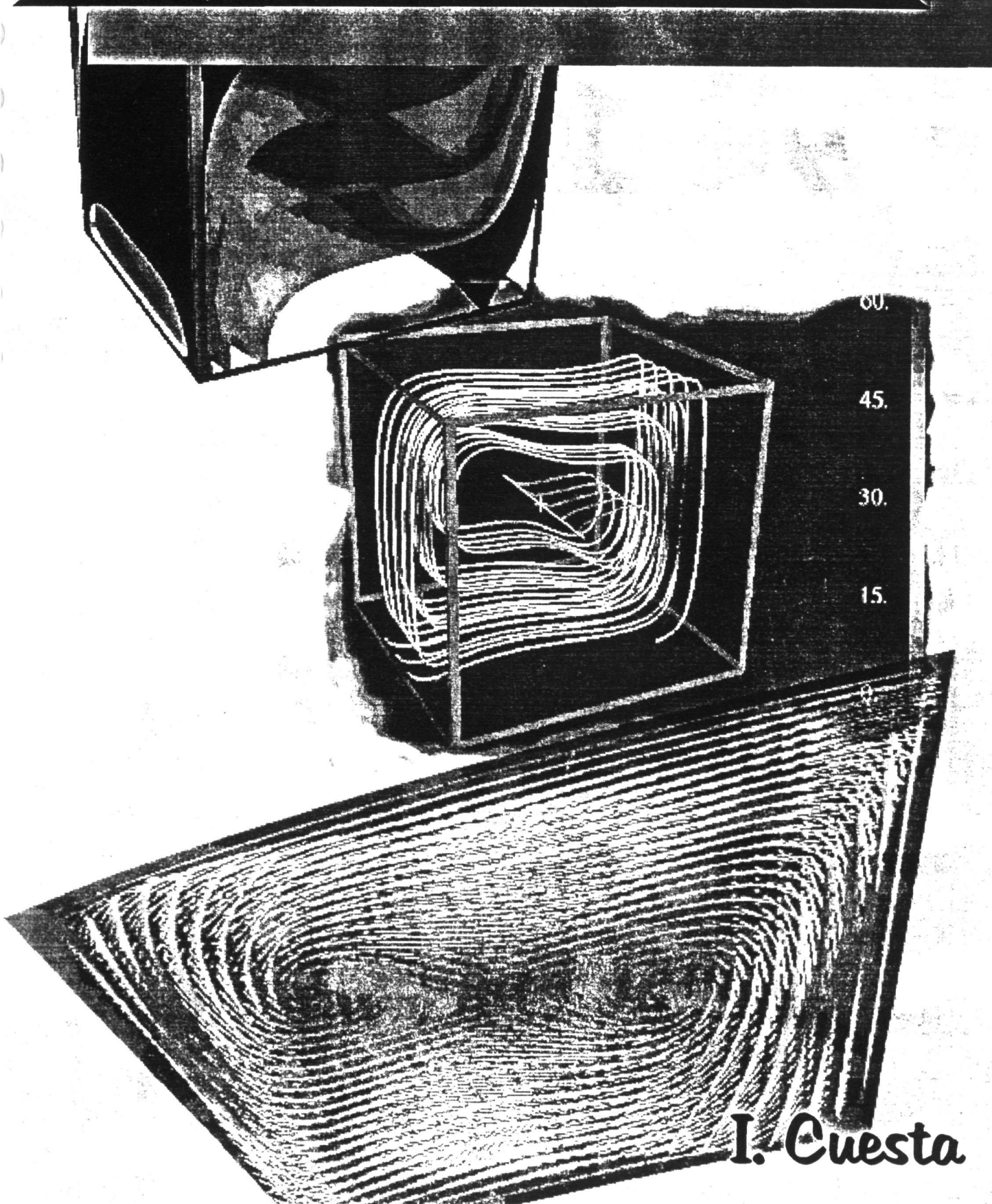


# ESTUDI NUMÈRIC DE FLUXOS LAMINARS I TURBULENTS EN UNA CAVITAT CÚBICA



I. Cuesta

# ESTUDI NUMÈRIC DE FLUXOS LAMINARS I TURBULENTS EN UNA CAVITAT CÚBICA

Cdr. Francesc Xavier Grau }  
dir. Francesc Giralt -

Llegido a Facultat de Química

Memòria presentada per en  
**ILDEFONSO CUESTA ROMEO**

per a optar al grau de Doctor en  
Ciències Químiques.

Tarragona, juny de 1993

# ÍNDEX

Capítol	Pàgina
<b>ÍNDEX</b> .....	<b>i</b>
<b>RESUM</b> .....	<b>iv</b>
<b>AGRAÏMENTS</b> .....	<b>vi</b>
<b>LLISTA DE FIGURES</b> .....	<b>viii</b>
<b>LLISTA DE TAULES</b> .....	<b>xiii</b>
<b>NOMENCLATURA</b> .....	<b>xiv</b>
<b>1.INTRODUCCIÓ</b> .....	<b>1</b>
1.1 El Túnel de Vent Numèric.....	<b>1</b>
1.2. Característiques dels fluxos en cavitat.....	<b>2</b>
1.2.1 Convecció forçada.....	<b>2</b>
1.2.2 Convecció natural.....	<b>3</b>
1.3. Revisió bibliogràfica de la convecció forçada.....	<b>5</b>
1.3.1 Treballs experimentals.....	<b>5</b>
1.3.2 Simulacions numèriques.....	<b>6</b>
1.4. Revisió bibliogràfica de la convecció natural.....	<b>8</b>
1.4.1 Treballs experimentals.....	<b>8</b>
1.4.2 Simulacions numèriques.....	<b>9</b>
1.5. Equips disponibles.....	<b>15</b>
1.6. Objectius.....	<b>18</b>

<b>2. ANÀLISI TEÒRICA</b> .....	<b>19</b>
2.1. Introducció.....	19
2.2. Hipòtesis.....	19
2.2.1 Hipòtesis sobre les característiques del fluid.....	19
2.2.2 Hipòtesis sobre les característiques del flux.....	21
2.3. Equacions de transport.....	21
2.3.1 Equació de continuïtat.....	22
2.3.2 Quantitat de moviment pel flux isotèrmic laminar.....	22
2.3.3 Quantitat de moviment pel flux isotèrmic turbulent.....	23
2.3.4 Quantitat de moviment pel flux de convecció natural.....	24
2.3.5 Equació de transport de l'energia.....	25
2.3.6 Equacions de transport de les variables turbulentes.....	26
2.4. Acoblament velocitat-pressió.....	27
2.4.1 Revisió bibliogràfica.....	27
2.4.2 L'algoritme SMAC.....	30
2.5. Adimensionament de les equacions.....	33
2.5.1 Convecció forçada.....	33
2.5.2 Convecció natural.....	34
2.6. Modelització de les funcions i termes turbulents.....	37
2.6.1 Modelització dependent de paràmetres geomètrics.....	37
2.6.2 Modelització dependent de variables dinàmiques.....	38
2.7. Condicions inicials i de contorn.....	38
2.7.1. Condicions de contorn pel flux CFC.....	38
2.7.2. Condicions de contorn pel flux CNC.....	40
2.8. Definició de la transferència de calor.....	42
<b>3. PROCEDIMENT NUMÈRIC</b> .....	<b>43</b>
3.1. Introducció.....	43
3.2. Discretització de les equacions per volums de control.....	44
3.3. Descripció de les xarxes de càlcul.....	46
3.4. Tractament dels termes convectius. Estabilitat i difusivitat numèrica.....	48

3.5. Resolució de l'equació de la pressió.....	52
3.5.1 ADI pseudo-temporal.....	52
3.5.2 Mètode del Gradient Conjugat.....	53
3.6. Esquema temporal.....	56
3.7. Tècniques de supercomputació.....	57
3.7.1 Vectorització.....	58
3.7.2 Paral.lelització.....	59
3.7.3 Paràmetres en la millora de la velocitat de càlcul.....	60
<b>4. RESULTATS.....</b>	<b>62</b>
4.1. Introducció.....	62
4.2. Influència de la xarxa.....	62
4.3. Convecció forçada en règim laminar.....	69
4.4. Convecció natural en règim laminar.....	85
4.4.1 CNC 2D.....	85
4.4.2 CNC 3D.....	92
4.5. Convecció forçada en règim turbulent.....	104
4.6 Simulació del flux en un incinerador de descàrrega de baixa velocitat.....	109
<b>5. CONCLUSIONS.....</b>	<b>116</b>
<b>6. RECOMANACIONS.....</b>	<b>118</b>
<b>7. BIBLIOGRAFIA.....</b>	<b>119</b>
<b>8. ANNEXOS.....</b>	<b>133</b>

# RESUM

Aquest treball pretén ésser una aportació més al camp de la simulació numèrica dels fluxos reals tridimensionals tan laminars com turbulents. S'han estudiat dos tipus de fluxos, ambdós a l'interior d'una cavitat cúbica, un de convecció forçada, i un altre de convecció natural generat per un gradient de temperatures. Aquests han estat escollits perquè, malgrat la seva senzillesa geomètrica, tenen totes les característiques dels fluxos més complexos, i per tant són ideals per comprovar la validesa i exactitud dels codis de simulació.

Per tal de simular aquests fluxos s'ha desenvolupat un codi tridimensional en el llenguatge de programació FORTRAN. Així mateix, aquest codi ha estat vectoritzat i optimitzat, ja que aquests requisits s'han considerat necessaris per obtenir solucions en temps de càlcul raonables, de l'ordre de 1000 a 100000 s de temps de cpu en un superordinador CRAY YMP-2E 232.

Aquest codi anomenat *3DYNAMIC*, constitueix el que es pot anomenar túnel de vent numèric, ja que pot ser usat per a simular fluxos reals tridimensionals i no estacionaris tan sols mitjançant l'us de les condicions de contorn adjacents.

Les equacions en derivades parcials que governen la transferència de matèria, energia, quantitat de moviment, l'energia cinètica turbulenta i la seva dissipació, han estat aproximades amb la tècnica dels volums finits en un domini cartesià no uniform. S'han emprat xarxes decalades per les variables escalars respecte a les vectorials. Els fluxos convectius de les variables, a través dels volums de control, han estat discretitzats amb la formulació QUICK que garanteix un segon ordre d'aproximació i minimitza la difusivitat numèrica. El mateix ordre d'aproximació s'ha utilitzat pels fluxos difusius mitjançant l'us d'un esquema centrat. La solució de l'acoblament entre els camps de velocitat i pressió és un dels punts claus en el rendiment òptim d'un codi en variables primeres, i aquest s'ha resolt amb el mètode SMAC. L'equació de poisson resultant s'ha solucionat eficientment amb el Mètode del

Gradient Conjugat. Per tal de simular l'evolució temporal s'ha escollit el mètode semi-implícit ADI. El sistema d'equacions algebraics provinents de la discretització de totes les equacions diferencials de transport, ha estat resolta pel mètode tradicional de factorització TDMA que s'aplica a matrius tridiagonals.

Una de les parts més originals, i que és l'objecte fonamental d'aquesta tesi, és l'aplicació del model de turbulència  $k-\epsilon$  de baixos  $Re$  per fluxos tridimensionals de convecció forçada. Una altre aplicació novedosa ha estat la utilització del codi de càlcul en la simulació del flux (sense reacció) tridimensional i transitori en l'interior d'un combustor de baixa velocitat. Aquestes últimes simulacions estan inspirades en el treball original de Hepler i Owen (1992), consisten en el càlcul del flux estacionari i reactiu en un combustor bidimensional.

Els resultats laminars i turbulents obtinguts, tant en el flux de convecció forçada com en natural, presenten una gran concordància amb els experimentals disponibles a la bibliografia.

# AGRAÏMENTS

El treball descrit en aquesta memòria s'ha desenvolupat dins del grup de recerca **Computació en Mecànica de Fluids** de l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria de la Universitat Rovira i Virgili, amb la direcció conjunta dels Drs. F. Giralt i X. Grau.

He de donar les gràcies al Dr. F. Giralt per acceptar la direcció d'aquest treball i permetre'm treballar dins del seu punter grup de recerca. Així mateix, ha estat un punt decisiu la seva capacitat de gestió en l'adquisició dels recursos imprescindibles per dur a terme aquest treball, com són els ordinadors, temps de cpu en els superordinadors CRAY XMP i CRAY YMP del CESCO, i tots els equips necessaris per tal de poder fer els càlculs. També i junt al Dr. Owen, professor del Department of Chemical Engineering de la University of California a Los Angeles (USA), ha estat l'inspirador del càlcul d'un flux d'aplicació industrial.

He d'expressar la meva profunda gratitud al Dr. X. Grau, que ha estat la persona que m'ha introduït en el coneixement de l'apassionant món de la computació en la Mecànica dels Fluids, suggerí el tema i ha guiat amb experiència el desenvolupament d'aquesta Tesi. El seu suport i la contínua interacció en recerca amb ell han estat decisius per portar a terme aquest treball.

He d'agrair especialment al Dr. J. Herrero l'ajuda, les suggerències, les nombroses discussions científiques i la seva amistat. Tots aquests ingredients han enriquit un treball que sense la seva aportació hagués estat carent de punts fonamentals.

He de donar les gràcies a Robert Rallo per la seva inestimable ajuda. Ha suportat amb paciència les meves intransigents queixes, i ha instal·lat tota una sèrie de recursos informàtics que han possibilitat i facilitat enormement la meva feina. Moltes gràcies amic Lo Robert!.



Voldria agrair la col.laboració de Francesca, que pacientment ha corregit el català escrit, llegint molts cops i amb detall, una memòria que evidentment és inintel·ligible i tediosa per una persona de formació en humanitats.

També he de reconèixer l'ajut rebut per part de la Fundació Catalana per la Recerca, entitat que m'otorgà una beca consistent en una estada de dos mesos al centre de supercomputació Cray Research Center a Minneapolis (USA). En aquest centre, a més d'optimitzar el codi, es van obtenir molts dels gràfics presentats en aquesta memòria.

Per últim, el més sincer agraiement per la seva participació a tots els membres del Tribunal: Dr. València, Dr. Redondo, Dr. Grifoll, Dr. Farriol i Dr. Ferré; així com a totes les persones que directa o indirectament han contribuït a l'elaboració d'aquesta Tesi.

# LLISTA DE FIGURES

## Pàgina

- 3 Figura 1** Vista esquemàtica, principals estructures i sistema de coordenades en la convecció forçada
- 4 Figura 2** Vista esquemàtica, principals estructures i sistema de coordenades en la convecció natural
- 17 Figura 3** Esquema de la xarxa d'ordinadors disponible a l'ETSE
- 28 Figura 4** Xarxa decalada MAC-SMAC
- 40 Figura 5** Condicions de contorn aplicades al flux CFC al pla a  $y=0.5$
- 41 Figura 6** Condicions de contorn aplicades al flux CNC al pla a  $y=0.5$
- 46 Figura 7** Xarxa decalada tridimensional
- 47 Figura 8** Projecció de la xarxa (forma de "boomerang" cap endavant) tridimensional a un pla x-y
- 51 Figura 9** Diferents esquemes de discretització del terme convectiu per xarxes uniformes
- 61 Figura 10** Gràfic del programa "Autotasking Expert System" indicant el nombre de processadors utilitzats vers el nombre de processadors existents, per la subrutina de càlcul de la component u de la velocitat
- Figura 11.** Xarxa unidimensional, decalada i regular.
- 65 Figura 12.** Perfils de la component horitzontal de la velocitat (u) i vertical (v) en les línies vertical (y) i horitzontal (x) del centre de la cavitat bidimensional a  $Re = 100$ .

- 66 Figura 13.** Perfils de la component horitzontal de la velocitat ( $u$ ) i vertical ( $v$ ) en les línies vertical ( $y$ ) i horitzontal ( $x$ ) del centre de la cavitat bidimensional a  $Re = 1000$ .
- 67 Figura 14.** Perfils de la component horitzontal de la velocitat ( $u$ ) i vertical ( $v$ ) en les línies vertical ( $y$ ) i horitzontal ( $x$ ) del centre de la cavitat bidimensional a  $Re = 10000$ .
- 68 Figura 15.** Funció de corrent calculada en la cavitat bidimensional a  $Re = 10000$ . Es comparen: (a) QUICK en una xarxa no uniforme de  $81 \times 81$  punts, (b) QUICK en una xarxa equiespaiada de  $81 \times 81$  punts, (c) HYBRID en una xarxa equiespaiada de  $21 \times 21$  punts, i (d) QUICK en una xarxa equiespaiada de  $21 \times 21$  punts.
- 69 Figura 16.** Configuració de la cavitat tridimensional i eix de coordenades.
- 71 Figura 17.** Estructures característiques del flux CFC.
- 74 Figura 18.** Camp dinàmic: vectors velocitat i traçat de partícules per  $Re = 100$ .
- 75 Figura 19.** Camp de pressió i vorticitat per  $Re = 100$ .
- 76 Figura 20.** Perfils de la component horitzontal de la velocitat ( $u$ ) i vertical ( $w$ ) del pla  $y=0.5$  en les línies vertical ( $z=0.5$ ) i horitzontal ( $x=0.5$ ) de la cavitat cúbica a  $Re = 100$ .
- 77 Figura 21.** Camp dinàmic: vectors velocitat i traçat de partícules per  $Re = 1000$ .
- 78 Figura 22.** Camp de pressió i vorticitat per  $Re = 1000$ .
- 79 Figura 23.** Perfils de la component horitzontal de la velocitat ( $u$ ) i vertical ( $w$ ) del pla  $y=0.5$  en les línies vertical ( $z=0.5$ ) i horitzontal ( $x=0.5$ ) de la cavitat cúbica a  $Re = 1000$ .
- 80 Figura 24.** Camp dinàmic: vectors velocitat i traçat de partícules per  $Re = 2000$ .

- 81 Figura 25.** Camp de pressió i vorticitat per  $Re=2000$ .
- 82 Figura 26.** Perfils de la component horitzontal de la velocitat ( $u$ ) i vertical ( $w$ ) del pla  $y=0.5$  en les línies vertical ( $z=0.5$ ) i horitzontal ( $x=0.5$ ) de la cavitat cúbica a  $Re = 100, 1000, 2000$  i  $3200$ .
- 83 Figura 27.** Dues visions tridimensionals (a,b) del camp de pressió a  $Re=1000$  i la corresponent projecció (c) sobre el pla central de simetria  $y=0.5$ .
- 84 Figura 28.** Dues visions tridimensionals (a,b) del camp de vorticitat a  $Re=1000$  i la corresponent projecció (c) sobre el pla central de simetria  $y=0.5$ .
- 86 Figura 29.** Gometria del flux CNC 2D
- 88 Figura 30.** Funció de corrent ( $\Psi$ ) calculada en la cavitat bidimensional pel flux de convecció natural a  $Ra =$  (a)  $10^3$ , (b)  $10^4$ , (c)  $10^5$ , (d)  $10^6$ .
- 89 Figura 31.** Isolínies de temperatura en la cavitat bidimensional pel flux de convecció natural a  $Ra =$  (a)  $10^3$ , (b)  $10^4$ , (c)  $10^5$ , (d)  $10^6$ .
- 90 Figura 32.** Màxim valor del número de  $Nu$  local a la paret calenta, pel flux CNC 2D, als règims de  $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ .
- 90 Figura 33.**  $Nu$  mitjà a la paret calenta, pel flux CNC 2D, als règims de  $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ .
- 91 Figura 34.** Màxim valor absolut de la funció de corrent ( $\Psi$ ), pel flux CNC 2D, als règims de  $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ .
- 92 Figura 35.** Gometria de la cavitat cúbica. Totes les parets són adiabàtiques excepte les parets localitzades a  $x=0$  i  $x=1$ .

- 96 **Figura 36.** Camp dinàmic: vectors velocitat i traçat de partícules per  $Ra = 10^3$ .
- 97 **Figura 37.** Camp tèrmic i de vorticitat per  $Ra = 10^3$ .
- 98 **Figura 38.** Camp dinàmic: vectors velocitat i traçat de partícules per  $Ra = 10^5$ .
- 99 **Figura 39.** Camp tèrmic i de vorticitat per  $Ra = 10^5$ .
- 100 **Figura 40.** Camp dinàmic: vectors velocitat i traçat de partícules per  $Ra = 10^7$ .
- 101 **Figura 41.** Camp tèrmic i de vorticitat per  $Ra = 10^7$ .
- 102 **Figura 42.** Màxim valor del número de Nu local a la paret calenta i en el pla de simetria  $y=0.5$ , pel flux CNC 3D, als règims de  $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ .
- 102 **Figura 43.** Nu mitjà a la paret calenta i en el pla de simetria  $y=0.5$ , pel flux CNC 3D, als règims de  $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ .
- 103 **Figura 44.** Nu integrat en tota la paret calenta, pel flux CNC 3D, als règims de  $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$ .
- 107 **Figura 45.** Camp dinàmic, projecció del vector velocitat, pel cas del flux CFC turbulent a  $Re = 7500$ . (a) Pla  $y=0.5$  (b) Pla  $z=0.5$  (c) Pla  $x=0.5$
- 108 **Figura 46.** Perfils de la component horitzontal de la velocitat (U) i vertical (W) del pla  $y=0.5$  en les línies vertical ( $z=0.5$ ) i horitzontal ( $x=0.5$ ) del centre de la cavitat cúbica a  $Re = 7500$ , comparats amb els experimentals de Prasad (1989).
- 110 **Figura 47.** Esquema del combustor de descàrrega de baixa velocitat.
- 111 **Figura 48.** Detall de la cambra de combustió, dimensions, eix de coordenades, i esquema del flux en el pla  $y=0.88$ .
- 113 **Figura 49.** Camp de velocitats (a) i pressió (b) al pla central  $y=0.088$  m de l'incinerador pel cas de velocitat d'entrada  $U_0=1$  m/s ( $Re = 2405$ )

- 114 Figura 50.** Camp de velocitats (a) i pressió (b) al pla central  $y=0.088$  m de l'incinerador pel cas de velocitat d'entrada  $U_0=3$  m/s ( $Re = 7215$ )
- 115 Figura 51.** Camp de velocitats (a) i pressió (b) al pla central  $y=0.088$  m de l'incinerador pel cas de velocitat d'entrada  $U_0=6$  m/s ( $Re = 14430$ )

# LLISTA DE TAULES

## Pàgina

- 16 Taula 1.** Característiques dels ordinadors utilitzats per obtenir les simulacions numèriques, comparats amb el superordinador més potent del món.

# NOMENCLATURA

A	$L_y/L_x$ , raó entre l'alçada i amplada d'una cavitat bidimensional	
b	vector dels termes indepenents	
B	matriu preconditionadora	
$C_p$	capacitat calorífica a pressió constant	
$C_v$	capacitat calorífica a volum constant	
g	acceleració deguda a la gravetat	[m/s <sup>2</sup> ]
G	terme font d'empenta en el model de turbulència	
k	energia cinètica turbulenta	[m <sup>2</sup> /s <sup>2</sup> ]
L	longitud de l'aresta de la cavitat cúbica	[m]
$L_x$	amplada de la cavitat bidimensional	[m]
$L_y$	alçada de la cavitat bidimensional	[m]
p	pressió	[kg/ms <sup>2</sup> ]
p'	correcció de la pressió	[kg/ms <sup>2</sup> ]
P	terme font de generació turbulenta en les equacions k-ε	
q	flux local de calor	
$Q_s$	flux mitjà	
r	raó de la progressió geomètrica en les xarxes no uniformes	
t	temps	[s]
$\Delta t$	pas de temps	[s]
T	temperatura	[K]
$T_f$	temperatura de la paret freda	[K]
$T_c$	temperatura de la paret calenta	[K]
U	energia interna	
v	volum específic del fluid	[m <sup>3</sup> /kg]
V	velocitat de la paret mòbil	[m/s]
$u_i$	velocitat instantània	[m/s]
$u_i'$	velocitat fluctuant	[m/s]
$U_i$	velocitat mitjana	[m/s]
w	component z de la velocitat adimensional	
x,y,z	coordinaes	



*lletres gregues*

$\alpha$	difusivitat tèrmica	$[m^2/s]$
$\beta$	coeficient d'expansió tèrmica	$[K^{-1}]$
$\chi$	valors propis d'una matriu	
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker	
$\varepsilon$	dissipació de l'energia turbulenta	$[m^2/s^3]$
$\phi$	escalar transportat	
$\phi_v$	dissipació viscosa de calor	
$\gamma$	coeficient isoentròpic $C_p/C_v$	
$\kappa$	conductivitat tèrmica	
$\lambda$	conductivitat tèrmica	$[m^2/s]$
$\mu$	viscositat	$[kg/ms]$
$\nu$	viscositat cinemàtica	$[m^2/s]$
$\nu_t$	viscositat cinemàtica turbulenta	$[m^2/s]$
$\theta$	temperatura	$[K]$
$\rho$	densitat	$[kg/m^3]$
$\sigma$	tensor d'esforç	
$\sigma_e, \sigma_k$	constant empíriques de les equacions de transport k- $\varepsilon$	
$\omega$	vorticitat	
$\Delta\phi$	increment de la variable $\phi$	
$\Pi$	terme combinat de pressió, $P+2/3k\rho$	$[kg/ms^2]$

*nombres adimensionals*

Gr	número de Grashof per la cavitat, $g\beta\Delta TL^3/\nu^2$
Nu	número de Nusselt per la cavitat, $Lh/\kappa$
Nu	número de Nusselt mitjà per la cavitat, $\int_0^1 Nu d(y/L)$
Pr	número de Prandtl, $\nu/\alpha$
Pe	número de Peclet de (Re de xarxa), $V \Delta x/\nu$
Ra	número de Rayleigh per la cavitat, $Ra=Gr \cdot Pr$
Re	número de Reynolds per la cavitat $VL/\nu$
$R_k, R_t, R_\omega$	número de Reynolds turbulents

*acrònims*

<b>ADI</b>	"Alternating Direction Implicit method"
<b>CD</b>	"Central differencing"
<b>CELS</b>	"Coupled Equations Line Solver"
<b>CESCA</b>	Centre de Supercomputació de Catalunya
<b>CFC</b>	Convecció Forçada en una Cavitat
<b>CNC</b>	Convecció Natural en una Cavitat
<b>CPU</b>	"Control Process Unit"
<b>DADI</b>	"Dynamic Alternating Direction Implicit method"
<b>FFT</b>	"Fast Fourier Transform"
<b>FIMOSE</b>	"Fully Implicit Method for Operator-Split Equations"
<b>FOU</b>	"First-Order Upwind"
<b>IOS</b>	"Input/Output Subsystem"
<b>ITA</b>	"Iterative Time-Advancing scheme"
<b>LODA</b>	"Local Oscillation-Damping Algorithm"
<b>LUD</b>	"Linear Upwind Difference"
<b>MAC</b>	"Marker And Cell"
<b>MGC</b>	Mètode del Gradient Conjugat
<b>MGB</b>	Mètode del Gradient BiConjugat
<b>MPGS</b>	"Multi-Purpose Graphic System"
<b>PDE</b>	"Partial Differential Equation"
<b>PISO</b>	"Pressure-Implicit with Splitting of Operators"
<b>QUICK</b>	"Quadratic Upstream Interpolation for Convection Kinematics"
<b>RP</b>	Remolí Principal
<b>RSI</b>	Remolí Secundari Inferior
<b>RSS</b>	Remolí Secundari Superior
<b>SADI</b>	"Spline Alternating Direction Implicit method"
<b>SIMPLE</b>	"Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations"
<b>SIMPLER</b>	"Simple Revised"
<b>SIMPLEC</b>	"Simple Consistent time step"
<b>SIP</b>	"Strongly Implicit Procedure"
<b>SMAC</b>	"Simplified Marker And Cell"
<b>SOR</b>	"Successive Over Relaxation procedure"
<b>SOU</b>	"Second-order upwind"
<b>SUDS</b>	"Skew-Upwind-Differencing Scheme"

<b>TDMA</b>	"TriDiagonal Matrix Algorithm"
<b>TGL</b>	"Taylor-Görtler-like"
<b>TVN</b>	Túnel de Vent Numèric

---

# 1 INTRODUCCIÓ

## 1.1. El Túnel de Vent Numèric

La "construcció" d'un *Túnel de Vent Numèric* (TVN) a Tarragona representa la culminació d'un projecte de llarg termini que hom pot considerar que comença amb la tesi doctoral del Dr. X. Grau, dirigida pel Dr. Francesc Giralt, amb títol "Fenòmens de transport en fluxos complexos evolutius: Simulació numèrica d'esteles de cilindres" a l'any 1986. Aquesta Tesi consistí bàsicament en el desenvolupament d'un codi bidimensional en coordenades generalitzades, capaç de simular fluxos laminars no estacionaris. Amb aquest codi Grau simulà el despreniment alternat de remolins en fluxos laminars bidimensionals, obtenint resultats amb molt bona concordança amb els obtinguts experimentalment al túnel de vent de baixa turbulència.

El següent pas fou el desenvolupament d'un model de turbulència, per tal de poder simular fluxos turbulents bidimensionals. Aquest objectiu fou assolit pel Dr. J. Herrero en la seva tesi codirigida pels Drs. Grau i Giralt: "Desenvolupament de models  $k-\epsilon$ : Simulació numèrica de fluxos turbulents confinats" (1992), que desenvolupà un codi bidimensional en coordenades generalitzades. Aquest fou aplicat a fluxos en les geometries de l'expansió en esglaó, el difusor, la cavitat bidimensional, i en un cas tan interessant per l'enginyeria com és el flux turbulent en un reactor tubular amb reacció química.

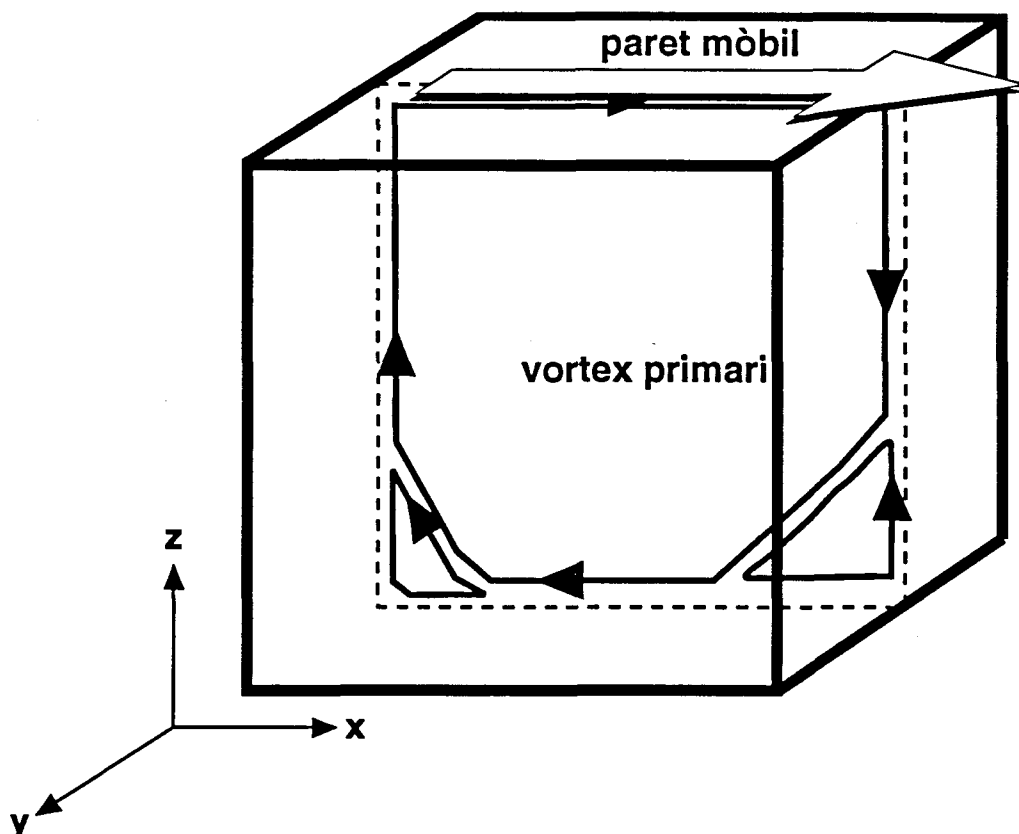
El projecte TVN té com objectiu final el disposar d'un programa que pugui simular qualsevol flux laminar o turbulent. En conseqüència, es podran mesurar, estudiar i visualitzar les estructures de fluxos d'interès a semblança de com es pot fer en un túnel de vent aerodinàmic. Els experiments numèrics, però, tenen les avantatges de la seva versatilitat per estudiar diferents fluxos,

de la informació exhaustiva que proporciona sobre totes les variables de mesura, i, sobre tot pel seu cost, inferior al dels experiments.

## 1.2 Característiques dels fluxos en cavitat

Els fluxos amb recirculació són presents en la majoria dels fluxos d'interès enginyeril, essent un cas particular d'aquests el flux d'un fluid incompressible en una caixa cúbica. Malgrat la simplicitat de la geometria i la facilitat d'aplicació de les condicions de contorn, tant si el fluid es mou com a conseqüència del moviment d'una de les parets (convecció forçada), o per la diferència de densitats generada per un gradient de temperatura (convecció natural), tots ells presenten diferents graus de complexitat i estructures tan diverses com: grans zones de recirculació (estructures primàries), remolins o estructures secundàries tridimensionals, generades per les estructures primàries, i tot un ventall de petites estructures pròpies de la turbulència. També els fluxos en cavitat es poden considerar una idealització d'altres presents en fluxos industrials, mediambientals i geofísics. Aquestes característiques han fet de la simulació numèrica d'aquests fluxos un bon mètode d'avaluació de qualsevol codi de càlcul, i fins i tot de certs mètodes experimentals. Hom pot establir com a conclusió que l'estudi del flux en una cavitat constitueix una eina ideal per estudiar fluxos reals complexos amb la geometria més senzilla.

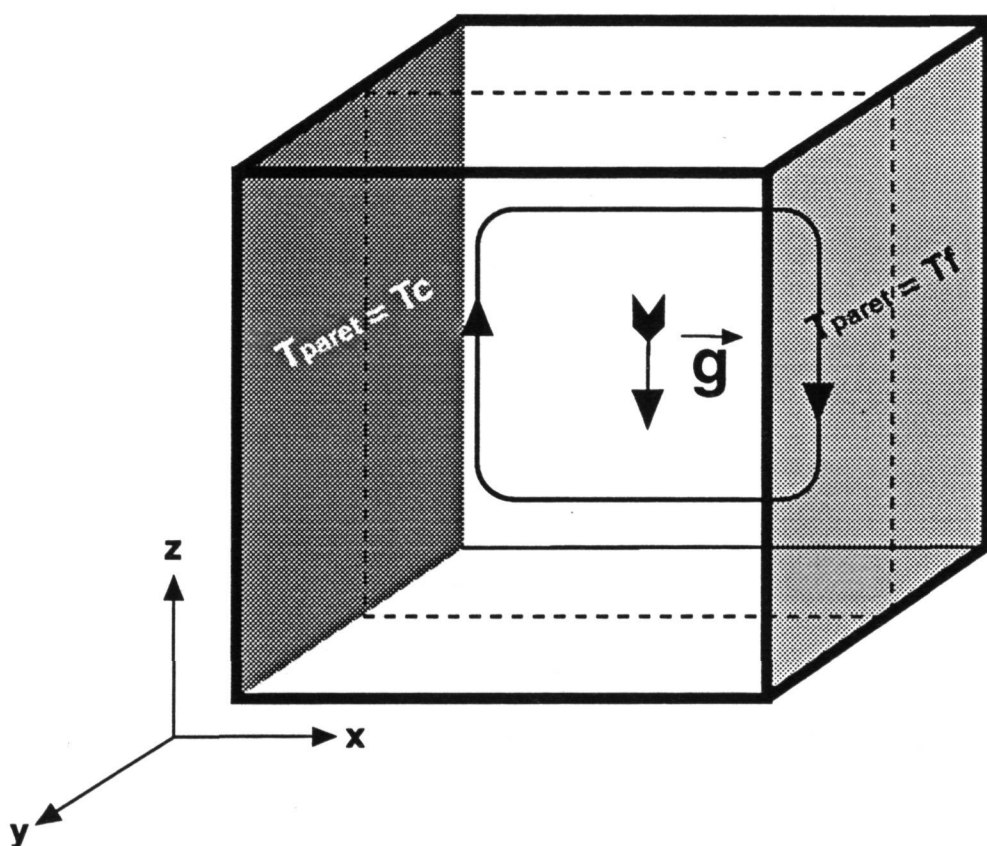
**1.2.1 Convecció forçada.** El flux en una cavitat cúbica generat per una paret mòbil (Figura 1) és un sistema simplificat del flux que existeix en molts aparells relacionats amb la manufactura del paper i pel·lícules fotogràfiques. Aquesta geometria i tipus de flux es poden trobar en les cavitats de les superfícies d'aeronaus i en certs tipus de contenidors de la indústria química. Estudis experimentals i numèrics demostren que el flux presenta ja a moderats  $Re$ , un gran nombre d'estructures secundàries i que és no estacionari.



**Figura 1.** Vista esquemàtica, principals estructures i sistema de coordenades en la convecció forçada

**1.2.2 Convecció natural.** La convecció natural és un tipus de flux generat per la diferència de densitats en el fluid i que pot ser conseqüència de gradients de temperatura o de concentració. Experimentalment presenta l'avantatge de generar-se el moviment sense la presència d'un dispositiu mecànic extern i l'inconvenient de què aquest moviment no es pot modular tan fàcilment com en el cas de la convecció forçada.

L'objecte d'aquest treball serà l'estudi de la transferència de calor associada a la convecció natural generada per un gradient de temperatures en el si d'un fluid confinat en una cavitat cúbica. A la bibliografia hi ha nombrosos estudis sobre aquest tipus de flux, però aquest treball es centra en una configuració determinada, que és la de dues parets verticals amb diferent temperatura i les quatre restants considerades adiabàtiques (Figura 2).



**Figura 2.** Vista esquemàtica, principals estructures i sistema de coordenades en la convecció natural

Batchelor (1954) apuntà que la solució del problema de la convecció natural en una cavitat, CNC a partir d'aquest moment, depèn de tres paràmetres independents: (1) la relació de geometria  $A$ , (2) el nombre  $Pr$  que caracteritza les propietats físiques del fluid, i (3) el nombre  $Ra$  que dóna la relació entre les forces d'empenta i les viscoses. La transferència de calor pot establir-se com una funcionalitat del Nusselt vers el Rayleigh, el Prandtl i la geometria:

$$Nu = f(Ra, Pr, \text{geometria}) \quad (1)$$

El número adimensional Nusselt ( $Nu$ ) és un coeficient de transferència de calor adimensional que relaciona aquesta transferència amb la purament establerta si només existís conducció. Valors del  $Nu$  de l'ordre de la unitat indiquen que la transferència de calor es produeix essencialment per conducció. Generalment nombres de  $Nu$  més grans que 1 es donen a partir d'un  $Ra$  de  $10^3$ . Per últim, el número adimensional  $Pr$  relaciona la facilitat de difondre quantitat de moviment amb la de difondre calor.

Hom pot trobar tres tipus diferenciats de flux CNC: flux laminar estacionari, flux laminar no estacionari i flux turbulent. Així mateix el flux laminar estacionari presenta tres règims, depenent del nombre de  $Ra$ : règim de conducció, règim de transició i règim de separació de capes límits.

Les aplicacions enginyerils d'aquests tipus de fluxos, en un ventall molt ampli de nombre de  $Ra$ , són nombroses. En el disseny dels convertidors solars els enginyers han de minimitzar les pèrdues de calor que resulten dels intercanvis per conducció, convecció natural i radiació amb el medi (Buchberg, 1976), per això la modelització correcta de la quantitat de calor transfert per convecció en la cavitat del convertidor ajudarà a trobar la distància entre plaques òptima per reduir al mínim les pèrdues de calor. També aquest tipus de flux es pot trobar dins dels equips electrònics en els que l'aprofitament de la convecció natural per la dissipació de calor és un factor important a dissenyar (Incropera, 1988). També la convecció natural juga un paper important en la ventilació, calefacció i aïllament d'edificis (Javelas, 1990), en el disseny de sortides d'emergència (Galea, 1991), detectors d'incendis, creixement de cristalls, en el flux de l'aigua dels llacs, i per últim en les cavitats de gas que envolten el nucli d'un reactor nuclear.

### 1.3 Revisió bibliogràfica de la convecció forçada (flux CFC)

**1.3.1 Treballs experimentals.** Pocs estudis experimentals s'han fet sobre el flux en una cavitat generat pel moviment uniforme d'una de les seves parets, CFC (convecció forçada en una cavitat) des d'aquest moment. El primer que apareix a la bibliografia és l'experiment de Maull (1963), que analitzà el flux de petroli en una cavitat rectangular a la que canvià l'alçada i l'amplada, però no analitzà la influència del número de  $Re$ . Pan (1967) sí que estudià aquesta



influència en un rang de  $Re$  20-4000. També visualitzà les estructures del flux generades per un cilindre col·locat a sobre d'una cavitat rectangular, plena d'un oli d'alta viscositat. Aquestes estructures foren enregistrades mitjançant tècniques fotogràfiques. Reiman (1968) examinà les diferències qualitatives entre el flux laminar i turbulent en una cavitat. Però no va ser fins a Koseff (1983, 1984) que no es feren experiments rigorosos que demostraren la tridimensionalitat del flux en una cavitat. Així afirmà, en les seves conclusions, que les simulacions numèriques bidimensionals produeixen perfils significativament diferents als mesurats al pla de simetria en els experiments. També establí que la transició cap a la turbulència es fa en un rang de  $Re$  6000-8000. Una altra publicació que complementa les darreres és Prasad (1989) que incidí novament en la influència dels remolins semblants als Taylor-Goertler (Taylor-Goertler-like, TGL) com un mecanisme essencial en la transferència de quantitat de moviment i, a més a més, amplià les mesures de velocitat al llarg de les línies horitzontal i vertical que passent pel centre del pla de simetria de la cavitat.

L'últim treball aparegut a la bibliografia és el d'Aidun (1991) i Benson (1992) que observaren, en un sistema experimental, múltiples estats estacionaris en el flux CFC per un mateix  $Re$ .

**1.3.2 Simulacions numèriques.** El primer treball del que es té referència és el de Kawaguti (1961)<sup>2D</sup>. Els càlculs foren efectuats en una xarxa de 121 punts (11 en cadascuna de les dues direccions) i amb un  $Re$  màxim de 128. El temps de cpu mitjà fou de vint minuts per cada cas, i l'autor indicà a més a més que a partir del  $Re$  128 els càlculs divergiren, sense precisar les causes. Burggraf (1966)<sup>2D</sup> assolí resultats en un rang de  $Re$  des de 0 fins a 400 amb un codi en diferències finites i amb un esquema  $\psi-\omega$ . A  $Re$  700 i 1000 no obtení convergència en la solució, tot i usant xarxes de 1681 punts (41 en cadascuna de les dues direccions).

2D: codi de càlcul bidimensional

3D: codi de càlcul tridimensional

Greenspan (1969)<sup>2D</sup> obtingué solucions a  $Re$  més grans de 400 utilitzant, a l'igual que Torrance (1972)<sup>2D</sup>, una aproximació no centrada pels termes convectius. El rang de  $Re$  cobert fou: 200-15000 en una xarxa 21x21 i 50-100000 en una xarxa de 41x41 punts; però cal remarcar que obtingué solucions errònies, pel fet de no observar-se els remolins secundaris a  $Re$  més grans de 1000. Fou De Vahl Davis (1976)<sup>3D</sup> qui indicà que un esquema de discretització no centrat de primer ordre, malgrat solucionar els problemes d'inestabilitat a alts  $Re$ , genera una difusió artificial numèrica. Aquest últim autor presentà per primera vegada uns resultats tridimensionals del flux CFC, i remarcà l'evidència de què aquest tipus de flux és no bidimensional i que presenta estructures clarament tridimensionals, impossibles de captar amb càlculs bidimensionals.

Tots els esquemes abans esmentats resolien les equacions de conservació de quantitat de moviment, tenint com a variables de càlcul la funció de corrent i la vorticitat ( $\psi-\omega$ ). Ghia (1979)<sup>2D</sup> afirmà que aquesta formulació no és fàcilment extensible a fluxos tridimensionals, compressibles o turbulents, i que per aquests hi ha dues formulacions més adients com són: velocitat-vorticitat i velocitat-pressió (variables primeres). Ghia obtingué solucions a  $Re$  100 i 1000 del flux CFC, obtenint solucions tan acurades com les obtingudes amb formulació  $\psi-\omega$ .

Shay (1981)<sup>2D</sup> discretitzà les equacions de Navier-Stokes estacionàries per un flux incompressible en una cavitat, amb una aproximació pel terme convectiu de l'equació de la vorticitat de nou punts. Així mateix obtingué resultats laminars per la cavitat bidimensional fins a un  $Re$  20000.

Amb la contribució de Freitas (1985)<sup>3D</sup> s'obtingueren els primers resultats tridimensionals que concordaren amb les visualitzacions experimentals a  $Re$  3200, pel fet de descriure perfectament els remolins secundaris com són els de TGL. Els resultats foren produïts per un codi formulat en variables primeres, discretitzat amb un esquema de volums de control amb una xarxa no regular. El terme convectiu fou discretitzat amb un esquema descentrat de segon ordre de tipus QUICK.

Ha estat Iwatsu (1989 i 1990)<sup>3D</sup> qui ha simulat el flux CFC tridimensional amb més resolució. Ha obtingut càlculs resultats en un rang de  $Re$  100-4000 amb solucions estacionàries fins a  $Re$  2000. El seu codi fou executat en el

supercomputador NEC SX-2 (1.3 Gflops de pic) amb xarxes de 531441 punts (81x81x81).

## 1.4 Revisió bibliogràfica de la convecció natural (flux CNC)

**1.4.1 Treballs experimentals.** Bénard (1901) demostrà experimentalment l'evidència d'un règim permanent estable en el moviment de líquids per convecció natural, i determinà tots els elements geomètrics, cinemàtics i dinàmics. Però fou Ostrach (1988), en la seva revisió, qui afirmà que un dels treballs més antics sobre el flux CNC fou la tesi d'en Lewis (1950), que tractà sobre la transferència de calor en materials d'aïllament.

Eckert (1961) mesurà el camp de temperatures en la capa d'aire inclosa entre dues plaques verticals amb diferents temperatures. Deardorff (1965) estudià una configuració diferent, la convecció natural de l'aire entre dues plaques horitzontals de longitud més gran que la distància que les separa. Elder (1965) tornà a la configuració de les parets verticals en una cavitat amb dues parets amb diferents temperatures. També construï la cavitat lo suficientment gran en la tercera dimensió per considerar el flux bidimensional. En una cavitat pràcticament quadrada observà a un  $Ra \approx 10^7$ , tres tipus diferenciats de flux: una regió propera a les parets amb una forta circulació en el sentit de les agulles del rellotge (paret calenta a "les nou"), una regió adjacent a l'anterior en la que el flux no segueix la forma de la paret, i per últim un nucli central que roman pràcticament sense moure's. Torrance (1969) desenvolupà una tècnica experimental per mesurar i visualitzar el flux induït pel fet de posar una placa calenta en la base. L'originalitat d'aquest treball fou la seva aplicació al disseny de la localització dels detectors de fums.

Seki (1978) visualitzà els diferents "patterns" del flux CNC i les variacions amb el  $Ra$ , i Yin (1978) quantificà la transferència de calor per un rang ampli de relacions geomètriques i nombres de  $Gr$ .

Arnold (1978) caracteritzà experimentalment i numèrica el flux de calor en geometries rectangulars considerant diferents angles d'orientació de l'eix vertical, i obtingué correlacions del  $Nu$  en funció del  $Ra$  i l'angle d'inclinació de la cavitat, per una geometria fixada. Nansteel (1980,1982, 1984) també

estudià la transferència de calor en cavitats tridimensionals, sense divisions i amb divisions parcials, establint correlacions del Nu en funció del Ra i del tamany de la paret que feia de divisió.

Simpkins (1981) visualitzà i analitzà el flux CNC en un rang de relacions geomètriques  $A : 0.25-9$ , i amb fluids amb un  $Pr \geq 10$ , concloent que fins a un  $Ra \leq 10^5$  els efectes de conducció de calor són importants. El límit fins al que es pot considerar el flux CNC laminar, fou establert per Bohn (1983, 1984) a un Ra de  $7 \cdot 10^{10}$ . L'experiment es féu en una cavitat cúbica amb aigua ( $Pr = 5$ ) com a fluid.

Kim (1984) demostrà que el fet de negligir la interacció entre la convecció de dins de la cavitat i la conducció en les parets que la conformen, mitjançant la utilització de condicions de contorn ideals, no constitueix una bona aproximació, ja que en la realitat la conducció en les parets és un fenomen inevitable. Un altre aspecte del flux CNC estudiat per Ivey (1984) fóu l'anàlisi i visualització de l'evolució temporal del camp dinàmic i tèrmic.

Schmidt (1986) tingué com objectiu la determinació experimental de les característiques del flux en una cavitat amb una relació geomèrica  $A$  de 2. Quatre de les sis parets foren aïllades tèrmicament i les altres dues col·locades en llocs oposats i mantingudes constantment a dues temperatures diferents. Les velocitats del fluid (aigua) foren mesurades amb un sistema d'anemometria làser. En les seves conclusions establí que dins de la cavitat hi ha un flux primari que es mou a prop de les parets, ascendent en la paret calenta i descendent en la freda. Coexistent amb aquest flow existeix un flux secundari, situat enmig del primari, i un nucli central que roman pràcticament quiet.

Olson (1990, 1991) analitzà el flux CNC estacionari i transitori en cavitats rectangulars amb relació de dimensions 1:3 i 1:5. També observà que la constant de temps estava directament relacionada amb el temps que tardava el fluid en viatjar per donar un tomb sencer a la cavitat, aquest temps és de l'ordre de 5-10 min per una habitació normal.

**1.4.2 Simulacions numèriques** L'estudi numèric del flux CNC ha estat realitzat per nombrosos investigadors. A l'any 1966 tres autors publicaren treballs sobre la simulació de la convecció natural. El primer, Veronis<sup>2D</sup>, estudià la convecció de Bénard bidimensional amb un codi obtingut en

discretitzar les equacions de conservació en sèries de Fourier. El segon, Gill<sup>2D</sup>, resolgué analíticament les equacions de transport i el darrer, Wilkes<sup>2D</sup>, amb una tècnica de diferències finites obtingué resultats per la convecció natural en la cavitat bidimensional fins a un Gr de  $2 \cdot 10^5$  fent ús del mètode ADI per l'evolució temporal.

A l'any 1967 dues publicacions aparegueren presentant codis tridimensionals en diferències finites. Chorin<sup>3D</sup> amb un esquema en variables primeres calculà la convecció natural en una placa escalfada per sota. Aziz<sup>3D</sup> formulà el seu codi en funció de la vorticitat i una funció potencial ( $\Psi-\omega-T$ ), obtenint resultats del flux CNC amb un Ra 3000 i emprant una xarxa de 11x11x11 punts.

De Vahl Davis (1968)<sup>2D</sup> resolgué les equacions de transport amb un esquema funció de corrent i temperatura ( $\Psi-T$ ), tot arribant a solucions fins a un Ra de  $2 \cdot 10^5$ . També, feu els càlculs amb dues condicions de contorn diferents per les parets horitzontals: parets adiabàtiques i parets perfectament conductores.

Torrance (1968, 1969)<sup>2D</sup> comparà cinc mètodes diferents de discretitzar el terme convectiu (centrat i descentrat) i l'aplicà al càlcul de l'evolució temporal de la convecció natural en una cavitat bidimensional. Newell (1970)<sup>2D</sup> comparà els resultats de transferència de calor obtinguts numèricament, en fluxos CNC, amb els experimentals, comparació feta amb correlacions del Nu com a funció del nombre adimensional Gr.

Quon (1972)<sup>2D</sup> arribà en els seus càlculs a un Ra  $10^6$  i estudià l'efecte de diverses condicions de contorn. Fou Spradley (1975)<sup>2D</sup> qui analitzà numèricament el flux CNC d'un fluid compressible, i per tant, sense fer l'aproximació de Boussinesq.

No fóu fins a l'any 1977 que es tornà a tenir en compte les simulacions tridimensionals (Mallinson, 1977)<sup>3D</sup> encara que amb xarxes bastant modestes, 15x15x15 punts. L'anterior autor es trobà amb dificultats per representar els camps tridimensionals CNC d'una manera eficient i presentà dos tipus de gràfics, un tridimensional amb línies de corrent i un altre amb plans, representant mapes de contorn del camp tridimensional tallat. Un altre autor que desenvolupà un codi tridimensional fou Chan (1979)<sup>3D</sup>, formulat en variables primeres amb la tècnica MAC (Marker And Cell method). Els

resultats obtinguts foren fets en xarxes bastant espaiades (la més fina fou  $21 \times 10 \times 9$ ), demostrant que emprant xarxes no uniformes (més fines prop de les parets) s'obtenen resultats més acurats.

Roux (1978)<sup>2D</sup> discretitzà les equacions bidimensionals de Navier-Stokes amb diferències finites, amb un quart ordre d'aproximació i les aplicà al flux CNC. Jones (1979)<sup>2D</sup> validà el seu codi de càlcul, formulat en les variables  $\Psi-\omega-T$ , amb el càlcul del flux CNC i comparà els resultats amb els experimentals, obtenint bona concordança.

Kübleck (1980)<sup>2D</sup> utilitzà un esquema upwind de segon ordre capaç de simular el flux CNC laminar fins un  $Ra$  de  $10^{12}$ .

Patterson (1980)<sup>2D</sup> féu, a part de la simulació numèrica, una anàlisi sobre les escales del flux CNC i més concretament suggerí els diversos règims que hi ha per arribar a l'estat estacionari, depenent del  $Ra$ ,  $Pr$  i  $A$  (relació geomètrica entre l'alçada i amplada d'una cavitat bidimensional). Com un exemple el règim transitori d'un flux amb un  $Ra > Pr^4 A^{-4}$ , assoleix l'estat estacionari amb oscil·lacions del valor del  $Nu$  (de la paret calenta) que progressivament queden esmorteïdes, fins arribar al valor estacionari.

De Vahl Davis (1983)<sup>2D</sup> suggerí que el càlcul del flux CNC pot ser utilitzat com test de validació ("bench mark") de qualsevol codi de simulació de la dinàmica dels fluids, per això tabulà a diferents  $Ra$  ( $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$ ,  $10^6$ ), els valors de les velocitats, funció de corrent, vorticitat, temperatura i  $Nu$ , que obtingué amb un codi formulat en les variables  $\Psi-\omega-T$ . Per una altra banda, Quon (1983)<sup>2D</sup> obtingué solucions fins un  $Ra$   $10^7$  amb un codi en variables primeres.

Cazalbou (1983)<sup>3D</sup> desenvolupà un codi tridimensional en variables primeres, discretitzat en volums finits, i destinat a la resolució de fluxos en cavitats. El càlcul del flux CNC el féu per  $Ra$   $10^3$  i  $10^4$ . Així mateix Ben Mabrouk (1984)<sup>3D</sup> amb un codi també tridimensional trobà solucions laminars estacionàries en un marge de  $Ra$   $10^3$ - $10^6$ .

Phillips (1984)<sup>2D</sup> i Lauriat (1985)<sup>2D</sup> són un clar exemple d'utilització del flux CNC per tal de "testejar" els seus codis, concretament reformulacions del mètode d'avanç temporal ADI, DADI ("Dynamic Alternating Direction

Implicit method") per Phillips i SADI ("Spline Alternating Direction Implicit method") per Lauriat.

Un altre efecte a considerar és la conducció en les parets, així Kimura (1984) se'n adonà que la hipòtesi de parets isotèrmiques és inadequat en el cas de la simulació de la convecció natural en edificis, i per tant, aplicà a la simulació de la cavitat un flux de calor uniforme travessant les dues parets verticals. També Chenoweth (1986)<sup>2D</sup>, amb un codi en variables primeres sense l'aproximació de Boussinesq (veure el capítol 2), estudià l'efecte de les variacions del paràmetre de diferència de temperatures en els camps de temperatura, velocitat i pressió; arribant a la conclusió de què únicament el nombre de Nusselt mig és independent del paràmetre variació de temperatura. També observà un salt hidràulic intern i un comportament oscil·latori associat, que juga un paper molt important en la transició cap al règim turbulent.

Viskanta (1986)<sup>3D</sup> reconduí el càlcul del flux CNC cap a les tres dimensions, emprant l'algoritme SIMPLER per obtenir el camp de pressions. Els resultats numèrics que obtingué demostraren la tridimensionalitat del flux convectiu en la cavitat.

Tots aquests treballs esmentats no tingueren en compte la variació de la viscositat amb la temperatura. Hyun (1988)<sup>2D</sup> obtingué solucions de la convecció natural en una cavitat quadrada amb viscositat variable, en un rang de Ra de  $10^4$ - $10^6$ . Tot observant que la transferència de calor es millora degut a que la convecció és més vigorosa en la paret calenta. A més a més, aquest efecte és més pronunciat en el cas de conducció en les parets horitzontals.

Paolucci (1989)<sup>2D</sup> clarificà, mitjançant simulacions numèriques, els mecanismes bàsics del moviment estacionari i no estacionari oscil·lant en un flux CNC. Schladow (1989)<sup>3D</sup> examinà el flux CNC no estacionari i tridimensional amb un Ra alt de  $2 \cdot 10^9$ .

Henkes (1990)<sup>2D</sup> solucionà numèricament el flux CNC, no estacionari, bidimensional i amb les dues parets verticals escalfades a diferent temperatura. Aplicà dues condicions de contorn diferent per les parets horitzontals. Per parets conductores el Ra crític (el flux es torna no estacionari) és  $Ra_{cr} = 2 \cdot 10^6$ . Per parets horitzontals adiabàtiques el flux perd l'estabilitat a  $Ra_{cr} = 2 \cdot 10^8$ .

Un interessant treball, continuació del de Vahl Davis, fou l'elaborat per Hortmann (1990)<sup>2D</sup> que trobà solucions pel flux per convecció natural en cavitats bidimensionals amb un enorme grau de resolució (640x640 punts de xarxa) i un rang de Ra  $10^4$ ,  $10^5$ ,  $10^6$ . També aplicà el mètode de multigrid per tal d'obtenir la convergència de les solucions en temps de cpu sensiblement inferiors als emprats pels mètodes iteratius clàssics.

Com en el cas de la convecció forçada, el flux per convecció natural en una cavitat és clarament tridimensional. Malgrat aquesta consideració la majoria dels càlculs numèrics fins a la dècada dels 90 foren bidimensionals. Le Peutrec (1990)<sup>3D</sup> obtingué solucions numèriques amb un codi tridimensional sobre el flux CNC. Els càlculs comprendiren un rang de Ra desde  $10^3$  fins a  $10^7$  i analitzaren les pèrdues de calor en les parets horitzontals degudes a la diferència de temperatura amb respecte l'ambiental.

Patterson (1990)<sup>2D</sup> comparà els resultats numèrics amb els experimentals del flux CNC bidimensional iniciat instantàniament per l'escalfament i refredament de les dues parets verticals oposades. Identificà com una característica la inestabilitat en forma d'ones que es transmeten per la capa límit de la paret vertical. Schladow (1990)<sup>2D</sup> incidí en l'estudi de les oscil·lacions, afirmant que el salt hidràulic que Chenoweth (1986) observà, és només, una regió complexa de recirculació.

Fusegi (1991)<sup>3D</sup> obtingué solucions tridimensionals, amb un elevat grau de resolució (fins a 468968 punts de càlcul), del flux no estacionari per convecció natural en una cavitat per Ra  $10^3$ - $10^{10}$ . L'examen dels seus resultats revela que les diferències més notables, entre els resultats bidimensionals i tridimensionals, es donen en els plans propers a les parets.

*Simulacions numèriques turbulentes.* Amb Markatos (1984)<sup>2D</sup> es dugué a terme un dels primers treballs numèrics del flux turbulent en la convecció natural en cavitats. Amb un codi bidimensional, fins a un Ra  $10^6$  aplicà el model laminar i per Ra superiors ( $10^6$ - $10^{16}$ ) considerà més adient afegir un model de turbulència k- $\epsilon$ , que incloïa en l'equació de k el terme de producció per empenta:

$$G_B = - \beta g \mu_t / \sigma_{t,f} \partial \phi / \partial y \quad (2)$$



Ozoe (1985)<sup>3D</sup> desenvolupà un model tridimensional  $k-\epsilon$  aplicat al càlcul de la convecció natural turbulenta en una cambra cúbica amb el sol escalfat i amb una paret refredada, per  $Ra$   $10^6$  i  $10^7$ . Ince (1989)<sup>2D</sup> millorà el model de Markatos en introduir un terme font addicional en l'equació de transport de  $\epsilon$ .

Henkes (1989, 1990)<sup>2D</sup> comparà tres models  $k-\epsilon$  diferents: un model estàndard, el model "low-Reynolds-number" de Chien, i el model "low-Reynolds-number" de Jones & Launder. Els càlculs del flux CNC, amb aigua i aire com a fluids, fins a un  $Ra$  de  $10^{17}$  foren comparats amb les dades experimentals obtingudes en el flux de convecció natural en una paret vertical, per aquest motiu les conclusions a les que es poden arribar s'han de fer amb cautela.

Paolucci (1990)<sup>2D</sup>, mitjançant simulació directa bidimensional de la turbulència en el flux CNC de l'aire a un  $Ra$   $10^{10}$ , describí el flux en règim turbulent com un conjunt de regions diferents. En la part baixa de la paret calenta hi ha una capa límit laminar, aquesta té una capa de transició seguida d'una capa límit turbulenta. L'espai entre les dues capes límits, una en cada paret vertical, està plena per un nucli pràcticament immòbil, estratificat que presenta oscil·lacions de baixa freqüència i contínuament agitat per elements aleatoris originats per l'empenta.

Davidson (1990)<sup>2D</sup> remarcà que les forces d'empenta afavoreixen l'anisotropia de la turbulència. Per tal de tenir en compte aquest efecte, presentà un model híbrid entre el  $k-\epsilon$  i "Reynolds stress". Així, la part isotròpica del tensor de Reynolds es modelitza amb el model  $k-\epsilon$ , mentres que la part anisotròpica deguda a les forces d'empenta es cacula amb un model de Reynolds stress algebraic.

## 1.5 Equips disponibles

En Computació en Mecànica dels Fluids, l'equip imprescindible és l'ordinador. La potència dels ordinadors té dues vessants: la capacitat de memòria central i la velocitat de procés. La velocitat de càlcul de la CPU permet que els resultats s'obtinguin en un temps raonable. La capacitat de memòria central permet l'ús de xarxes de càlcul amb molts punts, raó per la qual, es poden obtenir resultats més acurats. Per donar un ordre de magnitud, el fet de posseir una memòria central (RAM) de l'ordre dels Gb (Gigabytes) permet emprar xarxes amb  $10^6$  punts de càlcul.

Els finals dels anys 80 han coincidit amb una revolució informàtica comparable a la revolució 10 anys enrera de l'ordinador personal. Aquesta ha estat la utilització del processador PA-RISK en les workstations, tot posant-les a prop del límit dels supercomputadors, (tant en tamany de memòria central com en velocitat de procés). Tenint en compte que es pot definir un supercomputador com un ordinador amb velocitat de computació superior als 0.1 Gigaflops ( $10^6$  flops, operacions en coma flotant per segon), i gran capacitat de memòria central ( $> 0.1$  Gbytes). Les workstations (WKS) més ràpides disponibles en el Laboratori de Computació (Figura 3), del grup de Mecànica de Fluids de Tarragona, tenen un rendiment de 22 Mflops i memòria central de 32 Mb, mentres que el primer superordinador disponible a Catalunya, el Cray X-MP 116 del CESCA (Centre de Supercomputació de Catalunya), amb un processador vectorial amb un pic de 235 Mflops, és només de l'ordre de deu vegades més ràpid que les WKS. A l'actualitat aquest superordinador ha estat substituït per un de més modern i ràpid, el Cray YMP-2E 232, amb un pic de velocitat de 666 Mflops i 256 Mb de memòria central.

Una part molt important de les simulacions numèriques és el postprocessat dels resultats. Aquest ha estat fet principalment en el Cray Research Center a Minneapolis (EUA) en diferents formats (paper, disk i video) i mitjançant el software MPGS 4.1 ("Multi-Purpose Graphic System").

A continuació es presenta una taula on es poden veure les característiques dels dos superordinadors abans esmentats i de la workstation més ràpida de què es disposa en el laboratori del grup de recerca. A més, en la primera columna

s'indican les característiques del superordinador més potent del món (CRAY Y-MP C90) per tal de poder comparar les especificacions.

	CRAY Y-MP C90	CRAY XMP 116se/ea	CRAY YMP-2E 232	HP Apollo 730
<b>CPU</b>				
Nombre de CPUs	16	1	2	1
Pic de velocitat per cpu (Mflops)	1000	235	333	22
Pic de velocitat en paral.lel (Mflops)	16000	235	666	22
Relotge (ns)		8.5	6	15
Tecnologia	Custom Silicon	ECL	ECL	PA-RISK
<b>MEMÒRIA</b>				
Tamany (Mbytes)	2048	128	256	32
Temps accés (ns)	10	34	15	80
Tecnologia	BICMOS	MOS	MOS	ECC

**Taula 1.** Característiques dels ordinadors utilitzats per obtenir les simulacions numèriques, comparats amb el superordinador més potent del món (CRAY YMP C90).

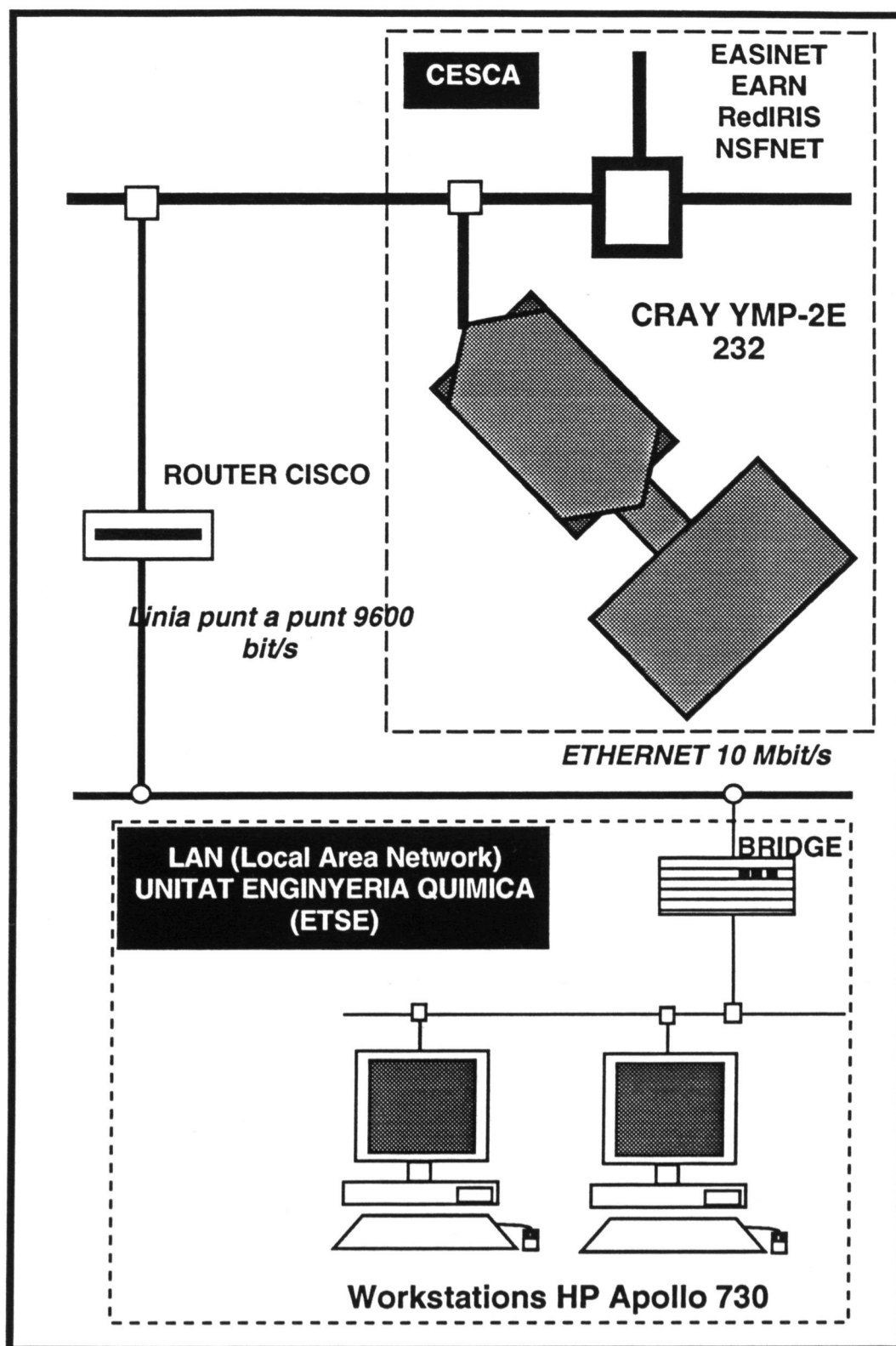


Figura 3. Esquema de la xarxa d'ordinadors disponible a l'ETSE

## 1.6 Objectius

L'objectiu principal d'aquesta Tesi és el de la construcció del Túnel de Vent Numèric, o codi de càlcul per a la simulació de fluxos reals. L'objectiu, per tant, ha estat l'elaboració d'un codi de resolució de les equacions de Navier Stokes o Reynolds, continuïtat, balanç d'energia i les corresponents al model de turbulència en un domini tridimensional.

Aquest codi ha utilitzat algoritmes i mètodes numèrics òptims per tal d'aconseguir per una banda les solucions més acurades, i per altra estalvis importants en temps de cpu. Així mateix el codi és gairebé totalment vectoritzable i la seva "performance" ha estat millorada durant l'estada de l'autor d'aquesta Tesi en un dels centres millors en quant a supercomputació del món, el Cray Research Center a Minneapolis (Minnesota, EUA).

Un interès clau del grup de recerca en Computació en Mecànica de Fluids són els fluxos en règim turbulent, per això aquesta Tesi ha anat més enllà dels fluxos laminars i s'ha desenvolupat un model turbulent mitjà de dues equacions k- $\epsilon$  tridimensional. Aquest model s'ha aplicat a fluxos turbulents de convecció forçada.

Quant al problema tractat, l'objectiu d'aquest treball ha estat el descriure, tant en estat transitori com en règim estacionari, i tan en règim laminar com en turbulent, tot el ventall d'estructures que s'estableixen a l'interior d'una cavitat cúbica quan el fluid que l'omple es veu forçat, sobtadament, a moure's ja sigui per causes mecàniques (moviment d'una paret), com per forces d'empenta (convecció natural). Així mateix, en el darrer cas s'ha estudiat quina és la influència d'aquestes estructures en el transport de calor a través de les parets que forma la cavitat.

Per a dur a terme aquest estudi, s'han contrastat els resultats obtinguts amb el TVN amb els millors resultats experimentals disponibles a la bibliografia.

I com a conclusió d'aquest treball, també es presenten els resultats de la simulació del flux en el interior d'un combustor, aquests càlculs demostren la possibilitat d'aplicació del codi desenvolupat en fluxos reals e industrials.

## 2

---

# ANÀLISI TEÒRICA

## 2.1 Introducció

En aquest capítol s'establirà tot l'aparell matemàtic necessari per resoldre les equacions que descriuen el flux d'un fluid viscos amb transferència de calor. Cal dir que les aproximacions fetes es basen en hipòtesis sobre les condicions del flux i les característiques del fluid.

## 2.2 Hipòtesis

Per tal de simplificar les equacions que governen l'evolució espai-temporal d'un fluid es fan aproximacions. A continuació es descriuran les principals hipòtesis, agrupades en les que afecten a les característiques del fluid i les que afecten a les característiques del flux.

### 2.2.1 Hipòtesis sobre les característiques del fluid.

- El fluid es considera newtonià
- Les forces exteriors es redueixen a una sola, la força gravitatòria
- No hi ha fonts internes d'energia (no hi ha reacció química)
- Els efectes de compressibilitat es consideren negligibles
- Si el fluid és un gas, es considera dintre de l'interval de comportament ideal

- Si el fluid és un líquid, el coeficient isoentròpic es pot eliminar ja que té un valor  $\gamma \cong 1$ . En canvi per gassos, aquest valor no es pot menysprear, ja que pot ser molt diferent de 1. Per exemple, per l'aire el seu valor és 1.4.
- En el cas de la convecció natural es consideren les aproximacions de Boussinesq, que consisteixen en (Gray, 1976):
  - i) La densitat es considera constant (el fluid es considera incompressible) exceptuant quan la variació de densitat genera forces d'empenta, com és el cas de la convecció natural en la que el terme  $\rho g \delta_{i3}$  és una funció lineal de la temperatura;

$$\rho g = \rho_0 g [1 - \beta (T - T_0)]$$

$$\beta = -\frac{1}{\rho_0} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial T} \right]_P \quad (3)$$

- ii) Totes les altres propietats es consideren constants;
- iii) La dissipació d'energia viscosa es considera negligible.

Pel flux de convecció natural en una cavitat, l'aproximació de Boussinesq és vàlida (Zhong, 1985) quan la relació entre la temperatura calenta i freda és  $\frac{T_c - T_f}{T_f} \leq 0.1$ , que implica que la temperatura freda sigui

$$T_f = \frac{10}{11} T_c \quad (4)$$

Cal dir que si la relació (4) pren un valor de 0.2, amb l'aproximació de Boussinesq es pot predir bé la transferència de calor, però es fa un error del 20% en la predicció del perfil de velocitats.

### 2.2.2 Hipòtesis sobre les condicions del flux. Les principals són:

- Pel que fa al flux de convecció natural, hom menysprea el transport de calor degut a la radiació.
- Com la velocitat del flux és a baixos nombres de Match, hom considera l'escalfament per fregament viscosos negligible.

#### *Flux turbulent*

- Es fa l'hipòtesi de que els efectes de la turbulència sobre el camp mitjà es redueixen a una difusió i una dissipació en forma de energia tèrmica. Donat aquest comportament la turbulència es pot descriure com un conjunt d'efectes viscosos, i per tant es pot definir una viscositat efectiva ( $\nu_{\text{eff}} = \nu_t + \nu$ ) que es la suma de la molecular (propietat del fluid) i la turbulenta (propietat del flux). Com a conseqüència el tensor de Reynolds es pot modelitzar com

$$\overline{u_i u_j} = -\nu_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (5)$$

- Es considera que flux turbulent està en equilibri.
- També, pel flux en règim turbulent, i per tal de garantir la independència respecte del temps del valors mitjans, les variables es prenen per intervals de temps prou grans. Per tant el resultat de l'amitjanament temporal de les fluctuacions és nul (Herrero, 1992).

## 2.3 Equacions de transport

Les equacions que governen el flux en una cavitat per convecció forçada són: l'equació de continuïtat que expressa la conservació de matèria i les equacions de Navier-Stokes de transport de la quantitat de moviment. Per descriure el flux de convecció natural, hom necessita una equació diferencial més, que és la de transport d'energia. En resum, les lleis que regeixen el flux d'un fluid newtonià incompressible que transporta l'escalar temperatura són: les lleis de conservació de la matèria, la quantitat de moviment i l'energia.



**2.3.1 Equació de continuïtat.** En el cas més general, l'equació de conservació de la matèria pren la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (6)$$

i amb l'hipòtesi de fluid incompressible

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (7)$$

**2.3.2 Equació de transport de la quantitat de moviment. Flux isotèrmic laminar.** Si l'única força externa és la gravitatòria, al aplicar les lleis de transport de la quantitat de moviment, s'arriba a l'equació de Navier-Stokes

$$\frac{\partial(\rho u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_j u_i)}{\partial x_j} = -\frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g \delta_{i3}$$

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (8)$$

que per un fluid incompressible i isotèrmic pren la forma

$$\frac{\partial(u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \rho g \delta_{i3} \quad (9)$$

I      II      III      IV      V

En aquesta equació es poden observar els següents termes:

- I : terme d'evolució temporal
- II : terme convectiu
- III : terme de les forces de pressió
- IV : terme de les forces viscoses
- V : terme de la força gravitatòria

**2.3.3 Equació de transport de la quantitat de moviment. Flux isotèrmic turbulent.** Quan el flux està en règim turbulent es necessiten molt més punts de càlcul, que no pas quan és laminar, per tal de captar totes les estructures i poder fer la simulació directa. Avui en dia, i degut a limitacions en la velocitat i capacitat de memòria dels superordinadors, la simulació directa de la turbulència només es pot fer a baixos  $Re$ . Per tant, s'ha d'emprar el recurs de la modelització per tal de poder simular numèricament els fluxos turbulents. Un tipus de modelització es basa en la hipòtesi de què la contribució física de les petites estructures (aquelles que no es poden simular directament) és una dissipació viscosa turbulenta. Dins d'aquest grup de models hi ha el de dues equacions  $k-\epsilon$ .

Per trobar les equacions diferencials, que governen el transport de quantitat de moviment en règim turbulent, es fa la clàssica descomposició de Reynolds; que consisteix en el desdoblament de la velocitat instantània en dues, una mitjana i una altre fluctuant.

$$u_i = U_i + u'_i \quad (10)$$

a on

$u_i$  : velocitat instantània  
 $U_i$  : velocitat mitjana  
 $u'_i$  : velocitat fluctuant

La descomposició de Reynolds produeix un terme denominat tensor de Reynolds  $\overline{u'_i u'_j}$ . Aquest terme, que recull tots els efectes de la turbulència, ha d'esser modelitzat, i constituint el conegut problema de tancament de la turbulència.

Per modelitzar el tensor de Reynolds es fa l'hipòtesi de copsar els efectes de la turbulència, sobre el camp mitjà, en una difusió i una dissipació. Aquest comportament de la turbulència es pot descriure com una viscositat turbulenta  $\nu_t$ , que al mateix temps es pot formular com una funció de l'energia cinètica i la seva dissipació, tot donant

$$\frac{\partial(U_i U_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ (v + v_t) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \right] - g \delta_{i3}$$

$$\overline{u_i u_j} = -v_t \left( \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + \frac{2}{3} k \delta_{ij}$$

$$v_t = C_\mu f_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \tag{11}$$

La funció desmorteïdora  $f_\mu$  té en compte els forts efectes viscosos a prop de la paret, i és pròpia dels anomenats models  $k-\varepsilon$  de baixa turbulència. Aquesta funció permet distingir dues zones:

- i) zones properes a la paret:  $0 < f_\mu < 1$
- ii) zones llunyanes de la paret:  $f_\mu = 1$

**2.3.4 Equació de transport de la quantitat de moviment. Flux de convecció natural.** El fet d'emprar l'aproximació de Boussinesq, que considera propietats físiques constants (viscositat, densitat, etc.) amb l'excepció de la densitat en el terme d'empenta, permet arribar a l'expressió de l'equació de conservació de quantitat de moviment

$$\frac{\partial(u_i)}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_j} - \beta g (T - T_0) \delta_{i3} \tag{12}$$

I          II          III          IV          V

En aquesta equació també es poden observar els termes:

- I : terme d'evolució temporal
- II : terme convectiu
- III : terme de les forces de pressió
- IV : terme de les forces viscoses
- V : terme de la força d'empenta

**2.3.5 Equació de transport de l'energia.** L'equació de transport de l'energia interna  $U$ , suposant nul·la la transferència de calor per radiació i utilitzant la llei de Fourier per tal d'incorporar el terme de conducció de calor

$$\rho \frac{\partial U}{\partial t} + \rho u_i \frac{\partial U}{\partial x_{ij}} = \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - P \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \tau_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$$

$$\tau_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \mu \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \tag{13}$$

La variable energia interna és, en el nostre cas, una variable difícil de manipular, per això transformarem la darrera equació per tal que surti només la temperatura com a variable de càlcul (per més detalls veure Cazalbou, 1983).

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} + \rho C_v \frac{\partial (u_j T)}{\partial x_j} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j} - T \left[ \frac{\partial P}{\partial T} \right]_v \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \mu \phi_v$$

$$\phi_v = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{2}{3} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \tag{14}$$

Com hom fa la hipòtesi de negligir la dissipació de calor viscosa  $\phi_v$ , i juntament amb l'equació de continuïtat, s'arriba a l'expressió final del transport d'energia

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(u_j T)}{\partial x_j} = \alpha \gamma \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_j}$$

$$\alpha = \frac{\lambda}{\rho C_p}; \quad \gamma = \frac{C_p}{C_v} \quad (15)$$

**2.3.6 Equacions de transport de les variables turbulentes.** El flux proper a les parets és molt important en els fluxos simulats en aquest treball, raó per la qual s'ha emprat el model k-ε de baix nombre de Re desenvolupat per Herrero (1992), el qual té en compte els forts efectes viscosos en les sub-capes properes a la paret. Aquest model ha estat modificat, per tal de tenir en compte les forces d'empenta, en afegir un terme més, el G, a les equacions de k i ε (Davidson, 1990).

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial(U_j k)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P + G - \varepsilon \quad (15)$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial(U_j \varepsilon)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \left( \nu + \frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + \frac{\varepsilon}{k} [C_1 f_1 (P + G) - C_2 f_2 \varepsilon] \quad (16)$$

El terme de producció P és

$$P = -\overline{u_i u_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} = \nu \left[ \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right] \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad (17)$$

El terme G és igual a zero pel cas del flux isoterm, en canvi pel flux de convecció natural pren la forma,

$$G = \beta g \overline{w\theta}$$

$$\overline{w\theta} = -\frac{\nu_t}{\sigma_T} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (18)$$

## 2.4 Acoblament velocitat-pressió

Els codis en variables primeres tenen les següents avantatges:

- i) produeixen resultats físicament entenedors
- ii) les condicions de contorn són fàcilment aplicables
- iii) no hi ha limitacions inherents per formulacions tridimensionals

Malgrat aquestes avantatges, en el passat, gairebé tots els codis de càlcul de simulació de fluxos incompressibles eren bidimensionals i estaven formulats en les variables  $\Psi$ - $\omega$ , ja que d'aquesta manera s'evitava el tractament de la variable pressió. Però amb l'adveniment dels codis tridimensionals al final de la dècada dels 80, els codis en variables primeres tornaren a tenir plena vigència, malgrat el problema de l'obtenció del camp de pressions. Pel que fa els codis en variables primeres, a més de resoldre les equacions de transport, s'ha d'acomplir l'equació de continuïtat (7), que representa la conservació de la matèria d'un flux incompressible i constitueix una restricció que el camp de velocitats ha de complir sempre. La solució numèrica conjunta d'aquestes equacions ha d'incorporar un procediment que tingui en compte la interacció entre els camps de velocitat i pressió. En conseqüència, i per tal de portar a terme l'acoblament entre pressió i velocitat, l'equació de continuïtat s'ha de substituir per una altra que involucri al mateix temps tots dos camps.

**2.4.1 Revisió bibliogràfica.** A la bibliografia existeixen diversos algorismes de solució de l'acoblament velocitat-pressió, a continuació farem una breu revisió cronològica de les principals aportacions. Un dels primers treballs fou l'anomenat esquema MAC "Marker And Cell" de Harlow i Welch (1965), que l'aplicaren al càlcul d'un flux incompressible, no estacionari, i amb superfície lliure. Aquest mètode es basa en el càlcul en dues etapes. La primera, predictora, calcula les velocitats explícitament en funció de les velocitats i de les pressions calculades en el pas de temps anterior. La segona etapa, correctora, calcula el camp de pressions tot resolent una equació de Poisson. Una altra de les contribucions fonamentals d'aquests autors fou el fet d'emprar xarxes decalades ("staggered grid") tal com es mostra en la Figura 4. En aquesta xarxa les velocitats es situen en les fronteres de la cel.la de càlcul i les pressions resten situades al mig.

## CEL·LA ESCALAR $ij$

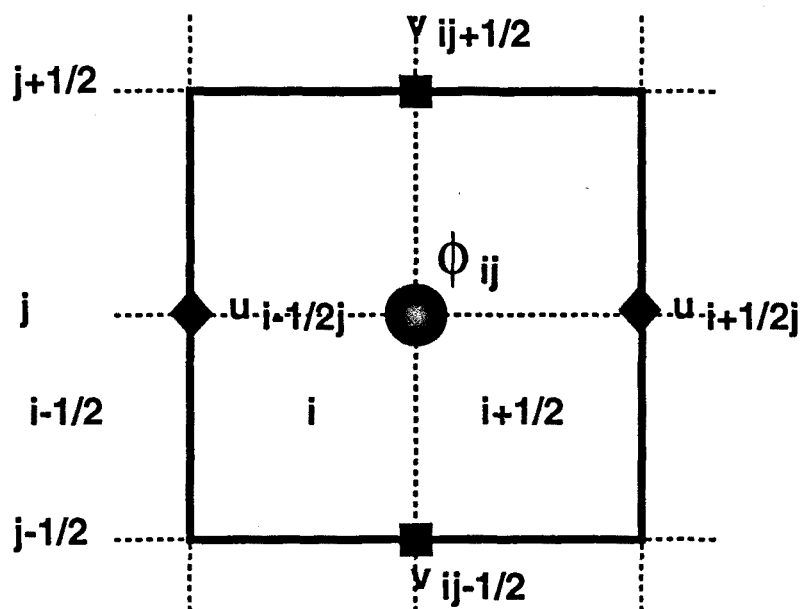


Figura 4. Xarxa decalada MAC-SMAC

El mètode SMAC ("Simplified Marker and Cell") d'Amsden i Harlow (1970) utilitza també xarxes decalades. Per tal de trobar un camp de velocitats que acompleixi continuïtat s'empra una funció potencial auxiliar. Aquest mètode fou també emprat per Braza (1981, 1986) i Cazalbou (1983).

Una altra important contribució fou la de Patankar i Spalding (1972), que introduïren el mètode més referenciat a la bibliografia, i anomenat SIMPLE ("Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations). Aquest mètode també posseeix una etapa predictor i una altra correctora, s'aplica sobre xarxes decalades, i en la seva formulació original no estava destinat per solucions transitòries.

En 1981, Patankar descriví novament l'algoritme de solució SIMPLE i documentà una nova versió d'aquest anomenat SIMPLER (SIMPLE revised), que és entre un 30 i 50% més ràpid. Aquesta nova versió difereix, en què cada

iteració és calcula novament el camp de pressions, a diferència de SIMPLE que només calcula les correccions del camp de pressions de la iteració anterior.

En 1984 Van Doormal i Raithby aportaren a la comunitat científica una altra revisió del SIMPLE, l'anomenat SIMPLEC (SIMPLE Consistent time step). També demostraren que pels fluxos laminars de l'aire en una expansió sobtada i l'aigua en un tanc, els mètodes SIMPLER i SIMPLEC són més econòmics (en temps de CPU). Arribant també a la conclusió de què SIMPLEC és usualment més ràpid que no pas SIMPLER.

Latimer (1984,1985) féu una comparació entre els mètodes SIMPLE, SIMPLER, SIMPLEC i el desenvolupat per ell mateix FIMOSE ("Fully Implicit Method for Operator-Split Equations"). Els fluxos bidimensionals estudiats foren l'expansió abrupta, la convecció forçada en una cavitat, i el canal amb una paret porosa, tot concluint que depenent del tipus de flux FIMOSE i SIMPLEC són els més ràpids. Però, aquests resultats s'han de pendre amb molta cautela per tres motius principalment, les equacions de transport a resoldre es plantejaren en estat estacionari, les xarxes de càlcul foren molt grolleres (196-324 punts), i els càlculs foren només bidimensionals.

Galpin (1985) presentà el mètode CELS ("Coupled Equations Line Solver") una tècnica iterativa per resoldre l'acoblament de les equacions algebraiques de conservació de matèria i quantitat de moviment, que està basat en la solució simultània de la pressió i velocitat per línies. Una extensió d'aquest mètode fou desenvolupada pel mateix autor (Galpin, 1986), per tractar l'acoblament temperatura-velocitat en el flux CNC.

En 1986 Issa introduí el mètode PISO ("Pressure-Implicit with Splitting of Operators") per resoldre l'evolució temporal de l'acoblament velocitat-pressió. Aquest utilitza una etapa predictora i dues correctores. Les dues etapes correctores es caracteritzen per la resolució d'una equació de Poisson per les correccions de la pressió totalment diferents.

Un altre estudi comparatiu, semblant al de Latimer, fou el de Jang (1986) que analitzà els algorismes PISO, SIMPLER i SIMPLEC per 4 configuracions de flux diferents, dues de les quals són interessants pel nostre treball: el flux turbulent en una expansió sobtada bidimensional amb el model de turbulència  $k-\epsilon$ , i la convecció natural laminar en una cavitat bidimensional. Pel primer



cas PISO i SIMPLEC amb evolució temporal presentaren el millor comportament. Pel segon flux s'observà que PISO és el pitjor de tots tres, raó per la qual hom arriba a la conclusió que, en el cas de què una variable escalar (T per exemple) estigués acoblada fortament al camp de velocitats, no es d'esperar un bon comportament de l'algoritme PISO.

Wanik (1989) comparà els algoritmes PISO i SIMPLE pel flux turbulent en l'expansió i en el difusor, trobant millor l'algoritme PISO, com ja s'havia demostrat per anteriors autors.

La darrera referència és la publicació de Kim (1992), que estudià la convergència, precisió i cost computacional dels algoritmes SMAC, PISO i ITA ("Iterative Time-Advancing scheme"). Aquests algoritmes s'empraren pel càlcul dels fluxos no estacionaris en el cas de la convecció forçada en la cavitat polar, i els fluxos oscil·latoris al voltant d'un cilindre i un quadrat. La principal conclusió, és que l'algoritme SMAC, que dona resultats acurats, és el més eficient computacionalment.

**2.4.2 L'algoritme SMAC.** El mètode que s'ha utilitzat en aquest treball per tal de resoldre l'acoblament pressió-velocitat és l'algoritme predictor-corrector SMAC, del que establirem a continuació la seva formulació

Com en el temps  $t = n \Delta t$  es coneixen el camp de velocitats  $u_i^n$  i el camp de pressions  $p^n$ , per calcular els nous camps de velocitats i pressió en el temps  $t = (n+1) \Delta t$  ( $u_i^{n+1}$ ,  $p^{n+1}$ ) s'ha de resoldre l'equació adimensional (en el cas de flux isotèrmic i laminar)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} + \frac{\partial(u_j^n u_i^{n+1})}{\partial x_j} = - \frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 u_i^{n+1}}{\partial x_j \partial x_j} \quad (19)$$

com els camps de pressió i velocitat estan acoblats aquesta equació no es pot resoldre en un únic pas, i necessitarem una equació per la pressió.

a) Etapa predictora

Aquesta és la primera etapa de l'algoritme SMAC, en la que s'obté un camp de velocitats aproximats  $u_i^*$ , emprant com a camp de pressions el que s'havia calculat a l'instant de temps  $n \Delta t$

$$\frac{u_i^* - u_i^n}{\Delta t} + \frac{\partial(u_i^n u_i^*)}{\partial x_j} = - \frac{\partial P^n}{\partial x_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 u_i^*}{\partial x_j \partial x_j} \quad (20)$$

b) Etapa correctora

El camp de velocitats  $u_i^*$  no compleix la restricció de la conservació de matèria, com seria el cas del camp de velocitats exacte  $u_i^{n+1}$ . Malgrat això, es poden relacionar tots dos camps mitjançant una funció potencial  $\Phi_k$ .

$$u_i^{n+1} - u_i^* = - \frac{\partial \Phi_k}{\partial x_i} \quad (21)$$

Expressió, que una vegada conegut el camp de la funció potencial  $\Phi_k$ , permetrà el càlcul directe de la velocitat exacta  $u_i^*$  en el pas de temps  $(n+1)$ . Aquesta velocitat compleix continuïtat

$$\frac{\partial u_i^{n+1}}{\partial x_i} = 0 \quad (22)$$

Al fer la divergència de l'equació (21), i tenint en compte (22), s'arriba a una equació que permet l'obtenció del camp potencial.

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x_i \partial x_i} \quad (23)$$

Aquesta equació és de tipus Poisson i es pot resoldre per mètodes numèrics tradicionals, desenvolupats per aquest tipus d'equacions com són: SOR, ADI, FFT (Fast Fourier Transform), mètodes espectrals i mètodes d'optimització de gradient.

Per tancar tot aquest procés, cal una expressió per obtenir el camp de pressions  $p^{n+1}$ . Si treiem de l'equació (19), l'equació (20) i s'aplica l'expressió (21) hom obté

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ p^n + \frac{\Phi_k}{\Delta t} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x_i \partial x_i} \right] - u_j^n \frac{\partial (u_i^{n+1} - u_i^*)}{\partial x_j} \quad (24)$$

Si  $u_i^{n+1}$  i  $u_i^*$  són suficientment propers (Cazalbou, 1983) es pot negligir l'últim terme de (24)

$$\frac{\partial p^{n+1}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ p^n + \frac{\Phi_k}{\Delta t} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x_i \partial x_i} \right] \quad (25)$$

i per tant

$$p^{n+1} = p^n + \frac{\Phi_k}{\Delta t} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x_i \partial x_i} \quad (26)$$

En resum, es poden establir les següents etapes de l'algoritme SMAC:

- i) Emprar el camp de pressions  $p^n$  com a primera predicció pel càlcul de les variables del pas temps  $(n+1)$ .
- ii) Etapa predictorà: amb l'equació (20) s'obté un camp de velocitats aproximats  $u_i^*$ .
- iii) Etapa correctora: Resoldre l'equació de Poisson (23) de la funció potencial  $\Phi_k$ .
- iv) Corregir el camp de velocitats amb (21) obtenint  $u_i^{n+1}$ .
- v) Corregir el camp de pressions amb (26) obtenint  $p^{n+1}$ .
- vi) Resoldre les altres equacions de transport.

## 2.5 Adimensionament de les equacions

El fet de parametritzar les equacions de transport en derivades parcials utilitzant nombres adimensionals, permet simplificar el codi de càlcul. A més, diferents paràmetres del fluid i del flux es poden agrupar per tal d'entendre la física del problema.

**2.5.1 Convecció forçada.** Per obtenir les equacions adimensionals, partirem de l'equació (9) i establim les següents escales de referència:

- $V$ : velocitat de la paret mòbil
- $L$ : aresta de la cavitat cúbica

A partir d'aquestes escales es poden definir les escales de temps i pressió

- $t_0 = L/V$
- $P_0 = \rho V^2$

Amb aquestes escales i introduint el nombre adimensional  $Re$  ( $Re = \rho VL/\mu$ ), característic d'aquest tipus de flux, s'obtenen les equacions de transport adimensionals (totes les variables adimensionals porten dalt el signe  $\sim$ ) provinent de les equacions (7) i (9)

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i} = 0 \quad (27)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial (\tilde{u}_i \tilde{u}_j)}{\partial \tilde{x}_j} = - \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j \partial \tilde{x}_j} \quad (28)$$

Aquestes variables adimensionals es defineixen com el quocient entre la variable dimensional i l'escala corresponent:

$$\tilde{\phi} = \frac{\phi}{\phi_{\text{escala}}} \quad (29)$$

Pel cas del flux turbulent les equacions de transport s'adimensionalitzen a l'utilitzar les escales abans descrites i afegint les següents per les variables turbulentes.

- $k_o = V^2$
- $\varepsilon_o = V^3/L$
- $(\nu_t)_o = VL$

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{x}_i} = 0 \quad (30)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial (\tilde{U}_i \tilde{U}_j)}{\partial \tilde{x}_j} = - \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \left[ \left( \frac{1}{Re} + \nu_t \right) \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{x}_j} \right] \quad (31)$$

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial (\tilde{U}_i \tilde{k})}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \left[ \left( \frac{1}{Re} + \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{x}_j} \right] + \tilde{\nu}_t \left[ \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right] \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{x}_j} - \tilde{\varepsilon} \quad (32)$$

$$\frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial (\tilde{U}_i \tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \left[ \left( \frac{1}{Re} + \frac{\tilde{\nu}_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{x}_j} \right] + C_{\mu} f_{\mu} C_{1f_1} \tilde{k} \left[ \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right] \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{x}_j} - C_{2f_2} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\tilde{k}} \quad (33)$$

**2.5.2 Convecció natural.** Seguint el mateix procediment fet per obtenir les equacions adimensionals, pel cas de la convecció forçada es defineixen les escales independents següents:

- $\Delta T = (T_c - T_f)$ : increment de temperatura de referència
- $T_o$ : temperatura centrada a l'increment de referència  
 $T_o = (T_c + T_f)/2$
- $L$ : aresta de la cavitat cúbica

Amb aquestes escales es poden definir les restants,

- $t_o = L^2/\alpha\gamma$
- $u_o = \alpha\gamma/L$
- $P_o = \rho\alpha^2\gamma^2/L^2$

Amb l'introducció d'aquestes variables i els nombres adimensionals, Prandtl i Rayleigh,

$$\begin{aligned} Pr &= \nu/\alpha \\ Ra &= g\beta\Delta TL^3Pr/\nu^2 \end{aligned}$$

les equacions de transport en derivades parcials (7), (12) i (15) es transformen en

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_i} = 0 \quad (34)$$

$$\frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial(\tilde{u}_i\tilde{u}_j)}{\partial \tilde{x}_j} = -\frac{\partial \tilde{P}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{Pr}{\gamma} \frac{\partial^2 \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_j \partial \tilde{x}_j} + \frac{Ra}{\gamma} \frac{Pr}{\gamma} \tilde{T} \delta_{i3} \quad (35)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial(\tilde{u}_j\tilde{T})}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_j \partial \tilde{x}_j} \quad (36)$$

En aquestes equacions apareixen dos nombres adimensionals. El  $Pr$  que caracteritza propietats físiques del fluid, i el nombre de Rayleigh que relaciona les forces d'empenta d'Arquímedes amb les forces viscoses.

Cal remarcar que les variables de s'adimensionalitzen d'acord amb l'expressió (29), exceptuant el cas de la temperatura que es fa amb

$$\tilde{T} = \frac{T - T_0}{\Delta T} \quad (37)$$

Si el flux de convecció natural es troba en règim turbulent s'ha d'afegir les següents escales

- $k_0 = \alpha^2 \gamma^2 / L^2$
- $\varepsilon_0 = \alpha^3 \gamma^3 / L^4$
- $(v_t)_0 = \alpha \gamma$

i al fer les manipulacions matemàtiques adients es troben les següents equacions adimensionals

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{x}_i} = 0 \quad (38)$$

$$\frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial (\tilde{U}_i \tilde{U}_j)}{\partial \tilde{x}_j} = - \frac{\partial \tilde{\Pi}}{\partial \tilde{x}_i} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \left[ \left( \frac{Pr + Pr_t}{\gamma} \right) \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{x}_j} \right] + \frac{Ra}{\gamma} \frac{Pr}{\gamma} \tilde{T} \delta_{i3} \quad (39)$$

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial (\tilde{U}_j \tilde{T})}{\partial \tilde{x}_j} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_i} \left[ \left( 1 + \frac{\tilde{v}_t}{\sigma_T} \right) \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_i} \right] \quad (40)$$

$$\frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial (\tilde{U}_i \tilde{k})}{\partial \tilde{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \left[ \left( \tilde{v} + \frac{\tilde{v}_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial \tilde{k}}{\partial \tilde{x}_j} \right] + \tilde{v}_t \left[ \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right] \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{x}_j} - \frac{Ra}{\gamma} \frac{Pr}{\gamma} \frac{\tilde{v}_t}{\sigma_T} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} - \tilde{\varepsilon} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{t}} + \frac{\partial (\tilde{U}_i \tilde{\varepsilon})}{\partial \tilde{x}_i} = & \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j} \left[ \left( \tilde{v} + \frac{\tilde{v}_t}{\sigma_\varepsilon} \right) \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \tilde{x}_j} \right] + C_{\mu} f_{\mu} C_{1f_1} \tilde{k} \left[ \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{x}_j} + \frac{\partial \tilde{U}_j}{\partial \tilde{x}_i} \right] \frac{\partial \tilde{U}_i}{\partial \tilde{x}_j} \\ & - \frac{Ra}{\gamma} \frac{Pr}{\gamma} \frac{\tilde{v}_t}{\sigma_T} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{z}} - C_{2f_2} C_{\mu} f_{\mu} \frac{\tilde{\varepsilon}^2}{\tilde{k}} \end{aligned} \quad (42)$$

## 2.6 Modelització de les funcions i termes turbulents

L'utilitzar un model k-ε de baixos Reynolds inclou la modelització de certs termes i funcions esmorteïdores, per tal de tenir en compte els efectes viscosos que es poden trobar en llocs propers a la paret. A la bibliografia existeixen nombroses propostes, i en totes elles apareix la distància a la paret. En aquest treball utilitzarem la desenvolupada per Herrero (1992) en la seva Tesi Doctoral.

**2.6.1 Modelització dependent de paràmetres geomètrics.** Si prenem com a base la modelització de Lam i Bremhorst (1981) l'expressió de  $f_\mu$  té la forma

$$f_\mu = [1 - \exp(-0.0066 R_k)]^2 \left[ 1 + \frac{500 \exp(-0.0055 R_k)}{R_t} \right] \quad (43)$$

a on els Re turbulents

$$R_k = \frac{y\sqrt{k}}{\nu} \quad (44)$$

$$R_t = \frac{k^2}{\nu\epsilon} \quad (45)$$

Per tancar la modelització queda per determinar les funcions esmorteïdores  $f_1$  i  $f_2$

$$f_1 = 1 + \left( \frac{0.05}{f_\mu} \right)^2 \quad (46)$$

$$f_2 = 1 - \frac{0.3 \exp(-R_t^2)}{1 - 0.7 \exp(-R_k)} \quad (47)$$

així mateix com els paràmetres  $C_\mu=0.09$ ,  $C_1=1.44$ ,  $C_2=1.92$ ,  $\sigma_k=1.0$  i  $\sigma_\epsilon=1.3$ .



**2.6.2 Modelització dependent de variables dinàmiques.** El fonament d'aquesta nova formulació es base en la definició d'un nou nombre de Reynolds turbulent que és independent de les distàncies a les parets. La seva definició presentada per Herrero (1992) és

$$R_{\omega} = \frac{k}{\nu |\omega|} \quad (48)$$

També s'han de reformular les funcions d'esmoreïment, que incorporen els efectes viscosos de les parets, en termes de  $R_{\omega}$ , i són

$$f_{\mu} = [1 - \exp(-0.003 R_{\omega}^{4/3})] \quad (49)$$

$$f_1 = \exp\left(\frac{\nu_t \omega^2}{47.5 \varepsilon \left(1 + 0.5 \frac{\nu_t}{\nu}\right)}\right) = \exp\left(\frac{C_{\mu} f_{\mu} R_t^2}{47.5 R_{\omega}^2 \left(1 + 0.5 \frac{\nu_t}{\nu}\right)}\right) \quad (50)$$

$$f_2 = 1 - \frac{0.3 \exp(-R_t^2)}{1 - 0.7 \exp(-R_w)} \quad (51)$$

## 2.7 Condicions inicials i de contorn

Totes les equacions, en derivades parcials, de transport (quantitat de moviment, energia,  $k$  i  $\varepsilon$ ) tenen la particularitat de què són de caràcter parabòlic respecte al temps i el·líptiques amb l'espai. Això implica que s'ha d'especificar tot el camp de les variables a calcular en l'instant de temps inicial ( $t = 0$ ), i per la resta de passos de temps es necessiten condicions de contorn.

**2.7.1 Condicions de contorn pel flux CFC.** Si s'utilitzen les variables adimensionades, el domini de càlcul, que es pot veure en la Figura 1, té com a

longituds adimensionals  $(0,1) \times (0,1) \times (0,1)$ . Així mateix, les condicions de contorn aplicades a les variables de càlcul, als límits del domini, són:

- Parets immòbils: 
$$\begin{aligned} u(0,y,z)=v(0,y,z)=w(0,y,z)=0 \\ u(1,y,z)=v(1,y,z)=w(1,y,z)=0 \\ u(x,0,z)=v(x,0,z)=w(x,0,z)=0 \\ u(x,1,z)=v(x,1,z)=w(x,1,z)=0 \\ u(x,y,0)=v(x,y,0)=w(x,y,0)=0 \end{aligned} \quad (52)$$

- Paret mòbil: 
$$\begin{aligned} u(x,y,1)=1 \\ v(x,y,1)=w(x,y,1)=0 \end{aligned} \quad (53)$$

En el cas de flux turbulent, a més a més, s'han d'especificar les condicions de contorn per les variables turbulentes, que per qualsevol contorn són:

$$\begin{aligned} k(0,y,z)=0 & \quad \partial \varepsilon(0,y,z)/\partial x=0 \\ k(1,y,z)=0 & \quad \partial \varepsilon(1,y,z)/\partial x=0 \\ k(x,0,z)=0 & \quad \partial \varepsilon(x,0,z)/\partial y=0 \\ k(x,1,z)=0 & \quad \partial \varepsilon(x,1,z)/\partial y=0 \\ k(x,y,0)=0 & \quad \partial \varepsilon(x,y,0)/\partial z=0 \\ k(x,y,1)=0 & \quad \partial \varepsilon(x,y,1)/\partial z=0 \end{aligned} \quad (54)$$

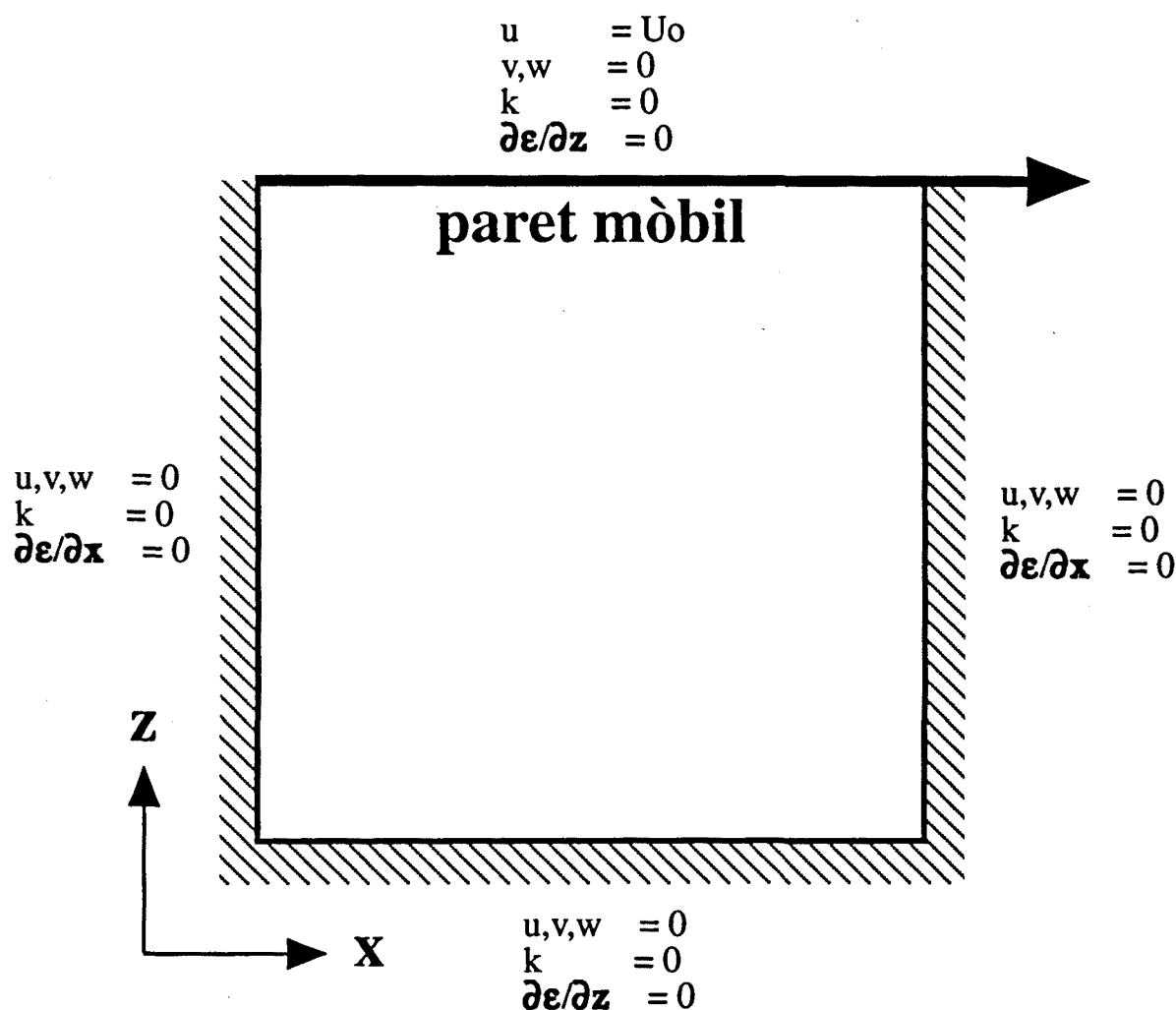


Figura 5. Condicions de contorn aplicades al flux CFC al pla  $y=0.5$

**2.7.2 Condicions de contorn pel flux CNC.** Si s'utilitzen les variables adimensionades, per la velocitat s'aplica la condició de contorn de parets rígides immòbils:

$$\begin{aligned}
 u(0,y,z) &= v(0,y,z) = w(0,y,z) = 0 \\
 u(1,y,z) &= v(1,y,z) = w(1,y,z) = 0 \\
 u(x,0,z) &= v(x,0,z) = w(x,0,z) = 0 \\
 u(x,1,z) &= v(x,1,z) = w(x,1,z) = 0 \\
 u(x,y,0) &= v(x,y,0) = w(x,y,0) = 0 \\
 u(x,y,1) &= v(x,y,1) = w(x,y,1) = 0
 \end{aligned} \tag{55}$$

i per la temperatura s'apliquen dues condicions de contorn diferents, una de Dirichlet pel cas de parets a temperatura fixada, i una altra de tipus Neumann per parets adiabàtiques:

- Paret calenta:  $T(0,y,z) = T_c$  (56)

- Paret freda:  $T(1,y,z) = T_f$  (57)

- Parets adiabàtiques:  $\partial T(x,0,z)/\partial y = 0$   
 $\partial T(x,1,z)/\partial y = 0$   
 $\partial T(x,y,0)/\partial z = 0$   
 $\partial T(x,y,1)/\partial z = 0$  (58)

$$\begin{aligned} u,v,w &= 0 \\ \partial T/\partial z &= 0 \\ k &= 0 \\ \partial \epsilon/\partial z &= 0 \end{aligned}$$

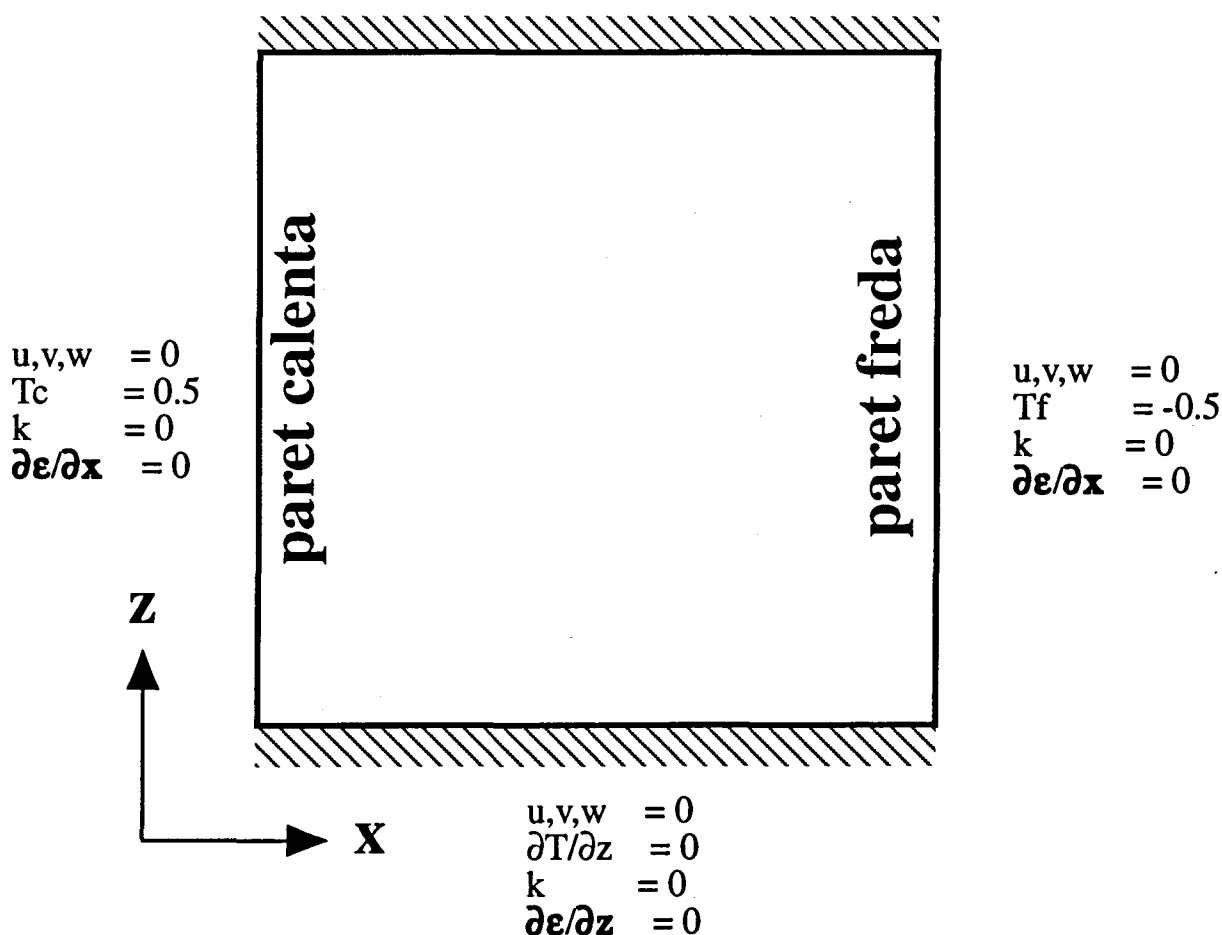


Figura 6. Condicions de contorn aplicades al flux CNC al pla  $y=0.5$

Per últim, i pel cas del flux turbulent, s'empren les mateixes condicions de contorn (54) per  $k$  i  $\epsilon$ , que les utilitzades en el flux CFC turbulent (Figura 6).

## 2.8 Definició de la transferència de calor

Des del punt de vista enginyeril la convecció natural és un mecanisme de transferència de calor. Aquesta es pot caracteritzar a través del nombre de Nusselt, que representa la relació entre la transferència tèrmica per convecció i per conducció, raó per la qual s'utilitza per donar un ordre de magnitud de la no linialitat de la resistència tèrmica d'un flux, oblidant la seva complexitat.

Si es defineix el flux de calor adimensional com

$$\tilde{q}_i = - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_i} + \tilde{u}_i \tilde{T} \quad (59)$$

es pot trobar el flux mig que travessa la superfície  $S$

$$Q_s = \frac{1}{S} \int_s \left( - \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_i} + \tilde{u}_i \tilde{T} \right) \vec{n} ds \quad (60)$$

En aquest treball la geometria és cartesiana, i només interessa l'estudi de la transferència de calor en les superfícies paral.leles o perpendiculars a les parets amb temperatura fixada. Donades aquestes premises el flux mig adimensional que travessa una superfície a  $x=cte$  és:

$$Q(x) = \frac{1}{L_y L_z} \int_0^{L_y} \int_0^{L_z} \left( - \frac{\partial T}{\partial x} + uT \right) dydz \quad (61)$$

A les parets isotèrmiques es pot definir el nombre de Nusselt com:

$$Nu_c = Q(0), Nu_f = Q(1) \quad (62)$$

# 3

---

# PROCEDIMENT NUMÈRIC

## 3.1 Introducció

En formular els diferents sistemes d'equacions diferencials en derivades parcials (PDE's, "Partial Differential Equations") que regeixen l'evolució en el temps i a l'espai de les diverses variables, hom troba el problema de resoldre-les per unes condicions inicials i de contorn donades. Com la solució analítica d'aquestes equacions no és factible, cal utilitzar els mètodes numèrics com l'única possibilitat de trobar una solució.

Hom pot assenyalar com els principals problemes, a l'hora d'establir el model numèric, la forta no linealitat dels termes convectius, l'acoblament dels camps (velocitat, pressió, temperatura, energia cinètica turbulenta i la dissipació de l'energia cinètica turbulenta), l'elecció de l'esquema d'evolució temporal adient i la resolució dels sistemes d'equacions algebraics resultants de la discretització espai-temporal, de la manera més òptima tant en recursos de CPU com de memòria central.

A més a més, les dificultats numèriques pels codis bidimensionals s'amplifiquen enormement en el cas dels codis tridimensionals. Així, el temps de CPU necessari per arribar a la solució es fa prou gran per justificar l'ús de superordinadors. Si es vol minimitzar el consum de temps d'ordinador, és necessari aplicar als codis les tècniques de vectorització, paral·lelització i optimització; tècniques no òbvies i que, certament requereixen una certa experiència.

Com a tall d'exemple, la memòria central requerida pel programa *3dynamic* i per un càlcul tridimensional i en una xarxa de  $61 \times 61 \times 61$  (226981 punts de càlcul) és de 64 Mb de memòria central.

### 3.2 Discretització de les equacions per volums de control

La metodologia d'aproximació de les equacions de transport és del tipus volums de control. Aquest procediment de discretització de les equacions diferencials es basa en la seva integració sobre volums elementals definits en cada punt de xarxa, tot considerant que les variables i els seus gradients són constants dins d'aquest volum de control (veure Braza, 1981). Un dels avantatges més notoris d'aquest procediment és que la conservació de les diferents variables (matèria, energia, quantitat de moviment, etc) es satisfà exactament en tot el domini independentment del nombre de punts de xarxa en el que s'hagi discretitzat el domini de càlcul.

Patankar (1980) establí les quatre regles que ha d'acomplir una discretització per volums de control per tal que sigui estable numèricament. Són:

- i) Consistència dels fluxos que creuen les cares dels volums de control.
- ii) Tots els coeficients de les variables han d'ésser positius.
- iii) El pendent del terme font linialitzat ha d'ésser negatiu.
- iv) El coeficient d'un punt ha d'ésser igual a la suma dels coeficients dels punt veïns.

Per trobar les expressions discretitzades de les equacions de transport amb el mètode dels volums finits, s'ha d'integrar l'equació diferencial en un volum diferencial de control (Figura 7).

Per la variable  $\phi$  la forma general de l'equació de transport és

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial(u_j \phi)}{\partial x_j} = S_\phi + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \quad (63)$$

Si s'integra en un volum de control  $\mathcal{V}$

$$\iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial(u_j \phi)}{\partial x_j} d\mathcal{V} = \iiint_{\mathcal{V}} S_\phi d\mathcal{V} + \iiint_{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) d\mathcal{V} \quad (64)$$

Emprant el teorema de la divergència i tenint en compte que el terme temporal  $\frac{\partial \phi}{\partial t}$  i el font  $S_\phi$  són constants a l'interior de  $\mathcal{V}$ , hom arriba a la forma que permetrà l'obtenció de les equacions algebraïques discretitzades

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} \mathcal{V} + \iint_s u_j \phi ds = S_\phi \mathcal{V} + \iint_s \Gamma_\phi \frac{\partial \phi}{\partial x_i} ds \quad (65)$$



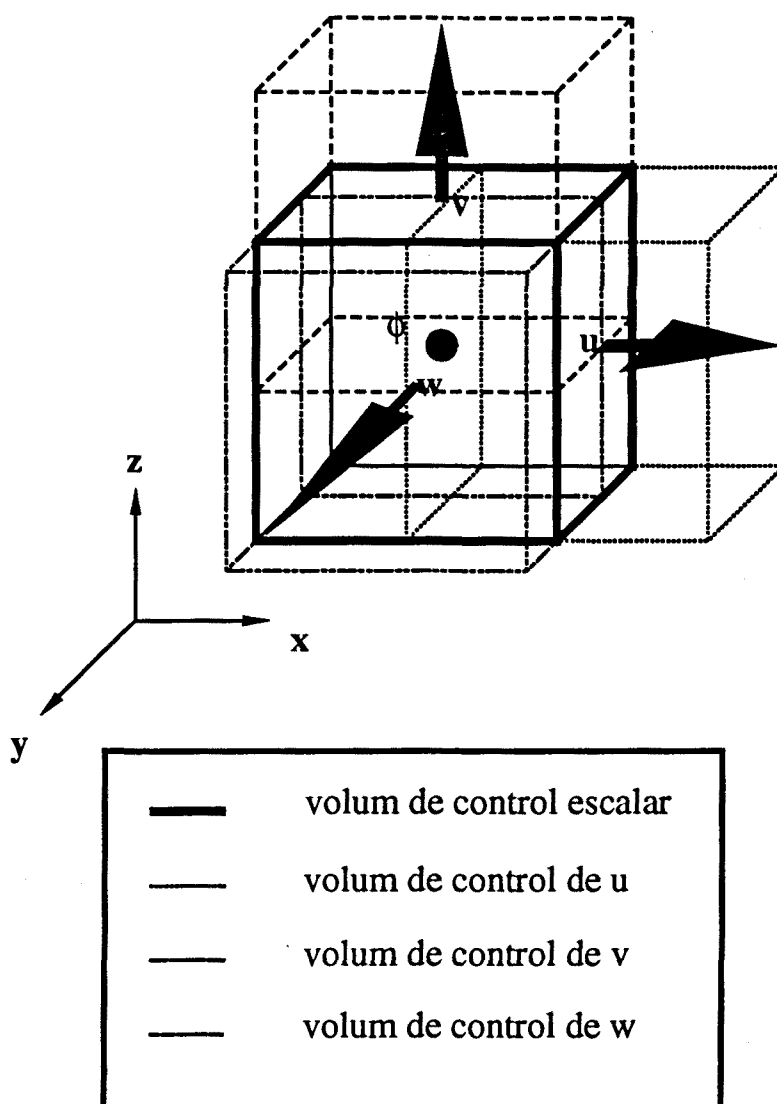


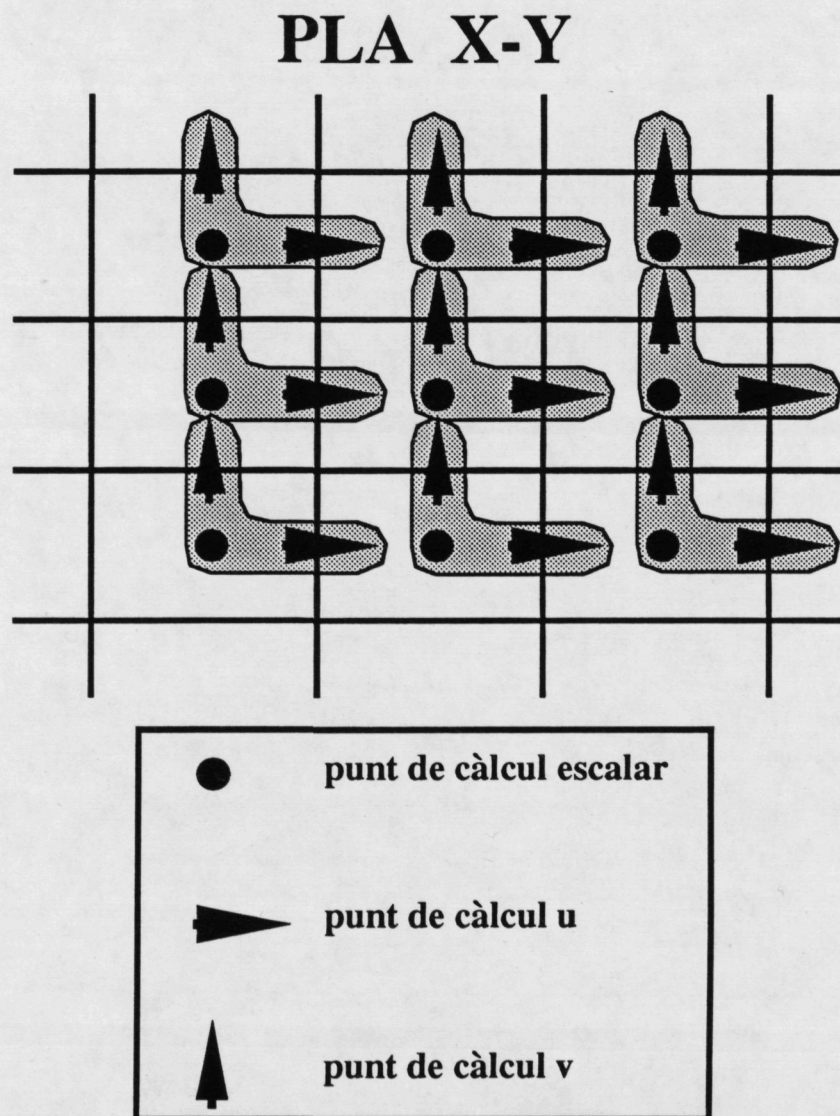
Figura 7. Xarxa decalada tridimensional

### 3.3 Descripció de les xarxes de càlcul

Per fer la discretització espacial de les equacions s'empra una xarxa decalada. Aquest tipus de xarxes van esser introduïdes per primer cop per Harlow i Welch (1965) en el mètode MAC.

Les xarxes decalades es poden establir de diferents maneres (Shih, 1989), en el nostre cas hi ha una xarxa comuna per totes les variables escalars ( $P$ ,  $T$ ,  $k$  i  $\epsilon$ ), en canvi el càlcul de la component  $u$  de la velocitat es fa en punts desplaçats mitja cel.la cap a la direcció positiva de les  $x$ , la component  $v$  en punts

desplaçats mitja cel.la en la direcció positiva de les  $y$ , i per últim la component  $w$  en punts desplaçats mitja cel.la en la direcció positiva de les  $z$ ; tal com es mostra a les figures 7 i 8.



**Figura 8.** Projectió de la xarxa (forma de "boomerang" cap endavant) tridimensional a un pla  $x$ - $y$

L'avantatge principal de l'ús d'aquestes xarxes és que les velocitats resten localitzades just al contorn del domini, i per tant, no fa falta recórrer a la

interpolació per tal d'aplicar les condicions de contorn. També, a l'emprar xarxes decalades hom evita arribar a solucions del camp de pressions que no tenen sentit físic (valors alternats repetits), tal com es descriu per Patankar (1980).

Una altra característica de les xarxes emprades en aquest treball és que aquestes són no uniformes quan els números de  $Re$  o  $Ra$  són suficientment grans, per incrementar el nombre de punts propers a les parets. Un cas típic que necessita l'ús de xarxes no uniformes és la CNC a  $Ra$  superiors a  $10^6$ , ja que a prop de les parets els gradients de les variables són forts, mentre que hi ha un gran nucli central on els gradients són molt petits. Raó per la qual és preferible la utilització de molts punts de càlcul en les zones properes a les parets i un nombre petit en el nucli.

Per tal de calcular la localització dels nodes de les xarxes no uniformes s'ha utilitzat una progressió geomètrica entre els espais successius, de tal manera que

$$\Delta x_i = r \Delta x_{i-1} \quad (66)$$

essent  $r$  la raó de la progressió geomètrica i prenent valors  $1 \leq r \leq 1.2$ . El fet de no superar, per la raó, el valor de 1.2 evita les inestabilitats numèriques que presenten les xarxes molt escarpades.

### **3.4 Tractament dels termes convectius. Estabilitat i difusivitat numèrica.**

Dos problemes s'han de solucionar quan hom du a terme la discretització dels termes convectius de les equacions de transport. Per una banda l'estabilitat de l'esquema escollit, i per l'altra l'error que hom comet en l'aproximació numèrica.

És ampliament conegut que la utilització d'una aproximació centrada de segon ordre pel terme convectiu produeix inestabilitats, i aquestes es manifesten quan el número  $Pe$  de cel.la supera el valor de dos. Com a conseqüència, es pot produir l'efecte no desitjat de la divergència en la solució numèrica. Per tal de solucionar aquest problema es desenvoluparen els esquemes anomenats

"upwind". Tanmateix hom coneix que produeixen una falsa viscositat numèrica pel fet de posseir només un primer ordre d'aproximació per la derivada (veure de Vahl Davis, 1976). Aquest efecte negatiu es fa més evident en el cas de fluxos a  $Re$  elevats, en els que el pes del terme convectiu és molt més gran que la difusió física. Per tant, seria molt més desitjable emprar un ordre d'aproximació més gran pels termes convectius i com a conseqüència minimitzar la viscositat numèrica.

Un esquema "upwind" més precís, que l'estàndard de primer ordre, fou l'anomenat SUDS ("Skew-Upwind-Differencing Scheme") de Raithby (1974, 1976, 1984). Aquest autor argumentà que, en les regions del fluid on els mecanismes de difusió i convecció són comparables, es pot utilitzar una combinació de l'esquema centrat i "upwind", l'anomenat esquema "hybrid".

Fou Leonard (1979) qui introduí l'esquema QUICK ("Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics") com a una alternativa més precisa que l'"upwind". Aquest posseeix la mateixa precisió que l'esquema centrat, però, a diferència d'aquest, també té teòricament l'estabilitat de l'esquema "upwind". Aquest mateix autor extengué l'esquema QUICK a la discretització per volums finits, metodologia que requereix, a l'integrar les equacions diferencials en els volums de control, l'evaluació dels fluxos que travessen les cares del volum (veure figura 9). A l'annex C està especificat com es troben les expressions en el cas d'un esquema de discretització de volums finits.

Leschziner (1980, 1981) comparà tres mètodes: l'estàndard híbrid, el SUDS, i el QUICK. Arribà a la conclusió de què el primer té un efecte de difusió artificial que pot ésser significant en les regions de número de  $Pe$  alt.

Han (1981) comparà els esquemes "hybrid" i QUICK en règims laminar i turbulent pels fluxos bidimensionals de l'expansió sobtada i la convecció forçada en una cavitat, arribant a la conclusió de què l'esquema QUICK és més precís que l'"hybrid" però també té l'inconvenient de què no és incondicionalment estable.

Freitas (1985) i Perng (1989) presentaren sengles versions modificades de l'esquema QUICK per xarxes no uniformes. Aquest últim agrupa els diferents termes de tal manera que aconsegueixin la regla de què tots els coeficients han d'ésser positius. Una altra aportació d'aquests dos autors és el tractament dels

punts de contorn per tenir en compte la metodologia QUICK. D'aquesta manera quan l'esquema QUICK s'aplica a les cel.les de contorn pot succeir que la variable  $\phi_{i-2}$  (paret aigües avall) o el punt  $\phi_{i+2}$  (paret aigües amunt) no estiguin definides. Per tal de solucionar aquest problema s'ha de recórrer a l'extrapolació, i tant Freitas com Perng recomanen l'extrapolació de segon ordre, amb la que

$$\begin{aligned}\phi_{i-2} &= 2\phi_{i-1} - \phi_i \\ \phi_{i+2} &= 2\phi_{i+1} - \phi_i\end{aligned}\tag{67}$$

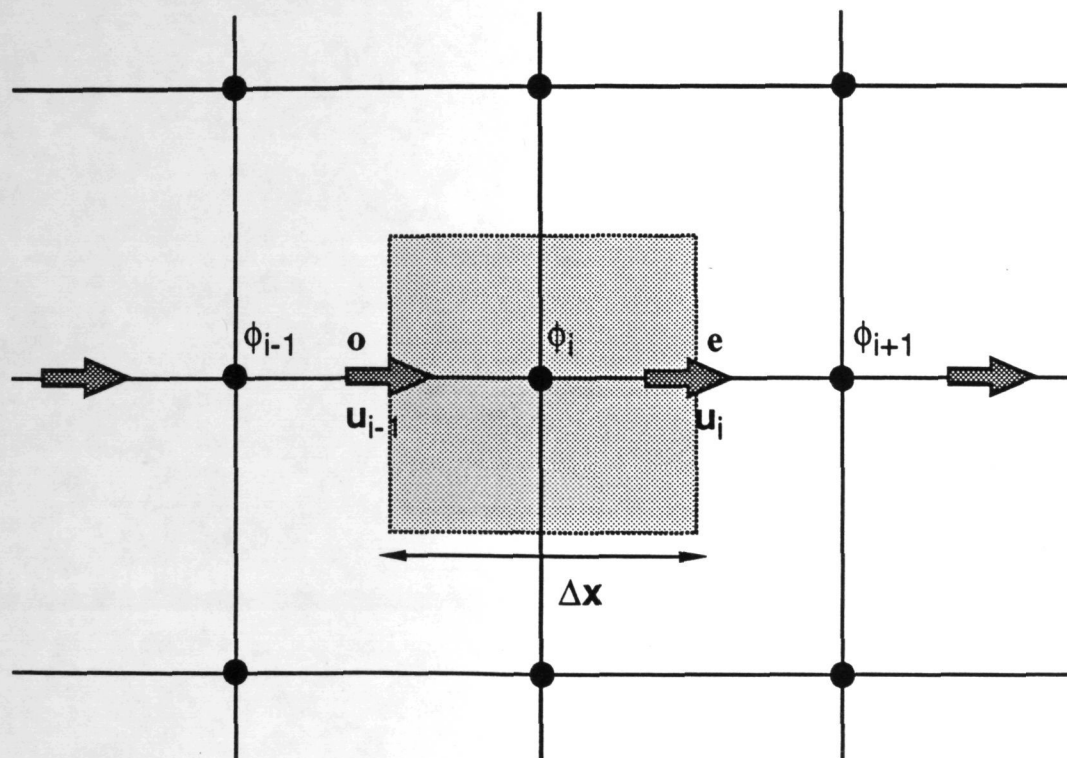
Altres versions modificades de l'esquema QUICK foren les presentades per Zhu (1988, 1991) i Perng (1991). El primer proposà els mètodes LODA ("Local Oscillation-Damping Algorithm") i SOUCUP, que bàsicament consistiren en introduir implícitament i local un esquema "upwind" en el moment que l'esquema QUICK produeix oscil.lacions; es a dir es combinen els tres esquemes de discretització: SOU ("Second-Order Upwind"), CD ("Central differencing") i FOU ("First-Order Upwind").

Un altre estudi comparatiu fou el de Tsui (1991), que analitzà tres esquemes convectius: l'"upwind", el LUD ("Linear upwind difference") i el QUICK. Recomanà l'esquema LUD perquè representa el millor compromís entre els efectes de la difusió numèrica i les oscil.lacions. També Brandt (1991) assenyalà que, inclús en els problemes més bàsics que tenen solució analítica, l'esquema "upwind" dóna grans errors.

Hayase (1992) reformulà l'esquema QUICK de manera que fos consistent amb les quatre regles exposades per Patankar (1980) i que assegurin una convergència estable dels codis discretitzats en volums finits. A més, afegí una cinquena regla consistent en un requeriment adicional en la suma dels coeficients dels punts veïns al de càlcul.

Les darreres aportacions sobre aquest tema són les de Johnson (1992) i Norén (1992) que estudiaren diverses versions de l'esquema QUICK aplicades a diferents geometries.

**XARXA REGULAR DECALADA**



<b>Centrat</b>	
$\phi_e = (\phi_{i+1} + \phi_i)/2$	
<b>Upwind</b>	
$\phi_e = \phi_{i+1}$	$u_i < 0$
$\phi_e = \phi_i$	$u_i > 0$
<b>Hybrid</b>	
$\phi_e = (\phi_{i+1} + \phi_i)/2$	$-2 < P_e < 2$
$\phi_e = \phi_{i+1}$	$P_e < -2$
$\phi_e = \phi_i$	$P_e > 2$
<b>QUICK</b>	
$\phi_e = (\phi_{i+1} + \phi_i)/2$	$-2 < P_e < 2$
$\phi_e = (\phi_{i+1} + \phi_i)/2 - (\phi_i + \phi_{i+2} - 2\phi_{i+1})/8$	$P_e < -2$
$\phi_e = (\phi_{i+1} + \phi_i)/2 - (\phi_{i-1} + \phi_{i+1} - 2\phi_i)/8$	$P_e > 2$

**Figura 9.** Diferents esquemes de discretització del terme convectiu per xarxes uniformes

### 3.5 Resolució de l'equació de la pressió

Per tal d'obtenir un camp de velocitats que satisfaci la conservació de matèria s'ha de resoldre en cada pas de temps l'equació de Poisson (23). La solució d'aquesta equació es pot obtenir per diferents mètodes numèrics com són: Jacobi, Gauss-Seidel, SOR, ADI, FFT (Fast Fourier Transform), mètodes espectrals i mètodes d'optimització de gradient. També la solució es podria obtenir per una inversió directa de la matriu, però aquesta metodologia no iterativa s'ha desestimat perquè els requeriments de memòria necessaris superen àmpliament 1 Gbyte de memòria central pel cas de xarxes amb pocs punts, i aquests recursos sobrepassen els que tenen els supercomputadors més potents del món.

En aquest treball, primerament es va desenvolupar la resolució de l'equació de Poisson mitjançant una pseudo-evolució temporal i amb el mètode ADI, tal com ho va fer Cazalbou (1983). Però, es va trobar que la convergència de la solució depenia fortament del pas de pseudo-temps escollit i que pel cas de fluxos tridimensionals era molt lenta. Aquest problema de l'existència de paràmetres per ajustar, que també el tenen els mètodes SOR i espectrals, no el poseeix el mètode CGM ("Conjugate Gradient Method"), i és per això i la seva rapidesa que fou el mètode escollit com el millor.

**3.5.1 ADI pseudo-temporal.** Si hom introdueix un terme fictici temporal a l'equació (23) de les correccions de la pressió (Braza, 1986)

$$\frac{\partial \Phi_k}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x_i \partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \quad (68)$$

Aquesta equació integrada en el volum de control escalar es resolta iterativament amb un esquema ADI, molt més ràpid que el mètode SOR, fins que el terme fictici temporal es fa nul. L'inconvenient d'aquest procediment és la dependència crítica de l'elecció del pas  $\Delta \tau$  per arribar a la solució. Trobar l'òptim no és tasca senzilla ja que, com indica Braza (1986), el fet de que les condicions de contorn per aquesta equació siguin de tipus Neumann dificulta notablement la recerca dels valors òptims, tant per mètodes empírics com per la teoria desenvolupada per Wachpress (1964).

### 3.5.2 Mètode del Gradient Conjugat

És una tècnica relativament moderna l'aplicació del Mètode del Gradient Conjugat (MGC) a la resolució de sistemes d'equacions algebraiques generades per discretització d'equacions diferencials en derivades parcials, mitjançant diferències finites, volums finits o mètodes espectrals. Jennings (1978) comparà aquest mètode amb els de relaxació per solucionar grans sistemes d'equacions lineals, caracteritzats per una matriu de coeficients dispersa, simètrica i definida positiva. A més assenyalà com l'avantatge més gran del MGC l'absència d'ajustar "manualment" cap paràmetre, ajust del que depenen críticament en la seva convergència mètodes com el de SOR i ADI.

Un treball important fou el de Koshla (1981), qui demostrà que per la resolució de les equacions de tipus Poisson discretitzades en diferències finites, el Mètode de Gradient Conjugat convergeix cap a la solució molt més ràpid que no pas els mètodes SOR, ADI i SIP ("Strongly Implicit Procedure"). En aquest sentit també incidí Jackson (1985) encara que advertí que si la matriu dels coeficients no és simètrica es necessita un tractament previ de la matriu anomenant preconditionament. Com una aplicació més concreta del MGC està el treball de Schäfer (1991) que aplicà el MGC pel cas de la convecció natural en una caixa tridimensional escalfada per sota.

El Mètode del Gradient Conjugat s'ha aplicat en aquest treball a la resolució de l'equació de les correccions de la pressió

$$\frac{\partial u_i^*}{\partial x_i} = \frac{\partial^2 \Phi_k}{\partial x_i \partial x_i} \quad (69)$$

aquesta amb notació matricial és

$$A \Phi_k = b \quad (70)$$

o inclús de forma més general (Golub, 1989)

$$A \cdot x = b \quad (71)$$



$$\mathbf{A} \in \mathcal{R}^{n \times n} \Leftrightarrow \mathbf{A} = (a_{ij}) = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad a_{ij} \in \mathcal{R}$$

$$\mathbf{x} \in \mathcal{R}^n \Leftrightarrow \mathbf{x} = (x_i) = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad x_i \in \mathcal{R}$$

Si es considera la funció

$$f(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} |\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{b}|^2 \quad (72)$$

aquesta té un mínim que precisament és la solució del sistema lineal  $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ , el que implica que una minimització del tipus de Gradient Conjugat resoldrà aquest sistema d'equacions. La descripció de l'algoritme bàsic que permet trobar el valor de  $\mathbf{x}$  es pot trobar a l'annex A.

Una de les deficiències a solventar del MCG és la disminució notable en la velocitat de convergència cap a la solució, quan la matriu dels coeficients està mal condicionada, és a dir, quan els seus valors propis tenen valors molt diferents. Per tant, la velocitat de convergència del MCG depen de la distribució dels valors propis de la matriu  $\mathbf{A}$ . Van der Vorst (1988) establí aquesta velocitat de convergència en funció del valor propi més petit i més gran ( $\chi_{\min}$ ,  $\chi_{\max}$ ) de la matriu  $\mathbf{A}$ , essent el residu de la iteració  $k$

$$\|\mathbf{r}^{(k)}\| \approx \left(1 - 2\sqrt{\chi_{\min}/\chi_{\max}}\right)^k \|\mathbf{r}^{(0)}\| \quad (73)$$

i la condició de la matriu  $\mathbf{A}$ ,  $k(\mathbf{A})$ ,

$$k(\mathbf{A}) = \chi_{\min} / \chi_{\max} \quad (74)$$

ha d'ésser petita per tenir velocitats ràpides de convergència.

Una manera de millorar la condició de la matriu consisteix en multiplicar aquesta per una altra  $\mathbf{B}^{-1}$  anomenada preconditionador, i solucionar l'equació

$$\mathbf{B}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{b} \quad (75)$$

tenint en compte que la condició  $k(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A})$  ha d'ésser millor que la de  $k(\mathbf{A})$ .

En aquest treball s'ha emprat com a preconditionador l'escalatge simètric (Jennings, 1978). Aquest consisteix en multiplicar la matriu dels coeficients i la dels termes independents, part dreta de l'equació (71), per una matriu diagonal de factors d'escala  $\mathbf{D}$ , de tal manera que els seus elements són

$$\mathbf{D} \in \mathfrak{R}^{n \times n} \Leftrightarrow \mathbf{D} = (d_{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{\sqrt{a_{nn}}} \end{bmatrix} \quad a_{ij} \in \mathfrak{R} \quad (76)$$

Per tant si escalem l'equació (71)

$$(\mathbf{DAD}) \cdot (\mathbf{D}^{-1}\mathbf{x}) = (\mathbf{Db}) \quad (77)$$

i agrupem els termes  $\mathbf{A} = (\mathbf{DAD})$ ;  $\mathbf{b} = \mathbf{Db}$ , s'arriba a una expressió semblant a la (71)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (78)$$

en la que el vector solució és  $\mathbf{x} = \mathbf{D}\mathbf{x}$ . D'aquesta manera la matriu  $\mathbf{A}$  tindrà la unitat com a elements de la diagonal. Una vegada fet aquest escalat es pot utilitzar l'algoritme bàsic del MGC per trobar la solució (Annex B).

Una altra de les particularitats del MGC consisteix en que només és aplicable a matrius simètriques. Si la matriu no és simètrica, com succeeix en el nostre cas quan s'empren xarxes no uniformes, una possible solució es la utilització del Mètode del Gradient Biconjugat (MGB), que consisteix en la multiplicació dels dos termes de l'equació matricial per la trasposta de la matriu  $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A}^T\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{A}^T\mathbf{b} \quad (79)$$

Aquesta metodologia garanteix sempre la convergència de la solució, encara que té diversos inconvenients. La matriu  $\mathbf{A}^T\mathbf{A}$  és simètrica, però la seva

condició  $k(A^T A)$  és l'arrel quadrada de la condició de  $A$ , raó per la qual s'ha d'esperar una velocitat de convergència més lenta. També el cost, en consum de temps de cpu per iteració, d'aquest mètode és més elevat ja que a més s'ha de calcular el producte  $A^T A$  en cadascuna de les iteracions. Aquesta variant de l'algoritme MGC fou emprada per Carriere (1991) pel cas del càlcul de la convecció natural en una capa infinita de fluid i l'algoritme iteratiu es troba especificat a l'annex B.

### 3.6 Esquema temporal

En problemes de discretització temporal hi ha bàsicament dos tipus d'esquemes numèrics. Els primers són els esquemes explícits, on només hi ha una incògnita per equació algebraica discreta, que es pot avaluar en funció d'altres variables conegudes. Si hi ha més d'una incògnita per PDE l'esquema és implícit, i això requereix la solució simultània de diverses equacions algebraiques.

En aquest treball s'ha escollit un mètode implícit per les seves característiques d'estabilitat. El mètode emprat, l'ADI ("Alternating Direction Implicit method"), és semi-implícit ja que, de manera alterna, es fa implícit en cadascuna de les tres direccions de l'espai. Aquest mètode fou introduït per Peaceman (1955) i ha estat ampliament utilitzat per la comunitat científica en un gran nombre d'articles que tracten de la computació en la Mecànica dels Fluids. En quant a l'estabilitat d'aquest esquema temporal, Peyret (1983) afirma que en el cas de què els coeficients convectius i difusius siguin constants l'esquema ADI esdevé incondicionalment estable, però el tipus de condicions de contorn poden destruir aquesta característica.

Si hom considera una equació diferencial en forma general

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \mathcal{L}\phi \quad (80)$$

essent  $\mathcal{L}$  l'operador que conté els coeficients de discretització i que es pot expressar com una suma d'operadors que corresponen a cadascuna de les direccions de l'espai

$$\mathcal{L} = [\mathcal{L}_x + \mathcal{L}_y + \mathcal{L}_z] \quad (80)$$

l'aplicació de l'esquema ADI en la seva forma tridimensional és la següent

$$\begin{aligned}\left(I - \frac{\Delta t}{3} \mathcal{L}_x\right) \phi^{n+1/3} &= \left(I + \frac{\Delta t}{3} \mathcal{L}_y\right) \phi^n + \left(I + \frac{\Delta t}{3} \mathcal{L}_z\right) \phi^n \\ \left(I - \frac{\Delta t}{3} \mathcal{L}_y\right) \phi^{n+2/3} &= \left(I + \frac{\Delta t}{3} \mathcal{L}_x\right) \phi^{n+1/3} + \left(I + \frac{\Delta t}{3} \mathcal{L}_z\right) \phi^{n+1/3} \\ \left(I - \frac{\Delta t}{3} \mathcal{L}_z\right) \phi^{n+1} &= \left(I + \frac{\Delta t}{3} \mathcal{L}_x\right) \phi^{n+2/3} + \left(I + \frac{\Delta t}{3} \mathcal{L}_y\right) \phi^{n+2/3}\end{aligned}\quad (81)$$

Pel cas tridimensional l'esquema ADI es basa en subdividir cada pas de temps en tres subpassos ( $1/3 \Delta t$ ,  $2/3 \Delta t$ ,  $3/3 \Delta t$ ). En cadascun d'aquests es resol les equacions de transport alternant la direcció en la que es prenen implícitament les variables. Així pel primer subpas de temps ( $1/3 \Delta t$ ) les variables són implícites en la direcció  $x$  i explícites en la direcció  $y$  i  $z$ . Pel subpas de temps  $2/3 \Delta t$  la direcció implícita és la  $y$ , i per últim pel subpas  $3/3 \Delta t$  la  $z$  es pren com a direcció implícita.

### 3.7 Tècniques de supercomputació

Hom havia introduït d'antuvi que els requeriments de velocitat de càlcul i memòria dels codis tridimensionals fan necessari l'ús d'ordinadors de gran potència, generalment anomenats superordinadors. Com indica Batlle(1989) no és gens fàcil delimitar quan un ordinador té aquesta categoria, ja que el món de la informàtica està en continua evolució, i un ordinador que fa deu anys es considerava un superordinador té les mateixes, o inclús menys prestacions que les estacions de treball més potents d'avui en dia. Però, hom pot definir un supercomputador com el grup d'ordinadors més potents en un moment donat.

Actualment, i per posar un punt de referència, podem definir el llindar de la supercomputació, i per tant fixar els mínims requeriments que ha de posseir un superordinador, en una velocitat de procés de més de 100 Mflops. Aquesta potència de càlcul només la tenen a Catalunya els ordinadors CRAY YMP-2E 232 i l'IBM 3090/XA 600J del CESCA.

Cal remarcar que una altra característica dels superordinadors és l'existència de dos recursos lligats al "hardware": la vectorització (CPU vectorial) i la paral·lelització (més d'una CPU col·laborant en la mateixa tasca). De l'ús d'aquests recursos i les seves eines de software associades com són: compiladors, analitzadors i mesuradors (de velocitats d'execució, nivells de vectorització i paral·lelització) permetrà l'obtenció del grau màxim d'optimització d'un codi. Raó per la qual Batlle(1989) incideix en que el procés d'optimització d'un codi per la seva execució en un superordinador requereix un bon coneixement de l'arquitectura de la màquina en la que aquest serà executat.

Com els superordinadors que han estat utilitzats majoritàriament en aquest treball són els de la família CRAY YMP, qualsevol referència que es faci, tant al "hardware" com al "software", quedarà sobreentès que es relatiu amb aquest tipus de superordinadors. Així els components bàsics d'aquest superordinador són:

- la secció de comunicacions, que per sistemes de més d'una CPU controla la coordinació entre aquestes,
- la memòria central,
- la secció de control I/O (IOS, "Input/Output Subsystem"), que realitza les operacions d'Entrada/Sortida entre la memòria central i les unitats externes,
- la secció de control d'instruccions, que controla el pas d'instruccions de la memòria a la seva posterior execució, i
- la secció computacional, on es realitzen les operacions aritmètiques i lògiques.

Per sistemes multiprocessador les tres primeres components constitueixen un conjunt de recursos compartits per totes les CPUs.

**3.7.1 Vectorització.** Un procés vectorial es realitza sempre sobre un conjunt de dades ordenat (vector o matriu), de tal manera que s'elimina el temps d'espera de la CPU en l'emissió d'instruccions per tots ells amb l'excepció del primer element del conjunt. En conseqüència l'estalvi de temps

de CPU en un procés vectorial es fa per l'encadenament "chaining" de totes les operacions que es fan sobre els elements de la matriu.

Els processadors vectorials es basen en "pipelines" i aquestes aprofiten els temps de espera de CPU, cosa que no fan els processadors escalars. A tall d'exemple, si s'ha de fer una operació que consumeix  $T$  cicles de rellotge sobre un vector  $V$  de dimensió  $N$  en un processador escalar, el nombre de cicles de rellotge requerits serà  $N \times T$ . Si aquesta operació es fa en un processador vectorial el nombre de cicles de rellotge requerits són  $(N-1)+T$ . Cal remarcar que els cicles de rellotge  $T$  s'utilitzen per inicialitzar el "pipeline", i que a partir d'aquest moment (suposant la situació més ideal) s'obté un resultat d'un element del vector per cicle de rellotge.

No tot el codi d'un programa pot ésser susceptible de vectorització. Només es poden vectoritzar els bucles repetitius i si existeixen diversos bucles aniuats només es pot vectoritzar el més intern. En el cas particular del codi *3dynamic* gairebé tot el codi ha estat vectoritzat, un 90% dels bucles han estat plenament vectoritzats, sobretot els més crítics. Per arribar a aquest percentatge s'ha hagut de retocar el codi, inicialment desenvolupat en un ordinador escalar, essent les variacions més importants:

- en l'algoritme TDMA original s'ha invertit l'ordre dels bucles per tal d'evitar la seva natura recursiva intrínseca,
- en les subrutines de multiplicació de la matriu dels coeficients corresponent a l'equació de les correccions de les pressions s'han suprimit els condicionals "if" dins de bucles aconseguint la plena vectorització,
- en les formulació dels QUICK i "upwind" híbrids s'han desenvolupat versions plenament vectoritzables.

Totes aquestes modificacions han estat possibles a la informació donada pel compilador de Fortran de Cray Research, sobretot a la part d'informació de la vectorització dels bucles.

**3.7.2 Paral·lelització.** Es denomina execució paral·lela quan més d'una operació es realitza per l'ordinador en el mateix temps (simultàniament en el mateix cicle de rellotge) gràcies a que aquest posseeix més d'un processador, o

que un processador té múltiples unitats funcionals (unitats aritmètiques, canals, etc.), o la combinació de les dues. Una falsa visió del procés en paral·lel és suposar que un sistema UNIX (funciona sempre en mode multitasca) realitza simultàniament tots els processos que estan corrent.

La nostra experiència és que el fet de tenir disponibles, per exemple, vuit processadors d'un supercomputador no significa que el codi correrà vuit vegades més ràpid, sinó que depèn d'un nombre elevat de factors; i un dels més importants és el compilador.

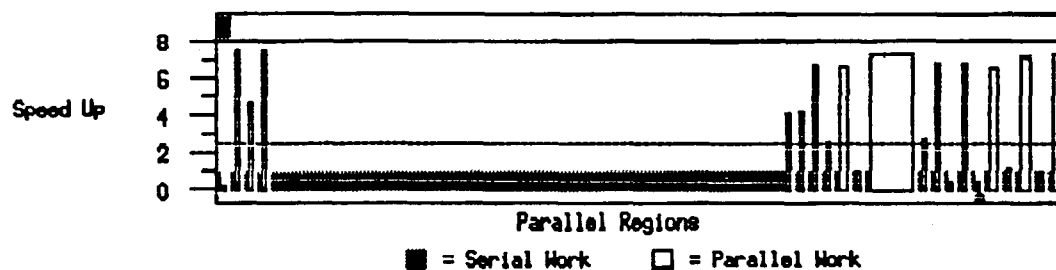
Com exemple del grau de paral·lelització del codi *3dynamic* en les subrutines de càlcul de les velocitats s'utilitza de mitjana sis dels vuit processadors, que dóna aproximadament un 75% de paral·lelisme. Aquesta anàlisi fou feta amb el programa "Autotasking Expert System" de Cray Research (veure figura 10).

**3.7.3 Paràmetres per la millora de la velocitat de càlcul.** El paràmetre més entenedor físicament per mesurar la velocitat de procés d'una CPU és el període o la freqüència del seu rellotge intern. De les dues maneres es pot trobar en les especificacions de l'ordinador, essent més emprat la freqüència pels ordinadors personals, i el període (cicle del rellotge) pels grans "mainframes". El rellotge de l'ordinador és com una mena de cor (o més gràficament el timbal d'una galera de rem) que indica a la CPU el ritme del seu treball i dóna una referència per sincronitzar accions. A mesura que el cicle del rellotge és fa més petit l'ordinador és fa més ràpid.

Independentment del "hardware" l'optimització del "software" esdevé una part crítica per optimitzar un codi. Aquesta es pot assolir (Lazou, 1988) amb els següents elements:

- Recerca d'algoritmes més ràpids.
- Desenvolupament de compiladors de FORTRAN més eficients.
- Utilització d'eines estàtiques i dinàmiques d'anàlisi de programes.
- Substitució d'estructures no vectoritzables per d'altres que sí ho són.

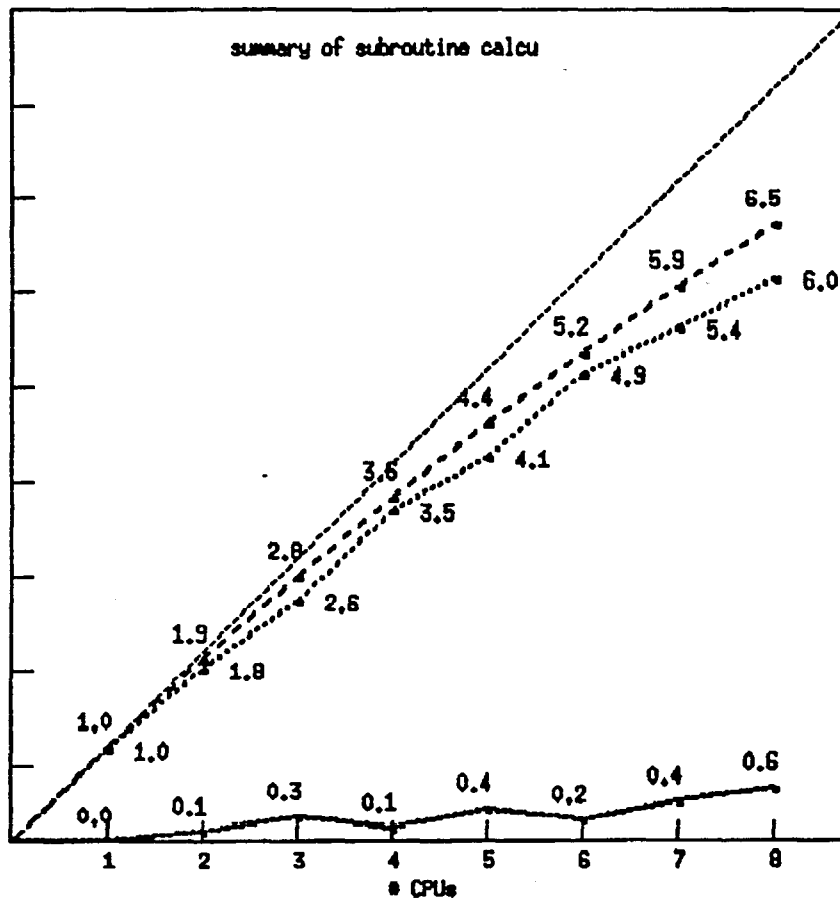
# Autotasking(tm) Expert System



atx.raw

Commands:  
 filename  
 choose loop  
 configure  
 report  
 source file  
 key  
 help  
 QUIT

Plot Lines:  
 - maximum  
 - overhead  
 dedicated  
 next loop



Use 'configure' to change selection.  
 The dedicated line is configured to be on all the time.  
 Only maximum or dedicated can be selected at on time.  
 Use "configure" to change selection.  
 atx.raw: has loops that contain variable work.  
 atx.raw: has loops that contain variable work.

Figura 10. Gràfic del programa "Autotasking Expert System" indicant el nombre de processadors utilitzats vers el nombre de processadors existents per la subrutina del càlcul de la component u de la velocitat



# 4

---

# RESULTATS

## 4.1 Introducció

Aquest capítol presenta els resultats obtinguts pel codi descrit en els capítols precedents. La primera part d'aquest consisteix essencialment en la comprovació de la bondat de l'esquema convectiu amb càlculs bidimensionals laminars de la convecció forçada en una cavitat.

La resta del capítol es dedica a la presentació dels resultats tridimensionals en règim laminar i turbulent per la convecció forçada i natural. Cal remarcar que per validar tots aquests resultats s'han utilitzat els resultats bibliogràfics més referenciats tant en la part experimental com numèrica.

S'ha donat molta importància a la visualització dels resultats. Les característiques tridimensionals dels càlculs realitzats obliguen a una anàlisi gràfica sofisticada per obtenir la visualització de les estructures del flux, similars a les experimentals (traçat de partícules) i inclús amb més detall i amb camps de variables difícilment mesurables amb tècniques experimentals. També s'ha d'afegir que una de les característiques més desitjables de les simulacions numèriques, a diferència dels experiments, és l'elevat nombre de punts de mesura (punts de xarxa). Tot aquest volum de resultats necessiten un post-processament gràfic que compendii totes les dades, de tal manera que en poc temps es tingui una informació detallada de les característiques del flux.

## 4.2 Influència de la xarxa

Un primer test del codi s'ha realitzat en el cas de la convecció forçada en una cavitat bidimensional, tot comparant els esquemes HYBRID i QUICK per

diferents tipus de xarxes. D'aquesta manera es pot establir la influència de la difusió numèrica deguda a la utilització d'un esquema de discretització pels termes convectius de precisió de primer ordre, com és el cas de l'esquema HYBRID.

Els càlculs en una cavitat 2D han estat realitzats seguint el procediment de comprovació efectuat per Hayase (1992). Bàsicament el test de la seva formulació consistí en realitzar els càlculs en xarxes equiespaiades de  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$ ,  $40 \times 40$  i  $80 \times 80$  punts i a tres règims de  $Re$  diferents ( $10^2$ ,  $10^3$ , i  $10^4$ ), establint la comparació entre els resultats obtinguts amb tres esquemes diferents de discretització del terme convectiu: HYBRID, CENTRAL i QUICK.

En el nostre cas s'ha efectuat un test més reduït, consistent en la comparació de dos esquemes de discretització del terme convectiu (HYBRID, QUICK), en tres tipus de xarxa diferent ( $21 \times 21$  uniforme,  $81 \times 81$  uniforme i  $81 \times 81$  no uniforme), i considerant els tres règims de  $Re$  també calculats per Hayase ( $10^2$ ,  $10^3$  i  $10^4$ ). També, com féu Hayase, aquest resultats es comparen als obtinguts per Ghia (1982) en xarxes de  $129 \times 129$  punts per  $Re$  baixos i  $257 \times 257$  pel cas de  $Re$  10000.

Pel cas de  $Re=10^2$ , i tal com es mostra a la Figura 12, tots dos esquemes donen el mateix perfil de velocitats, pel que es pot afirmar que un esquema híbrid amb  $20 \times 20$  punts de xarxa és acurat per aquest règim de  $Re$ .

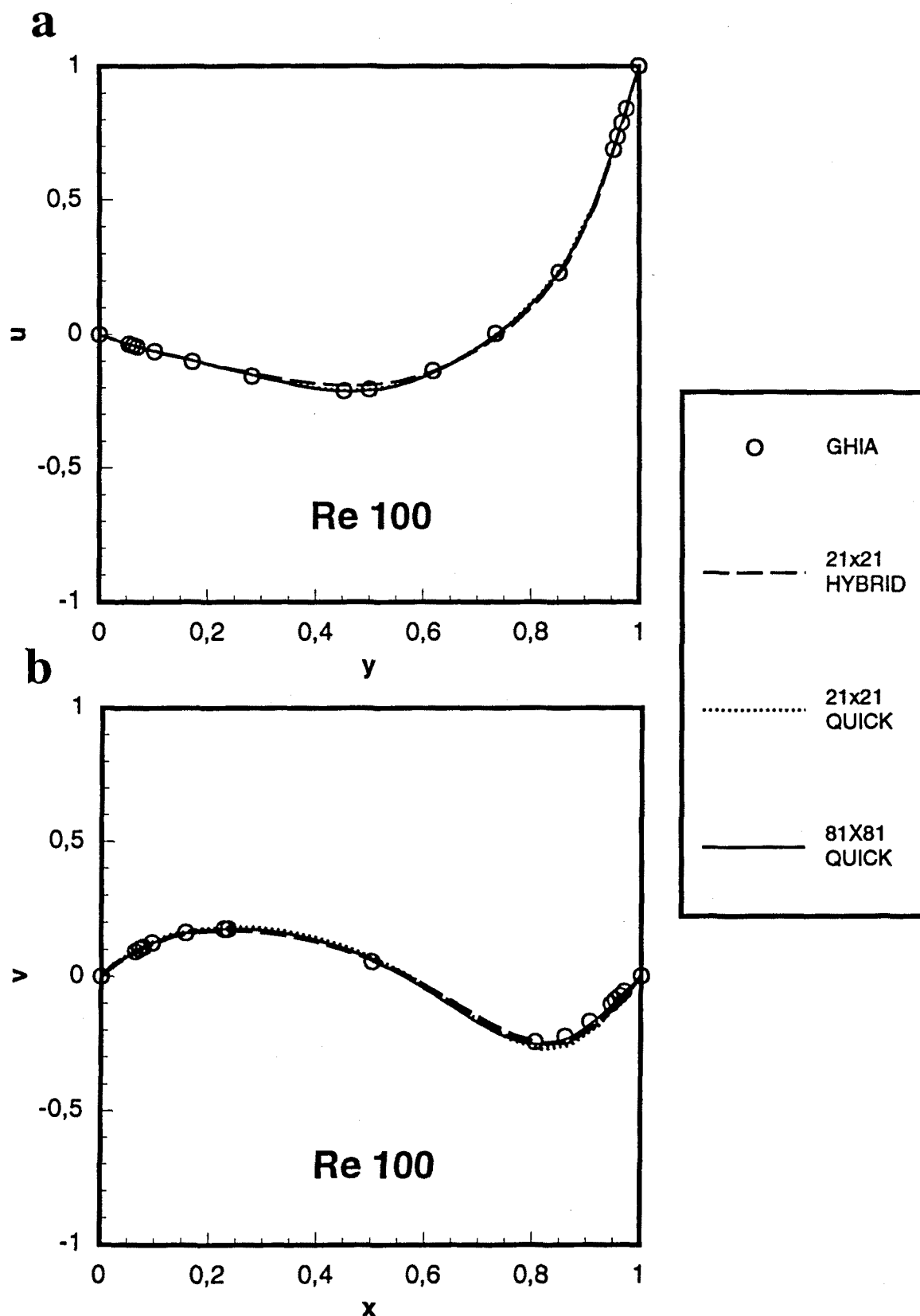
Quan el  $Re$  s'augmenta fins un valor de  $10^3$  (Figura 13) es fan notar les diferències entre un esquema HYBRID i un QUICK, apropant-se més aquest últim als perfils presentats per Ghia (1982). Per aquest  $Re$  es fa notori que es necessiten més de  $20 \times 20$  punts de xarxa per obtenir resultats acurats, raó per la qual els resultats obtinguts amb un esquema QUICK de  $81 \times 81$  punts són els únics que s'ajusten als calculats per Ghia.

Pel cas de  $Re$   $10^4$  (Figura 14) s'accentuen els efectes prèviament observats a  $Re=10^3$ , així és molt més evident la major precisió de l'esquema QUICK respecte al HYBRID. També s'observa que amb  $81 \times 81$  punts d'una xarxa uniforme no s'obté el mateix perfil que el de  $257 \times 257$  punts calculat per Ghia, però canviant la xarxa equiespaiada per una no uniforme que tingui més punts

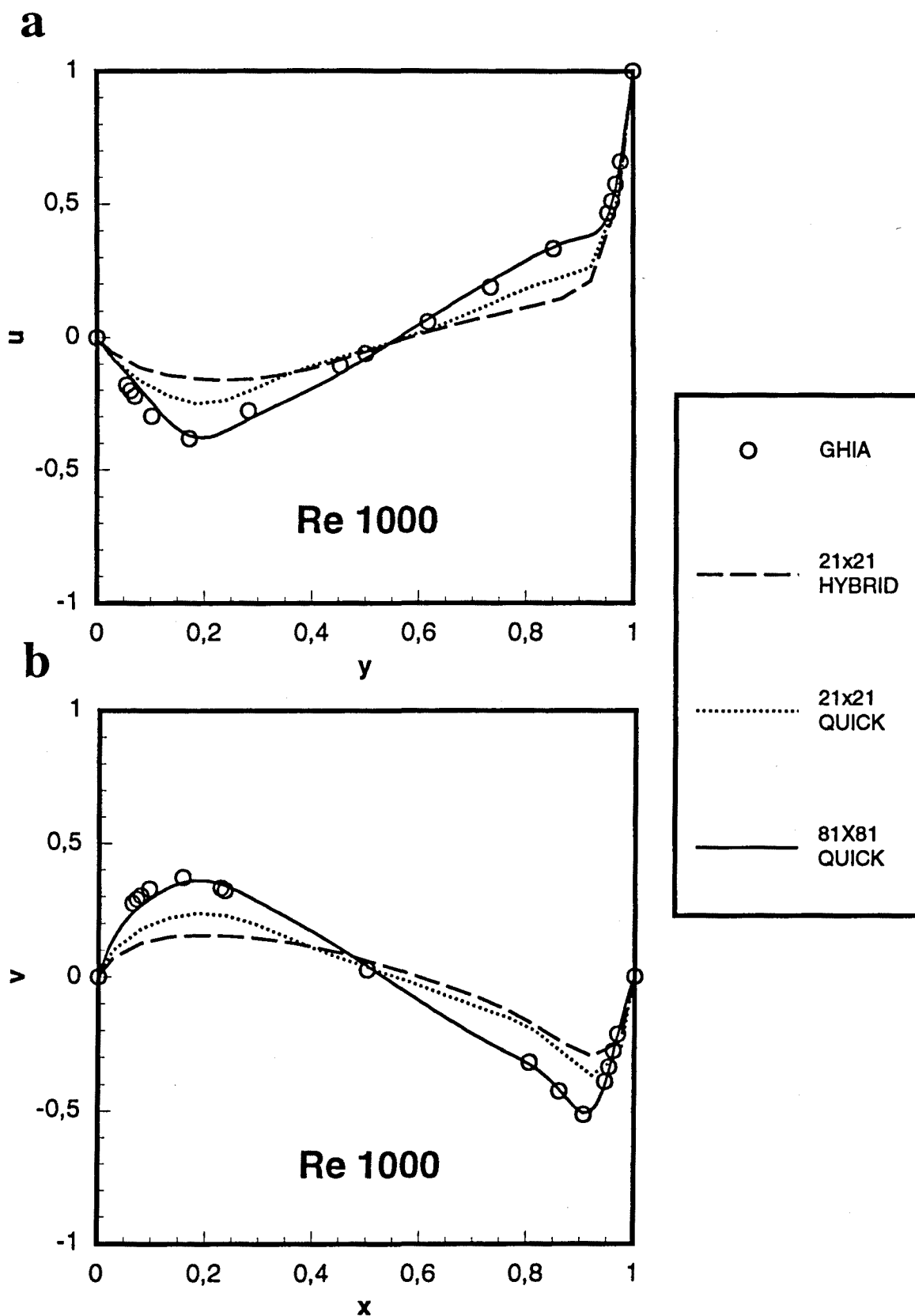
a prop de les parets, s'aconsegueix obtenir els mateixos perfils que els de l'autor de referència.

Com a conclusió hom pot afirmar que es demostra la superioritat de l'esquema QUICK, que amb la combinació de xarxes no uniformes, dóna uns resultats tan acurats com els obtinguts amb xarxes de molts més punts.

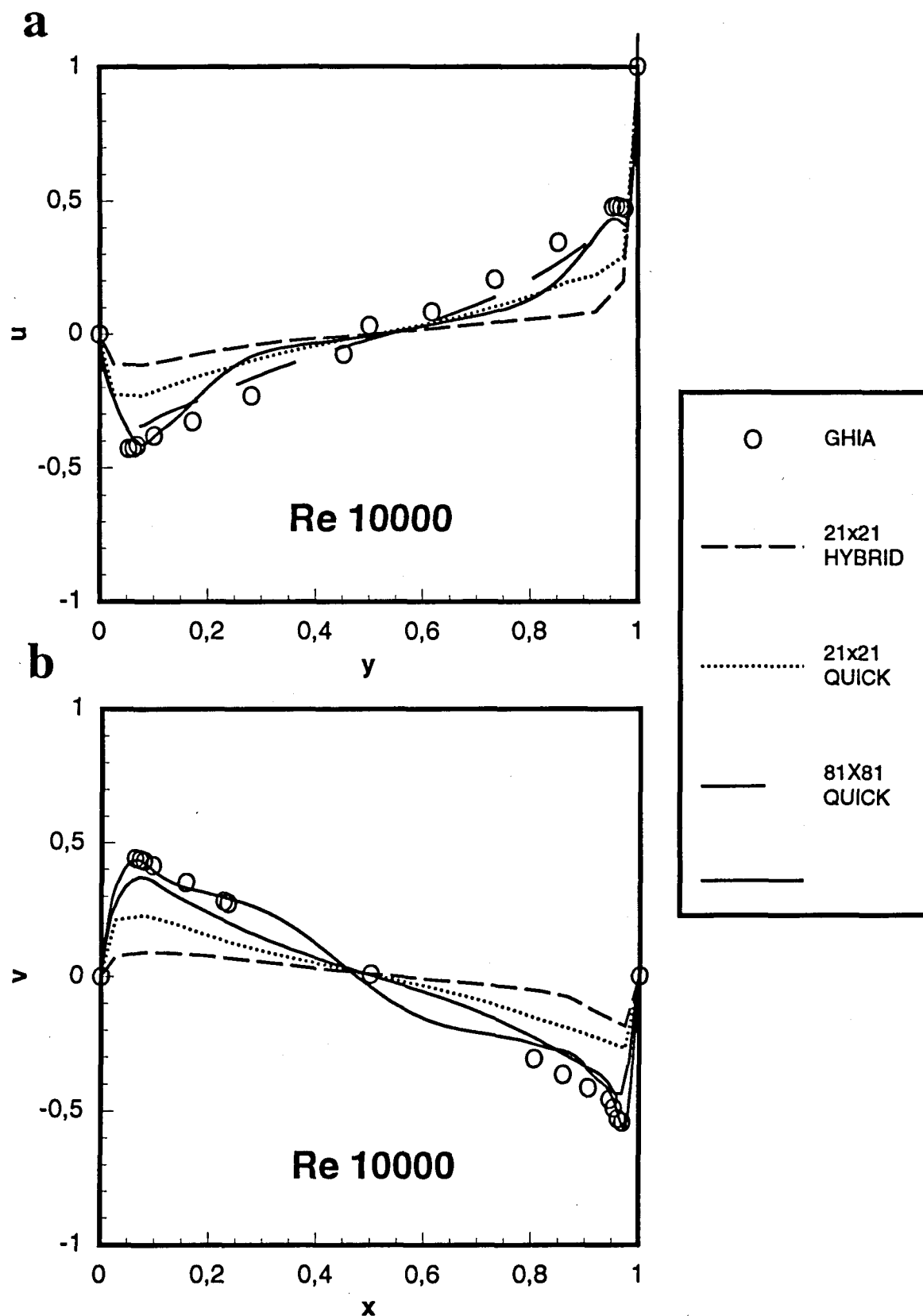
Per tenir una visió més completa de la diferència entre esquemes, en la Figura 15 es mostra un gràfic on es mostren les diferències existents en la distribució de la funció de corrent en el cas de la convecció forçada a  $Re=10^4$ . Pel cas de xarxes de  $21 \times 21$  punts, només es reproduïx qualitativament el vòrtex principal, obtenint-se un valor del mínim del valor de funció de corrent més acurat per l'esquema QUICK (l'obtingut per Ghia és  $\Psi_{\min} = -0.119731$ ). Precisament la posició del punt amb  $\Psi_{\min}$  coincideix amb la posició del centre del vòrtex primari.



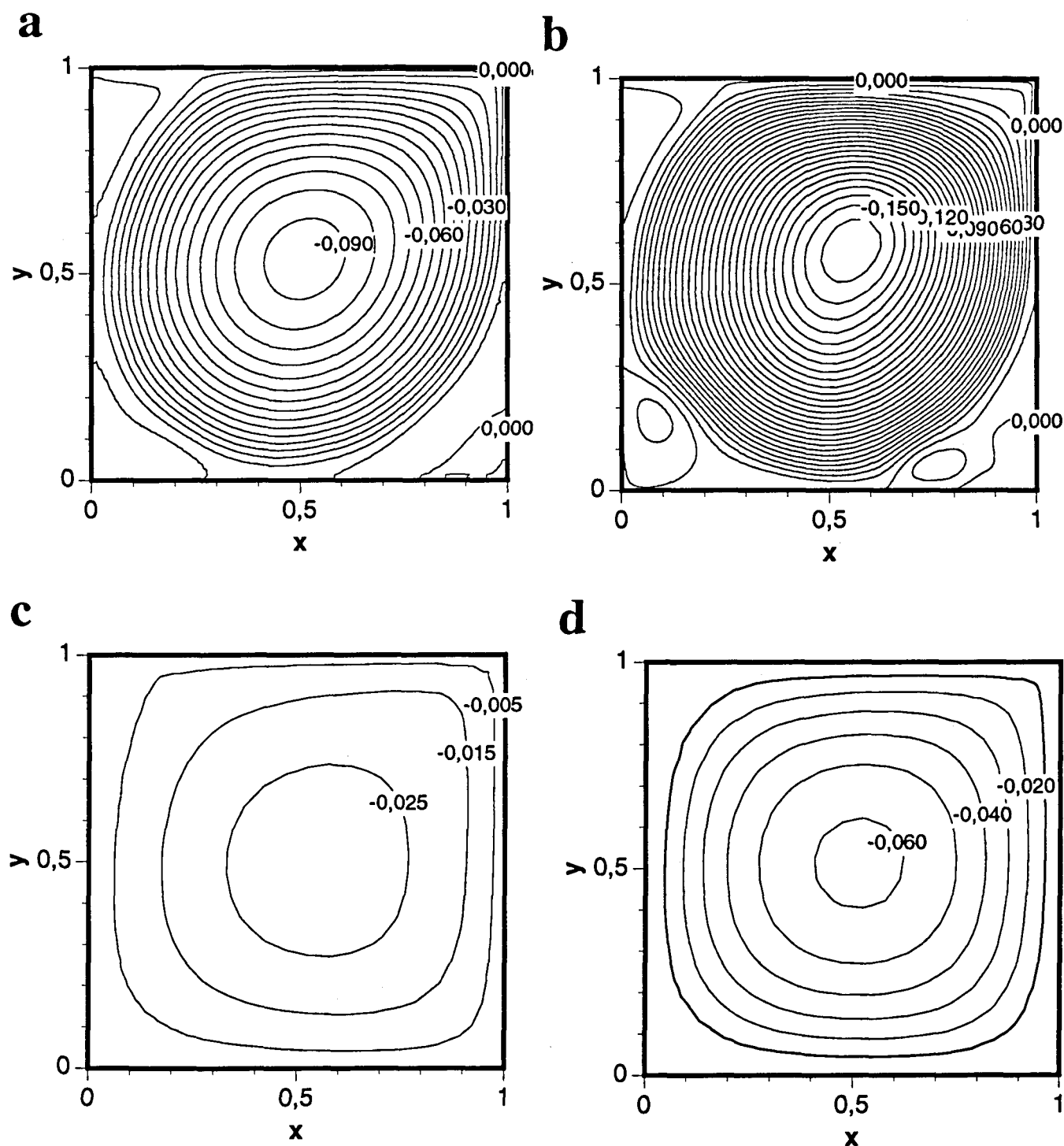
**Figura 12.** Perfils de la component horitzontal de la velocitat ( $u$ ) i vertical ( $v$ ) en les línies vertical ( $y$ ) i horitzontal ( $x$ ) del centre de la cavitat bidimensional a  $Re = 100$ .



**Figura 13.** Perfils de la component horitzontal de la velocitat ( $u$ ) i vertical ( $v$ ) en les línies vertical ( $y$ ) i horitzontal ( $x$ ) del centre de la cavitat bidimensional a  $Re = 1000$ .



**Figura 14.** Perfils de la component horitzontal de la velocitat ( $u$ ) i vertical ( $v$ ) en les línies vertical ( $y$ ) i horitzontal ( $x$ ) del centre de la cavitat bidimensional a  $Re = 10000$ .



**Figura 15.** Funció de corrent calculada en la cavitat bidimensional a  $Re = 10000$ . Es comparen: (a) QUICK en una xarxa no uniforme de  $81 \times 81$  punts, (b) QUICK en una xarxa equiespaïada de  $81 \times 81$  punts, (c) HYBRID en una xarxa equiespaïada de  $21 \times 21$  punts, i (d) QUICK en una xarxa equiespaïada de  $21 \times 21$  punts.

### 4.3 Convecció forçada en règim laminar

En la darrera secció es presentaren els càlculs bidimensionals del flux CFC, en aquesta només es descriuen les simulacions tridimensionals, que essencialment s'obtenen amb el mateix codi amb el que s'han efectuat els càlculs en dues dimensions.

Pels càlculs relatius en aquest apartat s'han utilitzat tres tipus de xarxa. Una de  $41 \times 41 \times 41$  (68921) punts de xarxa, una altra de  $61 \times 61 \times 61$  (226981) punts, i per últim una de  $81 \times 81 \times 81$  (531441) punts. Un esquema de la configuració de la cavitat amb la paret que es mou en el pla  $z = 1$ , i l'eix de coordenades es pot observar en la figura següent

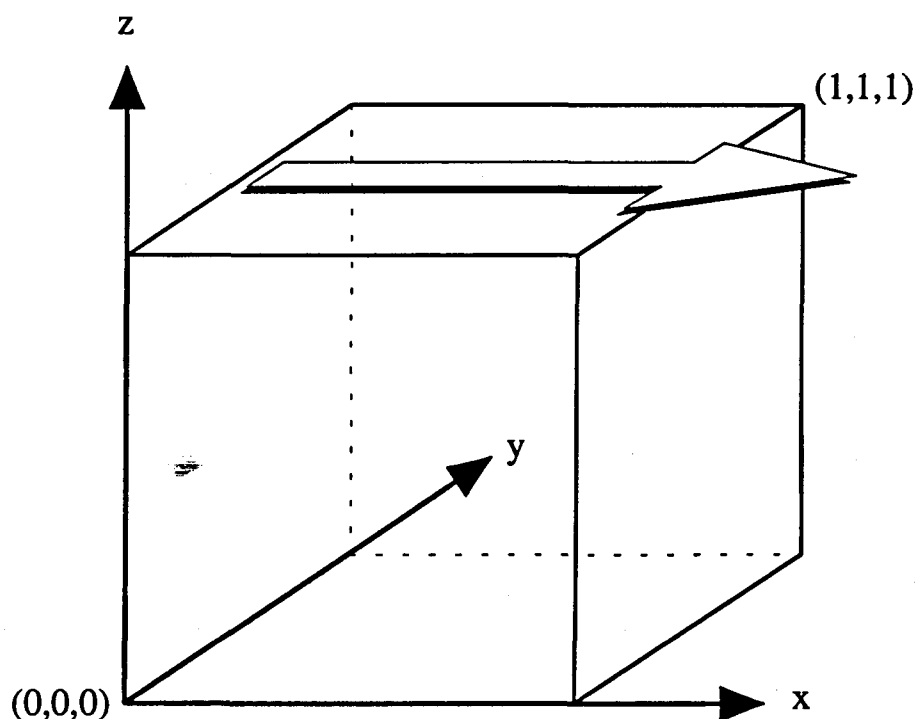


Figura 16. Configuració de la cavitat tridimensional i eix de coordenades



Els resultats per  $Re=100$ ,  $1000$  i  $2000$  es poden trobar en les Figures 18-25. En aquestes figures es presenten els següents gràfics:

- projecció dels vectors velocitat en el pla central de simetria del cub (pla  $y=0.5$ )
- visualització del traçat de cinc partícules
- isosuperfícies del camp de pressions
- isosuperfícies del camp de vorticitat
- perfil de la component horitzontal de la velocitat  $u$  en el pla  $y=0.5$  i en la línia vertical  $z=0.5$
- perfil de la component vertical de la velocitat  $w$  en el pla  $y=0.5$  i en la línia horitzontal  $x=0.5$

El pas típic de temps per les simulacions fou de  $\Delta T=0.1$  i la tolerància establerta en totes les variables per la convergència dels càlculs fou de  $10^{-6}$ . Cal remarcar que s'obteniren solucions estacionàries per tots els casos estudiats. Aquest comportament de flux estacionari fou demostrat per les simulacions obtingudes per Ku (1987) fins un  $Re = 1000$  amb tècniques pseudoespectrals, per Iwatsu (1989, 1990) fins a un  $Re = 2000$ , i amb l'excepció de Jiang (1992) que afirmà no trobar solucions estacionàries per  $Re \geq 400$ .

El temps de CPU consumit en el superordinador Cray YMP-2E 232 varià des de  $1400$  s pel cas de  $Re = 100$ , fins  $32000$  s pel cas de  $Re = 2000$  (totes aquestes dades són pel cas de càlculs en la xarxa de  $41 \times 41 \times 41$  punts).

L'estructura del flux CFC presenta característiques comunes per tots els règims de número de  $Re$  i esquemàticament es pot veure a la Figura 17. Tal com descriu Koseff (1983) en la seva Tesi, el flux CFC es caracteritza per un seguit de estructures que fan que aquest sigui molt complex. En primer lloc hom troba un gran remolí, el remolí principal (RP), que es mou en el sentit del moviment de la paret mòbil, i que pel cas de la geometria prèviament definida (Figura 16) el sentit del moviment és el de les agulles del rellotge. El RP té un centroid més o menys situat al centre de la cavitat dependent del número de  $Re$ .

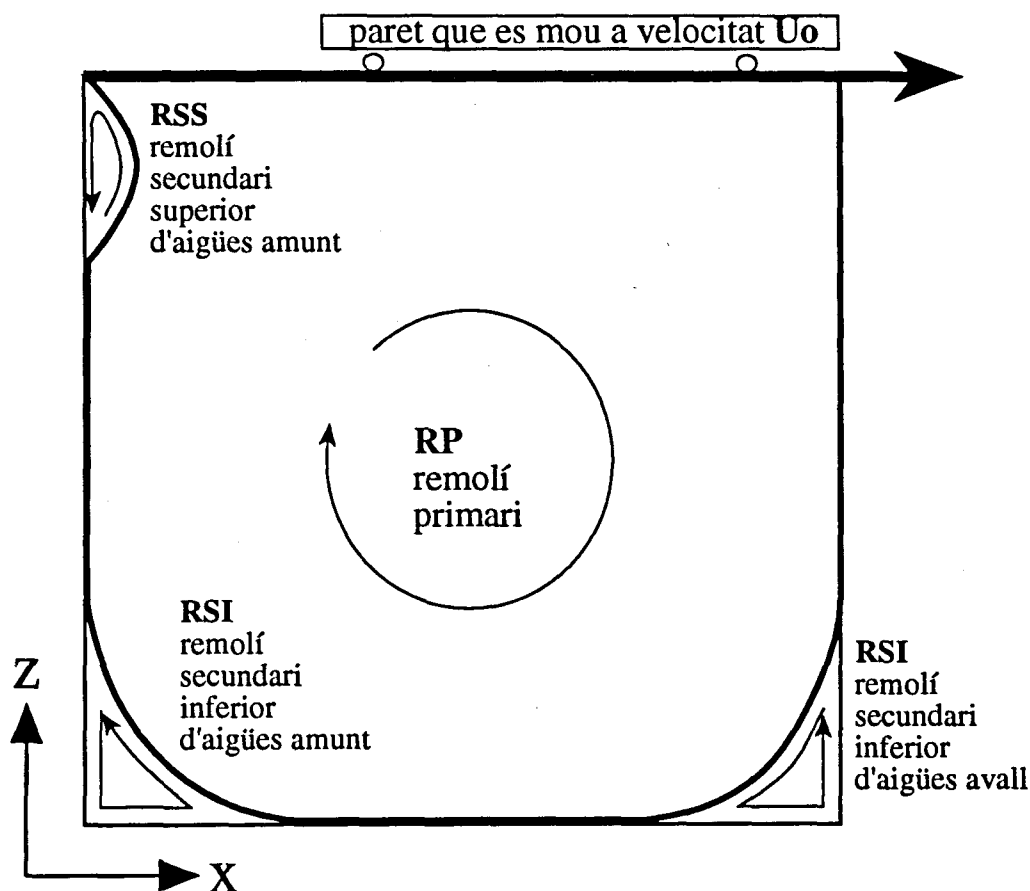


Figura 17. Estructures característiques del flux CFC

En quant a la formació de les estructures secundàries, el flux en la regió propera a la paret mòbil es arrossegat fins a la cantonada superior dreta on es desenvolupa una regió de pressió màxima. El fluid es conduït des de la cantonada cap a la paret vertical d'aigües avall, disminuint la seva velocitat per la fricció amb aquesta paret immòbil, fins arribar a prop de la cantonada inferior d'aigües avall, on el flux es desprén formant el remolí secundari inferior d'aigües avall (RSI avall). El flux torna a enganxar-se en la paret inferior i es dirigeix cap a la cantonada inferior d'aigües amunt. En aquesta cantonada es produeix un fenòmen de separació i enganxament del flux molt semblant al de la cantonada d'aigües avall. Així, també es produeix un remolí, el remolí secundari inferior d'aigües amunt (RSI amunt). Per últim, el fluid

puja paral·lel a la paret d'aigües amunt, i quan el  $Re$  és suficientment gran es forma un tercer remolí secundari, el remolí superior d'aigües amunt (RSS amunt). Aquest darrer remolí presenta la particularitat, a diferència dels altres secundaris, que es separa i enganxa en la mateixa paret.

Observant els perfils de velocitat per  $Re = 100$  i  $1000$ , hom pot concluir que pel cas de  $Re$  baixos l'estructura i perfils del camp dinàmic en el pla de simetria central (pla  $y = 0.5$ ) són gairebé idèntics als obtinguts amb simulacions bidimensionals. A  $Re = 1000$  (Figura 23) es poden observar l'existència de les capes límits properes a la paret, així, tant el perfil de la component  $u$  de la velocitat com la component  $w$ , presenten perfils a prop de les parets molt semblant als característics dels fluxos de capa límit. També s'ha de remarcar que per aquest règim de  $Re$  les diferències entre els perfils dels càlculs bidimensionals i tridimensionals són notòries, del que s'infereix la inadequacitat de les simulacions bidimensionals per tal de descriure el camp dinàmic per règims de  $Re$  alts.

Només comparant els perfils de velocitat de les simulacions 2D i 3D ja es pot veure clarament la tridimensionalitat d'aquest flux, però la manera més visual de comprovar-ho és mitjançant els gràfics 4D. Si hom observa els gràfics corresponents al camp de pressió (Figures 19-a, 22-a, 25-a i 27) s'aprecia clarament la tridimensionalitat del camp, sobre tot en la zona propera a la paret oposada a la paret mòbil. També es pot observar que a l'augmentar el  $Re$  les superfícies isòbares s'acosten més a l'aresta superior d'aigües avall, zona on es troba el màxim de pressió com a conseqüència del xoc de la llengua de fluid d'alta velocitat arrossegat per la paret que es mou. Per tenir una visió més completa de la forma de les isosuperfícies isobàriques a la Figura 27 es presenten dues visions (a,b) tridimensionals del camp de pressió a  $Re 1000$  i la corresponent projecció sobre el pla  $y=0.5$  central de simetria (c).

Les Figures 19-b, 22-b, 25-b i 28 mostren el camp de vorticitat  $|\omega|$ . Aquest camp ens dóna informació sobre les estructures del fluid. Si hom observa la posició del centroid del RP i la disposició de les isosuperfícies de vorticitat a diferents  $Re$  s'evidencia la concordança directa entre el camp dinàmic i el de vorticitat. Així per  $Re=100$  (Figura 19-b) la isosuperfície de  $|\omega|=5$  coincideix amb la zona de flux d'alta velocitat que s'està generant pel fet del moviment de la paret superior. Aquesta isosuperfície és present, i amb una forma semblant,

en els règims de flux  $Re=1000$  i  $2000$ . Pel que fa referència a la resta de les isosuperfícies, a  $Re=100$  totes es situen en la meitat superior de la cavitat i envoltant el centroid del RP. A  $Re=1000$  i  $2000$  el patró de totes les isosuperfícies es molt semblant amb l'única diferència de què a  $Re=2000$  s'observa un màxim de vorticitat en la regió propera a la paret oposada a la mòbil. Aquest màxim de vorticitat es correspon a les estructures denominades "Taylor-Görtler-Like Vortices". Segons Koseff (1983) aquestes estructures es generen per les inestabilitats produïdes per les forces centrífuges de la superfície cóncava de separació del fluid en el RSI d'aigües avall. El mateix autor visualitzà aquestes estructures per un  $Re \geq 2000$ .

Com en el cas del camp de pressions a la Figura 28, es presenten dues visions (a,b) tridimensionals del camp de vorticitat a  $Re 1000$  i la corresponent projecció sobre el pla  $y=0.5$  central de simetria (c).

També es presenta en la Figura 26 un gràfic comparatiu dels perfils de la component horitzontal de la velocitat ( $u$ ) i vertical ( $w$ ) del pla  $y=0.5$  a quatre números de  $Re$  diferents (100, 1000, 2000 i 3200).

# ESTUDI NUMÈRIC DE FLUXOS LAMINARS I TURBULENTS EN UNA CAVITAT CÚBICA

Cdr. Francesc Xavier Grau }  
dir. Francesc Giralt -

Llegido a Facultat de Química

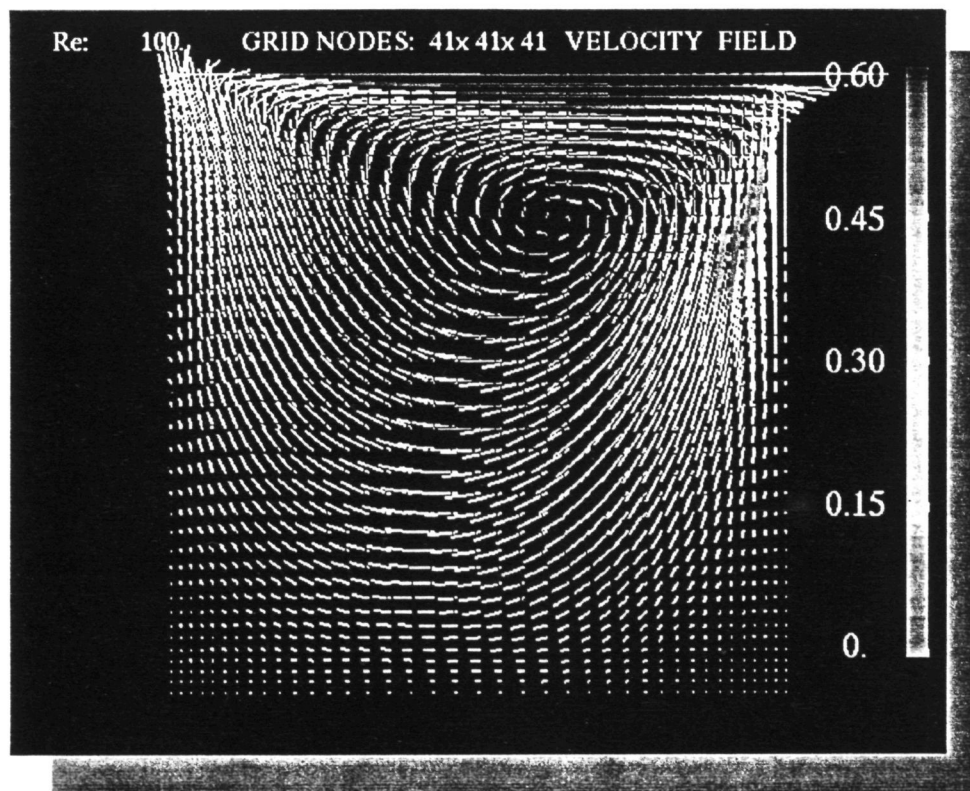
Memòria presentada per en  
**ILDEFONSO CUESTA ROMEO**

per a optar al grau de Doctor en  
Ciències Químiques.

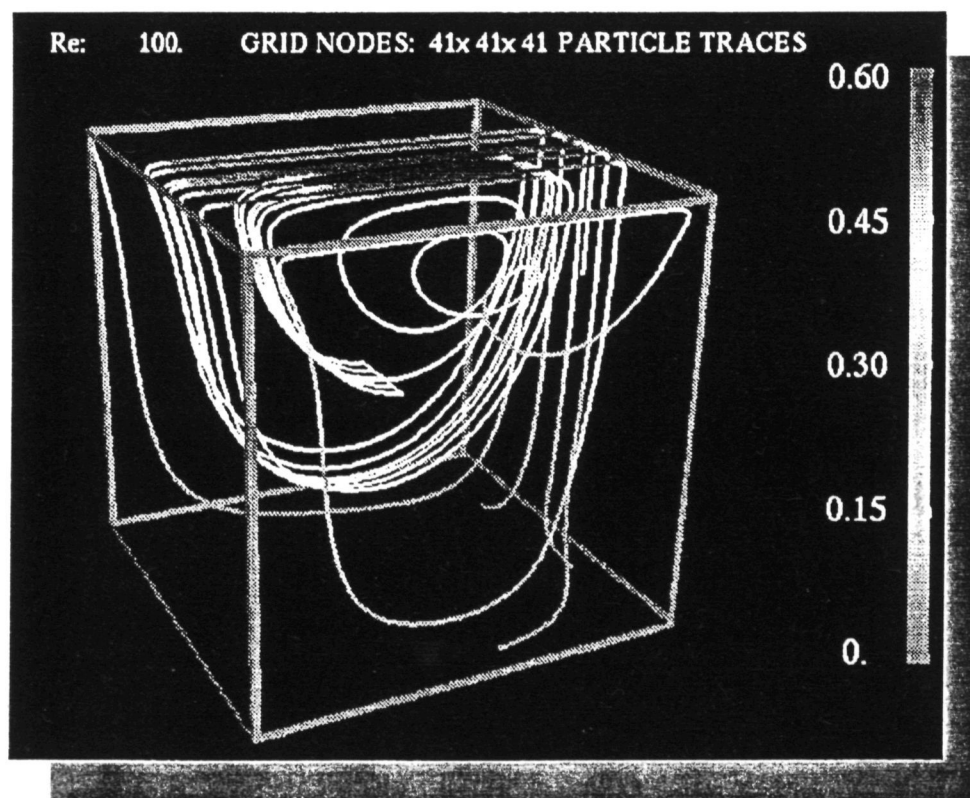
Tarragona, juny de 1993

**Re 100**

**a**



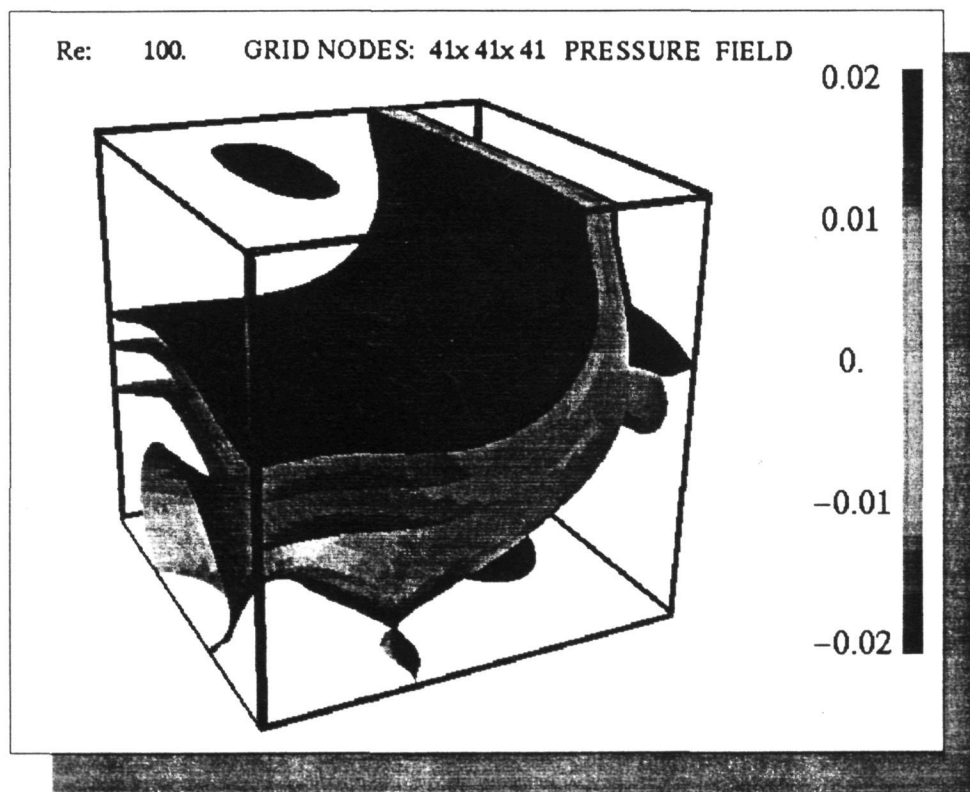
**b**



**Figura 18.** Camp dinàmic: vectors velocitat i traçat de partícules per  $Re=100$

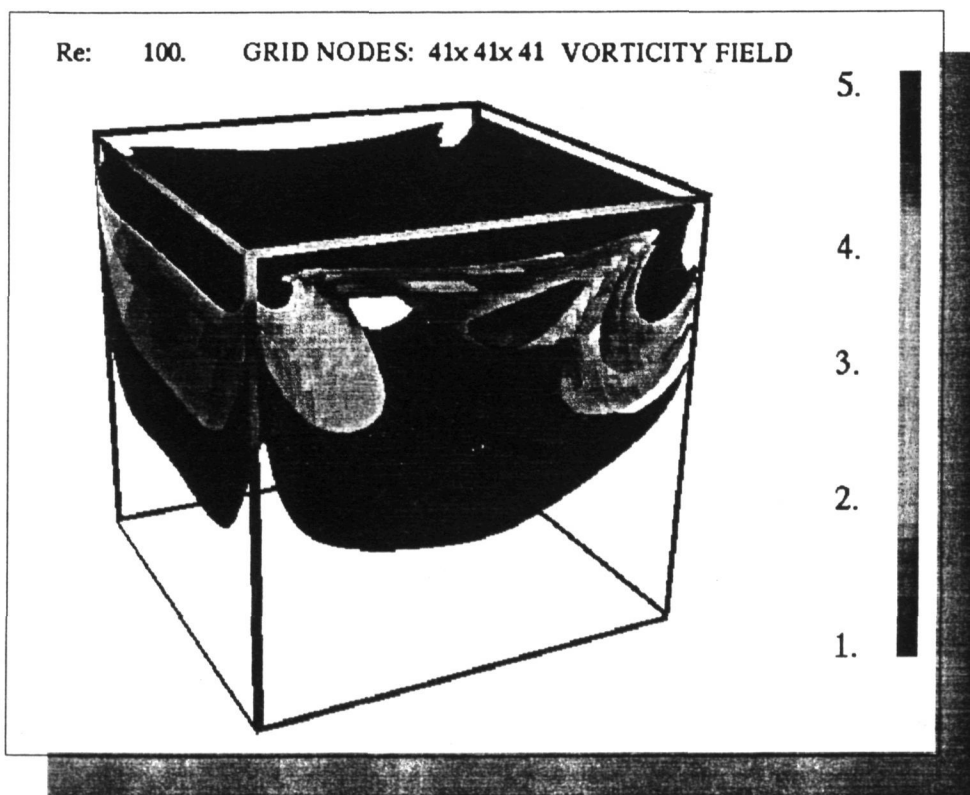
**Re 100**

**a**



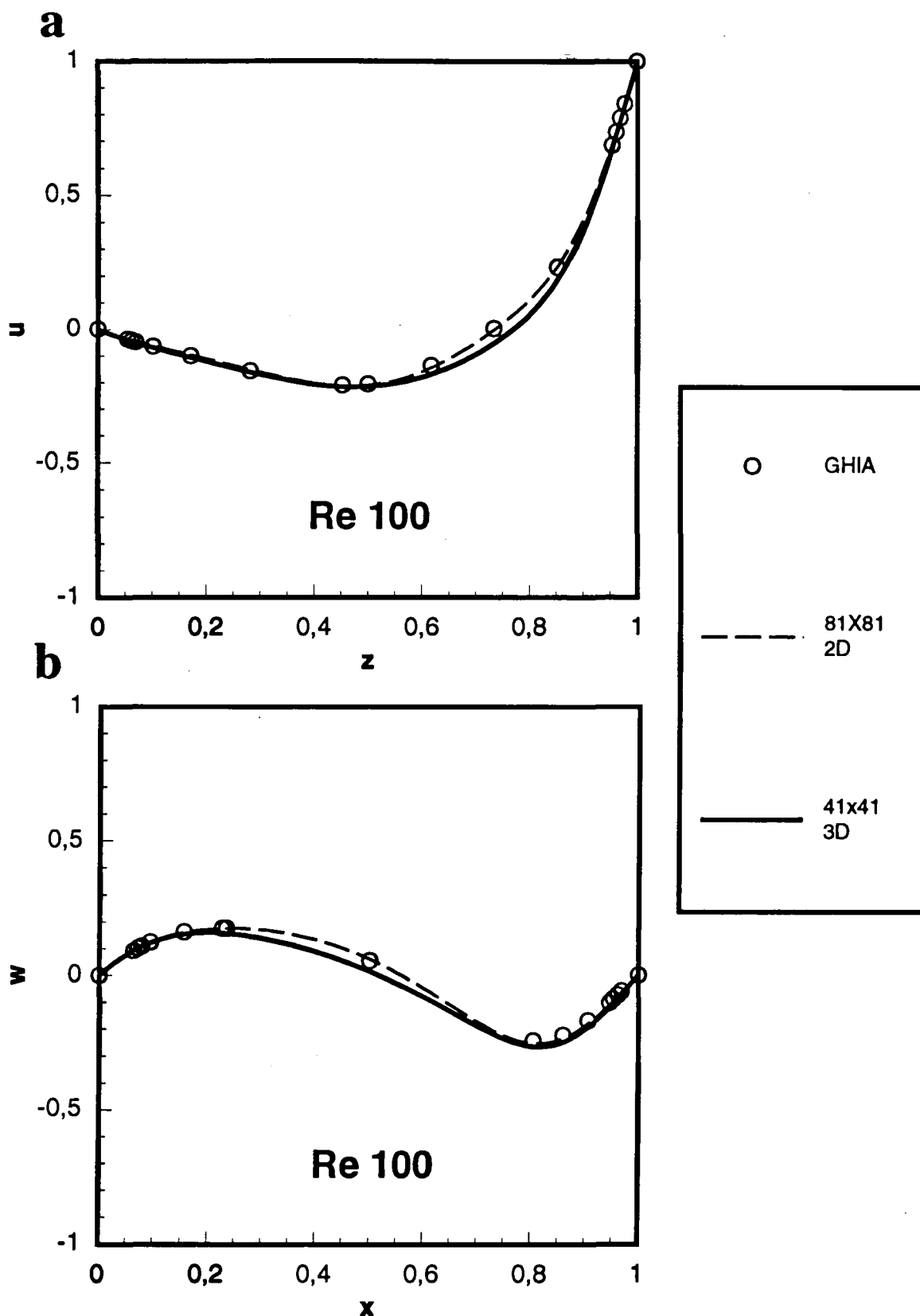
**CAMP DE PRESSIÓ**

**b**



**CAMP DE VORTICITAT**

Figura 19. Camp de pressió i vorticitat per Re=100

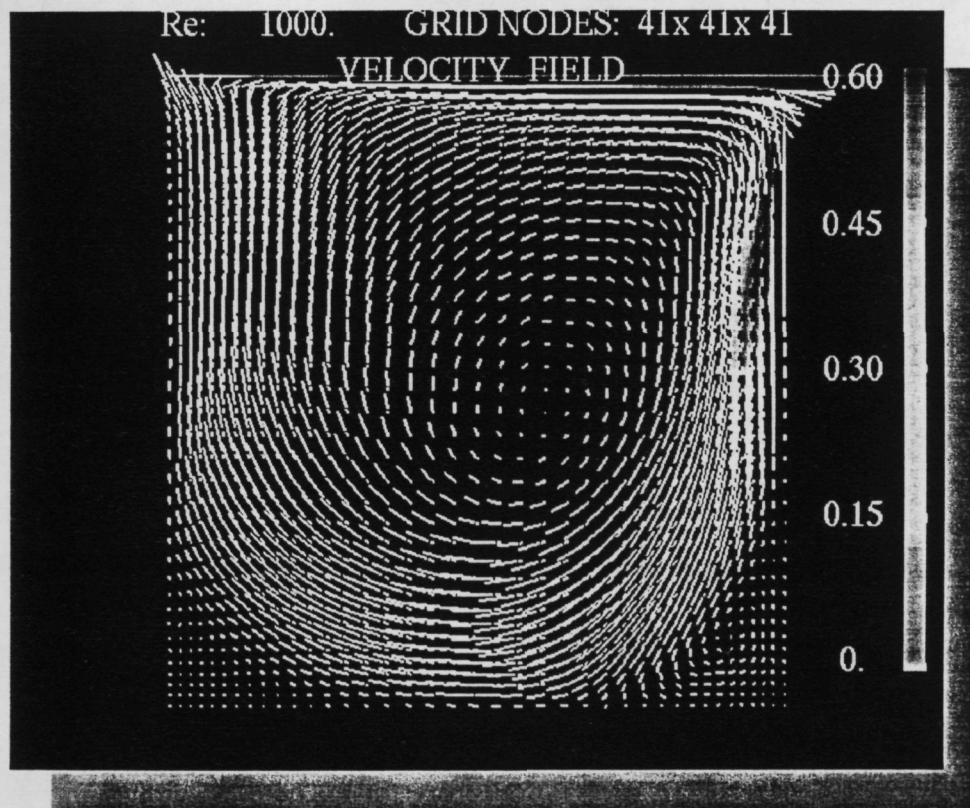


**Figura 20.** Perfils de la component horitzontal de la velocitat ( $u$ ) i vertical ( $w$ ) del pla  $y=0.5$  en les línies vertical ( $z=0.5$ ) i horitzontal ( $x=0.5$ ) del centre de la cavitat cúbica a  $Re = 100$ .

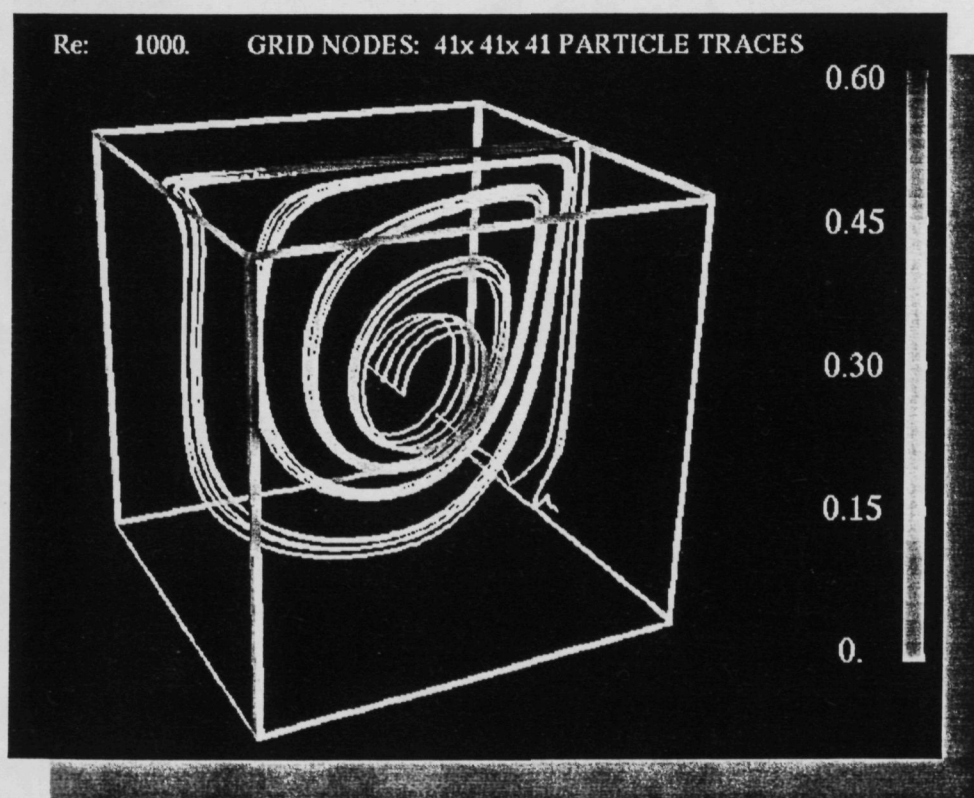


**Re 1000**

**a**



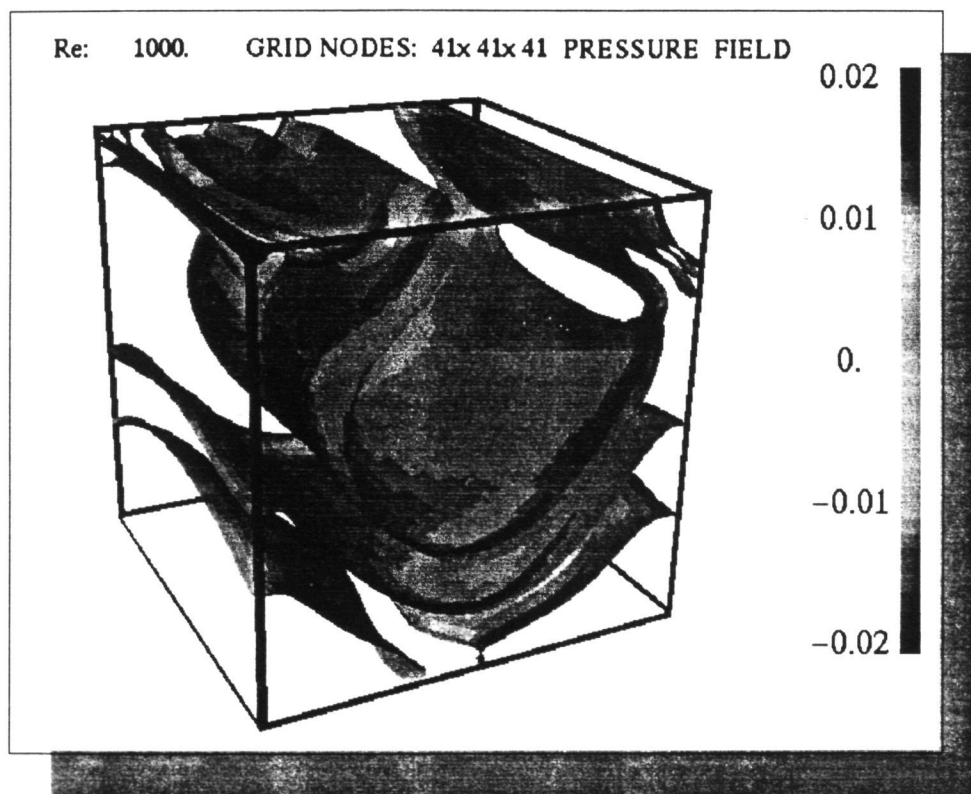
**b**



**Figura 21.** Camp dinàmic: vectors velocitat i traçat de partícules per  $Re=1000$

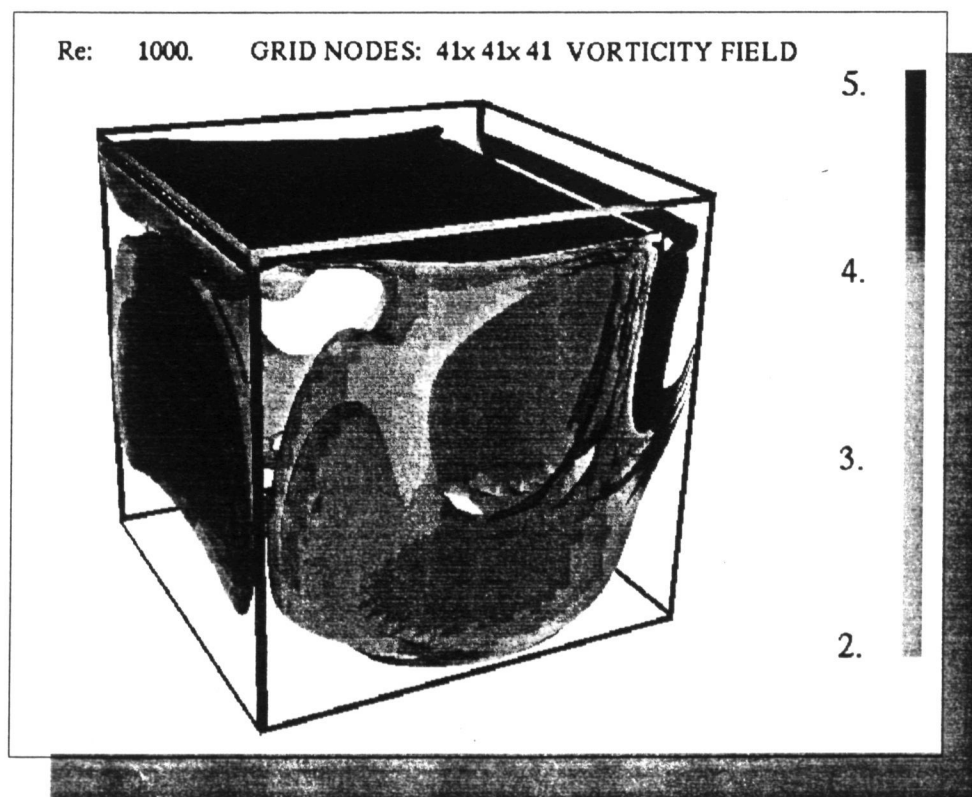
**Re 1000**

**a**



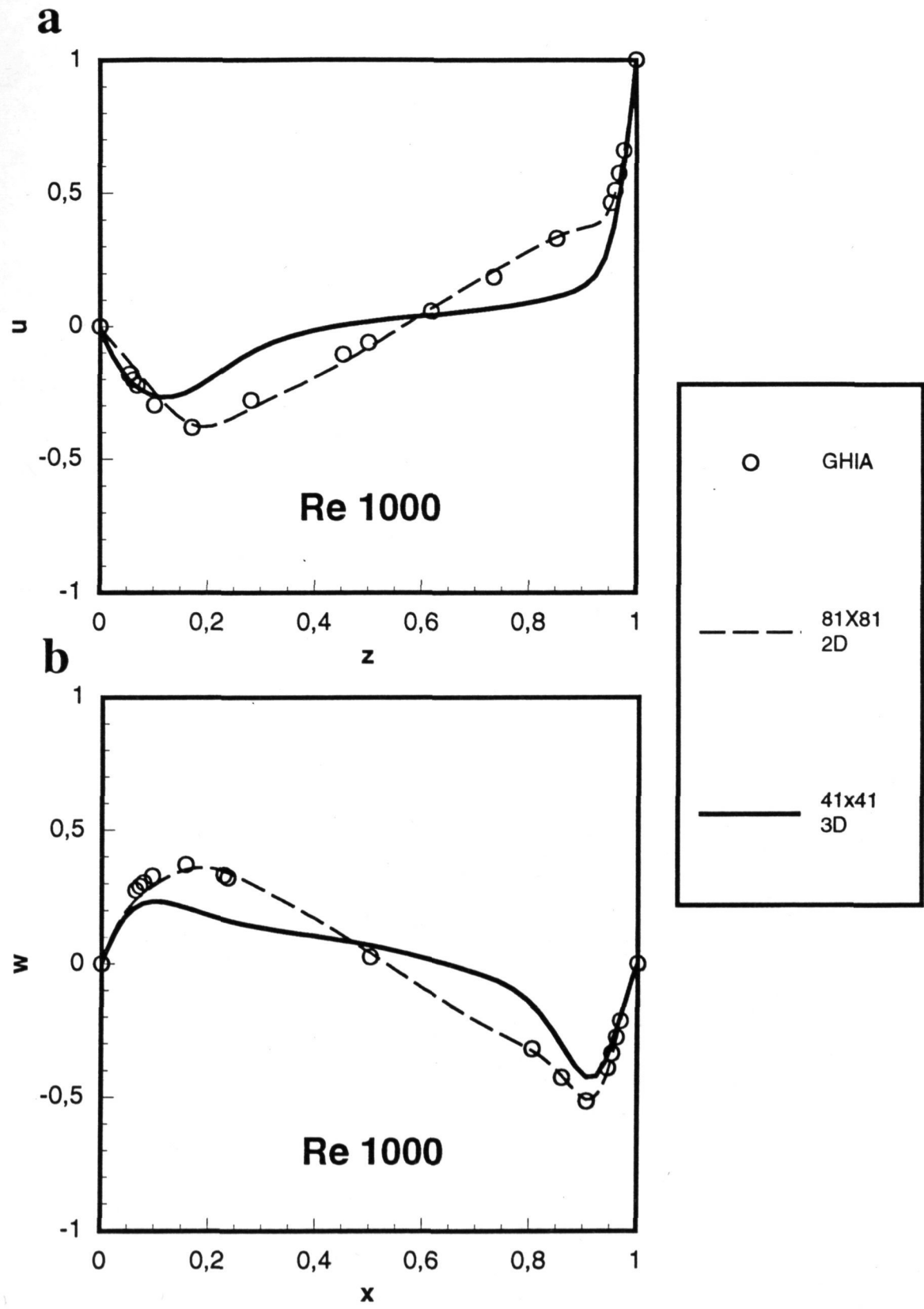
**CAMP DE PRESSIÓ**

**b**



**CAMP DE VORTICITAT**

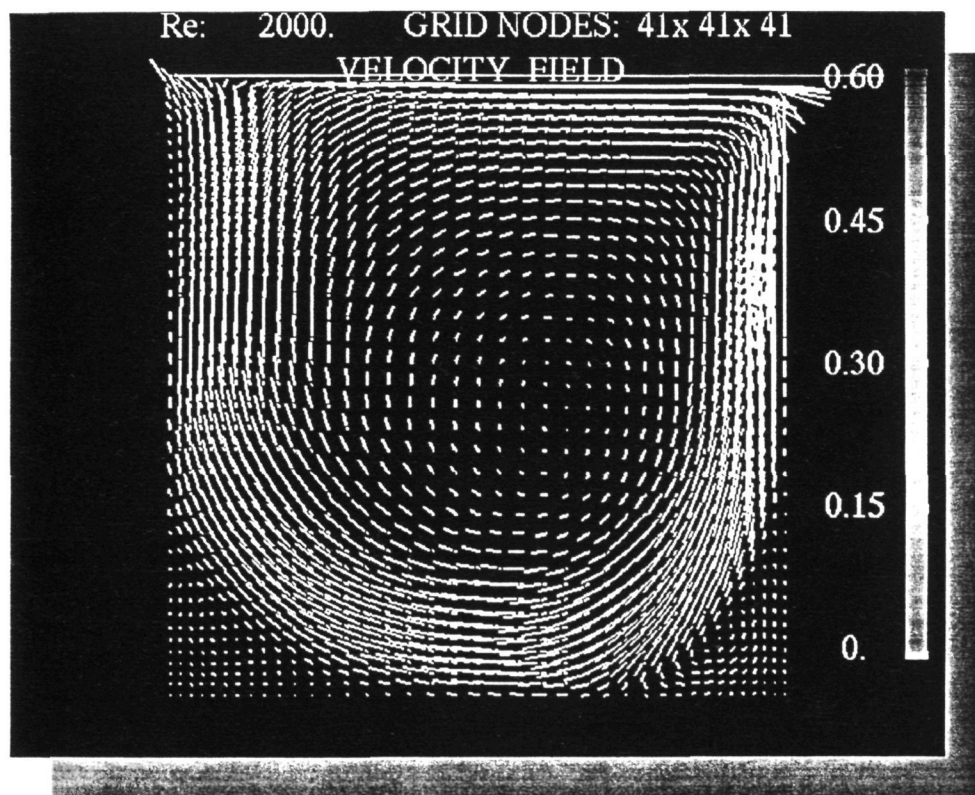
**Figura 22.** Camp de pressió i vorticitat per  $Re=1000$



**Figura 23.** Perfils de la component horitzontal de la velocitat ( $u$ ) i vertical ( $w$ ) del pla  $y=0.5$  en les línies vertical ( $z=0.5$ ) i horitzontal ( $x=0.5$ ) del centre de la cavitat cúbica a  $Re = 1000$ .

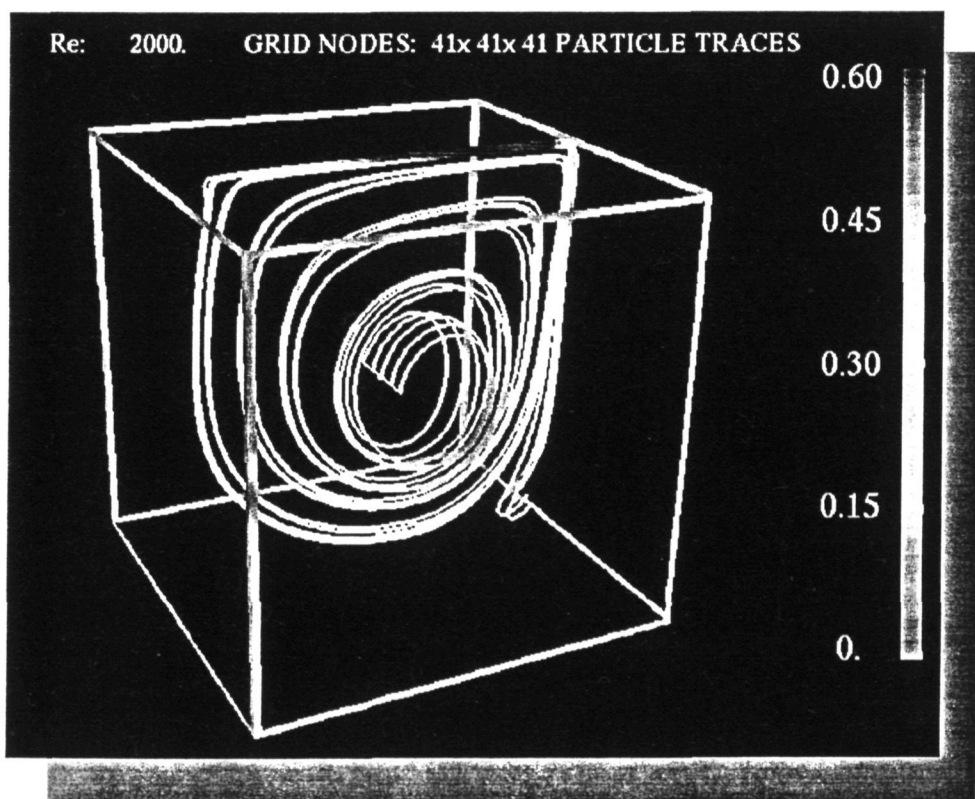
# Re 2000

a



CAMP DE VELOCITATS

b

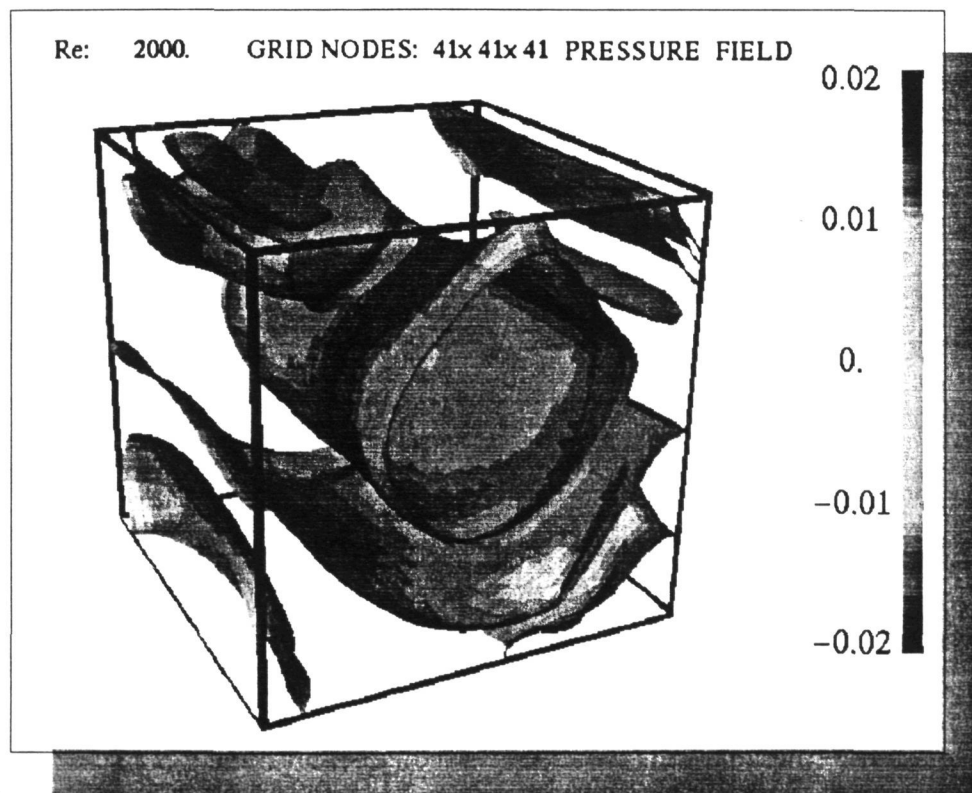


TRAÇAT PARTÍCULES

Figura 24. Camp dinàmic: vectors velocitat i traçat de partícules per  $Re=2000$

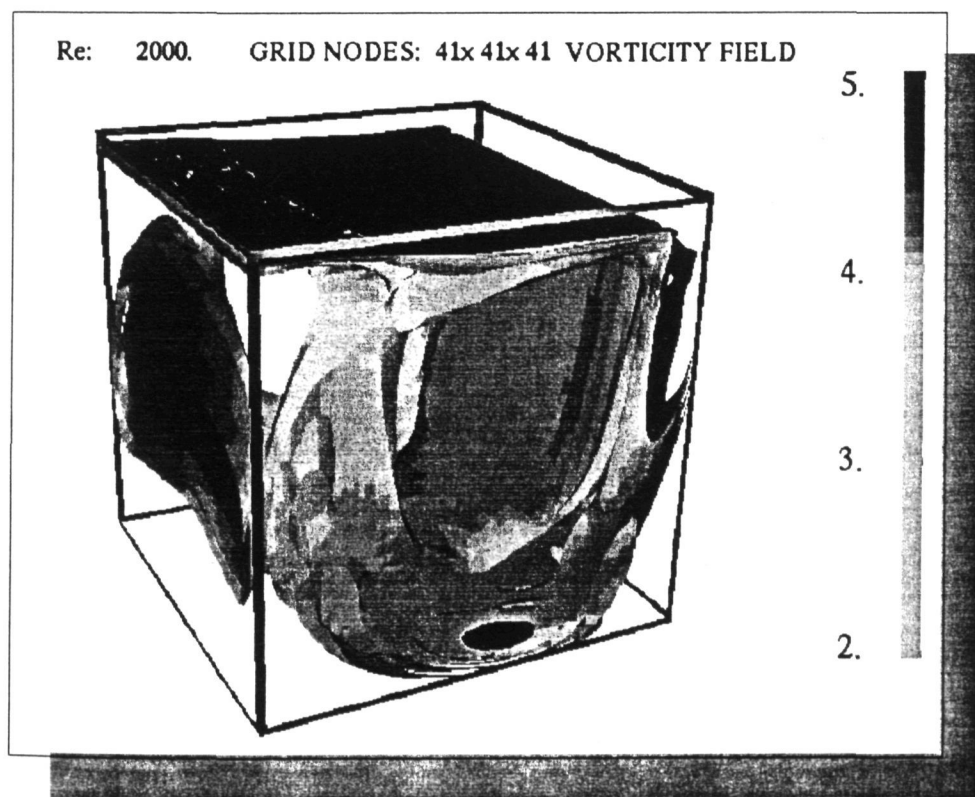
# Re 2000

a



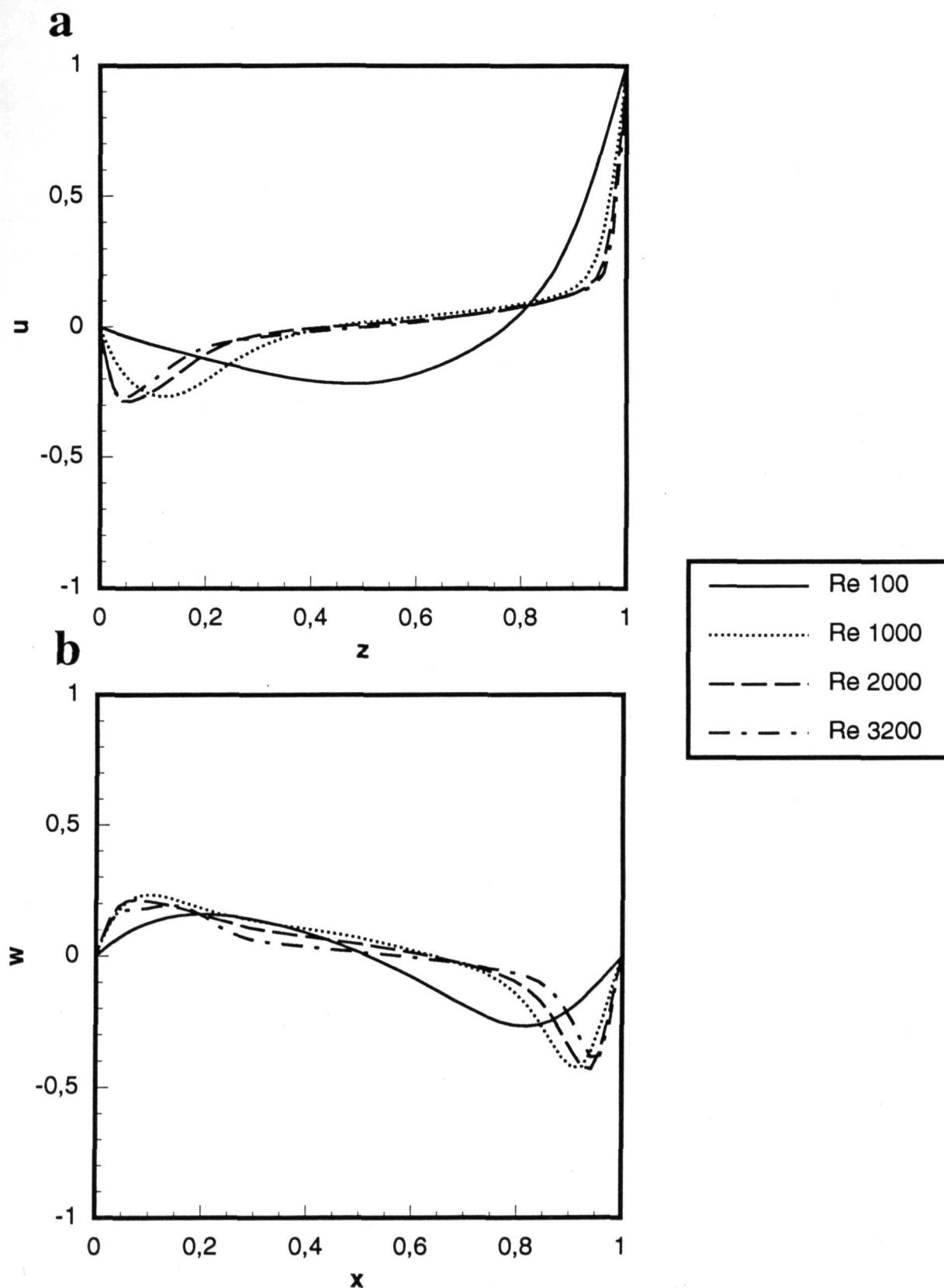
CAMP DE PRESSIÓ

b

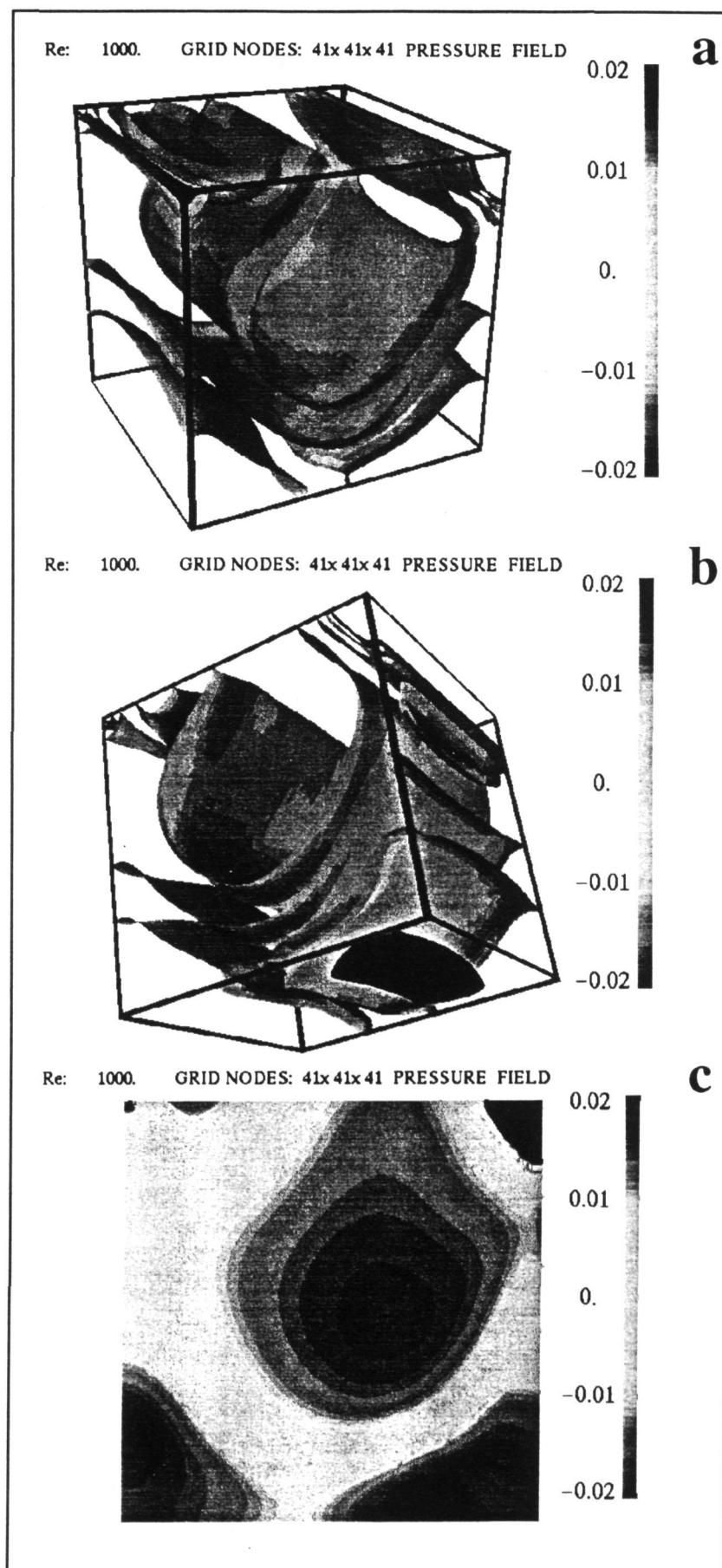


CAMP DE VORTICITAT

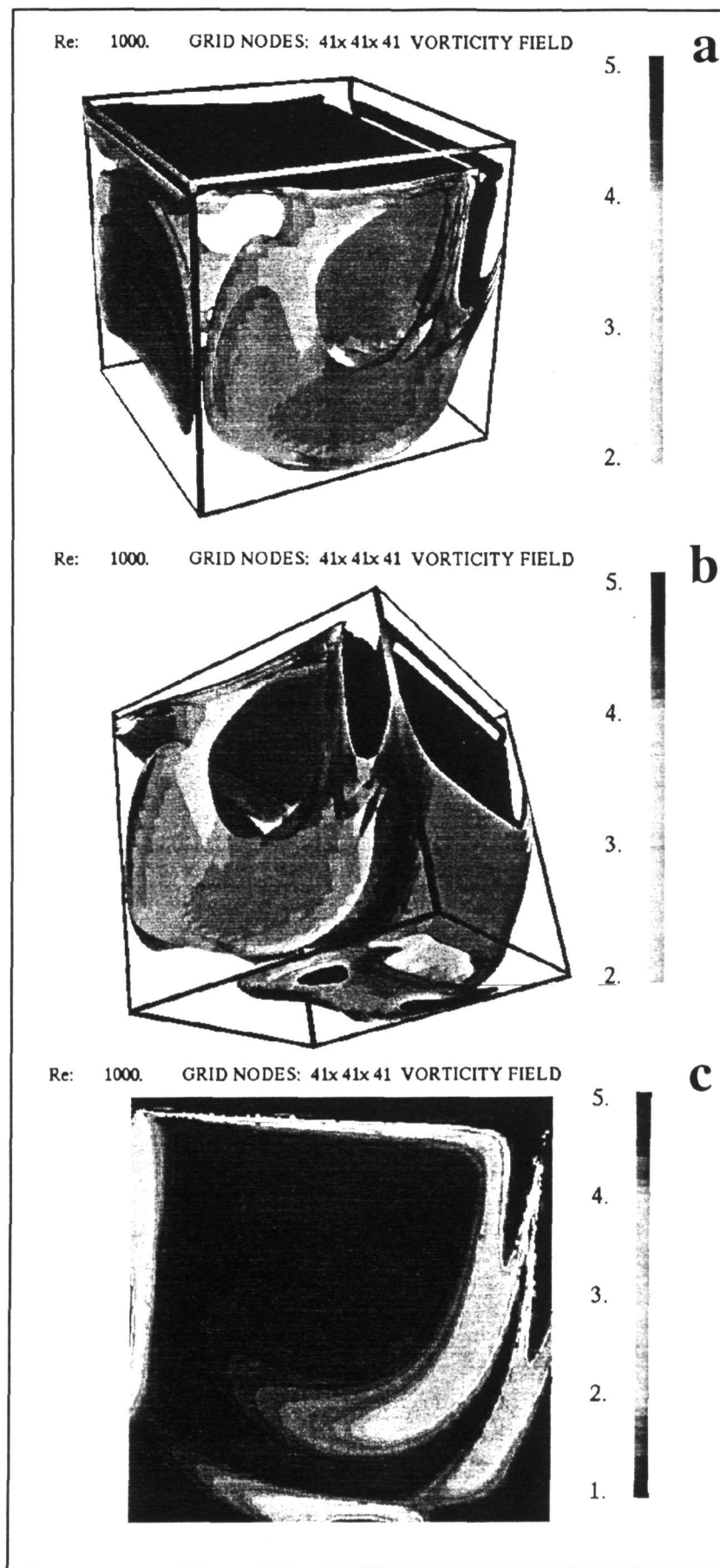
Figura 25. Camp de pressió i vorticitat per Re=2000



**Figura 26.** Perfils de la component horitzontal de la velocitat ( $u$ ) i vertical ( $w$ ) del pla  $y=0.5$  en les línies vertical ( $z=0.5$ ) i horitzontal ( $x=0.5$ ) del centre de la cavitat cúbica a  $Re = 100, 1000, 2000$  i  $3200$ .



**Figura 27.** Dues visions tridimensionals (a,b) del camp de pressió a  $Re=1000$  i la corresponent projecció (c) sobre el pla central de simetria  $y=0.5$



**Figura 28.** Dues visions tridimensionals (a,b) del camp de vorticitat a  $Re=1000$  i la corresponent projecció (c) sobre el pla central de simetria  $y=0.5$



## 4.4 Convecció natural en règim laminar

**4.4.1 CNC 2D.** Continuant amb la metodologia establerta en la presentació dels resultats del flux CFC, primer s'han fet diversos càlculs bidimensionals del flux CNC per tal de comprovar la validesa dels resultats obtinguts. Així s'han efectuat càlculs bidimensionals del flux CNC pels números de Ra de  $10^3$ ,  $10^4$ ,  $10^5$ ,  $10^6$  per tal de fer la comparació amb solucions existents a la bibliografia de tipus "benchmark" com són les de Vahl-Davis (1983) i Hortmann (1990).

En aquest flux no s'ha estudiat la influència de la xarxa, però s'han realitzat els càlculs en una xarxa uniforme prou fina ( $61 \times 61$  punts) per obtenir resultats acurats. A la Figura 29 es pot veure un esquema d'aquest flux bidimensional simulat, que bàsicament es pot descriure com el produït en una cavitat tancada pel fet de mantenir les dues parets verticals constantment a diferents temperatures. En aquest cas s'ha considerat com a fluid l'aire amb un  $Pr=0.71$ .

Per fer l'anàlisi dels resultats s'ha representat els camps de temperatura, de funció de corrent, i s'ha comprovat l'exactitud amb el càlcul del número adimensional Nu.

Des del punt de vista ingenieril la característica més important a mesurar en el flux CNC és la transferència de calor. El flux de calor que travessa la cavitat es pot mesurar amb el número adimensional Nu, aquest representa la raó entre el flux total de calor i el transfert únicament per conducció. Cal remarcar que dos Nu diferents s'han utilitzat per comparar-los amb els més representatius de la bibliografia, el primer és el Nu local màxim trobat a la paret calenta

$$Nu_{\max} = \max(\partial T / \partial x) \quad (82)$$

i el segon és el Nu mitjà en tota la paret calenta

$$\bar{Nu} = \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x} dz \quad (83)$$

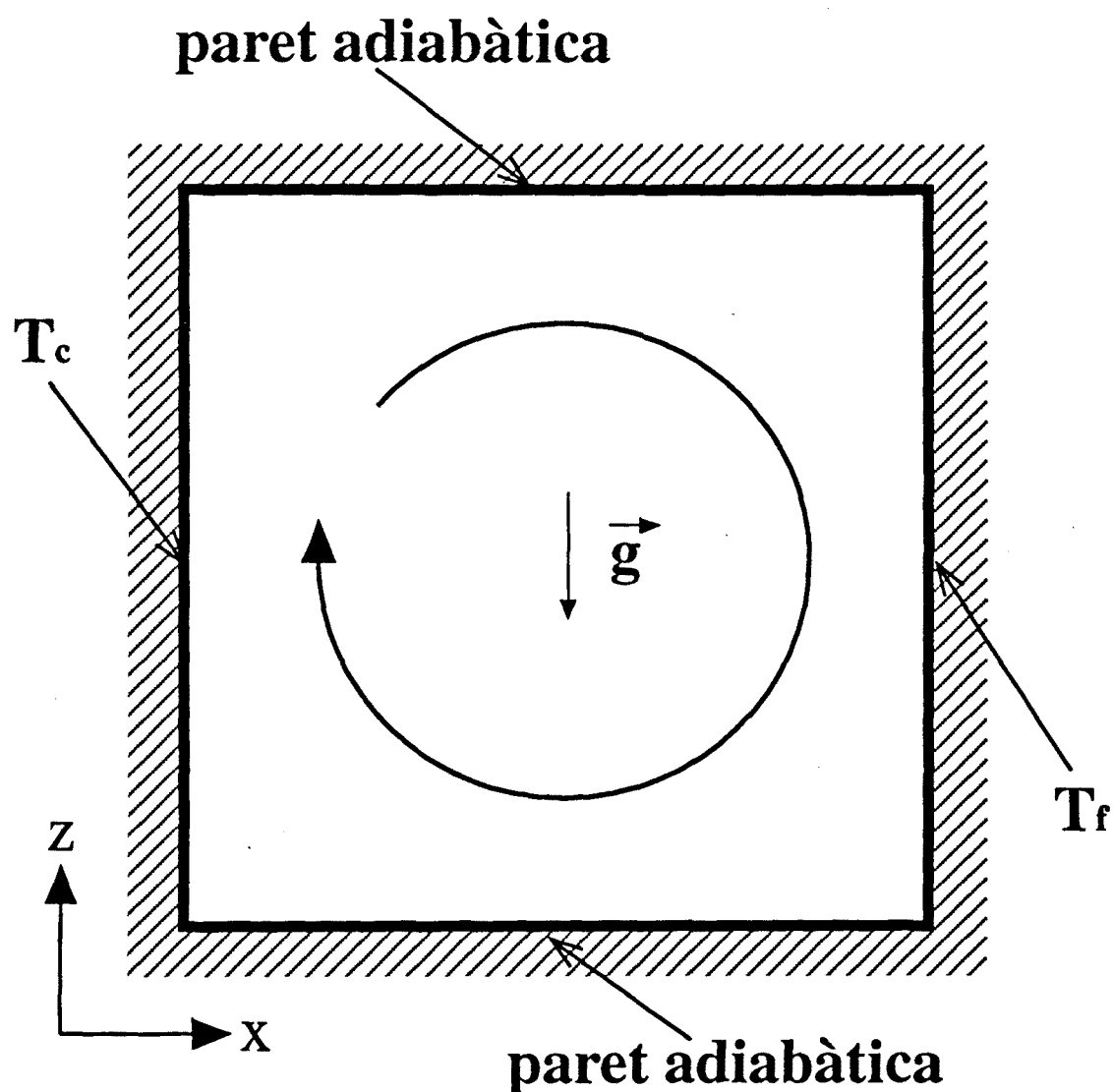


Figura 29. Geometria del flux CNC 2D

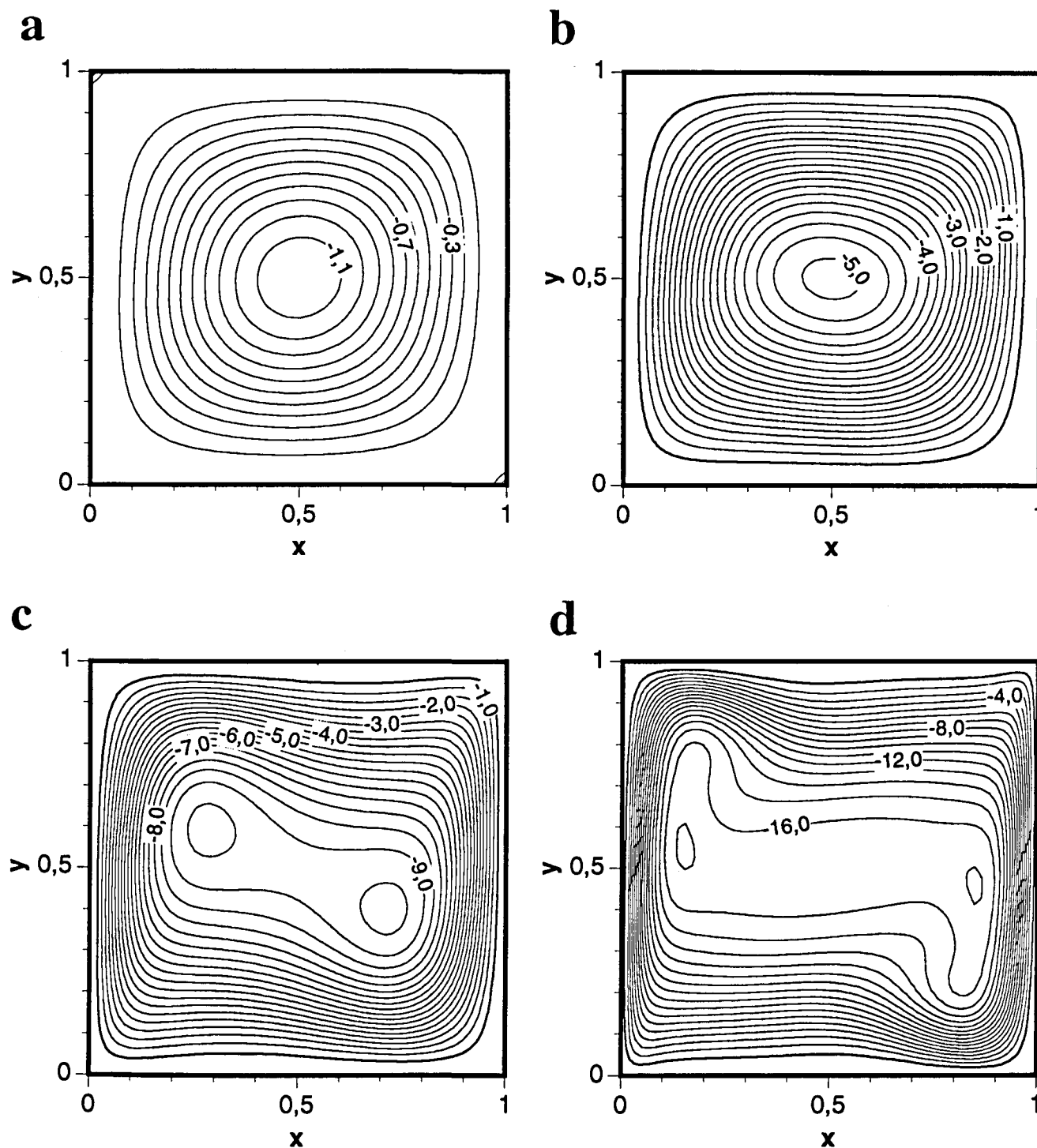
En tots els càlculs del flux CNC bidimensional s'ha arribat a l'estat estacionari i aquestes solucions es presenten a les Figures 30 i 31. La Figura 30 mostra els contorns de valors de funció de corrent ( $\Psi$ ), i en aquesta hom pot observar la diferència dels patrons dels contorns amb el  $Ra$ , així per  $Ra = 10^3$  (Figura 30-a) només s'observa una estructura circular centrada al centre de la cavitat. A l'augmentar el  $Ra$  fins a un valor de  $10^5$  (Figura 30-c) s'observen dos nuclis, un més a prop de la cantonada superior de la paret calenta i l'altre a prop de la cantonada inferior de la paret freda. També es pot observar que les isolínies

s'agrupen més al costat de les parets verticals, indicant que el flux s'està confinant en les zones properes a les parets. Aquest efecte s'accentua més pel cas de  $Ra = 10^6$  (Figura 30-d) i a més a més es poden observar que els nuclis s'apropen més a les cantonades.

Pel que fa a les isoterms (Figura 31), hi ha una evolució tangible en els contorns amb el  $Ra$ . En el cas de  $Ra = 10^3$  (Figura 31-a) els contorns tenen molta similitud amb el cas purament convectiu en que totes les isoterms són verticals. En augmentar el  $Ra$  les isoterms evolucionen cap a la diferenciació del seu patró en dues zones ben diferenciades. En les regions properes a la paret les isoterms són verticals i disminueixen l'espaiat entre elles quan augmenta el  $Ra$ , en canvi en la zona central de la cavitat les isoterms són gairebé horitzontals, aquest fenomen es denomina "estratificació tèrmica".

A les Figures 32 i 33 es presenten els valors del  $Nu$  obtinguts en aquest treball amb una xarxa de  $61 \times 61$  punts, i les solucions "benchmark" calculades per de Vahl Davis (1983) amb xarxes de fins a  $81 \times 81$  punts i Hortmann (1990) amb  $641 \times 641$  punts. En la Figura 32 es mostra el  $Nu$  local màxim, i únicament es troba una petita discrepància pel cas de  $Ra = 10^6$ . A la Figura 33 es presenta el  $Nu$  mitjà de tota la paret vertical calenta. Els resultats obtinguts en el present treball mostren un elevat grau d'ajust amb els calculats pels autors abans esmentats per tot el rang de números de  $Ra$ .

Per últim a la Figura 33 es dona una idea del grau d'acuracitat del camp dinàmic calculat, al comparar el màxim valor absolut de la funció de corrent calculada pel codi d'aquest treball i la solució benchmark de de Vahl Davis (1983).



**Figura 30.** Funció de corrent ( $\Psi$ ) calculada en la cavitat bidimensional pel flux de convecció natural a  $Ra = (a)10^3, (b)10^4, (c)10^5, (d)10^6$ .

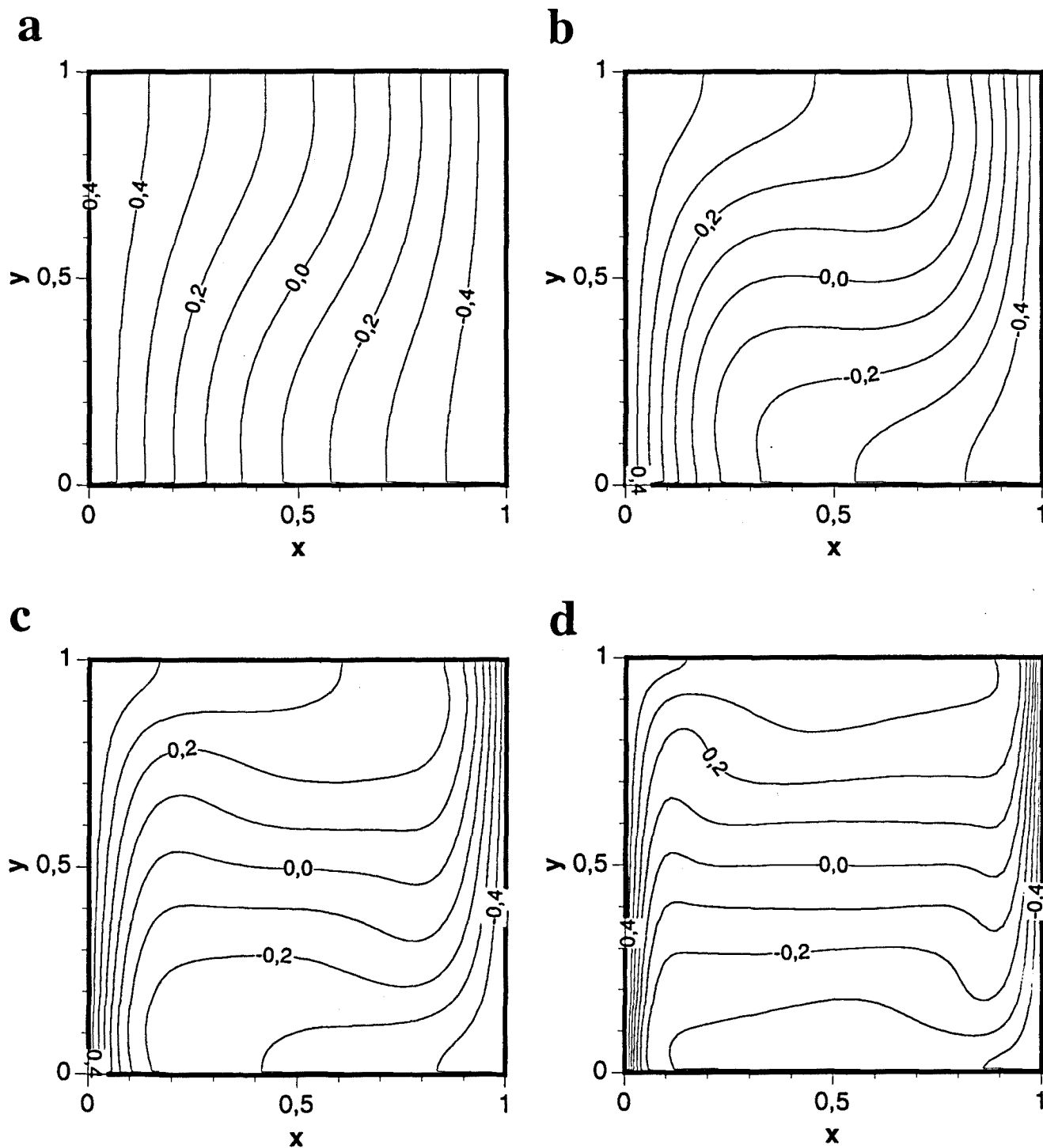


Figura 31. Isolínies de temperatura en la cavitat bidimensional pel flux de convecció natural a  $Ra = (a)10^3, (b)10^4, (c)10^5, (d)10^6$ .

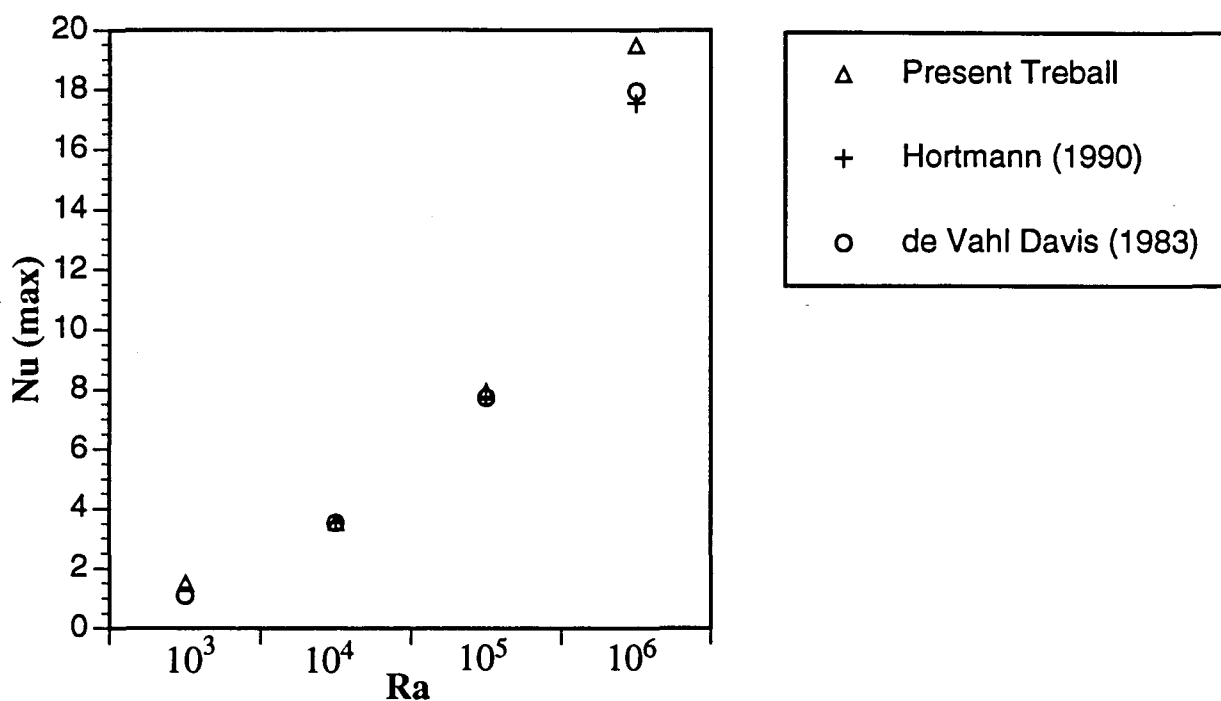


Figura 32. Màxim valor del número Nu local a la paret calenta, pel flux CNC 2D, als règims de  $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$

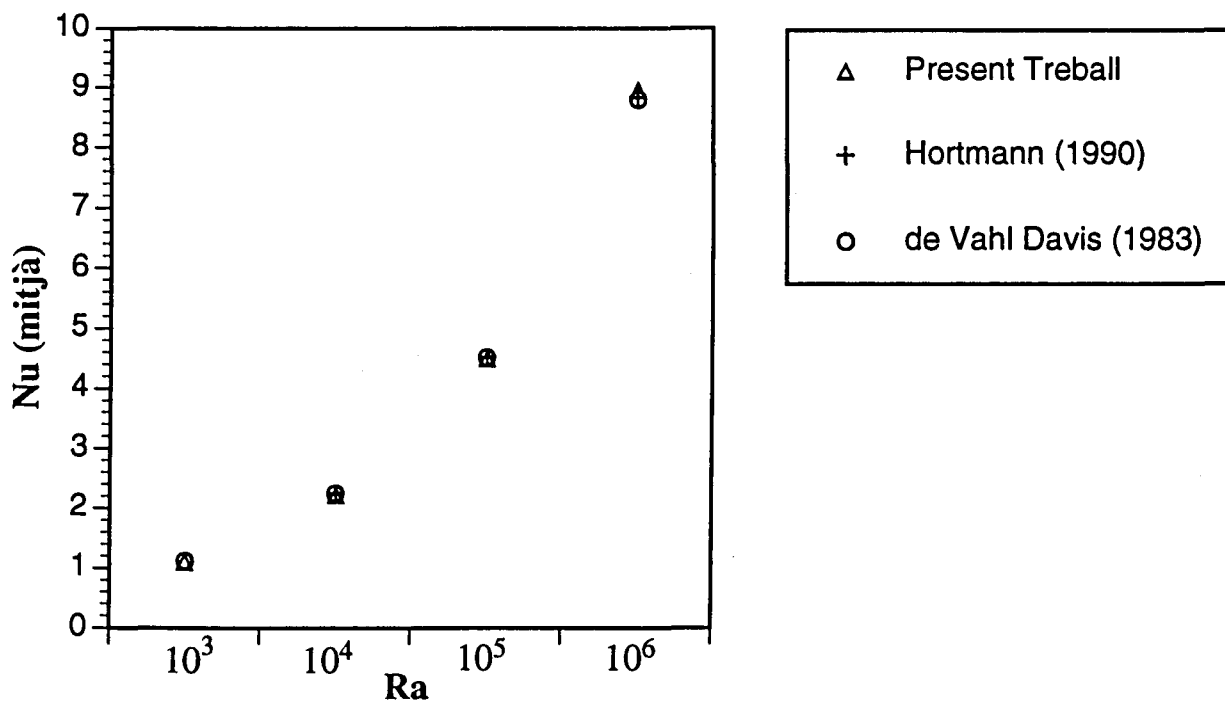
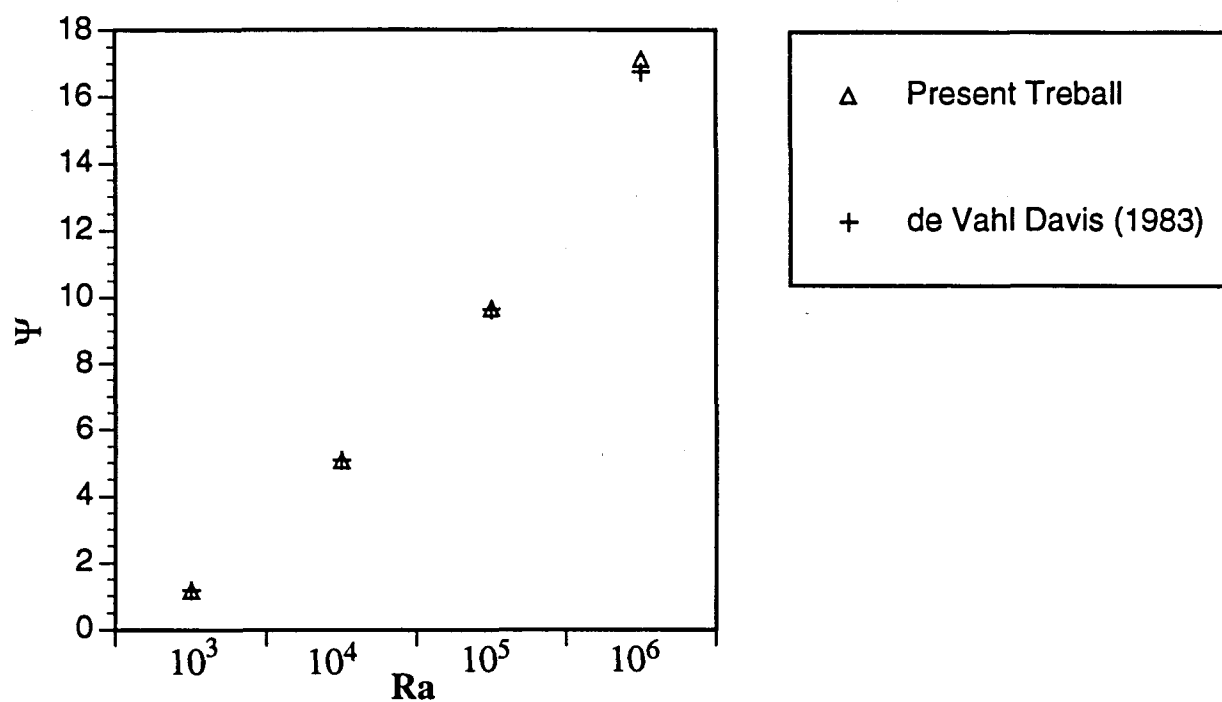
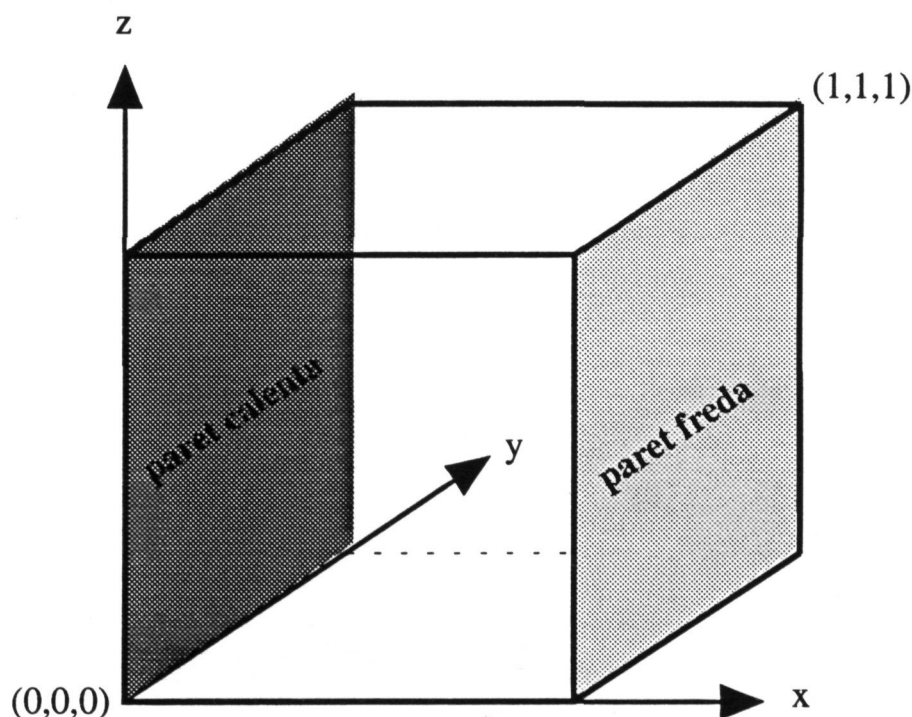


Figura 33. Nu mitjà a la paret calenta, pel flux CNC 2D, als règims de  $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$



**Figura 34.** Màxim valor absolut de la funció de corrent ( $\Psi$ ), pel flux CNC 2D, als règims de  $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$

**4.4.2 CNC 3D.** S'ha simulat el flux tridimensional en una cavitat cúbica generat per la diferència de temperatures existent entre dos parets verticals oposades. La temperatura de les dues parets es manté constant i amb els valors adimensionals de  $T_c = 0.5$  (temperatura paret calenta) i  $T_f = -0.5$  (temperatura paret freda). Les quatre parets restants es consideren adiabàtiques, tal com es pot veure a la Figura 35.



**Figura 35.** Geometria de la cavitat cúbica. Totes les parets són adiabàtiques excepte les parets localitzades a  $x=0$  i  $x=1$ .

El rang de simulacions efectuades és de  $10^3 \leq Ra \leq 10^7$ , i totes prenent com a fluid l'aire amb un  $Pr = 0.71$ . La xarxa utilitzada per totes les simulacions és una de  $61 \times 61 \times 61$  punts, que aporta la mateixa resolució que l'emprada per Fusegi (1991) de  $62 \times 62 \times 62$  punts.

Com en el cas del flux CFC tridimensional, s'ha fet un compendi de gràfics dels règims de flux més característics. En conseqüència a les Figures 36-41 es



presenten les visualitzacions dels camps dinàmics (projecció del camp velocitats en el pla de simetria  $y=0.5$  i traçat de partícules), el camp tèrmic i el de vorticitat; únicament pels tres números de Ra:  $10^3$ ,  $10^5$  i  $10^7$ . Es pot observar que pel flux CNC no es presenta el camp de pressió, ja que el criteri de l'autor ha estat presentar el camp de temperatures, que és el més característic d'aquest tipus de flux.

### *El flux CNC 3D a $Ra = 10^3$*

Si hom observa les isosuperfícies de temperatura es veu que concorden clarament amb el patró bidimensional de la Figura 31-a que correspon al mateix Ra, patró que al mateix temps és el més semblant al que es desenvoluparia si només hi hagués conducció. També es pot constatar, com en la resta dels règims de Ra, l'existència d'un pla de simetria a  $y = 0.5$ . En quant a la dinàmica d'aquest règim de flux de convecció natural, Figures 36-a i 36-b, es notori l'existència d'una estructura circular que es mou en el sentit de les agulles del rellotge i que ocupa tota la cavitat. En aquest sentit el camp de vorticitat, Figura 37-b, confirma la forma de l'estructura del flux.

### *El flux CNC 3D a $Ra = 10^5$*

El camp dinàmic, Figures 38-a i 38-b, mostren un canvi substancial amb respecte al règim de flux anterior. A  $Ra = 10^3$  només hi ha una estructura centrada al mig de la cavitat, en canvi a  $Ra = 10^5$  s'observen dues estructures, una propera a la cantonada superior de la paret calenta i una altra propera a la cantonada inferior de la paret freda. Aquestes estructures també es poden observar pel cas del flux CNC 2D amb el mateix Ra i a la Figura 30-c. Pel que fa al camp tèrmic i com en el cas bidimensional, s'observa una estratificació tèrmica dels contorns de temperatura en el nucli central de la cavitat.

### *El flux CNC 3D a $Ra = 10^7$*

La dinàmica del flux obtingut en aquest número de Ra, Figures 40-a i 40-b, es caracteritza per l'existència de dues zones ben definides. La primera, és la regió propera a les parets calenta i freda, on hi ha sengles capes límits caracteritzades pel flux de més alta velocitat, ascendent en el cas de la paret calenta i descendent en el cas de la paret freda. La segona zona és el nucli central on el fluid reman pràcticament quiet. Subratllem una vegada més que el camp de vorticitat descriu clarament aquest comportament dinàmic, observant-se màxims de vorticitat a les regions properes a les parets no adiabàtiques i el mínim de vorticitat al nucli central de la cavitat. En quant al camp tèrmic s'aprecia clarament que gairebé tota la cavitat presenta unes superfícies isoterms estratificades, amb l'excepció de les regions properes a les parets amb temperatura constant. Per últim, i com en els darrers règims de flux, els efectes tridimensionals només s'observen en les regions properes a les parets.

### *Transferència de calor*

La poca tridimensionalitat d'aquest tipus de flux en el rang de Ra estudiat queda molt més palés quan s'estudia la transferència de calor. En aquest cas, hom ha calculat, com en el cas 2D, el Nu màxim local a la paret calenta (82), el Nu mitjà de la línia corresponent a l'intersecció del pla de simetria ( $y=0.5$ ) i la paret calenta (83), i per últim el Nu mitjà de tota la paret calenta ( $Nu_{3D}$ )

$$Nu_{3D} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{\partial T}{\partial x} dy dz = \int_0^1 \overline{Nu} dy \quad (84)$$

La Figura 42 compara el Nu màxim local en el rang de Ra estudiats, amb els prèviament calculats per Fusegi (1991) en una cavitat tridimensional, i els resultats "benchmark" bidimensionals fets per de Vahl Davis (1983) i que ja s'havien utilitzat abans per validar els resultats bidimensionals. A la Figura 43 es representa el Nu mitjà i es compara amb els mateixos autors que els de

l'anterior Figura. Pel cas del  $Nu_{3D}$  s'afegeix un autor, Haldenwang (1984), que també presentà resultats tridimensionals del flux CNC. Hom pot concloure que la característica comuna a totes tres gràfiques és la gran coincidència en el número de  $Nu$  entre els resultats tridimensionals i bidimensionals.

# ESTUDI NUMÈRIC DE FLUXOS LAMINARS I TURBULENTS EN UNA CAVITAT CÚBICA

Cdr. Francesc Xavier Grau }  
dir. Francesc Giralt -

Llegido a Facultat de Química

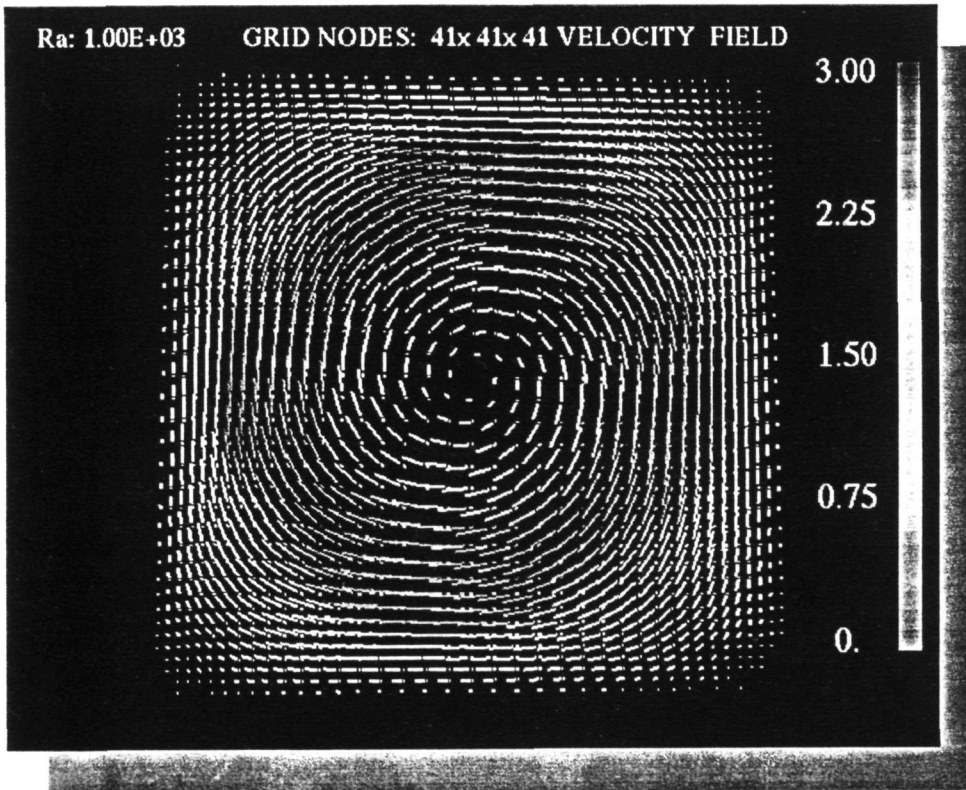
Memòria presentada per en  
**ILDEFONSO CUESTA ROMEO**

per a optar al grau de Doctor en  
Ciències Químiques.

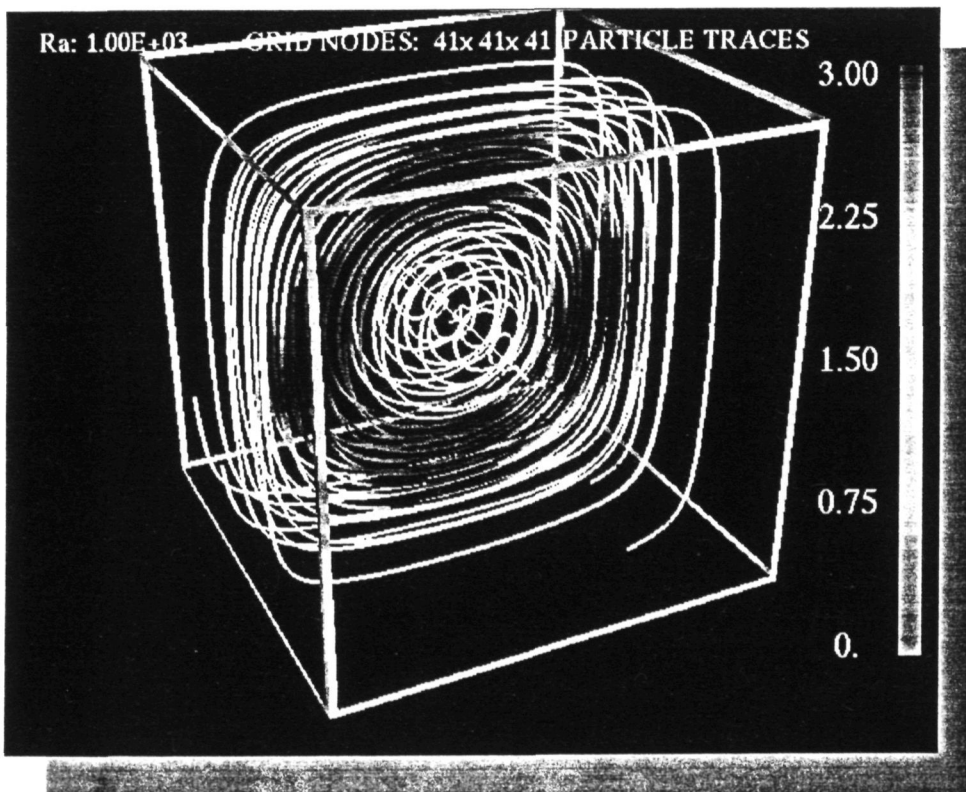
Tarragona, juny de 1993

**Ra**  $10^3$

**a**



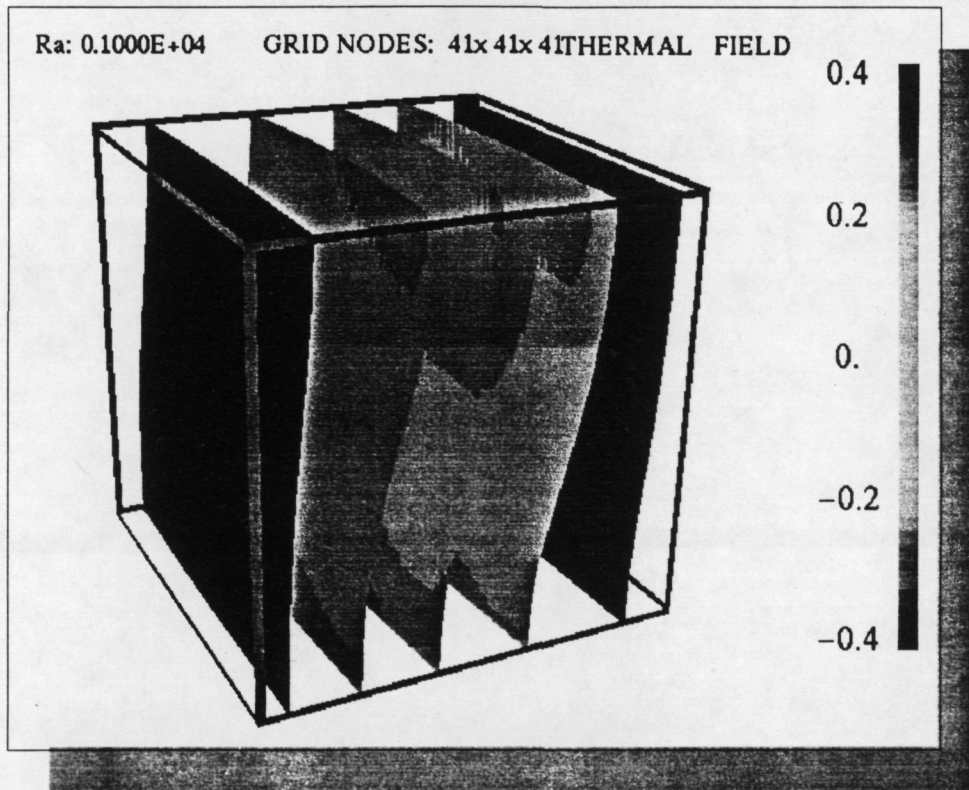
**b**



**Figura 36.** Camp dinàmic: vectors velocitat i traçat de partícules per  $Ra=10^3$

**Ra**  $10^3$

**a**



**b**

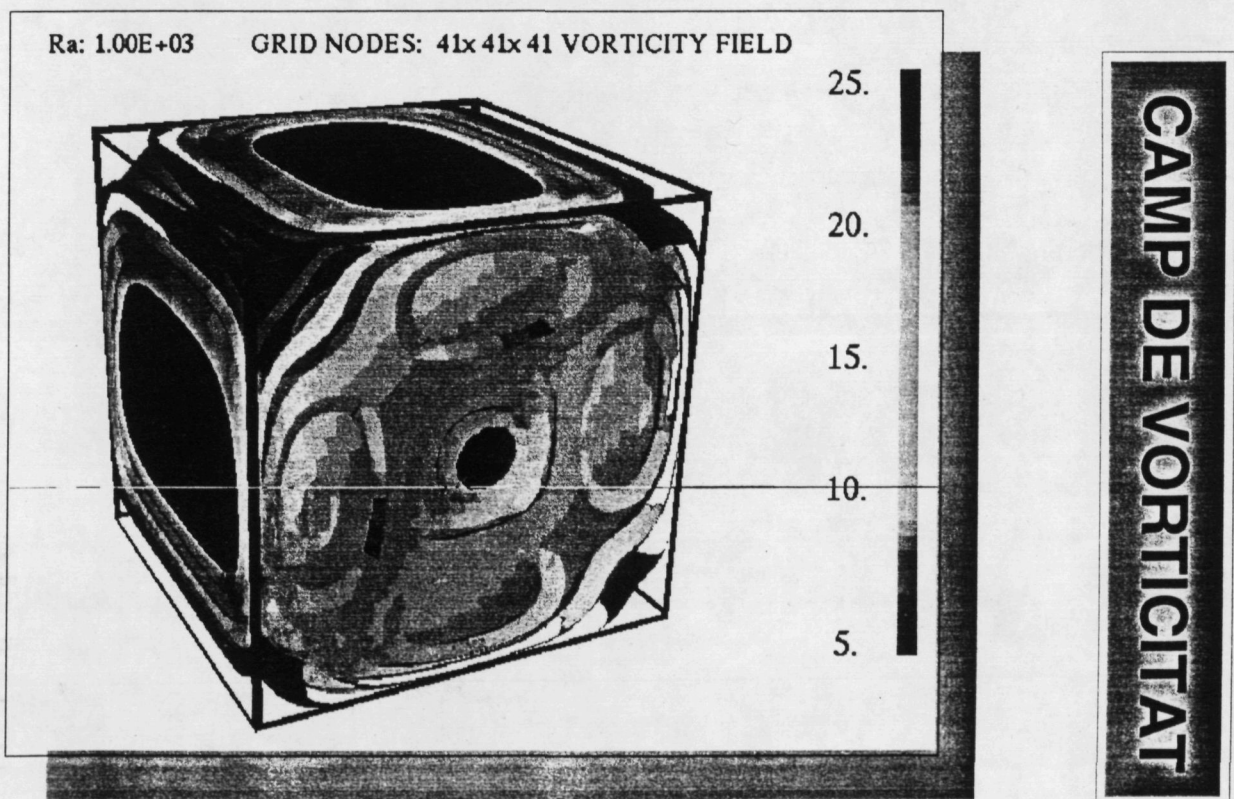
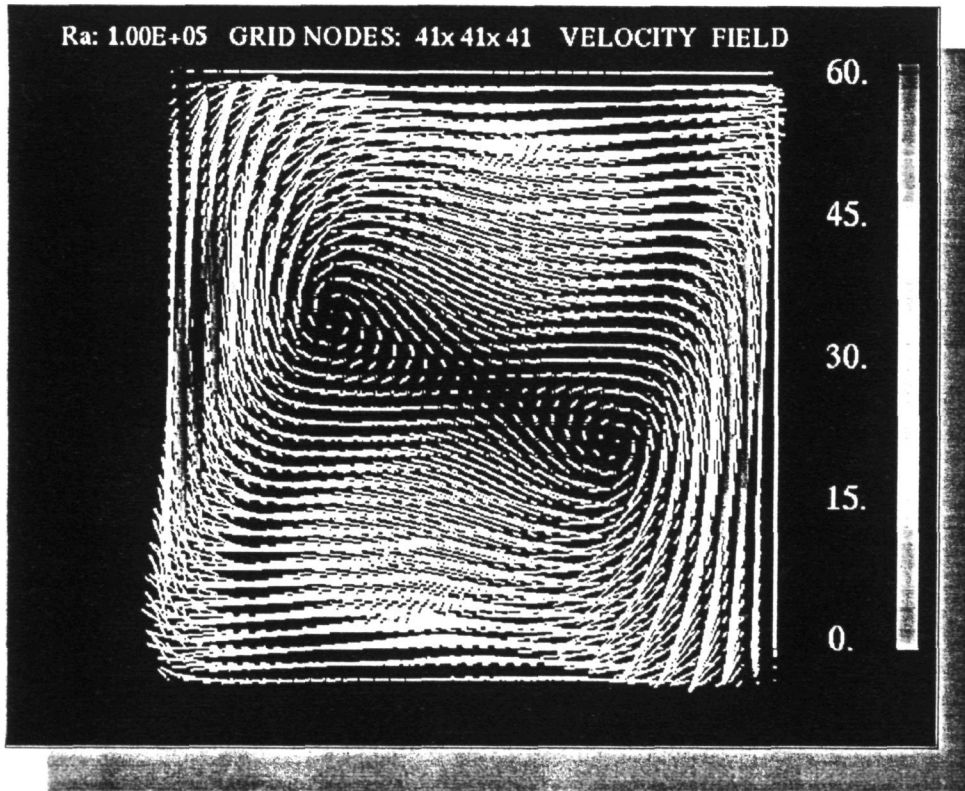


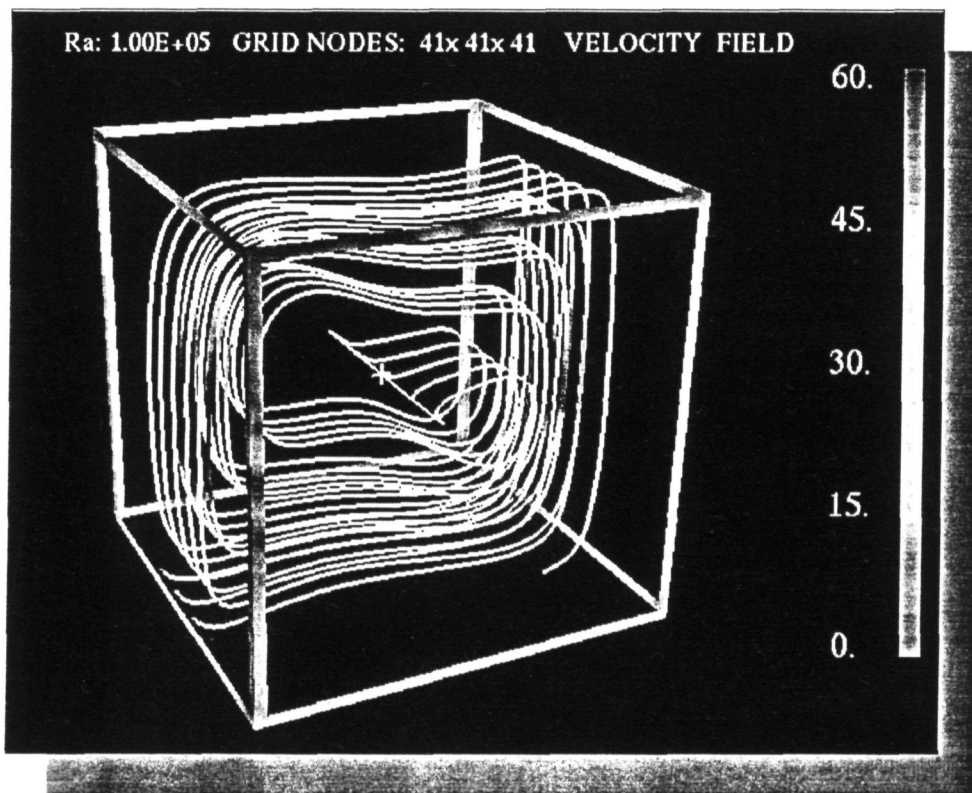
Figura 37. Camp tèrmic i de vorticitat per  $Ra=10^3$

**Ra**  $10^5$

**a**



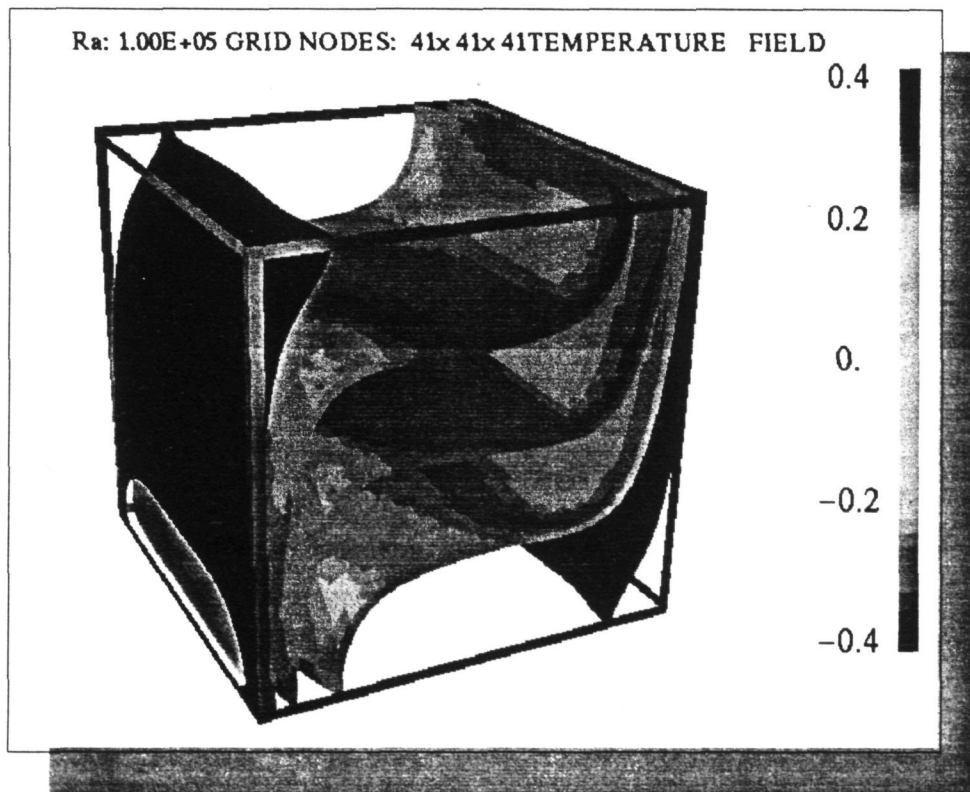
**b**



**Figura 38.** Camp dinàmic: vectors velocitat i traçat de partícules per  $Re=10^5$

**Ra**  $10^5$

**a**



**b**

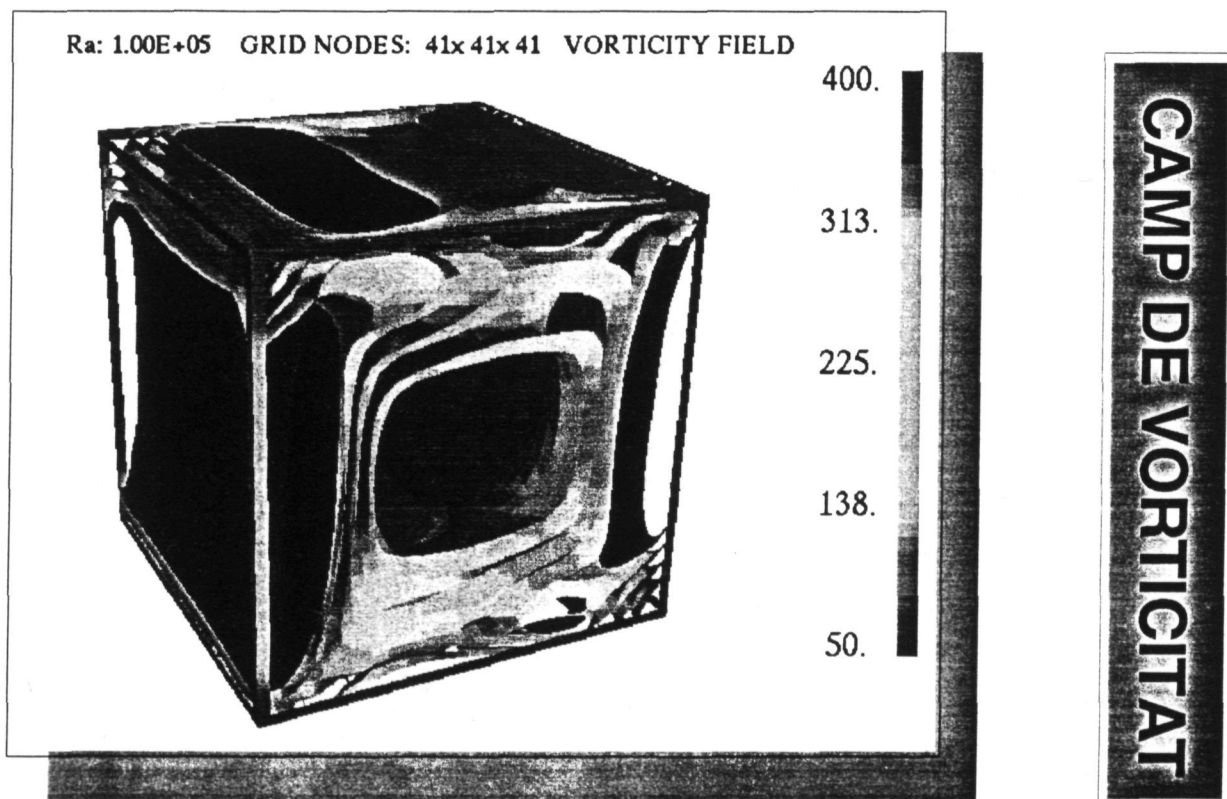
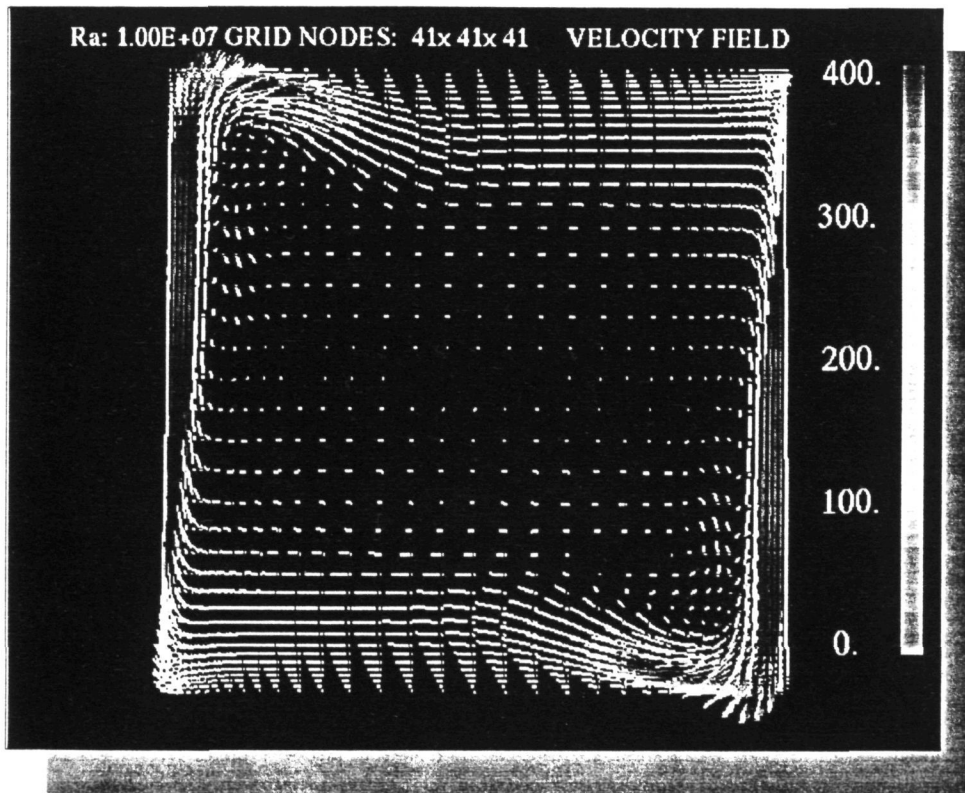


Figura 39. Camp tèrmic i de vorticitat per  $Ra=10^5$



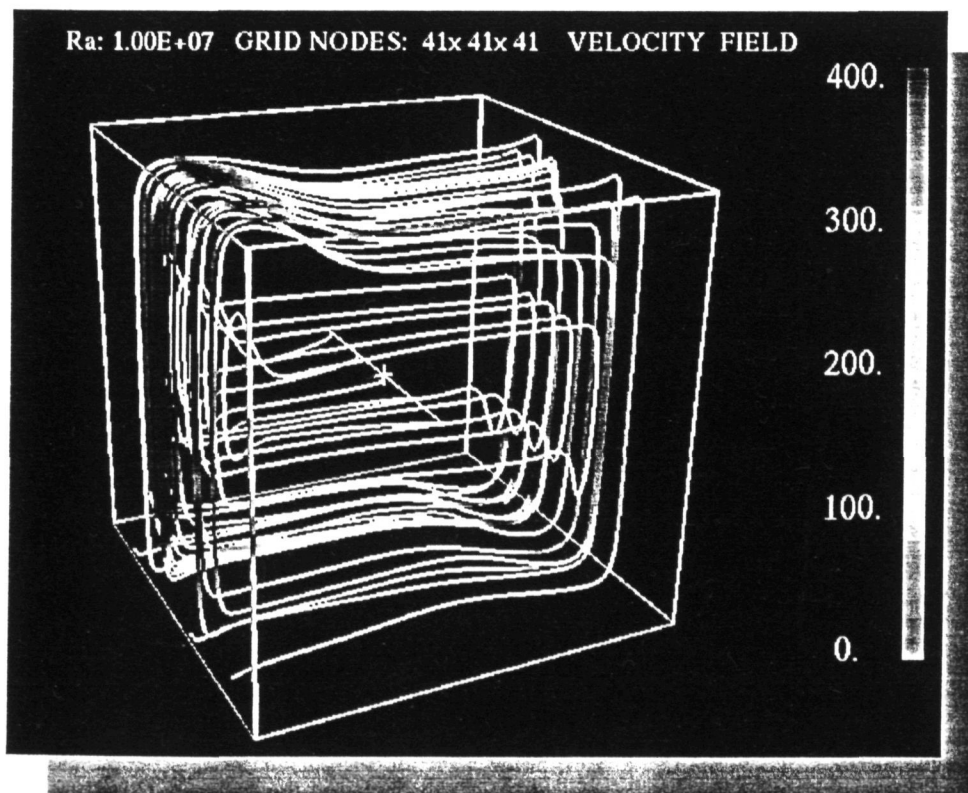
**Ra**  $10^7$

**a**



**CAMP DE VELOCITATS**

**b**

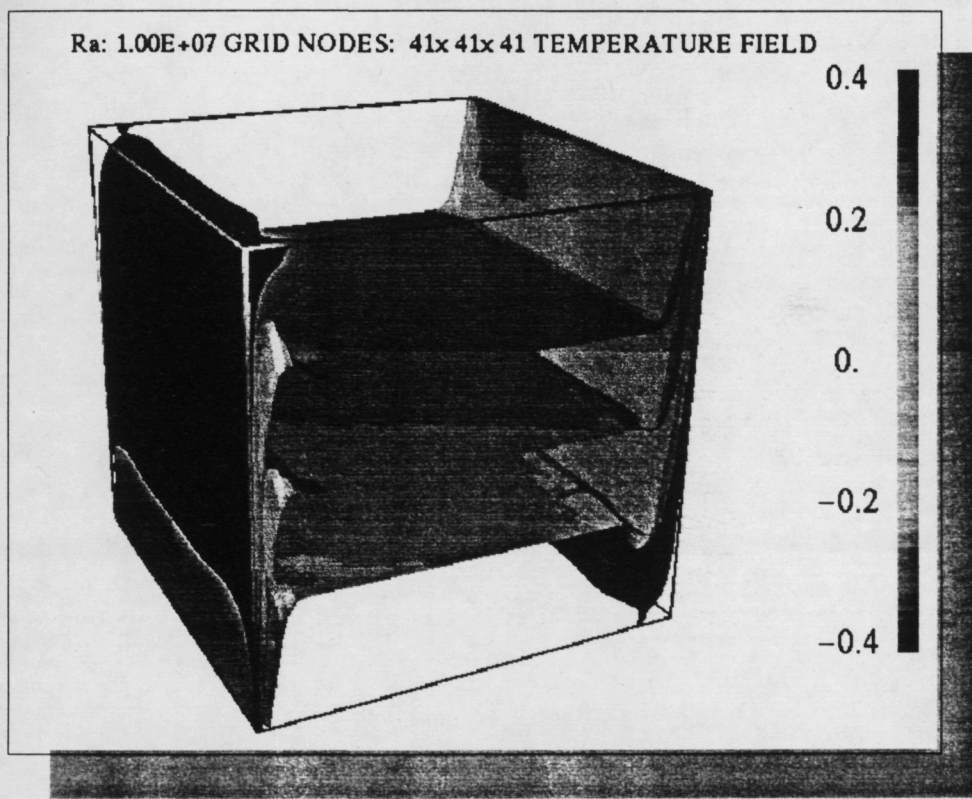


**TRAÇAT PARTÍCULES**

Figura 40. Camp dinàmic: vectors velocitat i traçat de partícules per  $Re=10^7$

**Ra**  $10^7$

**a**



**b**

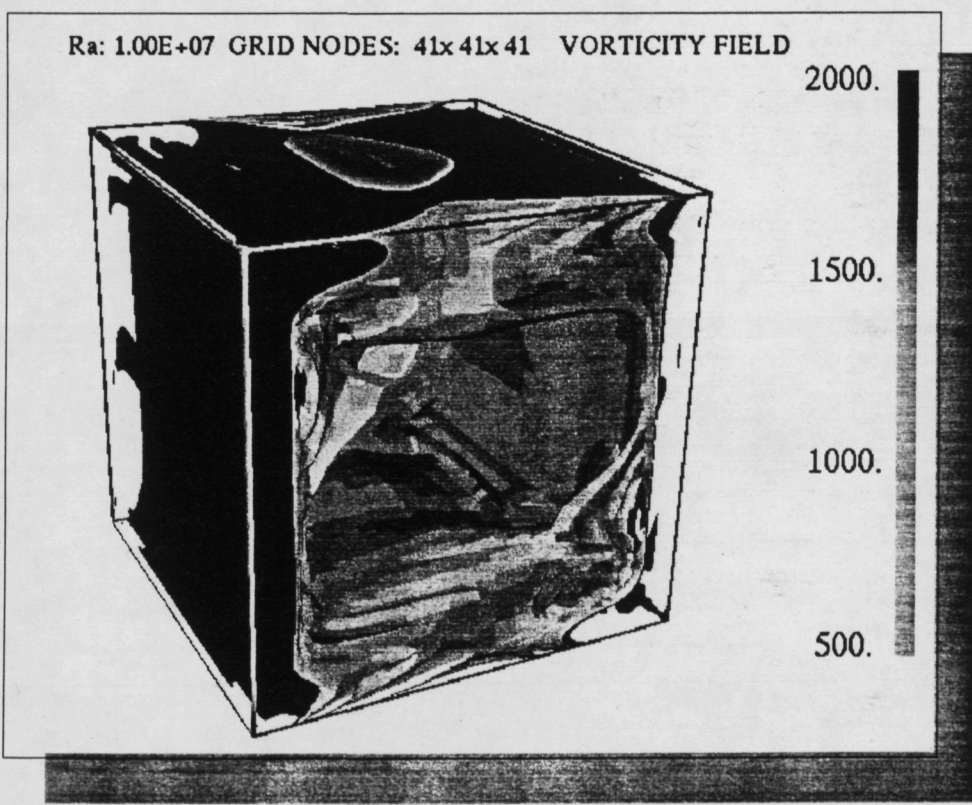


Figura 41. Camp tèrmic i de vorticitat per  $Ra=10^7$

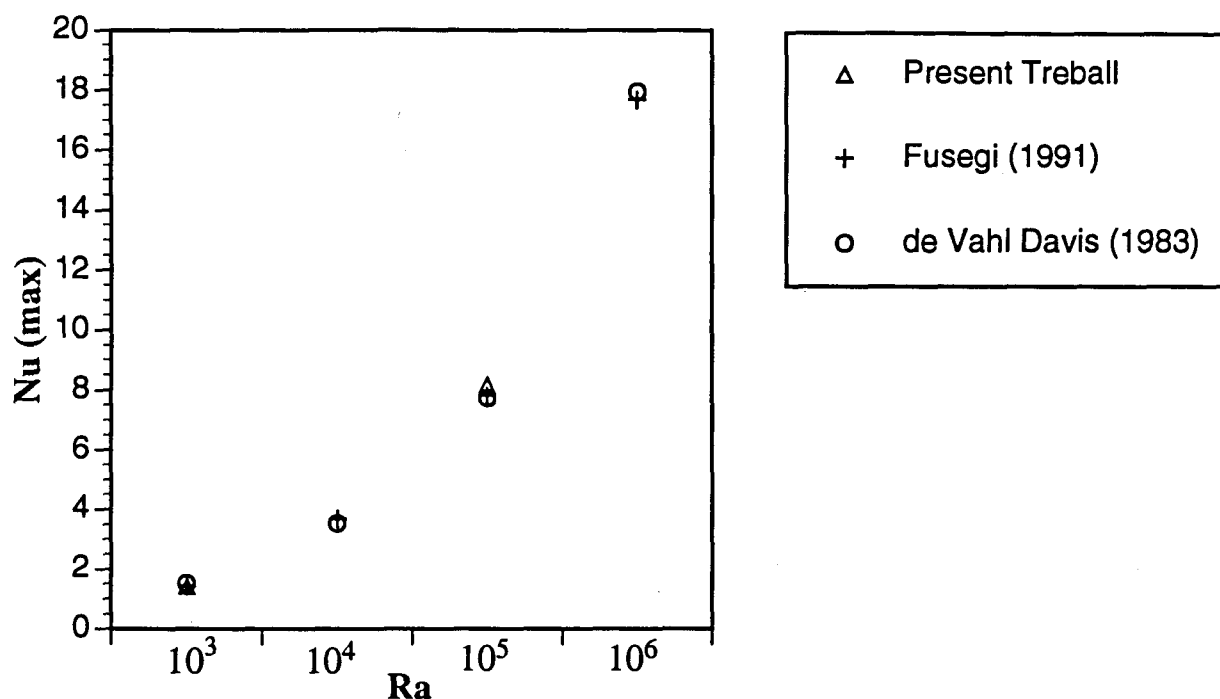


Figura 42. Màxim valor del número Nu a la paret calenta, pel flux CNC 3D, i en el pla de simetria  $y = 0.5$  als règims de  $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$

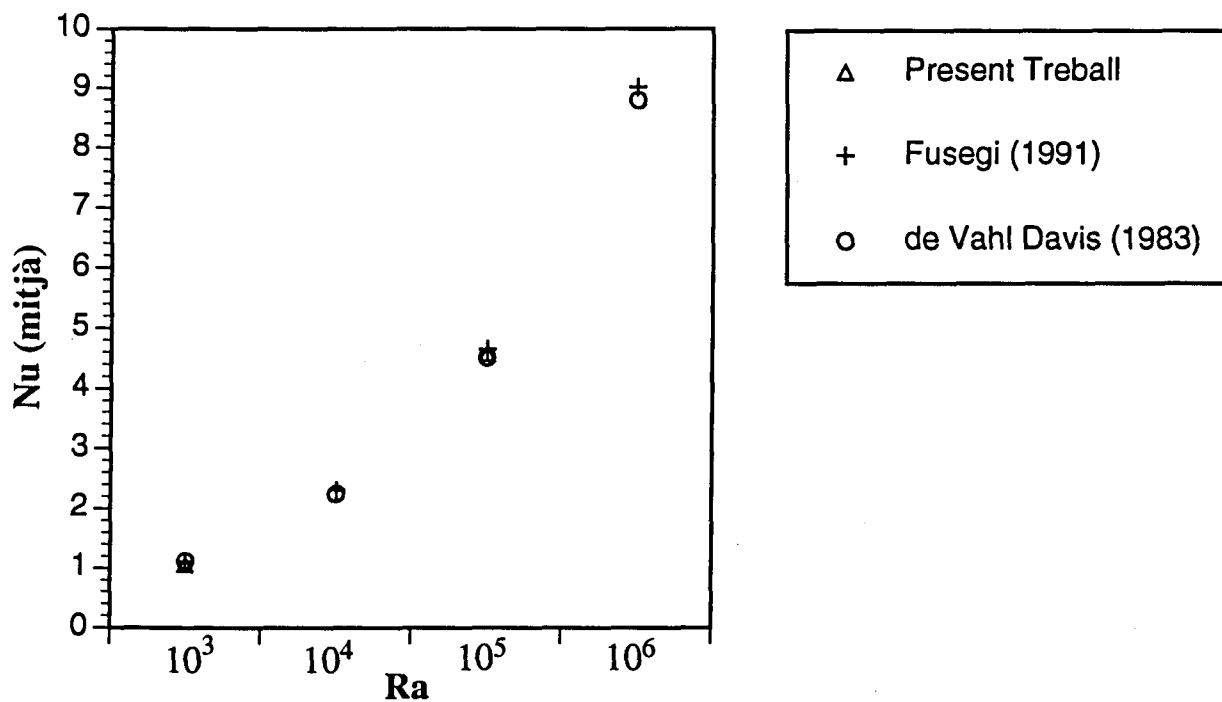


Figura 43. Nu mitjà a la paret calenta, pel flux CNC 3D, i en el pla de simetria  $y = 0.5$  als règims de  $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$

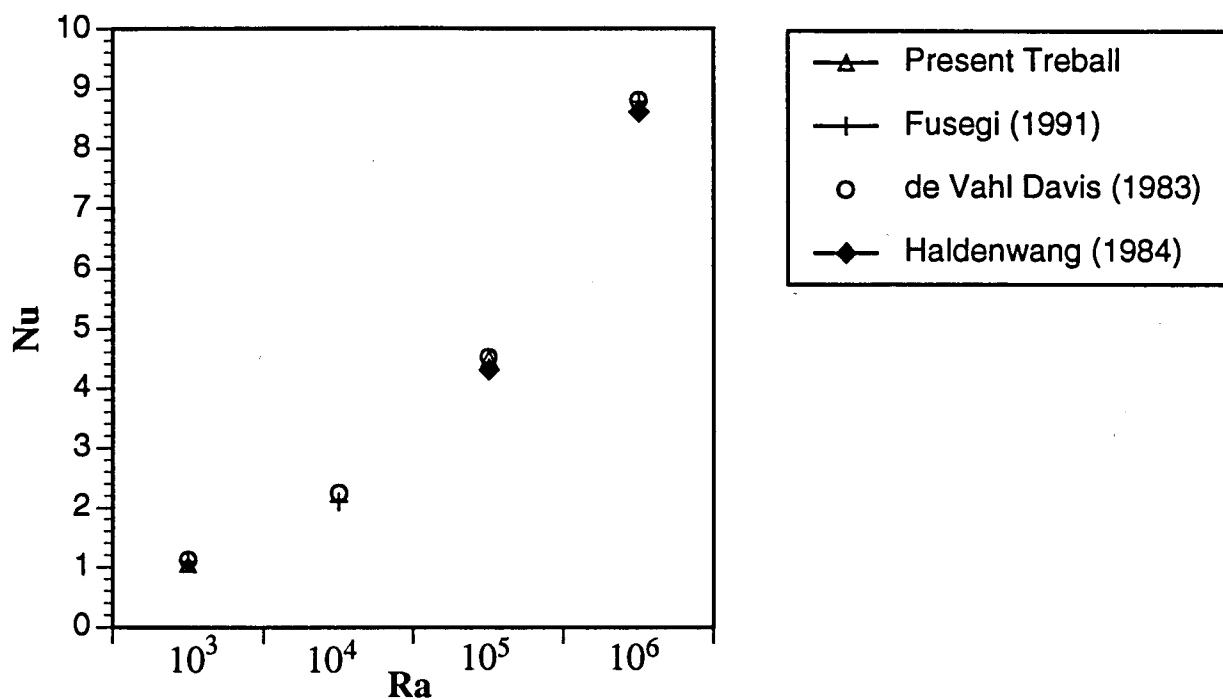


Figura 44. Nu integrat en tota la paret calenta, pel flux CNC 3D, als règims de  $Ra = 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$

#### 4.5. Convecció forçada en règim turbulent

Com s'ha introduït en els capítols anteriors hom ha implementat un model  $k-\epsilon$  de baix nombre de  $Re$  per aplicar-ho al càlcul de fluxos tridimensionals. Aquest model s'ha aplicat al càlcul del flux turbulent en una cavitat per convecció forçada (flux CFC turbulent). Aquest tipus de flux fou estudiat experimentalment per Koseff (1983, 1984, 1989) tot establint que per règims de  $Re$  superiors a 6000 el flux esdevé turbulent, però només a partir d'un número de  $Re$  superior a 10000 es pot afirmar que el flux és plenament turbulent.

En quant a les simulacions numèriques, només s'ha trobat una a la bibliografia i que correspon al càlcul del flux CFC en una cavitat amb relació de geometria 1:1:0.5 ( $x:z:y$ ) a  $Re$  7500 efectuat per Zang (1993). Aquest autor utilitzà un model de turbulència LES (Large Eddy Simulation) aplicat a una xarxa de  $64 \times 64 \times 32$  punts, obtenint una bona concordància amb els resultats experimentals. Zang observà que els seus càlculs sobre-predien la longitud de dues capes límits (la de la paret mòbil i l'oposada). També observà en les seves simulacions l'existència de zones amb viscositat turbulenta negativa, la interpretació física d'aquests valors negatius és l'existència de flux d'energia de les petites estructures cap a les grans estructures ("backscatter").

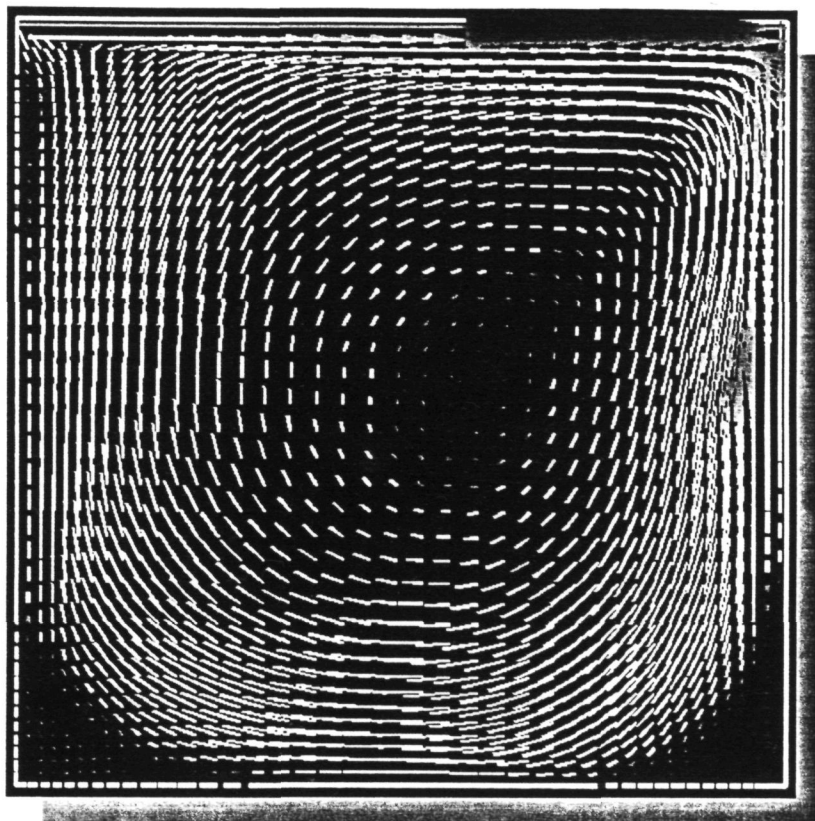
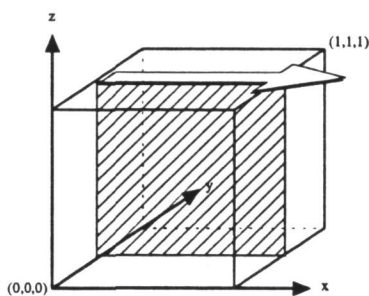
Els resultats realitzats en el present treball corresponen al flux CFC turbulent en una cavitat amb relació de geometria 1:1:1 a  $Re$  7500. Com el model de turbulència utilitzat és el  $k-\epsilon$  s'ha de tenir present que aquest tipus de modelització no pot predir fenòmens tan complexos com el de "backscatter", amb la qual cosa no es podrà obtenir resultats tan acurats com són els produïts amb modelitzacions de tensor de Reynolds o modelitzacions de simulació de les grans estructures (LES). Amb aquestes salvetats a les Figures 45 i 46 es presenten els resultats obtinguts amb el codi desenvolupat en aquest treball.

La Figura 45 mostra tres talls, en tres plans perpendiculars ( $y=0.5$ ,  $z=0.5$  i  $x=0.5$ ) del vector velocitat. A la Figura 45-a es pot observar clarament l'existència del remolí secundari superior d'aigües avall. Les figures 45-b-c mostren clarament la pèrdua de simetria del camp dinàmic, a diferència de les

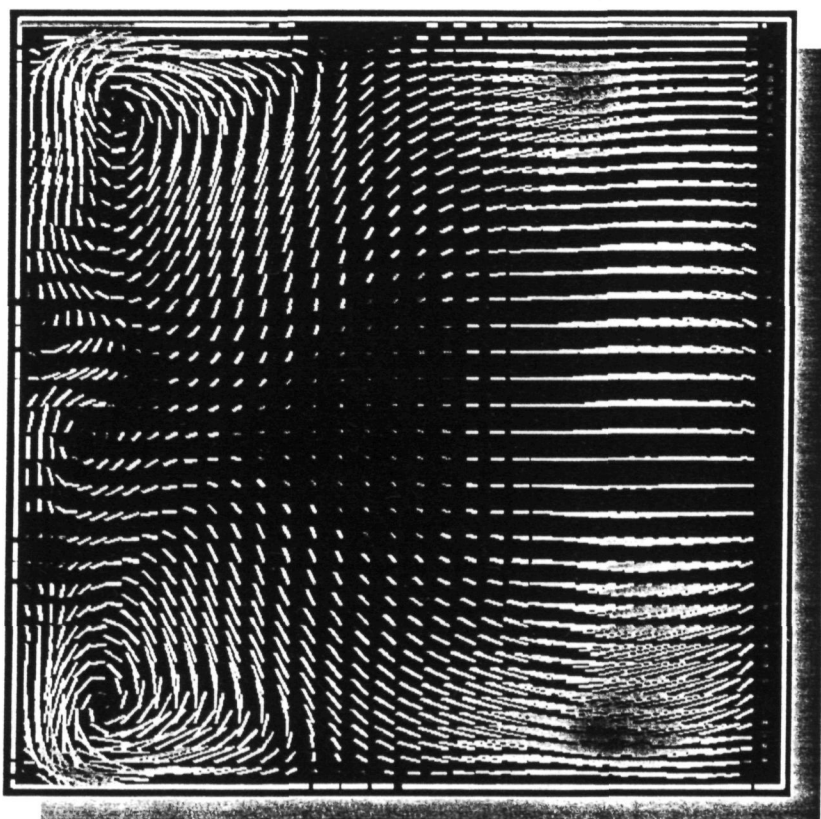
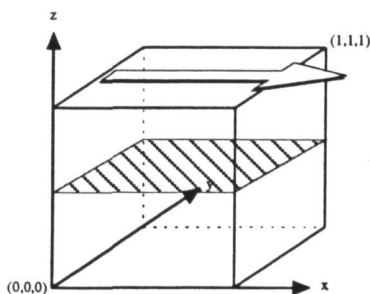
anteriors simulacions laminars del flux CFC, que sempre posseien un pla de simetria a  $y=0.5$ .

Per últim, la Figura 46 compara els perfils de la component U i W del camp mitjà amb els perfils experimentals obtinguts per Prasad (1989). Es pot afirmar que malgrat les deficiències conegudes de la modelització k- $\epsilon$  s'ha pogut obtenir uns perfils de velocitats que s'ajusten prou bé als experimentals.

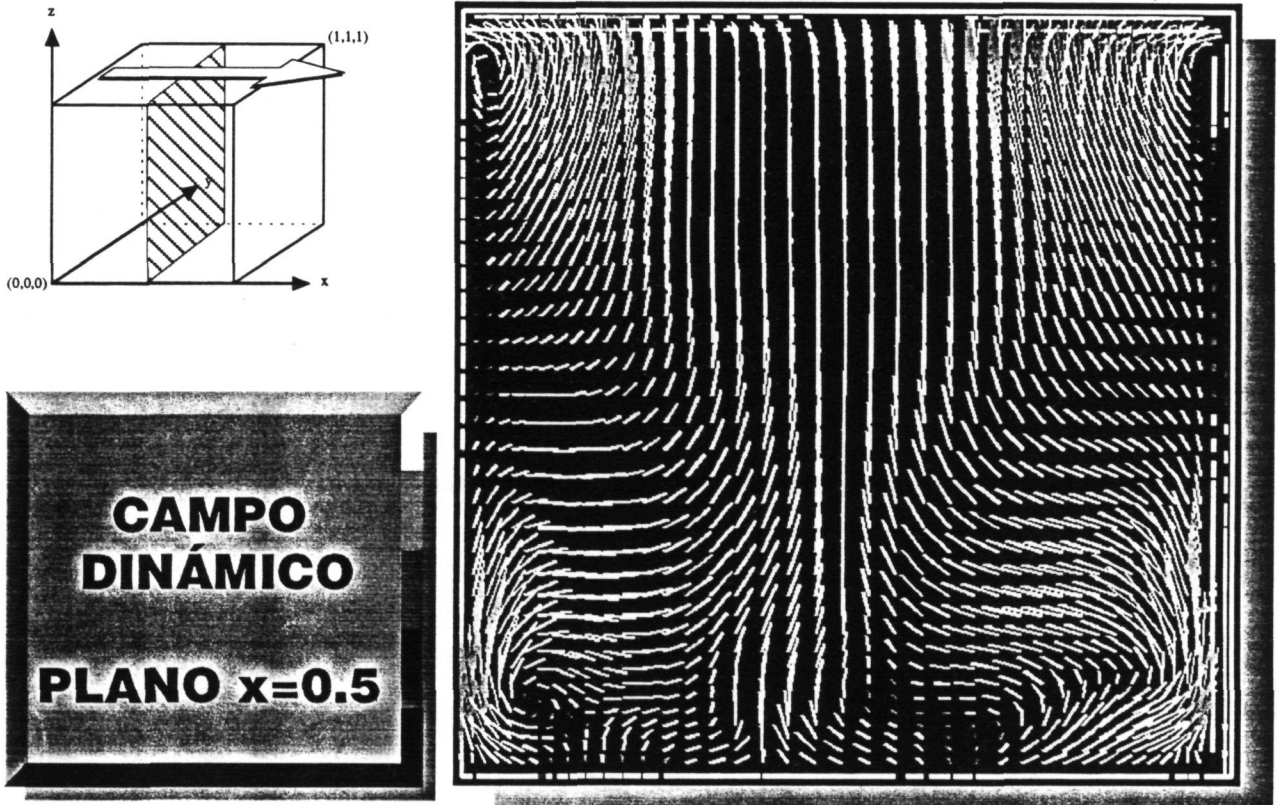
a



b



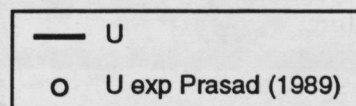
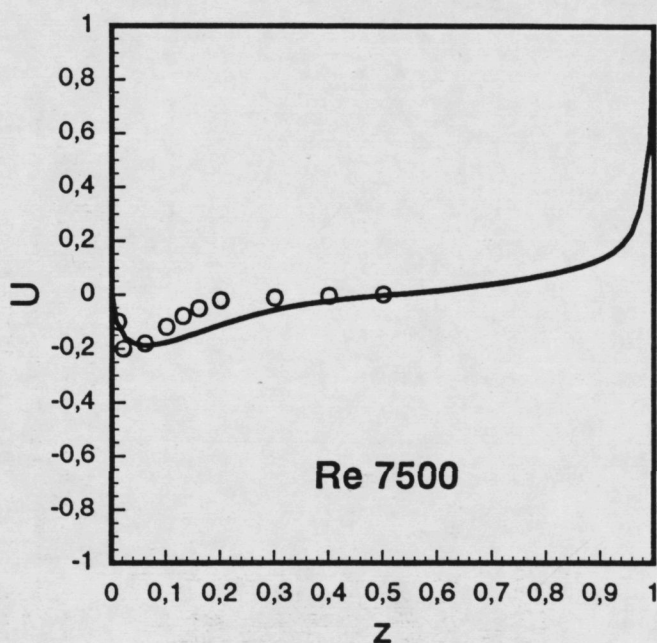
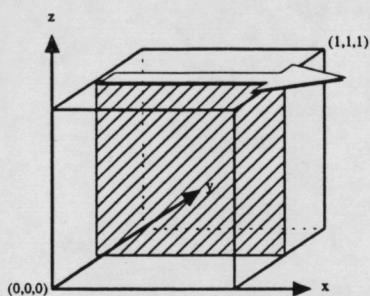
**c**



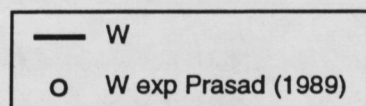
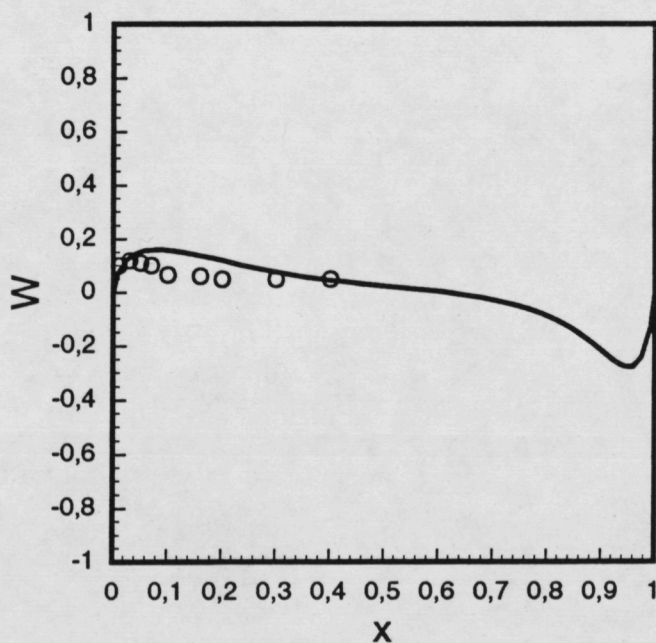
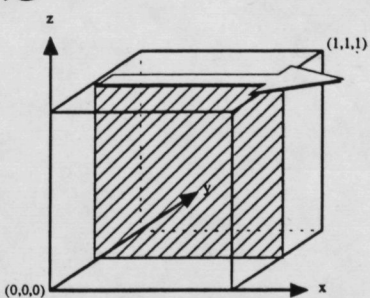
**Figura 45.** Camp dinàmic, projecció del vector velocitat, pel cas del flux CFC turbulent a  $Re\ 7500$ . (a) Pla  $y=0.5$  (b) Pla  $z = 0.5$  (c) Pla  $x = 0.5$



a



b



**Figura 46.** Perfils de la component horitzontal de la velocitat ( $U$ ) i vertical ( $W$ ) del pla  $y=0.5$  en les línies vertical ( $z=0.5$ ) i horitzontal ( $x=0.5$ ) del centre de la cavitat cúbica a  $Re = 7500$ , comparats amb els experimentals de Prasad.

#### 4.6. Simulació del flux en un incinerador de descàrrega de baixa velocitat

Per concluir el capítol de resultats es presenta el càlcul del flux en l'interior de la cambra de combustió d'un incinerador de descàrrega de baixa velocitat. Aquesta simulació pretén ésser una aplicació pràctica d'interés industrial del treball desenvolupat en aquesta tesi, i es basa en els treballs experimentals i numèrics efectuats a la Universitat de Califòrnia a Los Angeles (UCLA) sota la direcció del Dr. Owen Smith. Cal aclarir que només s'ha simulat la dinàmica del flux, sense tenir en compte la reacció de combustió.

L'interés de l'estudi del disseny d'incineradors de petit tamany s'està incrementant en els darrers anys degut a l'oposició pública vers els grans sistemes d'incineració. Aquests petits combustors constitueixen una bona alternativa per substituir els antics sistemes i tenen com a gran avantatge la destrucció de les deixalles en el lloc on s'han produït, reduint considerablement l'impacte sobre l'opinió pública.

A la Figura 47 es mostra un esquema de la configuració del combustor. Tal com descriu Cadou et al (1991), aquest consta de quatre parts principals:

- I La cambra de barreja
- I La secció d'entrada
- III La cambra de combustió
- IV La secció de sortida

A la cambra de barreja hi ha un pistó que permet canviar la relació de dimensions (alçada/radi) d'aquesta cambra. Dins de la cambra de combustió és on es produeix la reacció d'oxidació amb una flama. Com es pot veure a la Figura 48, aquesta cambra és bàsicament una cavitat cúbica amb una relació de dimensions 1:4.6:0.8 (x:y:z).

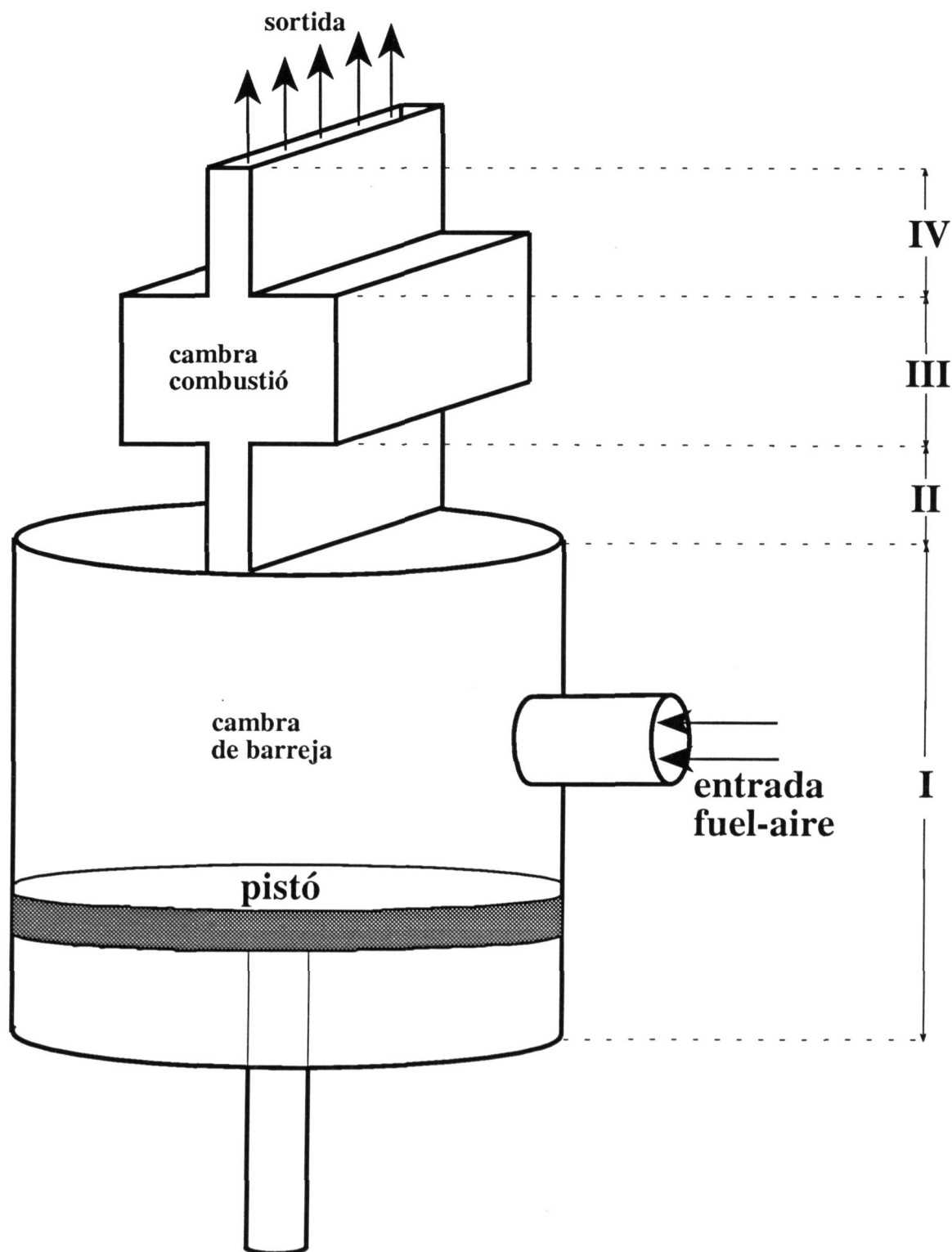
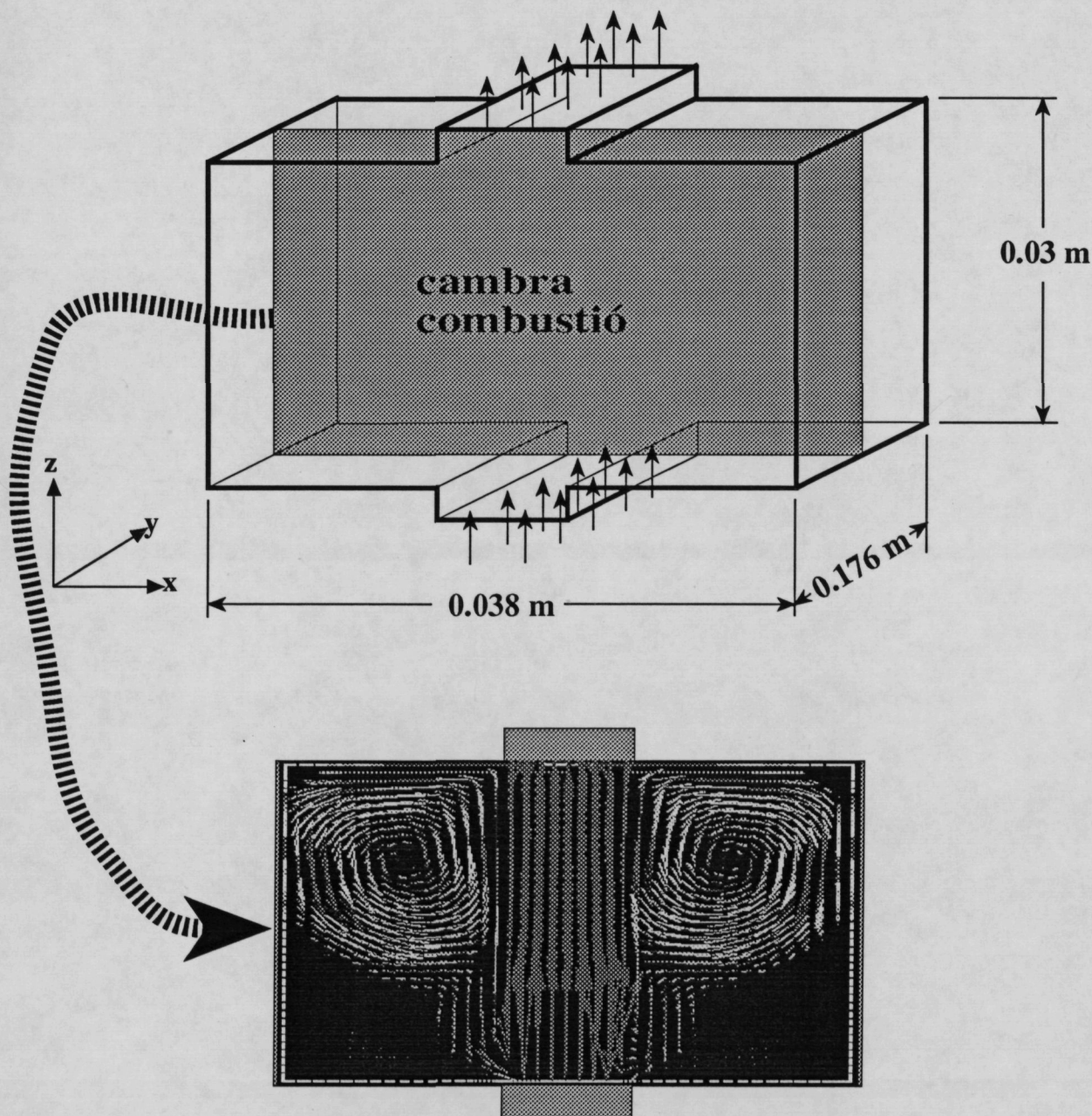


Figura 47. Esquema del combustor de descàrrega de baixa velocitat.



**Figura 48.** Detall de la cambra de combustió, dimensions, eix de coordenades, i esquema del flux en el pla  $y=0.88$

Foren Hepler & Smith (1992) qui simularen el flux en aquest incinerador amb un codi bidimensional, estacionari, i que tingué en compte la reacció de combustió. Basant-nos en aquest treball s'ha decidit efectuar un estudi

# ESTUDI NUMÈRIC DE FLUXOS LAMINARS I TURBULENTS EN UNA CAVITAT CÚBICA

Cdr. Francesc Xavier Grau }  
dir. Francesc Giralt -

Llegido a Facultat de Química

Memòria presentada per en  
**ILDEFONSO CUESTA ROMEO**

per a optar al grau de Doctor en  
Ciències Químiques.

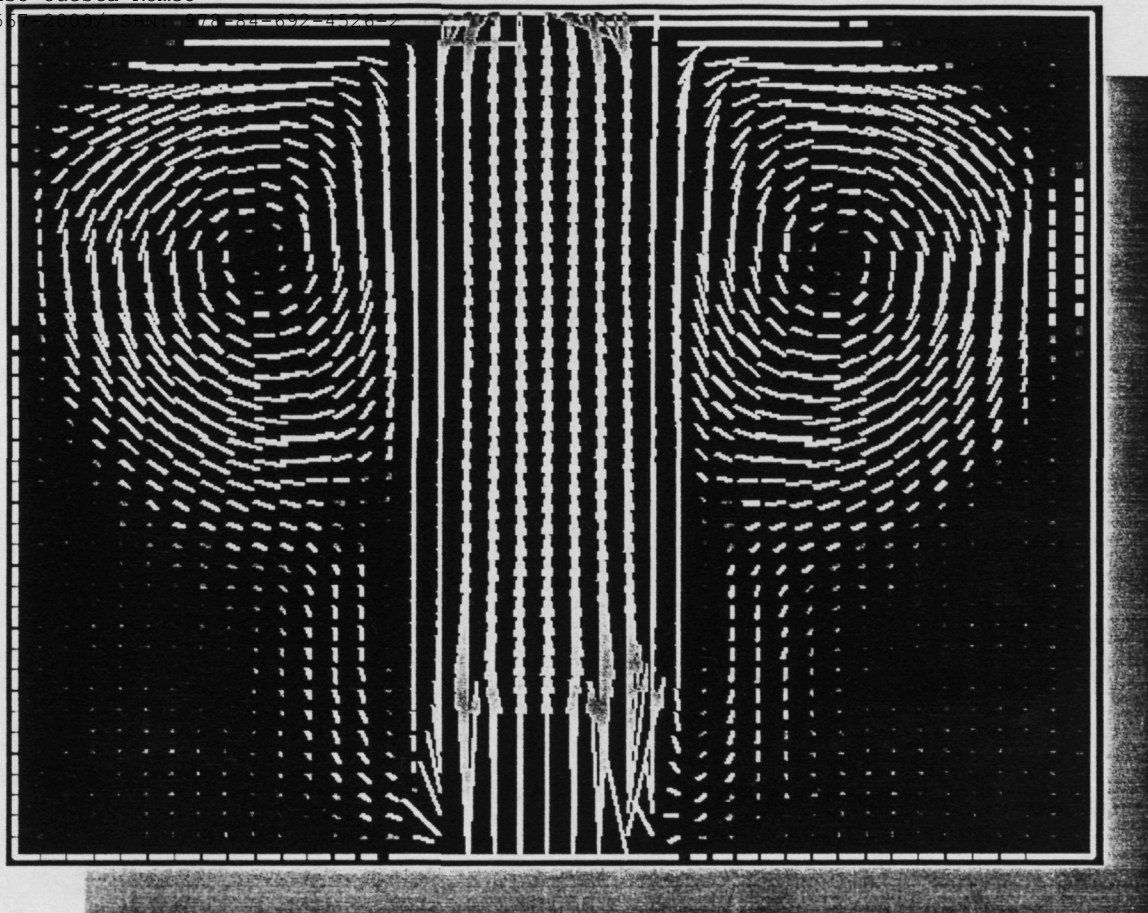
Tarragona, juny de 1993

preliminar de la dinàmica del fluid en règim laminar dins de la cambra de combustió. Tot i preveient que en un futur treball s'incorporarà l'efecte de la reacció química pel cas de flux laminar i turbulent, en aquest últim cas s'utilitzaria el model de turbulència k- $\epsilon$  desenvolupat en el present treball.

Els càlculs s'han efectuat en el domini esquematitzat en la Figura 48, discretitzant-se amb una xarxa de 41x21x41 punts. Les condicions de la simulació han estat les següents, s'ha suposat un flux d'entrada amb perfil pla a l'incinerador. S'han efectuat tres simulacions diferents, variant la velocitat d'entrada del flux amb valors  $U_0 = 1,3$  i  $6$  m/s. La viscositat cinemàtica del fluid és  $\nu = 0.158 \cdot 10^{-4}$  m<sup>2</sup>/s que correspon a una barreja estequiomètrica de metà i aire. Basant-se en la amplada de la cavitat com a longitud característica i com a escala de velocitat la d'entrada del flux, els règims de número de Reynolds simulats són de  $Re = 2405, 7215$  i  $14430$ .

L'anàlisi dels resultats que es troben a les Figures 40, 50 i 51 revelen l'existència, pels dos règims de  $Re$  més baixos, de dos grans remolins molt semblants als produïts en la cavitat cúbica, ubicats a la part superior dreta i esquerra de l'incinerador. Així mateix s'observen zones de recirculació secundàries a les cantonades superior esquerra i dreta. En quant el tamany del remolí primari es pot veure que per un  $Re$  de 7215 aquest ocupa més superfície, fet que es pot observar també amb les iso-superfícies de pressió de les Figures 49-b i 50-b.

Per últim, pel règim de  $Re = 14430$  no s'ha obtingut solució estacionària i la Figura 51 mostra el resultat a un temps determinat. És possible que en aquest  $Re$  s'estigui produint la transició cap a un règim de flux turbulent, però aquesta hipòtesi s'hauria de verificar amb més rigurositat.



b

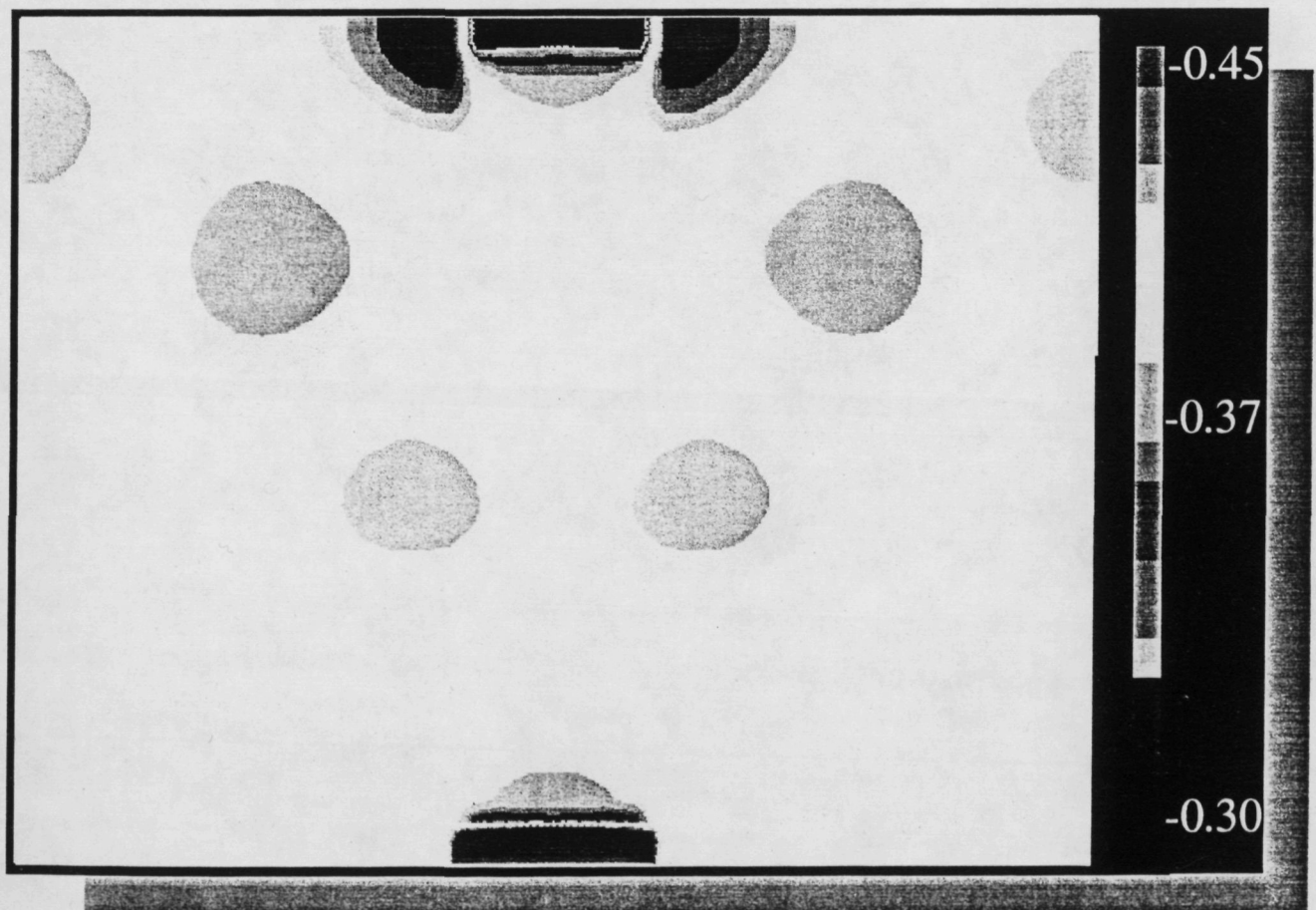


Figura 49. Camp de velocitats (a) i pressió (b) al pla central  $y=0.088$  m de l'incinerador pel cas de velocitat d'entrada  $U_0=1$  m/s ( $Re = 2405$ )

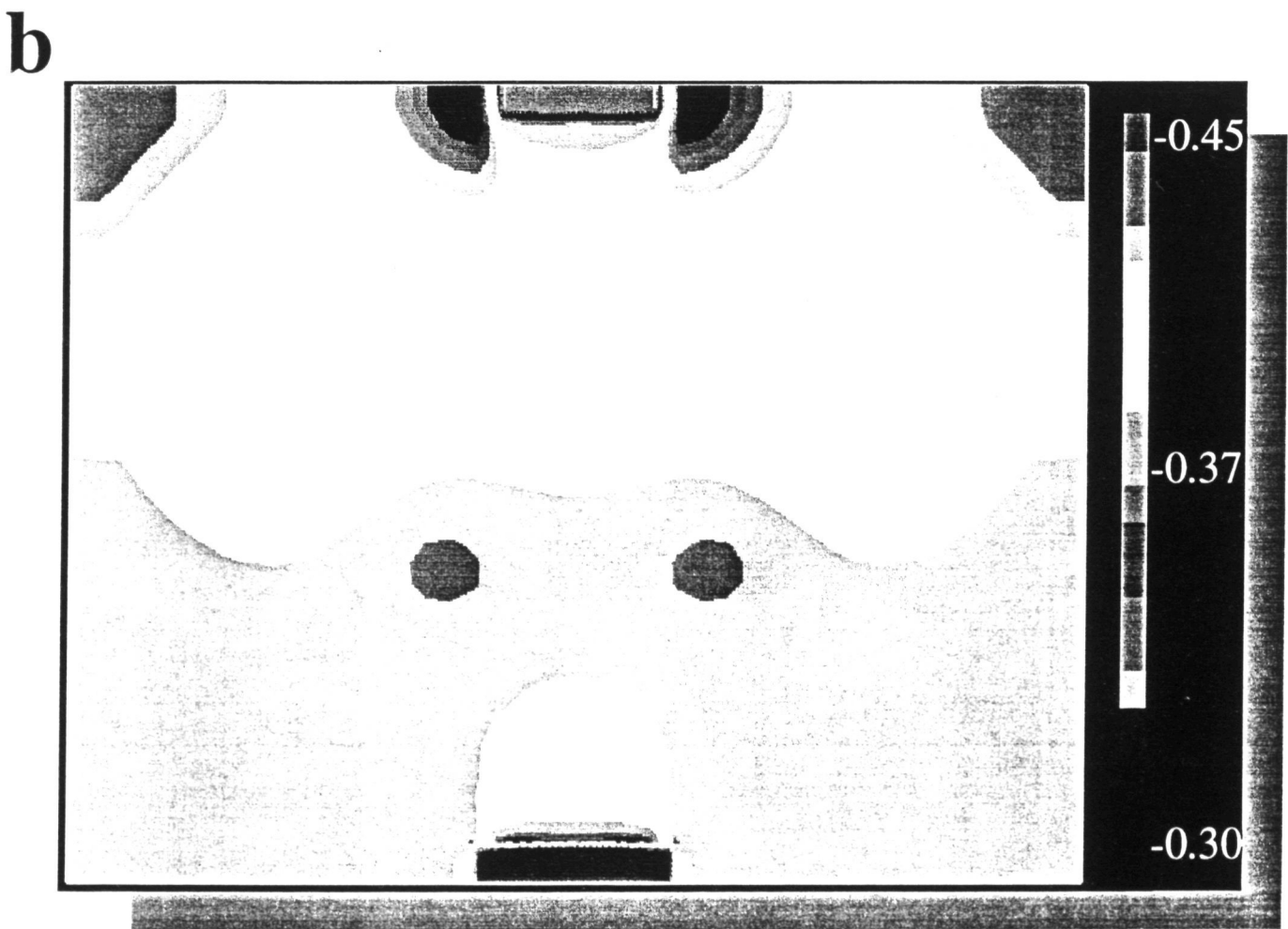
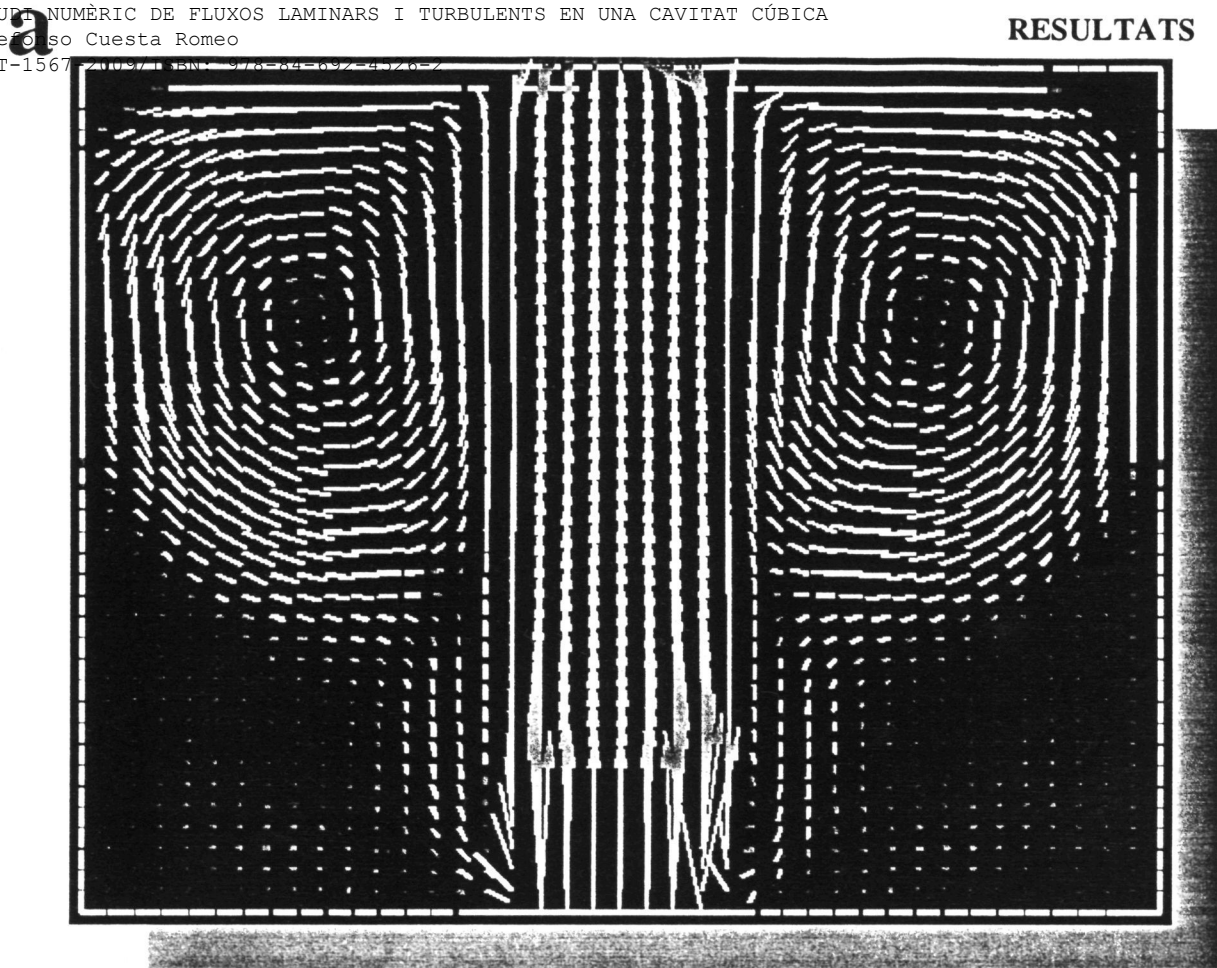
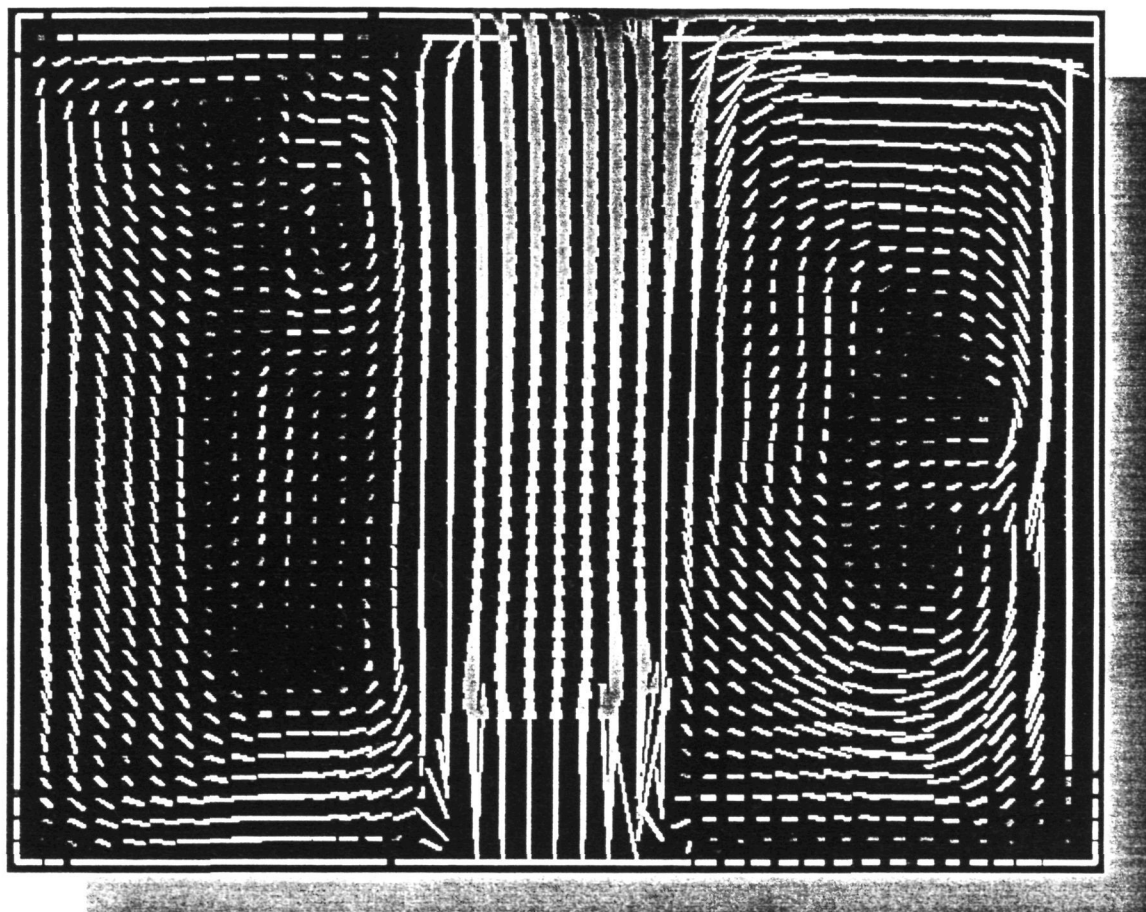


Figura 50. Camp de velocitats (a) i pressió (b) al pla central  $y=0.088$  m de l'incinerador pel cas de velocitat d'entrada  $U_0=3$  m/s ( $Re = 7215$ )



a



b

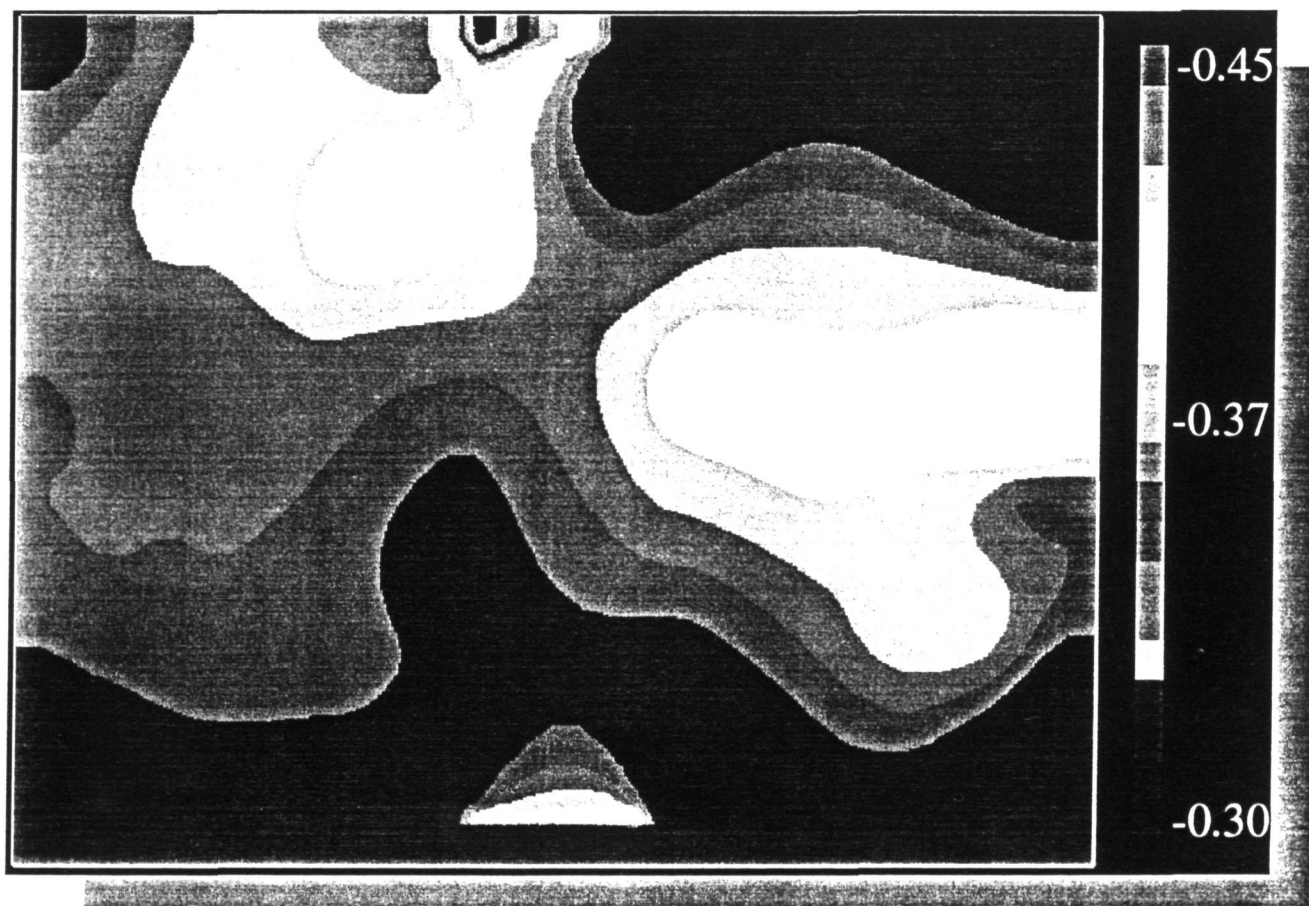


Figura 51. Camp de velocitats (a) i pressió (b) al pla central  $y=0.088$  m de l'incinerador pel cas de velocitat d'entrada  $U_0=6$  m/s ( $Re = 14430$ )

# 5

---

# CONCLUSIONS

Al llarg de tot aquest treball s'ha demostrat que el codi desenvolupat serveix com a TVN (Tunel de Vent Numèrica), acomplint-se un dels objectius principals d'aquesta tesi. Dels resultats obtinguts amb aquest codi es poden establir les següents conclusions:

- i) La gran versatilitat i solidesa del codi *3dynamic* ha permet simular un gran ventall de fluxos, bidimensionals i tridimensionals, laminars i turbulents, isotèrmics i no isotèrmics, confinats en una cavitat o amb parets obertes. Tot això fa d'aquest codi una eina molt potent per simular fluxos tridimensionals amb geometria cartesiana.
- ii) La tesi formulada per l'autor d'aquest treball: "És possible l'aplicabilitat del model de turbulència k- $\epsilon$  desenvolupat per Herrero (1992) a fluxos complexos tridimensionals, com són els de convecció forçada en una cavitat cúbica", queda contestada amb els resultats presentats, tot i arribant a la conclusió que aquesta modelització s'ha d'utilitzar amb reserves.
- iii) També es demostra que pels tipus de fluxos estudiats el model de turbulència k- $\epsilon$  dóna resultats menys acurats que els obtinguts per models de simulació de les grans estructures (LES). És àmpliament conegut que en zones on hi ha flux amb moviment contra el gradient de pressió, o en zones on hi ha transferència reversa d'energia ("backscatter") l'aplicabilitat de la modelització k- $\epsilon$  és restringida. Malgrat tot això s'han obtingut resultats tridimensionals i estacionaris del flux de convecció forçada en una cavitat a un Re de transició a la turbulència,  $Re = 7500$ , amb perfils de velocitat que s'ajusten bé als experimentals.
- iv) L'aprofitament òptim dels recursos informàtics constitueix un punt important a l'hora de construir un codi que pugui fer els càlculs en un

temps raonable i estalviant al màxim un recurs costós com és el temps de cpu dels superordinadors vectorials actuals. També s'ha executat el codi en estacions de treball escalars, sobre tot en l'etapa de desenvolupament i per fer els càlculs bidimensionals. Per tant és factible l'ús d'aquest codi en un rang d'ordinadors que comença en les estacions de treballs fins als superordinadors més potents.

- v) Pel cas dels fluxos tridimensionals els esforços fets per tal del representar els camps de les variables calculades queden del tot justificats, ja que és l'única manera de compendiar i visualitzar d'una manera ràpida l'ingent volum d'informació obtinguda amb les simulacions tridimensionals.
- vi) El codi desenvolupat s'ha revelat eficient per predir del fluxos d'aplicació industrial. El càlcul del flux a l'interior d'un incinerador de petita escala, demostra que el rang d'aplicabilitat del codi **3dynamic** arriba més enllà dels fluxos teòrics.

# 6

---

# RECOMANACIONS

El TVN encara és un projecte que necessita més esforç ja que resta molt treball per fer per tal de posseir un codi capaç de simular qualsevol flux en qualsevol geometria. Tanmateix ja es disposa d'una primera aportació del que pot arribar a ser, i que per geometries determinades ha permet la simulació de diferents fluxos.

Per citar algunes de les potencials i futures millores del codi:

- Augmentar el rang d'aplicabilitat a d'altres tipus de geometria com la cilíndrica, esfèrica o molt millor, traduir el codi per se aplicable a qualsevol geometria amb l'ús de coordenades generalitzades.
- Millorar el model de turbulència  $k-\epsilon$ , sobre tot pel cas de fluxos de convecció natural, encara que fos preferible el desenvolupament de models de turbulència LES o Reynolds Stress.
- Utilització d'algoritmes més òptims com és el de multi-xarxa ("multigrid), per resoldre l'equació de poisson de la pressió. Aquest produiria estalvis considerables en el temps de cpu emprat.

Per acabar, una recomanació que faria a qui continués aquest treball és que fos sistemàtic i ordenat. Per construir un codi sempre s'ha de començar per el més senzill fins arribar poc a poc fins la part més complexa. L'experiència en aquest sentit ha demostrat que sempre que hom vol estalviar passos intermitjos o començar per quelcom més complicat per tal d'anar més ràpid, el resultat sempre és el mateix, el fracàs, i per tant tornar enrera per començar pel més senzill.

# 7

---

# BIBLIOGRAFIA

Aidun, C.K.; Triantafillopoulos, N.G. i Benson, J.D. 1991. Global stability of a lid-driven cavity with throughflow: Flow visualization studies. *Phys. Fluids A* **3**, pp. 2081-2091.

Amsden, A.A. i Harlow, F.H. 1970. The SMAC Method: A numerical Technique for calculating incompressible Fluid flows. Los Alamos Scientific Laboratory of the University of California Report. LA-4370, pp. 85.

Arnold, J.N. Heat Transfer by Natural Convection in Enclosed Rectangular Cavities. Tesi, University of California, Los Angeles.

Aziz, K. i Hellums, J.D. 1966. Numerical Solution of the Three-Dimensional Equations of Motion for Laminar Natural Convection. *Phys. Fluids* **10**, pp. 314-324.

Batchelor, G.K. 1954. Heat Transfer by Free Convection Across a Closed Cavity Between Vertical Boundaries at Different Temperatures. *Quarterly of Applied Mathematics* **12**, pp. 209-233.

Battle, M. et al. 1989. Vectorization and Parallelization on IBM 3090/VF. Centre National Universitaire Sud de Calcul, Montpellier, 203 pp.

Ben Mabrouk, S. 1984. Étude numérique de la convection naturelle en cavité tridimensionnelle. Tesi, Université de Poitiers.

Bénard, M.H. 1901. Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquide transportant de la chaleur par convection en régime permanent. *Ann. Chim. Phys* **23**, pp. 62-144.

Benson, J.D. i C.K. Aidun 1992. Transition to unsteady nonperiodic state in a through-flow lid-driven cavity. *Phys. Fluids A* **4**, pp. 2316-2319.

Bohn, M. S. 1983. Experimental Study of Three-Dimensional Natural Convection at High Rayleigh Number. Rep. Solar Energy Research Institute no. SERI/TR-252-1912, pp. 46.

Bohn, M. S. 1984. Experimental Study of Three-Dimensional Natural Convection at High Rayleigh Number. *Journal of Heat Transfer* **106**, pp. 339-345.

Brandt, A. i Yavneh, I. 1991. Inadequacy of First-Order Upwind Difference Schemes for Some Recirculating Flows. *Journal of Computational Physics* **93**, pp. 128-143.

Braza, M. 1981. Simulation numérique du décollement Instationnaire externe par une formulation vitesse-pression. Application à l'écoulement autour d'un cylindre. Tesi Institut National Polytechnique de Toulouse, France, pp. 329.

Braza, M.; Chassaing, P. i Ha Minh, H. 1986. Numerical study and physical analysis of the pressure and velocity fields in the near wake of a circular cylinder. *J. Fluid Mech.* **165**, pp. 79-130.

Buchberg, H.; Catton, I. i Edwards, D.K. 1976. Natural Convection in Enclosed Spaces-A Review of Application to Solar Energy Collection. *J. Heat Transfer* , pp. 182-188.

Burggraf, O. 1966. Analytical and numerical studies of the structure of steady separated flows. *J. Fluid Mech.* **24**, pp. 113-151.

Cadou, Ch. et al. 1991. Laser diagnostic techniques in a resonant incinerator. *Environmental Sensing and Combustion Diagnostics* **1434**, pp. 67-77.

Carriere, Ph. i Jeandel, D. 1991. A 3D Finite Element Method for the Simulation of Thermoconvective Flows and its Performances on a Vector-Parallel Computer. *Int. J. for Numerical Methods in Fluids* **12**, pp. 929-946.

Cazalbou, J.-B. 1983. Développement d'un code de calcul d'écoulements tridimensionnels instationnaires. Application à l'analyse physique de

phénomènes de convection et d'instabilité. Tesi, Institut National Polytechnique de Toulouse.

Chan, A.M.C. i Banerjee, S. 1979. Three-Dimensional Numerical Analysis of Transient Natural Convection in Rectangular Enclosures. *Journal of Heat Transfer* **101**, pp. 114-119.

Chenoweth, D.R. i Paolucci, S. 1986. Natural convection in an enclosed vertical air layer with large horizontal temperature differences. *J. Fluid Mech.* **169**, pp. 173-210.

Chorin, A.J. 1967. A Numerical Method for Solving Incompressible Viscous Flow Problems. *J. Comp. Physics* **2**, pp. 12-26.

Davidson, L. 1990. Calculation of the turbulent buoyancy-driven flow in a rectangular cavity using an efficient solver and two different low Reynolds number k- $\epsilon$  turbulence models. *Numerical Heat Transfer* **18**, pp. 129-147.

Davidson, L. 1990. Second-order corrections of the k- $\epsilon$  model to account for non-isotropic effects due to buoyancy. *Int. J. Heat Mass Transfer* **33**, pp. 2599-2608.

Deardorff, J.W. i Willis, G.E. 1965. The effect of two-dimensionality on the suppression of thermal turbulence. *J. Fluid Mech.* **23**, pp. 337-353.

De Vahl Davis, G. 1968. Laminar natural convection in an enclosed rectangular cavity. *Int. J. Heat Mass Transfer* **11**, pp. 1675-1693.

De Vahl Davis, G. and Mallinson, G. D. 1976. An Evaluation of Upwind and Central Difference Approximations by a Study of Recirculating Flow. *Computers and Fluids* **4**, pp. 29-43.

De Vahl Davis, G i Jones, I. P. 1983. Natural convection in a square cavity: a comparison exercise. *Int. J. Numer. Methods Fluids* **3**, pp. 227-248.

De Vahl Davis, G 1983. Natural convection of air in a square cavity: a benchmark numerical solution. *Int. J. Numer. Methods Fluids* **3**, pp. 249-264.

Eckert, E.R.G. i Carlson, W.O. 1961. Natural convection in an air layer enclosed between two vertical plates with different temperatures. *Int. J. Heat Mass Transfer* **2**, pp. 106-120.

Elder, J.W. 1965. Laminar free convection in a vertical slot. *J. Fluid Mech.* **23**, pp. 77-98.

Elder, J.W. 1965. Turbulent free convection in a vertical slot. *J. Fluid Mech.* **23**, pp. 99-111.

Freitas, C. J. et al 1985. Numerical simulation of three-dimensional flow in a cavity. *Int. J. Num. Meth. Fluids* **5**, pp. 561-575.

Fusegi, T. et al. 1991. A numerical study of three-dimensional natural convection in a differentially heated cubical enclosure. *Int. J. Heat Mass Transfer* **34**, pp. 1543-1557.

Fusegi, T.; Hyun, J.M. i Kuwahara, K. 1991. Three-dimensional simulations of natural convection in a sidewall-heated cube. *Int. J. Num. Methods in Fluids* **13**, pp. 857-867.

Fusegi, T.; Hyun, J.M. i Kuwahara, K. 1991. Transient three-dimensional natural convection in a differentially heated cubical enclosure. *Int. J. Heat Mass Transfer* **34**, pp. 1559-1564.

Galea, E. R. i Markatos, N.C. 1991. The mathematical modelling and computer simulation of fire development in aircraft. *Int. J. Heat Mass Transfer* **34**, pp. 181-197.

Galpin, P.F.; Van Doormaal, J.P. i Raithby, G.D. 1985. Solution of the Incompressible Mass and Momentum Equations by Application of a Coupled Equation Line Solver. *Int. J. Num. Methods in Fluids* **5**, pp. 615-625.

Galpin, P.F. i Raithby, G.D. 1986. Numerical Solution of Problems in Incompressible Fluid Flow: Treatment of the Temperature-Velocity Coupling. *Numerical Heat Transfer* **10**, pp. 105-129.

Ghia, K.N. 1979. Use of Primitive Variables in the Solution of Incompressible Navier-Stokes Equation ???



Ghia, U.; Ghia, K.N. i Shin, C.T. 1982. High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes Equations and a Multigrid Method. *J. Computational Physics* **48**, pp. 387-411.

Gill, A.E. 1966. The boundary-layer regime for convection in a rectangular cavity. *J. Fluid Mech.* **26**, pp. 515-536.

Golub, G.H. i Van Loan, C.F. 1989. *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press, 642 pp.

Grau, X. 1986. Fenòmens de transport en fluxos complexos evolutius: Simulació numèrica d'esteles de cilindres. Tesi, Universitat de Barcelona.

Gray, D.D. i Giorgini, A. 1976. The validity of the Boussinesq approximation for liquids and gases. *Int. J. Heat Mass Transfer* **19**, pp. 545-551.

Greenspan, D. Numerical studies of prototype cavity flow problems. *Computer J* **12**, pp 88-93.

Hackman, L.P.; Raithby, G.D. i Strong, A. B. 1984. Numerical Predictions of Flows Over Backward-Facing Steps. *Int. J. for Numerical Methods in Fluids* **4**, pp. 711-724.

Han, T.; Humphrey, J.A.C. i Launder, B.E. 1981. A Comparison of Hybrid and Quadratic-Upstream Differencing in High Reynolds Number Elliptic Flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **29**, pp. 81-95.

Harlow, F.H. i Welch, J.E. 1965. Numerical Calculation of Time-Dependent Viscous Incompressible Flow of Fluid with Free Surface. *Physics of Fluids* **8**, pp. 2182-2189.

Hayase, T.; Humphrey, J.A.C. i Greif, R. 1992. A Consistently Formulated QUICK Scheme for Fast and Stable Convergence Using Finite-Volume Iterative Calculation Procedures. *Journal of Computational Physics* **98**, pp. 108-118.

Henkes, R.A.W.M. i Hoogendoorn, C.J. 1989. Comparison of turbulence models for the natural convection boundary layer along a heated vertical plate. *Int. J. Heat Mass Transfer* **32**, pp. 157-169.

Henkes, R.A.W.M. i Hoogendoorn, C.J. 1990. On the stability of the natural convection flow in a square cavity heated from the side. *Applied Scientific Research* **47**, pp. 195-220.

Henkes, R.A.W.M.; Van der Vlugt, F. i Hoogendoorn, C.J. 1990. Natural-convection flow in a square cavity calculated with low-Reynolds-number turbulence models. *Int. J. Heat Mass Transfer* **34**, pp. 377-388.

Henkes, R.A.W.M. 1990. Natural-convection boundary layers. Tesi, Technische Universiteit Delft.

Hepler, W. i Owen, S. 1992. Numerical Simulation of Steady-State Dump Combustor Operation. Report del Departament of Chemical Engineering, University of California, Los Angeles, USA.

Herrero, J. 1992. Desenvolupament de models k- $\epsilon$ : Simulació numèrica de fluxos turbulents confinats. Tesi, Universitat Rovira i Virgili.

Hortmann, M.; Peric, M. i Scheurer, G. 1990. Finite volume multigrid prediction of laminar natural convection: bench-mark solutions. *Int. J. Num. Methods Fluids* **11**, pp. 189-207.

Hyun, J.M. i Lee, J.W. 1988. Transient natural convection in a square cavity of a fluid with temperature-dependent viscosity. *Int. J. Heat and Fluid Flow* **9**, pp. 278-285.

Ince, N.Z. i Launder, B.E. 1989. On the computation of buoyancy-driven turbulent flows in rectangular enclosures. *Int. J. Heat and Fluid Flow* **10**, pp. 110-117.

Incropera, F.P. 1988. Convection Heat Transfer in Electronic Equipment Cooling. *J. Heat Transfer* **110**, pp. 1097-1111.

Issa, R.I. 1986. Solution of the Implicitly Discretised Fluid Flow Equations by Operator-Splitting. *J. Comp. Physics* **62**, pp. 40-65.

Issa, R.I.; Gosman, A.D. i Watkins, A.P. 1986. The Computations of Compressible and Incompressible Recirculating Flows by a Non-iterative Implicit Scheme. *J. Comp. Physics* **62**, pp. 66-82.

Ivey, G.N. 1984. Experiments on transient natural convection in a cavity. *J. Fluid Mech.* **144**, pp. 389-401.

Iwatsu, R. et al 1989. Numerical simulation of three-dimensional flow structure in a driven cavity. *Fluid Dynamics Research* **5**, pp. 173-189.

Iwatsu, R.; Hyun, J.M. and Kuwahara, K. 1989. Analyses of three-dimensional flow calculations in a driven cavity. *Fluid Dynamics Research* **6**, pp. 91-102.

Jackson, C.P. i Robinson, P. C. 1985. A Numerical Study of Various Algorithms Related to the Preconditioned Conjugate Gradient Method. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering* **21**, pp. 1315-1338.

Jang, D.S.; Jetli, R. i Acharya, S. 1986. Comparison of the PISO, SIMPLER, and SIMPLEC Algorithms for the Treatment of the Pressure-Velocity Coupling in Steady Flow Problems. *Numerical Heat Transfer* **10**, pp. 209-228.

Javelas, R. et al 1990. Etude dans des cavités à grand nombre de Rayleigh d'écoulements de convection naturelle pour des configurations simples. Application à l'habitat. *Rev. Gén. Therm. Fr* **339**, p. 152-159.

Jennings, A. 1978. The Solution of Sparse Linear Equations by the Conjugate Gradient Method. *Int. J. for Numerical Methods in Engineering* **12**, pp. 141-158.

Jiang, B.; Lin, T.-L. i Povinelli, L.A. 1992. Least-Squares Finite Element Solution of 3D Incompressible Navier-Stokes Problems. *Proceedings of the First European Computational Fluid Dynamics Conference, Bruxelles*, pp. 391-395.

Johnson, R.W. i Mackinnon, R.J. 1992. Equivalent Versions of the QUICK Scheme for Finite-Difference and Finite-Volume Numerical Methods. *Communications in Applied Numerical Methods* **8**, pp. 841-847.

Jones, I.P. 1979. A numerical study of natural convection in an air-filled cavity: comparison with experiment. *Numerical Heat Transfer* **2**, pp. 193-213.

Kawaguti, M. 1961. Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations for the Flow in a Two-Dimensional Cavity. *Journal of The Physical Society of Japan* **16**, pp. 2307.

Khosla, P.K. i Rubin, S.G. 1981. A Conjugate Gradient Iterative Method. *Computers and Fluids* **9**, pp. 109-121.

Kim, D.M. i Viskanta, R. 1984. Study of the effects of wall conductance on natural convection in differently oriented square cavities. *J. Fluid Mech.* **144**, pp. 153-176.

Kim, S.-W. i Benson, T.J. 1992. Comparison of the SMAC, PISO and Iterative Time-Advancing Schemes for Unsteady Flows. *Computers Fluids* **21**, pp. 435-454.

Koseff, J. R. 1983. Momentum transfer in a complex recirculating flow. Tesi, Stanford University.

Koseff, J. R. i Street, R.L. 1984. On End Wall Effects in a Lid-Driven Cavity Flow. *Journal of Fluids Engineering* **106**, pp. 385-389.

Koseff, J. R. i Street, R.L. 1984. The Lid-Driven Cavity Flow: A Synthesis of Qualitative and Quantitative Observations. *Journal of Fluids Engineering* **106**, pp. 390-398.

Ku, H.C.; Hirsh, R.S. i Taylor, T.D. 1987. A Pseudospectral Method for Solution of the Three-Dimensional Incompressible Navier-Stokes Equations. *J. Comp. Physics* **2**, pp. 439-462.

Koshla, P.K. i Rubin, S.G. 1981. A Conjugate Gradient Iterative Method. *Computers and Fluids* **9**, pp.109-122.

Küblbeck, K.; Merker, G.P. i Straub, J. 1980. Advanced numerical computation of two-dimensional time-dependent free convection in cavities. *Int. J. Heat Mass Transfer* **23**, pp. 203-217.

Lam, C.K.G. i Bremhorst, K. (1981). A modified form of the k-e turbulence model for predicting wall turbulence. *Journal Fluids Engineering* **103**, pp. 456.

Latimer, B.R. 1984. A Comparison of Solution Algorithms for Incompressible Fluid Flows. Tesi de Master, Queen's University, Kingston, Canada.

Latimer, B.R. i Pollard, A. 1985. Comparison of Pressure-Velocity Coupling Solution Algorithms. *Numerical Heat Transfer* **8**, pp. 635-652.

Lauriat, G. i Altimir, I. 1985. A new formulation of the SADI method for the prediction of natural convection flows in cavities. *Computers & Fluids* **13**, pp. 141-155.

Lazou, Ch. 1988. *Supercomputers and their Use*. Oxford University Press, pp. 263.

Leonard, B.P. 1979. A Stable and Accurate Convective Modelling Procedure Based on Quadratic Upstream Interpolation. *Computers Methods in Applied Mechanics and Engineering* **19**, pp. 59-98.

Leschziner, M.A. 1980. Practical Evaluation of Three Finite Difference Schemes for the Computation of Steady-State Recirculating Flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **23**, pp. 293-312.

Leschziner, M.A i Rodi, W. 1981. Calculation of Annular and Twin Parallel Jets Using Various Discretization Schemes and Turbulence-Model Variations. *Journal of Fluids Engineering* **103**, pp. 352-360.

Lewis, J.A. 1950. *Free Convection in Commercial Insulating Materials*. Tesi, Brown University.

Le Peutrec, Y. i Lauriat, G. 1990. Effects of the Heat Transfer at the Side Walls on Natural Convection in Cavities. *J. Heat Transfer* **112**, pp. 370-378.

Mallinson, G.D. i De Vahl Davis, G. 1977. Three-dimensional natural convection in a box: a numerical study. *J. Fluid Mech.* **83**, pp. 1-31.

Markatos, N.C. i Pericleous, K.A. 1984. Laminar and turbulent natural convection in an enclosed cavity. *Int. J. Heat Mass Transfer* **27**, pp. 755-772.

Maufl, D.J. i East, L.F. 1963. Three-dimensional flow in cavities. *J. Fluid Mech.* **16**, pp. 620-632.

Nansteel, M.W i Greif, R. 1982. Natural Convection in Undivided and Partially Divided Rectangular Enclosures. *J. Heat Transfer* **103**, pp. 623-629.

Nansteel, M.W. 1982. Natural Convection in Enclosures. Tesi, University of California, Berkeley.

Nansteel, M.W i Greif, R. 1984. An Investigation of Natural Convection in Enclosures with Two- an Three-Dimensional Partitions. *J. Heat Mass Transfer* **27**, pp. 561-571.

Newell, M.E. i Schmidt, F.W. 1970. Heat Transfer by Laminar Natural Convection Within Rectangular Enclosures. *J. Heat Transfer* pp. 159-168.

Noren, B. 1992. Computational Evaluation of Different Discretisation Schemes for Recirculating Laminar Flows. *Computational Fluid Dynamics'92*. pp. 435-442.

Olson, D.A.; Glicksman, L.R. i Ferm, H.M. 1990. Steady-State Natural Convection in Empty and Partitioned Enclosures at High Rayleigh Numbers. *Journal of Heat Transfer* **112**, pp. 640-647.

Olson, D.A. i Glicksman, L.R. 1991. Transient Natural Convection in Enclosures at High Rayleigh Number. *Journal of Heat Transfer* **113**, pp. 635-642.

Ostrach, S. 1988. Natural Convection in Enclosures. *J. Heat Transfer* **110**, pp. 1175-1190.

Ozoe, H. et al. 1985. Numerical calculations of laminar and turbulent natural convection in water in rectangular channels heated and cooled isothermally on the opposing vertical walls. *Int. J. Heat Mass Transfer*. **28**, pp. 125-138.

Pan, F. i Acrivos, A. 1967. Steady flow in rectangular cavities. *J. Fluid Mech.* **28**, pp. 643-655.

Paolucci, S. i Chenoweth, D.R. 1989. Transition to chaos in a differentially heated vertical cavity. *J. Fluid Mech.* **201**, pp. 379-410.

Paolucci, S. 1990. Direct numerical simulation of two-dimensional turbulent natural convection in an enclosed cavity. *J. Fluid Mech.* **215**, pp. 229-262.

Patankar, S.V. i Spalding, D.B. 1972. A Calculation Procedure for Heat, Mass and Momentum Transfer in Three-Dimensional Parabolic Flows. *Int. J. Heat Mass Transfer* **15**, pp. 1787-1805.

Patankar, S.V. 1980. *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Séries in Comp. Meths in Mech. and Therm. Sc., Mc Graw Hill.

Patankar, S.V. 1981. A Calculation Procedure for Two-Dimensional Elliptic Situations. *Numerical Heat Transfer* **4**, pp. 409-425.

Patterson, J. i Imberger, J. 1980. Unsteady natural convection in a rectangular cavity. *J. Fluid Mech.* **100**, pp. 65-86.

Patterson, J. i Armfield, S.W. 1990. Transient features of natural convection in a cavity. *J. Fluid Mech* **219**, pp. 469-497.

Peaceman, D.W. i Rachford, H. H. 1955. The Numerical Solution of Parabolic and Elliptic Differential Equations. *J. Soc. Indust. Appl. Math.* **3**, pp. 28-41.

Perng, Ch-Y. i Street, R.L. 1989. Three-Dimensional Unsteady Flow Simulations: Alternative Strategies for a Volume-Averaged Calculation. *Int. J. for Numerical Methods in Fluids* **9**, pp. 341-362.

Perng, C.Y. i Street, R.L. 1991. A Coupled Multigrid-Domain-Splitting Technique for Simulating Incompressible Flows in Geometrically Complex Domains. *Int. J. for Numerical Methods in Fluids* **13**, pp. 269-286.

Peyret, R. i Taylor, T.D. 1983. *Computational Methods for Fluid Flow*. Ed. Springer-Verlag New York Inc. pp. 358.

Phillips, T.N. 1984. Natural Convection in an Enclosed Cavity. *J. Comp. Physics* **54**, pp. 365-381.

Prasad, A.K. i Koseff, J. R. 1989. Reynolds number and end-wall effects on a lid-driven cavity flow. *Physics of Fluids* **1**, pp. 208-218.

Quon, C. 1972. High Rayleigh Number Convection in an Enclosure-A Numerical Study. *Physics of Fluids* **15**, pp. 12-19.

Quon, C. 1983. Effects of Grid Distribution on the Computation of High Rayleigh Number Convection in a Differentially Heated Cavity. *Proceedings of the Numerical Properties and Methodologies in Heat Transfer*, pp. 261-281.

Raithby, G.D. i Torrance, K.E. 1974. Upstream-Weighted Differencing Schemes and their Application to Elliptic Problems Involving Fluid Flow. *Computers and Fluids* 2, pp. 191-206.

Raithby, G.D. 1976. Skew upstream differencing schemes for problems involving fluid flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 9, pp. 153-164.

Reiman, T.C. i Sabersky, R.H. 1968. Laminar flow over rectangular cavities. *Int. J. Heat Mass Transfer* 11, pp. 1083-1085.

Roux, B. et al. 1978. On high-order accurate method for the numerical study of natural convection in a vertical square cavity. *Numerical Heat Transfer* 1, pp. 331-349.

Schladow, S.G.; Patterson, J.C. i Street, R.L. 1989. Transient flow in a side-heated cavity at high Rayleigh number: a numerical study. *J. Fluid Mech.* 200, pp. 121-148.

Schäfer, M. (1991). Parallel algorithms for the numerical simulation of three-dimensional natural convection. *Applied Numerical Mathematics* 7, pp. 347-365.

Schladow, S.G. 1990. Oscillatory motion in a side-heated cavity. *J. Fluid Mech.* 213, pp. 589-610.

Schmidt, F.W. 1986. A comparison of experimental and predicted results for laminar natural convection in an enclosure. *Int. J. Heat & Fluid Flow* 7, pp. 183-190.

Seki, N.; Fukusako, S. i Inaba, H. 1978. Visual observation of natural convective flow in a narrow vertical cavity. *J. Fluid Mech.* 84, pp. 695-704.

Shay, W.A. 1981. Development of a second order approximation for the Navier-Stokes equations. *Computers and Fluids* 9, pp. 279-298.



Shih, T.M.; Tan, C.H. i Hwang, B.C. 1989. Effects of Grid Staggering on Numerical Schemes **9**, pp. 193-212.

Simpkins, P.G. i Dudderar, T.D. 1981. Convection in rectangular cavities with differentially heated end walls. *J. Fluid Mech.* **110**, pp. 433-456.

Spradley, L.W. i Churchill, S.W. 1975. Pressure- and buoyancy-driven thermal convection in a rectangular enclosure. *J. Fluid Mech.* **70**, pp. 705-720.

Torrance, K.E. 1968. Comparison of Finite-Difference Computations of Natural Convection. *J. Res. N at. Bureau Standards-B* **72B**, pp. 281-301.

Torrance, K.E.; Orloff, L. i Rockett, J.A. 1969. Experiments on natural convection in enclosures with localized heating from below. *J. Fluid Mech.* **36**, pp. 21-31.

Torrance, K.E.; Orloff, L. i Rockett, J.A. 1969. Numerical study of natural convection in an enclosure with localized heating from below-creeping flow to the onset of laminar instability. *J. Fluid Mech.* **36**, pp. 33-31.

Torrance, K.E. 1972. Cavity flows driven by buoyancy and shear. *J. Fluid Mech.* **51**, pp. 221-231.

Tsui, Y.-Y. 1991. A Study of Upstream-Weighted High-Order Differencing for Approximation of Flow Convection. *Int. J. for Numerical Methods in Fluids* **13**, pp. 167-199.

Van der Vorst, A. H. i Dekker, K. 1988. Conjugate gradient type methods and preconditioning. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **24**, pp. 73-87.

Van Doormaal, J.P. i Raithby, G.D. 1984. Enhancements of the SIMPLE Method for Predicting Incompressible Fluid Flows. *Numerical Heat Transfer* **7**, pp. 147-163.

Veronis, G. 1966. Large-amplitude Bénard convection. *J. Fluid Mech* **26**, 49-68.

Viskanta, R.; Kim, D.M. i Gau, C. 1986. Three-dimensional natural convection heat transfer of a liquid metal in a cavity. *Int. J. Heat Mass Transfer* **29**, pp. 475-485.

Wachspress, E. L. 1964. *Iterative Solution of Elliptic Systems*. Prentice Hall.

Wanik, A. i Schnell, U. 1989. Some Remarks on the PISO and SIMPLE Algorithms for Steady Turbulent Flow Problems. *Computers & Fluids* **4**, pp. 555-570.

Wilkes, J.O. i Churchill, S.W. 1966. The Finite-Difference Computation of Natural Convection in a Rectangular Enclosure. *A.I.Ch.E. Journal* **12**, pp. 161-166.

Yin, S.H.; Wung, T.Y. i Chen, K. 1978. Natural convection in an air layer enclosed within rectangular cavities. *Int. J. Heat Mass Transfer* **21**, pp. 307-315.

Zang, Y.; Street, R.L. i Koseff, J.R. 1993. Large Eddy Simulation of Turbulent Cavity Flow Using a Dynamic Subgrid-scale Model. Symposium on "Engineering Applications of Large Eddy Simulations" 1993 ASME Fluids Engineering Conference.

Zhong, Z.Y.; Yang, K.T. i Lloyd, J.R. 1985. Variable Property Effects in Laminar Natural Convection in a Square Enclosure. *J. Heat Transfer* **107**, pp. 133-138.

Zhu, J. i Leschziner, M.A. 1988. A Local Oscillation-Damping Algorithm for Higher-Order Convection Schemes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **67**, pp. 355-366.

# 8

---

# ANNEXOS

## ANNEX A

El sistema d'equacions lineals a resoldre en forma estàndard és

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (85)$$

essent  $\mathbf{A}$  una matriu dispersa, simètrica, definida positiva i d'ordre  $n \times n$ . El vector de les variables és  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{b}$  el vector dels termes independents. Per qualsevol solució intermitja (valors no exactes de la iteració  $k$ )  $\mathbf{x}^{(k)}$ , es pot definir un residu

$$\mathbf{r}^{(k)} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{(k)} \quad (86)$$

que ha d'ésser nul quan hom troba la solució.

El MGC es basa en la recerca d'un mínim global ( $\mathbf{r} = 0$ ) a través d'una sèrie de línies, i les seves direccions venen donades pels vectors conjugats ( $\mathbf{p}^{(0)}$ ,  $\mathbf{p}^{(1)}$ ,  $\mathbf{p}^{(2)}$ , etc) que són ortogonals respecte  $\mathbf{A}$ .

$$[\mathbf{p}^{(i)}]^T \mathbf{A} \mathbf{p}^{(j)} = 0 \quad i \neq j \quad (87)$$

L'algoritme MCG iteratiu és (Khosla, 1981)

$k=0$

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{b} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{b}$$

while  $\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|} > \text{tolerància}$  do

$$\alpha_k = \frac{[\mathbf{r}^{(k)}]^T \mathbf{p}^{(k)}}{[\mathbf{p}^{(k)}]^T \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)}$$

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}$$

$$\beta_k = \frac{[\mathbf{r}^{(k+1)}]^T \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}}{[\mathbf{p}^{(k)}]^T \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}}$$

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} + \beta_k \mathbf{p}^{(k)}$$

$$k = k + 1$$

end while

També en aquest treball s'ha emprat la variant MGC per matrius no simètriques, com és la que resulten a l'utilitzar xarxes no uniformes. L'algoritme MCG iteratiu per matrius  $A$  no simètriques és

$k=0$

$$\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{p}^{(0)} = \mathbf{r}^{(0)} = \mathbf{A}^T \mathbf{b} - \mathbf{A}^T \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}$$

while  $\frac{\|\mathbf{r}^{(k)}\|}{\|\mathbf{b}\|} > \text{tolerància}$  do

$$\alpha_k = \frac{[\mathbf{r}^{(k)}]^T \mathbf{p}^{(k)}}{[\mathbf{p}^{(k)}]^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}}$$

$$\mathbf{x}^{(k+1)} = \mathbf{x}^{(k)} + \alpha_k \mathbf{p}^{(k)}$$

$$\mathbf{r}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k)} - \alpha_k \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}$$

$$\beta_k = \frac{[\mathbf{r}^{(k+1)}]^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}}{[\mathbf{p}^{(k)}]^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \mathbf{p}^{(k)}}$$

$$\mathbf{p}^{(k+1)} = \mathbf{r}^{(k+1)} + \beta_k \mathbf{p}^{(k)}$$

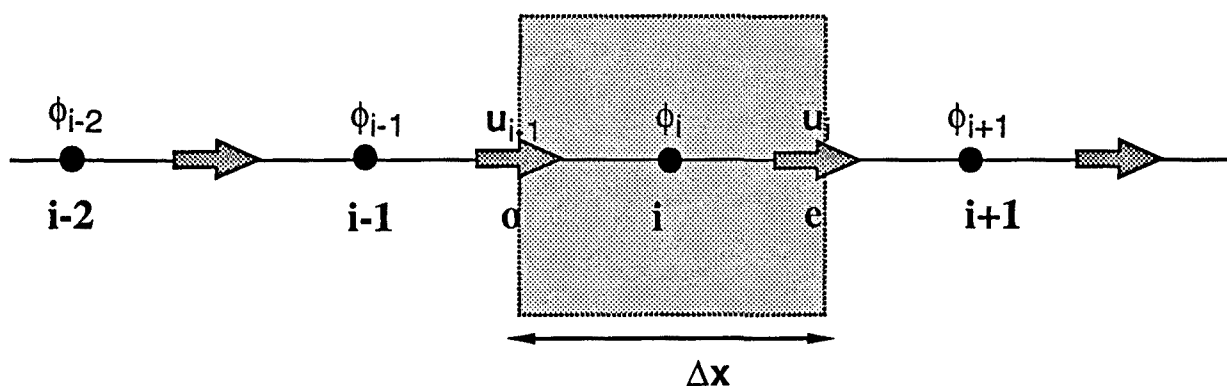
$$k = k + 1$$

end while

## ANNEX B

Quan s'utilitza com a mètode de discretització la formulació dels volums de control s'han d'avaluar els fluxos que travessen les cares del volum. En el cas dels termes convectius aquestos no es poden avaluar amb una interpolació linial perquè dóna inestabilitats. L'esquema de segon ordre QUICK és una de les alternatives més emprades per avaluar aquests fluxos mantenint l'acuracitat dels esquemes centrats.

Una manera adient de trobar les expressions de les variables que intervenen en els fluxos amb l'esquema QUICK és mitjançant expansions de Taylor truncades en el segon terme.



**Figura 11.** Xarxa unidimensional, decalada i regular.

D'aquesta manera, i pel cas d'una xarxa regular com la de la figura 10, el valor de la variable  $\phi_e$  en funció de les derivades en el punt i i truncant en la segona derivada és

$$\phi_e \approx \phi_i + \frac{\Delta x}{2} \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_i + \frac{\left(\frac{\Delta x}{2}\right)^2}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \Big|_i \quad (88)$$

Si les expressions de la derivada primera i segona centrades al punt i són:

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial x} \right|_i = \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2\Delta x} \quad (89)$$

$$\left. \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right|_i = \frac{\phi_{i+1} + \phi_{i-1} - 2\phi_i}{\Delta x^2} \quad (90)$$

Al substituir el valor de las derivades discretitzades en l'expressió (88) s'obté

$$\phi_e = 3/8 \phi_{i+1} + 6/8\phi_i - 1/8 \phi_{i-1} \quad (91)$$

que reagrupada dóna la mateixa expressió d'en Leonard (1979) de la Figura 9

$$\phi_e = (\phi_{i+1} + \phi_i)/2 - (\phi_{i-1} + \phi_{i+1} - 2\phi_i)/8 \quad (92)$$

Però, i en el cas d'utilitzar un esquema implícit, per tal de garantir l'estabilitat de l'esquema, Hayase (1992) proposa el següent reagrupament

$$\phi_e = \phi_i + (-\phi_{i-1} - 2\phi_i + 3\phi_{i+1})/8 \quad (93)$$

essent el terme font (part explícita) la inclosa dins del parèntesi.

UNIVERSITAT ROVIRA I VIRGILI  
ESTUDI NUMÈRIC DE FLUXOS LAMINARS I TURBULENTS EN UNA CAVITAT CÚBICA  
Ildefonso Cuesta Romeo  
DL:T-1567-2009/ISBN: 978-84-692-4526-2