

# Redes de interconexión: Contribución al estudio de su vulnerabilidad

MARÍA LUISA ZARAGOZÁ MONROIG  
Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica  
Universitat Politècnica de Catalunya

Enero 1994

*A mi familia*

## Agradecimientos

Quisiera agradecer a Josep Fàbrega el interés y dedicación en la dirección de esta tesis. También quiero mostrar mi agradecimiento a los integrantes del grupo de Teoría de Grafos y a los compañeros de la Sección de Matemática Aplicada de Vilanova por el ambiente de amistad que ha contribuido a hacer este trabajo más agradable.

Vilanova, 30 de enero de 1994

# Índice

<b>1 Grafos como modelos de redes de interconexión</b>	<b>5</b>
1.1 Introducción . . . . .	5
1.2 Definiciones básicas de Teoría de Grafos . . . . .	8
1.3 Vulnerabilidad de las redes . . . . .	11
1.4 Encaminamientos en grafos: Grafo de supervivencia . . . . .	14
1.5 Contenido de la tesis . . . . .	16
<b>I Vulnerabilidad del encaminamiento en redes asociadas con teselaciones del plano</b>	<b>18</b>
<b>2 Vulnerabilidad del encaminamiento en grafos de doble lazo</b>	<b>19</b>
2.1 Grafos de doble lazo . . . . .	19
2.1.1 Representación geométrica de los grafos de doble lazo con orden máximo . . . . .	21
2.1.2 Coordenadas de los vértices . . . . .	24
2.1.3 Encaminamiento en grafos de doble lazo con orden máximo	28
2.2 Resultados . . . . .	30
2.3 Generalización al caso no óptimo . . . . .	47
<b>3 Vulnerabilidad del encaminamiento en grafos de triple lazo</b>	<b>56</b>
3.1 Grafos de triple lazo . . . . .	56
3.2 Encaminamiento en grafos de triple lazo óptimos . . . . .	60

	4
3.3 Resultados . . . . .	61
<b>4 Vulnerabilidad del encaminamiento en los digrafos bipartitos</b>	
<i>BD(a, b, c, d)</i>	<b>70</b>
4.1 Digrafos bipartitos <i>BD(a, b, c, d)</i> . . . . .	70
4.2 Coordenadas de los vértices en <i>BD(a, b, c, d)</i> con diámetro impar .	77
4.3 Encaminamiento en <i>BD(a, b, c, d)</i> . . . . .	80
4.3.1 Diámetro impar . . . . .	81
4.3.2 Diámetro par . . . . .	88
4.4 Resultados . . . . .	91
4.4.1 Diámetro impar . . . . .	91
4.4.2 Diámetro par . . . . .	93
<b>II Vulnerabilidad del encaminamiento en digrafos línea parciales</b>	<b>96</b>
<b>5 Vulnerabilidad del encaminamiento en digrafos línea parciales de Kautz y de de Bruijn</b>	<b>97</b>
5.1 Introducción . . . . .	97
5.2 Técnica del digrafo línea . . . . .	99
5.3 Técnica del digrafo línea parcial . . . . .	101
5.4 Digrafo línea parcial de $K(d, D)$ . . . . .	105
5.4.1 Ordenación de los vértices . . . . .	105
5.4.2 Definición del encaminamiento . . . . .	109
5.4.3 Resultados: existencia y construcción de vértices $(\rho, F)$ - centrales . . . . .	110
5.5 Digrafo línea parcial de $B(d, D)$ . . . . .	118
<b>6 Conclusiones</b>	<b>123</b>

# Capítulo 1

## Grafos como modelos de redes de interconexión

### 1.1 Introducción

Esta tesis constituye una contribución al estudio y diseño de redes de interconexión con baja vulnerabilidad y alta conectividad.

Uno de los problemas importantes en el área de Tecnologías de la Información y de las Comunicaciones es el diseño de redes de interconexión. Así, por ejemplo, debido al desarrollo de la tecnología VLSI (“very large scale integration”), hoy en día es posible la construcción de sistemas de cálculo con miles de elementos procesadores que cooperan entre sí ejecutando tareas en forma paralela. Una parte básica de la arquitectura de tales sistemas multiprocesadores la constituye el mecanismo que permite la comunicación entre los elementos procesadores y entre éstos y los elementos de memoria del sistema, es decir, la *red de interconexión* [2], [16], [22], [33], [37]. La eficacia y rendimiento del sistema depende, en buena medida, de la elección que se haga de dicha red de interconexión. Además, el coste económico de la red constituye una parte importante del coste del sistema global, por lo que la optimización del sistema requiere la optimización de la red.

Es bien sabido que las redes de interconexión se modelan mediante grafos

(dirigidos o no), donde los vértices representan los procesadores o nodos y las ramas (arcos) los enlaces existentes entre ellos.

El buen funcionamiento de una red de interconexión depende de su capacidad para comunicar los procesadores de forma fácil, eficaz y segura. Al mismo tiempo, debe satisfacer determinados requerimientos. Así, por ejemplo en una red de interconexión, [6], [7]:

(1).- Dos procesadores deben poder estar siempre en comunicación y el número de enlaces utilizados para enviar un mensaje no debe ser demasiado grande.

(2).- Por razones técnicas, cada procesador puede estar directamente conectado sólo a un número limitado de procesadores.

(3).- Los caminos a través de los cuales tienen que ser enviados los mensajes deben poderse determinar de forma fácil.

(4).- Cuando ciertos procesadores y/o enlaces fallan, los mensajes deben poder ser enviados a través de los restantes procesadores. Es decir, la red debe tener un alto grado de fiabilidad (*fault-tolerance*).

(5).- La red ha de ser modular, es decir ha de ser posible añadir nuevos procesadores sin tener que redefinir los nodos o enlaces ya existentes.

(6).- La red debe poseer propiedades de simetría a fin de que se vea igual desde cualquier nodo.

Todos estos requerimientos, traducidos en términos del grafo que modela la red, son:

(1).- Conectividad y diámetro mínimo.

(2).- Valor reducido del grado o número de enlaces incidentes en cada vértice.

(3).- Existencia de algoritmos sencillos de encaminamiento.

(4).- Buena conectividad.

(5).- Buena expandabilidad.

(6).- El grafo es vértice-simétrico.

También en las *redes de área local*, que permiten la comunicación entre ordenadores a alta velocidad, la red de interconexión juega un papel básico. Las

principales limitaciones de la clásica topología en anillo (en la que cada ordenador está conectado al siguiente formando un ciclo unidireccional): gran vulnerabilidad (el fallo de un nodo o enlace desconecta la red) y escaso ancho de banda (cantidad de tráfico que puede permitir la red), han hecho considerar topologías regulares en las que cada computador quede conectado a otros varios; así se obtienen caminos alternativos para los mensajes y se disminuyen las distancias entre computadores. En las referencias [3] y [24] se repasan las distintas topologías que se han propuesto para este tipo de redes. En el contexto de topologías regulares aparecen las *redes de doble y triple lazo*, las cuales presentan alto grado de simetría. El estudio de la vulnerabilidad del encaminamiento en estas redes constituye los dos primeros capítulos de esta tesis.

Las redes de doble lazo han sido ampliamente estudiadas. En [17] se tratan desde el punto de vista de redes asociadas con teselaciones del plano. Ello permite transformar el problema de diseñar buenas redes de interconexión en el de determinar formas geométricas adecuadas. Un estudio de diferentes familias de grafos y digrafos asociados con teselaciones del plano aparece en [28], [20]. Estudios relativos a diámetro y distancia media en redes de doble lazo pueden encontrarse en [4], [1]. En [12], también desde el punto de vista geométrico, se estudia la vulnerabilidad del encaminamiento en las redes de doble lazo unidireccionales.

Como ya se ha comentado anteriormente, en muchas aplicaciones es deseable que la red a utilizar posea un alto grado de simetría. Ello facilita la modularidad, el diseño de interfaces y la distribución en tareas paralelas del algoritmo a ejecutar. En este contexto cabe destacar que una de las redes actualmente más utilizadas es la red *hipercubo* [30]. A pesar de su extendido uso, esta red presenta también limitaciones importantes, como por ejemplo, la necesidad de aumentar el número de conexiones de cada nodo al aumentar el tamaño de la red. Como alternativa a la red hipercubo aparecen en la literatura los digrafos de *de Bruijn* y *Kautz* [5], [10], [27]. Estos modelos de redes, que tienen un comportamiento óptimo en muchos aspectos, tienen el inconveniente de que sólo se



pueden construir para valores determinados del número de nodos. Los digrafos de de Bruijn y Kautz son los ejemplos más importantes de digrafos línea. La técnica del *digrafo línea* permite obtener familias de digrafos densos, es decir, modelos de redes unidireccionales con un número de nodos elevado para sus valores de grado y diámetro [18], [14], [13]. Una generalización de esta técnica, la llamada técnica del *digrafo línea parcial*, se presenta en [32], [19]. Esta técnica es un método para construir una sucesión de digrafos con órdenes consecutivos a partir de un digrafo dado. Una de las características de esta técnica consiste en mantener las buenas propiedades del digrafo de partida. En el último capítulo de esta tesis se estudia la vulnerabilidad del encaminamiento para redes obtenidas como digrafos línea parciales de los digrafos de de Bruijn y Kautz.

## 1.2 Definiciones básicas de Teoría de Grafos

Como ya se ha dicho en la sección anterior, las redes de interconexión se modelan mediante grafos (dirigidos o no) y esto hace que los parámetros y propiedades más importantes a tener en cuenta en el diseño de la red se correspondan con parámetros y propiedades análogas del grafo que la modela.

En esta sección vamos a presentar los conceptos básicos de la Teoría de Grafos en relación a las necesidades derivadas del diseño de redes de interconexión.

Un *grafo*  $G = (V, E)$  es una estructura formada por un conjunto no vacío  $V$  de elementos llamados *vértices* y un conjunto  $E$  cuyos elementos son pares no ordenados de vértices distintos llamados *ramas*. Se llama *orden* del grafo  $G$  al cardinal del conjunto  $V$  y *tamaño* del grafo  $G$  al cardinal de  $E$ .

A la hora de modelar una red con enlaces bidireccionales, los vértices del grafo representan los procesadores o módulos de memoria y las ramas los enlaces existentes entre ellos.

Dos vértices cualesquiera  $x$  e  $y$  se dice que son *adyacentes*,  $x \sim y$ , si el par no ordenado  $\{x, y\}$ , que denotamos por  $xy = yx$ , es un elemento de  $E$ ; es decir, dos

vértices  $x$  e  $y$  son adyacentes si están unidos por la rama  $e = xy = yx$ . En este caso, se dice que el vértice  $x$  ( ó  $y$ ) es *incidente* con  $e$ . Similarmente, dos ramas son *adyacentes* si tienen un vértice en común, y *no adyacentes* o *independientes* en caso contrario.

El conjunto de vértices adyacentes a un vértice  $x \in V$  se denota por  $\Gamma(x)$  y su cardinal es el *grado* de  $x$ . El *grado mínimo* de los vértices de un grafo  $G$  se representa por  $\delta(G)$  y el *grado máximo* por  $\Delta(G)$ . Un grafo donde cada vértice tiene grado  $d$  se dice que es *d-regular* o simplemente *regular*. Si  $G$  es *d-regular*,  $\delta(G) = \Delta(G) = d$ .

Dos grafos  $G_1 = (V_1, E_1)$  y  $G_2 = (V_2, E_2)$  se dice que son *isomorfos* si existe una aplicación biyectiva  $\phi : V_1 \rightarrow V_2$  tal que  $xy \in E_1$  si y sólo si  $\phi(x)\phi(y) \in E_2$ ; es decir,  $\phi$  conserva las adyacencias y las no adyacencias.

Dos vértices  $x, y$  de un grafo  $G = (V, E)$  se dice que son *semejantes* si existe un automorfismo (aplicación biyectiva que conserva las adyacencias)  $\gamma : V \rightarrow V$  tal que  $\gamma(x) = y$ . Un grafo es *vértice-simétrico* si dos vértices cualesquiera son semejantes. La propiedad de vértice-simetría del grafo que modela la red de interconexión simplifica en gran medida su diseño y funcionamiento.

Un *automorfismo de ramas* es una aplicación biyectiva  $\psi : E \rightarrow E$  tal que:  $e_1, e_2 \in E \Leftrightarrow \psi(e_1), \psi(e_2) \in E$ . Un automorfismo de vértices induce un automorfismo de ramas.

Se dice que el grafo  $G_1 = (V_1, E_1)$  es un *subgrafo* de  $G = (V, E)$  si  $V_1 \subseteq V$  y  $E_1 \subseteq E$ . Si, además,  $V_1 = V$ , se dice que  $G_1$  es un *subgrafo generador* de  $G$ . Por otro lado, si  $G_1$  contiene todas las ramas de  $G$  que unen dos vértices de  $V_1$ , se dice que  $G_1$  es el subgrafo de  $G$  *inducido* por  $V_1$  y se denota por  $G[V_1]$ .

Si  $W \subset V$ , se define  $G \setminus W = G[V \setminus W]$ . Es decir, es el subgrafo obtenido al suprimir los vértices de  $W$  y todas las ramas incidentes con ellos. Análogamente, si  $E' \subset E$ ,  $G \setminus E' = (V, E \setminus E')$ .

Un *recorrido* de longitud  $k$  es una secuencia alternada de vértices y ramas de la forma  $x_0, e_1, x_1, e_2, \dots, x_{k-1}, e_k, x_k$ , con  $e_i = x_{i-1}x_i$ ,  $1 \leq i \leq k$ . Si tiene todas

las ramas distintas se llama *sendero* y con todos los vértices distintos se llama *camino*. Un *circuito (ciclo)* es un sendero (camino) cuyos vértices inicial y final coinciden.

La *distancia* entre dos vértices  $x, y \in V$ ,  $d(x, y)$ , se define como la longitud mínima de un camino desde  $x$  a  $y$ . Si no existe tal camino, se dice que  $d(x, y) = \infty$ .

Un grafo  $G = (V, E)$  es *conexo* si  $\forall x, y \in V, d(x, y) < \infty$ ; esto es, si entre cualquier par de vértices existe un camino.

En un grafo  $G = (V, E)$ , con  $N = |V|$ , dos parámetros relacionados con la distancia son el *diámetro*,  $D$ , y la *distancia media* entre vértices,  $\bar{D}$ :

$$D = \max_{x, y \in V} d(x, y)$$

$$\bar{D} = \frac{1}{N^2} \sum_{x, y \in V} d(x, y).$$

Un grafo  $G = (V, E)$  es *bipartito* con conjuntos de vértices  $V_0$  y  $V_1$  si  $V = V_0 \cup V_1$ ,  $V_0 \cap V_1 = \emptyset$  y cada rama une un vértice de  $V_0$  con un vértice de  $V_1$ .

Una red de interconexión con enlaces unidireccionales se modela mediante un grafo dirigido o *digrafo*. El concepto de digrafo es semejante al de grafo, pero se exige que las ramas, aquí llamadas *arcos*, sean pares ordenados de vértices. Por tanto, la mayor parte de conceptos y terminología sobre grafos se generalizan directamente a digrafos.

Así pues, un *digrafo*  $G = (V, A)$  es un par formado por un conjunto  $V$  de elementos llamados *vértices* y un conjunto  $A \subset V \times V$  formado por pares ordenados de vértices, llamados *arcos*.

Si  $(x, y) \in A$ , se dice que  $x$  es *adyacente hacia y*, y que  $y$  es *adyacente desde x*;  $x$  es el extremo *inicial* del arco e  $y$  el extremo *final*. A un arco de la forma  $(x, x)$  se le llama *autolazo*.

Si  $x \in V$ ,  $d^+(x)$  representa el *grado de salida* de  $x$ , es decir, el número de vértices adyacentes desde  $x$ , y  $d^-(x)$  el *grado de entrada* de  $x$  o número de vértices

adyacentes hacia  $x$ . Un digrafo  $G = (V, A)$  es *d-regular* si  $d^+(x) = d^-(x) = d, \forall x \in V$ .

Los conjuntos de vértices adyacentes desde y hacia  $x \in V$  se denotan por  $\Gamma^+(x)$  y  $\Gamma^-(x)$  respectivamente. Por tanto, con esta notación, se tiene  $d^+(x) = |\Gamma^+(x)|$  y  $d^-(x) = |\Gamma^-(x)|$ .

Un digrafo  $G = (V, A)$  se dice que es *simétrico* si, dados  $x, y \in V$ , se tiene  $(x, y) \in A$  si y sólo si  $(y, x) \in A$ .

Los conceptos dados de recorrido, sendero, circuito y camino también sirven para digrafos con la salvedad de que aquí son dirigidos. Por tanto, la distancia entre dos vértices  $x$  e  $y$ ,  $d(x, y)$ , sigue siendo el número de arcos que atraviesa el camino más corto desde  $x$  a  $y$ , pero en digrafos no tiene por qué cumplirse que  $d(x, y) = d(y, x)$ . Para diámetro y distancia media también sirven las definiciones dadas para grafos.

Un digrafo  $G = (V, A)$  es *conexo* si  $\forall x, y \in V, d(x, y) < \infty$  o  $d(y, x) < \infty$ , es decir, entre dos vértices  $x, y$  cualesquiera existe un camino que les une en uno de los dos sentidos. Si existe, como mínimo un camino desde  $x$  hasta  $y$  y otro desde  $y$  hasta  $x$ , es decir,  $d(x, y) < \infty$  y  $d(y, x) < \infty, \forall x, y \in V$ , se dice que  $G$  es *fuertemente conexo*. En la Figura 1.1 se muestran ejemplos que combinan estas definiciones.

### 1.3 Vulnerabilidad de las redes

Uno de los principales objetivos de los sistemas de interconexión consiste en la posibilidad de que la red siga funcionando (quizás de forma degradada) ante el fallo de alguno de sus nodos y/o enlaces. Por ello, la fiabilidad de la red es una de sus características más importantes. En este contexto, existen diferentes parámetros para medir la vulnerabilidad de una red; el más común es el que da el número máximo de nodos que pueden dejar de funcionar en una red sin que se pierda la comunicación entre los restantes. A este parámetro se le conoce con

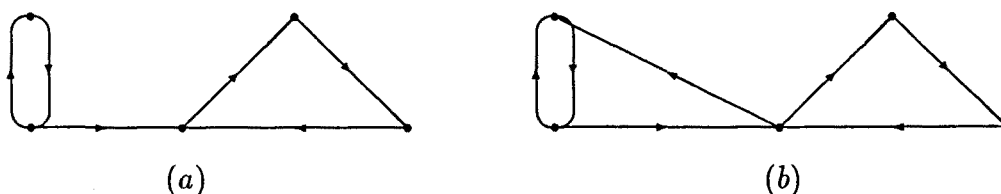


Figura 1.1: *Digrafo conexo pero no fuertemente conexo (a) y digrafo fuertemente conexo (b).*

el nombre de la *tolerancia* de la red [7], [35]. Esta, en Teoría de Grafos está directamente relacionada con lo que se conoce con el nombre de la conectividad del grafo que modela la red [8].

La *vértice-conectividad* o simplemente *conectividad*,  $\kappa(G)$ , de un grafo (o digrafo)  $G$ , se define como el mínimo número de vértices que hay que suprimir para que el grafo resultante sea un grafo no conexo o quede reducido a un único vértice (grafo trivial). Por tanto, la conectividad de un grafo no conexo es cero, y la del grafo completo de  $n$  vértices,  $K_n$ , en el que cada vértice es adyacente con todos los demás, es  $n - 1$ . Notemos que la conectividad es una unidad mayor que la tolerancia. Análogamente, se define la *rama-conectividad* de un grafo (o digrafo)  $G$ ,  $\lambda(G)$ , como el mínimo número de ramas que hay que suprimir para desconectar el grafo. Por ejemplo, en la Figura 1.2 se muestra un grafo con  $\lambda(G) = 2$ .

Estos dos parámetros están relacionados con el grado mínimo de  $G$ ,  $\delta(G)$ , de la siguiente forma [21]:

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G). \tag{1.1}$$

Cuando esta desigualdad se convierte en igualdad se dice que el grafo (o digrafo)  $G$  tiene *conectividad máxima*.

Está claro que si  $G$  es un digrafo fuertemente conexo sin autolazos, entonces

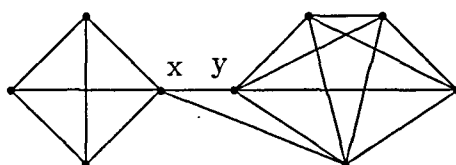


Figura 1.2:  $G$  con  $\lambda(G) = 2$ .

los conjuntos  $\Gamma^+(x)$  o  $\Gamma^-(x)$  son conjuntos que desconectan el digrafo. Estos son conocidos con el nombre de conjuntos de corte *triviales*.

Otro de los parámetros que se utiliza para medir la fiabilidad de una red es la vulnerabilidad del diámetro del grafo (o digrafo) que la modela [31]. Este parámetro mide cómo se incrementa el diámetro cuando fallan algunos elementos en la red.

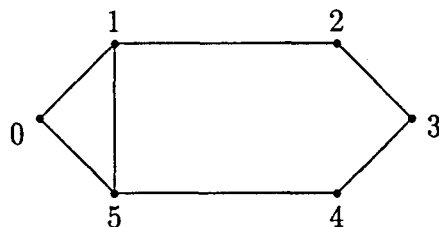
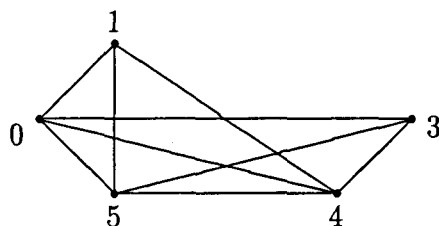
Tal como se ha indicado en la introducción, uno de los requerimientos más importantes en el contexto de diseño de redes de interconexión consiste en la existencia de algoritmos de encaminamiento sencillos y eficientes que permitan encontrar caminos cortos entre cualquier par de vértices del grafo que modela la red. Lógicamente, interesará que la red, junto con el encaminamiento definido en ella, presente baja vulnerabilidad ante la existencia de fallos de nodos y/o enlaces. La *vulnerabilidad del encaminamiento* es otro de los parámetros para medir la fiabilidad de una red; se mide mediante el diámetro del grafo de supervivencia asociado a la red y al encaminamiento definido en ella y es el tema central de estudio de este trabajo.

## 1.4 Encaminamientos en grafos: Grafo de supervivencia

A lo largo de esta tesis se trabajará bajo la hipótesis de que toda comunicación en la red debe seguir un encaminamiento fijado de antemano. El *encaminamiento* sobre la red corresponde a una función  $\rho$  que asigna a cada par de vértices distintos  $x, y$  del grafo  $G$  que la modela, un camino  $\rho(x, y) = xu_1 \cdots u_n y$  entre ellos. A la longitud del camino se la denota por  $|\rho(x, y)|$ . Un encaminamiento de *longitud mínima* es aquel que está formado por caminos lo más cortos posible. Cuando  $\rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in V$  se dice que  $\rho$  es *bidireccional*. Si  $\rho(x, y) = xu_1 \cdots c \cdots u_n y$  implica  $\rho(x, c) = xu_1 \cdots c$  y  $\rho(c, y) = c \cdots u_n y$  se dice que el encaminamiento  $\rho$  es *consistente*. Una *red*,  $(G, \rho)$ , es un grafo  $G$  en el cual se ha definido un encaminamiento  $\rho$ . Si en la red hay nodos y/o enlaces defectuosos, las rutas que los contengan quedarán inutilizables; si esto ocurre, los mensajes deberán ser enviados a través de rutas “supervivientes”. En [11], para medir la vulnerabilidad del encaminamiento, Dolev, Halpern, Simons y Strong definieron, en este contexto, el *grafo de supervivencia* de un grafo  $G$  como sigue:

Dado un grafo conexo  $G$ , un encaminamiento  $\rho$  y un conjunto  $F$ , de vértices y/o ramas —que corresponde a los nodos y/o enlaces que quedan fuera de servicio en la red modelada por  $G$ — se define su *grafo de supervivencia* como el grafo dirigido  $R(G, \rho)/F$  cuyo conjunto de vértices está formado por todos los vértices no deficientes de  $G$ , esto es, de  $G \setminus F$ ; siendo adyacente un vértice  $x$  hacia otro  $y$  si y sólo si  $\rho(x, y)$  no contiene ningún elemento de  $F$ . En este caso se dirá, a veces, que  $\rho(x, y)$  evita  $F$ . La condición  $|F| < \kappa(G)$  asegura que la red no quedará desconectada ante el fallo de los elementos de  $F$ . A continuación se presenta un ejemplo de grafo de supervivencia de un grafo  $G$ :

Supóngase que en el grafo  $G$  de la Figura 1.3, se define un encaminamiento  $\rho$  de longitud mínima tal que, en el caso de existir más de un camino de longitud mínima entre dos vértices, se elija el que pasa por la rama 54. Notemos que este

Figura 1.3: Grafo  $G$ .Figura 1.4:  $R(G, \rho)/F$ 

grafo tiene diámetro 3.

Supongamos que el vértice 2 queda fuera de servicio, es decir  $F = \{2\}$ . En la Figura 1.4 aparece el correspondiente grafo de supervivencia en el que una rama  $xy$  corresponde a los dos arcos  $(x, y)$  e  $(y, x)$ . Notemos que en este caso el diámetro de  $R(G, \rho)/F$  es 2.

El grafo de supervivencia modela un trayecto sin fallos en la red mediante un enlace directo. Por ello, su diámetro señala el número máximo de retransmisiones que cabe efectuar para que cualquier nodo reciba un mensaje dentro de la red. Interesan grafos con encaminamientos que puedan tolerar fallos sin que aumente mucho el diámetro del grafo de supervivencia. En este contexto, el digrafo de



supervivencia para encaminamientos de longitud mínima en la red hipercubo ha sido estudiado en [9], mientras que en [23] se ha estudiado esta cuestión para redes de interconexión modeladas por digrafos de de Bruijn y Kautz.

Otros resultados referentes al diámetro del grafo de supervivencia pueden encontrarse en [36], [25], [11], [9].

Siguiendo en el contexto del estudio de la vulnerabilidad del encaminamiento, en [12] y [13] se introdujo el concepto de “vértice central”. Un *vértice*  $(\rho, F)$ -*central* es un vértice de  $R(G, \rho)/F$  que es adyacente desde y hacia todos los vértices restantes. La existencia de un vértice de este tipo es interesante ya que toda comunicación de un vértice hacia otro puede ir a través de dicho vértice “comodín” con una sola retransmisión. Así, el diámetro del grafo de supervivencia es a lo sumo 2.

Observemos que en la Figura 1.4 hay tres vértices, el 0, el 5 y el 4, que son adyacentes con todos los vértices del grafo de supervivencia. Por tanto, estos tres vértices son centrales para el grafo  $G$  de la Figura 1.3 y el encaminamiento  $\rho$  definido anteriormente en dicho grafo.

En este contexto, en [12] se define un encaminamiento  $\rho$  de longitud mínima en un digrafo  $G$  de doble lazo y se demuestra que el diámetro de  $R(G, \rho)/F$  es 2; también se caracteriza el conjunto  $F$ .

En [13] se prueba la existencia de vértices centrales en los digrafos de de Bruijn y Kautz para una clase general de encaminamientos.

## 1.5 Contenido de la tesis

El estudio realizado en esta tesis en relación a la vulnerabilidad del encaminamiento en redes de interconexión está dividido en dos bloques. El primer bloque, está formado por los capítulos 2, 3 y 4 y estudia este tema en tres tipos de redes asociadas con teselaciones del plano. Son los grafos de doble lazo, triple lazo y los digrafos bipartitos  $BD(a, b, c, d)$ . El segundo bloque, constituido por el capítulo

5, trata el mismo problema con un enfoque distinto en los digrafos línea parciales de Kautz y de de Bruijn.

La estructura de los cuatro capítulos es muy similar. En los dos primeros capítulos se empieza presentando las correspondientes familias de grafos así como la representación geométrica mediante teselaciones que se les asocia. A partir de esta representación se definen buenos encaminamientos; bidireccionales, consistentes y de longitud mínima. Una vez definido el encaminamiento, en la última sección de cada capítulo, se considera la posibilidad de fallo de vértices y/o ramas, dando los resultados en relación a la vulnerabilidad del encaminamiento definido anteriormente.

En el último capítulo del primer bloque, se presentan los digrafos bipartitos  $BD(a, b, c, d)$  y una vez vista la representación geométrica que se les puede asociar se ve que si sólo se considera la mitad de los vértices, estos digrafos pueden ser tratados como grafos de doble lazo. Apoyándose en estos últimos se define un buen encaminamiento que también resulta ser de longitud mínima. Al igual que con las anteriores familias de grafos asociados a teselaciones del plano, el capítulo acaba determinando un conjunto de vértices que pueden fallar en la red ante la existencia de vértices  $(\rho, F)$ -centrales.

En cuanto al segundo bloque (capítulo 5) se empieza presentando la técnica del digrafo línea y las propiedades generales sobre diámetro, conectividad y encaminamiento. Luego, se generaliza a la técnica del digrafo línea parcial y ésta se particulariza al caso en que el digrafo de partida es el de Kautz y el de de Bruijn. En los dos casos, se definen buenos encaminamientos y se da una condición suficiente para la existencia de vértices  $(\rho, F)$ -centrales. Se presenta un método que permite obtener toda la sucesión de digrafos línea parciales con todos los vértices ordenados y tabulados y al final del capítulo se da un algoritmo que calcula un determinado conjunto de vértices  $(\rho, F)$ -centrales.

## Primera parte

# Vulnerabilidad del encaminamiento en redes asociadas con teselaciones del plano

## Capítulo 2

# Vulnerabilidad del encaminamiento en grafos de doble lazo

Como ya se ha comentado en la introducción del capítulo anterior, las topologías de múltiple lazo han sido propuestas como modelos de redes de interconexión de área local. En este capítulo se estudia la vulnerabilidad del encaminamiento en redes modeladas por grafos de doble lazo. Concretamente, se trata de definir en estas redes buenos encaminamientos de manera que ante un conjunto determinado de nodos y/o enlaces que queden “fuera de servicio” siga existiendo comunicación en la red. En particular, el encaminamiento definido para este tipo de redes es de longitud mínima, es decir, formado por caminos lo más cortos posible.

### 2.1 Grafos de doble lazo

Sea un grafo  $G = (V, E)$  con conjunto de vértices  $V = \mathbb{Z}_N$ . Se dice que  $G$  es un *grafo de doble lazo* si cada vértice  $i$  es adyacente a los vértices  $i \pm a, i \pm b, \pmod{N}$ , donde  $a$  y  $b$  son enteros distintos tales que  $1 \leq a, b \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ . Denotaremos estos grafos por  $D_N(a, b)$  y diremos que  $a$  y  $b$  son *pasos* asociados al grafo. En la

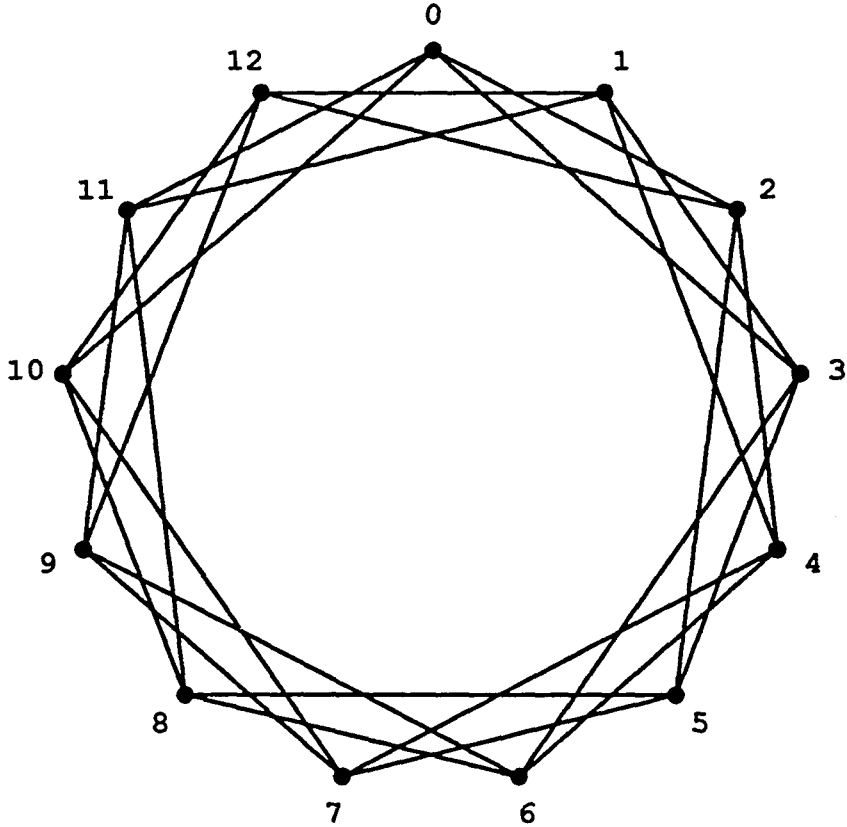


Figura 2.1: Grafo de doble lazo de diámetro 2 con pasos  $a = 2$ ,  $b = 3$ .

Figura 2.1 se muestra  $D_{13}(2, 3)$ .

Los grafos de doble lazo son vértice-simétricos debido a los automorfismos  $i \mapsto i + \alpha$ ,  $0 \leq \alpha \leq N - 1$ . Esto nos permite formular el estudio que sigue a partir de cualquier vértice; por comodidad lo haremos desde el cero.

Desde este vértice, en un paso alcanzamos los vértices  $\pm a$ ,  $\pm b \pmod{N}$ ; en dos pasos  $\pm 2a$ ,  $\pm a \pm b$ ,  $\pm 2b \pmod{N}$ ; en tres pasos  $\pm 3a$ ,  $\pm 2a \pm b$ ,  $\pm a \pm 2b$ ,  $\pm 3b \pmod{N}$ , y así sucesivamente.

Por tanto, el orden máximo de un grafo de doble lazo con diámetro  $k$  es:

$$N_k = 1 + 4 + 8 + \dots + 4k = 2k^2 + 2k + 1, \quad (2.1)$$

si todos los números  $ma + nb$ , con  $|m| + |n| \leq k$  son distintos módulo  $N$ . Es conocida la existencia de estos grafos con orden máximo para cualquier valor de  $k$  [38], [28].

Observemos que una condición necesaria y suficiente para que el grafo sea conexo es:

$$\text{mcd}(a, b, N) = 1. \quad (2.2)$$

En efecto, si  $\text{mcd}(a, b, N) = r \neq 1$  sólo podríamos alcanzar los vértices que son múltiplos de  $r$ . Recíprocamente, si  $\text{mcd}(a, b, N) = 1$  existen enteros  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  tales que  $\alpha a + \beta b + \gamma N = 1$ , es decir,  $\alpha a + \beta b \equiv 1, \pmod{N}$ . Entonces, el vértice 1, y en consecuencia todos los restantes, pueden alcanzarse desde el 0.

A la hora de estudiar la vulnerabilidad del encaminamiento en grafos de doble lazo distinguiremos dos casos:

- El caso óptimo (secciones 2.1 y 2.2) que corresponde a trabajar con grafos de doble lazo de diámetro  $k$  y orden máximo  $N_k = 2k^2 + 2k + 1$ .
- El caso no óptimo (sección 2.3) donde se generaliza el estudio anterior para grafos de doble lazo con diámetro  $k$  y orden  $N$  con  $N_{k-1} < N < N_k$ .

### 2.1.1 Representación geométrica de los grafos de doble lazo con orden máximo

Dado un grafo de doble lazo  $D_N(a, b)$  con diámetro  $k$  y orden  $N$ , identificamos cada vértice  $z = ma + nb \pmod{N}$  con el punto del plano  $\mathbb{Z}^2$  de coordenadas  $(m, n)$ . De esta forma los vértices que alcanzamos sucesivamente a partir del 0 pueden situarse en el plano tal como muestra la Figura 2.2.

Como consecuencia de esta representación observamos dos propiedades de tipo geométrico:

1. Periodicidad. Consideremos el plano dividido en cuadrados iguales, numerados como indica la Figura 2.2, situando el cero en uno cualquiera de ellos.

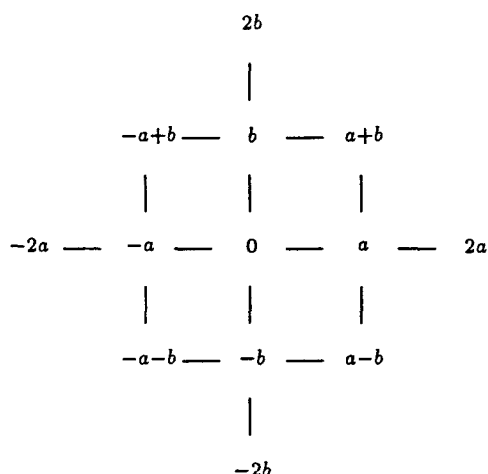


Figura 2.2: *Vértices que se alcanzan desde el 0 en dos o menos pasos.*

Cada cuadrado contiene un número de 0 a  $N - 1$ , y la distribución de estos números en el plano se repite periódicamente. Este hecho se ilustra en la Figura 2.3 para  $N = 13$ ,  $a = 2$  y  $b = 3$ .

2. Teselación. Supongamos  $\text{mcd}(a, b, N) = 1$  y formemos una baldosa con  $N$  cuadrados cualesquiera numerados de 0 a  $N - 1$ . Esta baldosa tesela periódicamente el plano; para ello basta colocar el cuadrado de la baldosa numerada con el 0 sobre todos los cuadrados del plano numerados con el 0. En la Figura 2.3 se muestra una posible teselación.

En [28] se demuestra que dado  $k$  siempre se pueden encontrar pasos  $a$  y  $b$  de manera que la baldosa asociada al grafo de doble lazo de diámetro  $k$  y orden máximo  $N_k = 2k^2 + 2k + 1$  tesela el plano.

La idea de la demostración es la siguiente. En relación a la figura (2.3) hay que demostrar que existen valores  $a$  y  $b$  que producen el modelo periódico mencionado antes, el cual está caracterizado por la posición de los “ceros”. Por tanto  $a$  y  $b$  deben satisfacer:

$$\begin{aligned}
 (k + 1)a - kb &\equiv 0 \pmod{N_k} \\
 ka + (k + 1)b &\equiv 0 \pmod{N_k}
 \end{aligned}
 \tag{2.3}$$

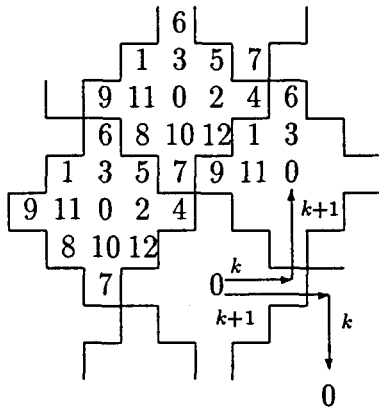


Figura 2.3: Baldosa óptima asociada a  $D_{13}(2,3)$ .

junto con la condición (2.2) que impide la existencia de otros ceros dentro de la baldosa. El sistema (2.3) tiene soluciones no triviales ya que el determinante de la matriz de coeficientes es

$$(k + 1)^2 + k^2 = 2k^2 + 2k + 1 \equiv 0 \pmod{N_k} \quad (2.4)$$

Escribiendo el sistema en forma matricial, para ciertos  $\alpha, \beta$  enteros, se tiene:

$$(a, b) \begin{pmatrix} k + 1 & k \\ -k & k + 1 \end{pmatrix} = (\alpha, \beta)N_k \quad (2.5)$$

de donde

$$(a, b) = (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} k + 1 & -k \\ k & k + 1 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Resolviendo (2.6) para  $\alpha = 0$  y  $\beta = 1$  obtenemos por ejemplo el par de pasos:

$$(a, b) = (k, k + 1)$$

que trivialmente satisfacen la condición  $\text{mcd}(a, b, N_k) = 1$ .



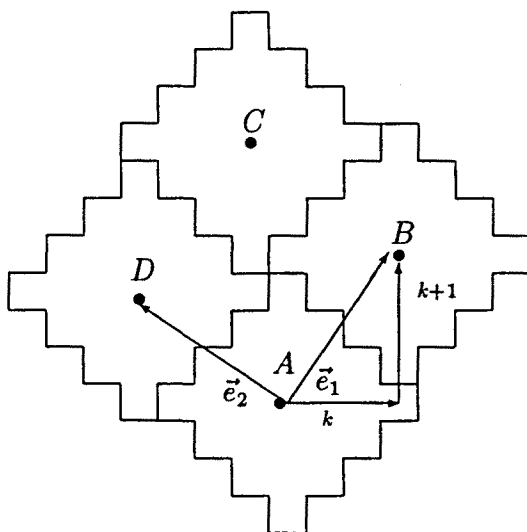


Figura 2.4: Distribución de los ceros en el plano  $\mathbb{Z}^2$ .

### 2.1.2 Coordenadas de los vértices

En esta sección se estudia cómo, conocidos el orden del grafo,  $N_k$ , y los pasos  $a$  y  $b$ , se pueden determinar las coordenadas  $(m, n)$  de cualquier vértice dado  $z$ , con  $|m| + |n| \leq k$ . Esto permitirá, más adelante, definir  $\rho(0, z)$ ,  $\forall z \in V$ . Para ello se trabajará con los dos vectores  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$  que nos determinan el retículo de la Figura 2.4, correspondiente a la distribución de los ceros sobre el plano  $\mathbb{Z}^2$ .

Tomando como origen  $(0, 0)$  el punto  $A$  (que corresponde al vértice 0 del grafo), sabemos a partir de la teselación que las coordenadas de los puntos  $B$ ,  $C$  y  $D$ , que también corresponden al vértice 0, son:

$$B = (k, k + 1), \quad C = (-1, 2k + 1) \text{ y } D = (-(k + 1), k),$$

siendo  $k$  el diámetro del grafo.

De (2.3) podemos escribir matricialmente:

$$sM^t = 0,$$

siendo  $s = (a, b)$  y

$$M = \begin{pmatrix} k & k+1 \\ -(k+1) & k \end{pmatrix}$$

la matriz que caracteriza la distribución de ceros.

Notemos que  $\vec{e}_1$  y  $\vec{e}_2$  se corresponden con las filas de  $M$ , y por tanto los ceros del retículo son de la forma:

$$q_1\vec{e}_1 + q_2\vec{e}_2 = qM \quad \text{con } q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2. \quad (2.7)$$

Así,  $z \pm qM$  es un vector que se corresponde con  $z$ .

El objetivo de esta sección es dar un resultado que permita calcular las coordenadas  $(m, n)$  de  $z$  dentro de la baldosa con origen  $A = (0, 0)$ , es decir, cumpliéndose  $|m| + |n| \leq k$ . De este modo se conocerán el número mínimo  $m$  de pasos "tipo  $a$ " y el número mínimo  $n$  de pasos "tipo  $b$ " que hay que dar en el grafo para ir del vértice  $0$  a cualquier vértice  $z$ .

Dado  $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{Z}^2$ , se define  $[u] = ([u_1], [u_2])$  donde  $[ ]$  denota el entero más próximo.

**Proposición 2.1** Si  $q^* = [zM^{-1}]$ , entonces  $(m, n) = z - q^*M$ .

#### DEMOSTRACIÓN

Por (2.7) tenemos que cualquier punto  $r$  de la forma  $z - qM$  con  $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Z}^2$  se corresponde con  $z$ . Por tanto es suficiente demostrar que cuando  $q = q^*$ ,  $z - q^*M$  nos da las coordenadas de  $z$  referidas al origen  $(0, 0)$ .

Las coordenadas  $(\alpha, \beta)$  de un punto del plano  $\mathbb{Z}^2$  que corresponden al vértice  $z$  pueden obtenerse fácilmente del siguiente modo:

Por (2.2) y utilizando la identidad de Bezout sabemos que existen enteros  $\gamma, \delta$  tales que:

$$\gamma a + \delta b \equiv 1 \pmod{N_k}. \quad (2.8)$$

Si multiplicamos (2.8) por  $z$ , se obtiene:

$$z = \alpha a + \beta b \quad \text{con } (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2. \quad (2.9)$$

Multiplicando  $r = z - qM$  por  $M^{-1}$ , se tiene:

$$rM^{-1} = zM^{-1} - q, \quad (2.10)$$

es decir,

$$zM^{-1} = rM^{-1} + q \quad (2.11)$$

donde

$$M^{-1} = \frac{1}{N_k} \begin{pmatrix} k & -(k+1) \\ k+1 & k \end{pmatrix} \quad \text{con} \quad N_k = 2k^2 + 2k + 1. \quad (2.12)$$

Sustituyendo en la primera parte de (2.11) tendremos:

$$(\alpha, \beta) \frac{1}{N_k} \begin{pmatrix} k & -(k+1) \\ k+1 & k \end{pmatrix} = \left( \frac{\alpha k + \beta(k+1)}{N_k}, \frac{-\alpha(k+1) + \beta k}{N_k} \right). \quad (2.13)$$

Si  $r = (m, n)$  son las coordenadas de  $z$  referidas a  $(0, 0)$ , es decir,  $|m| + |n| \leq k$ , se tiene:

$$rM^{-1} = \left( \frac{mk + n(k+1)}{2k^2 + 2k + 1}, \frac{-m(k+1) + nk}{2k^2 + 2k + 1} \right). \quad (2.14)$$

Llevando (2.13) y (2.14) a (2.11) y operando se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha k + \beta(k+1)}{2k^2 + 2k + 1} &= q_1 + \frac{mk + n(k+1)}{N_k} \\ \frac{-\alpha(k+1) + \beta k}{2k^2 + 2k + 1} &= q_2 + \frac{nk - m(k+1)}{N_k}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Por otra parte tenemos:

$$\begin{aligned} |mk + n(k+1)| &= |(m+n)k + n| \leq \\ (|m| + |n|)k + |n| &\leq k^2 + k < \\ k^2 + k + \frac{1}{2} &= \frac{N_k}{2}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

y análogamente

$$|nk - m(k+1)| < \frac{N_k}{2}. \quad (2.17)$$

De (2.15), (2.16) y (2.17) se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{\alpha k + \beta(k+1)}{2k^2 + 2k + 1} &< q_1 \pm \epsilon_1, \quad |\epsilon_1| < \frac{1}{2} \\ \frac{-\alpha(k+1) + \beta k}{2k^2 + 2k + 1} &< q_2 \pm \epsilon_2, \quad |\epsilon_2| < \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Por tanto, tomando  $q^* = (q_1, q_2)$  como el entero más próximo a  $zM^{-1}$  tendremos las coordenadas del vértice  $z$  referidas al  $(0, 0)$  haciendo  $r = z - q^*M$ .

□

**Ejemplo 2.1** *Cálculo de las coordenadas del vértice  $z = 23$  conocidos los pasos  $a = 3, b = 4$  y el orden  $N_k$  del grafo de diámetro  $k = 3$ .*

Por la identidad de Bezout se tiene:

$$1 = -1 \cdot 3 + 1 \cdot 4$$

de donde

$$23 = -23 \cdot 3 + 23 \cdot 4.$$

Luego  $z = (-23, 23)$

Por otra parte,

$$M = \begin{pmatrix} k & k+1 \\ -(k+1) & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

y

$$zM^{-1} = (-23, 23) \cdot \frac{1}{25} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \left( \frac{23}{25}, \frac{161}{25} \right). \quad (2.20)$$

Tomando  $q^* = (1, 6)$  se tiene:

$$r = z - q^* M = (-23, 23) - (1, 6) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} = (-2, 1). \quad (2.21)$$

Por tanto, las coordenadas de  $z = 23$  referidas al  $(0, 0)$  son  $(-2, 1)$ ; véase la Figura 2.12.

### 2.1.3 Encaminamiento en grafos de doble lazo con orden máximo

El objetivo de esta sección es definir en  $D_{N_k}(a, b)$  un encaminamiento  $\rho$  bidireccional y de longitud mínima, es decir formado por caminos lo más cortos posible. Recordemos que la baldosa asociada a este tipo de grafos, de doble lazo y orden máximo, es la de la Figura 2.3.

Debido a que  $D_{N_k}(a, b)$  es vértice-simétrico, definiremos sólo  $\rho(0, y)$  para todo  $y \in V$ , pues  $\rho(x, y)$  quedará definido a partir de  $\rho(0, y - x)$  de la siguiente forma:

Si

$$\rho(0, y - x) = 0, z_1, \dots, z_n, y - x, \quad (2.22)$$

entonces,

$$\rho(x, y) = x, x + z_1, \dots, x + z_n, y. \quad (2.23)$$

Para ir del vértice 0 a un vértice cualquiera  $y$  de la forma  $(m, n)$ , siendo  $(m, n)$  las coordenadas calculadas en la sección anterior, los encaminamientos más cortos serán los que contengan  $m + n$  pasos. De entre todas las posibles formas de recorrer estos  $m + n$  pasos elegiremos recorrer primero todos los pasos de un tipo y luego todos los del otro tipo.

Por otro lado, el encaminamiento se definirá bidireccional y de esta forma sólo necesitaremos conocer la estructura de la mitad de los caminos  $\rho(x, y)$ , es decir, un total de  $\frac{N_k^2 - N_k}{2}$  caminos.

**Definición 2.1** Dado  $z = (m, n)$ ,  $n \geq 0$ , se define el camino desde el vértice 0 al vértice  $z$  como:

$$\rho(0, z) = a_0 \cdots a_i \cdots b_0 \cdots b_j \cdots b_n$$

donde,

$$\begin{aligned} a_i &= ia \pmod{N_k} && \text{con } 0 \leq i \leq m \text{ si } m > 0 \\ & && \text{y } m \leq i \leq 0 \text{ si } m < 0 \\ b_j &= a_m + jb \pmod{N_k} \quad 0 \leq j \leq n. \end{aligned}$$

Observemos que como  $\rho$  debe ser bidireccional, se tiene:

$$\rho(0, z) = \rho(z, 0).$$

Por otra parte, según (2.22) y (2.23),  $\rho(0, z)$  determina  $\rho(0, -z)$ , siendo  $-z = (-m, -n)$  el simétrico de  $z$ . Es decir, una vez definido como ir de 0 a  $z$  queda definido el camino desde 0 al simétrico de  $z$ . De esta forma ya tenemos asignado un camino a cada par de vértices  $x, y$  del grafo  $D_{N_k}(a, b)$ . Al considerar todos estos caminos desde el vértice 0 se obtiene un subgrafo de  $D_{N_k}(a, b)$  que es un árbol; véase la Figura 2.5. A este árbol se le llamará *árbol del encaminamiento*  $\rho$  y se le denotará por  $T_\rho$ .

De acuerdo con (2.22) y (2.23), el camino  $\rho(x, y)$  se obtiene a partir de  $T_\rho$  centrando dicho árbol en el vértice  $x$  tal como se indica en la Figura 2.6.

Se puede ver fácilmente que el encaminamiento  $\rho$  de la Figura 2.5 tiene la propiedad de ser consistente, es decir, una vez conocido el camino  $\rho(x, y)$  entre dos vértices cualesquiera  $x, y$  del grafo, ya queda definido el camino  $\rho(u, v)$  entre cualesquiera dos vértices  $u, v$  pertenecientes al camino anterior. Por ejemplo, sean los vértices  $x, y, u$  y  $v$ , de la Figura 2.7 y

$$\rho(x, y) = a_0 a_1 \cdots a_{m-p} \cdots a_m b_1 \cdots b_{n-q} \cdots b_n, \text{ con}$$

$$\begin{aligned} a_i &= ia + x \pmod{N_k} \\ b_j &= a_m + jb \pmod{N_k}, \end{aligned}$$

el camino de  $x$  a  $y$ , siendo  $a_{m-p} = u$  y  $b_{n-q} = v$ .

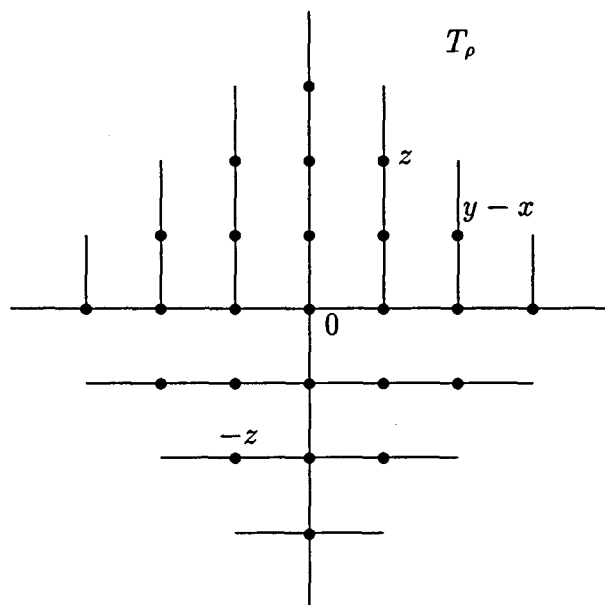


Figura 2.5: Árbol  $T_\rho$  del encaminamiento  $\rho$  en el grafo  $D_{N_k}(a, b)$ .

Por otro lado, las coordenadas de  $v - u$  són:

$$v - u = (v - x) - (u - x) = (m, n - q) - (m - p, 0) = (p, n - q). \quad (2.24)$$

Por tanto,  $\rho(u, v)$  se obtiene considerando a partir de  $u$ ,  $p$  pasos tipo  $a$  y  $n - q$  pasos tipo  $b$ . Si observamos la Figura 2.7 vemos que éste mismo número de pasos nos viene ya determinado por  $\rho(x, y)$ .

## 2.2 Resultados

En esta sección se presentan algunos resultados sobre la vulnerabilidad del encaminamiento  $\rho$  definido en la sección anterior. En los dos primeros se da a conocer el conjunto de vértices y/o ramas del grafo que pueden fallar de forma simultánea de manera que esto no influya para la comunicación en la red. El tercero de los resultados presenta un algoritmo para determinar las coordenadas de un vértice

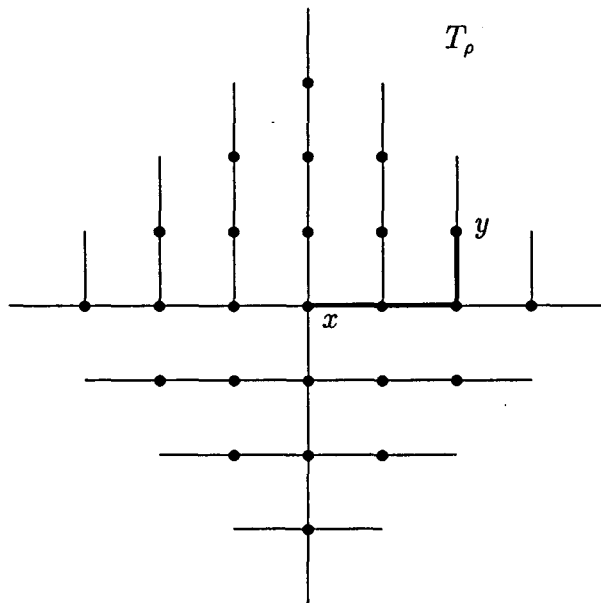


Figura 2.6: Camino de  $x$  a  $y$  en  $T_\rho$  centrado en  $x$ .

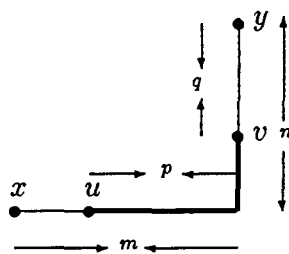


Figura 2.7:  $\rho(u, v)$  a partir de  $\rho(x, y)$ .



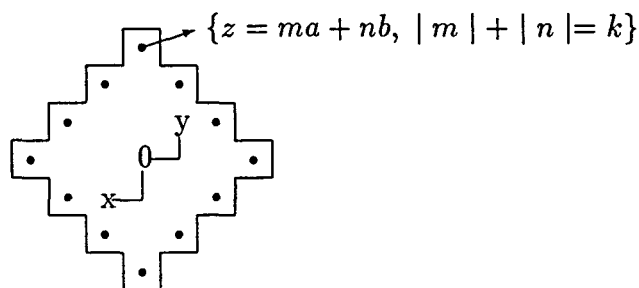


Figura 2.8: Baldosa óptima asociada al grafo  $D_{N_k}(a, b)$  centrada en el vértice 0.

$(\rho, F)$ -central cuando en la red existen dos vértices defectuosos. En el cuarto, aplicando el anterior, se demuestra que, para cualquier conjunto de dos ramas defectuosas de un grafo de doble lazo óptimo, siempre existe un vértice  $(\rho, F)$ -central. Finalmente, en el último resultado se demuestra que para el caso en que fallen tres vértices, el diámetro del grafo de supervivencia no es superior a 2.

**Proposición 2.2** *El vértice cero es  $(\rho, F)$ -central para todo subconjunto  $F$  de  $V_F$ , donde  $V_F = \{z = (m, n) : |m| + |n| = k\}$ .*

#### DEMOSTRACIÓN

Siendo  $k$  el diámetro de  $D_{N_k}(a, b)$ , los vértices de  $V_F$  son los que pertenecen a la frontera de la baldosa de la Figura 2.8. Notemos que el número de vértices en dicha frontera es  $4k$ .

El vértice cero es  $(\rho, F)$ -central para todo subconjunto  $F$  de  $V_F$  ya que, centrando el árbol del encaminamiento  $T_\rho$  en 0 y  $x$  respectivamente, fácilmente se observa que ni  $\rho(0, x)$  ni  $\rho(x, 0)$  contiene ningún elemento de  $F$ .  $\square$

En general, dado un vértice cualquiera  $c$  del grafo, si se considera por medio de una traslación la baldosa centrada en  $c$ , y se toma como  $F$  un conjunto de vértices que pertenecen a la frontera de dicha baldosa, entonces  $c$  es  $(\rho, F)$ -central.

La interpretación del encaminamiento  $\rho$  como un subgrafo de  $D_{N_k}(a, b)$  nos permite visualizar fácilmente cual es el conjunto  $E_F$  de ramas para el cual el

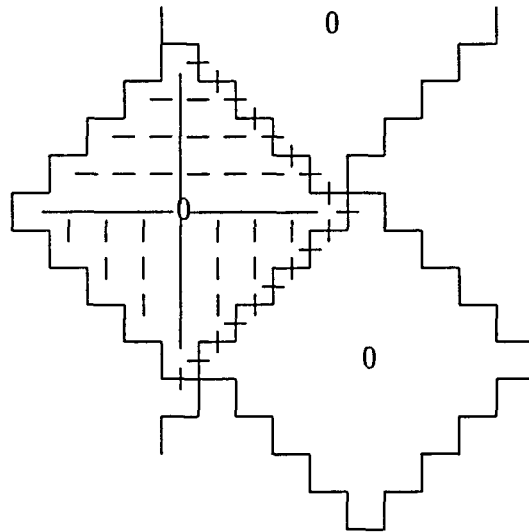


Figura 2.9: Conjunto de ramas  $E_F$  en  $D_{N_k}(a,b)$  para las cuales 0 es  $(\rho, E_F)$ -central.

vértice cero sería  $(\rho, E_F)$ -central. Si observamos la Figura 2.9 tenemos el siguiente resultado:

Sea  $A = \{uv : \exists x, y \in V / uv \in \rho(x, y)\}$  el conjunto de ramas que pertenecen a  $T_\rho$  y  $E_F = E \setminus A$  con  $E$  el conjunto de todas las ramas del grafo.

**Proposición 2.3** *El vértice cero es  $(\rho, F)$ -central para todo subconjunto  $F$  de  $E_F$ .*

#### DEMOSTRACIÓN

El razonamiento para ver que el vértice cero es  $(\rho, F)$ -central es el mismo que el de la demostración de la proposición anterior; es decir, para ir de un vértice cualquiera  $x$  a otro  $y$  del grafo  $D_{N_k}(a,b)$ , existen los caminos  $\rho(x, 0)$  y  $\rho(0, y)$  formados únicamente por ramas de  $A$ ; luego, el camino  $\rho(x, 0)\rho(0, y)$  evita  $E_F$ . Notemos que fijado el diámetro  $k$  del grafo, el número de ramas en  $E_F$  es  $2k^2 + 2k + 2$ .  $\square$

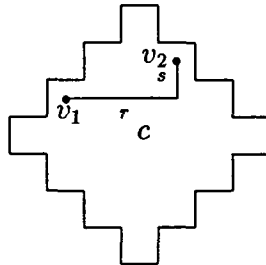


Figura 2.10: Situación de  $v_1$  y  $v_2$  en la frontera de la baldosa para el caso en que  $r + s$  es par.

Como antes, considerando ahora las baldosas centradas en un vértice  $c$ , se obtiene por traslación un conjunto de ramas  $E_F$  para el cual  $c$  es  $(\rho, E_F)$ -central.

**Proposición 2.4** Para todo conjunto  $V_F$  de dos vértices existe  $c$  que es  $(\rho, V_F)$ -central.

#### DEMOSTRACIÓN

Para demostrar este resultado, veremos que dados dos vértices cualesquiera en  $D_{N_k}(a, b)$  siempre es posible encontrar una baldosa óptima asociada a este grafo que contenga a los dos vértices en su frontera. De esta forma, aplicando la Proposición 2.2, se tendrá que el centro de dicha baldosa es un vértice central.

Sea  $V_F = \{v_1, v_2\}$ . Supongamos que entre  $v_1$  y  $v_2$  tenemos  $r$  pasos "tipo  $a$ " y  $s$  pasos "tipo  $b$ " con  $r$  y  $s$  enteros positivos y  $r > s$  (ver la Figura 2.10). Si  $r, s$  o los dos fuesen negativos, se podría hacer un estudio análogo teniendo en cuenta la simetría de los vértices.

Para  $r$  y  $s$  se tienen dos posibilidades:  $r + s$  par o  $r + s$  impar.

#### 1. $r + s = 2q$

Sean  $v_1$  y  $v_2$  los vértices de la Figura 2.10. La situación para  $v_1$  y  $v_2$  en esta figura queda justificada para el caso de que  $r + s$  es par por lo siguiente:

Si  $v_1$  tiene coordenadas  $(m_1, n_1)$  con  $m_1 < 0$  y  $-m_1 + n_1 = k$ , entonces  $v_2$  con coordenadas  $(m_1 + r, n_1 + s) = (m_2, n_2)$  siempre cumplirá  $m_2 + n_2 = k$ .

En efecto:

$$\begin{aligned}(m_1 + r) + (n_1 + s) &= k \Leftrightarrow (m_1 + r) + (n_1 + s) = -m_1 + n_1 \Leftrightarrow \\ r + s &= -2m_1 \Leftrightarrow r + s \text{ es par.}\end{aligned}$$

A partir de  $\rho(v_1, v_2)$  se tiene:

$$(m_1 + r)a + (n_1 + s)b = m_2a + n_2b,$$

es decir,

$$\begin{aligned}m_1 + r &= m_2 \\ n_1 + s &= n_2.\end{aligned}\tag{2.25}$$

Sumando las dos ecuaciones de (2.25) y teniendo en cuenta a partir de la Figura 2.10 que  $|m_i| + |n_i| = k, i = 1, 2$  y  $m_1 < 0$  tenemos:

$$m_1 = -q$$

y por tanto

$$n_1 = k - q.$$

Luego las coordenadas de  $v_1$  y  $v_2$  referidas a la baldosa centrada en  $c$  son:

$$\begin{aligned}v_1 &= (-q, k - q) \\ v_2 &= (-q + r, k - q + s).\end{aligned}\tag{2.26}$$

A partir de (2.26) y conocidos los pasos  $a$  y  $b$  del grafo de doble lazo se determinan fácilmente las coordenadas del vértice  $c$ . Aplicando el resultado dado por la Proposición 2.2 tenemos que  $c$  es  $(\rho, V_F)$ -central.

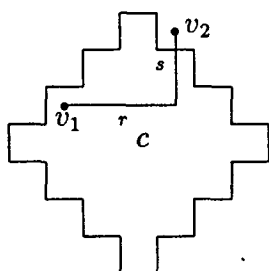


Figura 2.11: Situación de  $v_1$  y  $v_2$  en la frontera de la baldosa para el caso en que  $r + s$  es impar.

2.  $r + s = 2q + 1$

En este caso, la situación para  $v_1$  y  $v_2$  va a ser la de la Figura 2.11. Análogamente al caso en que  $r + s$  es par, la justificación de la situación de  $v_1$  y  $v_2$  en la Figura 2.11 para el caso en que  $r + s$  es impar es la siguiente: Si  $v_1$  tiene coordenadas  $(m_1, n_1)$ ,  $m_1 < 0$  y  $-m_1 + n_1 = k$ , el vértice  $v_2$  de coordenadas  $(m_1 + r, n_1 + s) = (m_2, n_2)$  siempre cumple  $m_2 + n_2 = k + 1$ . En efecto:

$$\begin{aligned} (m_1 + r, n_1 + s) = k + 1 &\Leftrightarrow (m_1 + r, n_1 + s) = -m_1 + n_1 + 1 \Leftrightarrow \\ r + s &= -2m_1 + 1 \Leftrightarrow r + s \text{ es impar.} \end{aligned}$$

Análogamente al primer caso, de  $\rho(v_1, v_2)$  se tiene:

$$(m_1 + r)a + (n_1 + s)b = m_2a + n_2b,$$

es decir,

$$m_1 = -q \text{ y } n_1 = k - q.$$

Las coordenadas para  $v_1$  y  $v_2$  son:

$$\begin{aligned} v_1 &= (-q, k - q) \\ v_2 &= (-q + r, k - q + s). \end{aligned} \tag{2.27}$$

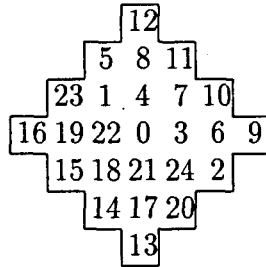


Figura 2.12: Baldosa asociada a  $D_{N_3}(3,4)$  centrada en el  $(0,0)$ .

A partir de la teselación de la Figura 2.11 se tiene  $v_2 = (-q + r, k - q + s) \equiv (-q + r - k, -q + s - 1)$ .

Por lo tanto las coordenadas de  $v_2$  referidas a la baldosa con centro  $c$  son:

$$v_2 = (-q + r - k, -q + s - 1)$$

y

$$v_1 = (-q, k - q).$$

Conocidos  $v_1$  y  $v_2$  y dados los pasos  $a$  y  $b$  se pueden obtener las coordenadas del vértice  $c$ , el cual por la Proposición 2.2 es  $(\rho, V_F)$ -central.

□

**Ejemplo 2.2** Dado el grafo de doble lazo  $D_{N_3}(3,4)$  y  $V_F = \{22, 7\}$ , calcular las coordenadas del vértice central  $c$ .

De la Figura 2.12 correspondiente al grafo  $D_{N_3}(3,4)$  centrada en el vértice  $(0,0)$  se tiene:

$$r + s = 3$$

y por tanto  $q = 1$ .

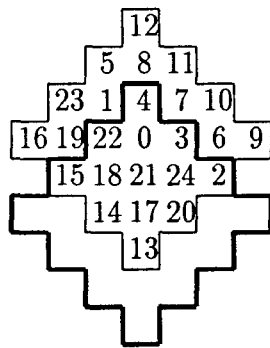


Figura 2.13:  $17 = (0, -2)$ , vértice  $(\rho, V_F)$ -central en  $D_{N_3}(3, 4)$ .

De (2.27) las coordenadas de los vértices  $v_1$  y  $v_2$  de  $V_F$  respecto a la baldosa con centro  $c$  son:

$$\begin{aligned} v_1 &= (-q, k - q) = (-1, 2) \\ v_2 &= (-q + r, k - q + s) \equiv (-q + r - k, -q + s - 1) = (-2, -1). \end{aligned} \quad (2.28)$$

A partir de estas nuevas coordenadas para  $v_1$  y  $v_2$  y conocidos los pasos  $a = 3$  y  $b = 4$  es fácil ver que el vértice que es  $(\rho, V_F)$ -central es:

$$c = (0, -2) = 17.$$

Esta solución aparece ilustrada en la Figura 2.13.

**Proposición 2.5** *Para todo conjunto  $A$  de dos ramas existe  $c$  que es  $(\rho, A)$ -central.*

#### DEMOSTRACIÓN

Sea  $A = \{ e_1, e_2 \}$  con  $e_1 = x_1y_1$  y  $e_2 = x_2y_2$ .

Supongamos que entre el vértice  $y_1$  y el vértice  $x_2$  existen  $r$  pasos “tipo  $a$ ” y  $s$  pasos “tipo  $b$ ” con  $r > s$  y  $r$  y  $s$  enteros positivos. Como se ha mencionado en la demostración de la proposición anterior si  $r$ ,  $s$  o los dos fuesen negativos se podría hacer un estudio análogo debido a la simetría de los vértices en los grafos de doble lazo.

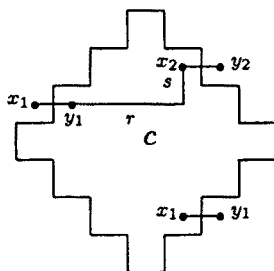


Figura 2.14: Situación de  $e_1$  y  $e_2$  en la frontera de la baldosa centrada en  $c$  cuando las dos ramas son horizontales.

Para  $r$  y  $s$  tenemos dos posibilidades:  $r + s$  par o  $r + s$  impar.

1.  $r + s = 2q$

Aplicando la Proposición 2.4 a los vértices  $y_1$  y  $x_2$ , se tiene que la situación de las ramas  $e_1 = x_1y_1$  y  $e_2 = x_2y_2$  en la baldosa asociada al grafo  $D_{N_k}(a, b)$  se corresponde con la de las Figuras 2.14, 2.15, 2.16 y 2.17 según que  $e_1$  y  $e_2$  sean las dos horizontales, las dos verticales o una horizontal y otra vertical. Nótese, a partir de la Figura 2.9, que la situación de  $A = \{e_1, e_2\}$  en la baldosa centrada en  $c$  justifica la existencia del vértice  $c$ ,  $(\rho, A)$ -central. Las coordenadas de  $c$  se obtienen fácilmente a partir de las de  $y_1$  y  $x_2$  y de los pasos  $a, b$ .

2.  $r + s = 2q + 1$

Aplicando la Proposición 2.4 a los vértices  $y_1$  y  $x_2$ , se tendrá que la situación de las ramas de  $A$  sobre la baldosa asociada al grafo de doble lazo será la de las Figuras 2.18 y 2.19, según que las ramas  $e_1 = x_1y_1$  y  $e_2 = x_2y_2$  sean las dos verticales o que  $e_1$  sea horizontal y  $e_2$  vertical respectivamente. Al igual que ocurría en el caso anterior, la situación de  $A = \{e_1, e_2\}$  en la baldosa con centro  $c$  justifica a partir de la Proposición 2.3 que el vértice  $c$  es  $(\rho, A)$ -central.



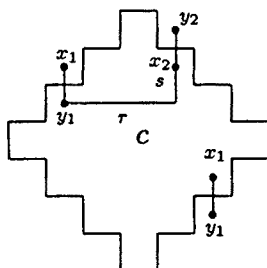


Figura 2.15: Situación de  $e_1$  y  $e_2$  en la frontera de la baldosa centrada en  $c$  correspondiente al caso en que  $e_1$  y  $e_2$  son verticales.

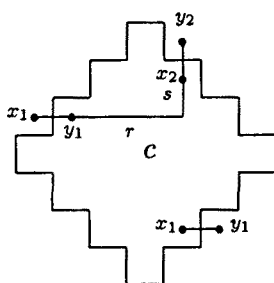


Figura 2.16: Situación de  $e_1$  y  $e_2$  en la frontera de la baldosa con centro el vértice  $c$  cuando  $e_1$  es horizontal y  $e_2$  es vertical.

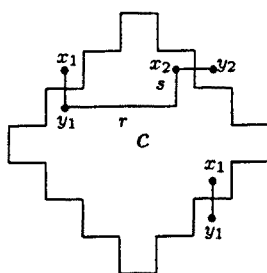


Figura 2.17: Situación de  $e_1$  y  $e_2$  en la frontera de la baldosa con centro el vértice  $c$  cuando  $e_1$  es vertical y  $e_2$  es horizontal.

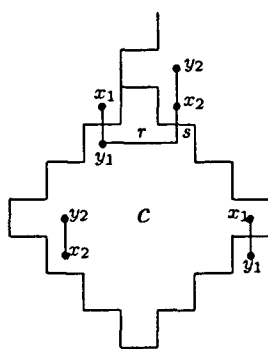


Figura 2.18: *Situación del conjunto A cuando las dos ramas son verticales.*

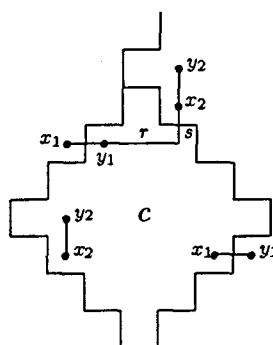


Figura 2.19: *Situación del conjunto A cuando  $e_1$  es horizontal y  $e_2$  es vertical.*

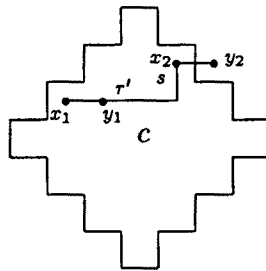


Figura 2.20: Situación de  $A$  cuando las dos ramas son horizontales.

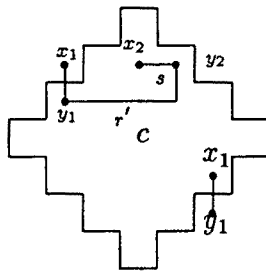


Figura 2.21: Situación de  $A$  cuando  $e_1$  es vertical y  $e_2$  es horizontal.

Por otra parte, notemos que si las ramas  $e_1 = x_1y_1$  y  $e_2 = x_2y_2$  son las dos horizontales y entre  $y_1$  y  $x_2$  hay  $r$  pasos “tipo  $a$ ” y  $s$  pasos “tipo  $b$ ” con  $r + s = 2q + 1$  y  $r > s$ , entre  $x_1$  y  $x_2$  habrá  $r' = r + 1$  pasos “tipo  $a$ ” y  $s$  pasos “tipo  $b$ ” con  $r' + s = 2q + 2 = 2q'$  y, por tanto, aplicando la Proposición 2.4 a los vértices  $x_1$  y  $x_2$ , la situación de las ramas de  $A$  sobre la baldosa será la de la Figura 2.20. Aplicando la Proposición 2.3 generalizada a cualquier vértice  $c$ , se tiene que  $c$  es  $(\rho, A)$ -central.

Por último, si la rama  $e_1$  es vertical y la  $e_2$  es horizontal y entre  $y_1$  y  $x_2$  hay  $r$  pasos “tipo  $a$ ” y  $s$  pasos “tipo  $b$ ” con  $r + s = 2q + 1$ , entre  $y_1$  e  $y_2$  habrá  $r'$  pasos “tipo  $a$ ” y  $s$  pasos “tipo  $b$ ” con  $r' + s = 2q$ . Por tanto, aplicando

la Proposición 2.4 a los vértices  $y_1$  e  $y_2$ , la situación de las ramas  $e_1$  y  $e_2$  sobre la baldosa será la de la Figura 2.21. Con un razonamiento análogo al anterior se tiene que  $c$  es  $(\rho, A)$ -central.

Por tanto, tenemos demostrado que para cualquier conjunto  $A$  formado por dos ramas del grafo de doble lazo  $D_{N_k}(a, b)$ , existe  $c = (c_1, c_2)$  que es  $(\rho, A)$ -central.

□

**Proposición 2.6** Sean  $G = (V, A) = D_{N_k}(a, b)$  y  $V_F \subset V$ , con  $|V_F| = 3$ . Entonces, el diámetro del grafo de supervivencia de  $G$  es menor o igual a 2.

#### DEMOSTRACIÓN

La idea de la demostración es ver que para cualesquiera dos vértices  $x$  e  $y$  del grafo de doble lazo  $D_{N_k}(a, b)$ , existe un vértice  $c'$ , dependiente de  $x$  e  $y$ , de manera que  $\rho(x, c')$  y  $\rho(c', y)$  evitan  $V_F$ .

Sea  $V_F = \{v_1, v_2, v_3\}$ . Considerando dos vértices cualesquiera de  $V_F$ , por ejemplo  $v_1$  y  $v_2$ , siempre es posible construir una baldosa asociada al grafo de doble lazo  $D_{N_k}(a, b)$ , de forma que  $v_1$  y  $v_2$  queden en la frontera de dicha baldosa. Supongamos que la situación para  $v_1$  y  $v_2$  sea la de la Figura 2.22, y que  $v_3$  es cualquier otro vértice del grafo  $D_{N_k}(a, b)$ , con  $v_3 \neq c$ , y  $c$  el centro de la baldosa. Notemos que esto siempre se puede suponer ya que si  $v_3$  coincidiese con  $c$ , en vez de considerar  $(v_1, v_2)$ , se razonaría del mismo modo con  $(v_1, v_3)$  o  $(v_2, v_3)$ .

Sean  $x$  e  $y$  dos vértices del grafo  $D_{N_k}(a, b)$  y supongamos que  $\rho(x, c)\rho(c, y)$  es el camino de  $x$  a  $y$  que muestra la Figura 2.23. Las coordenadas de  $x$  e  $y$  vienen determinadas respecto de la baldosa centrada en el vértice  $c$ . Si la situación de  $x$  e  $y$  en la baldosa centrada en  $c$  fuese otra, se podría hacer un razonamiento análogo al que sigue.

Distinguiremos dos posibles casos:

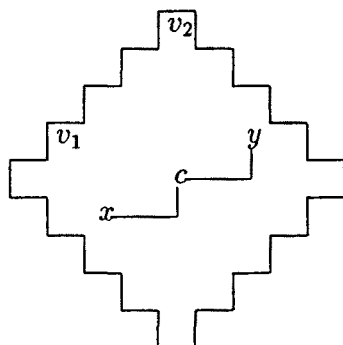


Figura 2.22: Situación de  $v_1$  y  $v_2$  en la frontera de la baldosa asociada a  $D_{N_k}(a, b)$ .

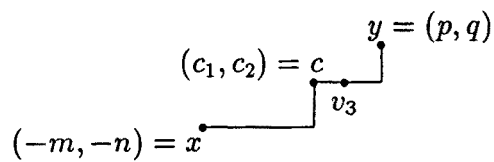


Figura 2.23:  $v_3 \in \rho(c, y)$ .

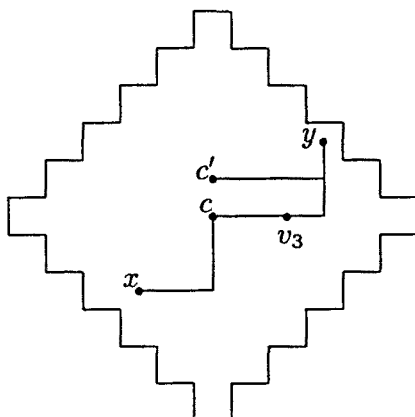


Figura 2.24:  $\rho(x, c')\rho(c', y)$  evitando  $v_3$ .

1.  $x/d(x, c) < k$ . Para estos vértices, existe el vértice  $c' = (c_1, c_2 + 1)$ , de forma que  $\rho(x, c')\rho(c', y)$  no pasa por  $v_3$ . Esta solución aparece representada en la Figura 2.24.
2.  $x/d(x, c) = k$ . Estos vértices son los que se encuentran situados en la frontera de la baldosa, y en este caso teniendo en cuenta que, por congruencia, el vértice  $x = (-m, -n)$  es el  $(-m + k, -n + k + 1)$ , se tiene (véase la Figura 2.25) que el vértice:

$$c' = (-m + k, -n + k + 1 - r), \quad \text{si } -n + k + 1 > q,$$

o

$$c' = (-m + k - s, -n + k + 1), \quad \text{si } -n + k + 1 < q,$$

es tal que  $\rho(x, c')\rho(c', y)$  evita  $v_3$ .

Notemos que si  $-n + k + 1 = q$ ,  $\rho(x, y)$  sería horizontal y ya evitaría  $v_3$ .

Finalmente, veamos que el peor de los casos se tiene cuando uno de los dos vértices, por ejemplo el  $x$ , está rodeado por los tres vértices  $v_1, v_2, v_3$  (véase la baldosa de la izquierda en la Figura 2.26) y que si es así también existe solución, ya que aún queda una salida desde  $x$  para ir a  $y$ . Una solución se muestra en la segunda baldosa de la Figura 2.26 y consiste en considerar una baldosa

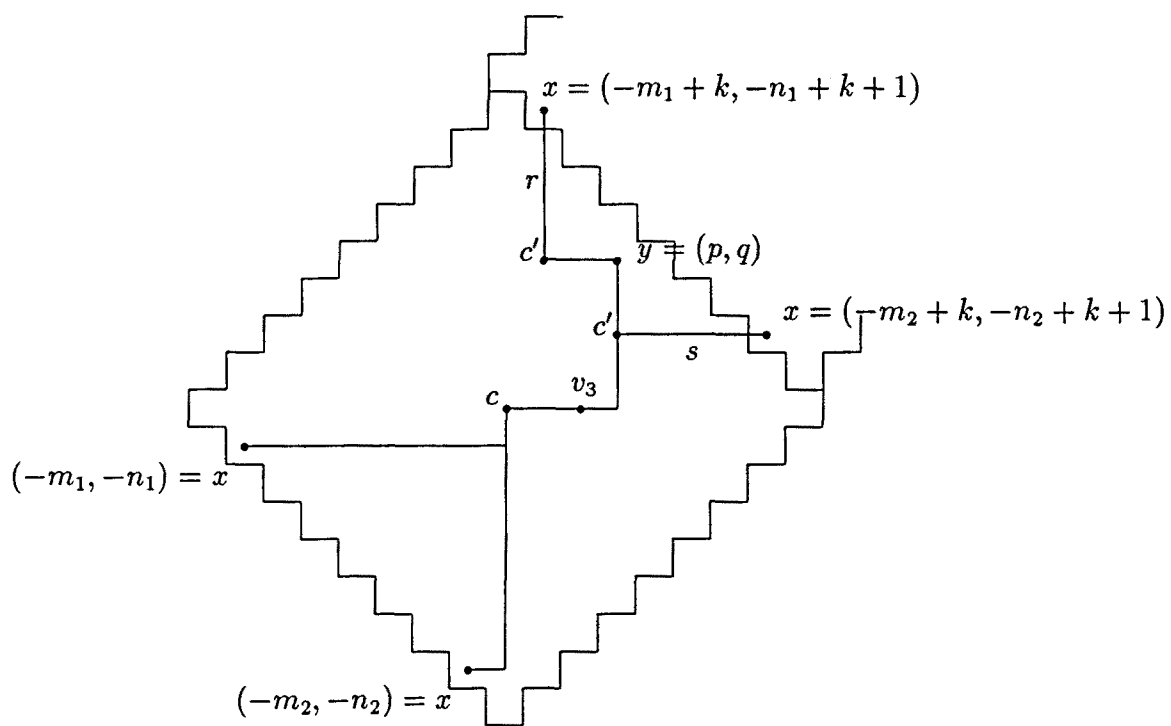


Figura 2.25:  $\rho(x, c')\rho(c', y)$  evitando  $v_3$ .

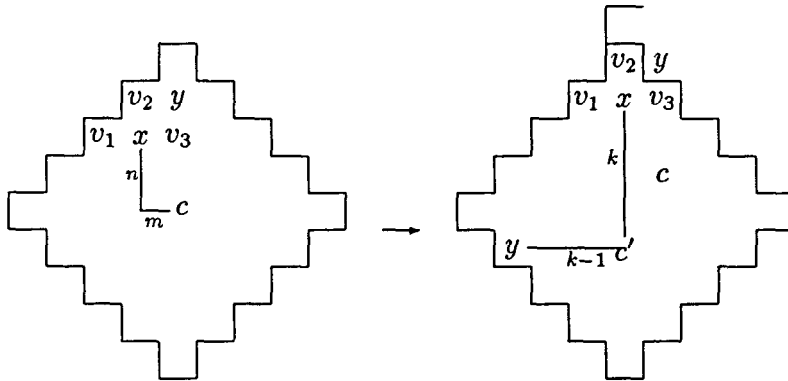


Figura 2.26: Solución para el caso en que los tres vértices de  $V_F$  son adyacentes con  $x$ .

de análogas dimensiones a la que representa al grafo  $D_{N_k}(a, b)$ , de modo que ésta contenga en el vértice superior a  $v_2$ . Así, es fácil ver que existe el vértice  $c' = (-m - k + 1, n - k)$  tal que el camino  $\rho(x, c')\rho(c', y)$  evita el vértice  $v_3$ .

□

### 2.3 Generalización al caso no óptimo

Hasta ahora se ha trabajado con grafos de doble lazo, diámetro  $k$  y orden máximo  $N_k = 2k^2 + 2k + 1$ . La baldosa asociada a estos grafos óptimos se obtenía con pasos  $a = k$  y  $b = k + 1$ .

En esta sección se realizará un estudio paralelo al de las secciones anteriores pero trabajando con grafos de doble lazo, diámetro  $k$  y número de vértices  $N$  con  $N_{k-1} < N < N_k$ . Se verá que para estos grafos también existe una representación geométrica que tesela periódicamente el plano y además es posible recuperar el encaminamiento  $\rho$  definido para el caso óptimo.

En la siguiente proposición se justifica la existencia de estos grafos, los cuales ya fueron presentados en [28].

**Proposición 2.7** Dado  $N$  con  $2(k - 1)^2 + 2(k - 1) + 1 < N < 2k^2 + 2k + 1$ ,



existe un grafo de doble lazo con orden  $N$  y diámetro  $k$ .

#### DEMOSTRACIÓN

Nótese que como  $N$  cumple:

$$N_{k-1} = 2(k-1)^2 + 2(k-1) + 1 < N < 2k^2 + 2k + 1 = N_k,$$

$N$  es de la forma  $N = N_k - s$  con  $1 \leq s \leq 4k - 1$ .

Por tanto, para demostrar este resultado se procederá de la siguiente forma:

(a) La baldosa correspondiente a  $D_N(k, k+1)$  con  $N = N_k - s$  vértices y  $1 \leq s \leq k+1$ , se puede obtener suprimiendo los  $s$  primeros vértices, correspondientes a los  $s$  cuadrados de la diagonal extremal S-O de una baldosa con forma óptima y  $N_k$  cuadrados obtenida con pasos  $k$  y  $k+1$ ; véase la Figura 2.27. En efecto, los vértices de esta diagonal, por ser vértices a distancia  $k$ , son de la forma:

$$-(m-1)a - (k-m+1)b, \quad \text{con } 1 \leq m \leq k+1,$$

los cuales, con  $a = k$  y  $b = k+1$ , pasan a ser:

$$-(m-1)k - (k-m+1)(k+1) = -k^2 - k + m - 1. \quad (2.29)$$

Pero, por otro lado, los vértices de la diagonal extremal N-E son:

$$\begin{aligned} (s-m)a + (k-s+m)b &= (s-m)k + (k-s+m)(k+1) \\ &= k^2 + k + m - s, \quad 1 \leq m \leq s. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Puesto que los números que aparecen en (2.29) y (2.30) son congruentes módulo  $(2k^2 + 2k + 1 - s)$ , los vértices de la diagonal extremal S-O van apareciendo otra vez en la diagonal extremal N-E. Por lo tanto, una vez eliminados  $1 \leq s \leq k+1$  vértices tal como se indica en la Figura 2.27, se obtiene la baldosa asociada a  $D_N(k, k+1)$  con  $N = N_k - s$  vértices, que se representa en la Figura 2.28.

(b) Análogamente, la baldosa correspondiente a  $D_N(k, k+1)$  con  $N = N_k - (k+1) - s$  vértices y  $1 \leq s \leq k+1$ , se puede obtener a partir de la baldosa

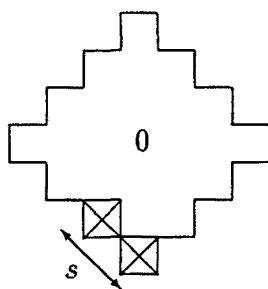


Figura 2.27: *Supresión de los  $s$  primeros vértices de la diagonal extremal S-O.*

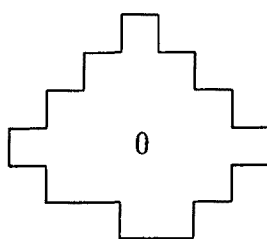


Figura 2.28: *Baldosa asociada a  $D_N(k, k+1)$  con  $N = N_k - s$ ,  $1 \leq s \leq k+1$ .*

con forma óptima y  $N_k$  vértices, eliminando los  $k + 1$  vértices de la diagonal extremal S-O y los  $s$  primeros de la diagonal extremal N-E (empezando por el  $kb$ ); véase la Figura 2.29. En efecto, los vértices de la diagonal extremal S-O,  $-(m - 1)a - (k - m + 1)b$ , con  $a = k, b = k + 1$  y  $1 \leq m \leq k + 1$  cumplen:

$$-(m - 1)a - (k - m + 1)b \equiv (s - m)a + (k - 1 + m - s)b \pmod{N}$$

$$\text{si } 1 \leq m \leq s.$$

$$-(m - 1)a - (k - m + 1)b \equiv (k - m + s + 1)a + (m - s - 1)b \pmod{N}$$

$$\text{si } s < m \leq k + 1.$$

Por otro lado, los  $s$  primeros vértices de la diagonal extremal N-E en la baldosa con  $N_k$  vértices, que se corresponden con la expresión:

$$(m - 1)a + (k - m + 1)b \text{ con } a = k, b = k + 1 \text{ y } 1 \leq m \leq s,$$

cumplen:

$$(m - 1)a + (k - m + 1)b = (m - 1)k + (k - m + 1)(k + 1) = k^2 + k + 1 - m$$

pero,

$$k^2 + k + 1 - m \equiv -k^2 - m + 1 + s \pmod{2k^2 + 2k + 1 - (k + 1) - s}$$

y

$$\begin{aligned} (m - s)a - (k - 1 - s + m)b &= (m - s)k - (k - 1 - s + m)(k + 1) \\ &= -k^2 - m + 1 + s. \end{aligned}$$

(c) Finalmente, la baldosa asociada a  $D_N(k - 1, k)$  con  $N = N_k - 2(k + 1) - s$  vértices y  $1 \leq s \leq 2k - 3$ , se puede obtener a partir de una baldosa con forma óptima con  $N_{k-1} = 2(k - 1)^2 + 2(k - 1) + 1 = 2k^2 - 2k + 1$  vértices, obtenida con pasos  $k - 1$  y  $k$ , añadiendo  $s$  vértices en las diagonales extremales N-E y S-O tal como se muestra en la Figura 2.30 (los vértices marcados con + son los que se añaden). Para justificar esta afirmación es suficiente demostrar que los

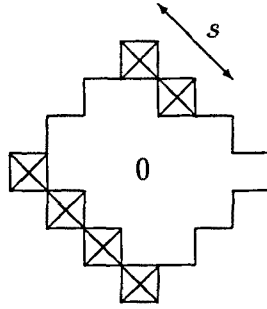


Figura 2.29: *Supresión de los  $s$  primeros vértices de la diagonal extremal N-E.*

vértices añadidos en estas posiciones son distintos de los  $N_{k-1}$  vértices del grafo  $D_N(k-1, k)$  tales que:

$$\alpha a + \beta b \text{ con } |\alpha| + |\beta| \leq k - 1. \quad (2.31)$$

El primer vértice añadido es:

$$(k-1)a + b = (k-1)(k-1) + k = k^2 - k + 1.$$

Si  $\alpha a + \beta b$  es un vértice en  $D_N(k-1, k)$  cumpliendo (2.31), cabe distinguir los cuatro casos siguientes:

1.  $\alpha \geq 0, \beta \geq 0$

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta b &= \alpha(k-1) + \beta k \leq \alpha(k-1) + (k-1-\alpha)k \\ &= k^2 - k - \alpha < k^2 - k + 1. \end{aligned}$$

2.  $\alpha \geq 0, \beta < 0$

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta b &= \alpha(k-1) + \beta k \geq \alpha(k-1) + (\alpha - k + 1)k \\ &= -k^2 + k + 2\alpha k - \alpha. \end{aligned}$$

Pero,

$$-k^2 + k + 2\alpha k - \alpha \equiv k^2 - k + 2\alpha k - \alpha + 1 + s \pmod{N}$$

$$\text{y } k^2 - k + 2\alpha k - \alpha + 1 + s > k^2 - k + 1.$$

3.  $\alpha < 0, \beta \geq 0$

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta b &= \alpha(k-1) + \beta k \leq \alpha(k-1) + (k-1 + \alpha)k \\ &= k^2 - k + 2\alpha k - \alpha < k^2 - k + 1. \end{aligned}$$

4.  $\alpha < 0, \beta < 0$

$$\begin{aligned} \alpha a + \beta b &= \alpha(k-1) + \beta k \geq \alpha(k-1) + (-\alpha - k + 1)k \\ &= -k^2 + k - \alpha. \end{aligned}$$

Pero,

$$-k^2 + k - \alpha \equiv k^2 - k + 1 + s - \alpha \pmod{N}$$

$$\text{y } k^2 - k + 1 + s - \alpha > k^2 - k + 1.$$

De forma análoga se podría demostrar que los  $s$  vértices con  $1 \leq s \leq 2k-3$  que van apareciendo en las diagonales extremales N-E y S-O son distintos de los  $N_{k-1}$  vértices de  $D_N(k-1, k)$  que cumplen (2.31). Por tanto, añadiendo estos  $s$  vértices se obtiene la baldosa asociada a  $D_N(k-1, k)$  con  $N = N_k - 2(k+1) - s, 1 \leq s \leq 2k-3$ .  $\square$

Como ejemplo, véase la baldosa asociada al grafo  $D_{30}(3, 4)$  de la Figura 2.31 construida a partir de la asociada al grafo  $D_{25}(3, 4)$ .

También es posible obtener un grafo de doble lazo no óptimo de diámetro  $k$  y orden  $N = N_k - s, 1 \leq s \leq 4k-1$ , suprimiendo  $s$  vértices en una baldosa con forma óptima obtenida con pasos  $k$  y  $k+1$ . En este caso el grafo obtenido

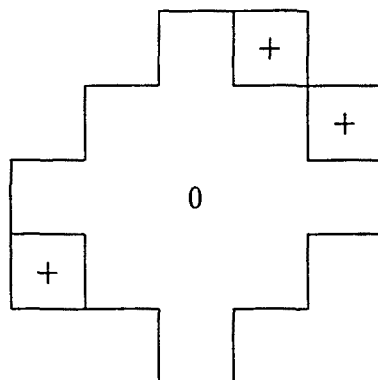


Figura 2.30: Baldosa asociada a  $D_N(k-1, k)$  con  $N = N_k - 2(k+1) - s$ ,  $1 \leq s \leq 2k-3$ .

es de la forma  $D_N(k, k+1)$ . Sin embargo, la última baldosa correspondiente a  $s = 4k-1$  en la sucesión de baldosas asociadas a los  $D_N(k, k+1)$  no corresponde en general con la baldosa asociada al grafo óptimo de diámetro  $k-1$  añadiendo un cuadrado.

Sea un grafo de doble lazo con diámetro  $k$  y orden  $N$  que cumple:

$$2(k-1)^2 + 2(k-1) + 1 < N < 2k^2 + 2k + 1.$$

Recordemos que en el caso de grafos de doble lazo óptimos, es decir, con número de vértices  $N_k = 2k^2 + 2k + 1$ , se pueden calcular las coordenadas  $(m, n)$  de cada vértice  $z$  y, a partir de ellas, ya queda definido el camino desde el vértice 0 al vértice  $z = (m, n)$ . Ahora, debido a que  $N$  no es fijo, resulta difícil conocer estas coordenadas y por ello, de cara a definir un encaminamiento en este tipo de grafos, se supondrá que se dispone de esta información.

Para definir caminos entre cualesquiera dos vértices  $x$  e  $y$ , debido a que la baldosa asociada a estos grafos se corresponde con la asociada al grafo óptimo de la manera que se ha indicado anteriormente, se utilizará el “subárbol” de encaminamiento,  $T_{\rho_D}$ , obtenido al restringir a dicha baldosa el árbol  $T_\rho$  del encaminamiento  $\rho$  con origen en el vértice 0; véase la Figura 2.32.

Dado que la eliminación de vértices que aparecen con grado 1 en  $T_{\rho_D}$  no

afecta a los caminos dados por  $\rho_D$  entre los restantes vértices, se tiene la siguiente proposición, que se demostraría de forma análoga a la Proposición 2.2.

**Proposición 2.8** *El vértice cero es  $(\rho_D, F)$ -central para todo subconjunto  $F$  de  $V_F$ , siendo  $V_F$  el conjunto de vértices que tienen grado 1 en  $T_{\rho_D}$ . Además:*

$$|V_F| = \begin{cases} 4k - 1 & \text{si } s = 1 \\ 4k - 2 & \text{si } 2 \leq s \leq k \\ 4k - 3 & \text{si } k + 1 \leq s \leq 2k \\ 4k - 4 & \text{si } s = 2k + 1 \\ 4k - 5 & \text{si } s = 2k + 2 \\ 4k - 4 & \text{si } 2k + 3 \leq s \leq 4k - 1. \end{cases}$$

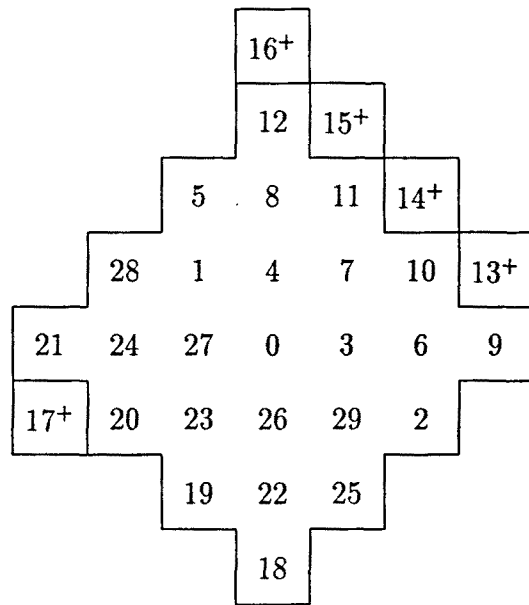


Figura 2.31: Baldosa asociada al grafo  $D_{30}(3,4)$  construida a partir de la asociada al grafo  $D_{25}(3,4)$ .

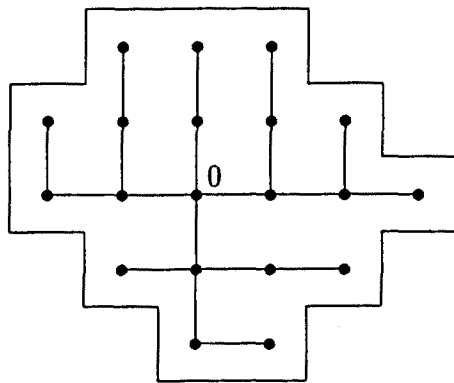


Figura 2.32: Arbol  $T_{\rho_D}$  del encaminamiento.



## Capítulo 3

# Vulnerabilidad del encaminamiento en grafos de triple lazo

### 3.1 Grafos de triple lazo

Sea un grafo  $G = (V, E)$  con conjunto de vértices  $V = \mathbb{Z}_N$ . Se dice que  $G$  es un *grafo de triple lazo* si cada vértice  $i$  es adyacente a los vértices  $i \pm a, i \pm b, i \pm c$ , (mod  $N$ ), donde  $a, b$  son enteros distintos tales que  $1 \leq a, b \leq \lfloor \frac{N}{2} \rfloor$  y  $c = -(a+b)$ . Estos grafos los denotaremos por  $T_N(a, b, c)$ . Para su representación tomaremos el modelo geométrico que se muestra en la Figura 3.1.

Al igual que los grafos de doble lazo, los de triple lazo son también vértice-simétricos debido al automorfismo  $i \mapsto i + \alpha, 1 \leq \alpha \leq N - 1$ . Esto nos permite formular el estudio que sigue a partir de cualquier vértice; por comodidad lo haremos desde el cero. Por otro lado, estos grafos son conexos si y sólo si:

$$\text{mcd}(a, b, c, N) = \text{mcd}(a, b, N) = 1. \quad (3.1)$$

Notemos que el orden máximo de un grafo de triple lazo con diámetro  $k$  es:

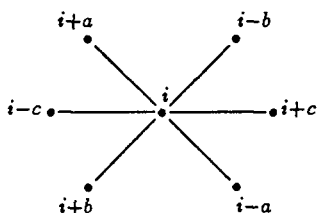


Figura 3.1: Representación geométrica de los vértices adyacentes a un  $i$ .

$$N_k = 1 + 6 + 12 + \dots + 6k = 3k^2 + 3k + 1. \quad (3.2)$$

Si a cada vértice le asociamos un hexágono, los vértices que alcanzamos sucesivamente a partir del 0 pueden situarse en el plano tal como muestra la Figura 3.2, [38], [28].

En el caso en que  $\text{mcd}(a, b, N_k) = 1$  con  $N_k = 3k^2 + 3k + 1$ , la baldosa óptima que tesela el plano es la de la Figura 3.3 y las ecuaciones para la distribución de ceros son:

$$\begin{aligned} kc - (k+1)b &\equiv 0 \pmod{N_k} \\ (k+1)a - kb &\equiv 0 \pmod{N_k} \\ a + b + c &\equiv 0 \pmod{N_k} \end{aligned} \quad (3.3)$$

o equivalentemente:

$$\begin{aligned} -ka - (2k+1)b &\equiv 0 \pmod{N_k} \\ (k+1)a - kb &\equiv 0 \pmod{N_k}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

El sistema (3.3) tiene soluciones no triviales ya que el determinante de la matriz de coeficientes es:

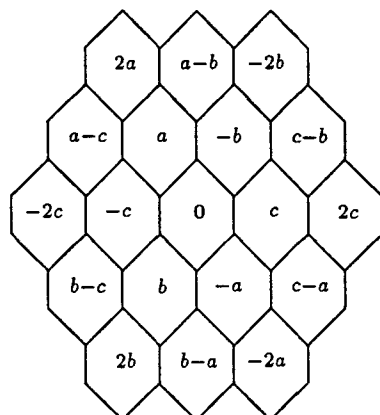


Figura 3.2: Conjunto de vértices que pueden alcanzarse desde el 0 en dos o menos pasos.

$$3k^2 + 3k + 1 \equiv 0 \pmod{N_k} \tag{3.5}$$

y las soluciones vienen dadas por:

$$(a, b, c) = (\alpha, \beta, \gamma) \begin{pmatrix} k^2 & k(k+1) & (k+1)^2 \\ 2k+1 & -k & -k-1 \\ k & k+1 & -2k-1 \end{pmatrix} \tag{3.6}$$

para  $\alpha, \beta, \gamma$  enteros cualesquiera. Por ejemplo, para  $\alpha = 0, \beta = 1$  y  $\gamma = 1$  obtenemos la solución:

$$a = 3k + 1, \quad b = 1, \quad c = -3k - 2,$$

que trivialmente satisface la condición (3.1) y además muestra la estructura de triple lazo ya que

$$\text{mcd}(a, N_k) = \text{mcd}(b, N_k) = \text{mcd}(c, N_k) = 1.$$

Si en vez de trabajar con el sistema (3.3) se trabaja con el (3.4), las soluciones son de la forma:

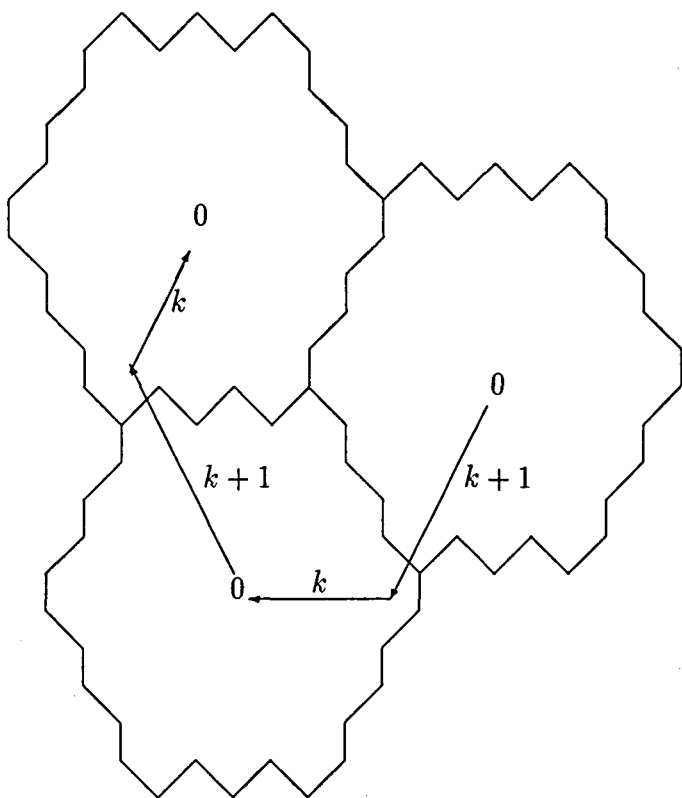


Figura 3.3: Baldosa óptima asociada al grafo de triple lazo con diámetro  $k$ ,  $T_{N_k}(a, b, c)$ .

$$(a, b) = (\alpha, \beta) \begin{pmatrix} -k & -(k+1) \\ 2k+1 & -k \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

para  $\alpha, \beta$  enteros cualesquiera. Notemos que para  $\alpha = -1$  y  $\beta = 1$  se recupera la solución anterior:

$$a = 3k + 1, \quad b = 1.$$

En el resto del capítulo se considerarán grafos de triple lazo óptimos, esto es, con diámetro  $k$  y orden máximo dependiente de  $k$ ,  $N_k = 3k^2 + 3k + 1$ .

## 3.2 Encaminamiento en grafos de triple lazo óptimos

A la hora de definir un encaminamiento  $\rho$  en este tipo de grafos, utilizaremos la propiedad de que son vértice-simétricos y de esta forma sólo definiremos  $\rho(0, y)$  para todo  $y \in V$ , con lo que  $\rho(x, y)$  quedará definido a partir de  $\rho(0, y - x)$ . El encaminamiento  $\rho$  se definirá bidireccional y de longitud mínima.

A partir de ahora los vértices del grafo de triple lazo  $T_{N_k}(a, b, c)$  los representaremos por ternas de números enteros de manera que el primer elemento de la terna hará referencia a la dirección del paso  $a$ , el segundo elemento a la dirección del paso  $b$  y el tercero a la del paso  $c$ . Entonces, notemos que para ir desde el vértice  $0$  a un vértice  $z$  con el menor número posible de pasos nos tendremos que mover sólo en dos direcciones y, por tanto, a excepción del vértice  $0$ , todos los vértices del grafo  $T_{N_k}(a, b, c)$  se representarán como una terna que como mínimo tendrá un elemento nulo.

**Definición 3.1** 1. Dado  $z = (0, n, p)$ ,  $n \leq 0$ ,  $p \geq 0$ , se define el camino desde el vértice  $0$  al vértice  $z$  como:

$$\rho(0, z) = c_0 \cdots c_i \cdots b_0 \cdots b_j \cdots b_n$$

donde

$$\begin{aligned} c_i &= ic \pmod{N_k} & \text{con } 0 \leq i \leq p \\ b_j &= c_p - jb \pmod{N_k} & 0 \leq j \leq -n. \end{aligned}$$

2. Dado  $z = (m, n, 0)$ ,  $m > 0$ ,  $n < 0$ , se define el camino desde el vértice 0 al vértice  $z$  como:

$$\rho(0, z) = a_0 \cdots a_i \cdots b_0 \cdots b_j \cdots b_n$$

donde

$$\begin{aligned} a_i &= ia \pmod{N_k} & \text{con } 0 \leq i \leq m \\ b_j &= a_m - jb \pmod{N_k} & 0 \leq j \leq -n. \end{aligned}$$

3. Y, finalmente, dado  $z = (m, 0, p)$ ,  $m > 0$ ,  $p < 0$ , se define el camino desde el vértice 0 al vértice  $z$  como:

$$\rho(0, z) = c_0 \cdots c_i \cdots a_0 \cdots a_j \cdots a_m$$

donde

$$\begin{aligned} c_i &= -ic \pmod{N_k} & \text{con } 0 \leq i \leq -p \\ a_j &= c_p + ja \pmod{N_k} & 0 \leq j \leq m. \end{aligned}$$

Observemos que como  $\rho$  debe ser bidireccional:

$$\rho(0, z) = \rho(z, 0),$$

y por otra parte,  $\rho(z, 0)$  determina  $\rho(0, -z)$ , siendo  $-z$  el simétrico de  $z$ .

De esta forma una vez definido como ir de 0 a  $z$  queda también definido el camino desde 0 al simétrico de  $z$ . Por tanto, ya se ha asignado un camino a cada par de vértices  $x, y$  del grafo de triple lazo  $T_{N_k}(a, b, c)$ . Al considerar todos estos caminos desde el vértice 0, se obtiene el árbol  $T_\rho$  del encaminamiento  $\rho$  de la Figura 3.4.

### 3.3 Resultados

Al igual que en el caso de grafos de doble lazo, en esta sección se presentan algunos resultados sobre la vulnerabilidad del encaminamiento  $\rho$  definido anteriormente.

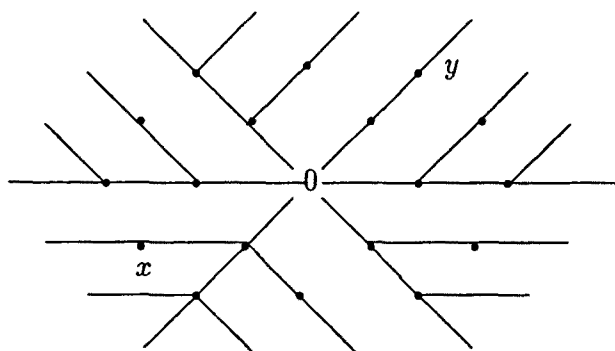


Figura 3.4: Árbol,  $T_\rho$ , del encaminamiento  $\rho$  en el grafo  $T_{N_k}(a, b, c)$ .

En los dos primeros se determina un conjunto, de vértices y de ramas respectivamente, cuya supresión no afecta a la comunicación en la red. Y en el tercero se demuestra que en el caso de que en la red fallen dos vértices, existe al menos un vértice  $(\rho, F)$ -central.

**Proposición 3.1** *El vértice cero es  $(\rho, F)$ -central para todo subconjunto  $F$  de  $V_F$ , donde:*

$$V_F = \{z = (0, n, p) : |n| + |p| = k\} \cup \{z = (m, n, 0) : |m| + |n| = k\} \\ \cup \{z = (m, 0, p) : |m| + |p| = k\}.$$

#### DEMOSTRACIÓN

A partir de la estructura que tienen los vértices de  $V_F$ , se observa que éstos forman la frontera de la baldosa asociada al grafo  $T_{N_k}(a, b, c)$  centrada en el vértice 0; nótese que el número de vértices de dicha frontera es  $6k$ .

Según el árbol del encaminamiento representado en la Figura 3.4 vemos que para cualesquiera dos vértices  $x, y$  del grafo existen los caminos  $\rho(x, 0)$  y  $\rho(0, y)$  que no contienen ningún vértice de  $V_F$ . Es decir, el camino entre el vértice  $x$  y el vértice  $y$ ,  $\rho(x, 0)\rho(0, y)$ , evita  $V_F$ . En particular, evita  $F \subset V_F$ . Así pues, el vértice 0 es  $(\rho, F)$ -central.

□

En general, dado un vértice cualquiera  $c$  del grafo de triple lazo  $T_{N_k}(a, b, c)$ , considerando por medio de una traslación la baldosa centrada en  $c$ , se tiene que  $c$  es  $(\rho, F)$ -central para cualquier subconjunto de vértices pertenecientes a la frontera de dicha baldosa.

Por otra parte, debido al hecho de que el encaminamiento  $\rho$  puede ser interpretado como un árbol en  $T_{N_k}(a, b, c)$ , resulta fácil ver cuál es el conjunto de ramas,  $E_F$ , en este grafo, que pueden fallar de manera que el vértice 0 sea  $(\rho, E_F)$ -central. Para ello, nótese que si llamamos  $E_F$  al conjunto de todas las ramas del grafo que no pertenecen al árbol  $\rho$ , se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 3.2** *El vértice 0 es  $(\rho, F)$ -central para todo subconjunto  $F$  de  $E_F = E \setminus A$ , con*

$$A = \{ uv : \exists(x, y) \in V / uv \in \rho(x, y) \}.$$

En la Figura 3.5 aparece representado el encaminamiento  $\rho$  y el conjunto  $E_F$ . Las ramas que forman parte del encaminamiento aparecen dibujadas con líneas que tocan a los vértices y las de  $E_F$  con líneas que no tocan al vértice.

Observemos que el número máximo de ramas del grafo que pueden fallar de forma simultánea de manera que el vértice 0 sea  $(\rho, F)$ -central es:

$$\begin{aligned} |E_F| &\leq |B| + |C| + |D| + |B'| + |C'| + |D'| \\ &= (k^2 + k + 3) + (k^2 + k + 2) + (k^2 + 2k) + k^2 + k^2 + k^2 \\ &= 6k^2 + 4k + 5. \end{aligned}$$

Nótese que, al igual que lo que ocurría con la proposición anterior, si consideramos por medio de una traslación la baldosa centrada en un vértice cualquiera  $c$  del grafo  $T_{N_k}(a, b, c)$  se tiene que  $c$  es  $(\rho, F)$ -central para cualquier subconjunto  $F$  de  $E_F$ .

**Proposición 3.3** *Para todo conjunto  $V_F$  de dos vértices del grafo  $T_{N_k}(a, b, c)$  existe el vértice  $t$  que es  $(\rho, V_F)$ -central.*



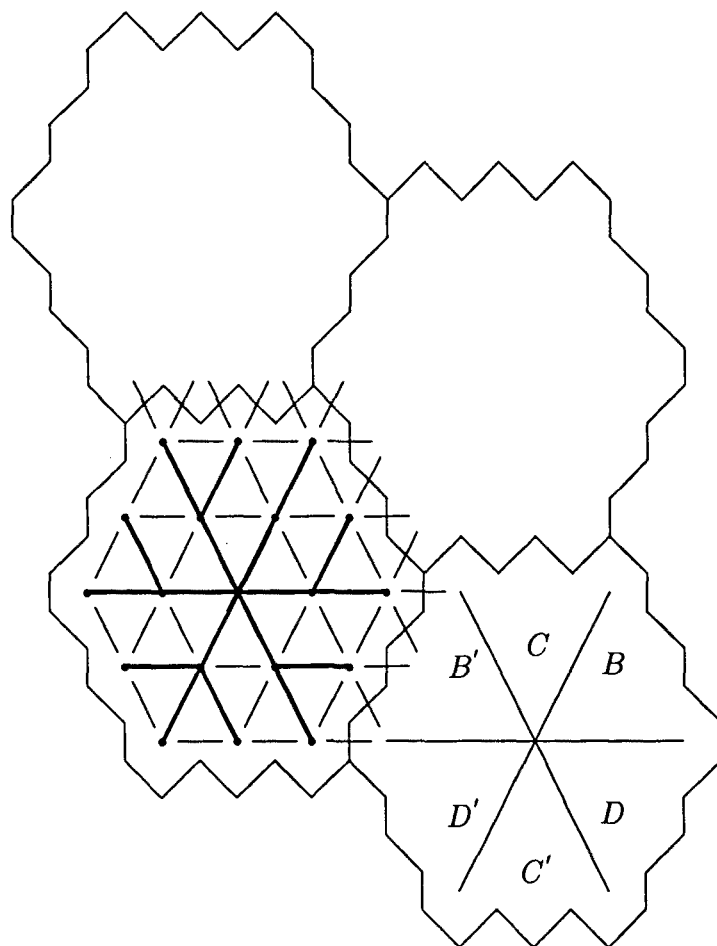


Figura 3.5: Conjunto de ramas  $E_F = E \setminus A = B \cup C \cup D \cup B' \cup C' \cup D'$ .

## DEMOSTRACIÓN

Sea  $V_F = \{v_1, v_2\}$  y supongamos que entre  $v_1$  y  $v_2$  existen  $r$  pasos “tipo  $a$ ” y  $s$  pasos “tipo  $b$ ” con  $r$  y  $s$  enteros positivos menores o iguales que  $k$ .

Análogo razonamiento se podría utilizar para demostrar el caso en que entre  $v_1$  y  $v_2$  existan  $r$  pasos “tipo  $a$ ” y  $s$  pasos “tipo  $c$ ” o  $r$  pasos “tipo  $b$ ” y  $s$  pasos “tipo  $c$ ”.

La demostración consiste en ver que dados dos vértices cualesquiera  $v_1, v_2$  siempre es posible centrar la baldosa asociada al grafo  $T_{N_k}(a, b, c)$  de manera que ésta contenga en su frontera a  $v_1$  y  $v_2$ . De esta forma, sabemos por la proposición anterior que el vértice situado en el centro de la baldosa es  $(\rho, V_F)$ -central para  $v_1$  y  $v_2$ .

Primero notemos que las ternas  $(\alpha, \beta, \gamma)$  asociadas a los vértices situados en la frontera de la baldosa cumplen las condiciones que se dan en la Figura 3.6.

Supongamos que  $v_1$  y  $v_2$  son los de la Figura 3.7. Por la situación de  $v_1$  y  $v_2$  en la frontera de la baldosa se tiene:

$$k - n_1 = p_1, \quad k - p_2 = m_2.$$

A partir del encaminamiento  $\rho$  definido en el grafo tenemos:

$$ra + (n_1 - s)b - p_1c = m_2a - p_2c.$$

Sustituyendo  $b = -(a + c)$  y agrupando se obtiene:

$$(r - n_1 + s)a + (s - n_1 - p_1)c = m_2a - p_2c.$$

De donde,

$$\begin{aligned} r - n_1 + s &= m_2 \\ s - n_1 - p_1 &= -p_2. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Resolviendo (3.8) teniendo en cuenta que  $n_1 + p_1 = k$ , se obtiene como solución:

$$n_1 = r$$

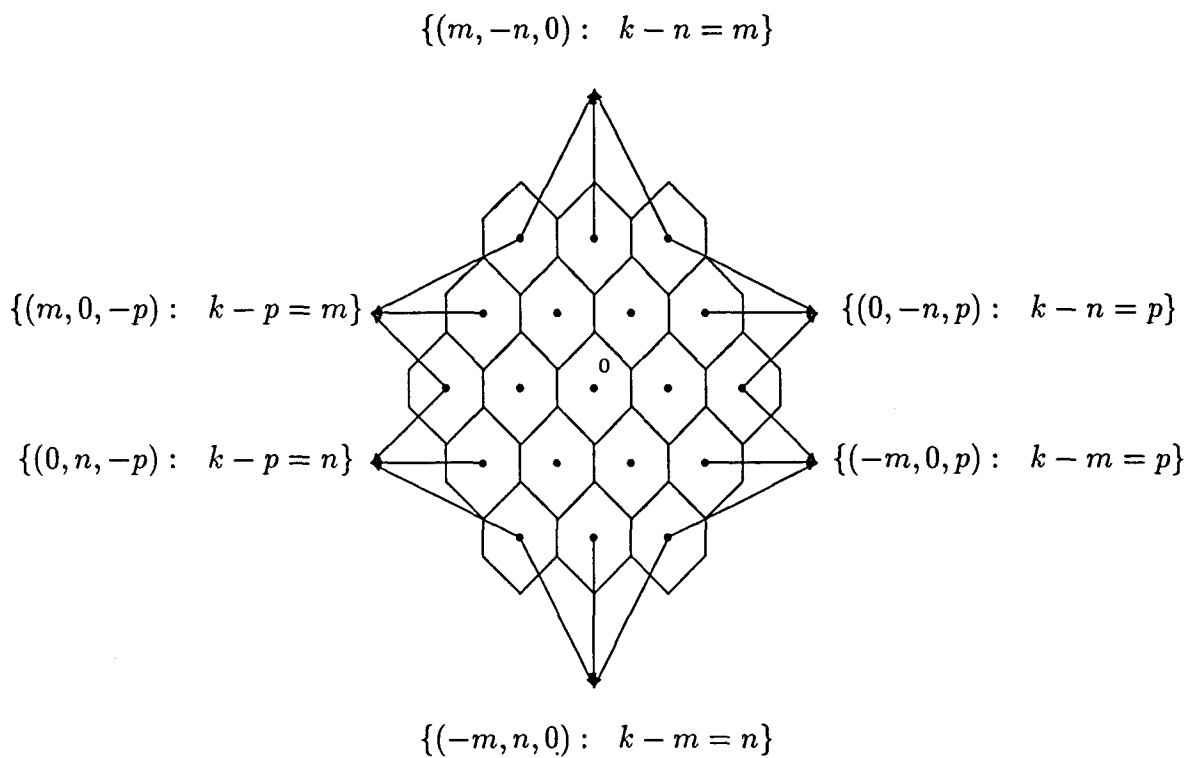


Figura 3.6: Ecuación que cumplen los vértices a distancia  $k$  del 0.

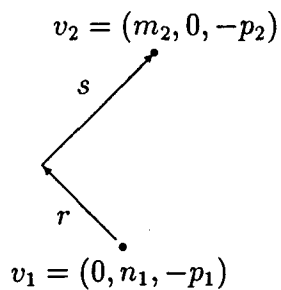


Figura 3.7:  $V_F = \{v_1, v_2\}$  en la frontera.

$$\begin{aligned}
p_1 &= k - r \\
m_2 &= s \\
p_2 &= k - s.
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Por tanto, las coordenadas de  $v_1$  y  $v_2$  en la frontera de la baldosa son:

$$\begin{aligned}
v_1 &= (0, r, r - k) \\
v_2 &= (s, 0, s - k).
\end{aligned} \tag{3.10}$$

A partir de (3.10) y conocidos los pasos  $a$ ,  $b$  y  $c$  del grafo, se pueden determinar las coordenadas del vértice  $t = (t_1, t_2, t_3)$  situado en el centro de la baldosa. Por la proposición anterior,  $t$  es vértice  $(\rho, V_F)$ -central.

Nótese que si  $r$  o  $s$  fuesen cero (p.e.  $r = 0$ ), una de las posibles soluciones para  $v_1$  y  $v_2$  en la frontera de la baldosa sería:

$$\begin{aligned}
v_1 &= (m_1, 0, -p_1), \quad k - p_1 = m_1 \\
v_2 &= (m_2, 0, -p_2), \quad k - p_2 = m_2
\end{aligned}$$

y entonces, a partir del encaminamiento  $\rho$  se tiene:

$$m_1 a - s b - p_1 c = m_2 a - p_2 c$$

de donde, teniendo en cuenta que  $b = -(a + c)$ , se obtiene:

$$(m_1 + s)a + (s - p_1)c = m_2 a - p_2 c,$$

es decir,

$$\begin{aligned}
m_1 + s &= m_2 \\
s - p_1 &= -p_2.
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Resolviendo (3.11), se tiene que las coordenadas de  $v_1$  y  $v_2$  en la frontera de la baldosa son de la forma:

$$\begin{aligned}
v_1 &= (m_1, 0, -p_1) \\
v_2 &= (m_1 + s, 0, -p_1 + s) \text{ con } k - p_1 = m_1, \quad 0 \leq m_1 \leq k - s.
\end{aligned} \tag{3.12}$$

En total, tenemos  $k - s + 1$  posibilidades para  $v_1$  y  $v_2$ . Para cada una de ellas, a partir de (3.12) y conocidos los pasos  $a$ ,  $b$  y  $c$  del grafo, se calculan de forma fácil las coordenadas del vértice  $t = (t_1, t_2, t_3)$  que se corresponde con el centro de la baldosa.

□

**Ejemplo 3.1** Dado el grafo de triple lazo  $T_{N_3}(10, 1, 26)$  y  $V_F = \{v_1 = 28, v_2 = 36\}$ , calcular las coordenadas del vértice  $(\rho, V_F)$ -central,  $t$ .

A partir de la baldosa correspondiente al grafo  $T_{N_3}(10, 1, 26)$  centrada en el vértice 0, se tiene (véase la Figura 3.8):

$$r = 1, \quad s = 2.$$

Por tanto, las coordenadas de los vértices de  $V_F$  en la frontera de la baldosa centrada en el vértice  $t$  son:

$$v_1 = (0, r, r - k) = (0, 1, -2), \quad v_2 = (s, 0, s - k) = (2, 0, -1).$$

A partir de estas coordenadas y conocidos los pasos  $a = 10$ ,  $b = 1$  y  $c = 26$ , se puede ver de la Figura 3.8 que el vértice  $t = 5$  es  $(\rho, V_F)$ -central.

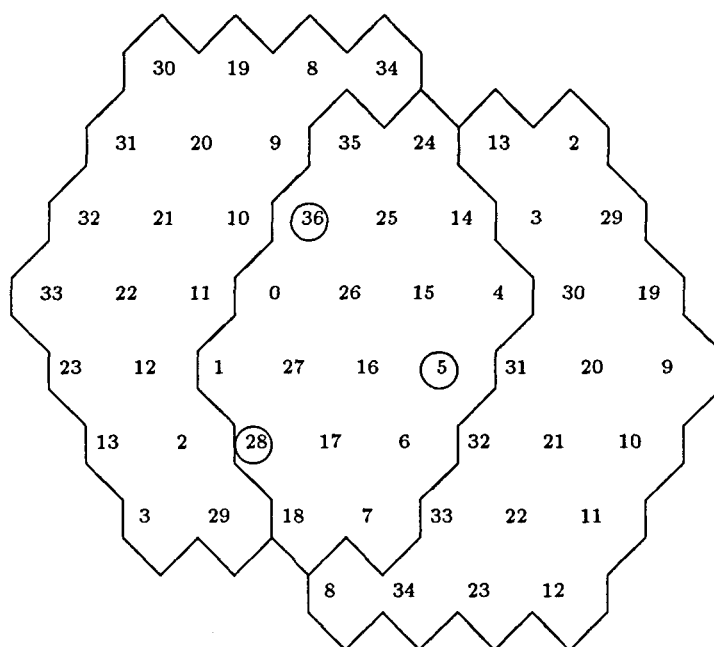


Figura 3.8: Baldosa asociada al grafo  $T_{N_3}(10, 1, 26)$ .

# Capítulo 4

## Vulnerabilidad del encaminamiento en los digrafos bipartitos $BD(a, b, c, d)$

### 4.1 Digrafos bipartitos $BD(a, b, c, d)$

En esta sección consideraremos digrafos bipartitos con conjunto de vértices  $V = V_0 \cup V_1$ ,  $V_0 = \{0, 2, 4, \dots, N-2\}$ ,  $V_1 = \{1, 3, 5, \dots, N-1\}$ , y donde cada vértice  $i \in V_0$  es adyacente a los vértices:

$$i + a, i + b \pmod{N} \in V_1,$$

con  $a$  y  $b$  impares distintos y cada vértice  $j \in V_1$  es adyacente a los vértices:

$$j + c, j + d \pmod{N} \in V_0,$$

con  $c$  y  $d$  impares distintos, cumpliéndose:

$$a + b + c + d \equiv 0 \pmod{N}. \tag{4.1}$$

Estos digrafos los denotaremos por  $BD(a, b, c, d)$ . Para su representación tomaremos el modelo geométrico de la Figura 4.1.

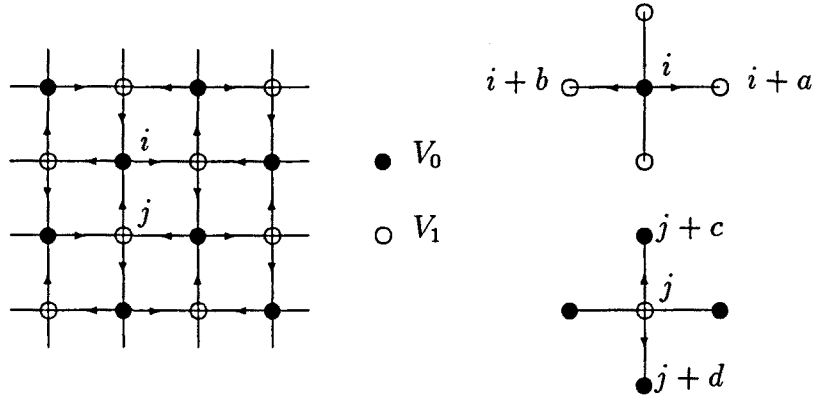


Figura 4.1: Representación geométrica de las adyacencias en  $BD(a, b, c, d)$ .

Puesto que estos digrafos son bipartitos, los vértices de  $V_0$  están a distancias pares desde el vértice 0, mientras que los de  $V_1$  están a distancias impares. Por tanto, el orden máximo,  $N_k$ , de un digrafo con diámetro  $k$ , es el doble del número de vértices en  $V_0$  (cuando  $k$  es impar) o  $V_1$  (cuando  $k$  es par) a distancia  $\leq k - 1$  del vértice 0. Ya que existen  $2p$  vértices a distancia  $p > 1$  del 0, se tiene, con  $p = 2n$ ,

$$N_k = 2\left(1 + \sum_{n=1}^r 4n\right) = 2(2r^2 + 2r + 1) = k^2 + 1, \quad (4.2)$$

cuando  $k = 2r + 1$  es impar y, con  $p = 2n - 1$ ,

$$N_k = 2\left(\sum_{n=1}^r (4n - 2)\right) = 4r^2 = k^2, \quad (4.3)$$

cuando  $k = 2r$  es par.

Nótese que como consecuencia de (4.1), entre vértices de  $V_0$  o  $V_1$  estamos usando pasos,  $\pm A, \pm B$  dados por:

$$A = a + c = -(b + d) \text{ y } B = b + c = -(a + d). \quad (4.4)$$

El digrafo es conexo si y sólo si todos los vértices pares pueden alcanzarse desde el 0, y esto ocurre si y sólo si:

$$\text{mcd}(A, B, N) = 2. \quad (4.5)$$



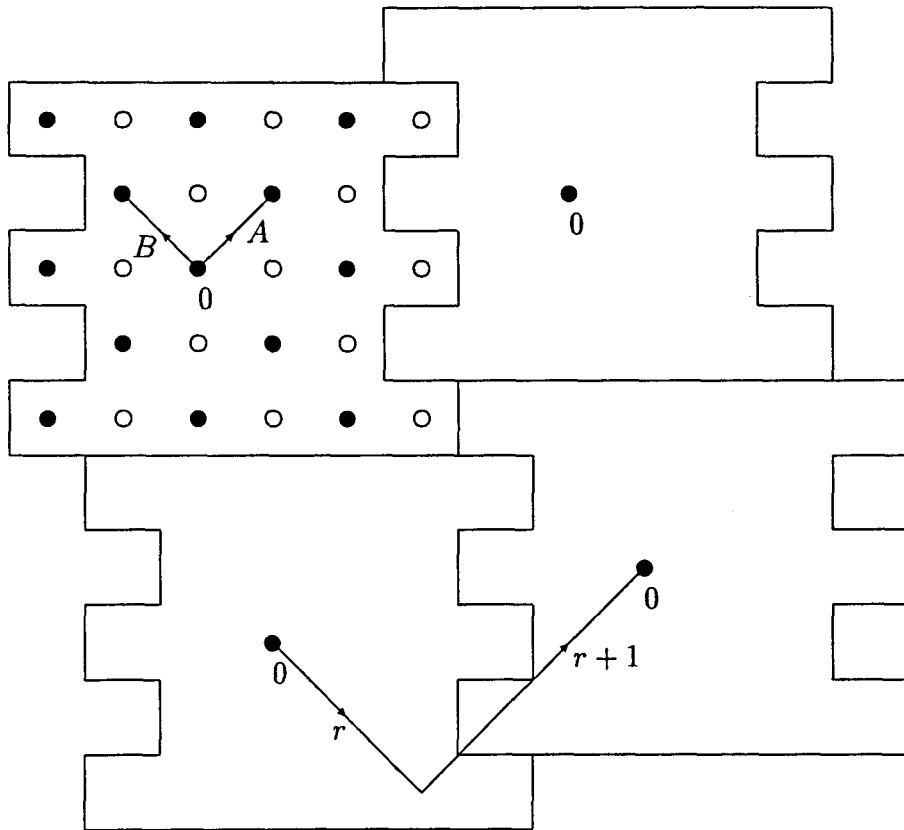


Figura 4.2: Baldosa asociada al digrafo  $BD(a, b, c, d)$  de diámetro  $k = 2r + 1$ .

Esta observación sugiere aplicar los resultados de la sección 2.1.

Cuando  $k = 2r + 1$ , usando los  $r$  pasos dobles  $A, B$  se alcanzan los  $2r^2 + 2r + 1$  vértices pares y desde éstos, con pasos  $a$  (o  $b$ ) se alcanzan todos los vértices impares.

Por ejemplo, podemos tomar:

$$A = 2r = k - 1, \quad B = 2(r + 1) = k + 1,$$

que trivialmente satisfacen (4.5) y fijando  $b = 1$ , de (4.4) se obtiene:

$$a = -1, \quad b = 1, \quad c = k, \quad d = -k.$$

La teselación del plano que se obtiene con estos pasos se muestra en la Figura 4.2 [29], [28].

Cuando  $k = 2r$ , se obtiene la teselación de la Figura 4.3. Las ecuaciones para la distribución de ceros son:

$$\begin{aligned} rA - (r+1)B &\equiv 0 \pmod{N_k} \\ rA + (r-1)B &\equiv 0 \pmod{N_k}, \end{aligned} \quad (4.6)$$

y las soluciones vienen dadas por:

$$(A, B) = 2(\alpha, \beta) \begin{pmatrix} r-1 & -r \\ r+1 & r \end{pmatrix},$$

para cualesquiera  $\alpha$  y  $\beta$  enteros. Por ejemplo,

$$A = 2r + 2 = k + 2, \quad B = 2r = k,$$

satisfacen (4.5) y de (4.4) se puede obtener:

$$a = 1, \quad b = -1, \quad c = k + 1, \quad d = -(k + 1).$$

Tanto para el caso de diámetro par como para el caso de diámetro impar, los digrafos óptimos encontrados son vértice-simétricos debido a los automorfismos  $i \mapsto i + \alpha$ , para  $\alpha$  par. Por tanto, y al igual que ocurría en el caso de grafos de doble lazo, no supone ninguna restricción hacer todo el estudio a partir del vértice 0.

Notemos a partir de las Figuras 4.4 y 4.5 que, considerando únicamente el conjunto de vértices pares (o impares) del digrafo  $BD(a, b, c, d)$  y pasos  $A = a + c$  y  $B = b + c$ , se obtiene lo siguiente:

- Si el diámetro de  $BD(a, b, c, d)$  es impar,  $k = 2r + 1$ , el conjunto de vértices pares determina un grafo de doble lazo con pasos  $A$  y  $B$ , diámetro  $r$  y orden máximo dependiente de  $r$ ,  $N_r = 2r^2 + 2r + 1 = \frac{k^2+1}{2}$ .
- Si el diámetro de  $BD(a, b, c, d)$  es par,  $k = 2r$ , se obtiene un grafo de doble lazo con pasos  $A$  y  $B$ , diámetro  $r$  y orden  $N_r = \frac{k^2}{2}$ . Nótese que, en este caso, el grafo de doble lazo no tiene orden máximo, ya que,  $N_r = 2r^2 < 2r^2 + 2r + 1$ . En ambos casos al grafo de doble lazo lo denotaremos por  $D_{N_r}(A, B)$ .

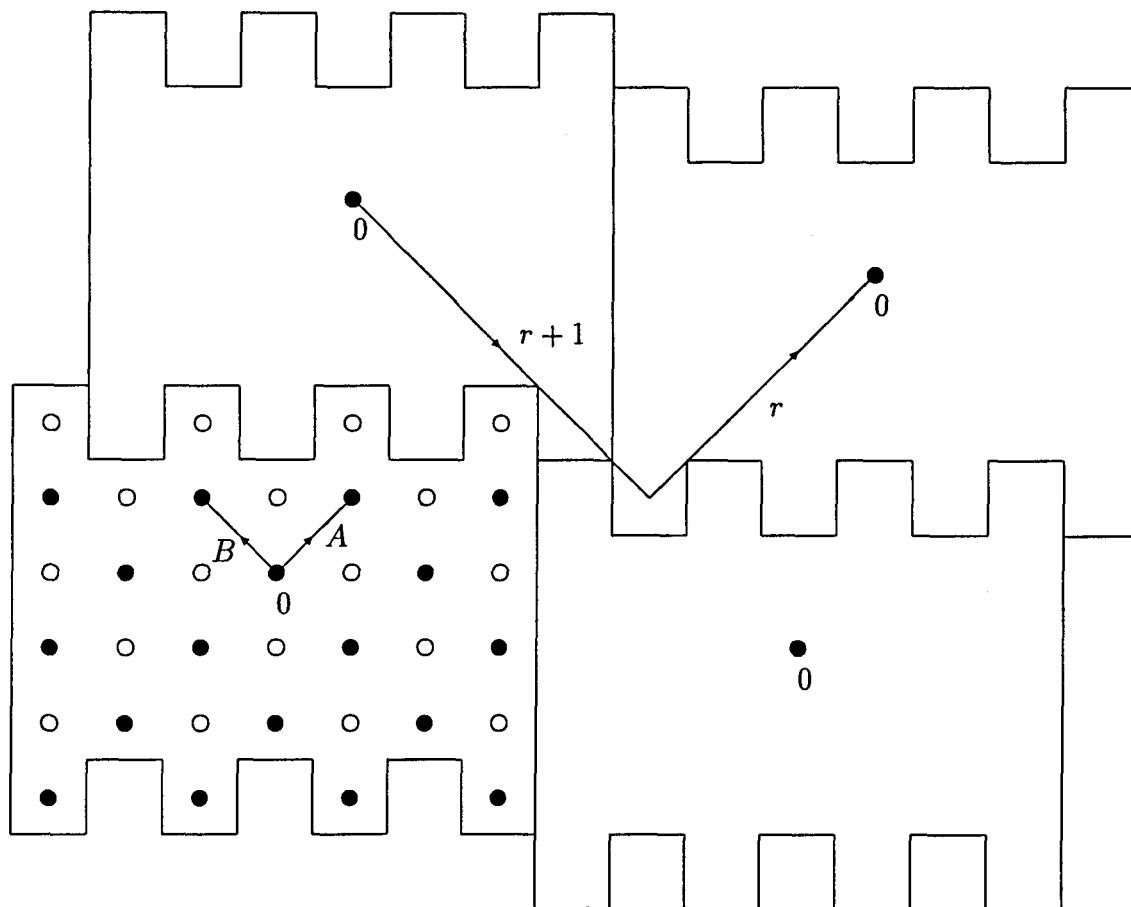


Figura 4.3: Baldosa asociada al digrafo  $BD(a, b, c, d)$  de diámetro  $k = 2r$ .

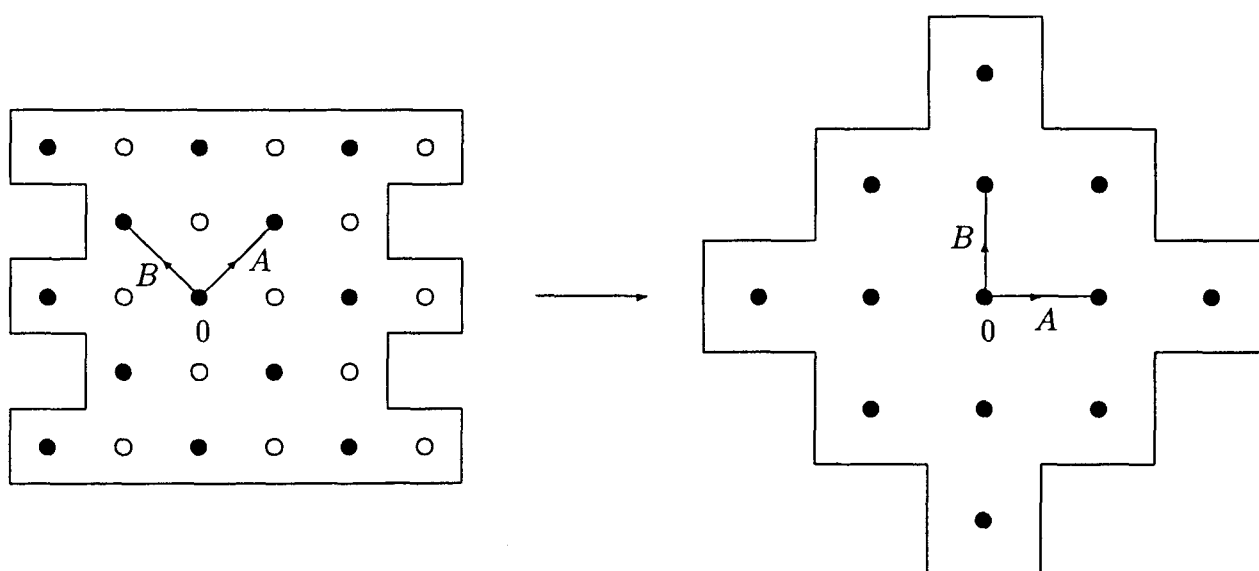


Figura 4.4: Obtención del grafo de doble lazo  $D_{N_r}(A, B)$  a partir del digrafo  $BD(a, b, c, d)$  con diámetro  $k = 2r + 1$ .

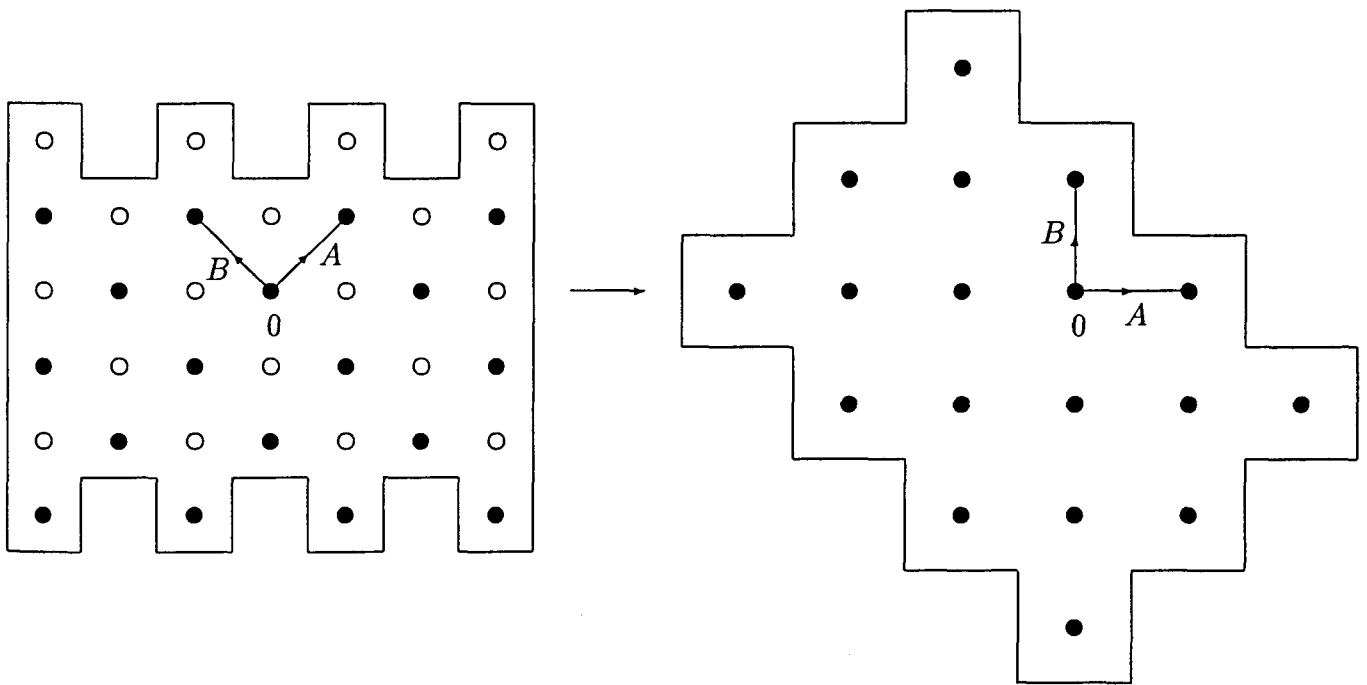


Figura 4.5: Obtención del grafo de doble lazo  $D_{N_r}(A, B)$  a partir del digrafo  $BD(a, b, c, d)$  con diámetro  $k = 2r$ .

En la próxima sección, utilizando el hecho de que en  $BD(a, b, c, d)$  con diámetro impar, el conjunto de vértices pares determina un grafo de doble lazo óptimo, se van a calcular las coordenadas de los vértices del digrafo bipartito, referidas al vértice  $(0, 0)$ , en la baldosa de la Figura 4.2.

La idea será calcular las coordenadas de los vértices pares en la baldosa asociada a  $D_{N_r}$  y luego, teniendo en cuenta que  $A = a + c$  y  $B = b + c$ , traducirlas a la baldosa asociada a  $BD(a, b, c, d)$ . Lógicamente, cuando el vértice  $z$  sea impar, se calcularán las coordenadas del par  $z + c$  y luego se restará un paso  $c$ .

## 4.2 Coordenadas de los vértices en $BD(a, b, c, d)$ con diámetro impar

Por la Proposición 2.1 del capítulo correspondiente a grafos de doble lazo, se sabe que si  $q^* = [zM^{-1}]$ , entonces  $(m, n) = z - q^*M$  son las coordenadas de  $z$  respecto a  $(0, 0)$  en la baldosa asociada al grafo de doble lazo óptimo  $D_{N_k}(a, b)$ . Recordemos que el vértice  $z$  se identificaba con el par  $(\alpha, \beta)$  tal que:

$$\alpha a + \beta b = z,$$

y que se cumplía la condición:

$$(a, b, N_k) = 1.$$

Además,  $M$  era la matriz que caracterizaba la distribución de los ceros.

En el caso de  $BD(a, b, c, d)$  con diámetro impar  $k = 2r + 1$ , se tiene la condición:

$$(A, B, N_k) = 2.$$

Por tanto, para poder aplicar la Proposición 2.1, interesará trabajar con  $\frac{A}{2}$ ,  $\frac{B}{2}$  ya que se cumple:

$$\left(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, N_k\right) = 1,$$

e identificar el vértice  $z$  con el par  $(\alpha, \beta)$  que cumpla:

$$\alpha \frac{A}{2} + \beta \frac{B}{2} = z.$$

De la Figura 4.2 notemos que si se trabaja con  $\frac{A}{2}$  y  $\frac{B}{2}$ , la matriz  $M$  que nos da la distribución de los ceros es:

$$M = \begin{pmatrix} 2r & 2(r+1) \\ -2(r+1) & 2r \end{pmatrix},$$

y que por tanto,  $(m, n) = (\alpha, \beta) - q^* M$  serán las coordenadas del vértice  $z$  en la baldosa asociada al grafo de doble lazo  $D_{N_r}(A, B)$ , pero en términos de  $\frac{A}{2}$  y  $\frac{B}{2}$ . Así, dividiendo por 2, tendremos las coordenadas de  $z$  en función de los pasos  $A$  y  $B$ . Finalmente, sustituyendo  $A = a + c$  y  $B = b + c$ , se tendrán las coordenadas de  $z$  referidas a  $(0, 0)$  en la baldosa asociada a  $BD(a, b, c, d)$ .

**Ejemplo 4.1** *Cálculo de las coordenadas de  $z = 10$  conocidos los pasos  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 5$  y  $d = -5$  del digrafo bipartito  $BD(-1, 1, 5, -5)$  de diámetro 5 y orden  $N_5 = 26$ .*

A partir de  $a = -1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 5$  y  $d = -5$ , se tiene:

$$A = a + c = 4 \text{ y } B = b + c = 6.$$

Consideremos  $\frac{A}{2} = 2$  y  $\frac{B}{2} = 3$ . Como  $(\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, N_k) = (2, 3, 26) = 1$ , a partir de la identidad de Bezout se tiene:

$$-1 \cdot 2 + 1 \cdot 3 \equiv 1 \pmod{26}.$$

Multiplicando esta última expresión por  $z = 10$ :

$$10 = -10 \cdot 2 + 10 \cdot 3.$$

Por lo tanto, el vértice  $z = 10$  se identifica con el par  $(-10, 10)$ .

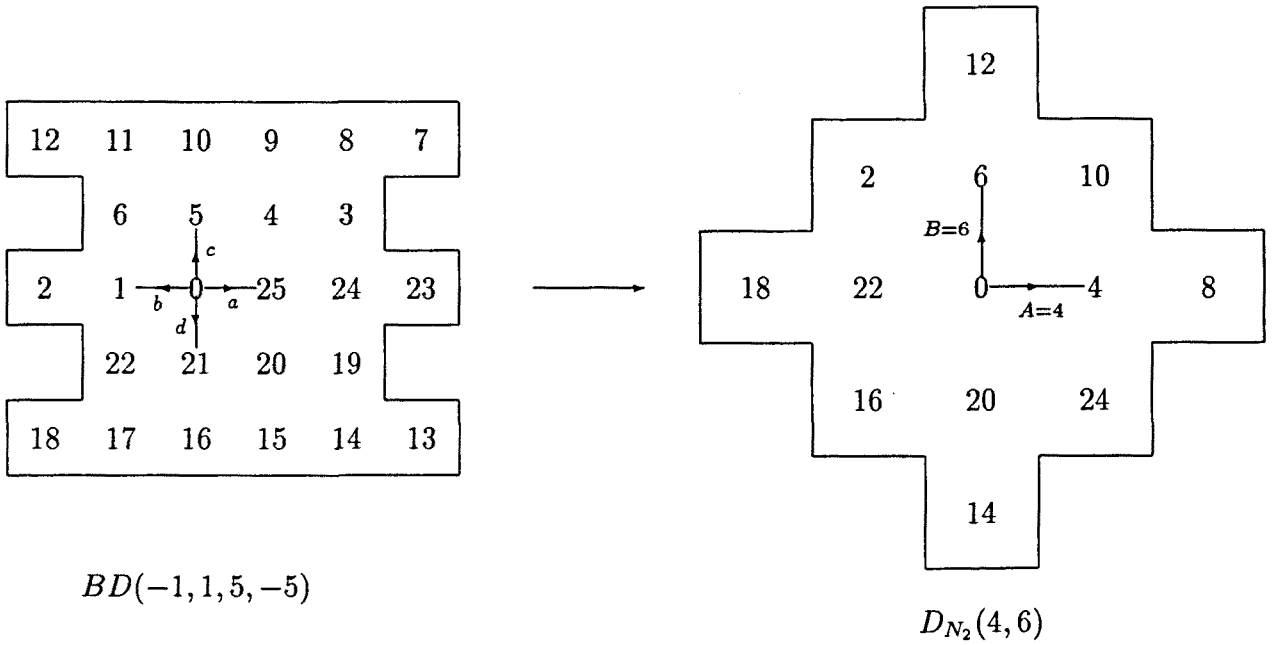


Figura 4.6:  $DN_2(4, 5)$  a partir de  $BD(-1, 1, 5, -5)$ .

A partir de:

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ -6 & 4 \end{pmatrix}, \tag{4.7}$$

calculamos:

$$(\alpha, \beta)M^{-1} = (-10, 10) \frac{1}{52} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \left( \frac{5}{13}, \frac{25}{13} \right).$$

Tomando,  $q^* = [(\alpha, \beta)M^{-1}] = (0, 2)$ , se obtiene:

$$r = (\alpha, \beta) - q^*M = (2, 2).$$

Por tanto,  $(1, 1)$  son las coordenadas del vértice  $z = 10$ , referidas al  $(0, 0)$ , en la baldosa asociada al grafo de doble lazo  $DN_2(4, 6)$ .

Teniendo en cuenta que  $A = a + c$  y  $B = b + c$ , se tiene que las coordenadas de  $z = 10$  en función de los pasos  $a, b, c$  y  $d$  son  $(0, 0, 2, 0)$ ; véase la Figura 4.6.



### 4.3 Encaminamiento en $BD(a, b, c, d)$

A la hora de definir un encaminamiento  $\rho$  en un digrafo bipartito  $BD(a, b, c, d)$ , distinguiremos según que el diámetro del digrafo sea impar,  $k = 2r + 1$ , o par,  $k = 2r$ . A partir de ahora, los vértices pares se denotaran por  $v_p, w_p, \dots$  y los impares por  $v_i, w_i, \dots$

Antes de definir  $\rho$  observemos cómo están relacionadas las distancias en el grafo  $D_{N_r}(A, B)$  y en el digrafo  $BD(a, b, c, d)$ . Para ello, a la distancia en el grafo de doble lazo la denotaremos por  $d_D$  y a la del digrafo bipartito por  $d_B$ .

Si  $x_p, y_p$  son dos vértices en el grafo  $D_{N_r}(A, B)$  que están a distancia  $h$ , es decir,  $d_D(x_p, y_p) = h$ , entonces se tiene que  $d_B(x_p, y_p) = 2h$ , ya que cada paso del tipo  $A$  (o  $B$ ) en  $D_{N_r}(A, B)$ , en  $BD(a, b, c, d)$  se corresponde con dos pasos. Del mismo modo,  $d_B(x_p, y_i) = 2h + 1$ , siendo  $y_i$  el vértice impar situado a la derecha del  $y_p$ .

Por otro lado, si en  $BD(a, b, c, d)$  tenemos dos vértices a distancia  $m$ ,  $m$  par, por ejemplo,  $d_B(x_p, y_p) = m$ , entonces  $d_D(x_p, y_p) = \frac{m}{2}$ , ya que si el camino de  $x_p$  a  $y_p$  en  $BD(a, b, c, d)$  es:

$$x_p = v_p^0 v_i^1 v_p^2 \dots v_p^{m-2} v_i^{m-1} v_p^m = y_p,$$

en  $D_{N_r}(A, B)$  este camino se traduce en:

$$x_p = z_0 z_1 z_2 \dots z_{\frac{m}{2}-1} z_{\frac{m}{2}} = y_p,$$

con

$$z_j = v_p^{2j-2} v_i^{2j-1} v_p^{2j}, \quad j = 1, \dots, \frac{m}{2}.$$

Por tanto, se tiene la siguiente relación entre distancias:

$$\begin{array}{ccc}
 D_{N_r}(A, B) & & BD(a, b, c, d) \\
 \\
 d_D(x_p, y_p) = h & \iff & \begin{cases} d_B(x_p, y_p) = 2h \\ d_B(x_p, y_i) = 2h + 1. \end{cases}
 \end{array} \tag{4.8}$$

Ya que al conjunto de vértices pares (o impares) de un digrafo bipartito,  $BD(a, b, c, d)$ , siempre se le puede asociar un grafo de doble lazo con pasos  $A = a + c$  y  $B = b + c$ , a la hora de definir un encaminamiento en este tipo de digrafos parece lógico utilizar la definición del encaminamiento dada en la sección 2.2 para grafos de doble lazo. Por tanto, análogamente a lo hecho en aquel caso, sólo definiremos  $\rho(0, y)$  para todo  $y \in V$ , ya que  $\rho(x, y)$  quedará definido a partir de  $\rho(0, y - x)$  de la siguiente forma:

Si

$$\rho(0, y - x) = 0, u_1, \dots, u_n, y - x,$$

entonces

$$\rho(x, y) = x, x + u_1, \dots, x + u_n, y.$$

Nótese además, que un paso  $A$  entre vértices pares en  $D_{N_r}(A, B)$ , se traduce en  $BD(a, b, c, d)$  en dos pasos  $a$  y  $c$  consecutivos. Del mismo modo, un paso  $B$  entre vértices pares en  $D_{N_r}(A, B)$ , equivale en  $BD(a, b, c, d)$  a un paso  $d$  más un paso  $c$ . Análogo razonamiento para vértices impares.

Por tanto, el encaminamiento que se define en  $BD(a, b, c, d)$  es el siguiente:

### 4.3.1 Diámetro impar

**Definición 4.1** Dado un digrafo bipartito  $BD(a, b, c, d)$ , con diámetro  $k = 2r + 1$ , se define el camino desde el vértice 0 al vértice  $v_p = (m, n)$  con  $n \geq 0$ , como:

$$\rho_0(0, v_p) = A_0 \cdots A_i \cdots A_m B_0 \cdots B_j \cdots B_n \quad (4.9)$$

donde,

$$\begin{aligned} A_i &= iA \pmod{N_r} \quad \text{con } 0 \leq i \leq m, \text{ si } m > 0, \text{ y } m \leq i \leq 0, \text{ si } m < 0 \\ B_j &= A_m + jB \pmod{N_r} \quad 0 \leq j \leq n. \end{aligned} \quad (4.10)$$

El encaminamiento  $\rho_0$  se puede ver como el encaminamiento natural inducido en  $BD(a, b, c, d)$  por el encaminamiento  $\rho_D$  en  $D_{N_r}(A, B)$  dado por (4.9) y que

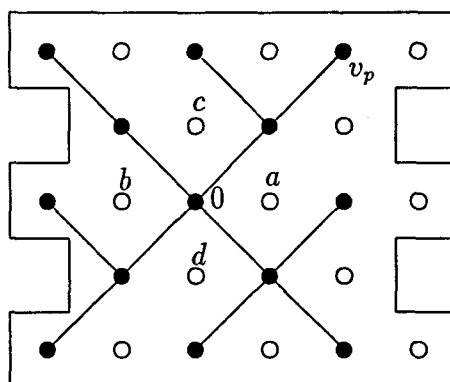


Figura 4.7: *Árbol  $T_{\rho_0}$  asociado al encaminamiento  $\rho_0$ .*

corresponde al estudiado en la sección 2.2. Por tanto, por la bidireccionalidad de  $\rho_D$  aquí se tiene:

$$\rho_0(0, v_p) = \rho_0(v_p, 0),$$

y por la simetría de los vértices pares en  $D_{N_r}(A, B)$  se tendrá que  $\rho_0(v_p, 0)$  determina  $\rho_0(0, -v_p)$ , siendo  $-v_p = (-m, -n) \in \mathbb{Z}^2$  el simétrico de  $v_p$ .

Al considerar todos los caminos de  $\rho_0$  definidos a partir del vértice 0, se obtiene el árbol  $T_{\rho_0}$  del encaminamiento  $\rho_0$  que aparece en la Figura 4.7.

Observemos que la baldosa asociada al digrafo  $BD(a, b, c, d)$  se obtiene a partir del vértice 0 considerando los vértices que están a distancia 1, distancia 2, y así sucesivamente hasta distancia  $k$ . Si este proceso se realiza a partir de cualquier vértice impar, por ejemplo a partir del  $a$ , entonces la baldosa resultante que contiene a todos los vértices del digrafo  $BD(a, b, c, d)$  es la anterior girada 90 grados en sentido antihorario, tal como se muestra en la Figura 4.8. Si a cada vértice  $x$  de  $BD(a, b, c, d)$  en la baldosa de la Figura 4.2 se le hace corresponder el vértice  $\phi(x)$  obtenido con el giro de 90 grados antes mencionado, se obtiene un automorfismo  $\phi$  del digrafo que intercambia  $V_0$  y  $V_1$ .

Debido a esto, y teniendo en cuenta que un automorfismo de vértices induce un automorfismo de ramas, a la hora de definir un encaminamiento  $\rho_1$  entre vértices

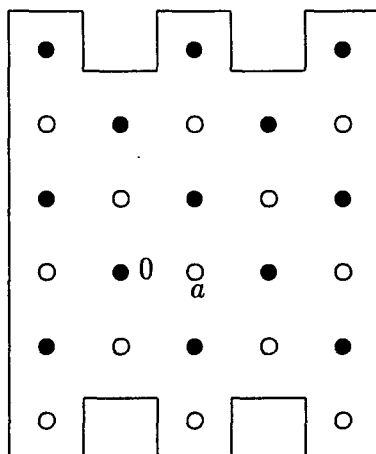


Figura 4.8: Baldosa asociada al digrafo  $BD(a, b, c, d)$  con origen en el vértice  $a$ .

impares se utiliza el árbol del encaminamiento imagen por  $\phi$  del correspondiente a  $\rho_0$ . En la Figura 4.9 aparece representado el árbol  $T_\phi$  de este encaminamiento con todos los caminos a partir del vértice  $\phi(0) = a$ . Nótese que aunque el encaminamiento entre vértices pares y el encaminamiento entre vértices impares se ha tratado de forma independiente, en realidad se tiene un único árbol que nos da todos los caminos entre vértices con la misma paridad.

Para definir caminos entre dos vértices con distinta paridad se procede de la siguiente forma:

Como  $|V_0| = |V_1|$ , a cada vértice  $v_p \in V_0$  se le asocia el vértice  $v_i \in V_1$  situado a su derecha en la Figura 4.2. Así, se tienen todos los vértices del digrafo  $BD(a, b, c, d)$  agrupados de dos en dos, un par y un impar. Notemos que el vértice  $0$  está asociado con el vértice  $a$ . Entonces, para ir desde un vértice par a uno impar, se va primero al par del grupo y luego se da un paso “tipo  $a$ ” para llegar al impar. Y análogamente, con la misma idea, para ir desde un vértice impar a uno par como se muestra en la Figura 4.11. Esto formalmente equivale a definir los dos siguientes caminos:

$$\rho(0, a) = 0a, \quad \text{y} \quad \rho(\phi(0), \phi(a)) = \rho(a, a + c) = a \ a + c = \phi(0)\phi(a),$$

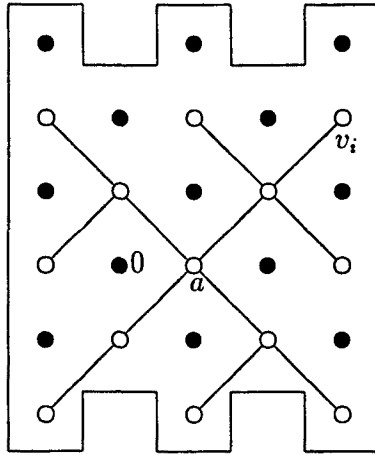


Figura 4.9: *Árbol  $T_{\rho_1}$  asociado al encaminamiento  $\rho_1$ .*

y a partir de estos definir caminos entre vértices con distinta paridad.

En efecto, si  $v_i$  es el vértice impar asociado a  $v_p$  en la Figura 4.10, entonces  $\rho(v_p, v_i)$  queda determinado a partir de  $\rho(0, v_i - v_p) = \rho(0, a)$ , y al revés, si  $v_p$  es el vértice par asociado al  $v_i$  en la Figura 4.11, se obtiene  $\rho(v_i, v_p)$  a partir de  $\rho(a, v_p - v_i + a) = \rho(a, a + c)$ .

**Definición 4.2** *Dado un digrafo bipartito  $BD(a, b, c, d)$ , con diámetro  $k = 2r + 1$ , se define el camino desde el vértice 0 al vértice impar  $v_i$  como:*

$$\rho(0, v_i) = \rho_0(0, v_p) \rho(v_p, v_i),$$

*siendo  $v_p$  el vértice par asociado al  $v_i$ .*

*Análogamente, se define el camino desde el vértice a a un vértice par  $v_p$  como:*

$$\rho(a, v_p) = \rho_1(a, v_i) \rho(v_i, v_p),$$

*siendo  $v_i$  el vértice impar asociado con el  $v_p$ .*

De esta forma se obtienen los siguientes dos árboles de encaminamiento que se muestran en las Figuras 4.10 y 4.11 según que los caminos se definan a partir del vértice 0 o del vértice a.

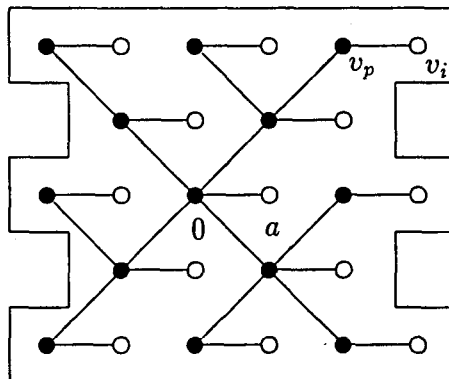


Figura 4.10: *Árbol  $T_\rho$  del encaminamiento  $\rho$  con caminos  $a$  a partir de  $0$ .*

Como ya se ha comentado anteriormente, en realidad, los árboles de las Figuras 4.10 y 4.11 son un único árbol, y es el árbol  $T_\rho$  del encaminamiento  $\rho$  en  $BD(a, b, c, d)$  para el caso de diámetro impar  $k = 2r + 1$ .

La traducción del encaminamiento  $\rho$  de las Figuras 4.10 y 4.11, en términos de los pasos  $a, b, c, d$ , aparece representada en la Figura 4.12.

**Proposición 4.1** *El encaminamiento  $\rho$  definido en el digrafo bipartito  $BD(a, b, c, d)$  con diámetro impar es de camino mínimo.*

DEMOSTRACIÓN

(a) Sean  $x_p, y_p$  dos vértices en  $D_{N_r}(A, B)$  de la misma paridad, por ejemplo pares, tales que:

$$|\rho_D(x_p, y_p)| = h.$$

Como  $\rho_D$  es de camino mínimo, se tiene:

$$|\rho_D(x_p, y_p)| = h = d_D(x_p, y_p).$$

Por (4.8) sabemos que si dos vértices están a distancia  $h$  en  $D_{N_r}(A, B)$ , entonces estos dos vértices están a distancia  $2h$  en  $BD(a, b, c, d)$ .

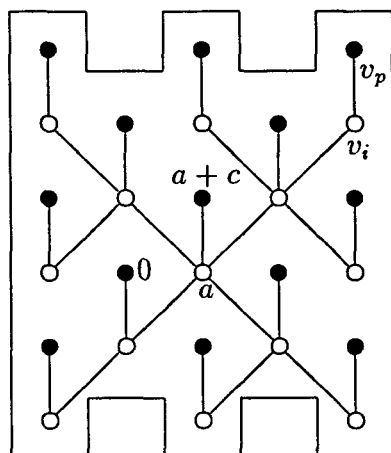


Figura 4.11: *Árbol  $T_\rho$  del encaminamiento  $\rho$  con caminos a partir de  $a$ .*

Supongamos que  $\rho$  no es de camino mínimo, es decir,

$$|\rho(x_p, y_p)| = 2s < 2h.$$

Entonces,  $\rho(x_p, y_p)$  es de la forma:

$$x_p = v_p^0 v_i^1 v_p^2 \cdots v_p^{2s-2} v_i^{2s-1} v_p^{2s} = y_p,$$

y por tanto, de (4.8) tenemos que  $\rho_D(x_p, y_p)$  será de la forma:

$$x_p = z_0 z_1 z_2 \cdots z_s = y_p,$$

con

$$z_j = v_p^{2j-2} v_i^{2j-1} v_p^{2j} \quad j = 1, \dots, s.$$

Luego,

$$|\rho_D(x_p, y_p)| = s < r,$$

en contradicción con el hecho de que  $\rho_D$  sea de camino mínimo. Por tanto,

$$|\rho(x_p, y_p)| = 2h = d_B(x_p, y_p),$$

de donde se tiene que  $\rho$  es de camino mínimo.

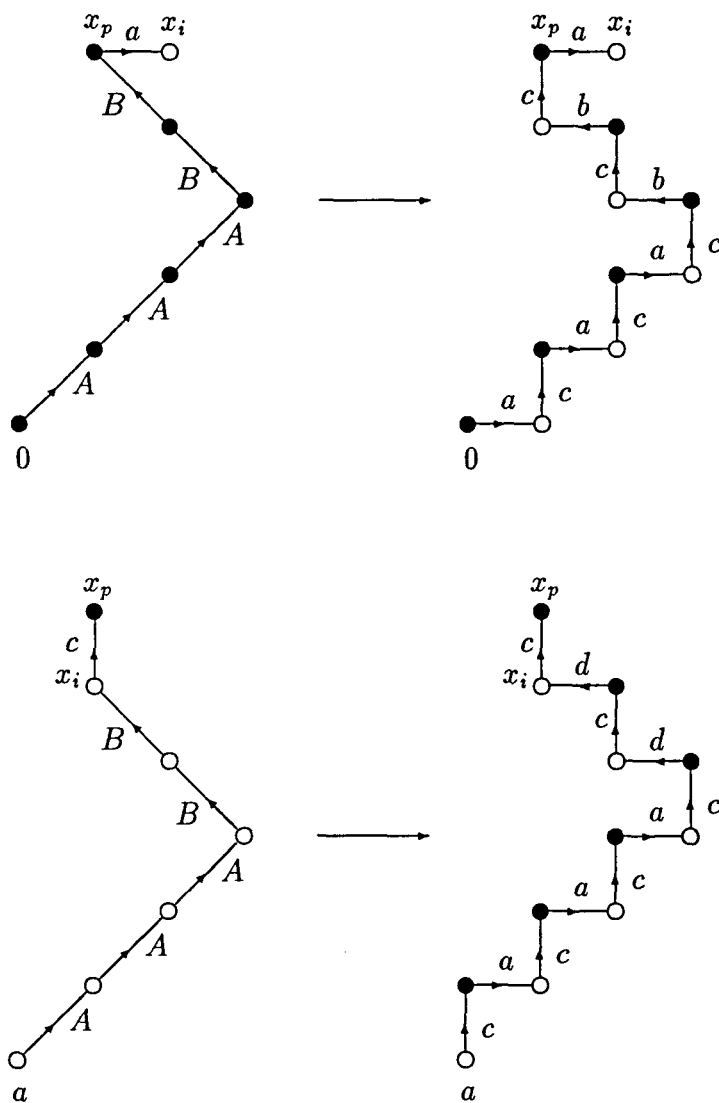


Figura 4.12: Traducción del encaminamiento  $\rho$  en términos de los pasos  $a, b, c$  y  $d$  asociados a  $BD(a, b, c, d)$ .



(b) Sean  $x_p, y_i$  dos vértices de  $D_{N_r}(A, B)$  de distinta paridad, por ejemplo,  $x_p$  par e  $y_i$  impar. Considerando el vértice  $y_p$  que tiene asociado el vértice  $y_i$ , y aplicando el resultado demostrado en (a) se tiene que el camino  $\rho(x_p, y_i)$  es también de longitud mínima.

□

### 4.3.2 Diámetro par

Cuando  $BD(a, b, c, d)$  tiene diámetro par  $k = 2r$ , la baldosa obtenida al considerar sucesivamente los vértices a distancia  $1, 2, \dots, k$  del vértice 0 (que es la que interesa en relación al encaminamiento), es la representada en la Figura 4.13. Nótese que en este caso, a diferencia de lo que ocurre para diámetro impar, esta baldosa no coincide con la de la Figura 4.3, que se había considerado en relación a la solución de las ecuaciones (4.6) para la obtención de los pasos  $a, b, c, d$  que dan lugar a un digrafo con orden óptimo.

Con un procedimiento análogo al caso de diámetro impar, se llega a la obtención de los dos árboles de encaminamiento que se representan en las Figuras 4.14 y 4.15 según que los caminos tengan origen en un vértice par o en uno impar. Nótese de estas dos figuras que el encaminamiento entre vértices pares (impares) se puede ver como un subgrafo del árbol del encaminamiento  $\rho_0$  ( $\rho_1$ ) definido en la sección anterior para el caso de un digrafo  $BD(a, b, c, d)$  con diámetro impar  $k' = k + 1$ . Por otro lado, los caminos desde 0 a un vértice impar  $v_i$  se han definido teniendo en cuenta la siguiente asociación:

A cada vértice impar  $v_i$  se le asocia el vértice par  $v_p$  situado a su izquierda en la Figura 4.13, siempre que:

$$|\rho(0, v_p)| \leq 2(r - 1),$$

y se define  $\rho(0, v_i)$  como:

$$\rho(0, v_p)v_p v_i. \tag{4.11}$$

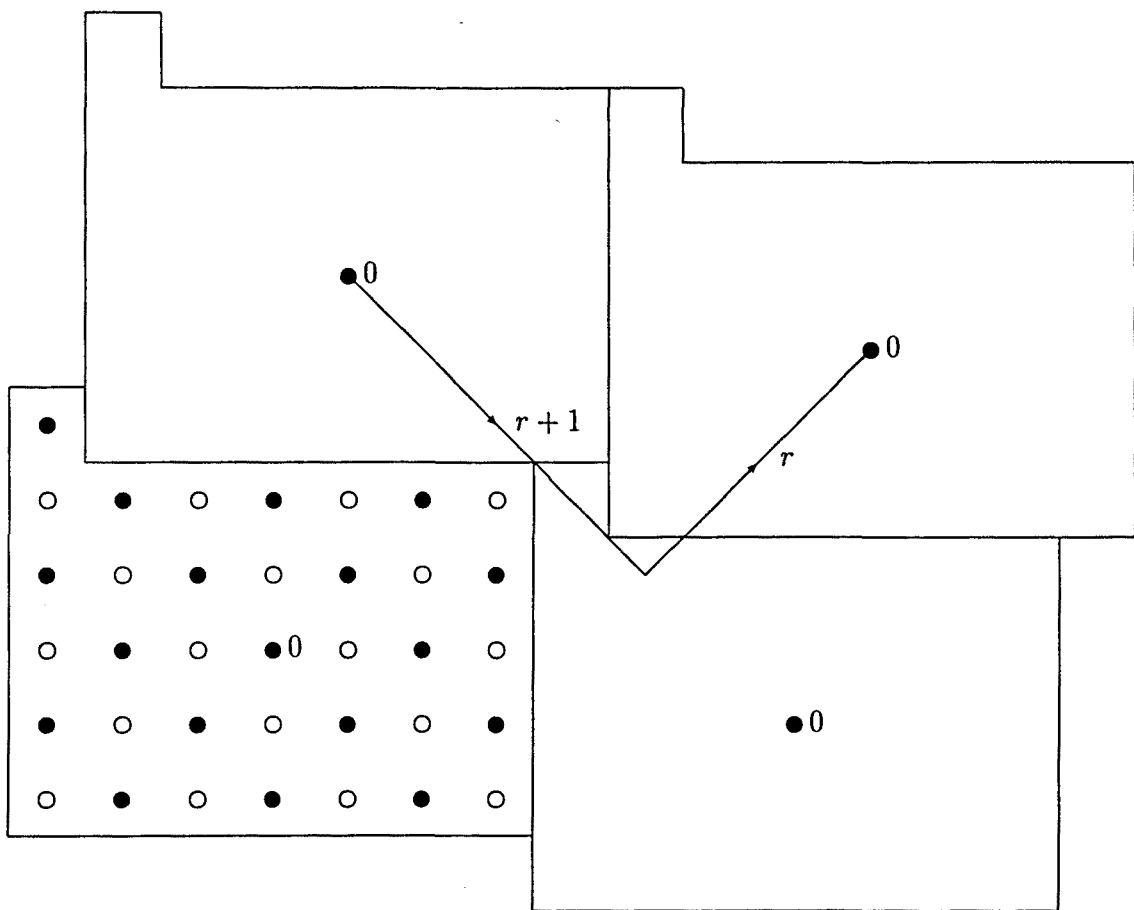


Figura 4.13: Baldosa asociada al digrafo  $BD(a, b, c, d)$  de diámetro  $k = 2r$ .

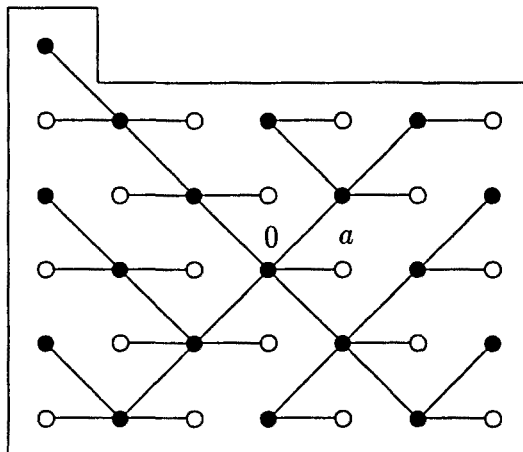


Figura 4.14: *Árbol  $T_\rho$  de encaminamiento con caminos a partir de 0.*

Cada vértice impar  $v_i$  en  $BD(a, b, c, d)$  que no ha quedado asociado con un par  $v_p$ , según la regla anterior, se asocia con el vértice par  $v_p$  situado a su derecha en la Figura 4.13 y se define  $\rho(0, v_i)$  como en (4.11).

**Proposición 4.2** *El encaminamiento  $\rho$  definido en el digrafo bipartito de diámetro par,  $BD(a, b, c, d)$ , es de camino mínimo.*

DEMOSTRACIÓN

Ya que en el caso de diámetro par  $k = 2r$ , el encaminamiento entre vértices de la misma paridad se puede ver como un subgrafo del árbol  $T_\rho$  del encaminamiento  $\rho$  definido en  $BD(a, b, c, d)$  con diámetro impar  $k' = k + 1$ , se tiene, aplicando la proposición anterior, que los caminos entre vértices con la misma paridad son de longitud mínima.

Por otro lado, nótese que los caminos entre vértices de distinta paridad son también de longitud mínima, por propia construcción.

□

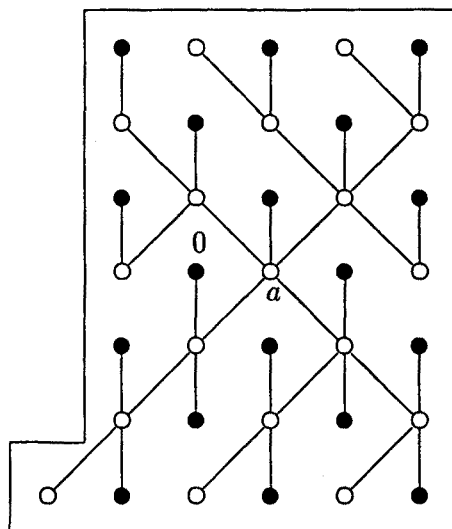


Figura 4.15: *Árbol  $T_p$  de encaminamiento con caminos a partir de  $a$ .*

## 4.4 Resultados

En esta última sección y siguiendo en la misma línea de los capítulos anteriores se estudia cuáles son los vértices de la red modelada por el digrafo  $BD(a, b, c, d)$  que pueden fallar de forma simultánea de manera que no quede afectada la comunicación entre los restantes al existir en la red vértices centrales.

### 4.4.1 Diámetro impar

Aquí, a diferencia de lo que pasaba para el caso de un grafo de doble lazo no óptimo, no es posible la supresión de todos los vértices que tienen grado 1 en el árbol del encaminamiento. Nótese de la Figura 4.16 que si suprimimos todos los vértices a distancia  $k = 2r + 1$  desde el 0, hay caminos que quedan destruidos. Por ejemplo, si falla el vértice  $x_i$ , el camino  $\rho(x_p, 0)$  en  $BD(a, b, c, d)$  no es posible. Los únicos vértices a distancia  $k$  del 0, cuya supresión no afecta a los caminos entre los restantes vértices en el árbol de encaminamiento de la Figura 4.16, son

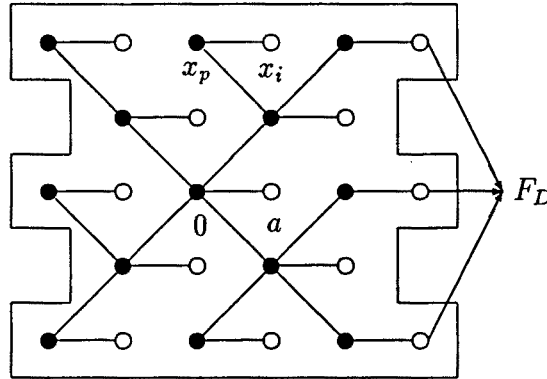


Figura 4.16: *Árbol  $T_\rho$  del encaminamiento  $\rho$  con caminos a partir de 0 y conjunto  $F_D$  de vértices para el cual 0 es  $(\rho, F)$ -central.*

los  $r + 1$  vértices situados en la frontera de la derecha en dicha figura. Si al conjunto de estos vértices lo denotamos por  $F_D$ , se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 4.3** *El vértice 0 es  $(\rho, F)$ -central para todo subconjunto  $F$  de  $F_D$  y  $|F_D| = r + 1$ .*

DEMOSTRACIÓN

El árbol de encaminamiento de la figura (4.16) nos define todos los caminos entre dos vértices de  $BD(a, b, c, d)$  con origen en un vértice par. Nótese que el camino de  $v_p$  a  $z$  definido como  $\rho(v_p, 0)\rho(0, z)$ , no contiene ningún vértice de  $F$ , pues la supresión de  $F$  no afecta a ningún camino de la forma  $\rho(v_p, 0)$  ni a ninguno de la forma  $\rho(0, z)$ . Por tanto, el vértice 0 es  $(\rho, F)$ -central.

□

Análogamente, si se eliminan todos los vértices que están a distancia  $k$  desde el vértice  $a$ , algunos caminos del encaminamiento quedarían suprimidos; éste es el caso de  $\rho(x_i, a)$ , si se hace fallar al vértice  $x_p$ ; véase la Figura 4.17. Luego, los únicos vértices a distancia  $k$ , que pueden fallar simultáneamente, de manera que siga existiendo comunicación entre los restantes, son los que pertenecen a la

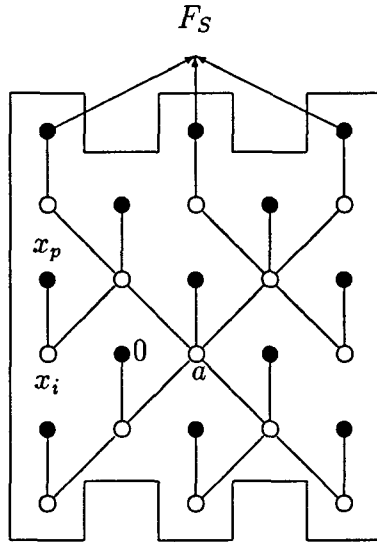


Figura 4.17: *Árbol  $T_\rho$  del encaminamiento  $\rho$  con caminos a partir de  $a$  y conjunto  $F_S$  para el cual  $a$  es  $(\rho, F)$ -central.*

frontera superior de la baldosa centrada en el vértice  $a$ . Si al conjunto de estos vértices se le denota por  $F_S$ , se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 4.4** *El vértice  $a$  es  $(\rho, F)$ -central para todo subconjunto  $F$  de  $F_S$  y  $|F_S| = r + 1$ .*

DEMOSTRACIÓN Análoga a la proposición anterior.

□

### 4.4.2 Diámetro par

A partir de la Figura 4.18 que representa el árbol del encaminamiento definido en  $BD(a, b, c, d)$  para el caso de diámetro par, cuyos caminos tienen origen en un vértice par, nótese que los únicos vértices cuya supresión no afecta a los caminos de la forma  $\rho(v_p, 0)$  y  $\rho(0, z)$  son los  $r - 1$  vértices pares que están a distancia  $k$  del 0 (marcados con un círculo en la Figura 4.18) y el vértice impar denotado por

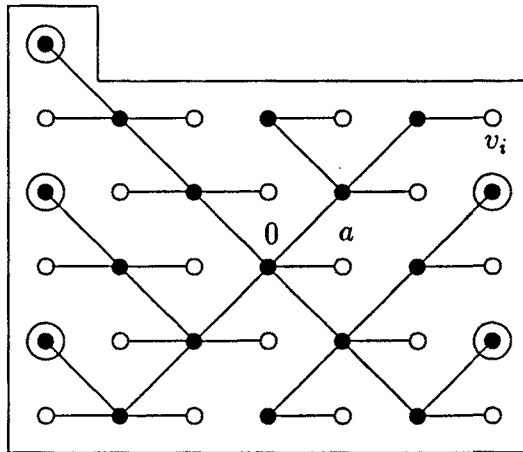


Figura 4.18: Árbol  $T_\rho$  de encaminamiento con caminos a partir de 0 y conjunto  $F_P$  para el cual el 0 es  $(\rho, F)$ -central.

$v_i$ . Si al conjunto de estos  $r$  vértices lo denotamos por  $F_P$ , se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 4.5** *El vértice 0 es  $(\rho, F)$ -central para todo subconjunto  $F$  de  $F_P$  y  $|F_P| = r$ .*

Finalmente, si nos preguntamos qué vértices pueden ser eliminados de manera que su supresión no afecte a los caminos de la forma  $\rho(v_i, a)$  y  $\rho(a, z)$  en el árbol de encaminamiento de la Figura 4.19, vemos que son los  $r - 1$  vértices impares que están a distancia  $k$  desde  $a$  y el vértice par denotado por  $v_p$ . Por tanto, si al conjunto de estos  $r$  vértices le llamamos  $F_I$ , se tiene el siguiente resultado:

**Proposición 4.6** *El vértice  $a$  es  $(\rho, F)$ -central para todo subconjunto  $F$  de  $F_I$  y  $|F_I| = r$ .*

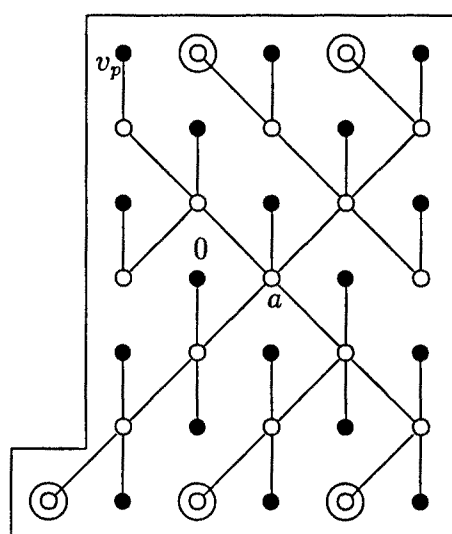


Figura 4.19: Arbol  $T_\rho$  de encaminamiento con caminos a partir de  $a$  y conjunto  $F_I$  para el cual  $a$  es  $(\rho, F)$ -central.



**Segunda parte**

**Vulnerabilidad del  
encaminamiento en digrafos  
línea parciales**

# Capítulo 5

## Vulnerabilidad del encaminamiento en digrafos línea parciales de Kautz y de de Bruijn

### 5.1 Introducción

A la hora de buscar digrafos con buenas propiedades en relación al diseño de redes de interconexión, es corriente empezar analizando las situaciones más sencillas en digrafos con orden pequeño. Una vez solucionados estos problemas en el digrafo original, la técnica iterativa del *digrafo línea* proporciona una familia infinita de digrafos con órdenes arbitrariamente grandes y que comparten las buenas propiedades del digrafo de partida. Es bien conocido que, mediante esta técnica, se pueden definir dos grandes familias de digrafos con orden grande y diámetro pequeño; son las familias de digrafos de Kautz [26], [27] y de de Bruijn [10]. Se sabe que estas familias presentan buena conectividad y que en ellas se pueden definir algoritmos sencillos de encaminamiento de longitud mínima [14], [34]. Estas buenas propiedades las comparten casi todos los digrafos obtenidos

mediante la técnica del digrafo línea [13]. Sin embargo, esta técnica presenta el inconveniente de la distancia relativa existente entre los órdenes del digrafo  $G$  de partida y su digrafo línea  $LG$ . En [19] y [32] se propone una generalización de la técnica del digrafo línea de manera que los digrafos resultantes admitan una mayor flexibilidad en sus órdenes, a la vez que sigan manteniendo las buenas propiedades (diámetro mínimo, conectividad máxima, buenos encaminamientos, etc.) antes mencionadas. Esta nueva técnica es la del *digrafo línea parcial* y permite construir una sucesión de digrafos cuyos órdenes cubren el intervalo entre el orden del digrafo de partida,  $G$ , y su digrafo línea,  $LG$ .

En [13] se utiliza la técnica del digrafo línea para resolver problemas relacionados con la vulnerabilidad del encaminamiento. El objetivo de este capítulo es contribuir a este estudio pero utilizando la técnica del digrafo línea parcial.

El capítulo está organizado de la siguiente forma. En la sección 5.2 se presenta la técnica del digrafo línea y se recuerdan las propiedades relativas al orden, diámetro, conectividad y encaminamiento. Al final de esta sección se aplica esta técnica a los digrafos de Kautz y se presentan los resultados sobre vulnerabilidad del encaminamiento. La técnica del digrafo línea parcial se ve en la sección 5.3. En la sección 5.4 se particulariza a los digrafos de Kautz. Aquí se presenta un método que permite obtener a partir de un digrafo de Kautz toda la sucesión de digrafos línea parciales con todos sus vértices ordenados y tabulados. Se da una condición suficiente para la existencia de vértices centrales y se presenta un algoritmo que permite determinar de forma fácil un conjunto de vértices  $(\rho, F)$  -centrales, siendo  $\rho$  el encaminamiento que se ha definido en dichos digrafos línea parciales Kautz y  $F$  un conjunto de vértices. Finalmente, la sección 5.5 contiene un estudio paralelo al de la sección 5.4 pero para el caso de digrafos de de Bruijn.

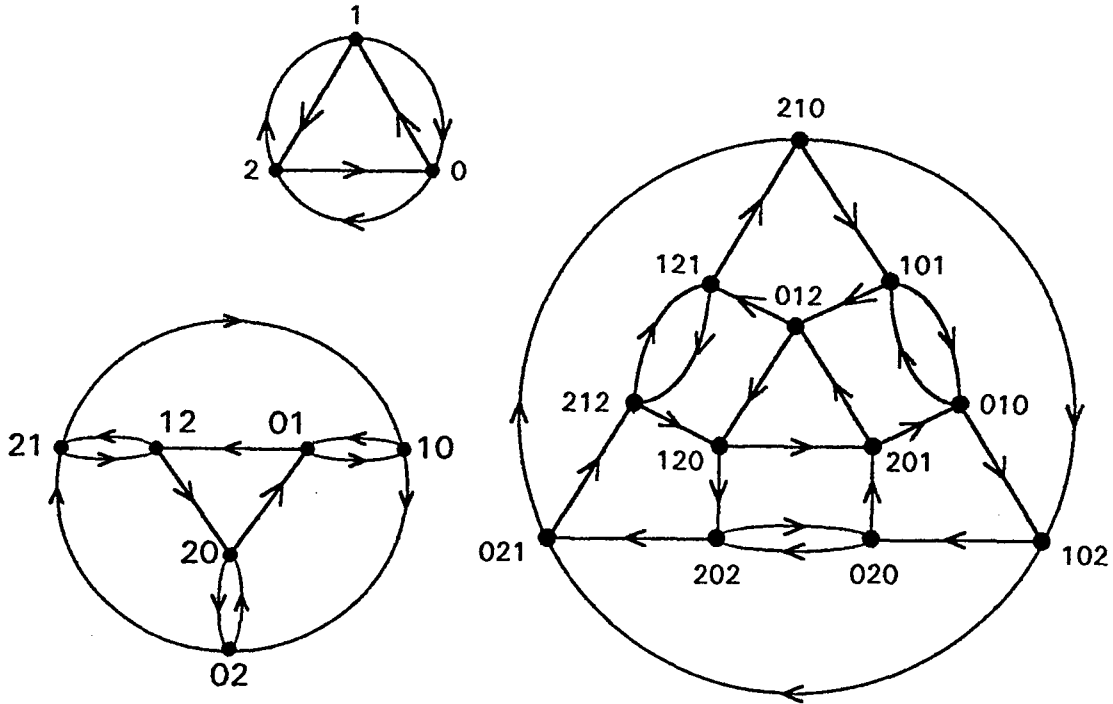


Figura 5.1:  $K_3$ ,  $LK_3$  y  $L^2K_3$ .

## 5.2 Técnica del digrafo línea

Dado un digrafo  $G = (V, A)$ , su digrafo línea  $LG = (V_L, A_L)$  tiene por conjunto de vértices el conjunto de arcos de  $G$ ,  $V_L = A$ , y un vértice  $(x, y) = xy$  es adyacente hacia otro vértice  $(u, v) = uv$  si y sólo si  $u = y$ , es decir, si el arco  $(x, y)$  es incidente con el arco  $(u, v)$  en  $G$ . El digrafo línea iterado  $k$  veces,  $L^k G$ , se define recursivamente como  $L^k G = L(L^{k-1} G)$ . La Figura 5.1 muestra, por ejemplo, los digrafos  $K_3$ ,  $LK_3$  y  $L^2K_3$ .

Evidentemente, el orden de  $LG$  es:

$$N_L = |V_L| = |A| = \sum_{v \in V} d^+(v) = \sum_{v \in V} d^-(v).$$

En particular, si  $G$  es  $d$ -regular y tiene orden  $N$ ,  $LG$  también lo es y  $N_L = dN$ . Por tanto, la sucesión de digrafos línea iterados

$$L^0G = G, LG, L^2G, \dots, L^kG = L(L^{k-1}G), \dots$$

es una sucesión infinita de digrafos  $d$ -regulares con órdenes:

$$N, dN, d^2N, \dots, d^kN, \dots$$

Nótese que cada vértice  $x$  en  $L^kG$  corresponde a un recorrido de longitud  $k$  en  $G$  que puede representarse según una secuencia  $x_0x_1 \cdots x_k$  de vértices, no necesariamente distintos, de  $G$ , y donde  $x_i$  es adyacente hacia  $x_{i+1}$ ,  $0 \leq i \leq k-1$ . El vértice  $x$  es adyacente hacia  $y$  si y sólo si  $y = x_1 \cdots x_k x_{k+1}$ . Esta última caracterización permite tratar los siguientes problemas relativos a caminos en  $L^kG$ : conectividad, encaminamiento y vulnerabilidad del encaminamiento.

En [34] y [18] se vió que el diámetro del digrafo línea  $D_L$  es una unidad más grande que el del digrafo original, es decir,  $D_L = D + 1$ . Es bien conocido que si  $G$  no es un ciclo, entonces:

$$D(L^kG) = D(G) + k,$$

para todo natural  $k \geq 1$ .

De la propia definición de digrafo línea se deduce que la vértice-conectividad de  $LG$  y la línea-conectividad de  $G$  coinciden. Por tanto, de (1.1) se tiene que  $\kappa(LG) \geq \kappa(G)$ . De hecho, en [15] se prueba que, a partir de un cierto orden de iteración, la vértice y línea conectividad de un digrafo línea iterado  $L^kG$  es óptima, es decir, igual al grado mínimo  $\delta$ . Más concretamente, en este trabajo se prueba que si  $G$  no tiene autolazos,  $L^kG$  tiene conectividad máxima,  $\forall k \geq D - 1$ .

Cada encaminamiento  $\rho$  de  $G$  induce de forma natural un encaminamiento  $\rho_L$  en  $LG$ . Si  $\rho$  es de camino mínimo, entonces  $\rho_L$  también lo es. Además, en [13] se demuestra el siguiente resultado:

Si  $F'$  es un conjunto de vértices en  $LG$  correspondiente a un conjunto  $F$  de arcos en  $G$ , entonces el diámetro del grafo de supervivencia,  $R(LG, \rho_L)/F'$ , de  $LG$  es menor o igual al diámetro del grafo de supervivencia,  $R(G, \rho)/F$ , de  $G$ .

Una de las familias más estudiadas y conocidas en el contexto de diseño de redes de interconexión es la de los digrafos de Kautz. El *digrafo de Kautz*,  $K(d, D)$ , se obtiene iterando  $D - 1$  veces el digrafo completo con  $d + 1$  vértices,  $K_{d+1}$ . Es decir,  $L^{D-1}K_{d+1} = K(d, D)$ . De acuerdo con todo lo dicho en esta sección, se tiene que  $K(d, D)$  es  $d$ -regular, con orden  $N = d^{D-1}(d+1) = d^D + d^{D-1}$ , diámetro  $D$  y conectividad máxima  $\kappa = d$ .

Estos digrafos también admiten otra definición. Dado un conjunto  $X$  con  $d + 1 \geq 3$  símbolos o letras, el digrafo de Kautz  $K(d, D)$  tiene por conjunto de vértices todas las palabras de longitud  $D$  formadas con símbolos de  $X$ , de manera que no contengan dos símbolos consecutivos iguales, y un vértice  $x_0 \cdots x_{D-1}$  es adyacente a los  $d$  vértices  $x_1 \cdots x_{D-1} \alpha$ , con  $\alpha \in X \setminus \{x_{D-1}\}$ .

Si se define en  $K(d, D)$  un encaminamiento de longitud mínima y se considera un subconjunto de vértices  $F$ , con  $|F| < \kappa = d$ , es fácil ver que una condición suficiente para que  $c = c_0 \cdots c_{D-1}$  sea un vértice  $(\rho, F)$ -central es:

$$d(c, f) = d(f, c) = D, \quad \forall f \in F.$$

A partir de esta caracterización, en [13] se presenta un algoritmo para encontrar un determinado conjunto de vértices  $(\rho, F)$ -centrales en  $K(d, D)$ , y se prueba que el diámetro del correspondiente digrafo de supervivencia de  $K(d, D)$  es a lo sumo 2.

### 5.3 Técnica del digrafo línea parcial

Sea  $G = (V, A)$  un digrafo con  $\delta^-(G) \geq 1$  y  $A' \subseteq A$  un subconjunto de arcos de manera que cada vértice de  $G$  sea adyacente desde algún arco de  $A'$ , es decir:

$$\{v : (u, v) \in A'\} = V.$$

Notemos que siempre existe un subconjunto  $A'$  con estas características ya que  $\delta^-(G) \geq 1$ , y esta condición sólo excluye a los digrafos con vértices *fuentes*, es decir, vértices con grado de entrada cero.

Se define el *digrafo línea parcial de  $G$* ,  $\mathcal{L}G$ , [32], [19], como el digrafo que tiene por vértices los arcos de  $A'$ ,

$$V(\mathcal{L}G) = \{uv : (u, v) \in A'\},$$

y donde un vértice  $uv$  es adyacente hacia otro vértice  $v'w$ , para cada  $w \in \Gamma^+(v)$ , siendo:

$$v' = \begin{cases} v & \text{si } vw \in V(\mathcal{L}G) \\ \theta \in \Gamma_G^-(w), \text{ tal que } \theta w \in V(\mathcal{L}G), & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (5.1)$$

Cuando se satisface la primera condición de (5.1), al arco  $[uv, vw]$  se le llama  $\alpha$ -arco. Si no, al arco  $[uv, \delta w]$  se le llama  $\beta$ -arco. En la Figura 5.3 aparece el digrafo línea parcial  $\mathcal{L}G$  del digrafo  $G$  de la Figura 5.2. Los arcos de  $A \setminus A'$  en  $G$  y los  $\beta$ -arcos en  $\mathcal{L}G$  están dibujados en líneas punteadas y discontinuas respectivamente.

Debido a las condiciones de adyacencia en  $\mathcal{L}G$ , si  $(u, v)$  es adyacente a  $(v', w)$ , entonces  $v$  es adyacente a  $w$  en  $G$ . Por lo tanto, la aplicación:

$$\phi : V(\mathcal{L}G) \longrightarrow V(G),$$

definida como  $\phi((u, v)) = v$  conserva las adyacencias, es decir,

$$(uv, v'w) \in A(\mathcal{L}G) \Rightarrow (\phi(uv), \phi(v'w)) \in A(G).$$

Observemos que el orden de  $\mathcal{L}(G)$ ,  $N_{\mathcal{L}} = |V(\mathcal{L}G)| = |A'|$ , cumple:

$$|V| \leq N_{\mathcal{L}} \leq |A| = \sum_{v \in V} \delta^+(v).$$

En los dos casos extremos,  $N_{\mathcal{L}} = |V|$  y  $N_{\mathcal{L}} = |A|$ , el digrafo línea parcial  $\mathcal{L}G$  es único. En el primer caso, este digrafo es  $G$  y en el segundo coincide con el digrafo

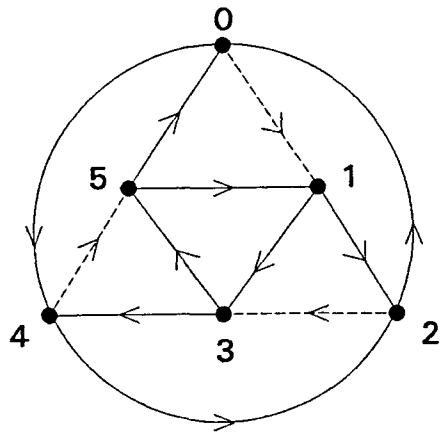


Figura 5.2:  $G$

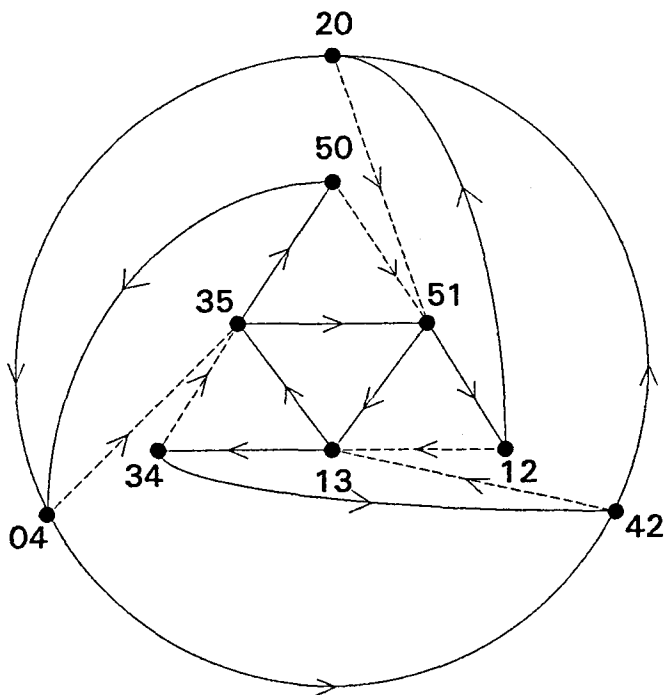


Figura 5.3:  $LG$



línea  $LG$ . En los restantes casos las distintas elecciones de los  $\beta$ -arcos pueden dar lugar a distintos  $\mathcal{L}G$  para un mismo  $A'$ .

Notemos que de la propia definición de  $A'$ , para cada  $w \in \Gamma_G^+(v)$  existe como mínimo una posible elección de  $v'$  en (5.5) y así,

$$\delta_{\mathcal{L}G}^+ = |\Gamma_G^+(v)| = \delta_G^+(v). \quad (5.2)$$

En consecuencia, si  $G$  es  $d$ -regular de salida,  $\mathcal{L}G$  también lo es.

El hecho de que la técnica del digrafo línea parcial proporcione digrafos con orden y diámetro que cumplen los requerimientos mencionados en la introducción aparece reflejado en el siguiente resultado probado en [32]:

**Teorema 5.1** *Si  $G = (V, A)$  es un digrafo  $d$ -regular ( $d \geq 1$ ) con orden  $N$  y diámetro  $D$ , entonces el orden  $N_{\mathcal{L}}$  y diámetro  $D_{\mathcal{L}}$  de un digrafo línea parcial  $\mathcal{L}G$  satisfacen respectivamente:*

- (1)  $N \leq N_{\mathcal{L}} \leq dN$ ,
- (2)  $D \leq D_{\mathcal{L}} \leq D + 1$ .

Tal como hemos mencionado anteriormente, cuando  $N_{\mathcal{L}} = N$  el digrafo  $\mathcal{L}G$  es isomorfo a  $G$  y por tanto  $D_{\mathcal{L}} = D$ . También, si  $N_{\mathcal{L}} = dN$ ,  $\mathcal{L}G$  es el digrafo línea  $LG$ , el cual sabemos que tiene diámetro  $D + 1$ . En los casos intermedios, el diámetro  $D_{\mathcal{L}}$  puede ser igual a  $D$  o  $D + 1$ . Por ejemplo, en las Figuras 5.2 y 5.3 los diámetros son  $D = 2$  y  $D_{\mathcal{L}} = 3$  respectivamente.

Análogamente al caso del digrafo línea, en [32] se prueba que un encaminamiento  $\rho$  en  $G$  induce de forma natural un encaminamiento  $\rho_{\mathcal{L}}$  en  $\mathcal{L}G$ . Sin embargo, aquí se hace notar que se puede dar el caso de que siendo  $\rho$  de longitud mínima,  $\rho_{\mathcal{L}}$  no lo sea.

En [32] se demuestra que al igual como ocurre con la técnica del digrafo línea, la técnica del digrafo línea parcial no disminuye la conectividad. Más concretamente, definiendo un digrafo  $G$  sin caminos cortos redundantes como aquel que tiene como máximo un camino de longitud uno o dos entre cada par de vértices de  $G$  (no necesariamente distintos), se tiene el siguiente resultado:

**Teorema 5.2** *Sea  $G = (V, A)$  un digrafo sin caminos cortos redundantes y conectividad  $\kappa$ . Sea  $\mathcal{L}G$  un digrafo línea parcial de  $G$  con grado mínimo  $\delta_{\mathcal{L}}$ . Se tiene entonces:*

$$\min\{\kappa, \delta_{\mathcal{L}}\} \leq \kappa_{\mathcal{L}} \leq \delta_{\mathcal{L}},$$

siendo  $\kappa_{\mathcal{L}} = \kappa(\mathcal{L}G)$ .

Como corolario de este teorema, se prueba en [32]:

**Corolario 5.1** *Si  $G$  es un digrafo  $d$ -regular con conectividad máxima  $\kappa(G) = \delta(G) = d$  y sin caminos cortos redundantes, entonces  $\mathcal{L}G$  tiene conectividad máxima.*

## 5.4 Digrafo línea parcial de $K(d, D)$ : vulnerabilidad del encaminamiento

Esta sección comienza dando una ordenación de los vértices del digrafo de Kautz  $K(d, D)$  que permite construir de forma sistemática una sucesión de digrafos línea parciales de  $K(d, D - 1)$ . A continuación se define un encaminamiento de longitud mínima en dicha sucesión de digrafos y se demuestra la existencia de vértices centrales.

### 5.4.1 Ordenación de los vértices

Consideremos el digrafo de Kautz  $K(d, D - 1)$  definido a partir de un alfabeto  $X$  con  $|X| = d + 1 \geq 3$ . Recordemos que el orden de  $K(d, D - 1)$  es  $N = d^{D-1} + d^{D-2}$ . Supongamos que estos  $N$  vértices los tenemos ordenados y sea  $x_0; x_1; \dots; x_{D-2}; i$  el vértice que ocupa la  $i$ -ésima posición en esta ordenación.

Por la propia definición, dada en la sección anterior, de los vértices de un digrafo línea parcial de  $K(d, D - 1)$ , sabemos que estos representan arcos de  $K(d, D - 1)$ ; por tanto un vértice cualquiera de un digrafo línea parcial de

$K(d, D - 1)$  será una palabra de longitud  $D$ . Además si  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}}K(d, D - 1)$  es el digrafo línea parcial de  $K(d, D - 1)$  con  $n_{\mathcal{L}}$  vértices, recordemos que:

$$\begin{aligned} d^{D-1} + d^{D-2} &= |VK(d, D - 1)| \leq n_{\mathcal{L}} \leq |VLK(d, D - 1)| \\ &= |VK(d, D)| = d^D + d^{D-1}. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Para construir  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}}K(d, D - 1)$ , consideremos los  $d^D + d^{D-1} = |VK(d, D)|$  vértices tabulados en la siguiente matriz  $\mathcal{K}$  formada por  $N$  filas y  $d$  columnas  $(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_d)$ ,

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} x_1^1 x_{01} \cdots x_{D-21} & \cdots & x_1^j x_{01} \cdots x_{D-21} & \cdots & x_1^d x_{01} \cdots x_{D-21} \\ x_2^1 x_{02} \cdots x_{D-22} & \cdots & x_2^j x_{02} \cdots x_{D-22} & \cdots & x_2^d x_{02} \cdots x_{D-22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_i^1 x_{0i} \cdots x_{D-2i} & \cdots & x_i^j x_{0i} \cdots x_{D-2i} & \cdots & x_i^d x_{0i} \cdots x_{D-2i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_N^1 x_{0N} \cdots x_{D-2N} & \cdots & x_N^j x_{0N} \cdots x_{D-2N} & \cdots & x_N^d x_{0N} \cdots x_{D-2N} \end{pmatrix}$$

donde los vértices de la columna  $j$ ,  $1 \leq j \leq d$ , denotada por  $\mathcal{K}_j$ , son de la forma:

$$x = x_i^j x_{0i} \cdots x_{D-2i} \quad \forall i : 1 \leq i \leq N,$$

con:

$$x_i^j = \begin{cases} x_{D-2i} + j - 1 & (\text{mod } d + 1) \text{ si } x_{0i} \neq x_{D-2i} \\ x_{D-2i} + j & (\text{mod } d + 1) \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

Es decir, en la matriz  $\mathcal{K}$  tenemos los  $d^D + d^{D-1}$  vértices del digrafo línea  $LK(d, D - 1) = K(d, D)$ , ordenados por columnas de forma que:

- un vértice  $x = x_0 \cdots x_{D-1}$  de la primera columna,  $\mathcal{K}_1$ , cumple:

$$0 \leq x_0 - x_{D-1} \pmod{d+1} \leq 1;$$

- un vértice  $x = x_0 \cdots x_{D-1}$  de la segunda columna,  $\mathcal{K}_2$ , cumple:

$$1 \leq x_0 - x_{D-1} \pmod{d+1} \leq 2;$$

y en general un vértice,  $x = x_0 \cdots x_{D-1}$  de la  $j$ -ésima columna,  $\mathcal{K}_j$ , cumple:

$$j - 1 \leq x_0 - x_{D-1} \pmod{d + 1} \leq j.$$

Entonces, dado un número natural  $n_{\mathcal{L}}$  que cumple (5.3):

$$n_{\mathcal{L}} = rN + s, \text{ con } 1 \leq r \leq d - 1, \ 0 \leq s \leq N \text{ y } N = |VK(d, D - 1)|,$$

se define el *digrafo línea parcial de  $K(d, D - 1)$  con  $n_{\mathcal{L}}$  vértices* como:

$$\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}}K(d, D - 1) = (V_{n_{\mathcal{L}}}, A_{n_{\mathcal{L}}}),$$

donde  $V_{n_{\mathcal{L}}}$  es el conjunto formado por los  $n_{\mathcal{L}}$  primeros vértices de la matriz anterior y donde un vértice

$$x_0x_1 \cdots x_{D-1} \sim x'_1 \cdots x_{D-1}\alpha, \ \forall \alpha \in X \setminus \{x_{D-1}\},$$

siendo:

$$x'_1 = \begin{cases} x_1 & \text{si } x_1x_2 \cdots x_{D-1}\alpha \in V_{n_{\mathcal{L}}} \\ \mu \in X \text{ tal que } \mu x_2 \cdots x_{D-1}\alpha \in V_{n_{\mathcal{L}}}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Por supuesto, esta definición de las adyacencias se corresponde con la dada en (5.1) para un digrafo línea parcial de un digrafo  $G$  en general.

En la siguiente matriz  $\mathcal{K}$  aparecen ordenados por columnas los vértices del digrafo  $K(2, 3) = LK(2, 2)$  y en la Figura 5.4 se representa el digrafo línea parcial  $\mathcal{L}_8K(2, 2)$ .

$$\mathcal{K} = \begin{pmatrix} \mathbf{101} & \mathbf{201} \\ \mathbf{202} & \mathbf{102} \\ \mathbf{010} & \mathbf{210} \\ \mathbf{212} & \mathbf{012} \\ \mathbf{020} & \mathbf{120} \\ \mathbf{121} & \mathbf{021} \end{pmatrix}$$

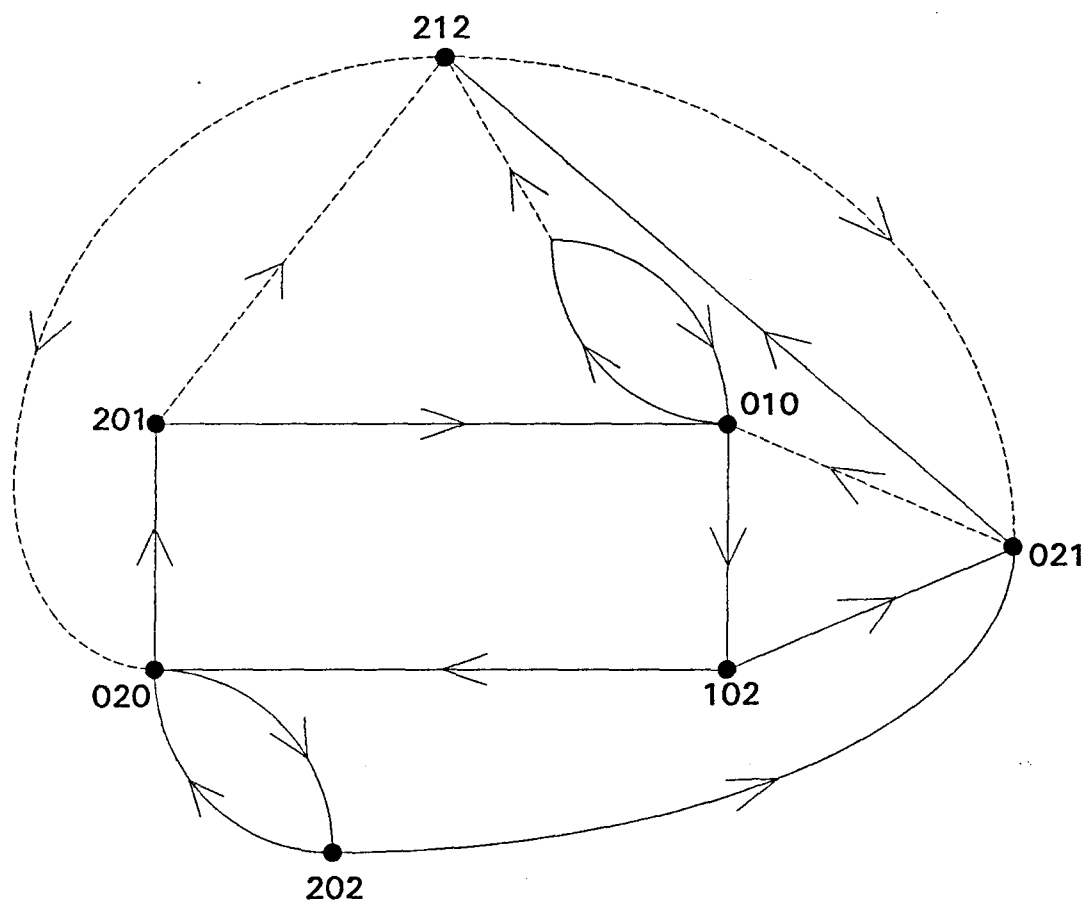


Figura 5.4:  $\mathcal{L}_8 K(2, 2)$

### 5.4.2 Definición del encaminamiento

Para definir un encaminamiento  $\rho_{\mathcal{L}}$  en  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}}K(d, D - 1)$  se hace uso de la intersección entre dos vértices; véase [13].

Dados dos vértices distintos  $x = x_0 \cdots x_{D-1}$  e  $y = y_0 \cdots y_{D-1}$  de  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}}K(d, D - 1)$ , sea  $t$  el mayor entero positivo (en el caso que exista) tal que:

$$x_{D+i-t} = y_i, \quad 0 \leq i \leq t - 1. \tag{5.4}$$

La intersección de  $x$  con  $y$ ,  $t(x, y)$ , se define como la secuencia

$$t(x, y) = x_{D-t}, x_{D-t+1}, \dots, x_{D-1} = y_0, y_1, \dots, y_{t-1},$$

de longitud

$$|t(x, y)|.$$

Si no existe un entero positivo  $t$  que verifique (5.4) se define  $t(x, y) = \emptyset$  y  $t = 0$ . Nótese que  $d(x, y) = D - t(x, y)$ . Entonces, redefiniendo el vértice  $x$  como

$$x = x_0 x_1 \cdots x_{D-t-1} y_0 \cdots y_{t-1},$$

y partiendo de él, el camino  $\rho_{\mathcal{L}}(x, y)$  es el que se da a continuación:

$$\begin{array}{cccccccc}
 x = x_0 & x_1 & \cdots & x_{D-t-1} & y_0 & \cdots & y_{t-1} & \\
 & x'_1 & \cdots & x_{D-t-1} & y_0 & \cdots & y_{t-1} & y_t \\
 & & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 & & & x'_{D-t-1} & y_0 & \cdots & y_{t-1} & y_t \cdots y_{D-2} \\
 & & & & y_0 & \cdots & y_{t-1} & y_t \cdots y_{D-2} & y_{D-1} = y.
 \end{array} \tag{5.5}$$

Observése que este encaminamiento es de longitud mínima, ya que si existiese otro camino desde  $x$  a  $y$  de longitud menor que  $| \rho(x, y) |$ , entonces  $t$  no sería el mayor entero que cumple (5.4).



$$\begin{array}{rcccccccc}
 x & = & x_0 & \cdots & \cdots & x_{r-1} & f_0 & \cdots & \cdots & f_s & \cdots & f_{D-r-1} \\
 & & & & \ddots & & & & & & & \\
 & & & & & r \text{ pasos} & & & & & & \\
 & & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & f_0 & \cdots & \cdots & f_s & \cdots & f_{D-r-1} & f_{D-r} & \cdots & f_{D-1} \\
 & & & & & & & & & & & & \ddots & & \\
 & & & & & & & & & s \text{ pasos} & & & & & \\
 & & & & & & & & & & \ddots & & & & \\
 c & = & & & & & f'_s & \cdots & f_{D-r-1} & f_{D-r} & \cdots & f_{D-1} & \alpha_0 & \cdots & \alpha_{s-1},
 \end{array}$$

siendo  $\alpha_0 \cdots \alpha_{s-1}$  la correspondiente secuencia en  $c$ , según  $\rho_{\mathcal{L}}$ , de longitud  $s$ .

Pero como  $c = c_0 \cdots c_{D-1}$  se tiene:

$$f'_s \cdots f_{D-r-1} f_{D-r} \cdots f_{D-1} \alpha_0 \cdots \alpha_{s-1} = c_0 \cdots c_{D-1}.$$

Se deduce por lo tanto que  $t(f, c) \neq 0$ , lo cual es una contradicción.

Con un razonamiento análogo al anterior, utilizando el encaminamiento  $\rho_{\mathcal{L}}$  desde el vértice  $c$  al vértice  $x$ , se llegaría a que  $t(c, f) \neq 0$ , lo cual también es una contradicción. Luego  $c$  es un vértice  $(\rho_{\mathcal{L}}, F)$ -central en  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}} K(d, D - 1)$ . □

Basándonos en esta proposición se puede dar un algoritmo que calcule un determinado conjunto de vértices centrales en el digrafo línea parcial  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}} K(d, D - 1)$ . La idea será buscar vértices  $c = c_0 \cdots c_{D-1}$  de manera que no intersecten ni a izquierda ni a derecha con los vértices de  $F$  y que a su vez sean del digrafo línea parcial,  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}} K(d, D - 1)$ . Nótese que si damos un algoritmo que, a partir de una adecuada componente  $c_0$  en  $c$ , vaya añadiendo adecuadas componentes  $c_i$ , al cabo de  $D - 1$  pasos tendremos una secuencia  $c = c_0 \cdots c_{D-1}$  que cumplirá  $t(c, f) = t(f, c) = 0, \forall f \in F$ , pero no estará asegurado que este vértice sea del digrafo línea parcial que se esté considerando en ese momento. Para solventar esto, el algoritmo que se propone en esta sección construye en los  $D - 1$  primeros pasos, componente a componente, el vértice  $c' = c_0 \cdots c_{D-2}$  cumpliendo  $t(c', f) = t(f, c') = 0, \forall f \in F$ , y luego elige en el último paso la componente  $c_{D-1}$  de forma



adecuada para que  $c = c_0 \cdots c_{D-1}$  siga cumpliendo la condición de intersección nula a izquierda y a derecha con los vértices de  $F$  y a la vez sea un vértice del digrafo línea parcial.

Notemos que si  $n_{\mathcal{L}}$  admite una descomposición del tipo  $rN + s$ ,  $r$  indica el número de columnas en la matriz  $\mathcal{K}$  que se pueden completar con vértices del digrafo línea parcial. Por tanto, el vértice que ocupe en la matriz  $\mathcal{K}$  la posición  $(r+1, s)$  será el último de los vértices del digrafo línea parcial,  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}}K(d, D-1)$ . Si consideramos que el primero es el que ocupa la posición  $(1, 1)$  (primera columna, primera fila) y que están ordenados por columnas, en  $\mathcal{K}$  se tienen etiquetados y ordenados todos los  $n_{\mathcal{L}}$  vértices de  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}}K(d, D-1)$ , desde el  $(1, 1)$  hasta el  $(r+1, s)$ .

Por otro lado, recordemos que los vértices de la columna  $r$ -ésima son de la forma  $x = x_0 \cdots x_{D-1}$  con:

$$r - 1 \leq x_0 - x_{D-1} \pmod{d+1} \leq r,$$

es decir, la diferencia entre la primera componente del vértice y la última es siempre  $r - 1$  o  $r$ . Por tanto, en la siguiente columna, la  $(r+1)$ -ésima, existirán vértices cuya diferencia de primera componente y última también será  $r$ . Como en  $\mathcal{K}$  sólo se tienen  $r$  columnas completas con vértices del digrafo línea parcial,  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}}K(d, D-1)$ , se puede dar el caso que, al añadir a  $c' = c_0 \cdots c_{D-2}$  un  $c_{D-1}$  tal que  $c_0 - c_{D-1} \pmod{d+1} = r$ , el vértice resultante pertenezca a la siguiente columna y que ya no sea del conjunto de vértices del digrafo línea parcial,  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}}K(d, D-1)$ . Para evitar esto, vamos a restringir la elección de  $c_{D-1}$ ; para ello veamos de forma más detallada qué condiciones cumplen los vértices de cada una de las  $d$  columnas  $(\mathcal{K}_1, \dots, \mathcal{K}_d)$  de la matriz  $\mathcal{K}$ .

-Un vértice de  $\mathcal{K}_1$  es de la forma:

$$\begin{aligned} x &= x_0 x_1 \cdots x_{D-1} \text{ con } x_0 - x_{D-1} \pmod{d+1} = 0 \\ &\text{y } 1 \leq x_0 - x_1 \pmod{d+1} \leq d, \end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned} x &= x_0x_1 \cdots x_{D-1} \text{ con } x_0 - x_{D-1} \pmod{d+1} = 1 \\ &\text{y } x_0 - x_1 \pmod{d+1} = 1. \end{aligned}$$

-Un vértice de  $\mathcal{K}_2$  es de la forma:

$$\begin{aligned} x &= x_0x_1 \cdots x_{D-1} \text{ con } x_0 - x_{D-1} \pmod{d+1} = 1 \\ &\text{y } 2 \leq x_0 - x_1 \pmod{d+1} \leq d, \end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned} x &= x_0x_1 \cdots x_{D-1} \text{ con } x_0 - x_{D-1} \pmod{d+1} = 2 \\ &\text{y } 1 \leq x_0 - x_1 \pmod{d+1} = 2, \end{aligned}$$

y en general, un vértice de  $\mathcal{K}_r$ ,  $r = 1, \dots, d$ , es de la forma:

$$\begin{aligned} x &= x_0x_1 \cdots x_{D-1} \text{ con } x_0 - x_{D-1} \pmod{d+1} = r - 1 \\ &\text{y } r \leq x_0 - x_1 \pmod{d+1} \leq d, \end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned} x &= x_0x_1 \cdots x_{D-1} \text{ con } x_0 - x_{D-1} \pmod{d+1} = r \\ &\text{y } 1 \leq x_0 - x_1 \pmod{d+1} \leq r. \end{aligned}$$

Por tanto, un vértice de la última columna,  $\mathcal{K}_d$ , cumple:

$$\begin{aligned} x &= x_0x_1 \cdots x_{D-1} \text{ con } x_0 - x_{D-1} \pmod{d+1} = d - 1 \\ &\text{y } x_0 - x_1 \pmod{d+1} = d, \end{aligned}$$

ó

$$\begin{aligned} x &= x_0x_1 \cdots x_{D-1} \text{ con } x_0 - x_{D-1} \pmod{d+1} = d \\ &\text{y } 1 \leq x_0 - x_1 \pmod{d+1} \leq d. \end{aligned}$$

Resumiendo, los vértices del digrafo línea parcial  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}}K(d, D - 1)$  con  $n_{\mathcal{L}} = rN + s$ , que se corresponden con los vértices de las  $r$  primeras columnas de  $\mathcal{K}$  más los primeros  $s$  vértices de la columna  $r + 1$  serán todos aquellos

$$x \in V_{n_{\mathcal{L}}} = \mathcal{K}_1 \cup \mathcal{K}_2 \cup \dots \cup \mathcal{K}_r \cup \{s \text{ primeros vértices de } \mathcal{K}_{r+1}\} = \mathcal{K} \cup \mathcal{S}$$

con  $\mathcal{K}$  el conjunto de vértices de la forma:

$$\begin{aligned} 0 \leq x_0 - x_{D-1} \pmod{d+1} \leq r-1 \quad \text{y} \quad 1 \leq x_0 - x_1 \pmod{d+1} \leq d \\ x_0 - x_{D-1} \pmod{d+1} = r \quad \text{y} \quad 1 \leq x_0 - x_1 \pmod{d+1} = r. \end{aligned}$$

Así, una vez que el algoritmo determine el conjunto de vértices de la forma  $c' = c_0 \dots c_{D-2}$  con  $t(c', f) = t(f, c') = 0, \forall f \in F$ , el siguiente paso será, a partir de  $r$  (número de columnas completas en  $\mathcal{K}$ ), ver si es posible encontrar un  $c_{D-1}$  de manera que  $c = c_0 \dots c_{D-1}$  sea un vértice central para  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}}K(d, D - 1)$  con  $n_{\mathcal{L}} = rN + s$ . Por todo lo dicho anteriormente, notemos que se tiene que proceder de la siguiente forma:

- Añadir  $c_{D-1}$  tal que  $c_0 - c_{D-1} \pmod{d+1} < r$  a todo vértice  $c'$ .
- Añadir  $c_{D-1}$  tal que  $c_0 - c_{D-1} \pmod{d+1} = r$  a los vértices  $c'$  que cumplan  $1 \leq c_0 - c_1 \pmod{d+1} \leq r$ .

Observemos que aunque siempre existan  $c_{D-1}$  que cumplan estas condiciones, se puede dar el caso de que algún  $c_{D-1}$  no se pueda considerar, bien porque éste coincida con la primera componente de algún vértice defectuoso y entonces  $t(c, f) = t(f, c) \neq 0$ , o porque sea el  $c_{D-2}$  el que coincida con la primera componente de alguno de estos vértices y entonces al añadir  $c_{D-1}$  se cumpla  $t(c, f) = t(f, c) = 2 \neq 0$ . Esto también tendrá que controlarlo el propio algoritmo.

Por otro lado, notemos que estos  $c_{D-1}$  hacen que el vértice  $c$  obtenido pertenezca a cualquiera de las  $r$  primeras columnas de la matriz  $\mathcal{K}$ , es decir, con estas condiciones el algoritmo no examina si existe algún vértice central  $c$  que se

encuentre entre los  $s$  vértices de  $V_{n_{\mathcal{L}}}$  que pertenecen a la columna  $(r + 1)$ . Para que también examine esto, notemos que por propia construcción de los vértices de la matriz  $\mathcal{K}$ , como el número de filas es  $N = (d + 1)d^{D-2}$  se tiene que: en todas las columnas de  $\mathcal{K}$ , los  $d^{D-2}$  primeros elementos tienen la misma componente  $c_1 = 0$ , los siguientes  $d^{D-2}$  elementos tienen la misma componente  $c_1 = 1$  y así sucesivamente hasta completar la columna con los  $d^{D-2}$  últimos elementos que tienen por componente  $c_1 = d$ . Por tanto, a partir de  $s$  perteneciente a algunos de los intervalos de la forma  $[id^{D-2}, (i + 1)d^{D-2}]$  con  $i = 0, \dots, d$ , tendremos que se podrá añadir un  $c_{D-1}$  tal que  $c_0 - c_{D-1} \pmod{d+1} = r + 1$  en aquellos  $c'$  con componente  $c_1 = i$ . De esta forma el algoritmo examinará si es posible encontrar un vértice central  $c$  que esté entre los  $s$  primeros vértices de la columna  $(r + 1)$  y no obtendrá nunca un vértice central  $c$  que siendo de la columna  $(r + 1)$  no sea del conjunto de vértices de  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}}K(d, D - 1)$  con  $n_{\mathcal{L}} = rN + s$ .

En cuanto a la forma que debe tener el vértice  $c' = c_0 \dots c_{D-2}$  para que  $t(c', f) = t(f, c') = 0$ , notemos lo siguiente:

Sea  $F = \{f_0^1 f_1^1 \dots f_{D-1}^1, \dots, f_0^p f_1^p \dots f_{D-1}^p\}$ ,  $p < \kappa_{\mathcal{L}}$ , un conjunto de vértices en  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}}K(d, D - 1)$  con  $n_{\mathcal{L}} = rN + s$  y considérese el conjunto:

$$A_{D-1} = \{f_{D-1}^j / f_0^j f_1^j \dots f_{D-1}^j \in F, 1 \leq j \leq p\}.$$

Por lo tanto  $c_0$  debe pertenecer a  $X \setminus A_{D-1}$ , pues de lo contrario se tendría  $t(f, c') \neq 0$ .

A partir de  $c_0$ , una posible elección de las componentes  $c_i$  con  $i = 1, \dots, D - 2$ , de modo que los vértices  $c'$  cumplan que no intersecten ni a izquierda ni a derecha con el conjunto  $F$  viene dada en [13], y consiste en cada paso  $k$  con  $k = 1, \dots, D - 2$ , comparar la componente  $c_k$  con el conjunto:

$$A_{D-(k+1)} = \{f_{D-(k+1)}^j / f_0^j \dots f_{D-(k+1)}^j \dots f_{D-1}^j \in F, 1 \leq j \leq p\}.$$

Por tanto el algoritmo desarrollado sería:

1. A partir de  $F$  considerar el conjunto formado por las últimas componentes de los vértices defectuosos, es decir

$$A_{D-1} = \{f_{D-1}^j / f_0^j f_1^j \cdots f_{D-1}^j \in F, 1 \leq j \leq p\}.$$

2. Considerar  $c_0 \in X \setminus A_{D-1}$ .
3. A partir de  $c_0$ , elegir  $c_i$  desde  $i = 1, \dots, D - 2$ , de manera que:

$$c_i \in X \setminus (A_{D-(i+1)} \cup \{c_{i-1}\}) \text{ si } c_{i-1} \notin A_{D-(i+1)},$$

siendo

$$A_{D-(i+1)} = \{f_{D-(i+1)}^j / f_0^j \cdots f_{D-(i+1)}^j f_{D-i}^j \cdots f_{D-1}^j \in F, 1 \leq j \leq p\}$$

y

$$c_i \in X \setminus (A_{D-(i+1)} \cup B_{D-i}) \text{ si } c_{i-1} \in A_{D-(i+1)},$$

siendo

$$B_{D-i} = \{f_{D-i}^q : c_{i-1} = f_{D-(i+1)}^q\}.$$

4. Repetir el paso anterior para cada  $c_0$  obtenido en 2.
5. Calcular los conjuntos:

$$A_0 = \{f_0^j : f_0^j \cdots f_{D-1}^j \in F, 1 \leq j \leq p\},$$

$$A_1 = \{f_1^q : c_{D-2} = f_0^q\}.$$

6. A partir de  $r$  y  $s \in [id^{D-2}, (i+1)d^{D-2}]$ ,  $0 \leq i \leq d$ , considerar

$$P = \{c' = c_0 \cdots c_{D-2} : c_{D-2} \notin A_0\}$$

y añadir:

$$c_{D-1} \notin A_0 \cup \{c_{D-2}\} / c_0 - c_{D-1} \pmod{d+1} < r \quad \forall c' \in P$$

$$\begin{aligned}
c_{D-1} &\notin A_0 \cup \{c_{D-2}\} / c_0 - c_{D-1} \pmod{d+1} = r \quad \forall c' \in P \\
&\text{con } 1 \leq c_0 - c_1 \pmod{d+1} \leq r \\
c_{D-1} &\notin A_0 \cup \{c_{D-2}\} / c_0 - c_{D-1} \pmod{d+1} = r+1 \quad \forall c' \in P \\
&\text{con } c_1 = i.
\end{aligned}$$

$$Q = \{c' = c_0 \cdots c_{D-2} : c_{D-2} \in A_0\}$$

y añadir:

$$\begin{aligned}
c_{D-1} &\notin (A_0 \cup A_1) / c_0 - c_{D-1} \pmod{d+1} < r \quad \forall c' \in Q \\
c_{D-1} &\notin (A_0 \cup A_1) / c_0 - c_{D-1} \pmod{d+1} = r \quad \forall c' \in Q \\
&\text{con } 1 \leq c_0 - c_1 \pmod{d+1} \leq r \\
c_{D-1} &\notin (A_0 \cup A_1) / c_0 - c_{D-1} \pmod{d+1} = r+1 \quad \forall c' \in Q \\
&\text{con } c_1 = i.
\end{aligned}$$

### Ejemplo 5.1

$$\mathcal{L}_{76}K(3, 3), \quad F = \{3202, 3020\}.$$

Aplicando el algoritmo se tiene que el conjunto de vértices  $(\rho_{\mathcal{L}}, F)$ -centrales es:

$$\{1310, 3131\}.$$

### Ejemplo 5.2

$$\mathcal{L}_{47}K(3, 3), \quad F = \{1020\}.$$

A partir del algoritmo anterior se obtiene el siguiente conjunto de vértices  $(\rho_{\mathcal{L}}, F)$ -centrales:

$$\{1030, 1013, 2132, 2312, 3013, 3123\}.$$

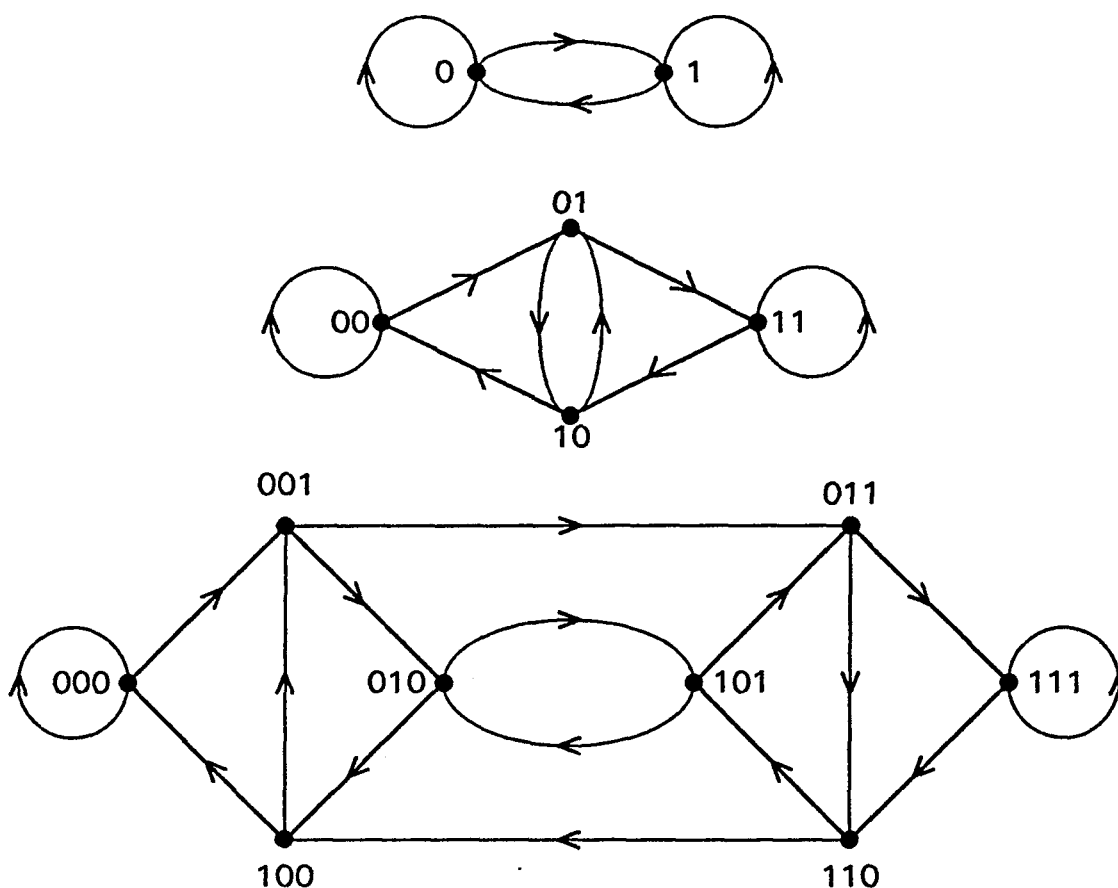


Figura 5.5:  $B(2,3)$  a partir de  $K_2^+$ .

## 5.5 Digrafo línea parcial de $B(d, D)$ : vulnerabilidad del encaminamiento

Como ya se ha comentado en la introducción, además de la familia de los digrafos de Kautz, otra de las familias de digrafos con gran orden y diámetro pequeño que se puede definir mediante la técnica del digrafo línea es la familia de los digrafos de de Bruijn. El *digrafo de de Bruijn*,  $B(d, D)$ , con diámetro  $D$  y grado  $d$  se define como  $L^{D-1}K_d^+$ , siendo  $K_d^+$  el digrafo obtenido a partir de  $K_d$  añadiendo un autolazo a cada vértice. Estos digrafos tienen orden  $N = d^D$  y conectividad  $\kappa = d - 1$ . En la Figura 5.5, aparece el digrafo  $B(2,3)$  obtenido a partir de  $K_2^+$ .

Al igual que pasaba en los digrafos de Kautz, estos digrafos admiten otra definición a partir de un alfabeto  $X$  con  $d$  letras o símbolos. El digrafo de de Bruijn,  $B(d, D)$ , tiene por conjunto de vértices todas las palabras de longitud  $D$  formadas con símbolos de  $X$  y un vértice  $x_0 \cdots x_{D-1}$  es adyacente a los  $d$  vértices de la forma  $x_1 \cdots x_{D-1} \alpha$ , con  $\alpha \in X$ . Como en la sección anterior se utilizará esta caracterización de los digrafos de de Bruijn como digrafos sobre alfabeto para definir los digrafos línea parciales de un digrafo de de Bruijn. Para ello, se parte del digrafo de de Bruijn  $B(d, D - 1)$  definido a partir de un alfabeto  $X$  con  $|X| = d \geq 2$ , y se supone que los  $N = d^{D-1}$  vértices de  $B(d, D - 1)$  los tenemos ordenados de manera que el vértice  $x_{0i} x_{1i} \cdots x_{D-2i}$  es el que ocupa la  $i$ -ésima posición en la correspondiente ordenación. Por otro lado, recordemos que los vértices de un digrafo línea parcial representan arcos de  $B(d, D - 1)$  y por tanto serán palabras de longitud  $D$  y que si  $n_{\mathcal{L}}$  denota la cardinalidad de un digrafo línea parcial de  $B(d, D - 1)$ , se cumple:

$$\begin{aligned} d^{D-1} &= |VB(d, D - 1)| \leq n_{\mathcal{L}} \leq |VLB(d, D - 1)| \\ &= |VB(d, D)| = d^D. \end{aligned}$$

Para construir los digrafos línea parciales de  $B(d, D - 1)$  se va a proceder de forma análoga a la sección anterior.

Consideremos los  $d^D$  vértices del digrafo línea de  $B(d, D - 1)$  tabulados en la siguiente matriz formada por  $N = d^{D-1}$  filas y  $d$  columnas  $(\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_d)$ ,

$$\begin{pmatrix} x_{D-21} x_{01} \cdots x_{D-21} & \cdots & x_{D-21} + 1x_{01} \cdots x_{D-21} & \cdots & x_{D-21} + (d-1)x_{01} \cdots x_{D-21} \\ x_{D-22} x_{02} \cdots x_{D-22} & \cdots & x_{D-22} + 1x_{02} \cdots x_{D-22} & \cdots & x_{D-22} + (d-1)x_{02} \cdots x_{D-22} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{D-2i} x_{0i} \cdots x_{D-2i} & \cdots & x_{D-2i} + 1x_{0i} \cdots x_{D-2i} & \cdots & x_{D-2i} + (d-1)x_{0i} \cdots x_{D-2i} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{D-2N} x_{0N} \cdots x_{D-2N} & \cdots & x_{D-2N} + 1x_{0N} \cdots x_{D-2N} & \cdots & x_{D-2N} + (d-1)x_{0N} \cdots x_{D-2N} \end{pmatrix}$$

donde

- un vértice  $x = x_0 \cdots x_{D-1}$  de  $\mathcal{B}_1$  cumple:

$$x_0 - x_{D-1} \pmod{d} = 0.$$



- un vértice  $x = x_0 \cdots x_{D-1}$  de  $\mathcal{B}_2$  cumple:

$$x_0 - x_{D-1} \pmod{d} = 1,$$

y, en general, un vértice  $x = x_0 \cdots x_{D-1}$  de  $\mathcal{B}_j, j = 1, \dots, d$  cumple:

$$x_0 - x_{D-1} \pmod{d} = j - 1.$$

Entonces, dado un número natural  $n_{\mathcal{L}}$  de la forma:

$$n_{\mathcal{L}} = rN + s, \text{ con } 1 \leq r \leq d-1, 0 \leq s \leq N-1 \text{ y } N = |VB(d, D-1)|,$$

se define el digrafo línea parcial de  $B(d, D-1)$  con  $n_{\mathcal{L}}$  vértices como:

$$\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}}B(d, D-1) = (V_{n_{\mathcal{L}}}, A_{n_{\mathcal{L}}}),$$

donde  $V_{n_{\mathcal{L}}}$  es el conjunto formado por los  $n_{\mathcal{L}}$  primeros vértices de la matriz anterior y donde un vértice

$$x_0x_1 \cdots x_{D-1} \sim x'_1 \cdots x_{D-1}\alpha, \quad \forall \alpha \in X,$$

siendo:

$$x'_1 = \begin{cases} x_1 & \text{si } x_1x_2 \cdots x_{D-1}\alpha \in V_{n_{\mathcal{L}}} \\ \gamma \in X \text{ tal que } \gamma x_2 \cdots x_{D-1}\alpha \in V_{n_{\mathcal{L}}}, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Nótese, que esta definición de las adyacencias se corresponde con la dada en (5.1) para un digrafo línea parcial de un digrafo  $G$  en general.

Si en el digrafo  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}}B(d, D-1)$  se define el encaminamiento  $\rho_{\mathcal{L}}$  dado en (5.5) y se considera un conjunto  $F$  de vértices, con  $|F| < \kappa_{\mathcal{L}}$ , siendo  $\kappa_{\mathcal{L}}$  la vértice conectividad del digrafo, se puede dar la misma condición suficiente para la existencia de vértices  $(\rho, F)$ -centrales en  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}}B(d, D-1)$  que aparece en la Proposición 5.1 para los digrafos línea parciales de Kautz. A partir de dicha condición suficiente y teniendo en cuenta la forma en que se han ido construyendo los vértices de  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}}B(d, D-1)$ , se puede dar un algoritmo que calcule un determinado conjunto de vértices centrales similar al dado para  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}}K(d, D-1)$ . El algoritmo desarrollado paso a paso sería el siguiente:

1. A partir de  $F$ , con  $|F| = p < \kappa_{\mathcal{L}}$ , considerar el conjunto  $A_{D-1}$  formado por las últimas componentes de los vértices de  $F$ .
2. Considerar  $c_0 \in X \setminus A_{D-1}$ .
3. A partir de  $c_0$ , elegir  $c_i$  con  $i = 1, \dots, D-2$ , de manera que:

$$c_i \in X \setminus A_{D-(i+1)} \text{ si } c_{i-1} \notin A_{D-(i+1)}$$

siendo:

$$A_{D-(i+1)} = \{f_{D-(i+1)}^j / f_0^j \cdots f_{D-(i+1)}^j f_{D-i}^j \cdots f_{D-1}^j \in F, 1 \leq j \leq p\}$$

y

$$c_i \in X \setminus (A_{D-(i+1)} \cup B_{D-i}) \text{ si } c_{i-1} \in A_{D-(i+1)}$$

siendo:

$$B_{D-i} = \{f_{D-i}^q : c_{i-1} = f_{D-(i+1)}^q\}.$$

4. Repetir el paso anterior para cada  $c_0$  obtenido en 2.
5. Calcular los conjuntos:

$$A_0 = \{f_0^j : f_0^j \cdots f_{D-1}^j \in F, 1 \leq j \leq p\},$$

$$A_1 = \{f_1^q : c_{D-2} = f_0^q\}.$$

6. A partir de la descomposición de  $n_{\mathcal{L}}$  como  $n_{\mathcal{L}} = rN + s$ , considerar el parámetro  $r$  que indica el número de columnas completas,  $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_r$ , correspondientes a los  $n_{\mathcal{L}}$  vértices del digrafo, y el parámetro  $s$  que indica el número de vértices del digrafo  $\mathcal{L}_{n_{\mathcal{L}}}B(d, D-1)$  pertenecientes a la columna  $\mathcal{B}_{r+1}$ .

7. Determinar:

$$P = \{c' = c_0 \cdots c_{D-2} : c_{D-2} \notin A_0\}.$$

$$Q = \{c' = c_0 \cdots c_{D-2} : c_{D-2} \in A_0\}.$$

8. A partir de  $i$  cumpliendo  $s \in [id^{D-2}, (i+1)d^{D-2}]$ ,  $0 \leq i \leq d-1$ , y de  $r$  añadir:

$$c_{D-1} \notin A_0 / c_0 - c_{D-1} \pmod{d} \leq r-1 \quad \forall c' \in P$$

$$c_{D-1} \notin A_0 / c_0 - c_{D-1} \pmod{d} = r \quad \forall c' \in P$$

$$\text{con } c_1 = i$$

$$c_{D-1} \notin (A_0 \cup A_1) / c_0 - c_{D-1} \pmod{d} \leq r-1 \quad \forall c' \in Q$$

$$c_{D-1} \notin (A_0 \cup A_1) / c_0 - c_{D-1} \pmod{d} = r \quad \forall c' \in Q$$

$$\text{con } c_1 = i.$$

### Ejemplo 5.3

$$\mathcal{L}_{76}B(3, 3), \quad F = \{ 0100 \}.$$

Aplicando el algoritmo se tiene que el conjunto de vértices  $(\rho_{\mathcal{L}}, F)$ -centrales es:

$$\{ 1121, 1122, 1211, 1221, 2122, 2121, 2222, 2221, 2202 \}.$$

# Capítulo 6

## Conclusiones

Esta tesis se ha centrado en el estudio de la vulnerabilidad del encaminamiento en familias de grafos y digrafos que resultan particularmente interesantes por su aplicación al diseño de redes de interconexión.

Con respecto a la vulnerabilidad del encaminamiento en redes asociadas con teselaciones del plano se han obtenido los siguientes resultados originales:

- **Grafos de doble lazo óptimos**

- Aprovechando la representación geométrica mediante teselaciones del plano, se da un método eficiente para definir un encaminamiento bidireccional, consistente y de longitud mínima.
- Se presenta un procedimiento de cálculo de las coordenadas de los vértices, lo cual permite conocer directamente los caminos entre vértices dados por el encaminamiento antes definido.
- Se demuestra la existencia de vértice  $(\rho, V_F)$ -central para el caso en que  $|V_F| = 2$  y  $|V_F| = 3$ , así como la existencia de vértice  $(\rho, E_F)$ -central cuando  $|E_F| = 2$ . Esto implica que el diámetro del correspondiente grafo de supervivencia asociado al grafo es menor o igual que 2.
- Para el caso en que  $V_F$ , con  $|V_F| \leq k$ , es un subconjunto de vértices que pertenecen a la frontera de la baldosa asociada al grafo, se demuestra

que el vértice situado en el centro de dicha baldosa es  $(\rho, V_F)$ -central.

- Se caracteriza una familia de subconjuntos de ramas,  $A_F$ , con  $|A_F| \leq 2k^2 + 2k + 2$ , que pueden fallar cuando un vértice dado ha de ser  $(\rho, A_F)$ -central.

- **Grafos de doble lazo no óptimos**

Al igual que en el caso óptimo, se aprovecha la representación geométrica asociada a estos grafos para definir un encaminamiento a partir del árbol del encaminamiento para el caso óptimo.

Utilizando que el encaminamiento se puede interpretar como un árbol, se demuestra la existencia de vértice  $(\rho, V_F)$ -central en el caso en que  $V_F$  es un subconjunto de vértices que tienen grado 1 en dicho árbol.

Un problema abierto para esta familia de grafos es el cálculo de las coordenadas de los vértices.

- **Grafos de triple lazo**

- Mediante un estudio paralelo al de grafos de doble lazo óptimos, se define en estos grafos un buen algoritmo de encaminamiento utilizando de nuevo la representación geométrica mediante teselaciones del plano.
- Se utiliza el hecho de que el encaminamiento puede ser interpretado como un árbol para caracterizar una familia,  $V_F$ , de subconjuntos de vértices, con  $|V_F| \leq 6k$ , y una familia,  $E_F$ , de subconjuntos de ramas, con  $|E_F| \leq 6k^2 + 4k + 5$ , que pueden fallar cuando un vértice dado ha de ser  $(\rho, V_F)$ -central y  $(\rho, E_F)$ -central, respectivamente.

Como problemas abiertos, cabe citar el cálculo de las coordenadas de los vértices y la existencia de vértices  $(\rho, V_F)$ -centrales cuando  $|V_F| \geq 3$ .

- **Digrafos bipartitos  $BD(a, b, c, d)$**

Utilizando la misma idea que en las familias anteriores, se ha definido un encaminamiento,  $\rho$ , de longitud mínima, el cual también se puede interpretar como un árbol. A partir de este hecho, se ha caracterizado un conjunto de vértices,  $F$ , que pueden fallar cuando un vértice dado ha de ser  $(\rho, F)$ -central.

Asimismo, se han calculado las coordenadas de los vértices en el caso de un digrafo bipartito  $BD(a, b, c, d)$  de diámetro impar, quedando como problema abierto el mismo cálculo para el caso de diámetro par.

En la segunda parte de esta tesis se ha estudiado, con un enfoque distinto al de la primera parte, la vulnerabilidad del encaminamiento en los digrafos línea parciales de Kautz y de de Bruijn. Las aportaciones obtenidas son las siguientes:

- Se ha presentado una ordenación de todos los vértices de  $K(d, D)$  y  $B(d, D)$ , la cual ha permitido construir de forma sistemática toda la sucesión de digrafos línea parciales de los digrafos  $K(d, D - 1)$  y  $B(d, D - 1)$ , respectivamente.
- Utilizando la definición de intersección entre vértices, se ha definido un encaminamiento de longitud mínima en  $\mathcal{L}_{n, \mathcal{L}}K(d, D - 1)$  y en  $\mathcal{L}_n B(d, D - 1)$ , respectivamente.
- Se ha dado una condición suficiente para la existencia de vértices  $(\rho_{\mathcal{L}}, F)$ -centrales y se ha presentado un algoritmo que permite calcular un conjunto de vértices  $(\rho_{\mathcal{L}}, F)$ -centrales en los digrafos línea parciales de Kautz y de de Bruijn.

# Bibliografía

- [1] J.R. Beivide, Caracterización de topologías basadas en conexiones con cuatro enlaces bidireccionales, Tesis Doctoral, Barcelona, (1985).
- [2] J.C. Bermond, Interconnection networks, *Topics in Discrete Mathematics*, North-Holland (1992).
- [3] J.C. Bermond, F. Comellas y F. Hsu, Distributed loop computer networks: a survey, *J. of Parallel and Distributed Computing*; por aparecer.
- [4] J.C. Bermond, G. Illiades y C. Peyrat, An optimization problem in distributed loop computer networks, in *Proc. 3rd Int. Conf. Comb. Math*; New York, June (1985).
- [5] J.C. Bermond y C. Peyrat, The Bruijn and Kautz networks a competition for the hypercube?, *Hypercube and Distributed Computers, Proc. 1er Colloque Europeen sur les Hypercubes*, Rennes, 1989, Elsevier Science Pub. North Holland (1989), pp. 279-293.
- [6] J.C. Bermond, C. Delorme and J.J. Quisquater, Strategies for interconnection networks: some methods from graph theory, *J. of Parallel and Distributed Computing*, 3 (1986), pp. 433-449.
- [7] J.C. Bermond, N. Homobono and C. Peyrat, Large Fault-Tolerant Interconnection Networks, *Graphs and Combinatorics*, 5 (1989), pp. 107-123.

- [8] F.T. Boesch, F. Harary and J.A. Kabell, Graphs as models of communication network vulnerability: connectivity and persistence. *Networks*, (1981), pp. 57-63.
- [9] A. Broader, B. Dolev, M. Fischer and B. Simons, Efficient fault-tolerant routings in networks, *Proc. ACM, 16-th STOC* (1984), pp. 536-541.
- [10] N.G. de Bruijn, A combinatorial problem, *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A*, 49 (1946), pp. 758-764.
- [11] D. Dolev, J. Halpern, B. Simons and R. Strong, A new look at fault-tolerant routing, *Proc. ACM 16-th STOC*, (1984), pp. 526-535.
- [12] M. Escudero, J. Fàbrega y P. Morillo, Fault-tolerant routings in double-loop networks, *Arcs Combinat.*; vol. 25-A (1988), pp. 187-198.
- [13] M. Escudero, J. Fàbrega, M.A. Fiol y N. Homobono, On surviving route graphs of iterated line digraphs, *Graph Theory, Combinatorics and Applications*; vol 1, Ed. Y. Alavi, John Wiley New York (1992), pp. 451-466.
- [14] J. Fàbrega, M.A. Fiol y J.L.A. Yebra, Connectivity and reliable routing algorithms in line digraphs, *Proc. III IAESTED International Symp. Applied Informatics*; Grindelwald, Switzerland, (1985), pp. 45-50.
- [15] J. Fàbrega y M.A. Fiol, Maximally connected digraphs, *Journal of Graph Theory*, vol. 13 (1989), pp. 657-668.
- [16] T.Y. Feng, A survey of interconnection networks, *IEEE Tans. Comput*; C-14 (1981) pp. 12-27.
- [17] M.A. Fiol, J.L.A. Yebra, I. Alegre y M. Valero, A discrete optimization problem in local networks and data alignment, *IEEE Trans. Comput.*, C-36, (1987), pp. 702-713.



- [18] M.A. Fiol, J.L.A. Yebra e I. Alegre, Line digraph iterations and the  $(d, k)$  digraph problem, *IEEE Trans. Comput.* C-33 (1984), pp. 400-403.
- [19] M.A. Fiol y A.S. Lladó, The partial line digraph technique in the design of large interconnection networks, *IEEE Transactions on Computers*, vol. C-41 (1992), pp. 848-857.
- [20] M.A. Fiol, J.L. Yebra y M.L. Fiol, Grafos y teselaciones del plano, en Actas III JAEM, Zaragoza, (1983), España, pp. 69-77.
- [21] D. Geller and F. Harary, Connectivity in digraphs. *Lecture Notes in Mathematics* 186. Springer (1970) 105-114.
- [22] W.D. Hillis, The Connection Machine, The MIT Press (1985).
- [23] N. Homobono and C. Peyrat, Fault-tolerant routings in Kautz and de Bruijn networks, Combinatorial Conference, Montreal (1987).
- [24] F.K. Hwang, A survey on double loop networks, *DIMACS Ser. in Discrete Math. and Theor. Comput. Sc.*; vol 5 (1991), pp. 143-151.
- [25] M. Imase, Y. Manabe, Fault-tolerant routings in a  $k$ -connected network, *Information Procesing Letters*, (1988).
- [26] W.H. Kautz, Bounds on directed  $(d, k)$  graphs, in *Theory of celular logic networks and machines*; AFCRL-68-0668 Final Report, (1968), pp. 20-28.
- [27] W.H. Kautz, design of optimal interconnection networks for multiprocessors, in *Architecture and Design of Digital Computers*. Nato Advanced Summer Institute, (1969), pp. 249-272.
- [28] P. Morillo, Grafos y digrafos asociados con teselaciones como modelos de redes de interconexión, Tesis Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, (1987).

- [29] P. Morillo, M.A. Fiol y J. Fábrega, The diameter of directed graphs associated to plane tessellations, *Arcs Combinatoria*, vol. 20A (1985), pp. 17-27.
- [30] M.C. Pease, The indirect binary  $n$ -cube microprocessor array, *IEEE Trans. Comput*; C-26 (1977), pp. 458-473.
- [31] C. Peyrat, Diameter vulnerability of graphs, *Discrete Appl. Math*, 9 (1984), pp. 245-250.
- [32] A. Sánchez, Contribucions a l'estudi i al disseny de xarxes d'interconnexió amb enllacos unidireccionals, Tesi Doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, (1989).
- [33] H.J. Siegel, Interconnection Networks for Large-Scale Parallel Processing, Lexington Books, D.C. Heath and Company (1985).
- [34] S.M. Reddy, J.G. Kuhl, S.H. Hosseini and H. lee, On digraphs with minimum diameter and maximum connectivity, in *Proc. 20th. Annual Allerton Conference on Comm. Control and Computing*, (1982), pp. 1018-1026.
- [35] F. Roberts, F. Hwang and C. Monma ed., Reliability of Computer and Communication Networks, *Series in Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science*, vol 5 (1991).
- [36] K. Wada and K. Kawaguchi, Efficient fault-tolerant fixed routings on  $(k+1)$ -connected digraphs, *Discrete Appl. Math.*; (1992).
- [37] C.I. Wu and T.Y. Feng, eds; Tutorial: Interconnection Networks for Parallel and Distributed Processing, *IEEE Computer Soc. Press*, Silver Spring, MD. (1984).
- [38] J.L.A. Yebra, M.A. Fiol, P. Morillo e I. Alegre, The diameter of undirected graphs associated to plane tessellations. *Arcs Combinatoria*, vol. 20B (1985), pp. 159-171.