

Unidad didáctica para aplicación de clases sobre congruencia de triángulos para estudiantes de
grado octavo del colegio CAFAM

Cesar Camilo Gonzalez Cuchivaguen

Universidad Pedagógica Nacional

Facultad de ciencia y tecnología

Licenciatura en matemáticas

Bogotá D.C.

2018

INDICE

INTRODUCCIÓN	5
1. Análisis del contexto del aula	6
➤ Ubicación del concepto en el currículo de matemáticas:	6
➤ Contexto académico del colegio	8
MISIÓN	9
VISIÓN	9
ENFOQUE PEDAGÓGICO	9
➤ Contexto del curso asignado:	11
Sesión 1 (15 de agosto):	11
Sesión 2 (22 de agosto):	14
Sesión 3 (29 de agosto):	16
Sesión 4 (5 de septiembre):	18
Sesión 5 (12 de septiembre):	20
Sesión 6 (19 de septiembre):	22
Sesión 7 (26 de septiembre):	26
Sesión 8 (3 de octubre):	28
Sesión 9 (17 de octubre):	29
Sesión 10 (18 de octubre):	29
Sesión 11 (31 de octubre):	30

Sesión 12 (7 de noviembre):	31
Sesión 13 (14 de noviembre):	31
2. Análisis de contenido:.....	32
➤ Aplicaciones del contenido en las matemáticas:.....	36
➤ Aplicaciones del contenido fuera de las matemáticas:	37
3. Análisis cognitivo:	38
➤ Objetivos de la Unidad Didáctica:.....	38
➤ Propuestas didácticas de enseñanza y experiencias de aprendizaje:.....	38
➤ Dificultades	40
➤ Errores.....	41
4. Análisis de instrucción:.....	42
➤ Actividad 0: “Carrileras de tren”:.....	42
➤ Actividad 1: “juego Memoria”:	45
➤ Actividad 2: “reflexiones sobre la estructura de la torre Eiffel.....	49
➤ Actividad 3 “Triángulos congruentes a partir de pitillos”:.....	52
➤ Actividad 4 “Diseñando estructuras con triángulos congruentes”:.....	55
➤ Actividad 5: “estructura de la torre Eiffel en computador”:.....	57
5. Análisis de actuación:	59
➤ Instrumentos de recolección de información.....	59
➤ Descripción y análisis de las sesiones	60

6. Balance de la experiencia	75
➤ Conclusiones	75
➤ Limitantes.....	76
➤ Sugerencias	76
Referencias.....	77

INDICE DE TABLAS E ILUSTRACIONES

Ilustración 1: ubicación espacial de los estudiantes en el aula 117	13
Ilustración 2: red conceptual sobre los criterios de congruencia entre triángulos	32
Ilustración 3: “fichas para el juego memoria”	46
Ilustración 4: “fichas para el juego memoria (cont.)”	47
Tabla 1: posibilidades de tomar dos lados (pitollos) en la actividad	52
Tabla 2: posibilidades de tomar tres lados (pitollos) en la actividad.....	53
Tabla 3: resultados finales posibles y triángulos que se conforman (resultados finales posibles)	53
Ilustración 5: “trabajo de estudiante 1	69
Ilustración 6: “trabajo de estudiante 2”	70
Ilustración 7: “trabajo de estudiante 3”	70
Ilustración 8: “trabajo de estudiante 4”	71
Ilustración 9: “trabajo de estudiante 5”	71
Ilustración 10: “trabajo de estudiante 6”	73

INTRODUCCIÓN

Durante el segundo semestre del año 2018 se trabajó con el grupo de estudiantes del curso 8-D del Colegio CAFAM en el marco de la asignatura “Práctica en aula” de la licenciatura en matemáticas de la universidad pedagógica nacional.

Esta práctica fue abordada inicialmente a modo de observación, para luego implementar clases semanalmente. También se realizó el diseño una unidad didáctica enfocada en la enseñanza criterios de congruencia de triángulos en el plano euclidiano.

En la primera sección del documento se podrá validar información sobre el Colegio, así como una breve reseña histórica del mismo. En esta sección también se encuentran las anotaciones del diario de campo, donde se relata lo vivido en cada una de las sesiones de clase.

En la sección dos, se expone el marco matemático que cobija a los criterios de congruencia. Allí se podrán encontrar algunos conceptos claves relacionadas con congruencias y semejanzas, así como una serie de definiciones y teoremas esenciales para la comprensión de este concepto.

La sección tres genera un marco didáctico robusto, donde varios autores desde su punto de vista abordan situaciones de enseñanza y aprendizaje de forma óptima, lo que sirvió de base teórica para la elaboración de las actividades de la sección cuatro, donde se detallan estas mismas.

La sección cinco presenta la descripción y análisis de las actividades, donde se contrasta lo teórico y lo práctico, dando lugar así a la sección seis, donde se generan algunas conclusiones del documento, así como algunas recomendaciones para aquellas personas que deseen trabajar este tema en el aula. Entre las expectativas del autor se encuentra que este documento sirva de insumo para aquellos que deseen implementar actividades similares en el aula.

1. Análisis del contexto del aula

➤ **Ubicación del concepto en el currículo de matemáticas:**

Los documentos curriculares y la normativa educativa del país mencionan la semejanza y congruencia de triángulos en los siguientes apartados:

El Ministerio de Educación Nacional (MEN) indica en los lineamientos curriculares de matemáticas (1998):

La primacía de las figuras muertas y de las relaciones de paralelismo y perpendicularidad de líneas, y las de igualdad o congruencia o semejanza de figuras ocultaron por mucho tiempo el origen activo, dinámico de los conceptos geométricos, y dejaron en la penumbra las transformaciones. Los sistemas geométricos se redujeron a sus componentes, como los puntos, líneas y planos, segmentos de recta y curvas, y figuras compuestas por ellos, con sólo la estructura dada por las relaciones mencionadas. (p. 40)

Lo cual pone en manifiesto que no se debe dejar de lado en la enseñanza lo dinámico. La congruencia de triángulos no se debe enseñar “de forma estática”, hay que buscar alternativas para que esta enseñanza esté relacionada con conceptos geométricos (no solo definiciones) y con las transformaciones.

Los estándares básicos de competencias en matemáticas indican lo siguiente:

El trabajo con objetos bidimensionales y tridimensionales y sus movimientos y transformaciones permite integrar nociones sobre volumen, área y perímetro, lo cual a su vez posibilita conexiones con los sistemas métricos o de medida y con las nociones de

simetría, semejanza y congruencia, entre otras. Así, la geometría activa se presenta como una alternativa para refinar el pensamiento espacial, en tanto se constituye en herramienta privilegiada de exploración y de representación del espacio (p. 62).

Lo cual concuerda con lo mencionado anteriormente.

También se indican los siguientes estándares para grados octavo y noveno:

- Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas
- Reconozco y contrasto propiedades y relaciones geométricas utilizadas en demostración de teoremas básicos (Pitágoras y Tales).
- Aplico y justifico criterios de congruencias y semejanza entre triángulos en la resolución y formulación de problemas. (p. 86)

Por lo que se tiene el marco normativo claro para enseñar este concepto en el aula.

Los Derechos Básicos de aprendizaje para grado octavo indican que:

- Identifica relaciones de congruencia y semejanza entre las formas geométricas que configuran el diseño de un objeto.
 - Evidencias de aprendizaje
 - Utiliza criterios para argumentar la congruencia de dos triángulos.
 - Discrimina casos de semejanza de triángulos en situaciones diversas.
 - Resuelve problemas que implican aplicación de los criterios de semejanza.

- Compara figuras y argumenta la posibilidad de ser congruente o semejantes entre sí. (p. 62)

Por lo que se cuenta con indicadores para generar los objetivos de enseñanza y aprendizaje de la unidad didáctica.

➤ **Contexto académico del colegio**

La información suministrada por la página web del colegio indica que:

Como testimonio de su vocación de servicio social a la familia colombiana, la Caja de Compensación Familiar Cafam creó, en 1972, el Colegio que lleva su nombre y participa de su contexto ideológico, organizacional y financiero.

El Colegio está ubicado en la Localidad Décima (Engativá). Es un establecimiento mixto, de calendario A y de transición a undécimo grado. Ofrece educación formal, con subsidios y tarifas diferenciales de acuerdo con el nivel de ingresos de los afiliados, aunque se privilegia a los estudiantes de las categorías A y B.

El plantel inició con un enfoque pedagógico innovador. A los pocos años de su fundación se constituyó en un modelo de cambios pedagógicos en diversas instituciones educativas estatales y privadas del país y ha sido la base para generar importantes proyectos en Cafam, acordes con las necesidades educativas del ámbito local, regional y nacional.

MISIÓN

“Contribuir a generar bienestar a nuestros afiliados y usuarios a través de un proyecto educativo de alta calidad”

Proyecto en cual se enmarca la práctica, precisando sus propósitos, sus antecedentes y su momento actual.

VISIÓN

“Tener un plan de estudio actualizado que permita ofrecer un servicio de calidad a los estudiantes matriculados cada año y hasta el 2020”

ENFOQUE PEDAGÓGICO

El enfoque pedagógico se estructura bajo tres premisas que orientaron su creación, a saber: El ser humano es un ser integral y en continuo proceso de crecimiento.

La sociedad tiene la responsabilidad de impulsar el desarrollo del ser humano.

La educación es el proceso a través del cual la sociedad hace posible dicho desarrollo.

En la filosofía del Colegio se comprende a la persona como un ser integrado por múltiples dimensiones. Un ser que posee una estructura biofísica de la cual es responsable y mediante la cual logra su propia realización y apoya la realización de otros; es un ser inteligente, capaz de transformar y de transformarse; es persona en cuanto se relaciona con los otros y encuentra en los otros la posibilidad de ser. La afectividad se constituye en el soporte para los otros, y a su vez, la persona se soporta en las

manifestaciones de los demás; es un ser productivo, dada su capacidad generativa infinita, y es trascendente, por cuanto su horizonte de proyección supera los límites de lo posible.

El Colegio tiene el propósito de pensar la autonomía como la finalidad de la educación. En este marco, se valora como un desarrollo que permite a la persona tomar el control de su vida desde las dimensiones social e intelectual. La dimensión social implica responsabilidad frente a los propios actos, toma de conciencia y acción como miembro de una sociedad civil, y la intelectual exige pensar por sí mismo y aprender a aprender.

Para ello, desde la dirección de grupo, y de manera transversal desde las diferentes asignaturas, se fomentan las Habilidades Para la Vida(HPV) (Conocimiento de sí mismo, comunicación efectiva, toma de decisiones, pensamiento creativo, manejo de sentimientos y emociones, empatía, relaciones interpersonales, solución de problemas y conflictos, pensamiento crítico, manejo de tensiones o estrés) y los valores (honestidad, tolerancia, responsabilidad, prudencia, solidaridad, libertad, justicia, humildad, generosidad, lealtad, agradecimiento, respeto y perseverancia) que le permiten al estudiante enfrentarse a las exigencias de la vida diaria.

En el contexto social se plantean, a su vez, una serie de exigencias tanto a las personas, como a las organizaciones, docentes y estudiantes en particular. Las personas y las organizaciones necesitan hoy ser aprendices permanentes y ser organizaciones que aprenden, tener flexibilidad frente al cambio y ser polivalentes, a fin de moverse con facilidad frente a los desafíos que proponen el desarrollo tecnológico y el mundo social, cultural y laboral.

➤ **Contexto del curso asignado:**

Sesión 1 (15 de agosto):

El maestro en formación se dirige a la sala de profesores donde se encuentra con el profesor Carlos, quien le da el carnet de ingreso. Se dirigen hacia donde se encuentra la profesora Diana, el profesor Carlos le indica a la profesora que el maestro en formación estará en las sesiones de los días miércoles, también apoyará los refuerzos escolares de los jueves cada 15 días.

El maestro en formación y la profesora se dirigen al aula 117. La profesora le indica al maestro en formación que el curso es muy chévere para trabajar y que no hay mayores inconvenientes con ellos para trabajar en clase.

Los profesores Carlos y Diana presentan al maestro en formación a la clase y a continuación inicia la sesión. La profesora revisa las tareas de los estudiantes, que consistía en hacer ejercicios de factorización por factor común, por agrupación, por trinomio cuadrado perfecto y por diferencia de cuadrados. La mayoría no había hecho los ejercicios, por lo que la clase consistió en realizar estos ejercicios en clase.

La profesora va pasando al tablero a determinados estudiantes, de acuerdo con los niveles de dificultad que éstos tuvieran. De esta forma, va pasando a los estudiantes que tienen más dudas con respecto al proceso de factorizar.

En la parte superior izquierda del tablero la profesora coloca una Meta: factorización. En la parte superior derecha también coloca los cuatro casos de factorización que se han estudiado.

Se realizan seis ejercicios, la profesora enfatiza los procesos de solución de cada caso de factorización, así como la forma en que se reconoce que caso de factorización se debería aplicar.

Se recuerda cómo se obtiene el máximo común divisor de tres números, descomponiéndolos en sus factores primos y seleccionando aquellos que sean comunes a todos y que tengan el menor exponente.

En otro ejercicio, se analiza el caso por agrupación, donde al parecer, no había tantas dudas. Los estudiantes realizaron el proceso algorítmico de forma correcta, e incluso hubo algunos estudiantes que presentaron soluciones alternativas a la expuesta en el tablero.

En el caso del trinomio cuadrado perfecto la profesora recuerda el proceso para validar los cuadrados de los términos y multiplicarlos entre sí y luego por dos para obtener el tercer término.

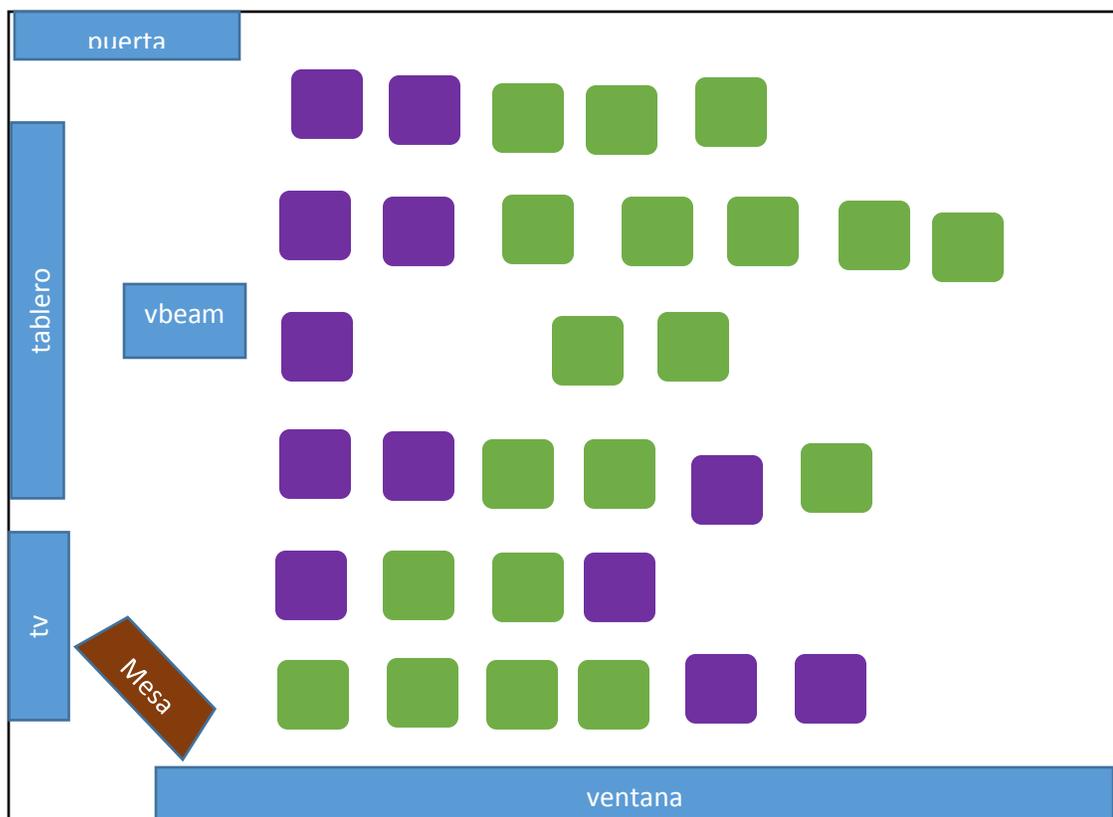
También hubo un caso en el que se debía reordenar el trinomio para que se pudiera “ver” como trinomio cuadrado perfecto, lo cual, los estudiantes comprendieron el “truco en ese ejercicio”

La profesora indicó que en la siguiente sesión tendrían taller para validar si entendieron los procesos o no. Deja como tarea realizar cinco ejercicios tomados del álgebra de Baldor.

Con respecto a la organización del curso, se tomó nota de la siguiente ubicación de los estudiantes. Cabe aclarar que hubo asistencia de 31 estudiantes.

En la siguiente gráfica los puestos verdes corresponden a los varones, los puestos morados corresponden a las mujeres

Ilustración 1: ubicación espacial de los estudiantes en el aula 117



Se finaliza la sesión y se acuerda con la profesora estar en la siguiente sesión el día miércoles de la semana entrante.

El grupo es agradable para trabajar, las características que tienen los estudiantes en cuanto a lo social y emocional son acordes a lo establecido a preadolescentes. Los estudiantes trabajan en clase y se reúnen de acuerdo a sus grupos de amigos. En ocasiones hablan mucho, conforme a lo normal para su edad.

Sesión 2 (22 de agosto):

El maestro en formación se encuentra con la tutora en la sala de profesores, con quien se dirige al aula. La tutora le indica al maestro en formación que en la sesión de hoy habrá examen, por lo que al ingresar al salón lo primero que hacen los estudiantes es organizar las filas para presentarlo.

En el aula hubo 37 estudiantes presentes, cabe resaltar que la lista de asistencia la lleva una estudiante, quien al inicio de la clase mira a sus compañeros para validar quien se encuentra y quién no. Esto hace que no se “pierda tiempo” de inicio y que se puedan retomar las clases de manera más rápida.

Las evaluaciones para el curso son “de tema a” o “de tema b”, es decir, que alrededor de la mitad del curso presenta puntos del examen distintos a la otra mitad, aunque estos puntos sean de la misma naturaleza en ambos exámenes.

Cuando los estudiantes inician el examen, la profesora solicita ayuda al maestro en formación para pasar las notas de algunos talleres del curso. Cuando se están calificando

estos talleres, la profesora le indica al maestro en formación que por favor le ayude a calificar otro taller correspondiente a los estudiantes del grado 9° D. Este taller también se conformó de “tema a” y “tema b”, por lo que se deduce que ésta es la forma de trabajar para las pruebas escritas. El maestro en formación toma el cuaderno de apuntes de la profesora y empieza a calificar estos talleres, conforme a las instrucciones de la profesora.

La profesora le menciona al maestro en formación que en los talleres y actividades en grupo a los estudiantes les va bien ya que ella va indicándoles ciertos pasos claves y les recuerda algunos procedimientos, definiciones y métodos para solucionar-en este caso- las factorizaciones. Desafortunadamente en los exámenes no les va tan bien ya que, naturalmente, en estos casos ella no les da esa ayuda, lo que hace que bajen sus calificaciones.

Algunos estudiantes acabaron el examen en 15 minutos, a lo que la profesora les solicita a todos los estudiantes que “revisen todo y miren si está bien, la idea es pasar el examen”. Algunos estudiantes revisan el examen de forma detenida, aunque la mayoría lo deja así, lo revisa rápidamente y le indica a la profesora que ya terminó. Hubo algunos estudiantes que se acercaron donde la profesora a resolver dudas, pero cuando les pedían alguna respuesta específica a preguntas como “¿este (trinomio) es trinomio cuadrado perfecto?”, “¿lo puedo solucionar así?”, la profesora les recordaba que estaban en examen.

A los cuarenta minutos de la unidad, gran cantidad de estudiantes habían finalizado el examen, por lo que empezaron a hablar entre ellos. En la primera sesión, la profesora había indicado que el curso hablaba mucho. Dada esta situación, hubo un instante en que

varias veces (al menos cuatro) la profesora les decía a los estudiantes que hicieran silencio, respetando a sus compañeros que aún no habían acabado. Como seguían hablando y riendo en voz alta, la profesora finaliza la sesión faltando cinco minutos y le dice al grupo que, a nivel general, cometieron errores muy básicos, por lo que es posible que las notas sean bajas, les recuerda que para los exámenes y para el estudio en general hay que estudiar, que no hay que esperar a milagros para pasar. Se finaliza la sesión.

El maestro en formación y la profesora se dirigen a la sala de profesores, donde hablan sobre el inicio de las implementaciones de clase, la profesora tiene un inconveniente con la clase del miércoles, ya que debe reforzar factorizaciones antes de las evaluaciones bimestrales, por lo que el maestro en formación le dice que si desea, que se posponga la sesión de implementación para la semana después de estas pruebas, de esta forma se tomaría el tema de fracciones algebraicas en el inicio del cuarto periodo, tal como había indicado el profesor Carlos en la reunión del jueves pasado. Dados estos acuerdos, el maestro en formación se retira y la asesoría con la tutora finaliza.

Sesión 3 (29 de agosto):

En esta sesión hubo una explicación de tres ejercicios, los cuales fueron seleccionados por los estudiantes. Estos ejercicios pertenecían a un taller institucional, en el cual debían trabajar en las sesiones anteriores.

En uno de estos ejercicios había un error de digitación con un signo; la idea era que se factorizara por diferencia de cuadrados, pero entre los dos términos había un más en vez de un menos, a lo cual la profesora le indica a la clase que nunca vieron suma de

cuadrados, ya que estas expresiones no se pueden factorizar a menos que tengan términos comunes.

En otro ejercicio consistía en el trinomio $x^2 - 5x - 36$. Debían factorizar mediante la expresión $x^2 + bx + c$, a lo cual, varios estudiantes hicieron la descomposición del 36 en los factores -9 y 5. Se refuerza la propiedad conmutativa del producto, al validar que la expresión $(x-9)(x+5)$ es igual a la expresión $(x+5)(x-9)$

El tercer ejercicio consistió en factorizar un polinomio de cuatro términos mediante factor común. En ese ejercicio no hubo mayores inconvenientes.

Cuando los estudiantes se disponen a realizar el quiz, el maestro en formación se ofrece a ayudar a calificar unos talleres que la profesora tenía pendiente. El tema del quiz del curso 8 D consistía en ejercicios de factorización en la forma trinomio cuadrado perfecto, factor común, por agrupación, diferencia de cuadrados.

Con respecto a la forma en que actuaron los estudiantes, no cambió mucho en cuanto a lo anotado en la sesión pasada, a excepción de que un par de estudiantes estaban charlando durante la presentación del quiz. Uno de los estudiantes se encontraba muy “hablador” en la sesión, a lo cual la profesora le llama la atención.

Se finaliza la sesión y se acuerda con la profesora que el día miércoles de la semana entrante el maestro en formación realizará su primera intervención. Se le envía la planeación a la profesora y se acuerda también en que ella enviará por correo, en caso de ser necesario, las correcciones y sugerencias que tenga.

Sesión 4 (5 de septiembre):

Primera sesión de implementación. La clase inicia con las indicaciones de la profesora, quien le dice al curso que el maestro en formación dirigirá la clase de hoy. Les solicita respeto y total atención. El maestro en formación inicia la clase presentándose y explicando que el respeto será muy importante para el buen desarrollo de las clases, que “ninguno de nosotros se quiere estresar en esta clase” y que por lo tanto se les propone un trato: cuando los estudiantes empiecen a hablar mucho, el maestro en formación esperará un tiempo (5 segundos) y si siguen hablando, colocará una Marca en el tablero. Por cada marca se añadirá un ejercicio a la tarea. Todas las clases habrá tarea, la cual consistirá en desarrollar cinco ejercicios, más los que se tengan que añadir de acuerdo a la regla. Los estudiantes estuvieron de acuerdo. Se inicia como tal la clase colocando la meta: “simplificar fracciones algebraicas”. Se le pregunta al curso por los conceptos de expresión algebraica y fracción, así como de cociente. Los estudiantes responden que una expresión algebraica es “donde aparecen incógnitas y números”, que un cociente es “el resultado de una división” y que una fracción es “de la forma a sobre b”.

Con respecto a la primera afirmación, se les pregunta a los estudiantes si “una letra (de esas incógnitas) es un número o no”. Al principio muchos estudiantes aseguran que no son números, pero después de unos momentos de reflexión, se dan cuenta que efectivamente son números, pero con valores indeterminados.

Se relacionan los conceptos de cociente y fracción asimilando que un cociente se puede escribir de la forma a/b . se copia en el tablero la definición de fracción algebraica. No se colocó el título “fracción algebraica”.

Se explican los principios fundamentales de las fracciones a partir de ejemplos particulares. Se les indica a los estudiantes que “se hace énfasis en estos principios porque después nos servirán para facilitar las simplificaciones.”

Después de explicar las propiedades fundamentales, el maestro en formación realiza la siguiente pregunta: “¿De cuántas formas se pueden colocar los tres signos que pueden estar presente en una fracción?” a lo que algunos estudiantes conjeturan tres, luego cuatro, luego nueve formas. Se les solicita que trabajen en sus cuadernos para validar estas posibilidades.

Uno de los estudiantes pasa al tablero y escribe las ocho formas que existen. Luego el maestro en formación encierra en un círculo los resultados que dan signo positivo y, en dos círculos aquellos que dan resultado negativo. De nuevo, se dan cinco minutos para que ellos descubran que en común tienen los resultados positivos y, de mismo modo los negativos. Muchos estudiantes llegan a la siguiente conclusión: los resultados donde hay un número impar de signos negativos, dan negativo, mientras que los que no, dan positivo. “menos por menos da más y más por menos da menos.”

Se finaliza esta parte de la clase indicando que se puede hacer de igual forma con fracciones algebraicas, porque “recordemos que ellas también son números”.

Se da la regla para simplificar fracciones cuyos términos son monomios. En ese instante el maestro en formación coloca “hallar el m.c.m. de los términos”, cuando en realidad debía escribir “hallar los factores comunes”. El maestro en formación corrige el error inmediatamente y procede a dar un ejemplo, solicitando un monomio a una estudiante y,

luego otro monomio a otro estudiante. En ese instante el maestro en formación evidencia que hay algunos estudiantes que no están poniendo atención, a lo cual reacciona preguntándoles su opinión con respecto a la clase: “cual opción prefieres: ¿la primera o la segunda?” quien responde “la primera”. “¿por qué?” (...) “no mentiras, la segunda”, “porque”, “eem...” a lo que el maestro en formación les solicita a los estudiantes que pongan atención.

Dada la fracción algebraica, se procede a solucionarla, hallando lo común entre numerador y denominador y luego apartándolos, formando así un producto de fracciones, equivalente a la inicial, pero en donde una de esas fracciones tenía igual numerador y denominador. Se les recuerda que cuando sucede eso, y el denominador es distinto de cero, el resultado de ese cociente es igual a uno.

Dado ese ejemplo una estudiante pregunta que se hace cuándo no solo las incógnitas tienen factores comunes sino también los coeficientes, se procede a realizar un segundo ejercicio. Los estudiantes copian en su cuaderno y el maestro en formación coloca los ejercicios para la tarea: seis en total.

Finaliza la clase y el maestro en formación habla con la profesora, quien le da algunas recomendaciones.

Sesión 5 (12 de septiembre):

El maestro en formación ingresa al aula de clases donde se encontraban algunos estudiantes de once y algunos de octavo (por cambio de hora). La profesora ingresa al salón y les da la nota de los tres periodos a los estudiantes. Hay varios estudiantes que en

este momento deberían ir a “finales” para pasar matemáticas. Cuando la profesora finaliza de dar las notas, le cede la sesión al maestro en formación y va un momento a la sala de profesores para tomar sus implementos. El maestro en formación inicia su clase diciéndole a los estudiantes que no se desanimen y que hay que esforzarse para superar esas notas, similar a unas palabras que había dicho la profesora.

Varios estudiantes se encuentran conmocionados con la noticia, incluso hay dos o tres que lloran por lo sucedido. Sus amigos los consuelan. hay algunos estudiantes que hablan entre ellos y hacen cuentas para ver cuanto necesitan para pasar. El maestro en formación da algunos minutos para que los estudiantes “asimilen el golpe”. Luego les solicita que prosigan a la clase, indicando también que el día de mañana habrá refuerzos para octavo y, que si ellos desean asistir serán bienvenidos.

El maestro en formación solicita la tarea, a lo cual la gran mayoría la entrega en hojas, hay algunos que la hicieron en el cuaderno. Estos estudiantes la pasan en hojas. Algunos llegan al acuerdo con el m. en f. de entregarla la próxima clase con los siguientes ejercicios. Se les pregunta si tienen dudas sobre los ejercicios. No proponen ningún ejercicio para realizarlo y explicarlo. Se toma uno de los ejercicios y se desarrolla. Empieza la explicación de la temática del día: “Simplificar fracciones algebraicas con términos polinómicos”. Se copia en el tablero la regla. Se procede a realizar ejemplos paso a paso en el tablero. Varios estudiantes pasan y otros muestran interés por pasar. Los estudiantes que se encuentran en sus puestos participan indicando qué factorización se podría realizar en numerador y/o denominador. Al parecer algunos estudiantes confunden aún estos términos de la fracción. Hay estudiantes que hablan entre ellos, pero es sobre

los ejercicios. Se centra la atención en aquellos estudiantes que muestran interés en los ejercicios, que son la gran mayoría. Hay algunos estudiantes “sobrados” que asimilan el tema rápidamente. No se enfoca en ellos.

Los estudiantes vieron una ‘aplicación’ para los casos de factorización que se han visto en las sesiones anteriores, lo cual hace que se motiven a hacer los ejercicios.

Se copian en el tablero cinco ejercicios para que los solucionen en clase. Los estudiantes los realizan y si tienen dudas se dirigen hacia el profesor.

El caso de simplificación de términos factorizando por factor común es el caso que más muestra dudas procedimentales. Los estudiantes comprendieron mejor si se da el paso “tal cual”, sin sustento matemático (inversos aditivos, separación de fracciones, cancelaciones, entre otras). Este detalle se tendrá en cuenta para las sesiones futuras.

Los estudiantes trabajan en sus ejercicios, piden ayuda también a sus compañeros y proponen soluciones. Le solicitan al maestro en formación que revise sus resultados. Se motivan cuando les queda bien.

Como trabajaron bien en la clase, se llega al acuerdo de que debían entregar tres ejercicios para clase y dos ejercicios como tarea. Se finaliza la sesión.

Sesión 6 (19 de septiembre):

La clase inicia normalmente. Se le pide el favor a tres estudiantes que entreguen los trabajos que el maestro en formación había calificado. El maestro en formación da tres observaciones con respecto a lo evidenciado en dichos trabajos:

Aunque los estudiantes están “simplificando bien” las expresiones literales, no simplifican los coeficientes.

La simplificación que más presenta inconvenientes es la realizada a partir de la factorización por factor común agrupado.

Se les recuerda que la cancelación de términos en una fracción se realiza SOLAMENTE cuando se multiplica, no cuando se suma. Allí se realiza una “explicación del concepto” de los paréntesis. Se les recuerda que los paréntesis precisamente indican un producto entre dos elementos y, que cuando esto sucede, ‘se toma todo lo que hay dentro de los paréntesis como un solo término.’

Se explican dos ejercicios de la tarea, en estos ejercicios se aplican los tres puntos anteriores. Se pregunta si hay preguntas. Se inicia el tema del día.

Cuando se coloca la primera simplificación, solo tres estudiantes dan el resultado correcto.

$$\frac{2a - 2b}{3b - 3a}$$

Respuesta

$$\frac{2}{3}$$

Muchos estudiantes dieron como respuesta $2/3$.

Se explica en el tablero que $(a-b) = (b-a)$, diciéndoles que si recordaban el juego que habíamos tenido con los signos de la fracción. Se da un ejemplo con un par de números que una estudiante propone (5 y -5). Se realiza la validación en el tablero de la siguiente forma:

$$(a-b) = (b-a)$$

$$a=5, b=-5$$

$$(5-(-5)) = (-5-5)$$

en este paso se les pregunta a los estudiantes cuanto es $5-(-5)$, a lo que contestan “cero”, se repite la pregunta unas cinco veces, hasta que un estudiante contesta “diez”, por lo que se prosigue con los algoritmos:

$$(5+5) = (-5-5)$$

$$10=-10$$

Lo cual no es cierto.

Por lo que se soluciona el ejercicio pedido bajo el “truco” de factorizar un -1 en alguno de los paréntesis.

Se deja el segundo ejercicio:

$$\frac{ax^2 - 9a}{3x - 3y - x^2 + xy}$$

Respuesta:

$$\frac{a(x+3)}{y-x} \text{ ó } -\frac{a(x+3)}{x-y}$$

Los estudiantes solo simplificaron una vez el numerador (por a como factor común), pero no realizaron la diferencia de cuadrados resultante, por lo que se explica que a veces se debe hacer más de una factorización y que este paso “es permitido”.

Se soluciona el ejercicio en el tablero.

Se da el tercer ejercicio:

Simplificar:

$$\frac{a^3 - 25a}{2a^3 + 8a^2 - 10a}$$

Respuesta:

$$\frac{a-5}{2(a-1)}$$

A lo cual unos ocho estudiantes dan la respuesta correcta.

Se dejan los siete ejercicios de clase como tarea y se les indica a los estudiantes que “la clase siguiente habrá una sorpresa”, aludiendo a un quiz para la siguiente sesión. Se finaliza la clase.

Con respecto al comportamiento de los estudiantes, en esta sesión hablaron demasiado entre ellos e incluso llegaron a tomar selfies entre ellos, por lo que se les indica que a l

próximo estudiante que se vea con un celular, se le decomisará. Se decomisan tres celulares. La profesora y el maestro en formación hablan con estos estudiantes al final de la clase. Hay otros estudiantes que hablan entre ellos, pero sin usar celulares, por lo que el maestro en formación les hace un llamado de atención al final de la clase, diciéndoles que “lo que hicieron con las manos en sesiones anteriores, lo habían borrado con los pies en esta sesión”. Se habla con la profesora para pedirle sugerencias sobre este tema, quien recomienda que se “juegue con el tiempo de la clase, indicándoles que entre más interrupciones tenga la clase, más se va a retrasar la salida de la sesión”. También se evidencia el desorden que dejaron en el salón, lo cual también puede usarse como amonestación.

Se finaliza la charla con la profesora, quien indica que la sesión siguiente se hable sobre sumas de fracciones algebraicas con términos monomios. También se le indica al maestro en formación que si desea puede hacer la unidad didáctica sobre congruencia de triángulos o sobre distribución normal. El maestro en formación escoge la distribución normal.

Sesión 7 (26 de septiembre):

La clase inicia normalmente, se explica un ejercicio de la tarea, el cual sirve para validar lo que se va a calificar en el quiz: el reconocimiento de factorizaciones posibles en un polinomio, la múltiple factorización y el cambio de signos en algunos términos de la fracción algebraica.

Se da este ejemplo se dan algunas recomendaciones a los estudiantes, entre ellas la de dejar más organizado el salón y recordar que las tareas y quices del maestro en formación también hace arte de la nota de la clase. Se procede a organizar el salón en seis filas para comenzar con el quiz.

El quiz estaba conformado por tres ejercicios, los estudiantes fueron “separados” en tema a y tema b. se tenían pronosticados 20 minutos para éste, pero cuando los estudiantes lo inician, llega una profesora y les recuerda la puntualidad en las clases, so pena de no poder jugar en los equipos de futbol, además les recuerda una competencia de ortografía que habría el siguiente día. Por este motivo el quiz se extendió a 30 minutos.

Luego del quiz, se procede a introducir el tema de sumas de monomios, para lo cual se desarrolla un ejercicio por medio de dos métodos. Los estudiantes se encuentran dispersos, por lo que se extiende la clase hasta 10 minutos después de la clase normal.

La profesora le solicita al maestro en formación que deje dos ejercicios de tarea, también que, si es posible que el siguiente miércoles se realice un quiz en la clase, ya que la profesora necesita realizarlo para finalizar la unidad del semestre. El maestro en formación indica que no hay inconveniente.

Cuando finaliza la clase, la profesora le da unas recomendaciones al maestro en formación:

Sugiere que se trabaje el método del m.c.m., ya que el método de la “carita feliz” deja de lado el concepto de m.c.m y esto afecta mucho el desarrollo conceptual del algoritmo. Se acuerda en solo trabajar este método de ahora en adelante.

También sugiere que se expliciten los signos de igualdad para cada proceso. El maestro en formación generó las partes de los procedimientos a partir de colores, por lo que también se acuerda de ahora en adelante explicitar el signo igual y que los procesos se realicen verticalmente y, cuando se necesite realizar un procedimiento alterno, se realice a un costado del tablero, indicando algún número para no perder el orden, esto con el fin de darle más “rigor” a la escritura escolar.

Se finaliza la sesión, el maestro en formación le indica a la profesora que definitivamente se realizará la unidad didáctica sobre congruencias de triángulos, a lo cual la profesora le entrega la guía de trabajo para que ésta quede en concordancia con lo que se trabajará en el colegio.

Sesión 8 (3 de octubre):

La sesión inicia conforme a lo acordado en la clase pasada con la profesora, quien realiza un repaso de sumas y productos de fracciones algebraicas. Se toman la resta y la división como casos particulares de la suma y el producto respectivamente. La profesora va preguntando procedimientos a los estudiantes de acuerdo a las notas que tengan, priorizando a quienes tengan menores calificaciones. La clase se centra en corregir errores de procedimientos como cancelar términos, realizar todas las factorizaciones que el ejercicio permita, no confundir los términos con las expresiones algebraicas, así como los productos con las sumas (este es un error muy recurrente en la clase). La profesora realiza tres ejercicios en el tablero, de los cuales uno es de sumas, uno es de producto y uno es de división. En los tres ejercicios se operaron tres fracciones algebraicas, en las sumas se halló el m.c.m. para convertir las fracciones a homogéneas y luego operar los

numeradores. En el producto se factorizaron los términos de numeradores y denominadores para luego “unificarlos” en una sola fracción y luego se cancelan términos semejantes. La división se realiza multiplicando el primer término por el inverso multiplicativo del segundo.

Antes de finalizar la clase la profesora le da un espacio al maestro en formación para que entregue los quizes y las tareas calificadas. El maestro en formación les indica los errores más comunes, entre los que se encontraron el multiplicar los términos por -1 para poder cancelar términos semejantes, no factorizar los términos completamente y confundir los productos con los términos que están sumando, lo cual genera cancelaciones erróneas. Se entregan dichos trabajos y se finaliza la sesión.

Se dialoga con la profesora sobre la unidad didáctica, se llega al acuerdo de enviarla cuando el asesor realice las correcciones pertinentes.

Sesión 9 (17 de octubre):

En esta sesión inició la implementación de la unidad didáctica con la actividad 0. La información sobre lo acontecido ese día se encuentra en la sección cinco: “análisis de actuación”

Sesión 10 (18 de octubre):

En esta sesión se realizó la implementación de la actividad 1 de la unidad didáctica. La información sobre lo acontecido ese día se encuentra en la sección cinco: “análisis de actuación”

Sesión 11 (31 de octubre):

Antes de iniciar la sesión el maestro en formación se reúne con la profesora, quien le indica que se trabajaría con máquinas de Galton para ver la aproximación de la distribución binomial a la normal, lo cual serviría de introducción para dicho tema, lo cual ocuparía la mayor parte de la clase. Al final se daría un espacio para que los estudiantes corrijan algunos puntos de un taller que se realizó en sesiones anteriores y, que tienen como tema principal las congruencias de triángulos.

Inicia la sesión, se llevan ocho máquinas realizadas por estudiantes en el año pasado, por lo que la profesora Karen ingresa al aula y, junto con el maestro en formación examina estas máquinas y colocan cinta en aquellas que tenga fisuras para que no se salgan los balines cuando se hagan los experimentos. La profesora da la siguiente indicación(parafraseada): “intenten describir que forma toma la curva que se genera”

Los estudiantes se organizan y empiezan a colocar los balines en las máquinas, como varios grupos colocaron este artefacto encima del pupitre, que tiene una base ladeada, en los primeros experimentos las canicas se iban hacia un lado, casi siempre el derecho, ya que hacia este lado se encontraba el desnivel del pupitre.

La profesora y el maestro en formación pasan por los grupos para validar el trabajo de éstos y solucionando dudas puntuales que se tengan. Los grupos examinan dos o tres posibilidades y luego de esto, pasa un representante por cada grupo para dibujar en el tablero la curva obtenida. La profesora explica que, en caso de que se realice el experimento con infinitas pelotas o, que este número tienda a infinito, la curva va a tender a verse mejor, conforme a la forma de distribución gaussiana. Algunos estudiantes

tomaron esta charla por el lado de la contenedora de la máquina para infinitas canicas: “si son infinitas canicas, entonces en algún momento se llenará la máquina, ¿no?” a lo que la profesora da la explicación de que este proceso infinito no existe en la vida real.

Los estudiantes corrigen sus talleres y la sesión finaliza. Se da el anuncio de que el próximo miércoles continuarán las actividades del maestro en formación, por lo que debe llevar pegante o algo para pegar palitos de paletas.

Sesión 12 (7 de noviembre):

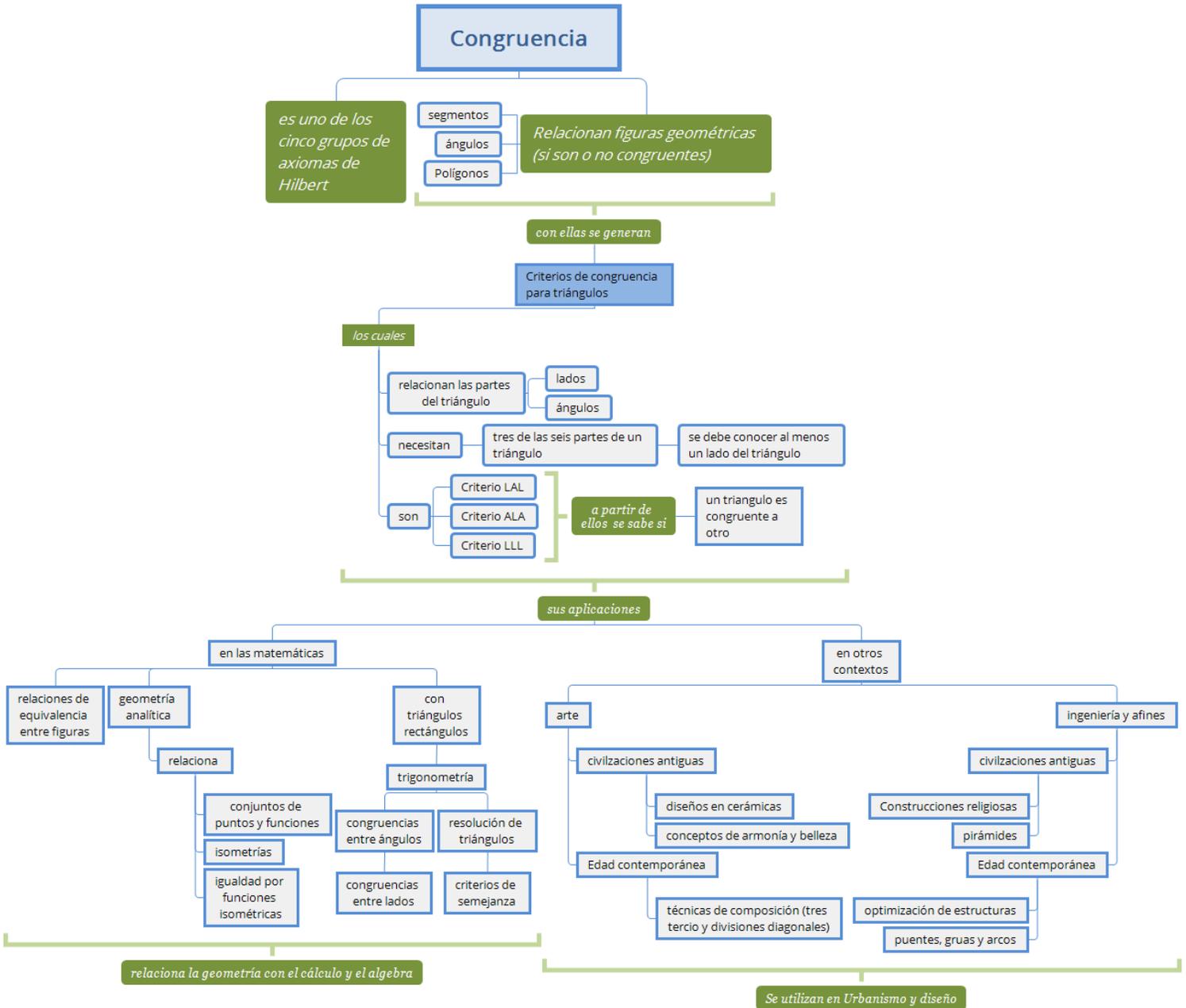
En esta sesión se realizó la implementación de la actividad 2 de la unidad didáctica. La información sobre lo acontecido ese día se encuentra en la sección cinco: “análisis de actuación”

Sesión 13 (14 de noviembre):

En esta sesión se realizó la implementación de la actividad 3 de la unidad didáctica. La información sobre lo acontecido ese día se encuentra en la sección cinco: “análisis de actuación”. Es la sesión final de la unidad didáctica y de la práctica.

2. Análisis de contenido:

Ilustración 2: red conceptual sobre los criterios de congruencia entre triángulos



A continuación, las definiciones relacionadas en la red conceptual:

- **Angulo:** Un ángulo son dos semirrectas no alineadas con el extremo en común. Es decir, si tomamos tres puntos A, B y C no alineados, definiremos el ángulo $\angle BAC$ por

$$\angle BAC = \overrightarrow{AB} \cup \overrightarrow{AC}$$

- **Congruencia:** 1. Dos segmentos de recta son congruentes si tienen la misma medida. 2. Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida. 3. Dos triángulos son congruentes si las medidas de sus lados son iguales. 4. Dos polígonos son congruentes si es posible superponer uno sobre otro.

Los fundamentos de geometría de Hilbert dan los siguientes teoremas y axiomas de congruencia:

Grupo IV: Congruencia

- H4.1 Si A y B son dos puntos de la recta a, y A' es un punto sobre la recta a' (sea esta igual a o no), se tiene que, de un lado cualquiera de A' en la recta a', existe un único B' tal que el segmento \overline{AB} es congruente con el segmento $\overline{A'B'}$, y lo denotamos por $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$. Todo segmento es congruente consigo mismo.
- H4.2. Si un segmento \overline{AB} es congruente con el segmento $\overline{A'B'}$ y también con el segmento $\overline{A''B''}$, entonces estos dos últimos son congruentes entre sí (es decir, la congruencia entre segmentos es transitiva).
- H4.3 Sean \overline{AB} y \overline{BC} dos segmentos de la misma recta sin puntos en común a excepción de B, y sean además $\overline{A'B'}$ y $\overline{B'C'}$ dos segmentos de la recta a' (sea ésta igual o no a a) sin

más puntos en común que B' . Entonces, si $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, se tiene que

$$\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$$

- H4.4 Sea un ángulo $\angle(h, k)$ en el plano α y sea una recta a' en el plano α' . Supóngase que en el plano α' , se escoge uno de los lados respecto a a' . Sea un semirayo h' de a' que emana de un punto O' de dicha recta. Entonces, en el plano α' existe un único semirrayo k' que sale de O' de forma que ángulo $\angle(h, k)$ es congruente con ángulo $\angle(h', k')$ y de forma que todos los puntos del interior de ángulo $\angle(h', k')$ están en el lado escogido de α' . Se denota por $\angle(h, k) \cong \angle(h', k')$ Todo ángulo es congruente consigo mismo.
- H4.5 Si el ángulo $\angle(h, k)$ es congruente con el ángulo $\angle(h', k')$ y con el ángulo $\angle(h'', k'')$, entonces estos dos son congruentes entre sí (es decir, la congruencia de ángulos es transitiva).
- H4.6 (Criterio LAL) Si dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$ se tiene $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, $\angle BAC \cong \angle B'A'C'$, entonces se tiene a su vez $\angle ABC \cong \angle A'B'C'$ y $\angle ACB \cong \angle A'C'B'$,
- Criterio AAL: Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, si se cumple $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ y $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$
- Criterio ALA: Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, si se cumple $\angle A \cong \angle A'$, $\angle B \cong \angle B'$ y $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$
- Criterio LLL: Dados dos triángulos ΔABC y $\Delta A'B'C'$, si se cumple $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$, $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$ y $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$, entonces $\Delta ABC \cong \Delta A'B'C'$

- Segmento: Sean P y Q dos puntos no necesariamente diferentes. Definimos el segmento de extremos P y Q, que representaremos por \overline{PQ} , como el conjunto de puntos

$$\overline{PQ} = \{ X | \{ P * X * Q \} \cup \{ P, Q \}$$

Definimos el interior del segmento \overline{PQ} como el conjunto de puntos

$$\overline{PQ} - \{ P, Q \} = \{ X | \{ P * X * Q \}$$

- Se dice que una transformación T del plano es una isometría si T no altera la distancia entre los puntos. Si P (x, y) y Q (z, w) son dos puntos cualesquiera del plano, la distancia entre los puntos P y Q debe ser igual a la distancia entre los puntos T(P) y T(Q). Por lo tanto, $d(T(x, y), T(w, z)) = d((x, y), (w, z))$ donde d es la distancia entre los puntos del plano, dada por $d((x, y), (w, z)) = ((x - w)^2 + (y - z)^2)^{1/2}$
- Polígono: Figura plana cerrada delimitada por segmentos de recta que no se cortan entre ellos, salvo en sus extremos. Cada uno de los segmentos de recta es un lado del polígono y el punto donde se intersecan dos lados consecutivos del polígono se llama vértice.
- Un triángulo es un polígono de tres lados, es decir, dados A, B, C tres puntos no colineales. Definimos el triángulo ΔABC por:

$$\Delta ABC = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{CA}$$

Los puntos A, B y C son los vértices del triángulo. Los segmentos \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{CA} son los lados del triángulo. Los ángulos $\angle A = \angle CAB$, $\angle B = \angle ABC$ y $\angle C = \angle ACB$ son los ángulos del triángulo.

El interior del triángulo ΔABC se define como la intersección de los interiores de los ángulos $\angle A$, $\angle B$ y $\angle C$

El exterior del triángulo ΔABC es el conjunto de puntos que no están en el triángulo ni en su interior.

- Relación de equivalencia: La relación de equivalencia es una estructura matemática que presenta las siguientes propiedades:
 - Reflexiva: $a \sim a$
 - Simétrica: Si $a \sim b$, entonces $b \sim a$
 - Transitiva: Si $a \sim b$ y $b \sim c$, entonces $a \sim c$

Decimos que los objetos a y b están relacionados si cumplen las tres propiedades enlistadas y lo denotamos por $a \sim b$.

➤ **Aplicaciones del contenido en las matemáticas:**

El ser humano ha intentado desde tiempos antiquísimos dar significado a su entorno, es así que empieza a relacionar las formas que le rodean. En la recopilación de los elementos de Euclides ya hay esbozos de una axiomatización sobre dichas propiedades que resultan invariantes entre el mundo de los objetos ideales, es así que en las nociones comunes se intenta explicar la igualdad entre uno y más elementos, sobre todo la cuarta noción: “las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí”.

En la proposición cuatro del primer libro se indica alguna aproximación al criterio LAL, así como en la proposición 6 y algunas otras en este primer libro, es así que la congruencia entre triángulos se encuentra en un lugar fundamental de las matemáticas.

En la era contemporánea, a inicios del siglo pasado, David Hilbert publica sus fundamentos de geometría, donde se axiomatizan las ideas de Euclides y sus elementos, por medio de cinco grupos axiomáticos; uno de estos grupos es el denominado de congruencias, el cual es muy importante, no solo en la geometría sino en todas las áreas de las matemáticas, ya que la congruencia permite generar funciones de conjuntos de puntos a conjuntos de números, lo cual genera un enlace entre el álgebra, el cálculo y la geometría.

➤ **Aplicaciones del contenido fuera de las matemáticas:**

La idea de congruencia aparece en las civilizaciones más antiguas a través de la arquitectura y el arte: la idea de perfección ha movido a que el ser humano genere estrategias para mejorar las representaciones de sus dioses, ejemplo de esto es la cultura antigua egipcia, que realizó majestuosas construcciones como sus pirámides, las cuales se mantienen en pie hasta hoy día. Resulta asombroso el nivel de congruencia que tienen las caras de la pirámide de Gizah, donde su error no sobrepasa los 4° .

En arquitectura e ingeniería se estudian las propiedades de los triángulos para generar estructuras resistentes y eficaces, es por este motivo que construcciones como la torre Eiffel está realizada a partir de triángulos, incluso, su forma entera asemeja una pirámide alargada. Cada triángulo que la conforma genera congruencias con algunos

varios de la misma, generando que esta estructura sea muy resistente y no necesite tanto material.

Esta misma idea se utiliza para crear las grúas de construcción y algunos puentes (p.e. el Golden Gate Bridge) en donde se optimiza el uso del material y se refuerza la estructura usando las propiedades de triángulos congruentes isósceles.

3. Análisis cognitivo:

➤ **Objetivos de la Unidad Didáctica:**

El objetivo de la unidad didáctica propuesta en este documento consiste en generar una serie de (cinco) actividades para que los estudiantes del curso 8-D del colegio CAFAM puedan tener un acercamiento a los criterios de congruencias de triángulos LAL, ALA y LLL por medio de la manipulación de material concreto y de la generación de triángulos congruentes físicos y en geometría dinámica.

➤ **Propuestas didácticas de enseñanza y experiencias de aprendizaje:**

Esta unidad didáctica se enfoca en la construcción de conocimiento a partir de la manipulación de objetos (físicos o virtuales), donde el estudiante explorará por sí mismo el surgimiento de los criterios de congruencia en triángulos. Han sido muchos los autores que han validado en sus experiencias académicas la efectividad de esta forma de trabajo en el aula.

Bermúdez (2011) realiza una propuesta didáctica para estudiantes de sexto grado en donde, a partir de construcciones con regla y compás los estudiantes asimilan de mejor

forma las propiedades de algunas figuras geométricas. Los criterios de congruencia de triángulos son algunas de estas propiedades. Genera un amplio contexto histórico que enlaza la geometría y las congruencias, semejanzas, isometrías y homotecias de las figuras geométricas con las relaciones de equivalencia algebraicas y, con el concepto de inconmensurabilidad, el cual abre camino hacia los números irracionales. La propuesta didáctica consta de talleres-guía donde los estudiantes van asimilando los conceptos y procedimientos de construcción de figuras geométricas a partir de sus propias creaciones.

Caleño (2014) genera una propuesta para la enseñanza de semejanzas en triángulos a partir de geometría dinámica. En este trabajo se relata la relación entre la congruencia y semejanza de triángulos. Se valida aquí que es mucho más potente la figura dinámica de un programa de computación que la figura estática de un dibujo en el tablero. Cuando el estudiante puede manipular las representaciones de los objetos asimila de mejor forma los conceptos en juego.

Villarreal y Sgreccia (2011) generan un listado que caracteriza e identifica los materiales didácticos comunes para la enseñanza de geometría en secundaria. Entre los recursos que se destacan se encuentran los bloques lógicos, pentominós, policubos, cubos soma, tangram, geoplanos, trabajos con poli formas e incluso origami. Para cada tipo de material generan una propuesta de actividades y, en las conclusiones recalcan el papel de la manipulación en la asimilación de conceptos.

El trabajo de Flores, Lupiáñez, Berenguer, Marín y Molina (2011). Es muy similar, en éste presentan también el material “círculo de ángulos”, que podrá servir para establecer congruencias a partir de uno o dos ángulos.

Briceño y Sánchez (2017) generan una propuesta a partir de la manipulación del tangram, donde relacionan las nociones de congruencia y semejanza de triángulos a partir de sus medidas. La congruencia se analiza a partir de la medida y la forma de la figura. Una de las consideraciones que dan los autores es realizar la actividad con mas materiales, incluidos pitillos plásticos y demás. Con este tipo de actividades se aprecia mejor la semejanza a partir de la congruencia,

Vergel, Rocha y León (2006, citado en Garzón, Duarte, Rengifo 2015) manifiestan que hay varias dimensiones que afectan la estructura de las actividades matemáticas en el aula: La matemática, que vincula todo el conocimiento del concepto, procesos, habilidades en el área específica que se trabajan interactuando con el dispositivo didáctico; la cognitiva, que se ocupa del diseño de estrategias y soluciones por parte del estudiante y la socio-matemática, que pone en juego las normas socioculturales y sociomatemáticas establecidas, producto de la interacción grupal y el saber, manifestadas en discusiones e interpretaciones que pueden tener los estudiantes respecto al tema que se trate en clase.

➤ **Dificultades**

El hecho que se implemente algún tema de matemáticas genera aversión y antipatía en muchos de los estudiantes, por lo que está preparado para algún momento en el que los estudiantes no deseen realizar actividades, por este motivo se utilizará la exploración de materiales y figuras del entorno para intentar atraer la atención del estudiante hacia el concepto matemático.

Muchas veces se examinan los objetos geométricos de una forma estática (por los dibujos “rígidos”), lo que muchas veces tiene como consecuencia que se “estandarice” la forma en que se ve un triángulo, es decir, se escuchan frases como ‘la parte de debajo de un triángulo’, ‘esta figura está al revés’, entre otras. Se espera que con la manipulación del material didáctico se pueda menguar este fenómeno

Se añade a este inconveniente la poca formación del pensamiento geométrico que existe en los estudiantes del país, lo que hace que algunos conceptos claves para comprender los criterios, como las relaciones de equivalencia (en nociones) y transformaciones isométricas no sean totalmente asimilados por los alumnos.

➤ **Errores**

Se especula que los estudiantes no asimilen la palabra “congruencia”, tanto como la “igualdad”. También se especula que los estudiantes no distingan la congruencia de figuras que puedan serlo, pero que tengan “orientaciones y/o posiciones distintas”.

Tal vez pueda suceder que se confunda la congruencia con la semejanza, sobre todo al analizar los ángulos de los triángulos que se trabajen.

Se debe tener cuidado cuando se manipulen los lados y los ángulos, ya que puede suceder que algunos estudiantes modifiquen sus tamaños y medidas, lo que puede generar un error de conceptos.

4. Análisis de instrucción:

- **Actividad 0: “Carrileras de tren”:** La actividad se realizará al aire libre, se utilizará lana de colores para representar las rectas y, de esta forma se “observarán y manipularán” los elementos geométricos para que se puedan asimilar de mejor forma los conceptos de recta paralela, recta secante, ángulos opuestos, ángulos concurrentes, ángulos conjugados, alternos internos, alternos externos, correspondientes.

Se nombró esta actividad como “cero” porque no corresponde como tal a los conceptos de la unidad didáctica, pero estos conceptos son fundamentales para comprender mejor los criterios de congruencia de triángulos.

Se ambientará la actividad a partir de carrileras de tren, de acuerdo a la experiencia del profesor Juan Carlos Vega, asesor de este trabajo, así como de la guía de aprendizaje 14 del colegio, donde se indica como objetivo de aprendizaje explorar las medidas de los ángulos formados por rectas transversales y paralelas, formulando conjeturas sobre estas relaciones.

Esta actividad se fundamenta teóricamente en el trabajo de Villaroel y Sgreccia (2011), quienes indican en la parte de “objetos del entorno real” que se desarrollan las siguientes habilidades (p. 90):

“Habilidades abordadas en la actividad: Visuales (percepción figura-fondo, discriminación visual, constancia perceptual, percepción de la posición espacial y de la relación entre objetos); de comunicación (recolección e interpretación de información, denominación); de dibujo y construcción (obtención de distintas vistas de un mismo objeto); lógicas o de razonamiento (Argumentación, abstracción de

propiedades); de aplicación y transferencia (identificación de formas y relaciones geométricas en el mundo natural y artificial, análisis de las formas n relación con el objeto en donde se encuentran

- La duración estimada de la actividad está esquematizada de la siguiente forma:
 - Preliminares (5 min): se darán las pautas necesarias para el buen desarrollo de la actividad (no alejarse del grupo, poner atención a las indicaciones de los profesores, participar en las actividades de acuerdo a lo que los profesores indiquen, no irrespetar a los compañeros, no realizar otras actividades en el momento que se esté fuera del aula hasta que se finalice la actividad.).
 - Salida del aula (5 min) se trasladará el curso a una de las zonas verdes del colegio cercanas al salón, se colocarán las rectas en el pasto, ambientando una “carrilera de tren” para justificar el paralelismo de las rectas (¿Qué pasaría si las carrileras de un tren no fueran paralelas?)
 - Realización de la actividad (20 min). se les solicitará a los estudiantes que anoten en sus cuadernos características de los ángulos que se vayan formando. Se dialogará entre el curso sobre las características que se encontraron, se podrán “manipular” las rectas paralelas de acuerdo a las indicaciones del profesor y las rectas secantes de acuerdo a lo que los estudiantes requieran.

- Cierre (5 min) Se llegará al consenso de las definiciones que se encuentran en la guía de aprendizaje, indicando que en las siguientes sesiones se trabajará con esas definiciones.
- Objetivo actividad 0: Hacer un acercamiento a las definiciones y propiedades que tengan los ángulos generados por intersecciones de rectas secantes a paralelas para fortalecer los conceptos fundamentales para asimilar mejor los criterios de congruencias de triángulos mediante material manipulativo ambientado en un contexto “real” (simulación de vías de tren)
- Recursos actividad 0:
 - Lana de colores
 - Cuadernos de los estudiantes
 - Lápices, esferos
 - Guía de aprendizaje 14 del colegio. (o documento donde se encuentren los conceptos de ángulos formados por rectas secantes a paralelas)
- La forma en que se planea recopilar la información de esta actividad consiste en evaluar las participaciones de los estudiantes, quienes participarán de dos formas:
 - Los estudiantes irán recopilando la información en sus cuadernos. Se tomarán algunos registros fotográficos de lo que realicen en los cuadernos y en la clase.
 - Se tendrán en cuenta las participaciones que realicen los estudiantes para validar la forma en que están razonando.

- **Actividad 1: “juego Memoria”:** se realizarán 20 parejas de tarjetas en cartulina, los cuales estarán pegados en el tablero. Una de las tarjetas pareja tendrá los criterios de congruencia, los tipos de triángulos que existen, congruencias de ángulos formados por intersecciones de una transversal a dos paralelas o propiedades de los triángulos, mientras que su compañera tendrá una representación gráfica de la misma, su notación o en su defecto, una frase indicando en que consiste la propiedad (ver ilustraciones 2 y 3).

La actividad se desarrollará en grupos. Se dividirá al curso en ocho grupos. En cada grupo habrá aproximadamente cinco integrantes. Cada grupo irá pasando al tablero por medio de cada uno de sus integrantes y si descubren una pareja, se la quedan. Sólo se podrá ganar máximo una pareja por turno. Gana el grupo que más tenga parejas.

Con esta actividad se busca asociar las definiciones, conceptos y teoremas que los estudiantes están trabajando en la guía de aprendizaje escolar con lo trabajado en el aula.

También se busca generar trabajo en grupo para que entre todos los estudiantes se repasen conceptos importantes de los triángulos, incluyendo estos los criterios de congruencia LAL, ALA y LLL.

Ilustración 3: “fichas para el juego memoria”

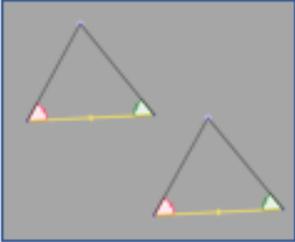
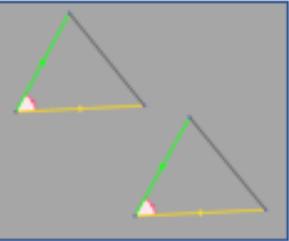
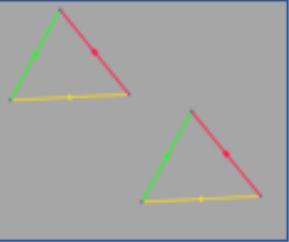
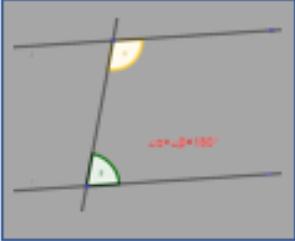
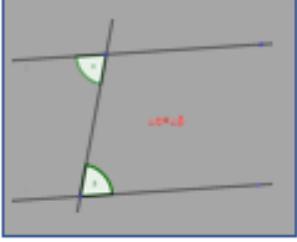
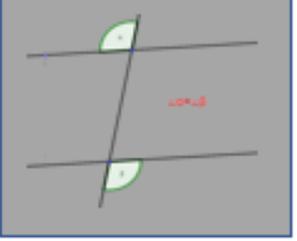
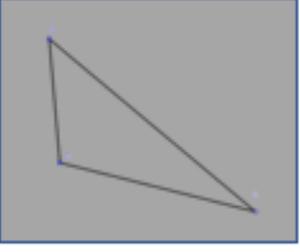
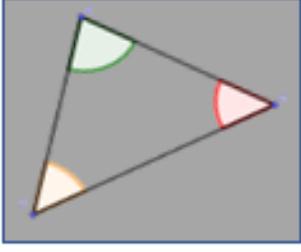
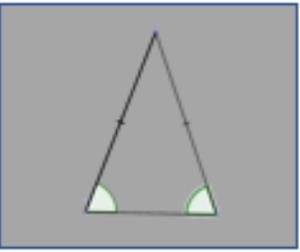
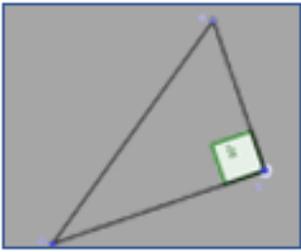
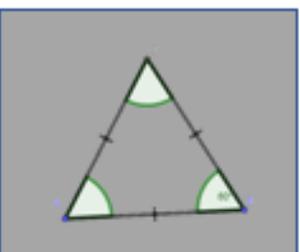
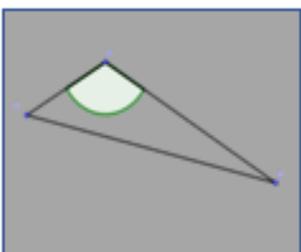
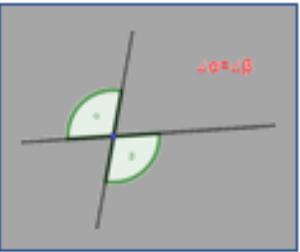
ALA		Congruencia (símbolo)	\cong
LAL		Triángulo ABC (Símbolo)	$\triangle ABC$
LLL		Ángulos correspondientes	
ángulos conjugados		Ángulos alternos internos	
Prop. Suma ángulos internos del triángulo	“la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180° ”	Ángulos alternos externos	

Ilustración 4: “fichas para el juego memoria (cont.)”

Triángulo Escaleno		Triángulo acutángulo	
Triángulo isósceles		Triángulo rectángulo	
Triángulo equilátero		Triángulo obtusángulo	
Ángulos opuestos por el vértice		Partes de un Triángulo	“vértices, ángulos y lados”
Prop. Suma ángulos externos del triangulo	“la suma de los ángulos externos de un triángulo es 360°”	Prop. Ángulo externo del triangulo	“cada ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de sus opuestos”

- Objetivo actividad 1: fortalecer los conceptos y propiedades de triángulos que se han aprendido en la clase y en la guía de aprendizaje por medio de una actividad lúdica para que los estudiantes los asimilen mejor.
- Recursos actividad 1:
 - Fichas de cartulina
 - Cinta de enmascarar o cinta pegante
 - Tablero, marcadores.
 - Libro de apuntes del maestro en formación.
- Se recopilará información de esta actividad a partir de lo que los estudiantes comenten en cada grupo, así como en la forma que argumenten el por qué relacionan algunas parejas. Se tomarán algunos registros fotográficos de la actividad y se irá llevando la cuenta de las parejas obtenidas por cada grupo.
- La duración estimada de la actividad está esquematizada de la siguiente forma:
 - Preliminares (7 min): Se colocarán las fichas en el tablero de forma aleatoria, mientras tanto los estudiantes conformarán los grupos y le darán al maestro en formación una hoja con sus nombres. Se explicará la forma de participar y se dejarán las reglas de juego claras.
 - Instrucción y realización de la actividad (20 min). Se dará este tiempo aproximadamente para que los estudiantes realicen el juego. En caso de que los estudiantes no encuentren ninguna pareja por desconocimiento del concepto, el maestro en formación realizará un breve ejemplo en el tablero.

- Cierre (5min.): se dará un espacio para que los estudiantes expongan sus comentarios con respecto a la actividad. El maestro en formación también dará sus opiniones respecto al desarrollo de la actividad.

➤ **Actividad 2: “reflexiones sobre la estructura de la torre Eiffel”:** Se proyectará un video en el televisor del aula donde se habla de 10 curiosidades de esta estructura. Luego se utilizará la aplicación Google maps para tener una simulación de visita al monumento, la cual permite tener una vista de 360°. La idea es que los estudiantes opinen sobre la estructura, para lo cual se tienen presentes estas preguntas:

- ¿qué figuras geométricas se visualizan en esta construcción?
- ¿por qué la estructura no es maciza? En otras palabras, ¿por qué hay ‘huecos’ en la torre?
- ¿se puede garantizar la congruencia de todos los triángulos de la estructura?
- ¿se puede garantizar la congruencia de algunos grupos de triángulos en la estructura?
- ¿Qué sucedería si estos grupos de triángulos no fueran congruentes? ¿la dilatación del hierro en la estructura delataría la no congruencia de los triángulos?
- Si deseo saber si dos triángulos son congruentes, ¿Cuántos datos de cada uno de ellos necesitaría?

Esta actividad se fundamenta teóricamente en el trabajo de Villaroel y Sgreccia (2011), quienes indican en la parte de “objetos del entorno real” que se desarrollan las siguientes habilidades (p. 90):

“Habilidades abordadas en la actividad: Visuales (percepción figura-fondo, discriminación visual, constancia perceptual, percepción de la posición espacial y de la

relación entre objetos); de comunicación (recolección e interpretación de información, denominación); de dibujo y construcción (obtención de distintas vistas de un mismo objeto); lógicas o de razonamiento (Argumentación, abstracción de propiedades); de aplicación y transferencia (identificación de formas y relaciones geométricas en el mundo natural y artificial, análisis de las formas n relación con el objeto en donde se encuentran

- La duración estimada de la actividad está esquematizada de la siguiente forma:
 - Preliminares (5 min): se realizarán las actividades de conexión del proyector, acomodación de los estudiantes y prueba del proyector.
 - Introducción (10 min) se explicará a los estudiantes la forma en que se realizará la actividad, indicando que se desea que ellos realicen sus aportes. Se realizará una primera reflexión sobre congruencia, la cual será generada a partir de las opiniones de los estudiantes.
 - Realización de la actividad (20 min). Se proyectará el video de los 10 datos curiosos de la torre Eiffel, (enlace del video en <https://www.youtube.com/watch?v=poOxL2gS8R8>) que dura alrededor de 3 minutos. Luego se abrirá la aplicación Google maps y se realizará la “visita” al monumento. Se dará un espacio de 10 minutos para que los estudiantes socialicen las preguntas indicadas en la justificación teórica de la actividad.

- Cierre (5 min) Se explicará la ventaja que tiene comprender la congruencia de triángulos, la cual se aplica en temas de optimizaciones estructurales y también a niveles estéticos.
- Objetivo actividad 2: Hacer un acercamiento a las congruencias de triángulos por medio de la arquitectura para motivar a los estudiantes en el estudio de las mismas.
- Recursos actividad 2:
 - Proyector
 - Computador
 - Tablero
 - Marcadores
- La forma en que se planea recopilar la información de esta actividad consiste en evaluar las participaciones de los estudiantes, quienes participarán de dos formas:
 - Los estudiantes podrán pasar al tablero para que puedan plasmar sus ideas al resto de la clase. Si se llega a presentar esto, se tomarán fotos de cada representación.
 - Los estudiantes que no se encuentren en el tablero podrán participar manifestando sus opiniones, lo cual será tenido muy en cuenta por el maestro en formación para tener un referente en cuanto a la apropiación del concepto en los estudiantes.

➤ **Actividad 3 “Triángulos congruentes a partir de pitillos”:** Se colocarán varios pitillos de tres determinados tamaños (grande, mediano y pequeño) en el frente del salón. La idea es que los estudiantes tomen tres pitillos y a partir de ellos realicen un triángulo. Habrá tres tamaños distintos de pitillos, con la condición que el pitillo menor debe ser más grande que la mitad del mayor (por la desigualdad triangular). Los estudiantes llevarán plastilina para unir los pitillos y formar así dichos triángulos. Luego de armados, deberán escribir en una hoja el tipo de triángulo que se formó, de acuerdo a sus lados y a sus ángulos. Cuando se tenga esta información, se buscará a los compañeros que tengan el mismo tipo de triángulos. Como máximo podrá haber 10 tipos de triángulos distintos, dada la combinación con objetos indistinguibles de $\binom{6}{3}$, entre los cuales hay mayor probabilidad de generar un triángulo escaleno y una menor probabilidad de generar un triángulo equilátero, tal como lo indican las siguientes tablas:

Tabla 1: posibilidades de tomar dos lados (pitillos) en la actividad

posibilidades de tomar dos lados			
	grande	mediano	pequeño
grande	gg	gm	gp
mediano	gm	mm	mp
pequeño	gp	mp	pp

Tabla 2: posibilidades de tomar tres lados (pitillos) en la actividad

posibilidades de tomar tres lados			
	g	m	p
gg	ggg	ggm	ggp
gm	ggm	gmm	gmp
gm	ggm	gmm	gmp
gp	ggp	gmp	gpp
gp	ggp	gmp	gpp
mm	gmm	mmm	mmp
mp	gmp	mmp	mpp
mp	gmp	mmp	mpp
pp	gpp	mpp	ppp

Tabla 3: resultados finales posibles y triángulos que se conforman

combinaciones posibles	posibilidades (sobre 27)	triángulo obtenido			tamaño del lado distinto (isósceles)
		triángulo obtenido	tamaño	tamaño del lado distinto (isósceles)	
ggg	1	equilátero	grande		
mmm	1	equilátero	mediano		
ppp	1	equilátero	pequeño		
ggm	3	isósceles	grande	mediano	
ggp	3	isósceles	grande	pequeño	
gmm	3	isósceles	mediano	grande	
mmp	3	isósceles	mediano	pequeño	
mpp	3	isósceles	pequeño	mediano	
gpp	3	isósceles	pequeño	grande	
gmp	6	escaleno			

Después los estudiantes deberán dar argumentos que justifiquen por que indican que estos triángulos eran congruentes. Se aprovechará esta situación para explicar los criterios de congruencia LAL al quitar uno de los lados y dejar el resto del triángulo “intacto” y ALA al quitar dos lados y mantener los ángulos entre ellos por medio de un dobléz en una hoja (par cada ángulo), pero sobre todo se estudiará el criterio LLL, ya que la construcción lo permite casi inmediatamente.

Se tienen en cuenta las recomendaciones dadas por Briceño y Alamillo (2017, pág. 20), sobre todo en la de trabajar con pitillos para generar figuras geométricas semejantes, aunque en esta actividad se generarán triángulos congruentes, se realizarán bajo la misma premisa que los autores indicaron en su trabajo, ya que ésta permite comparar figuras realizadas, pudiéndolas manipular mucho mejor.

- Objetivo actividad 3: Comprender a través de la exploración de material concreto y la construcción de triángulos los criterios de congruencia de triángulos, comparando otras creaciones para asimilar mejor los criterios LAL, ALA y LLL
- Recursos actividad 3:
 - 120 pitillos distribuidos de la siguiente forma:40 grandes, 40 medianos y 40 pequeños. Los pitillos pequeños deben medir mas que la mitad de los grandes.
 - Plastilina, cinta u otro material que permita unir los palillos por sus “puntas”
 - Pedazos de papel
 - Tablero
 - marcadores
- Se planea recopilar información mediante las hojas de respuesta de los estudiantes. El trabajo en grupo se analizará, ya que esta actividad se debe generar a partir de la comparación de varias construcciones.
- La duración estimada de la actividad está esquematizada de la siguiente forma:

- Introducción (5 min) se explicará a los estudiantes las instrucciones para la actividad. Se colocará el material en frente del tablero para que todos puedan adquirirlo.
 - Instrucción y realización de la actividad (20 min). Se dará este tiempo para que los estudiantes realicen su triángulo, luego se reunirán por grupos y, luego se hablará sobre el criterio LLL, después sobre el criterio LAL, quitando uno de los lados del triángulo y, finalmente, el criterio ALA al quitar dos lados del mismo y dejando “invariante” los ángulos que hubiesen dejado los lados anteriormente quitados. Esta “marca del ángulo” se generará por medio del doblado de una hoja de papel.
 - Cierre (5 min). Se dialogará con los estudiantes que para validar congruencias entre triángulos solo es necesario conocer tres de sus seis partes, siempre que entre esas partes se conozca al menos un lado congruente en los triángulos.
- **Actividad 4 “Diseñando estructuras con triángulos congruentes”:** se realizará forma individual. Se utilizarán reglas, compás y transportadores. La idea es que los estudiantes propongan y diseñen estructuras optimizadas por el uso de triángulos congruentes. De esta forma se aplicará “a la vida real” lo que se ha aprendido en el curso en el diseño de maquetas de estructuras como puentes, torres, grúas, entre otros.

Esta actividad se inspira en las ideas que han generado Flores, Lupiáñez, Berenguer, Marín y Molina (2011, pág. 128) al enlazar el arte con las matemáticas. Aunque en su libro, los autores relacionan las formas con la fotografía y el arte, lo que se busca en esta actividad es que los estudiantes creen algunas estructuras que sean estéticamente buenas

que en su estructura se conformen de triángulos congruentes, lo que generaría una aplicación de conocimientos a nivel artístico. También se utiliza lo indicado por Vergel, Rocha y León (2006) al considerar el saber matemático del aula como un saber social, un saber de consenso, además de la dimensión cognitiva, por la que se pone en juego el conocimiento adquirido.

- Objetivo actividad 4: fomentar la creatividad de los estudiantes por medio del diseño de estructuras generadas a partir de triángulos congruentes para que puedan ver una aplicación de los criterios de congruencia a nivel artístico (otra actividad aparte de las propias matemáticas).
- Recursos actividad 4:
 - Regla
 - Compás
 - transportador
 - Lápiz
 - Hojas de papel
 - Tablero
 - Marcadores
 - Reglas para tablero
 - Compás para tablero.
- Se fotografiarán las propuestas realizadas por los estudiantes, se analizará la congruencia de triángulos que conformen la estructura. Se tendrá en cuenta la originalidad de estos trabajos, así como de la estructura y la estética que se vea en las construcciones.

- La duración estimada de la actividad está esquematizada de la siguiente forma:
 - Explicación (5 min) se explicará a los estudiantes la actividad, se darán algunos ejemplos hablados de construcciones que pueden realizar.
 - Desarrollo de la actividad (30 min.): se dará este tiempo para que los estudiantes realicen sus construcciones. Se estará al tanto de la evolución de estos trabajos, así como del nivel de participación que tengan todos los miembros del grupo.
- **Actividad 5: “estructura de la torre Eiffel en computador”:** se utilizarán hojas de cálculo y software de geometría dinámica para potenciar la creación de estructuras a partir de triángulos congruentes en el aula de clases, de esta forma los estudiantes harán estas figuras de forma más precisa y rápida que con los métodos utilizados anteriormente.

Primeramente, se recordará a los estudiantes la forma en que se pueden generar segmentos y ángulos congruentes. Después se les indicará que deben realizar una estructura similar a la de la torre Eiffel a partir de estas congruencias. Se dará espacio al trabajo autónomo de los estudiantes y se estará al tanto para solucionar dudas puntuales que tengan los estudiantes con respecto al manejo de software de geometría dinámica.

Es probable que algunos estudiantes nunca hayan trabajado con software de geometría dinámica, por lo que se dará una breve explicación de los comandos de punto, recta, segmento, ángulo, compás y circunferencia, los cuales son indispensables para el desarrollo de la actividad.

De acuerdo a la experiencia de Reyes y Rojas (2011) indican que el software de geometría dinámica lo siguiente:

“En cuanto a la incorporación del SGD, se crea un nuevo ambiente de aprendizaje en el aula de clase ya que se diseñan actividades que promueven en el estudiante desarrollo de procesos cognitivos que favorecen el aprendizaje de la geometría, tales como: visualizar, explorar, medir, comparar, clasificar, analizar y explicar. También se ayuda a mejorar actitudes hacia el trabajo geométrico. De otro lado, propicia el trabajo autónomo y colaborativo, ya que el estudiante puede manipular e interactuar con los objetos matemáticos contribuyendo en la búsqueda de comprensión de los contenidos geométricos” (p. 293)

Esta idea también se encuentra en Castiblanco, Urquina, Camargo y Acosta (2004) cuando afirman que el aula de clase se revoluciona cuando se aplican las tecnologías computacionales, lo que hace que se manipule de mejor forma los objetos geométricos. (p. 299)

- Objetivo actividad 5: Utilizar software de geometría dinámica como herramienta para realizar construcciones de triángulos congruentes de forma más rápida y precisa que en lo realizado por material manipulativo.
- *Recursos actividad 5*
 - Equipos de cómputo
 - Proyector.
 - Acceso a internet (para buscar fotos guía)
- A medida que los estudiantes vayan indicando que pudieron generar el diseño de la estructura, el maestro en formación tomará fotos de esos trabajos en computador.

La duración estimada de la actividad está esquematizada de la siguiente forma:

- Preliminares (10 min): acomodación de los estudiantes en la sala de sistemas.
- Introducción (15 min) se explicará a los estudiantes como manejar el software de geometría dinámica; en específico los comandos de punto, recta, segmento, compás, rectas paralelas, rectas perpendiculares, triángulo, así como de copiar y pegar triángulos
- Instrucción y realización de la actividad (30 min). Se dará este tiempo a los estudiantes para que diseñen y realicen los dibujos de la torre Eiffel. El maestro en formación estará al tanto del desarrollo de estos diseños y de cualquier duda puntual que tengan los estudiantes.

5. Análisis de actuación:

➤ **Instrumentos de recolección de información:**

Se recogerán trabajos de los estudiantes para validar sus producciones, en las actividades de exploración y charlas, se tendrán en cuenta las intervenciones de los estudiantes, las cuales se grabarán (audios) y se examinarán en el siguiente apartado. Para las actividades en software de geometría dinámica se esperaba poder guardar los archivos producidos, para luego compararlos con las construcciones de regla y compás que se hubiesen realizado.

➤ **Descripción y análisis de las sesiones:**

El análisis que se realizará a continuación estará enfocado principalmente en los trabajos entregados por los estudiantes, ya que, sea a partir de entrevistas, opiniones, dibujos, propuestas de construcciones y otras producciones, se podrá validar si el objetivo de la unidad didáctica se cumplió.

Se hará énfasis en las respuestas propuestas por los estudiantes para analizar si las estrategias utilizadas en esta unidad didáctica sirvieron para que los conceptos fueran bien asimilados por los estudiantes.

Implementación actividad 0: Antes de iniciar la sesión el maestro en formación se dirige a una de las zonas verdes del colegio para alistar la “actividad cero” de la unidad didáctica. Llegada la hora se dirige al aula, donde les solicita a los estudiantes que formen ocho grupos de cinco a seis integrantes cada uno y que por favor copien sus nombres en una hoja para entregar, mientras coloca algunos recortes de cinta en el tablero para la “actividad 1”. En este instante solicita a algunos estudiantes ir a revisar los hilos con las estacas. Se organizan estos grupos y después llegan los estudiantes.

La clase se dirige a la zona verde, mientras la profesora se queda en el salón para revisar algunas notas y cuidando las pertenencias de los estudiantes. En esta zona se vuelven a colocar las tres figuras con pita:

Dos pedazos se intersecaban formando ángulos opuestos por el vértice

Tres pedazos se intersecaban en un mismo punto generando rectas concurrentes.

Dos pedazos se dejaron paralelos y, un tercero los intersecaba, para generar ángulos a partir de paralelas y secante.

En ese día hubo “jean Day”, por lo que los estudiantes se encontraban dispersos. Se da un espacio de 10 minutos para organizar estas figuras y para que los estudiantes se organicen. Pasado este tiempo, se inicia la explicación de conceptos, explicando la congruencia como una “igualdad de figuras que mantienen la misma forma y la misma medida”. Luego les hace la siguiente pregunta: ¿Qué es una recta? A lo que varios responden frases como “es algo que es recto”, “algo que no tiene curvas”, “una sucesión de puntos”.

Después se les solicita que mencionen algún ejemplo de rectas en la vida real. Una estudiante da el ejemplo de baldosas y ladrillos, los cuales, al ir colocados en la superficie, serán rectos.

Se da la siguiente discusión: “¿cuántas rectas tiene una esfera, es decir, su superficie?” los estudiantes responden “ninguna, o, infinitas”. “como la tierra tiene una forma esférica, o al menos aproximada a ella, significa que su superficie no es plana, por lo tanto, no podemos asegurar que esos objetos sean rectos. Osea que en la ‘vida real’, las rectas no existen, viven en un ‘mundo ideal, mundo de las ideas’ (se señala la cabeza, dando a entender la mente humana), pero esto no significa que no podamos usar lo aprendido en clase en la vida real”.

Se les solicita a los estudiantes que miren a la primera figura en el césped. Al mismo tiempo se les dice que los triángulos, cuadrados, pentágonos, y en sí, los polígonos no son

las únicas figuras geométricas que existen; que los puntos y las rectas también lo son. Se les pregunta de que se conforma un ángulo. Se llega al consenso de que están formados por un punto llamado origen y un par de lados.

Se explica que son ángulos opuestos por el vértice, moviendo alguna de las dos pitas y marcando los ángulos que resultan congruentes a partir de unos recortes de papel silueta de colores negro, rojo y blanco. Algunos estudiantes exploran los objetos moviendo las rectas, para luego convencerse que los ángulos opuestos por el vértice siempre son congruentes.

Se pasa a la siguiente figura y se da la definición de rectas concurrentes. Seguido, se solicita que algún estudiante indique algún par de ángulos congruentes en la segunda figura, la cual fue intencionalmente colocada como un “copo de nieve”, a lo cual algunos estudiantes dijeron “todos esos ángulos son congruentes”. Se hace la pregunta:

“¿podemos estar seguros de eso?” a lo que algunos estudiantes dicen que no. Pasa un estudiante y coloca dos ángulos adyacentes con dos papeles del mismo color. Los compañeros indican que no son congruentes, después una estudiante coloca dos ángulos opuestos, y justifica su proceso a partir de la definición dada anteriormente. En este momento de la explicación la profesora se acerca al grupo para observar lo que sucedía.

Para la tercera figura, se pregunta por la definición de rectas perpendiculares, a lo cual todos responden que “son aquellas que no se cortan”. Se les pregunta si están seguros de la respuesta, a lo que responden afirmativamente. Se les dice que están equivocados, que esa es la definición de paralela, que la perpendiculares son las que al intersectarse forman un ángulo recto. Se pide que algún estudiante pase al centro y realice dos paralelas

modificando la posición de alguna de las tres pitas del “copo de nieve”, se les pregunta a los otros estudiantes si se puede estar seguro del paralelismo, a lo cual se responde que no, pero se llega al acuerdo de que sí lo sean, para los ejemplos de la clase. Se aprovecha este momento para preguntarles por un caso de la vida real que utilice los principios de las rectas paralelas. Un estudiante indica que las calles de la ciudad son paralelas, a lo que algunos compañeros no están de acuerdo, luego uno de ellos dice “las vías de un tren”, a lo que, si se llega de acuerdo, porque “si esto no sucediera, entonces el tren se descarrilaría”.

Se vuelve a la figura realizada y se da la definición de recta secante a dos paralelas. Se mueve la recta secante y se les pregunta a los estudiantes si sigue siendo secante, a lo cual responden que sí, luego se mueve una de las paralelas y se les pregunta lo mismo. En ese caso, la recta era secante, pero las otras rectas no eran paralelas.

En ese momento una estudiante pregunta si los pedazos de madera de las vías serían secantes, a lo cual se llega al consenso de que sí.

Se explican las definiciones de ángulos correspondientes, alternos internos y alternos externos y se les solicita a estudiantes pasar y dar ejemplos de cada uno. Después de estos ejemplos la clase vuelve al aula.

La sesión ya iba a finalizar, por lo que se les indica a los estudiantes que en la siguiente sesión se va a continuar con las otras actividades. La profesora y el maestro en formación llegan al acuerdo de continuar con ésta el día siguiente, en el salón 205 a la primera unidad de clase. Se les da esta información a los estudiantes y finaliza la sesión.

De acuerdo a lo expuesto por Briceño y Sánchez (2017), así como la de Lupiáñez, Berenguer, Marín y Molina (2011), el trabajar con material manipulativo motiva y facilita en cierta manera la forma en que el estudiante asimila los conceptos y objetos matemáticos nuevos para él. Una de las fortalezas que tuvo esta actividad es que los ángulos se formaban de forma dinámica, diferente a si se hubieran realizado en el tablero. Cuando se realizaron las actividades 1 y 3, se retomaron ideas generadas a partir de las pitas y las figuras que formaban en el suelo. Cabe destacar que se mantuvo una buena referenciación con respecto a los ángulos opuestos por el vértice.

Implementación actividad 1: De acuerdo a lo mencionado en la clase anterior, se continúa con la actividad 1 en el salón 205. La profesora debe atender una situación, por lo que no pudo acompañar la clase. Se pegan las tarjetas del juego memoria en el tablero, mientras que se les solicita a los estudiantes reunirse por grupos, se vuelven a leer los grupos y se genera el orden de participación de éstos aleatoriamente.

Inicia la actividad. Se crearon siete equipos, los estudiantes sacan la guía de aprendizaje 14. En la primera ronda ningún equipo acierta alguna pareja y, varios seleccionan la misma tarjeta, por lo que se les aconseja que pongan cuidado al trabajo de los compañeros. A medida que avanza la actividad los estudiantes miran la guía de aprendizaje y hablan entre ellos para validar que figura o frase es acorde a la tarjeta encontrada, a excepción de la notación de triángulo, que no se encuentra en la guía, pero el maestro en formación explica.

Los estudiantes estuvieron hablando entre sí, buscando definiciones, comparándolas, analizando cuáles diferencias había entre ellas, generando así un aprendizaje más significativo que el de leer o copiar definiciones.

No se toma la decisión de dejar las definiciones pegadas en el salón porque los estudiantes rotan estos, además la profesora no se encontraba presente para que diera el aval con respecto a esta situación.

Se hallaron 10 parejas de las 20 posibles, desafortunadamente se acabó el tiempo de clase, pero el objetivo se cumplió satisfactoriamente, ya que los estudiantes asimilaron y memorizaron varios conceptos de congruencia de triángulos de forma lúdica y, gracias a las representaciones dadas en las cartas, se tiene mejor idea de lo que significa cada concepto, además que varias representaciones de estas tarjetas se trabajaron en la sesión de ayer.

En este ejercicio se evidencia lo propuesto por Vergel, Rocha y León (2006, citado en Garzón, Duarte, Rengifo (2015)) explícitamente de la siguiente forma:

En primer lugar, la actividad matemática se centró en los conceptos nuevos, los cuales se exponen en la guía 14 del colegio, además de que, la estrategia utilizada en el juego memoria implica en sí misma un uso de pensamiento espacial y relación del concepto con alguna representación del mismo.

Con respecto a lo cognitivo, también se evidencia en las estrategias que utilizaban los estudiantes para organizar sus parejas, así como el hecho de designar estudiantes para que analicen, propongan y “estén pendientes (en el tablero)” de diversas representaciones de

un objeto (p.e. ángulos correspondientes y las posibles interpretaciones “estándar” que habría en el juego, así como el no confundirla con otra representación u otro objeto distinto)

Finalizando, la dinámica del juego permitió generar roles grupales en los cuales los mismos estudiantes generaron labores de comparación entre posibles representaciones del objeto, selección de las fichas, recordación de potenciales parejas, entre otros.

Como se puede evidenciar, estas tres actividades se encuentran entrelazadas, lo cual, se espera que ayuden a que los estudiantes asimilen mejor los conceptos.

Implementación actividad 2: En la sesión de este día se realizarían las actividades 2 y 3 de la unidad didáctica, desafortunadamente la exposición de la torre Eiffel no se pudo realizar debido a que no había cables VGA disponibles en el aula, motivo por el cual la clase se enfatizó en el ejercicio con los palitos de paleta.

Se colocaron en el tablero tres preguntas:

¿Cuántas partes de un triángulo (mínimo) debo conocer para establecer congruencia entre dos triángulos?

Con tres partes diferentes, ¿cuántos triángulos puedo formar?

Escribir características del triángulo que se formó (cada estudiante tenía en su poder tres palitos de paleta)

Los estudiantes realizan las construcciones con el material manipulativo, entre sus compañeros y amigos empiezan a comparar los triángulos que se formaron. Algunos estudiantes con dudas puntuales pasan al frente y hablan con el maestro en formación, sobre todo con respecto a la pregunta ¿Cuántas partes del triángulo necesito como mínimo (..)? El maestro en formación les pregunta ¿Cuántas partes tiene un triángulo? A lo cual la mayoría contesta “tres lados”, luego indican “tres lados y ángulos” y algunos otros dicen “tres lados, ángulos y esto” (refiriendo ‘esto’ a los vértices de triángulo). Después de hablar con el maestro en formación, los estudiantes se dirigen a su puesto.

Con respecto a la tercera pregunta, algunos estudiantes no sabían que colocar: “¿Cómo así características del triángulo?”, indicaban, a lo que el maestro en formación les preguntaba sobre que veían de ese triángulo que formaron. Todos los estudiantes que preguntaron contestaron inmediatamente “tiene tantos lados iguales” (en su mayoría dos). Cuando se les preguntaba cómo se llama ese tipo de triángulos, respondían “equilátero”, a lo cual se les indicaba que revisaran la guía 14, donde se encontraban las definiciones respectivas.

Se les pidió a los estudiantes que anotaran las respuestas en una hoja.

Casi todos los estudiantes pegaron el triángulo en dicha hoja y, al hacer esto, hubo dos tendencias al realizar los triángulos:

Pegar los palitos “lado a lado”, es decir, sin trasponerlos

Trasponer los palitos de paleta para formar el triángulo.

Se finaliza el tiempo para contestar las preguntas, por lo que se solicita a los estudiantes tomar asiento para poder hablar sobre las preguntas contestadas.

Al analizar la primera pregunta, se evidencia que los estudiantes tienen arraigado que los tres criterios de congruencia solicitan tres partes de un triángulo y no las seis. Cabe aclarar que en discusión se llega al acuerdo que, para motivos prácticos de la actividad, se establece que las partes del triángulo son lados, vértices y ángulos, pero para establecer congruencia se analizarán lados y ángulos, es decir seis partes del mismo.

Se les indica a los estudiantes que mencionen los tres criterios de congruencia vistos en clase, a lo cual responden correctamente LAL, ALA y LLL. Se habla sobre el porqué no hay criterio AAA, a lo que algunos estudiantes responden “no nos lo enseñaron”. Se realiza la pregunta “¿cuántos triángulos puedo formar a partir de tres ángulos? Sabiendo que la suma de ellos da 180° ” algunos estudiantes contestan que uno, luego sus compañeros replican que son infinitos, por lo que se llega al consenso que AAA no es un criterio de congruencia.

Respondiendo a la primera pregunta, se determina que el mínimo de lados que se deben conocer de un triángulo para establecer congruencia con otro es de tres y, además, que de entre esos tres, debe haber al menos un lado del triángulo.

Con respecto al segundo punto, se establece que solo se puede construir un triángulo a partir de esos lados, de acuerdo a los tres criterios mencionados.

Para el tercer punto se recuerda a la clase que un triángulo puede clasificarse de acuerdo a sus lados y a sus ángulos, se pregunta si alguno escribió estas dos clasificaciones en la hoja, a lo que una estudiante levanta la mano.

A continuación, se exponen algunas producciones de los estudiantes:

Ilustración 5: "trabajo de estudiante 1"

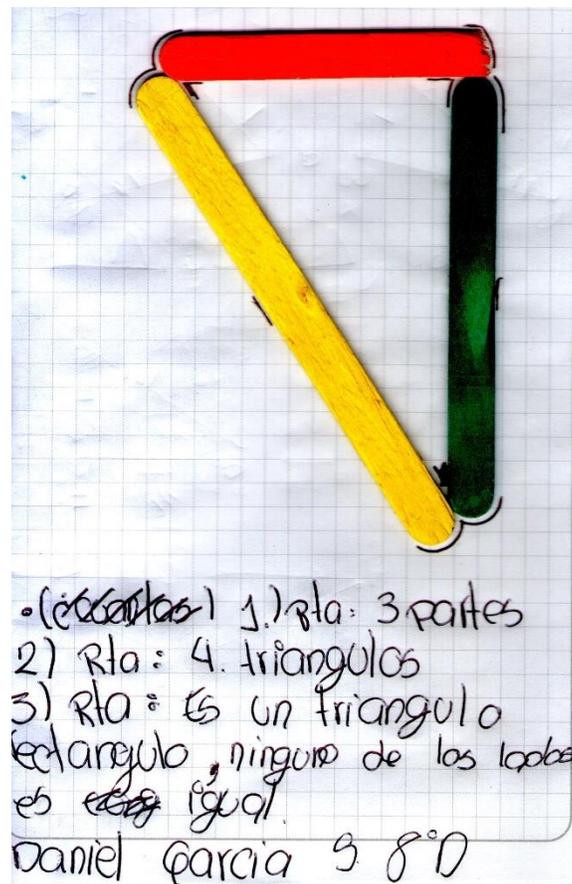


Ilustración 6: "trabajo de estudiante 2"

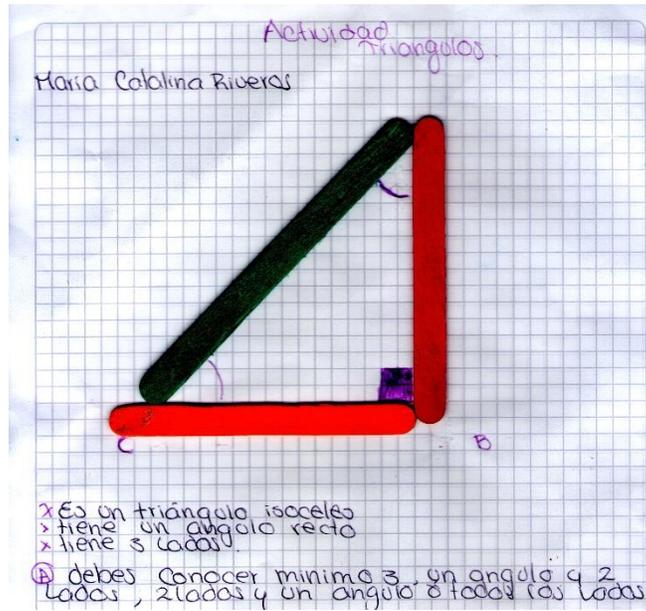


Ilustración 7: "trabajo de estudiante 3"

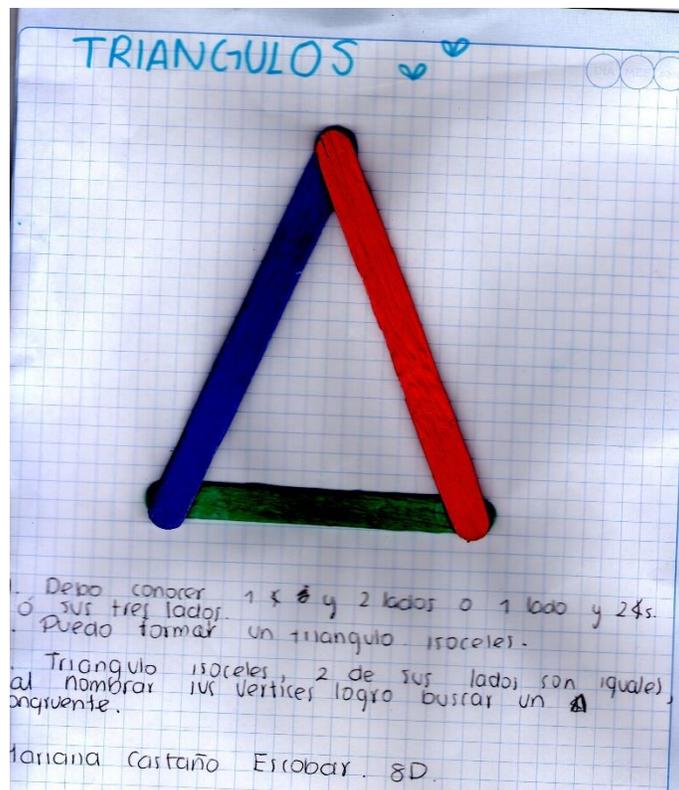


Ilustración 8: "trabajo de estudiante 4"

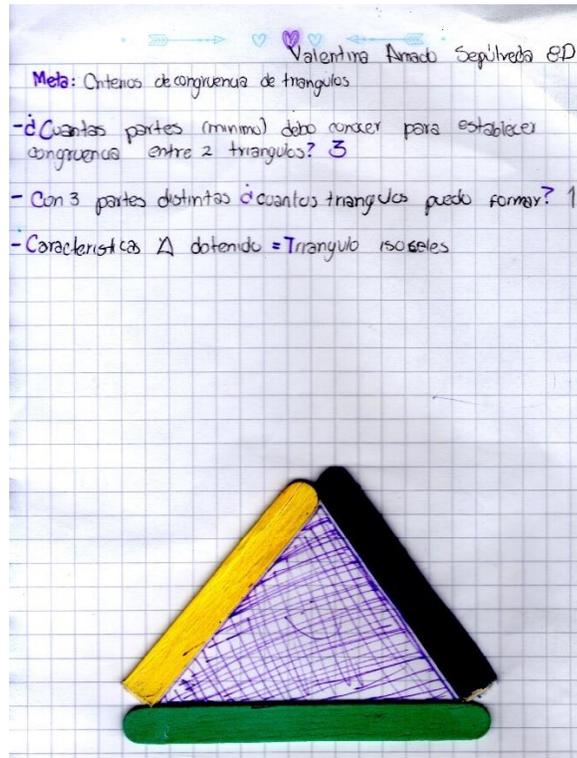
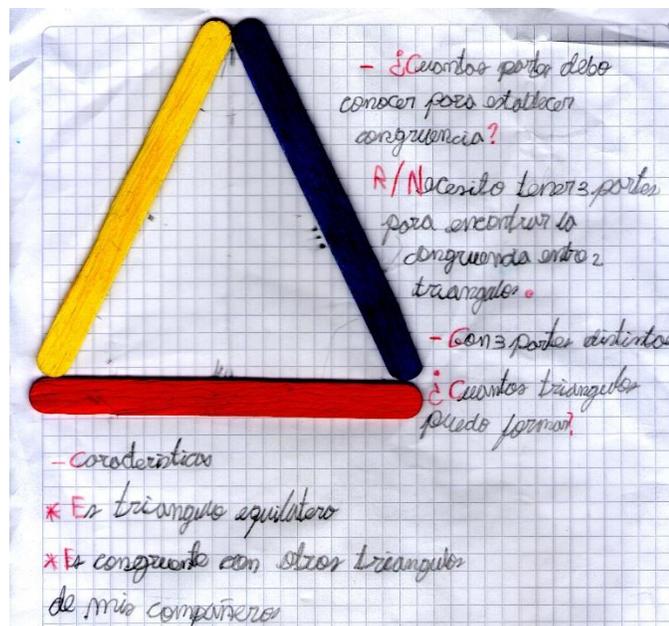


Ilustración 9: "trabajo de estudiante 5"



Se da la instrucción de traer los trabajos al frente. Se realiza una charla pequeña con respecto a la torre Eiffel, se pregunta si alguien quiere pasar al frente para realizar el dibujo de esta torre. Ocho estudiantes pasan al tablero y lo dibujan con marcador. Estos dibujos son realizados a mano alzada. Se finaliza la sesión. La mayoría de los estudiantes habla con la profesora para validar notas finales.

Cuando se trabaja con material concreto, se despierta la motivación de los estudiantes, tal como lo indicaron Villarroel y Sgreccia (2011), Lupiáñez, Berenguer, Marín y Molina (2011) y, en especial Briceño y Sánchez (2017), donde efectivamente, el utilizar estos materiales genera una alternativa en el aula que, permite un nuevo aire en el aula, donde los estudiantes manipulan los objetos por material didáctico, comprendiendo así de mejor forma los conceptos y objetos que se introducen en la clase. Esto se evidencia, por ejemplo, en lo indicado por el estudiante que asimiló la actividad con el criterio LLL, también con algunos estudiantes que preguntaron sobre los criterios LAL y ALA.

Implementación actividad 3: Inicia la sesión normalmente, mientras el maestro en formación organiza el computador y el proyector, la profesora da instrucciones a la clase, se comprueban las conexiones, el video y los programas para la visita virtual y el maestro en formación se dirige a los estudiantes.

Se les explica en que consistió la unidad didáctica implementada en el curso, esto con respecto a las “actividades” que se han ido realizando en las clases del cuarto periodo. Se les indica que esta será la última actividad que se realizará tanto de la unidad didáctica, como de la clase, por lo que será la última sesión de práctica. Antes de iniciar con la exposición, se pregunta si alguno de los estudiantes realizó el reto dejado la clase pasada

(los distintos tipos de triángulos que se pueden formar a partir de tres medidas de lados diferentes), dos estudiantes lo realizaron, una de ellas contestó correctamente que eran 10 tipos y la otra estudiante escribió siete tipos, pero indicó que no escribió los que se forman “con lados iguales”.

Ilustración 10: “trabajo de estudiante 6”



Se reanuda la exposición, enlazándola con lo realizado en el final de la sesión anterior. Se muestran distintas vistas del programa (no se realizó por Google maps debido a la conexión a internet) algunos estudiantes se enfocan en la presentación, por lo que se realizan preguntas de cultura general referentes a la torre Eiffel, donde el estudiante que contestara bien, se le daba un dulce como premiación.

Esta dinámica permitió analizar mejor la forma de la estructura de la construcción, generada a partir de triángulos congruentes, inclusive la forma de la torre en sí es un triángulo isósceles, tal como lo expresaron varios estudiantes. Se revisaron también los ángulos opuestos por el vértice que se generaban a partir de los reforzamientos de la

estructura y, además, se alcanzó a ver tipos de vista de un sólido (frontal, posterior y lateral).

Con esta presentación se muestra que la congruencia de triángulos sirve en la vida real como una aplicación para reforzar estructuras, minimizando así los costos de materiales gracias a la “fortaleza” que aportan las formas triangulares a las bases, columnas y vigas de un edificio.

Estudiantes que tenían dudas (o curiosidad por el tema) se acercaban al maestro en formación, quien les indicaba que realizaran en el tablero los esbozos de la situación u objeto del que tenían dudas (p.e. las vigas de construcción, las bases de la torre, las estructuras de puentes, ángulos opuestos).

Se finaliza la sesión dando unas palabras a los estudiantes. Se les da un dulce como detalle y se acaba así la implementación de la unidad didáctica.

Tomando de nuevo lo expuesto por Villaroel y Sgreccia (2011), al analizar la estructura de la torre Eiffel, los estudiantes muestran interés y son ellos mismos los que contemplan posibles triángulos congruentes en esta estructura, examinándolas en diferentes vistas, lo cual da una aplicación al mundo real de lo que se aprende en clase y, de esta forma, se da un motivo práctico para abordar esta temática en clase.

Implementación actividades 4 y 5:

Desafortunadamente no se pudieron realizar estas actividades debido al calendario académico.

6. Balance de la experiencia

➤ Conclusiones

- A nivel general, los estudiantes del curso donde se implementó la unidad didáctica mantienen las características emocionales, sociales y cognitivas conforme a lo teorizado para sus edades
- A pesar de que el curso habla demasiado, a nivel general los estudiantes estuvieron atentos y colaboraron con la realización de tareas, talleres y demás actividades que hicieron parte de la unidad didáctica y, en general, de la práctica en la cual se generó este documento.
- Se evidencia una marcada intuición en los estudiantes con respecto a las propiedades de objetos geométricos (ángulos, segmentos, triángulos en específico), lo cual puede utilizarse para continuar con el trabajo geométrico para próximos temas.
- Se pudo dar una noción de conteo enlazada a la generación de triángulos, lo cual se puede utilizar a futuro para temas relacionados al pensamiento geométrico y aleatorio.
- Los estudiantes pueden motivarse al ver que se realizan actividades fuera de las aulas, los espacios de zonas verdes pueden utilizarse para introducir conceptos y objetos geométricos.
- Se puede motivar a los estudiantes a partir de material concreto, actividades lúdicas y exposiciones artísticas, con el fin de tener su interés para introducir nuevos temas en el aula.

- Se debe fomentar la interdisciplinariedad de las matemáticas con otras áreas del conocimiento.

➤ **Limitantes**

- El uso de las TIC en las instituciones educativas muchas veces se restringe, se debería fomentar el uso de las salas de computo para aprovechar software de geometría dinámica.
- Los tiempos con los que se cuenta para implementar la unidad didáctica muchas veces son insuficientes para desarrollar todas las actividades que aquí se proponen.

➤ **Sugerencias**

- Se sugiere trabajar los materiales didácticos tangibles con los virtuales, de esta forma el estudiante podría tener aún mejor asimilación de conceptos y objetos matemáticos.
- Utilizar situaciones y contextos que lamen el interés de los estudiantes es una buena forma de motivar el trabajo en clase, por ejemplo, en este curso los estudiantes tenían gusto por la cultura general, por lo que la exposición de la torre Eiffel añadió datos interesantes a la exposición de los ángulos y triángulos que se formaban en la estructura. Se deberían modificar algunas actividades en otros cursos en los que se trabaje esta unidad didáctica para poder ganar la atención del mismo.

Referencias

- Sites in 3D. Turquía. Recuperado de <http://www.3dmekanlar.com/sites.html>
- Bermúdez, I. (2011). *Estudio de la congruencia de figuras planas. Construcciones con regla y compás. Una propuesta para sexto grado*. San Andrés, Colombia. Facultad de ciencias. Universidad Nacional de Colombia. Recuperado de <http://bdigital.unal.edu.co/7045/1/186431.2011.pdf>
- Briceño, E., Alamillo, L. (2017). Propuesta de una situación didáctica con el uso de material didáctico para la comprensión de la noción de semejanza en estudiantes de segundo de secundaria. Recuperado de <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=521653370008>
- Bosque, B., Lupiáñez, J. y Segovia, I. (2017). EXPLORACIÓN DEL PAPEL DE LA ESTÉTICA EN LA ENSEÑANZA Y EL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS. Recuperado de <http://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/download/6536/5664>.
- Caleño, W. (2014). *CONCEPTOS DE PROPORCIONALIDAD Y CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS UTILIZANDO EL SOFTWARE GEOGEBRA Y ALGUNAS APLICACIONES APLET EN LA WEB*. Manizales, Colombia. Recuperado de <http://bdigital.unal.edu.co/21165/1/8412004.2014.pdf>
- Castiblanco, C., Urquina, H., Camargo, L. y Acosta, M. (2004). *Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales*. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional. Recuperado de http://www.colombiaaprende.edu.co/html/mediateca/1607/articles-113753_archivo.pdf
- Flores, P., Lupiáñez, J., Berenguer, L., Marín, A., Molina, M. (Eds.). (2011). *Materiales y recursos en el aula de matemáticas*. Granada: Departamento de Didáctica de la

Matemática de la Universidad de Granada. Recuperado de

http://funes.uniandes.edu.co/1946/1/libro_MATREC_2011.pdf

- Garzón, A., Duarte, Dilza. Y Rengifo, M. (2014). Movimientos en el plano a través de teselados. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/8645/1/Duarte2015Movimientos.pdf>.
- Godino, J. y Ruiz, F (2002). Geometría y su didáctica para maestros. Recuperado de https://www.ugr.es/~jgodino/edumat-maestros/manual/4_Geometria.pdf
- Gonzalez, C. (2018). *Unidad didáctica para aplicación de clases sobre teselaciones para estudiantes de grado quinto*. Documento no publicado (Informe). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado de http://funes.uniandes.edu.co/11765/1/Unidad_did%C3%A1ctica_Teselaciones_5_Cesar_Gonzalez.pdf
- Llantén, J., Bermúdez, M., (2014). *Una aproximación al aprendizaje de la semejanza de triángulos en GeoGebra*. Documento no publicado (Documento en revisión por pares). Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/11032/1/Llant%C3%A9n2014una.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional (2016). Derechos básicos de aprendizaje Matemáticas V.2. Recuperado de http://www.santillana.com.co/www/pdf/dba_mat.pdf
- Ministerio de Educación Nacional (2006). Estándares Básicos Competencias en Matemáticas. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-116042_archivo_pdf2.pdf

- Ministerio de Educación Nacional (1998). Lineamientos curriculares de matemáticas. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/cvn/1665/articles-89869_archivo_pdf9.pdf.
- Molina, O., Sánchez, B. (2006). *Actividades de matemáticas recreativa*. En Luna, J., Luque, C., Ostra, A., Pérez, J., Ruiz, C. (Eds.), *Memorias XVI Encuentro de Geometría y IV encuentro de Aritmética* (pp. 485-501). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/9013/>
- Reyes, D., Rojas, C. (2011). Una experiencia de aula con teselados, arte y geogebra en el colegio Carlos Arturo Torres Peña (Santa Rosa de Viterbo-Boyacá). Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/3854/1/ReyesUnaexperienciaGeometria2011.pdf>.
- Romo, G (2018). *Geometría axiomática. Geometría plana neutral, euclídea y analítica*. Recuperado de <http://www.toomates.net/biblioteca/GeometriaAxiomatica.pdf>
- Soto Apolinar, E. (2012). Diccionario ilustrado de conceptos matemáticos. Recuperado de <http://wordpress.colegio-arcangel.com/matematicas/files/2012/10/DICM.pdf>
- Villarroel, S.; Sgreccia, N. (2011). *Materiales didácticos concretos en geometría en primer año de secundaria*. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 78, pp. 73-94. Recuperado de <http://funes.uniandes.edu.co/3597/1/Villarroel2011MaterialesNumeros78.pdf>