

Esta tesis ha sido realizada en el
Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica
de la Universitat Politècnica de Catalunya
bajo la direcció de J. LUIS ANDRÉS YEBRA

Vulnerabilidad del diámetro de ciertas familias de grafos

Ester Simó Mezquita

Departament de Matemàtica Aplicada i Telemàtica

Universitat Politècnica de Catalunya

Abril 1995

A mis padres, Natxo, Marisa, Carles y Teo.

Agradecimientos

En primer lugar, quisiera agradecer al Prof. J. L. Andrés Yebra el tiempo y esfuerzo dedicado a la dirección de esta tesis. Asimismo, vaya mi gratitud para todos los miembros del Grupo de Grafos del departamento de Matemática Aplicada y Telemática y los compañeros de la Sección de Matemática Aplicada de la EUPVG por el magnífico ambiente que ha hecho posible la realización de este trabajo.

Vilanova i La Geltrú, 20 de abril de 1995.

Índice

Introducción	3
1 Resultados básicos	7
1.1 Definiciones básicas de Teoría de Grafos	7
1.2 Automorfismos de grafos	9
1.3 Vulnerabilidad del diámetro	10
1.4 Algunas familias de grafos	12
1.4.1 Grafo n-cubo	12
1.4.2 Grafo Impar	14
1.4.3 Grafo n-cubo plegado	15
1.5 Los problemas (Δ, D) y (Δ, D, D', s)	16
2 Grafos Impares	19
2.1 Propiedades básicas	19
2.2 Vulnerabilidad del diámetro	23
2.2.1 Eliminación de vértices	24
2.2.2 Eliminación de ramas	42
3 Grafos $(n + 1)$-cubo plegados	45
3.1 Definiciones y propiedades	45
3.2 Vulnerabilidad del diámetro	51

	1
4 Obtención de grandes grafos $(\Delta, D, D, 1)$	63
4.1 Introducción	63
4.2 Obtención de grandes grafos $(\Delta, D, D, 1)$	66
4.2.1 Regla de adyacencia	66
4.2.2 Algoritmo para el cálculo del diámetro	69
4.3 Nuevos grandes grafos $(\Delta, D, D, 1)$	71
4.3.1 Grafo $(5, 5, 5, 1)$ de orden 146	73
4.3.2 Grafo $(4, 6, 6, 1)$ de orden 203	77
4.3.3 Grafo $(4, 5, 5, 1)$ de orden 68	82
4.3.4 Grafo $(5, 7, 7, 1)$ de orden 548	84
5 Conclusiones	91
Apéndice A Programa vertices.c	95

Introducción

Los recientes avances en la tecnología de fabricación de circuitos integrados ha facilitado la implementación de arquitecturas que involucran múltiples procesadores que cooperan entre sí ejecutando labores de forma paralela. Una componente importante de tales sistemas es su red de interconexión [29], la cual proporciona un medio de transporte para mensajes (datos o instrucciones) entre procesadores.

La topología de estas redes de interconexión puede ser modelada por grafos, cuyos vértices representan los procesadores o nodos de la red y las ramas o arcos los enlaces existentes entre ellos.

Al diseñar una red de interconexión se han de tener en cuenta diversas consideraciones (ver por ejemplo [29]). Cada procesador sólo puede estar directamente conectado con un número limitado de otros procesadores, esto se traduce en que el grado de los vértices del grafo que modela la red deberá estar acotado. El retraso causado por la transmisión de los mensajes debe ser pequeño, es decir, los caminos que nos permiten comunicar los diferentes procesadores no pueden ser muy largos. En términos de grafos esto quiere decir que el diámetro del grafo deberá estar acotado. Además, estaremos interesados en interconectar un gran número de procesadores, lo cual implica que los grafos que buscaremos deberán tener un orden elevado.

Con el incremento en el número de procesadores la posibilidad de que una o más componentes del sistema fallen (procesadores o enlaces de comunicación) también se incrementa [10]. El fallo de una componente en la red de interconexión puede provocar la caída del sistema o causar una grave degradación en

la ejecución, a menos que sean tomadas medidas suficientes para hacer a la red tolerante a fallos. De aquí que la técnica de diseño de redes de interconexión tolerantes a fallos ha dirigido la atención de gran número de investigadores [2, 17, 35], emergiendo como un área de estudio importante [3, 36].

El objetivo principal de un sistema tolerante a fallos es mantener su eficiencia aún con la presencia de fallos. En otras palabras, la tolerancia a fallos es un atributo de la topología de la red esencial para lograr realizaciones fiables en un tiempo razonable.

Entre las consideraciones en el diseño de la topología de un sistema multiprocesador destacamos la vulnerabilidad, que es una medida de la capacidad del sistema para la resistencia a fallos de enlaces o nodos, así como el retraso del encaminamiento (routing) máximo. Varias medidas de vulnerabilidad han sido en la literatura. Una medida de vulnerabilidad comúnmente utilizada es el número máximo de procesadores que pueden fallar simultáneamente sin desconectar los procesadores que no han fallado. Así que la conectividad del grafo subyacente a un sistema multiprocesador puede ser utilizada como una medida de la vulnerabilidad del sistema. El retraso máximo sufrido por un mensaje se mide por la longitud máxima de los caminos más cortos entre todos los pares de elementos y así el diámetro puede ser utilizado como una medida para evaluar el retraso máximo en la red de interconexión. Varios resultados importantes sobre arquitecturas que involucran diámetro y conectividad han sido presentados en la literatura (ver por ejemplo [5] y [31]).

Mientras que el retraso máximo es una consideración importante en el diseño de la topología de un sistema multiprocesador, una cuestión igualmente importante es el incremento máximo que puede sufrir este retraso cuando fallan procesadores o líneas de comunicación. Chung y Garey [15] y Peyrat [38] han presentado cotas sobre el incremento máximo posible en diámetros cuando algunos vértices o ramas son eliminados de un grafo. Boesch et al. [10] han definido y estudiado una nueva medida de realización basada en el número mínimo de vértices o ramas

que deben ser eliminados para incrementar el diámetro de un grafo. Sengupta et al [41] han presentado una interesante topología para la cual el incremento máximo en el diámetro es mínimo cuando cierto número de vértices y/o ramas son eliminados. Esta topología está basada en otra propuesta anteriormente por Pradhan en [36].

Motivados por las consideraciones anteriores hemos orientado nuestra línea de investigación hacia el estudio de la vulnerabilidad del diámetro de grafos densos.

El contenido de esta tesis está organizado como sigue:

El Capítulo 1 está dedicado a presentar algunas definiciones, así como introducir algunos resultados conocidos sobre los temas de estudio de este trabajo. Las Secciones 1.1 y 1.2 tienen por objeto el presentar los conceptos básicos de teoría de grafos utilizados en esta memoria. En la Sección 1.3 se presentan algunas definiciones y resultados conocidos sobre vulnerabilidad. Las familias de grafos objeto de nuestro estudio las presentaremos en la Sección 1.4, y dedicamos la Sección 1.5 para introducir un problema clásico en teoría de grafos, la optimización de grafos, así como una técnica de obtención de grafos.

El Capítulo 2 lo hemos organizado del siguiente modo. En la Sección 2.1 presentamos algunas de las principales propiedades conocidas sobre los grafos Impares. Estudiaremos en la Subsección 2.2.1 el comportamiento del diámetro de los subgrafos resultantes de eliminar cualquier subconjunto de vértices de cardinal inferior al grado del grafo, y dedicaremos la Subsección siguiente a estudiar el comportamiento del diámetro cuando eliminamos ramas. Con los resultados de este Capítulo hemos elaborado el artículo [42].

El Capítulo 3 lo dedicamos al estudio de los grafos n -cubo plegados. En la Sección 3.1 presentamos algunas definiciones y propiedades relacionadas con estos grafos, y en la siguiente Sección se realiza un estudio de la vulnerabilidad del diámetro de estos grafos bajo la eliminación de vértices y ramas. Los resultados de este Capítulo se recogen en el artículo [43].

Y finalmente, el Capítulo 4 se dedica a la obtención de grafos $(\Delta, D, D, 1)$

6

de orden elevado. La técnica y el algoritmo que utilizaremos para generar estos grafos se introducen en las Secciones 4.1 y 4.2, presentándose en la Sección 4.3 los nuevos grafos $(\Delta, D, D, 1)$ obtenidos.

Capítulo 1

Resultados básicos

1.1 Definiciones básicas de Teoría de Grafos

A continuación vamos a definir los principales conceptos de teoría de grafos que utilizaremos en esta tesis. Para un estudio en profundidad de estos conceptos pueden verse [27] y [28].

Un *grafo* es un par ordenado $G = (V, E)$ formado por un conjunto V cuyos elementos reciben el nombre de *vértices* y un conjunto E cuyos elementos son pares no ordenados de vértices que reciben el nombre de *ramas*. Gráficamente, representaremos los vértices de un grafo por puntos y las ramas por líneas que unen los vértices que las forman.

Los grafos con los que trabajaremos son no dirigidos, sin bucles (ramas cuyos vértices extremos coinciden), ni ramas múltiples. Un *grafo dirigido* o *digrafo* es un grafo $D = (V, A)$ donde los elementos del conjunto A (*arcos*) son ahora pares ordenados de vértices.

Sea $G = (V, E)$ un grafo, diremos que $G_1 = (V_1, E_1)$ es un *subgrafo* de G si verifica que $V_1 \subset V$ y $E_1 \subset E$. Y diremos que G_1 es un *subgrafo generador* de G si y sólo si $V_1 = V$ y $E_1 \subset E$.

Llamaremos *orden* de un grafo $G = (V, E)$ al cardinal del conjunto V . (Todos los grafos con los que trabajamos en esta tesis tienen orden finito).

Si v y w son dos vértices de un grafo G tal que el par $\{v, w\}$ es una rama del grafo, diremos que los vértices v y w son *adyacentes*.

La *matriz de adyacencia* del grafo $G = (V, E)$ de orden n es una matriz $A = A(G)$ de orden $n \times n$ cuyos elementos $a_{i,j}$ vienen dados por la expresión

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ y } v_j \text{ son adyacentes;} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Se deduce directamente de la definición que A es una matriz simétrica de traza 0.

Sean v y w vértices de un grafo G . Una *cadena de longitud l* de v a w es una sucesión

$$v = u_0, u_1, u_2, \dots, u_{l-1}, u_l = w$$

de vértices del grafo G tal que el par $\{u_i, u_{i+1}\}$ es una rama de G . Si una cadena tiene todos sus vértices interiores diferentes le llamaremos *camino*, notemos que la longitud de un camino es el número de ramas por las que pasa. Diremos que dos (u, v) -caminos son *vértice-disjuntos* o *internamente disjuntos* si los vértices interiores a los dos caminos son diferentes y que dos (u, v) -caminos son *rama-disjuntos* si ambos caminos no tienen ninguna rama en común. Llamaremos *ciclo* a un camino en el que coinciden sus vértices extremos, y *girth* a la longitud del ciclo de longitud mínima de un grafo.

Diremos que un grafo G es *conexo* si para cualquier par de vértices v, w , del grafo existe un camino de v a w .

Si v y w son dos vértices de un grafo G , la *distancia* de v a w , denotada por $d(v, w)$, es la longitud del camino más corto entre v y w . Si no existe ningún camino entre v y w , consideraremos que $d(v, w) = \infty$.

El *diámetro* de un grafo G , denotado $D(G)$, se define como el máximo de las distancias entre todos los pares de vértices del grafo. Si G no es conexo, tendremos $D(G) = \infty$.

Dado $v \in V(G)$, denotaremos por $\Gamma_j(v)$ al conjunto $\{w \in V(G) / d(v, w) = j\}$. El conjunto de vértices adyacentes a un vértice v se representará por $\Gamma(v)$ y su

cardinal se conoce como *grado* del vértice v , esto es, el grado de un vértice es el número de ramas que inciden sobre ese vértice. Representaremos por $\Delta(G)$ al *grado máximo* de los vértices de un grafo G y por $\delta(G)$ al *grado mínimo*. Si todos los vértices del grafo tienen el mismo grado, esto es, si $\Delta(G) = \delta(G) = d$, diremos que G es *d-regular*.

Si para cualquier par de vértices $u, v \in V(G)$ que se encuentran a distancia $d(u, v) = j$ se definen los números:

$$c_j(u, v) = |\Gamma_{j-1}(u) \cap \Gamma(v)|,$$

$$a_j(u, v) = |\Gamma_j(u) \cap \Gamma(v)|,$$

$$b_j(u, v) = |\Gamma_{j+1}(u) \cap \Gamma(v)|.$$

Diremos que G es un grafo *distancia-regular* si $a_j(u, v) = a_j$, $b_j(u, v) = b_j$ y $c_j(u, v) = c_j$ son independientes de los vértices u y v .

Dos ejemplos de grafos que utilizaremos frecuentemente son los grafos completos y los grafos ciclo.

Un grafo se llama *completo* cuando cualquier par de vértices del grafo son adyacentes. El grafo completo de orden n se denota por K_n . Este grafo es conexo, $(n - 1)$ -regular de diámetro 1.

Diremos que un grafo es un *ciclo de orden n* , denotado C_n , si es conexo y 2-regular.

1.2 Automorfismos de grafos

Diremos que dos grafos $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ son isomorfos si existe una aplicación biyectiva

$$g : V_1 \longrightarrow V_2$$

entre sus conjuntos de vértices que conserva las adyacencias, es decir

$$\{v, w\} \in E_1 \quad \Leftrightarrow \quad \{g(v), g(w)\} \in E_2.$$

(Generalmente no distinguiremos entre grafos isomorfos).

Un *automorfismo* de un grafo G es una permutación del conjunto de vértices del grafo que conserva las adyacencias, esto es, la permutación γ es un automorfismo si para cualquier rama $e = \{u, v\}$ del grafo G , $\gamma(e) = \{\gamma(u), \gamma(v)\}$ también es una rama del grafo.

El conjunto de todos los automorfismos de un grafo G con la operación de composición de permutaciones forma un grupo, el cual llamaremos *grupo de automorfismos* de G , y lo denotaremos por $Aut(G)$.

Dado un grafo G , su conjunto de vértices $V(G)$ se puede representar como unión disjunta de órbitas de $Aut(G)$. Recordemos que una *órbita* es el conjunto de imágenes de un elemento de $V(G)$ bajo las permutaciones en $Aut(G)$.

Diremos que un grafo G es *vértice-transitivo* si su grupo de automorfismos $Aut(G)$ actúa transitivamente sobre el conjunto de vértices del grafo $V(G)$, es decir, si para cualquier par de vértices u, v del grafo G , existe un elemento $\gamma \in Aut(G)$ con $\gamma(u) = v$, (esto equivale a decir que sólo hay una órbita).

Sea G un grafo con grupo de automorfismos $Aut(G)$, diremos que G es *distancia-transitivo* si para cualesquiera u, v, x, y , vértices de G con $d(u, v) = d(x, y)$, existe un automorfismo g en $Aut(G)$ que verifica $g(u) = x$ y $g(v) = y$.

1.3 Vulnerabilidad del diámetro

Un concepto usual en el estudio de la tolerancia a fallos en una red de interconexión está basada en la conectividad del grafo que modela la red.

La *vértice-conectividad* de un grafo G , denotada por $\kappa(G)$, es el mínimo número de vértices que se han de eliminar de un grafo G para que el grafo quede desconectado o reducido al grafo trivial (grafo formado por un solo vértice). La *rama-conectividad* de un grafo G , denotada $\lambda(G)$, es el mínimo número de ramas que debemos eliminar del grafo G para que quede desconectado.

Si $\delta(G)$ denota el grado mínimo de un grafo G , es obvio que $\kappa(G)$ y $\lambda(G)$ son $\leq \delta(G)$. Además, se demuestra en [28] que para cualquier grafo G se verifica que

$$\kappa(G) \leq \lambda(G) \leq \delta(G).$$

En una red de interconexión modelada por un grafo con vértice-conectividad n , está garantizado que siga conectada aún si fallan $(n - 1)$ procesadores. Sin embargo, aunque el grafo siga siendo conexo, el diámetro de la red se puede incrementar considerablemente. Una buena medida para juzgar este aspecto de tolerancia a fallos de la red es la *vulnerabilidad del diámetro*: el incremento que sufre el diámetro cuando se elimina un cierto número de vértices o ramas. Este parámetro mide el incremento del retraso máximo en la transmisión de los mensajes cuando fallan elementos de la red.

La idea de utilizar el diámetro como una medida de la fiabilidad de una red ha sido tratada por Boesch y Harary en [10]. Estos autores introducen dos conceptos análogos de conectividad (persistencia y rama-persistencia) para estudiar la vulnerabilidad del diámetro de un grafo que modela una red.

La *persistencia* de un grafo G , $\rho_0(G)$, es el mínimo número de vértices que deben ser eliminados para incrementar el diámetro del grafo u obtener un grafo trivial. Y la *rama-persistencia* de un grafo G , $\rho_1(G)$, es el mínimo número de ramas que deben ser eliminados del grafo con el fin de incrementar el diámetro del grafo o bien obtener un grafo desconexo.

Teniendo en cuenta la analogía entre persistencia y conectividad, se tienen los siguientes resultados paralelos al teorema de Menger [10].

- La persistencia de un grafo G de diámetro D es igual al mínimo del máximo número de (u, v) -caminos disjuntos de longitud $\leq D$, sobre todos los pares de vértices no adyacentes (u, v) .
- Un grafo G de diámetro D tiene persistencia n si y sólo si para cualquier elección de $U, W \subset V(G)$ con $U \cap W = \emptyset$, y ningún vértice de U adyacente a ningún vértice de W , existen al menos n caminos disjuntos de longitud $\leq D$ que unen U y W .
- La rama-persistencia de un grafo G con diámetro D viene dada por el

mínimo sobre todos los pares de vértices (u, v) del máximo número de (u, v) -caminos rama-disjuntos de longitud $\leq D$.

- Un grafo G de diámetro D tiene rama-persistencia n si y sólo si para cualquier elección de los subconjuntos $U, W \subset V(G)$ con $U \cap W = \emptyset$, existen al menos n caminos rama-disjuntos de longitud $\leq n$ que unen vértices de los conjuntos U y W .

1.4 Algunas familias de grafos

Muchas estructuras han sido propuestas como topologías para redes de interconexión, aunque relativamente pocas de ellas han sido implementadas. Entre estas últimas el hipercubo n -dimensional o n -cubo ofrece un gran número de ventajas. De hecho, las máquinas en paralelo basadas en el hipercubo se construyen, son comercializadas (cubo cósmico de Caltech, el iPSC/860 de Intel y el NCUBE de NCUBE Inc. entre otras), y se espera que seguirán jugando un papel importante en el futuro.

1.4.1 Grafo n -cubo

Recordemos que un grafo *hipercubo n -dimensional* o *n -cubo*, denotado por Q_n es un grafo no dirigido de orden 2^n , donde cada vértice puede identificarse por un número binario de n dígitos y tal que existe una rama entre dos vértices de Q_n si y sólo si la representación binaria de sus etiquetas difieren en exactamente un dígito. En la Figura 1.1 tenemos representado el 3-cubo, Q_3 .

Una propiedad importante de estos grafos es que se pueden construir recursivamente a partir de cubos de dimensión inferior. Es decir, consideremos dos $(n - 1)$ -cubos cuyos vértices están numerados del mismo modo desde 0 hasta $2^{n-1} - 1$. Uniendo cada vértice del primer $(n - 1)$ -cubo al vértice del segundo que tiene la misma etiqueta, obtendremos un n -cubo. De hecho, es suficiente con reenumerar los vértices del primer $(n - 1)$ -cubo como $0 \wedge a_i$ y los del segundo por

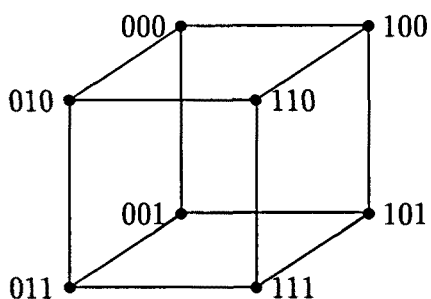


Figura 1.1: Hipercubo de orden 2^3

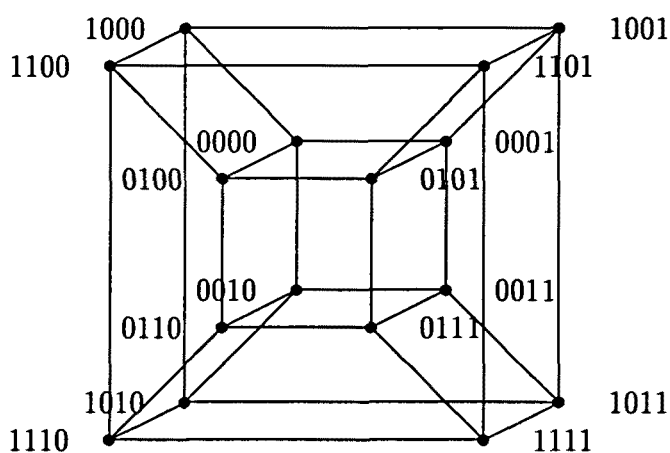
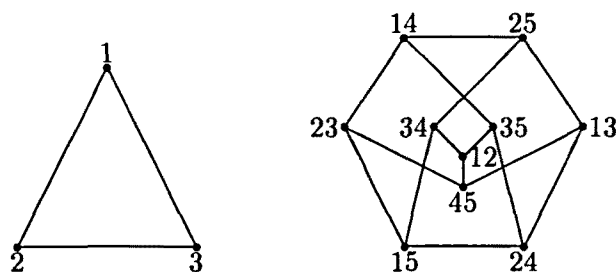


Figura 1.2: Hipercubo de orden 2^4

$1 \wedge a_i$; donde a_i es un número en binario que representa los dos vértices análogos de los $(n - 1)$ -cubo y donde \wedge denota la concatenación de números binarios. Esto lo tenemos representado en la Figura 1.2, donde un 4-cubo se obtiene uniendo todas las esquinas de un 3-cubo interior con las correspondientes esquinas de un 3-cubo exterior.

Entre las propiedades que hacen atractivo al hipercubo Q_n destacaremos su bajo diámetro (n), el gran número de caminos disjuntos que posee (n), su alto grado de simetría, su comodidad para simular retículos bidimensionales o tridimensionales, su fácil algoritmo de encaminamiento, así como su alto grado

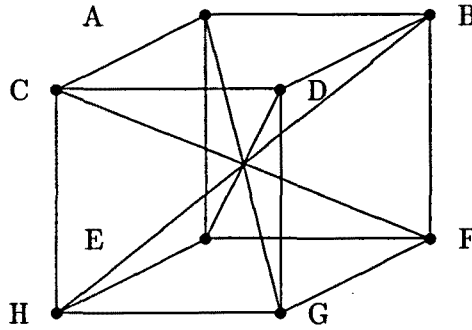
Figura 1.3: Grafos O_2 y O_3

de tolerancia a fallos (ver por ejemplo [4], [34] y [39]). La tolerancia a fallos en hipercubos ha sido estudiada y varias técnicas interesantes han sido propuestas por diferentes autores [19, 3, 13, 14, 21, 47]. M.S. Krishnamoorthy y B. Krishnamurthy utilizando producto cartesiano de grafos probaron en [32] que el diámetro del hipercubo se incrementa en una unidad cuando se eliminan hasta $n-1$ vértices del grafo. Este interesante resultado revela la alta vulnerabilidad del hipercubo.

1.4.2 Grafo Impar

Dado n un número entero mayor que 1, y dado X un conjunto de cardinalidad impar $2n + 1$, por ejemplo $X = \{1, 2, \dots, 2n + 1\}$, se define el *grafo Impar* de grado $n + 1$, que denotaremos por O_{n+1} [8, 9], como aquel grafo cuyos vértices corresponden a los subconjuntos de X de cardinal n , y tal que dos vértices son adyacentes siempre que los subconjuntos correspondientes a estos vértices sean disjuntos. En la Figura 1.3 tenemos representados los grafos O_2 y O_3 . Notemos que O_2 corresponde al grafo completo de orden 3, K_3 , y O_3 es el conocido grafo de Petersen.

Las redes de interconexión cuya topología está basada en esta familia de grafos han sido propuestas [20] como alternativa interesante a las arquitecturas más tradicionales, como puede ser el hipercubo. Esto es debido a que esta topología posee muchas propiedades atractivas, destacamos entre ellas su alta densidad, alto grado de simetría, así como su alto grado de tolerancia a fallos.

Figura 1.4: Grafo \square_4

1.4.3 Grafo n -cubo plegado

Las redes de interconexión cuya topología está basada en los grafos *hipercubo reforzados* (hipercubos donde se establecen conexiones extras entre pares de vértices del cubo por medio de ramas extras) han sido propuestos [45, 46] como una alternativa interesante a las arquitecturas basadas en el hipercubo, por lograr una reducción considerable en el diámetro, así como una mejora notable en la distancia media internodo y en la capacidad de tráfico.

Los *grafos n -cubo plegados* son un tipo particular de los hipercubos ampliados. Obtendremos un grafo n -cubo plegado al añadir en un $(n - 1)$ -cubo una rama extra entre cada par de vértices que se encuentran a distancia máxima. Esto es, consideremos por ejemplo el hipercubo de orden 2^3 (ver Figura 1.1), el cual sabemos que tiene diámetro 3, si añadimos una rama adicional entre todos los pares de vértices que se encuentran a distancia 3 obtendremos un 4-cubo plegado (ver Figura 1.4).

Varios fueron los motivos que nos indujeron al estudio de los grafos n -cubo plegados: (i) Su orden, al igual que en los hipercubo, es una potencia de 2, (ii) su diámetro es la mitad del diámetro del hipercubo del mismo orden, mientras que su grado únicamente se incrementa en una unidad, y (iii) como probamos en el

Capítulo 3, las redes de interconexión modeladas mediante n -cubo plegados son extremadamente robustas.

1.5 Los problemas (Δ, D) y (Δ, D, D', s)

Los recientes avances tecnológicos han hecho posible que redes de interconexión muy complejas sean construidas. Por lo tanto, como se comentó en la introducción, a la hora de diseñar una red de interconexión se deberán tener en cuenta varios requisitos: El grafo que modela la red deberá tener un orden elevado (para interconectar gran número de nodos o procesadores), un diámetro bajo (para que el retraso en la transmisión de los mensajes sea lo más pequeño posible), así como el grado de sus vértices (por razones económicas, geográficas, técnicas,...) también deberá ser bajo. En términos de teoría de grafos esto se traduce como *problema* (Δ, D) .

Si definimos un *grafo* (Δ, D) como aquel de grado máximo Δ y diámetro D , el *problema* (Δ, D) consiste en hallar grafos (Δ, D) tales que su orden sea el más grande posible.

Es bien conocido que el orden N de un grafo (Δ, D) debe satisfacer la desigualdad

$$N \leq 1 + \Delta + \Delta(\Delta - 1) + \dots + \Delta(\Delta - 1)^{D-1} = \begin{cases} 2D + 1 & \text{si } \Delta = 2, \\ \frac{\Delta(\Delta-1)^D - 2}{\Delta - 2} & \text{si } \Delta \geq 3; \end{cases}$$

donde la parte derecha recibe el nombre de *cota de Moore*, $M(\Delta, D)$.

Llamaremos *grafo de Moore* a un grafo (Δ, D) que tenga orden igual a la cota de Moore.

Si $D = 1$, el grafo completo $K_{\Delta+1}$ es un grafo $(\Delta, 1)$ con orden $\Delta + 1 = M(\Delta, 1)$, o lo que es lo mismo un grafo de Moore. Si $\Delta = 2$, los grafos de Moore son los ciclos de longitud $2D + 1$. En los restantes casos, para $D \geq 2$ y $\Delta \geq 3$, esta cota se alcanzará únicamente cuando $D = 2$ y $\Delta = 3, 7$, y (quizás) 57 (véase [8] y [30]).

El primer caso $D = 2$ y $\Delta = 3$, corresponde al grafo de Petersen. Para $D = 2$ y $\Delta = 7$, existe un grafo debido a Hoffman y Singleton [30] con 50 vértices que alcanza la cota de Moore. Y para $D = 2$ y $\Delta = 57$, podría existir un grafo de Moore con 3250 vértices, pero hasta la fecha nadie ha sido capaz de construirlo o probar su no existencia.

El problema (Δ, D) ha sido estudiado por varios autores [7, 1, 23], aunque las mejores soluciones conocidas para este problema están, en general, muy alejadas de la cota de Moore.

Con el incremento en el número de nodos en la red, la posibilidad de que una o más componentes del sistema fallen también se incrementa. Por este motivo, en el diseño de redes de interconexión se debe prever el hecho de que nodos y/o enlaces de comunicación puedan dejar de funcionar, para que en tal caso, la comunicación sea posible con razonable eficiencia. En términos de grafos, esta situación ha sido modelada en la literatura por el conocido *problema* (Δ, D, D', s) .

Si definimos un *grafo* (Δ, D, D', s) como un grafo (Δ, D) tal que los subgrafos que se obtienen de eliminar cualquier subconjunto de hasta s vértices del grafo tienen diámetro $\leq D'$. El *problema* (Δ, D, D', s) para grafos consiste en hallar grafos (Δ, D, D', s) de orden máximo.

Los casos $s = 1$ y $D' - D = 0, 1, 2$ han sido estudiados (ver por ejemplo [5, 6, 11, 25, 48, 38]), al igual que el caso $s = \Delta - 1$ (véase [48, 50]).

En esta tesis trataremos el problema $(\Delta, D, D, 1)$. Una cota sobre el orden de estos grafos viene dada por la expresión

$$N \leq 1 + \Delta + \frac{\Delta(\Delta - 1) + \Delta(\Delta - 1)^2 + \dots + \Delta(\Delta - 1)^{D-1}}{2}.$$

Esto es así, porque en un grafo $(\Delta, D, D, 1)$ cualquier par de vértices no adyacentes deben estar unidos por al menos dos caminos de longitud $\leq D$ y el número de caminos de longitud i desde un vértice dado es a lo sumo $\Delta(\Delta - 1)^i$, $1 \leq i \leq D$.

J.L.A. Yebra en [48] prueba que, para $\Delta > 2$, esta cota no puede alcanzarse para valores del diámetro superiores a 2.

Para la construcción de grafos $(\Delta, D, D, 1)$ utilizaremos una técnica presentada en [7] como “*compound graphs*”. Esta técnica consiste en crear un grafo, al unir copias de otro grafo más simple, mediante pocas ramas entre cualquier par de copias.

Capítulo 2

Grafos Impares

Este capítulo lo hemos dedicado al estudio de la vulnerabilidad del diámetro de los grafos Impares. Recordemos que la vulnerabilidad del diámetro es uno de los parámetros propuestos para medir la fiabilidad de una red. Con este propósito hemos organizado el capítulo del siguiente modo:

En primer lugar presentaremos algunas propiedades asociadas a los grafos Impares, las cuales serán de utilidad en nuestro estudio. A continuación estudiaremos el comportamiento del diámetro de los subgrafos resultantes al eliminar en un grafo Impar cualquier subconjunto de vértices de cardinal menor que el grado del grafo. Y para finalizar el capítulo realizaremos el mismo estudio cuando eliminamos ramas.

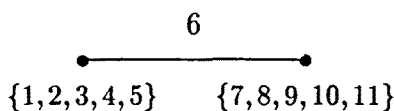
2.1 Propiedades básicas

Como consecuencias de la definición de grafo Impar (recordemos que O_{n+1} se define como aquel grafo cuyos vértices corresponden a los subconjuntos de cardinal n de un conjunto de cardinal $2n + 1$, y tal que dos vértices son adyacentes siempre que los subconjuntos correspondientes a estos vértices sean disjuntos) tendremos que

- El orden de O_{n+1} es $\binom{2n+1}{n}$ y

- O_{n+1} es regular de grado $n + 1$.

La regla de adyacencia nos permitirá colorear cada rama del grafo con el único elemento del conjunto X que no hemos utilizado al etiquetar sus vértices extremos. Así, por ejemplo, en O_6 los vértices etiquetados $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{7, 8, 9, 10, 11\}$ son adyacentes, y colorearemos la rama que los une con la única etiqueta del conjunto $X = \{1, 2, \dots, 11\}$ que no hemos utilizado en la construcción de sus vértices extremos, esto es:



Esta coloración de las ramas nos llevará a colorear los caminos en el grafo O_{n+1} . A continuación vamos a presentar algunas propiedades que se derivan de esta coloración (véase [9]).

- **P2.1** Si A y B son dos vértices del grafo O_{n+1} que se encuentran a distancia 2, y si cd es la coloración del correspondiente (A, B) -camino, entonces el vértice B tendrá por estructura

$$B = A \cup \{c\} \setminus \{d\}.$$

De forma general, si un camino de longitud par coloreado

$$c_1 d_1 c_2 d_2 \cdots c_k d_k,$$

va de un vértice A a un vértice B , entonces

$$B = [A \cup' \{c_i\}] \setminus (\cup' \{d_i\}),$$

donde el símbolo \cup' significa que los elementos que se repiten en un conjunto son considerados tantas veces como aparecen. Análogamente:

- **P2.2** Si un camino de longitud impar $2k + 1$ coloreado

$$c_1 d_1 c_2 d_2 \cdots c_k d_k c_{k+1},$$

une un vértice A con un vértice B , entonces el vértice B tendrá por estructura

$$B = [(X - A) \cup \{d_i\}] \setminus (\cup \{c_i\}).$$

Si evitamos repeticiones en las etiquetas c_i 's y d_i 's obtendremos el siguiente resultado sobre caminos más cortos.

- **P2.3** Dados A y B , vértices de O_{n+1} , y dado $m = |A \cap B|$, se verifica que los caminos más cortos de longitud par entre A y B tienen longitud $2(n - m)$, mientras que los caminos más cortos de longitud impar entre A y B tienen longitud $2m + 1$.

Demostración Dados A y B vértices de O_{n+1} , con subconjuntos de etiquetas

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n-m}, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$$

y

$$B = \{b_1, b_2, \cdots, b_{n-m}, \alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\},$$

en X tendremos determinados dos subconjuntos, a saber

$$A \cap B = \{\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m\}$$

y

$$C = X - (A \cup B) = \{\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_{m+1}\}.$$

Por la propiedad P2.1 deducimos que

$$b_1 a_1 b_2 a_2 \cdots b_{n-m} a_{n-m}$$

es un camino más corto de longitud $2(n - m)$ entre A y B .

(Notemos que si permutamos el orden de las etiquetas a_i 's y permutamos también el orden de las etiquetas b_i 's podremos obtener $((n-m)!)^2$ caminos del tipo presentado anteriormente).

Análogamente, de la propiedad P2.2, deducimos que

$$\beta_1 \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 \cdots \beta_m \alpha_m \beta_{m+1}$$

es un camino más corto entre A y B , el cual tiene longitud $2m + 1$.

(Notemos que al permutar el orden de las etiquetas α_i 's y también el orden de las etiquetas β_i 's, podremos obtener $(m!)((m+1)!)$ caminos del tipo anterior). \square

Como consecuencia de estas propiedades tendremos las siguientes:

- **P2.4** *La distancia entre dos vértices A y B del grafo O_{n+1} que verifican $|A \cap B| = m$ viene dada por la expresión*

$$d(A, B) = \min\{2m + 1, 2(n - m)\} = \begin{cases} 2m + 1 & \text{si } m < \frac{n}{2}, \\ 2(n - m) & \text{si } m \geq \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Por lo tanto, el diámetro del grafo O_{n+1} es n . Además, si

$$c_1 d_1 c_2 d_2 \cdots c_k d_k$$

es la coloración de un ciclo de longitud par, deberá verificarse que $U'\{c_i\} = U'\{d_i\}$, para que

$$A = [A U'\{c_i\}] \setminus (U'\{d_i\}),$$

es decir, para que los vértices extremos del camino de longitud par coincidan. De este modo, es fácil probar, teniendo en cuenta la estructura de los vértices del ciclo, que en O_{n+1} , con $n \geq 2$, es 6 la longitud del ciclo par de longitud más corta. A este ciclo le corresponderá una coloración del tipo $\alpha\beta\gamma\alpha\beta\gamma$ (véase la Figura 2.1). Por otra parte, como consecuencia de la propiedad P2.3 tenemos que:

- **P2.5** *La longitud del ciclo impar más corto de O_{n+1} es $2n + 1$.*

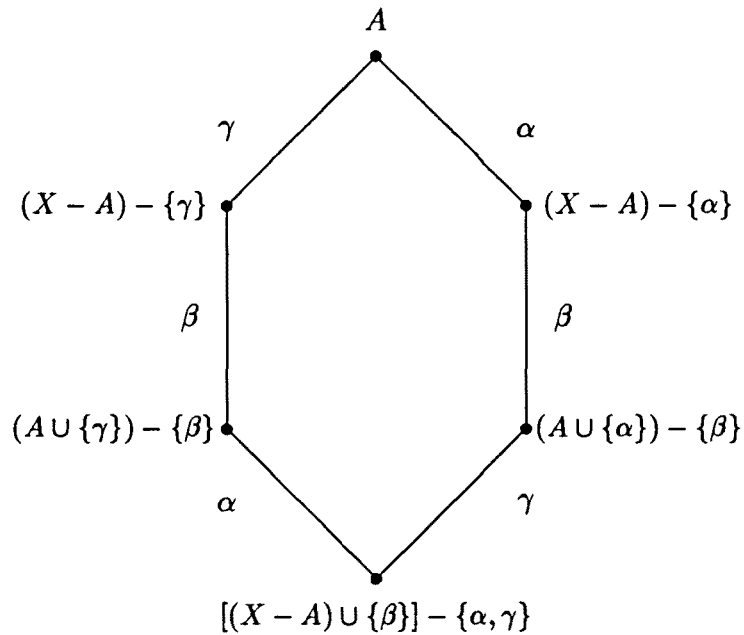


Figura 2.1: Ciclo de longitud 6

Pudiéndose deducir además, de la propiedad P2.2 que los ciclos de longitud $2n + 1$ son aquellos que utilizan los $2n + 1$ colores del conjunto X .

Para finalizar el repaso de aquellas propiedades de los grafos Impares que nos serán de utilidad en nuestro estudio notemos que

- **P2.6** *El grafo O_{n+1} es distancia-transitivo.*

Efectivamente [9], si tenemos cuatro vértices A, B, C, D de O_{n+1} con $d(A, B) = d(C, D)$, de la propiedad P2.4 se deduce que $|A \cup B| = |C \cup D|$, y por lo tanto podremos construir una permutación de X que lleve A a C y B a D .

2.2 Vulnerabilidad del diámetro

A continuación vamos a estudiar la vulnerabilidad del diámetro de los grafos Impares. El comportamiento del diámetro de estos grafos bajo la eliminación de vértices o ramas ha sido estudiado en los casos $n = 2$ y 3 [50]. Para $n = 2$

tenemos el grafo de Petersen O_3 , cuyo diámetro es 2, y sabemos que los subgrafos resultantes de eliminar 1 o 2 vértices cualesquiera del grafo O_3 tienen diámetro 3. Análogamente, el grafo O_4 tiene diámetro 3, y los subgrafos resultantes de eliminar 1, 2 o 3 vértices de O_4 , tienen diámetro 4. Por lo tanto, estos grafos son poco vulnerables ya que en ambos casos el diámetro se incrementa únicamente en una unidad. Por otra parte, la vulnerabilidad del diámetro será mayor si eliminamos ramas, ya que en ambos casos la eliminación de sólo una rama del grafo incrementa el diámetro en dos unidades. Efectivamente, al tener O_3 girth 5, tendremos que al eliminar una rama del grafo, el camino alternativo más corto entre los vértices extremos a dicha rama tendrá longitud 4. Análogamente, al tener O_4 girth 6, si eliminamos una rama del grafo, el camino más corto entre los vértices extremos a la rama tendrá longitud 5.

En las siguientes subsecciones estudiaremos la vulnerabilidad del diámetro de grafos O_{n+1} , cuando $n \geq 4$, primero para la eliminación de vértices y a continuación para la eliminación de ramas.

2.2.1 Eliminación de vértices

Veamos en primer lugar cómo la eliminación de $\Delta - 1 = n$ vértices del grafo O_{n+1} no puede incrementar el diámetro en más de 2 unidades.

Proposición 1. *Si $n \geq 2$, entre cualquier par de vértices no adyacentes de O_{n+1} hay $n + 1$ caminos internamente disjuntos de longitud $\leq n + 2$.*

Demostración. Sean A y B vértices de O_{n+1} con subconjuntos de etiquetas

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-m}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$$

y

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_{n-m}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\},$$

y consideremos el subconjunto de X

$$C = X - (A \cup B) = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{m+1}\}.$$

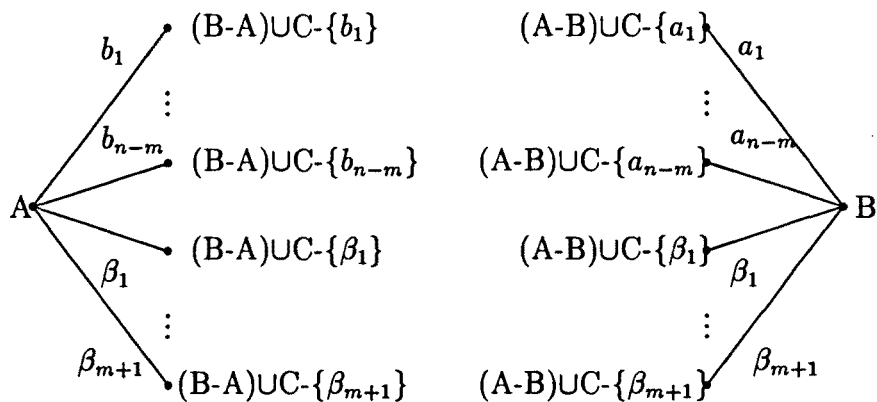


Figura 2.2: Distribución de los $n + 1$ caminos internamente disjuntos

Por ser O_{n+1} un grafo regular de grado $\Delta = n + 1$, los $n + 1$ caminos que estamos buscando deberán atravesar cada uno de los vértices de $\Gamma(A)$ y también los vértices de $\Gamma(B)$. Dado que

$$\Gamma(A) = \{ [(B - A) \cup C] - \{b_i\} \}_{i=1}^{n-m} \cup \{ [(B - A) \cup C] - \{\beta_i\} \}_{i=1}^{m+1}$$

$$\Gamma(B) = \{ [(A - B) \cup C] - \{a_i\} \}_{i=1}^{n-m} \cup \{ [(A - B) \cup C] - \{\beta_i\} \}_{i=1}^{m+1}$$

tendremos la situación que esquematizamos en la Figura 2.2.

Las coloraciones de los $n + 1$ caminos internamente disjuntos que vamos a construir serán del tipo $b_i \cdots a_i$ o $\beta_i \cdots \beta_j$, esto es, no utilizaremos caminos con coloración $b_i \cdots \beta_j$ o $\beta_i \cdots a_j$. Para la obtención de estos caminos, consideraremos por separado los tres casos siguientes:

$$m \geq \frac{n}{2}, \quad m \leq \frac{n-3}{2} \quad \text{y} \quad \frac{n-3}{2} < m < \frac{n}{2}.$$

(a) $m \geq \frac{n}{2}$

Si $m \geq \frac{n}{2}$ por la propiedad P2.4 tendremos que $d(A, B) = 2(n - m) \leq n$.

Por lo tanto, la coloración de los caminos más cortos entre los vértices A y B será del tipo $b_i \cdots a_i$. En tal caso, no habrán más de $n - m$ caminos internamente disjuntos del citado tipo.

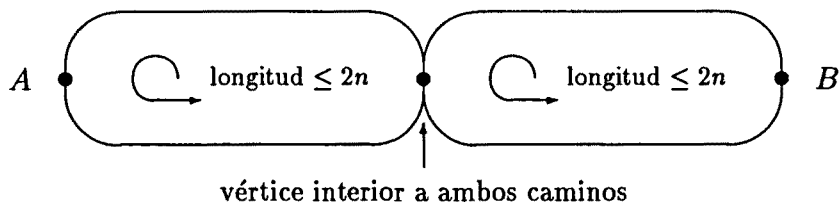


Figura 2.3: Dos (A, B) -caminos con un vértice interno común

Seleccionemos los siguientes caminos con coloraciones:

<i>camino 1</i>	b_1	a_1	b_2	a_2	\cdots	b_{n-m}	a_{n-m}
<i>camino 2</i>	b_2	a_2	b_3	a_3	\cdots	b_1	a_1
	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\cdots	\vdots	\vdots
<i>camino $n-m$</i>	b_{n-m}	a_{n-m}	b_1	a_1	\cdots	b_{n-m+1}	a_{n-m+1}

Estos caminos son claramente independientes. De hecho, podemos deducir a partir de la propiedad P2.5, que si cualquier par de caminos tuvieran un vértice interno común (situación representada en la Figura 2.3), los ciclos resultantes a través de A y B deberían tener longitud par, ya que la longitud total ($\leq 2n$) no permite la existencia de un ciclo de longitud impar. Pero por la propiedad P2.1, podemos deducir que los caminos seleccionados no pueden formar ciclos de longitud par.

Los restantes $m + 1$ caminos que tendremos que construir serán caminos más cortos entre $A_i = (B - A) \cup C - \{\beta_i\}$ y $B_i = (A - B) \cup C - \{\beta_i\}$, $1 \leq i \leq m + 1$, esto es, los vértices de $\Gamma(A)$ y $\Gamma(B)$ que aún no han sido utilizados en la obtención de los (A, B) -caminos. De nuevo tendremos que $|A_i \cap B_i| = m \geq \frac{n}{2}$ y por lo tanto $d(A_i, B_i) = 2(n - m) \leq n$. Para todo valor de i , el camino con coloración

$$a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_{n-m} b_{n-m}$$

será un (A_i, B_i) -camino más corto. Por lo tanto, a partir de estos caminos podremos obtener $m + 1$ caminos de longitud $2(n - m) + 2 \leq n + 2$ entre

A y B , los cuales tendrán por coloraciones

$$\beta_i a_1 b_1 a_2 b_2 \cdots a_{n-m} b_{n-m} \beta_i, \quad 1 \leq i \leq m + 1.$$

Como antes, estos caminos son independientes. De hecho, no puede formarse ningún ciclo de longitud impar que atraviese A o B , y la construcción prohíbe la existencia de ciclos de longitud par a través de A o B .

Finalmente, los dos tipos de caminos que hemos obtenido son internamente disjuntos, ya que no puede aparecer ningún ciclo de longitud impar que atraviese A o B , y la construcción prohíbe la existencia de ciclos de longitud par a través de A o B porque los colores β_i aparecen exactamente una vez en cada camino.

(b) $m \leq \frac{n-3}{2}$

Si $m \leq \frac{n-3}{2}$ tendremos que $d(A, B) = 2m + 1 \leq n - 2$. En tal caso, la coloración de los (A, B) -caminos más cortos será del tipo $\beta_i \cdots \beta_j$. El número máximo de caminos internamente disjuntos entre A y B del citado tipo no podrá exceder $m + 1$. Consideremos los siguientes, con coloraciones

<i>camino 1</i>	β_1	α_1	β_2	α_2	\cdots	β_m	α_m	β_{m+1}
<i>camino 2</i>	β_2	α_1	β_3	α_2	\cdots	β_{m+1}	α_m	β_1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\cdots	\vdots	\vdots	\vdots
<i>camino $m+1$</i>	β_{m+1}	α_1	β_1	α_2	\cdots	β_{m-1}	α_m	β_m .

En su construcción hemos utilizado los siguientes vértices adyacentes a A y B :

$$(B - A) \cup C - \{\beta_i\} \in \Gamma(A), \quad 1 \leq i \leq m + 1,$$

$$(A - B) \cup C - \{\beta_j\} \in \Gamma(B), \quad 1 \leq i \leq m + 1.$$

Los $n - m$ (A, B) -caminos que nos faltan por construir atravesarán los restantes vértices de $\Gamma(A)$ y $\Gamma(B)$ que no hemos utilizado en los caminos anteriores; a saber, $A_i = (B - A) \cup C - \{\beta_i\}$ y $B_i = (A - B) \cup C - \{\beta_i\}$.

Además, para minimizar la longitud de estos caminos, deberán verificar que las correspondientes (A_i, B_i) -secciones sean caminos más cortos entre A_i y B_i . Dado que $|A_i \cap B_i| = m + 1 \leq \frac{n-1}{2}$, tendremos que $d(A_i, B_i) = 2(m+1)+1 \leq n$. Por lo tanto, para todo valor de i , el camino con coloración

$$a_i \beta_1 \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 \cdots \beta_m \alpha_m \beta_{m+1} b_i$$

será un camino más corto entre A_i y B_i . Luego, a partir de estos (A_i, B_i) -caminos podremos obtener $n - m$ caminos entre A y B de longitud $2m + 5 \leq n + 2$, los cuales tendrán por coloraciones

$$b_i a_i \beta_1 \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 \cdots \beta_m \alpha_m \beta_{m+1} b_i a_i, \quad 1 \leq i \leq n - m.$$

Como antes, es fácil verificar que se tratará de $n + 1$ caminos internamente disjuntos.

(c) $\frac{n-3}{2} < m < \frac{n}{2}$

Este apartado corresponderá a los casos $m = \frac{n}{2} - 1$ cuando n es par y $m = \frac{n-1}{2}$ cuando n es impar. En ambos casos $m \leq \frac{n}{2}$ y por lo tanto $d(A, B) = 2m + 1 \leq n$. La coloración de los correspondientes caminos más cortos entre A y B será del tipo $\beta_i \cdots \beta_j$. Al igual que en el apartado anterior seleccionaremos los $m + 1$ caminos con coloraciones

$$\begin{array}{l} \text{camino 1} \quad \beta_1 \quad \alpha_1 \quad \beta_2 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \beta_m \quad \alpha_m \quad \beta_{m+1} \\ \text{camino 2} \quad \beta_2 \quad \alpha_1 \quad \beta_3 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \beta_{m+1} \quad \alpha_m \quad \beta_1 \\ \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\ \text{camino } m+1 \quad \beta_{m+1} \quad \alpha_1 \quad \beta_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \beta_{m-1} \quad \alpha_m \quad \beta_m. \end{array}$$

Los caminos que nos faltan por construir, al igual que en el caso anterior, tendrán como secciones (A_i, B_i) -caminos más cortos, donde

$$A_i = (B - A) \cup C - \{b_i\} \in \Gamma(A), \quad 1 \leq i \leq n - m$$

y

$$B_i = (A - B) \cup C - \{a_i\} \in \Gamma(B), \quad 1 \leq i \leq n - m.$$

Dado que $|A_i \cap B_i| = m + 1 \geq \frac{n}{2}$, tendremos que $d(A_i, B_i) = 2(n - m - 1) = n$ o $n - 1$, dependiendo de si n es par o impar. Por lo tanto, los correspondientes (A, B) -caminos tendrán por longitud $n + 2$ o $n + 1$, dependiendo de si n es par o impar. Entre ellos seleccionaremos los siguientes, con coloraciones

<i>camino 1</i>	b_1	a_1	b_2	a_2	\cdots	b_{n-m}	a_{n-m}
<i>camino 2</i>	b_2	a_2	b_3	a_3	\cdots	b_1	a_1
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\cdots	\vdots	\vdots
<i>camino $n-m$</i>	b_{n-m}	a_{n-m}	b_1	a_1	\cdots	b_{n-m+1}	a_{n-m+1}

De nuevo, hemos obtenido $n + 1$ caminos internamente disjuntos entre los vértices A y B . \square

En virtud de esta Proposición, podremos afirmar que al eliminar hasta $\Delta - 1 = n$ vértices del grafo O_{n+1} siempre quedará un camino de longitud $\leq n + 2$ entre cualquier par de vértices del subgrafo resultante.

A continuación vamos a probar cómo este resultado es el mejor posible, en el sentido de que una elección adecuada de los vértices a eliminar incrementará el diámetro de O_{n+1} en dos unidades, esto es, de n a $n + 2$.

Proposición 2. *Si $n \geq 4$, es posible eliminar $\Delta - 1 = n$ vértices de O_{n+1} , de tal modo que su diámetro se incremente en dos unidades, de n a $n + 2$.*

Demostración. Sean A y B dos vértices de O_{n+1} con subconjuntos de etiquetas

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-m}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$$

y

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_{n-m}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\},$$

siendo $m = \frac{n}{2} - 1$ si n es par y $m = \frac{n-3}{2}$ si n es impar.

(a) Cuando n es par y $m = \frac{n}{2} - 1$, la eliminación de los $2(m + 1) = n$ vértices

$$(B - A) \cup [C - \{\beta_i\}], \quad (A - B) \cup [C - \{\beta_j\}], \quad 1 \leq i, j \leq m + 1$$

únicamente dejará sin destruir los últimos caminos considerados en la Proposición 1, cuya longitud es $2(n - m) = n + 2$.

(b) Cuando n es impar y $m = \frac{n-3}{2}$, la eliminación de los $2(m+1) = n-1$ vértices

$$(B - A) \cup [C - \{\beta_i\}], \quad (A - B) \cup [C - \{\beta_j\}], \quad 1 \leq i, j \leq m + 1$$

únicamente dejará sin destruir los caminos de longitud $2m + 5 = n + 2$ considerados en la Proposición 1. \square

De este modo, si denotamos por D'_n el valor máximo de los diámetros de los subgrafos que resultan de eliminar hasta n vértices en el grafo O_{n+1} , podremos resumir las Proposiciones 1 y 2 en el siguiente resultado:

Teorema 1. *Dado el grafo O_{n+1} , con $n \geq 4$, se verificará*

$$D'_n = n + 2.$$

A continuación vamos a estudiar la vulnerabilidad del diámetro de los grafos Impares bajo la eliminación de cualquier subconjunto de vértices de cardinal $< \Delta$. Para realizar nuestro estudio trataremos por separado los casos n par y n impar.

Proposición 3. *Dado O_{n+1} , con $n \geq 5$ impar, se verifica:*

$$D'_k = \begin{cases} n & \text{si} & k \leq \frac{n-1}{2} - 1 \\ n + 1 & \text{si} & \frac{n-1}{2} \leq k \leq n - 2 \\ n + 2 & \text{si} & n - 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

Demostración. Dados dos vértices A, B de O_{n+1} , denotemos por m el cardinal del conjunto $A \cap B$.

Por la Proposición 1, sabemos que podemos tomar $n + 1$ caminos internamente disjuntos entre A y B , de longitud menor o igual que $n + 2$, para cualquier valor de m .

Efectivamente, consideremos por separado los siguientes casos, según los valores de m :

1. Si $m > \frac{n+1}{2} \implies d(A, B) = 2(n - m) \leq n - 2$.

Tenemos $n - m$ caminos de longitud $d(A, B) \leq n$, coloreados

$$\begin{array}{ccccccc} b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & \cdots & b_{n-m} & a_{n-m} \\ b_2 & a_2 & b_3 & a_3 & \cdots & b_1 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-m} & a_{n-m} & b_1 & a_1 & \cdots & b_{n-m+1} & a_{n-m+1}, \end{array}$$

y $m + 1$ de longitud $d(A, B) + 2 \leq n$, con coloración

$$\beta_i \ a_1 \ b_1 \ a_2 \ b_2 \ \cdots \ a_{n-m} \ b_{n-m} \ \beta_i, \quad \text{con } 1 \leq i \leq m + 1.$$

En tales condiciones, al eliminar cualquier subconjunto de vértices de cardinal $\leq n$, el diámetro del grafo no aumentará.

2. Si $m = \frac{n+1}{2} \implies d(A, B) = n - 1$.

Al igual que en el caso anterior, tendremos:

$$n - m = \frac{n-1}{2} \text{ caminos de longitud } d(A, B) = n - 1 \text{ y}$$

$$m + 1 = \frac{n+3}{2} \text{ de longitud } d(A, B) + 2 = n + 1.$$

Por lo tanto, si eliminamos cualquier subconjunto de vértices del grafo de cardinal $\leq \frac{n-1}{2} - 1$ el diámetro no aumenta, y si eliminásemos un subconjunto de vértices de cardinal $\geq \frac{n-1}{2}$ el diámetro podría aumentar una unidad.

3. Si $m = \frac{n-1}{2} \implies d(A, B) = 2m + 1 = n$.

Entre A y B tendremos:

$m + 1 = \frac{n+1}{2}$ caminos de longitud $d(A, B)$, coloreados

$$\begin{array}{ccccccc} \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \cdots & \beta_m & \alpha_m \ \beta_{m+1} \\ \beta_2 & \alpha_1 & \beta_3 & \alpha_2 & \cdots & \beta_{m+1} & \alpha_m \ \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \ \vdots \\ \beta_{m+1} & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \cdots & \beta_{m-1} & \alpha_m \ \beta_m, \end{array}$$

y $n - m = \frac{n+1}{2}$ de longitud $2(n - m) = n + 1$, coloreados

$$\begin{array}{ccccccc} b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & \cdots & b_{n-m} & a_{n-m} \\ b_2 & a_2 & b_3 & a_3 & \cdots & b_1 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-m} & a_{n-m} & b_1 & a_1 & \cdots & b_{n-m+1} & a_{n-m+1}. \end{array}$$

Al eliminar cualquier subconjunto de vértices de cardinal $< \frac{n+1}{2}$ el diámetro del grafo no aumenta, pero si se eliminase un subconjunto de vértices de cardinal s , donde $\frac{n+1}{2} \leq s \leq n$, el diámetro del grafo podría aumentar una unidad.

4. Si $m = \frac{n-3}{2} \implies d(A, B) = 2m + 1 = n - 2$.

Por lo tanto, alternativamente a los $n + 1$ caminos presentados en la Proposición 1, podríamos tomar en O_{n+1} otro conjunto de $n + 1$ caminos internamente disjuntos entre A y B , de los cuales:

$2(m+1) = n - 1$ tienen longitud $d(A, B) + 2 = n$, cuyas coloraciones podrían venir dadas por:

$$\begin{array}{cccccccc} a_i & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & \alpha_m & \beta_m & a_i & \beta_{m+1} \\ a_i & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & \cdots & \alpha_m & \beta_{m+1} & a_i & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_i & \alpha_1 & \beta_{m+1} & \alpha_2 & \beta_1 & \cdots & \alpha_m & \beta_{m-1} & a_i & \beta_m, \end{array}$$

con $a_i \in A - B$, y por

$$\begin{array}{cccccccc} b_i & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & \alpha_m & \beta_m & b_i & \beta_{m+1} \\ b_i & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & \cdots & \alpha_m & \beta_{m+1} & b_i & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_i & \alpha_1 & \beta_{m+1} & \alpha_2 & \beta_1 & \cdots & \alpha_m & \beta_{m-1} & b_i & \beta_m, \end{array}$$

con $b_i \in B - A$.

Y dos caminos de longitud $d(A, B) + 4 = n + 2$, con coloraciones, por

ejemplo:

$$\begin{array}{cccccccccccc} b_j & a_j & \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \cdots & \beta_m & \alpha_m & \beta_{m+1} & b_j & a_j \\ b_k & a_k & \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \cdots & \beta_m & \alpha_m & \beta_{m+1} & b_k & a_k, \end{array}$$

con $j, k \neq i$.

Por lo tanto, si eliminamos cualquier subconjunto de vértices del grafo de cardinal $< n-1$, el diámetro de los posibles grafos resultantes no aumentará, mientras que la supresión de n vértices del grafo podría aumentar en dos unidades el diámetro.

5. Si $m < \frac{n-3}{2} \implies d(A, B) = 2m + 1 \leq n - 4$.

Tendremos $m + 1$ caminos de longitud $d(A, B) \leq n - 4$, con coloraciones

$$\begin{array}{cccccccc} \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \cdots & \beta_m & \alpha_m & \beta_{m+1} \\ \beta_2 & \alpha_1 & \beta_3 & \alpha_2 & \cdots & \beta_{m+1} & \alpha_m & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{m+1} & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \cdots & \beta_{m-1} & \alpha_m & \beta_m, \end{array}$$

y $n - m = \frac{n+3}{2}$ de longitud $d(A, B) + 4 \leq n$, coloreados

$$b_i a_i \beta_1 \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 \cdots \beta_m \alpha_m \beta_{m+1} b_i a_i \quad \text{con } 1 \leq i \leq n - m.$$

En tales condiciones, al eliminar cualquier subconjunto de vértices de cardinal $\leq n$, el diámetro del grafo resultante no aumentará.

En conclusión:

1. Si se eliminan k vértices del grafo, donde $k \leq \frac{n-1}{2} - 1$, el diámetro del grafo resultante no aumentará.
2. Si se eliminan k vértices, con $\frac{n-1}{2} \leq k \leq n - 2$, el diámetro podría aumentar y como veremos aumenta en una unidad. Efectivamente, dados A, B vértices de O_{n+1} con $m = \frac{n+1}{2}$, si eliminamos del grafo el conjunto de vértices

$$\{[(B - A) \cup C] - \{b_i\}\}_{i=1}^{\frac{n-1}{2}},$$

destruiremos los caminos más cortos entre A y B , de tal forma que los caminos alternativos más cortos tendrán longitud $n + 1$.

En efecto, la estructura de los restantes caminos entre A y B será de uno de los tres tipos siguientes:

$$A \xrightarrow{\beta_i} [(B-A) \cup C] - \{\beta_i\} \text{ --- } \dots \text{ --- } [(A-B) \cup C] - \{a_j\} \xrightarrow{a_j} B$$

$$A \xrightarrow{\beta_i} [(B-A) \cup C] - \{\beta_i\} \text{ --- } \dots \text{ --- } [(A-B) \cup C] - \{\beta_j\} \xrightarrow{\beta_j} B$$

$$A \xrightarrow{\beta_i} [(B-A) \cup C] - \{\beta_i\} \text{ --- } \dots \text{ --- } [(A-B) \cup C] - \{\beta_i\} \xrightarrow{\beta_i} B$$

y dado que:

- $d([(B-A) \cup C] - \{\beta_i\}, [(A-B) \cup C] - \{a_j\}) = n - 1 \implies$ el primer tipo de caminos tendrá longitud $n + 1$.
- $d([(B-A) \cup C] - \{\beta_i\}, [(A-B) \cup C] - \{\beta_j\}) = n - 1 \implies$ al igual que en el caso anterior, el segundo tipo de caminos tendrá longitud $n + 1$.
- $d([(B-A) \cup C] - \{\beta_i\}, [(A-B) \cup C] - \{\beta_i\}) = n \implies$ el tercer tipo de caminos tendrá longitud $n + 2$.

3. La eliminación de k vértices, con $n - 1 \leq k \leq n$, puede implicar un aumento de dos unidades en el diámetro del grafo resultante. Así es en efecto:

Dados A, B vértices de O_{n+1} , con $m = \frac{n-3}{2}$, si eliminamos del grafo los vértices

$$\{[(A-B) \cup C] - \{\beta_i\}\}_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \text{ y } \{[(B-A) \cup C] - \{\beta_i\}\}_{i=1}^{\frac{n-1}{2}},$$

los caminos más cortos alternativos, entre A y B , de estructura

$$A \xrightarrow{b_i} [(B-A) \cup C] - \{b_i\} \text{ --- } \dots \text{ --- } [(A-B) \cup C] - \{a_j\} \xrightarrow{a_j} B$$

tendrán longitud $n + 2$, ya que

$$d([(B - A) \cup C] - \{b_i\}, [(A - B) \cup C] - \{a_j\}) = n \quad \square$$

Estudieemos a continuación el caso n par.

Proposición 4. Dado O_{n+1} , con $n \geq 4$ par, se verifica:

$$D'_k = \begin{cases} n & \text{si } k \leq \frac{n}{2} - 1 \\ n + 1 & \text{si } \frac{n}{2} \leq k \leq n - 1 \\ n + 2 & \text{si } k = n \end{cases}$$

Demostración. Sean A, B dos vértices de O_{n+1} y sea m el cardinal del conjunto $A \cap B$.

Por la Proposición 1, sabemos que podemos tomar para cualquier valor de m , $n + 1$ caminos internamente disjuntos de longitud menor o igual que $n + 2$, entre los vértices A y B .

Efectivamente, para los diferentes valores de m se tiene:

$$1. \quad \text{Si } m > \frac{n}{2} \implies d(A, B) = 2(n - m) \leq n - 2.$$

Tenemos $n - m$ caminos de longitud $d(A, B) \leq n - 2$, coloreados

$$\begin{array}{ccccccc} b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & \cdots & b_{n-m} & a_{n-m} \\ b_2 & a_2 & b_3 & a_3 & \cdots & b_1 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-m} & a_{n-m} & b_1 & a_1 & \cdots & b_{n-m+1} & a_{n-m+1}, \end{array}$$

y $m + 1$ de longitud $d(A, B) + 2 \leq n$, con coloraciones

$$\beta_i \ a_1 \ b_1 \ a_2 \ b_2 \ \cdots \ a_{n-m} \ b_{n-m} \ \beta_i \quad \text{para } 1 \leq i \leq m + 1.$$

En tal caso, si eliminamos cualquier subconjunto de vértices de cardinal $\leq n$, el diámetro del grafo resultante no aumentará.

$$2. \quad \text{Si } m = \frac{n}{2} \implies d(A, B) = 2(n - m) = n.$$

Tendremos, por una parte:

$n - m = \frac{n}{2}$ caminos de longitud $d(A, B) = n$, coloreados

$$\begin{array}{cccccc} b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & \cdots & b_{n-m} & a_{n-m} \\ b_2 & a_2 & b_3 & a_3 & \cdots & b_1 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-m} & a_{n-m} & b_1 & a_1 & \cdots & b_{n-m+1} & a_{n-m+1}, \end{array}$$

y $m + 1 = \frac{n}{2} + 1$ de longitud $d(A, B) + 1 = n + 1$, con coloraciones

$$\begin{array}{ccccccc} \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \cdots & \beta_m & \alpha_m & \beta_{m+1} \\ \beta_2 & \alpha_1 & \beta_3 & \alpha_2 & \cdots & \beta_{m+1} & \alpha_m & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{m+1} & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \cdots & \beta_{m-1} & \alpha_m & \beta_m. \end{array}$$

Por lo tanto, si eliminamos cualquier subconjunto de vértices del grafo de cardinal $\leq \frac{n}{2} - 1$ el diámetro no aumenta, pero al eliminar un subconjunto de vértices de cardinal $\geq \frac{n}{2}$ el diámetro podría aumentar 1 unidad.

$$3. \quad \text{Si } m = \frac{n}{2} - 1 \implies d(A, B) = 2m + 1 = n - 1.$$

Entre A y B podemos tomar $n + 1$ caminos internamente disjuntos:

$m + 1 = \frac{n}{2}$ de longitud $d(A, B) = n - 1$, con coloraciones

$$\begin{array}{cccccc} \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \cdots & \beta_m & \alpha_m & \beta_{m+1} \\ \beta_2 & \alpha_1 & \beta_3 & \alpha_2 & \cdots & \beta_{m+1} & \alpha_m & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_{m+1} & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \cdots & \beta_{m-1} & \alpha_m & \beta_m, \end{array}$$

y $n - m = \frac{n}{2} + 1$ caminos de longitud $n + 2$, coloreados

$$\begin{array}{cccccc} b_1 & a_1 & b_2 & a_2 & \cdots & b_{n-m} & a_{n-m} \\ b_2 & a_2 & b_3 & a_3 & \cdots & b_1 & a_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b_{n-m} & a_{n-m} & b_1 & a_1 & \cdots & b_{n-m+1} & a_{n-m+1}. \end{array}$$

En tal caso, al eliminar cualquier subconjunto de vértices de O_{n+1} de cardinal $< \frac{n}{2}$ el diámetro no aumenta, pero si se elimina un subconjunto de vértices de cardinal $\geq \frac{n}{2}$, el diámetro del grafo no tiene por qué aumentar en dos unidades.

Efectivamente, los caminos más cortos entre A y B tienen por estructura:

$$A \xrightarrow{\beta_i} (B-A) \cup C - \{\beta_i\} \text{ --- } \dots \text{ --- } (A-B) \cup C - \{\beta_j\} \xrightarrow{\beta_j} B.$$

Si destruyésemos estos caminos, por ejemplo, eliminando los $m + 1 = \frac{n}{2}$ vértices del tipo $[(A - B) \cup C] - \{\beta_j\}$, los caminos alternativos, presentados en la Propiedad 1 de longitud $n + 2$, no serían los (A, B) -caminos más cortos del grafo resultante

$$O_{n+1} - \{[(A - B) \cup C] - \{\beta_j\}\}_{j=1}^{\frac{n}{2}}.$$

Como se puede comprobar, los (A, B) -caminos de estructura

$$A \xrightarrow{\beta_i} (B-A) \cup C - \{\beta_i\} \text{ --- } \dots \text{ --- } (A-B) \cup C - \{a_j\} \xrightarrow{a_j} B$$

tienen longitud $n + 1$, ya que la distancia

$$d([(B - A) \cup C] - \{\beta_i\}, [(A - B) \cup C] - \{a_j\}) = n - 1.$$

Análogamente, si eliminásemos los $m + 1$ vértices del tipo $[(B - A) \cup C] - \{\beta_i\}$, también destruiríamos los (A, B) -caminos más cortos en el grafo O_{n+1} . En tal caso, los caminos más cortos entre A y B en el grafo resultante

$$O_{n+1} - \{[(B - A) \cup C] - \{\beta_i\}\}_{i=1}^{\frac{n}{2}}$$

serán aquellos con estructura

$$A \xrightarrow{b_i} (B-A) \cup C - \{b_i\} \text{ --- } \dots \text{ --- } (A-B) \cup C - \{\beta_j\} \xrightarrow{\beta_j} B$$

y longitud $n + 1$.

En consecuencia, podremos tomar en O_{n+1} otro conjunto de $n + 1$ caminos internamente disjuntos entre A y B , de los cuales:

$2(m+1) = n$ tienen longitud $d(A, B) + 2 = n + 1$, cuyas coloraciones podrían venir dadas por:

$$\begin{array}{cccccccc} a_i & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & \alpha_m & \beta_m & a_i & \beta_{m+1} \\ a_i & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & \cdots & \alpha_m & \beta_{m+1} & a_i & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_i & \alpha_1 & \beta_{m+1} & \alpha_2 & \beta_1 & \cdots & \alpha_m & \beta_{m-1} & a_i & \beta_m, \end{array}$$

con $a_i \in A - B$ siendo $i \neq 1, n - m$, y

$$\begin{array}{cccccccc} b_i & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & \alpha_m & \beta_m & b_i & \beta_{m+1} \\ b_i & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & \cdots & \alpha_m & \beta_{m+1} & b_i & \beta_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b_i & \alpha_1 & \beta_{m+1} & \alpha_2 & \beta_1 & \cdots & \alpha_m & \beta_{m-1} & b_i & \beta_m, \end{array}$$

con $b_i \in B - A$, siendo $i \neq 1, 2$, y un camino de longitud $n + 2$ coloreado, por ejemplo:

$$b_1 \ a_1 \ b_2 \ a_2 \ \cdots \ b_{n-m} \ a_{n-m}.$$

Luego, si eliminamos un subconjunto de vértices del grafo de cardinal s con $\frac{n}{2} \leq s \leq n - 1$, el diámetro de los posibles grafos resultantes podría aumentar en una unidad, y para $s = n$ en dos unidades.

4. Si $m = \frac{n}{2} - 2 \implies d(A, B) = 2m + 1 = n - 3$.

Por lo tanto, alternativamente a los $n + 1$ caminos presentados en la Proposición 1, podríamos tomar en O_{n+1} un conjunto $n + 1$ caminos internamente disjuntos entre A y B , de los cuales:

$2(m + 1) = n - 2$ tienen longitud $d(A, B) + 2 = n - 1$, cuyas coloraciones,

podrían venir dadas por:

$$\begin{array}{cccccccccc}
 a_i & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & \alpha_m & \beta_m & a_i & \beta_{m+1} \\
 a_i & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & \cdots & \alpha_m & \beta_{m+1} & a_i & \beta_1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 a_i & \alpha_1 & \beta_{m+1} & \alpha_2 & \beta_1 & \cdots & \alpha_m & \beta_{m-1} & a_i & \beta_m,
 \end{array}$$

con $a_i \in A - B$, y

$$\begin{array}{cccccccccc}
 b_i & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \beta_2 & \cdots & \alpha_m & \beta_m & b_i & \beta_{m+1} \\
 b_i & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & \cdots & \alpha_m & \beta_{m+1} & b_i & \beta_1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 b_i & \alpha_1 & \beta_{m+1} & \alpha_2 & \beta_1 & \cdots & \alpha_m & \beta_{m-1} & b_i & \beta_m,
 \end{array}$$

con $b_i \in B - A$. Además de tres caminos de longitud $d(A, B) + 4 = n + 1$, con coloraciones, por ejemplo:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 b_j & a_j & \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \cdots & \beta_m & \alpha_m & \beta_{m+1} & b_j & a_j \\
 b_k & a_k & \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \cdots & \beta_m & \alpha_m & \beta_{m+1} & b_k & a_k \\
 b_l & a_l & \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \cdots & \beta_m & \alpha_m & \beta_{m+1} & b_l & a_l
 \end{array}$$

con $j, k, l \neq i$.

Si eliminamos cualquier subconjunto de vértices del grafo de cardinal $\leq n - 3$ el diámetro de los posibles grafos resultantes no aumentará, mientras que si se elimina del grafo un conjunto de vértices de cardinal $\geq n - 2$ el diámetro podría aumentar en una unidad.

5. Si $m < \frac{n}{2} - 2 \implies d(A, B) = 2m + 1 \leq n - 5$.

Tendremos $m + 1$ caminos de longitud $d(A, B) \leq n - 5$, con coloraciones

$$\begin{array}{cccccccc}
 \beta_1 & \alpha_1 & \beta_2 & \alpha_2 & \cdots & \beta_m & \alpha_m & \beta_{m+1} \\
 \beta_2 & \alpha_1 & \beta_3 & \alpha_2 & \cdots & \beta_{m+1} & \alpha_m & \beta_1 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \beta_{m+1} & \alpha_1 & \beta_1 & \alpha_2 & \cdots & \beta_{m-1} & \alpha_m & \beta_m,
 \end{array}$$

y $n - m = \frac{n+3}{2}$ de longitud $d(A, B) + 4 \leq n - 1$, coloreados

$$b_i a_i \beta_1 \alpha_1 \beta_2 \alpha_2 \cdots \beta_m \alpha_m \beta_{m+1} b_i a_i \quad \text{con } 1 \leq i \leq n - m.$$

En tales condiciones, al eliminar cualquier subconjunto de vértices de cardinal $\leq n$, el diámetro del grafo resultante no aumentará.

En conclusión:

1. Si se eliminan k vértices del grafo, donde $k \leq \frac{n}{2} - 1$, el diámetro del grafo resultante no aumentará.
2. Si se eliminan k vértices, con $\frac{n}{2} \leq k \leq n - 1$, el diámetro del grafo puede aumentar y de hecho aumenta en una unidad. En efecto, dados A y B vértices de O_{n+1} con $m = \frac{n}{2} - 1$, si eliminamos del grafo el conjunto de vértices

$$\{[(B - A) \cup C] - \{\beta_i\}\}_{i=1}^{\frac{n}{2}}$$

destruiremos los caminos más cortos entre A y B , de tal forma que los caminos alternativos más cortos tendrán longitud $n + 1$. Efectivamente: los restantes caminos entre A y B tendrán por estructura uno de los dos tipos siguientes:

$$\begin{array}{c} A \xrightarrow{b_i} [(B-A) \cup C] - \{b_i\} \text{ --- } \cdots \text{ --- } [(A-B) \cup C] - \{a_j\} \xrightarrow{a_j} B \\ A \xrightarrow{b_i} [(B-A) \cup C] - \{b_i\} \text{ --- } \cdots \text{ --- } [(A-B) \cup C] - \{\beta_j\} \xrightarrow{\beta_j} B \end{array}$$

y dado que

- $d([(B - A) \cup C] - \{b_i\}, [(A - B) \cup C] - \{a_j\}) = n \implies$ el primer tipo de caminos tendrá longitud $n + 2$.
- $d([(B - A) \cup C] - \{b_i\}, [(A - B) \cup C] - \{\beta_j\}) = n - 1 \implies$ el segundo tipo de caminos tendrá longitud $n + 1$.

3. La eliminación de n vértices puede y de hecho implica un aumento de dos unidades en el diámetro del grafo resultante.

Así es: Dados A y B vértices de O_{n+1} , con $m = \frac{n}{2} - 1$, si eliminamos del grafo los vértices

$$\{[(A - B) \cup C] - \{\beta_i\}\}_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} \quad \text{y} \quad \{[(B - A) \cup C] - \{\beta_i\}\}_{i=1}^{\frac{n-1}{2}},$$

tenemos que los únicos caminos posibles entre A y B tienen por estructura

$$A \xrightarrow{b_i} [(B-A) \cup C] - \{b_i\} \text{ --- } \dots \text{ --- } [(A-B) \cup C] - \{a_j\} \xrightarrow{a_j} B.$$

Y dado que la distancia

$$d([(B - A) \cup C] - \{b_i\}, [(A - B) \cup C] - \{a_j\}) = n$$

su longitud será $n + 2$. \square

Es fácil verificar que, como en el Teorema anterior, los caminos indicados en las Proposiciones anteriores son vértice-disjuntos.

Para finalizar esta sección podemos unificar ambos resultados en una expresión común.

Teorema 3. *Dado O_{n+1} , con $n \geq 4$, tendremos*

$$D'_k = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ n + 1 & \text{si } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq k < 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ n + 2 & \text{si } 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq k \leq n. \end{cases}$$

Por lo tanto, podremos concluir que la persistencia de los grafos O_{n+1} , para $n \geq 4$, es $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$.

2.2.2 Eliminación de ramas

Nuestro siguiente objetivo será estudiar la vulnerabilidad del diámetro de los grafos Impares bajo la eliminación de ramas.

Veamos en primer lugar cómo la eliminación de $\Delta - 1 = n$ ramas del grafo O_{n+1} no puede incrementar el diámetro en más de 2 unidades.

Si denotamos por D_n'' al valor máximo que puede tomar el diámetro de los subgrafos resultantes de eliminar cualquier subconjunto de n ramas del grafo O_{n+1} , se verificará el siguiente resultado

Teorema 4. *Los grafos O_{n+1} , con $n \geq 2$, verifican*

$$D_n'' = n + 2.$$

Demostración. Sean A y B dos vértices de O_{n+1} con subconjuntos de etiquetas

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_{n-m}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}$$

y

$$B = \{b_1, b_2, \dots, b_{n-m}, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\}.$$

Si $m \neq 0$, por la Proposición 1 sabemos que hay $n+1$ caminos vértice-disjuntos, y por lo tanto rama-disjuntos, de longitud $\leq n+2$ entre los vértices A y B . Además, el resultado de la Proposición 2 también se verificará para la eliminación de ramas, eliminando en lugar de los vértices elegidos, las ramas que unen estos vértices con A y B .

Si $m = 0$, A y B serán adyacentes. Sea β el color de la rama que incide en ambos vértices. Junto a este camino, tendremos los siguientes (A, B) -caminos de longitud 5 coloreados

$$b_i a_i \beta b_i a_i, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dado que la eliminación de la rama que incide sobre A y B incrementa la distancia entre ambos vértices hasta 5, los resultados de la Proposición 2 también serán

válidos para $n \geq 3$. Para $n = 2$ se puede verificar directamente el enunciado de este Teorema. \square

En base al argumento utilizado en la demostración del Teorema anterior, es fácil verificar el siguiente resultado.

Teorema 5.

- El grafo O_5 verifica

$$D_k'' = \begin{cases} 4 & \text{si } k = 0, \\ 5 & \text{si } 1 \leq k < 4, \\ 6 & \text{si } k = 4. \end{cases}$$

- Los grafos O_{n+1} , con $n \geq 5$, verifican

$$D_k'' = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ n+1 & \text{si } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq k < \lceil \frac{n}{2} \rceil, \\ n+2 & \text{si } 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq k \leq n. \end{cases}$$

De este resultado podemos deducir que la rama-persistencia de los grafos O_{n+1} , con $n \geq 5$, es $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$, mientras que la rama-persistencia de O_5 es 1.

Capítulo 3

Grafos $(n + 1)$ -cubo plegados

El objetivo de este capítulo es estudiar la vulnerabilidad del diámetro de los grafos $(n + 1)$ -cubo plegados. Con este propósito veremos en primer lugar (Sección 3.1) algunas definiciones que nos permitirán introducir esta familia de grafos [12], así como algunas propiedades asociadas a estos grafos. Y a continuación pasaremos a estudiar la vulnerabilidad de su diámetro bajo la eliminación de vértices y ramas (Sección 3.2).

3.1 Definiciones y propiedades

Diremos que un grafo G de diámetro D es *imprimitivo*, cuando para algún valor de i , $1 \leq i \leq D$, el grafo G_i es desconexo. Aquí, G_i representa el grafo con el mismo conjunto de vértices que G , donde dos vértices son adyacentes si están a distancia i en G .

El ejemplo más simple de grafos imprimitivos son los bipartitos, otra clase de grafos imprimitivos son los grafos *antipodales* (grafos que verifican que G_D es una unión de grafos completos) de diámetro $D \geq 2$.

Si un grafo G de diámetro D es antipodal, podremos definir un nuevo grafo \overline{G} , el grafo *plegado* de G , el cual tiene por vértices los grafos completos o clases de equivalencia de G_D , y donde dos clases son adyacentes siempre y cuando

contengan vértices adyacentes. Claramente, el grafo \bar{G} tiene diámetro $\lfloor D/2 \rfloor$. Verificándose que si un grafo G distancia-regular es antipodal, su grafo plegado también será distancia-regular.

Dados t grafos G_1, G_2, \dots, G_t , se define su *producto directo*, como aquel grafo con conjunto de vértices $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_t$ y donde dos vértices $(u_1, u_2, \dots, u_t), (v_1, v_2, \dots, v_t)$ son adyacentes si existe un índice m para el cual se verifica que $d(u_m, v_m) = 1$ y $u_l = v_l, \forall l \neq m$.

Esta operación entre grafos nos permitirá introducir la familia de grafos de Hamming.

El grafo de Hamming, denotado $H(t, n)$, es el producto directo de t grafos completos de orden n . Si denotamos por M un conjunto de cardinal n que contenga al 0, los vértices del grafo de Hamming $H(t, n)$ se pueden identificar con los elementos de $M \times M \times \dots \times M = M^t$, esto es, el conjunto de palabras de longitud t sobre el alfabeto M ; donde la distancia entre dos vértices x, y de $H(t, n)$ llamada *distancia Hamming* de x a y ($d_H(x, y)$) es el número de letras en las cuales difieren las palabras correspondientes a los vértices x e y . Entre las propiedades que caracterizan a esta familia de grafos destacaremos que el grafo de Hamming $H(t, n)$ es distancia-regular de diámetro t , con matriz de intersección

$$\{t(n-1), (t-1)(n-1), (t-2)(n-1), \dots, n-1; 1, 2, 3, \dots, t\}.$$

Los únicos grafos de Hamming imprimitivos son los n -cubos o hipercubos, los cuales corresponden a $H(n, 2)$. Un n -cubo es un grafo no dirigido de orden 2^n [39], cuyos vértices pueden etiquetarse con números binarios de 0 a $2^n - 1$ y tal que dos vértices son adyacentes si y solo si las representaciones binarias de sus etiquetas difieren únicamente en un dígito, es decir, la distancia Hamming entre ambos vértices es 1. De entre sus propiedades destacamos que los n -cubos son grafos antipodales de diámetro n [12]; por lo tanto, a partir de estos grafos podremos obtener una nueva familia: los n -cubo plegados. Efectivamente:

A partir de un hipercubo de orden 2^{n+1} podemos obtener un grafo $(n+1)$ -cubo plegado, denotado \square_{n+1} , identificando los vértices que se encuentran a distancia

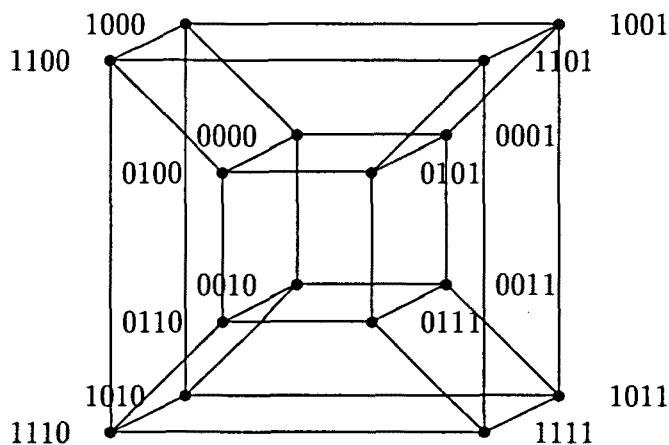


Figura 3.1: Hipercubo de orden 2^4

máxima $n + 1$

$$a_1 a_2 \cdots a_{n+1} \quad \text{y} \quad \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_{n+1},$$

y manteniendo las adyacencias existentes. Esto es, consideremos por ejemplo el hipercubo de orden 2^4 (ver Figura 3.1); si identificamos los vértices opuestos (ver Figura 3.2) y mantenemos las adyacencias existentes en el 4-cubo, obtendremos el 4-cubo plegado (ver Figura 3.3).

Como consecuencias de la definición tendremos que:

- El orden de \square_{n+1} es 2^n ,
- \square_{n+1} es un grafo regular de grado $n + 1$ y diámetro $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$.

Dado que para obtener un grafo $(n + 1)$ -cubo plegado debemos identificar los vértices que se encuentran a distancia máxima en un $(n + 1)$ -cubo, cada vértice del $(n + 1)$ -cubo plegado lo podremos etiquetar con el par de sucesiones binarias de longitud $n + 1$ que representaban a los correspondientes vértices identificados en el $(n + 1)$ -cubo, los cuales tendrán sus dígitos opuestos. Para establecer las adyacencias entre vértices del grafo $(n + 1)$ -cubo plegado, tomemos un vértice cualquiera del grafo, por ejemplo el vértice A , una de cuyas etiquetas viene dada

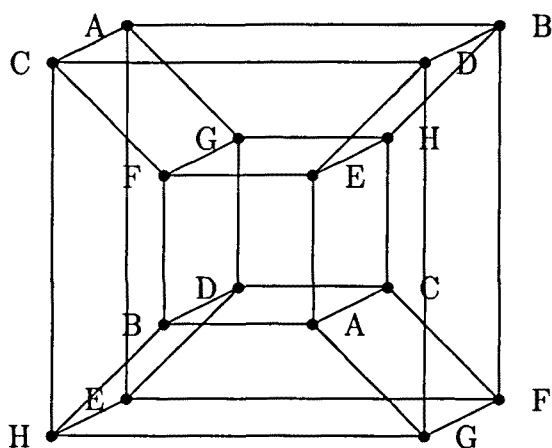


Figura 3.2: Grafo 4-cubo con sus vértices opuestos identificados

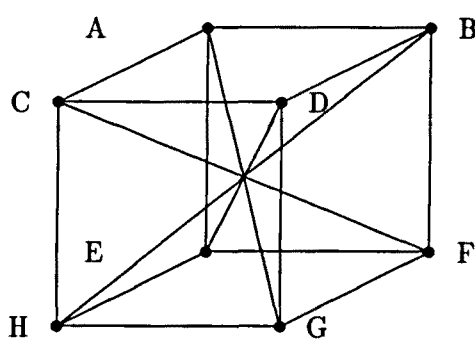


Figura 3.3: Grafo 4-cubo plegado

por $1 a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n$. Dado que en el grafo $(n + 1)$ -cubo plegado se deben mantener las adyacencias existentes en el $(n + 1)$ -cubo, este vértice tendrá grado $n + 1$ y será adyacente a otro vértice siempre y cuando sus respectivas etiquetas difieran en un dígito. Por lo tanto tendremos que los vértices etiquetados por:

$$\begin{array}{l} 1 \bar{a}_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n \\ 1 a_1 \bar{a}_2 \cdots a_{n-1} a_n \\ \vdots \quad \cdots \quad \vdots \\ 1 a_1 a_2 \cdots \bar{a}_{n-1} a_n \\ 1 a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \bar{a}_n \end{array}$$

serán adyacentes al vértice A . Si nos fijamos en la otra sucesión binaria que etiqueta al vértice, $0 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_{n-1} \bar{a}_n$, opuesta a la que teníamos, tendremos que el vértice A también es adyacente al vértice

$$1 \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_{n-1} \bar{a}_n,$$

el cual no habíamos considerado anteriormente, con lo cual habremos completado el conjunto de vértices adyacentes al vértice A .

Luego, prescindiendo del primer dígito, en un grafo \square_{n+1} los vértices podrán representarse como sucesiones binarias de longitud n , y dos vértices A, B serán adyacentes si $d_H(A, B) = 1$ ó $d_H(A, B) = n$. Esta será la definición que adoptaremos en lo sucesivo.

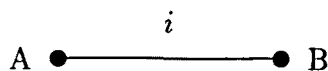
Notemos que la regla de adyacencia nos permitirá asignar un color a las ramas del grafo. Efectivamente, dados A y B vértices del grafo \square_{n+1}

- Si $d_H(A, B) = 1$, etiquetaremos la rama que los une con la posición del dígito en que difieren. Esto es, dados los vértices

$$A \equiv a_1 a_2 \cdots a_{i-1} a_i a_{i+1} \cdots a_n$$

$$B \equiv a_1 a_2 \cdots a_{i-1} \bar{a}_i a_{i+1} \cdots a_n,$$

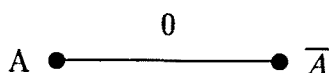
tendremos:



- Si $d_H(A, B) = n$, etiquetaremos la rama que los une con el color 0. Esto es, dados los vértices

$$A \equiv a_1 a_2 \cdots a_{n-1} \cdots a_n \quad \text{y} \quad \bar{A} \equiv \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_{n-1} \bar{a}_n,$$

tendremos:



Por lo tanto, utilizaremos $n + 1$ colores para etiquetar las ramas de \square_{n+1} . Nótese que la coloración de ramas nos permitirá colorear los diferentes caminos del grafo. Evidentemente se trata de una coloración propia.

Como ya hemos mencionado, el diámetro del grafo \square_{n+1} es $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$, por lo tanto, existirá un camino de longitud a lo sumo $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil$ entre cualquier par de vértices del grafo. Sean $A \equiv a_1 a_2 \cdots a_n$ y $B \equiv b_1 b_2 \cdots b_n$ dos vértices de \square_{n+1} , donde a_i y b_i son los dígitos cero o uno. Para alcanzar B desde A distinguiremos dos situaciones posibles: Por una parte, si $d_H(A, B) \leq \frac{n}{2}$, será suficiente con atravesar sucesivamente los vértices cuyas etiquetas se obtienen de modificar los dígitos de A uno a uno, en orden a transformar A en B . Suponiendo que A y B difieran únicamente en i dígitos, es decir, $d_H(A, B) = i$, la longitud del camino que hemos tomado será i . Claramente, no existe un camino de longitud inferior que comunique los vértices A y B . Por otra parte, si $d_H(A, B) > \frac{n}{2}$, desde A podremos alcanzar el vértice $\bar{A} \equiv \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n$ y desde éste atravesaremos sucesivamente aquellos vértices cuyas etiquetas se obtienen de modificar sucesivamente los dígitos de \bar{A} uno a uno, en orden a transformar \bar{A} en B . Si suponemos que $d_H(A, B) = i$, la longitud del camino que hemos tomado será $1 + n - i$. Claramente no podremos tomar caminos entre A y B de longitud inferior. Este resultado lo podremos formalizar como sigue.

- **P3.1** *La distancia entre cualquier par de vértices A, B de \square_{n+1} viene dada por:*

$$d(A, B) = \begin{cases} d_H(A, B) & \text{sii } d_H(A, B) \leq \frac{n}{2}, \\ n - d_H(A, B) + 1 & \text{sii } d_H(A, B) > \frac{n}{2}. \end{cases}$$

Por ser el grafo $(n + 1)$ -cubo distancia-regular y antipodal tendremos (ver [12] para más información):

- **P3.2** *El grafo \square_{n+1} es distancia-regular.*

3.2 Vulnerabilidad del diámetro

A continuación vamos a estudiar la vulnerabilidad del diámetro de los grafos \square_{n+1} bajo la eliminación de vértices. En esta sección probaremos que la eliminación de a lo sumo n vértices del grafo \square_{n+1} no puede incrementar el diámetro en más de una unidad.

Proposición 1. *Si $n \geq 2$, entre cualquier par de vértices de \square_{n+1} hay $n + 1$ caminos vértice-disjuntos de longitud $\leq \lceil \frac{n+1}{2} \rceil + 1$.*

Demostración. Sean A y B dos vértices del grafo \square_{n+1} con

$$d_H(A, B) = k.$$

Sin pérdida de generalidad y para simplificar nuestra demostración, supondremos que las k diferencias entre los dígitos de nuestros dos vértices tienen lugar en las k primeras posiciones de los vértices. Así pues:

$$A \equiv a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} \cdots a_n,$$

$$B \equiv \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_k a_{k+1} \cdots a_n.$$

Por ser \square_{n+1} un grafo regular de grado $n + 1$, el conjunto $\Gamma(A)$ tendrá $n + 1$ elementos, los cuales clasificaremos en tres tipos:

- $V_i \equiv a_1 a_2 \cdots \bar{a}_i \cdots a_k a_{k+1} \cdots a_n$, donde $1 \leq i \leq k$,
- $W_i \equiv a_1 a_2 \cdots a_k a_{k+1} \cdots \bar{a}_i \cdots a_n$, donde $k + 1 \leq i \leq n$,
- $\bar{A} \equiv \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n$.

A continuación vamos a construir $n + 1$ caminos internamente disjuntos entre A y B . Para ello, consideraremos por separado los siguientes casos:

$$k \leq \frac{n-1}{2}, \quad \frac{n-1}{2} < k < \frac{n+3}{2} \quad y \quad k \geq \frac{n+3}{2}.$$

Nótese que los caminos P_i , que vamos a considerar, verificarán

$$\text{long}(P_i) = d(C_i, B) + 1,$$

esto es, utilizaremos caminos más cortos de C_i a B , donde C_i es el vértice de $\Gamma(A)$ por el cual pasa el camino P_i , $\forall i \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$. De este modo, tendremos acotada la longitud de los caminos que vamos a obtener, verificándose:

$$\text{long}(P_i) \leq \left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + 1 = \begin{cases} \frac{n}{2} + 1 & \text{si } n \text{ es par,} \\ \frac{n+3}{2} & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

1. $k \leq \frac{n-1}{2}$

Si $d_H(A, B) = k \leq \frac{n-1}{2}$, por la propiedad P3.1 tendremos que

$$d(A, B) = d_H(A, B) = k \leq \frac{n-1}{2}.$$

Por lo tanto, los caminos más cortos entre A y B utilizarán vértices del tipo V_i y el número máximo de caminos internamente disjuntos del citado tipo, no podrá superar el valor de k . Para construirlos será suficiente con atravesar sucesivamente los vértices cuyas etiquetas se obtienen de modificar los dígitos de A , uno a uno, en orden a transformar A en B . Entre todos los

posibles caminos construidos de este modo, seleccionaremos los siguientes

<i>camino 1</i>	1	2	3	...	$k - 1$	k
<i>camino 2</i>	2	3	4	...	k	1
\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	\vdots
<i>camino $k-1$</i>	$k - 1$	k	1	...	$k - 3$	$k - 2$
<i>camino k</i>	k	1	2	...	$k - 2$	$k - 1$.

A continuación, construiremos aquellos (A, B) -caminos que atraviesan vértices del tipo W_i .

Dado que $d_H(W_i, B) = k + 1$ y $k \leq \frac{n-1}{2}$, es fácil verificar que

$$d(W_i, B) = d_H(W_i, B).$$

Efectivamente, si $k < \frac{n-1}{2}$ la igualdad es directa al aplicar la propiedad P3.1, mientras que si $k = \frac{n-1}{2}$ tendremos que $k + 1 = \frac{n+1}{2} \geq \frac{n}{2}$, y aplicando la propiedad P3.1 se verificará:

$$d(W_i, B) = n - d_H(W_i, B) + 1 = n - \left(\frac{n-1}{2} + 1\right) + 1 = \frac{n+1}{2} = d_H(W_i, B).$$

En tal caso, para construir los (W_i, B) -caminos procederemos como antes, modificando los dígitos de W_i uno a uno hasta alcanzar el vértice B . Así, para todo valor de i , el camino con coloración

$$1 \ 2 \ \dots \ k - 1 \ k \ i$$

será un (W_i, B) -camino más corto. Y si prolongamos tales caminos hasta el vértice A obtendremos los correspondientes (A, B) -caminos buscados, los cuales tendrán por coloraciones:

<i>camino $k+1$</i>	$k + 1$	1	2	...	$k - 1$	k	$k + 1$
<i>camino $k+2$</i>	$k + 2$	1	2	...	$k - 1$	k	$k + 2$
\vdots	\vdots	\vdots	...	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
<i>camino $n-1$</i>	$n - 1$	1	2	...	$k - 1$	k	$n - 1$
<i>camino n</i>	n	1	2	...	$k - 1$	k	n .

Para finalizar, construiremos un (A, B) -camino que atraviese el vértice \bar{A} .

Dado que $d_H(\bar{A}, B) = n - k \geq \frac{n+1}{2}$, tendremos que

$$d(\bar{A}, B) = n - d_H(\bar{A}, B) + 1 < d_H(\bar{A}, B),$$

es decir, el número de no coincidencias entre dígitos de los vértices \bar{A} y B es mayor que el número de coincidencias. Por lo tanto, para construir un (\bar{A}, B) -camino más corto atravesaremos sucesivamente aquellos vértices cuyas etiquetas se obtienen de modificar uno a uno los dígitos de \bar{A} que coincidan con los de B . Entre los posibles caminos hemos seleccionado el siguiente, con coloración

$$1 \ 2 \ \dots \ k-1 \ k \ 0.$$

Y prolongándolo hasta A obtendremos el camino buscado

$$\text{camino } n+1 \ 0 \ 1 \ 2 \ \dots \ k-1 \ k \ 0.$$

2. $\frac{n-1}{2} < k < \frac{n+3}{2}$

En este caso, k puede tomar los valores:

- $\frac{n}{2}$ y $\frac{n}{2} + 1$ si n es par,
- $\frac{n+1}{2}$ si n es impar.

Si $d_H(A, B) = \frac{n}{2}$ tendremos que

- $d_H(V_i, B) = \frac{n}{2} - 1 \implies d(V_i, B) = d_H(V_i, B) = \frac{n}{2} - 1.$
- $d_H(W_i, B) = \frac{n}{2} + 1 \implies d(W_i, B) = n - d_H(W_i, B) + 1 = \frac{n}{2}.$
- $d_H(\bar{A}, B) = n - \frac{n}{2} = \frac{n}{2} \implies d(\bar{A}, B) = d_H(\bar{A}, B) = \frac{n}{2}.$

De estas distancias podemos deducir que los caminos de longitud mínima entre A y B atravesarán vértices del tipo V_i .

Si $d_H(A, B) = \frac{n+1}{2}$ se verificará:

- $d_H(V_i, B) = \frac{n+1}{2} - 1 = \frac{n-1}{2} \implies d(V_i, B) = d_H(V_i, B) = \frac{n-1}{2}$.
- $d_H(W_i, B) = \frac{n+1}{2} + 1 = \frac{n+3}{2} \implies d(W_i, B) = n - d_H(W_i, B) + 1$, luego $d(W_i, B) = \frac{n-1}{2}$.
- $d_H(\bar{A}, B) = n - \frac{n+1}{2} = \frac{n-1}{2} \implies d(\bar{A}, B) = d_H(\bar{A}, B) = \frac{n-1}{2}$.

En consecuencia, podremos construir (A, B) -caminos más cortos atravesando cualquier vértice de $\Gamma(A)$.

Si $d_H(A, B) = \frac{n}{2} + 1$, tendremos que

- $d_H(V_i, B) = (\frac{n}{2} + 1) - 1 = \frac{n}{2} \implies d(V_i, B) = d_H(V_i, B) = \frac{n}{2}$.
- $d_H(W_i, B) = (\frac{n}{2} + 1) + 1 = \frac{n}{2} + 2 \implies d(W_i, B) = n - d_H(W_i, B) + 1$, luego $d(W_i, B) = \frac{n}{2} - 1$.
- $d_H(\bar{A}, B) = (n - \frac{n}{2} + 1) = \frac{n}{2} - 1 \implies d(\bar{A}, B) = d_H(\bar{A}, B) = \frac{n}{2} - 1$.

Por lo tanto, los caminos más cortos entre A y B utilizarán vértices del tipo W_i o bien el vértice \bar{A} .

Como podemos apreciar, para cualquiera de los valores de $d_H(A, B)$ citados anteriormente se verificará:

$$\begin{aligned} d(V_i, B) &= d_H(V_i, B) \\ d(W_i, B) &= n - d_H(W_i, B) + 1 \\ d(\bar{A}, B) &= d_H(\bar{A}, B). \end{aligned}$$

Así, para construir los $n + 1$ caminos internamente disjuntos entre los vértices A y B procederemos del mismo modo en los tres casos.

En primer lugar, construiremos los (A, B) -caminos que atraviesan los vértices del tipo V_i . Notemos que el número máximo de caminos internamente disjuntos de este tipo no podrá exceder a k .

Dado que $d(V_i, B) = d_H(V_i, B)$, para construir un (V_i, B) -camino de longitud mínima atravesaremos sucesivamente los vértices cuyas etiquetas se obtienen de modificar los dígitos de V_i uno a uno, en orden a transformar

V_i en B . Y a continuación prolongaremos estos caminos hasta el vértice A . De entre todos los (A, B) -caminos que podríamos haber construido de este modo hemos seleccionado los siguientes, con coloraciones:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 \text{camino } 1 & 1 & 2 & 3 & \cdots & k-1 & & k \\
 \text{camino } 2 & & 2 & 3 & 4 & \cdots & k & 1 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\
 \text{camino } k & & k & 1 & 2 & \cdots & k-2 & k-1.
 \end{array}$$

A continuación construiremos $n - k$ caminos entre A y B utilizando vértices del tipo W_i .

Dado que $d(W_i, B) = n - d_H(W_i, B) + 1$, para obtener un (W_i, B) -camino de longitud mínima atravesaremos sucesivamente aquellos vértices cuyas etiquetas se obtienen de modificar uno a uno los dígitos de W_i que coincidan con los de B , o bien, procederemos de este modo pero intercalando en el camino así descrito el vértice opuesto a uno de los vértices del camino. Y al prolongar estos caminos hasta el vértice A obtendremos los correspondientes (A, B) -caminos buscados. De entre los cuales hemos seleccionado los siguientes, con coloraciones:

$$\begin{array}{rcccccccc}
 \text{camino } k+1 & k+1 & k+2 & k+3 & \cdots & n-1 & n & 0 \\
 \text{camino } k+2 & & k+2 & k+3 & k+4 & \cdots & n & 0 & k+1 \\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 \text{camino } n & & n & 0 & k+1 & \cdots & n-3 & n-2 & n-1.
 \end{array}$$

Para completar la construcción de caminos, deberemos obtener un (A, B) -camino que atraviese el vértice \bar{A} .

Por ser $d(\bar{A}, B) = d_H(\bar{A}, B)$, obtendremos el camino buscado procediendo del mismo modo que en la construcción de (A, B) -caminos que atravesaban vértices del tipo V_i . En consecuencia, seleccionaremos el siguiente (A, B) -camino, con coloración

$$\text{camino } n+1 \quad 0 \quad k+1 \quad k+2 \quad \cdots \quad n-1 \quad n.$$

3. $k \geq \frac{n+3}{2}$

Si $d_H(A, B) \geq \frac{n+3}{2}$, por la propiedad P3.1 tendremos que

$$d(A, B) = n - d_H(A, B) + 1 \leq \frac{n-1}{2}.$$

En tal caso, los caminos de longitud mínima entre A y B atravesarán vértices del tipo W_i o bien el vértice A . Efectivamente, dado que

- $d_H(W_i, B) = k+1 \geq \frac{n+5}{2} \implies d(W_i, B) = n - d_H(W_i, B) + 1 \leq \frac{n-3}{2}$,
- $d_H(\bar{A}, B) = n - k \leq \frac{n-3}{2} \implies d(\bar{A}, B) = D_H(\bar{A}, B) \leq \frac{n-3}{2}$.

Como en el caso anterior ($\frac{n-1}{2} < k < \frac{n+3}{2}$), seleccionaremos los (A, B) -caminos siguientes:

Caminos que pasan por W_i

<i>camino 1</i>	$k+1$	$k+2$	$k+3$	\dots	$n-1$	n	0
<i>camino 2</i>	$k+2$	$k+3$	$k+4$	\dots	n	0	$k+1$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\dots	\vdots	\vdots	\vdots
<i>camino $n-k-1$</i>	$n-1$	n	0	\dots	$n-4$	$n-3$	$n-2$
<i>camino $n-k$</i>	n	0	$k+1$	\dots	$n-3$	$n-2$	$n-1$

Camino que pasa por \bar{A}

$$\text{camino } n-k+1 \quad 0 \quad k+1 \quad k+2 \quad \dots \quad n-1 \quad n.$$

Para completar la construcción, obtendremos los (A, B) -caminos que atraviesan los vértices del tipo V_i .

Dado que $d_H(V_i, B) = k-1 \geq \frac{n+1}{2}$, tendremos que

$$d(V_i, B) = n - d_H(V_i, B) + 1 \leq \frac{n+1}{2}.$$

Para construir los (V_i, B) -caminos de longitud mínima deberemos modificar los dígitos de V_i que coincidan con los de B , y conjugar una vez. De entre los caminos posibles hemos seleccionado los k siguientes, con coloraciones

$$i \quad k+1 \quad k+2 \quad \dots \quad n \quad 0 \quad i, \quad 1 \leq i \leq k.$$

Luego para cada uno de los casos, hemos encontrado $n + 1$ caminos de longitud $\leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1$ entre los vértices A y B , los cuales son internamente disjuntos. Notemos que la generalización de los caminos para el caso en que las diferencias de dígitos entre los vértices A y B no se encontraran necesariamente en las primeras posiciones es directa. \square

Por lo tanto, si eliminamos hasta n vértices del grafo \square_{n+1} aún dispondremos de un camino de longitud $\leq \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor + 1$ entre cualquier par de vértices del grafo. A continuación vamos a probar cómo se alcanza este valor al eliminar un conjunto adecuado de vértices del grafo \square_{n+1} .

Si denotamos por D'_k al valor máximo de los diámetros de los subgrafos de \square_{n+1} que se obtienen al eliminar cualquier subconjunto de k vértices, tendremos:

Proposición 2. Dado \square_{n+1} , con $n \geq 2$ par, se verifica:

$$D'_k = \begin{cases} \frac{n}{2} & \text{si } 0 \leq k \leq \frac{n}{2} - 2, \\ \frac{n}{2} + 1 & \text{si } \frac{n}{2} - 1 \leq k \leq n. \end{cases}$$

Demostración. De la demostración de la Proposición 1 se puede deducir lo siguiente:

- Al eliminar cualquier subconjunto de vértices de cardinal $k \leq \frac{n-2}{2} - 1$ del grafo \square_{n+1} , el diámetro no varía.
- Si se elimina un subconjunto de vértices de cardinal $k = \frac{n-2}{2}$, el diámetro del grafo podría aumentar una unidad.

Veamos como efectivamente esto es así. Consideremos, por ejemplo dos vértices A y B vértices de \square_{n+1} , tal que $d_H(A, B) = \frac{n-2}{2}$. Por la Proposición 1 sabemos que los caminos más cortos entre A y B pasan por los vértices

$$V_i \equiv a_1 a_2 \cdots \bar{a}_i \cdots a_{\frac{n-2}{2}} a_{\frac{n}{2}} \cdots a_n, \text{ con } 1 \leq i \leq \frac{n-2}{2},$$

adyacentes a A . Si eliminamos estos vértices, en total $\frac{n-2}{2}$, los caminos alternativos deberán utilizar los restantes vértices de $\Gamma(A)$; esto es,

$$W_i \equiv a_1 a_2 \cdots a_{\frac{n-2}{2}} a_{\frac{n}{2}} \cdots \bar{a}_i \cdots a_n, \quad \text{donde } \frac{n}{2} \leq i \leq n,$$

o bien,

$$\bar{A} \equiv \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n.$$

En tales condiciones, los caminos alternativos más cortos tendrán longitud

$$1 + d(W_i, B) \quad \text{o bien} \quad 1 + d(\bar{A}, B).$$

Y dado que

$$- d_H(W_i, B) = d_H(A, B) + 1 = \frac{n}{2} \implies d(W_i, B) = \frac{n}{2},$$

$$- d_H(\bar{A}, B) = \frac{n}{2} + 1 \implies d(\bar{A}, B) = \frac{n}{2},$$

la longitud de estos caminos será $\frac{n}{2} + 1$.

Por la Proposición 1, sabemos que estos caminos existen. \square

Proposición 3. Dado \square_{n+1} , con $n \geq 3$ impar, se verifica:

$$D'_k = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{si } 0 \leq k \leq \frac{n-1}{2} - 1, \\ \frac{n+1}{2} + 1 & \text{si } \frac{n-1}{2} \leq k \leq n. \end{cases}$$

Demostración. De la demostración de la Proposición 1 podemos deducir que:

- Al eliminar cualquier subconjunto de vértices de cardinal $k \leq \frac{n-1}{2} - 1$ del grafo \square_{n+1} , el diámetro no varía.
- Si se elimina un subconjunto de vértices de cardinal $k = \frac{n-1}{2}$, el diámetro del grafo podría aumentar una unidad.

Veamos como efectivamente esto es así. Consideremos, por ejemplo A y B vértices de \square_{n+1} , tal que $d_H(A, B) = \frac{n+3}{2}$. Por la Proposición 1 sabemos que los caminos más cortos entre A y B pasan por los vértices

$$W_i \equiv a_1 a_2 \cdots a_{\frac{n+3}{2}} a_{\frac{n+3}{2}+1} \cdots \bar{a}_i \cdots a_n, \quad \text{donde } \frac{n+3}{2} + 1 \leq i \leq n,$$

o bien,

$$\bar{A} \equiv \bar{a}_1 \bar{a}_2 \cdots \bar{a}_n,$$

adyacentes de $\Gamma(A)$. Si eliminamos estos vértices, en total $\frac{n-1}{2}$, los caminos alternativos deberán utilizar los restantes vértices de $\Gamma(A)$; a saber:

$$V_i \equiv a_1 a_2 \cdots \bar{a}_i \cdots a_{\frac{n-2}{2}} a_{\frac{n}{2}} \cdots a_n, \quad \text{donde } 1 \leq i \leq \frac{n-2}{2}.$$

En tales condiciones, los caminos alternativos más cortos tendrán longitud $1 + d(V_i, B)$. Y dado que $d_H(V_i, B) = d_H(A, B) - 1 = \frac{n+3}{2} - 1 \implies d(V_i, B) = \frac{n+1}{2}$, luego la longitud de estos caminos será $\frac{n+1}{2} + 1$.

Por la Proposición 1, sabemos que estos caminos existen. \square

Ambas Proposiciones las podemos unificar en un resultado común

Teorema 1. Dado \square_{n+1} , con $n \geq 2$, se verifica:

$$D'_k = \begin{cases} D & \text{si } 0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1 \\ D + 1 & \text{si } \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \leq k \leq n \end{cases}$$

Siguiendo los mismos argumentos utilizados en las demostraciones de las Proposiciones anteriores, pero en lugar de eliminar los adecuados vértices adyacentes al vértice A , eliminamos sus correspondientes ramas, tendremos demostrado en el caso de eliminación de ramas un resultado análogo al presentado en el Teorema anterior.

Si denotamos por D''_k al valor máximo de los diámetros de los subgrafos de \square_{n+1} que se obtienen al eliminar cualquier subconjunto de k ramas, tendremos

Teorema 2. Dado \square_{n+1} , con $n \geq 2$, se verifica:

$$D''_k = \begin{cases} D & \text{si } 0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1, \\ D + 1 & \text{si } \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \leq k \leq n. \end{cases}$$

De los Teoremas anteriores se deduce que los grafos \square_{n+1} , con $n \geq 2$, tienen tanto persistencia como rama-persistencia igual a $\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$.

Capítulo 4

Obtención de grandes grafos

$(\Delta, D, D, 1)$

4.1 Introducción

En este capítulo vamos a presentar varios grafos $(\Delta, D, D, 1)$ de orden elevado.

Recordemos que un grafo $(\Delta, D, D, 1)$ está caracterizado por tener grado máximo Δ , diámetro $\leq D$ y tal que al eliminar un vértice cualquiera del grafo, los subgrafos resultantes tienen diámetro $\leq D$.

Sabemos que el orden N de un grafo $(\Delta, D, D, 1)$ está acotado superiormente por el valor

$$N \leq 1 + \Delta + \frac{\Delta(\Delta - 1) + \Delta(\Delta - 1)^2 + \dots + \Delta(\Delta - 1)^{D-1}}{2}.$$

Y que este valor no puede alcanzarse para valores del diámetro $D \geq 3$, ver [48].

El problema $(\Delta, D, D, 1)$ ha sido estudiado, entre otros, por Gómez y Yebra, quienes en [24] presentan algunos de los grafos $(\Delta, D, D, 1)$ más grandes conocidos hasta la fecha, algunos de los cuales presentamos en la Tabla 4.1.

Para la obtención de nuevos grafos $(\Delta, D, D, 1)$ hemos utilizado una técnica presentada en [7] como “*compound graphs*”, la cual consiste en obtener un grafo al unir varias copias de otro grafo más simple con la condición de que entre dos

D	4	5	6	7	8	9
Δ						
	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}
2	6	7	8	9	10	11
	P_2	$17K_{1,1}$	$13K_{1,3}$	H_2	$31K_{1,3}$	$43K_{1,3}$
3	18	34	52	102	124	172
	$C_s(9, 2, 2)$	$4P_2$	$4Q_2$	K_+	$C_s(8, 6, 2)$	$C_s(9, 7, 2)$
4	36	56	120	193	512	1152
	O_5	O_5	$4O_3$	$16 \oplus Q_3$	$4H_3$	$6 \oplus H_3$
5	126	126	320	480	2912	4368
	O_5	O_6	K_+	K_+	$4H_4$	K_+
6	126	462	975	2917	10920	26225
	O_5	O_6	O_7	$2 \times 2H_3$	$4H_5$	$8 \oplus H_5$
7	126	462	1716	5460	31248	62496
	K_+	K_+	K_+	K_+	K_+	K_+
8	324	1281	5124	20481	81924	327681
	$P(2, 3)$	$P(2, 4)$	$P(2, 5)$	$2 \times 2H_5$	$4H_7$	$10 \oplus H_7$
9	384	1536	6141	31248	156864	392160
	K_+	K_+	K_+	K_+	$K_6 \Lambda^2 H_7$	$H S \Lambda^2 H_7$
10	755	3751	18875	93751	588240	2941200

Tabla 4.1: Orden de grandes grafos $(\Delta, D, D, 1)$ ($2 \leq \Delta \leq 10, 4 \leq D \leq 9$)

K_+	Adición al grafo de Kautz, ver [24], [26]
$P(d, k)$	Ver [24]
\oplus	Ver [37]
P_q	Grafo incidencia de plano proyectivo
Q_q	Cuadrángulo generalizado
H_q	Hexágono generalizado
C_s	Un grafo sobre alfabeto, ver [11]
$nK_{i,j}$	Ver [24]
$Q\Lambda^i B$	Ver [24], [25]
O_j	Grafo de Akers

Tabla 4.2: Notaciones y símbolos utilizados en la Tabla 4.1



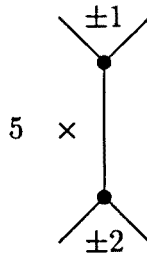
Figura 4.1: Copia i del grafo completo K_2

copias se tengan pocas ramas.

Para ilustrar esta técnica veamos un ejemplo. Vamos a construir un grafo conectando 5 copias del grafo completo K_2 (ver Figura 4.1), en función de la siguiente regla de adyacencia entre copias:

$$\begin{aligned} a_i &\sim a_{i+1}, a_{i-1} & i \in \{0, 1, 2, 3, 4\}, \\ b_i &\sim b_{i+2}, b_{i-2} \end{aligned}$$

(téngase en cuenta que la suma que aparece en los subíndices se entiende módulo 5). Como resultado de esta construcción obtendremos el conocido grafo de Petersen O_3 . Este grafo lo podemos representar de forma esquematizada como lo

Figura 4.2: Grafo $5 \times K_2$ o grafo de Petersen

muestra la Figura 4.2.

4.2 Obtención de grandes grafos $(\Delta, D, D, 1)$

Los grafos $(\Delta, D, D, 1)$ que vamos a obtener tendrán en común dos propiedades: ser conexos y regulares. Estas dos propiedades las hemos incluido como requisito en la estructura de la regla de adyacencia entre copias que utilizaremos para generarlos.

4.2.1 Regla de adyacencia

Sea G' un grafo conexo de orden p , y consideremos k copias del mismo, siendo k un número primo. Dispongamos las k copias en orden circular y conectemos vértices de las distintas copias en función de una regla de conexión, la cual deberá verificar:

1. Ser común para todas las copias.
2. Si un vértice está conectado con un vértice de una copia desplazada t unidades, entonces también estará conectado con el correspondiente vértice de la copia desplazada $-t$ unidades.
3. El conjunto de los valores t utilizados forman un subgrupo del grupo multiplicativo $(\mathbb{Z}_k - \{0\}, \cdot)$.

4. El grafo resultante deberá ser regular.

Es fácil verificar que el grafo G resultante de conectar las k copias de G' en función de la regla de adyacencia entre copias descrita anteriormente es conexo. Efectivamente, ya que siempre existirá un vértice v de G'_i que estará conectado a un vértice w de G'_{i+1} para cualquier valor de $i \in \{0, 1, 2 \dots k - 1\}$, y cada G_i es conexo.

Por construcción, sabemos que el grafo G tiene $k \cdot p$ vértices y, por lo tanto, su matriz de adyacencia asociada será cuadrada de orden $k \cdot p$. Obviamente, conociendo las adyacencias de los vértices de la primera copia, conoceremos las adyacencias de los restantes vértices del grafo. Esto significa que la matriz de adyacencia quedará determinada por sus p primeras filas. De hecho, puesto que un vértice conectado con un vértice de una copia desplazada t unidades también lo está con el mismo vértice de la copia desplazada $-t$ unidades, para determinar esas p primeras filas bastará con conocer sus $\frac{k+1}{2} \cdot p$ primeras columnas.

Por ejemplo, si el grafo G se ha construido al conectar $k = 7$ copias de un grafo G' con matriz de adyacencia A_1 , la matriz de adyacencia del grafo G será de la forma

$$\begin{array}{ccccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_4 & A_3 & A_2 \\ A_2 & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_4 & A_3 \\ & \vdots & & & & \vdots & \\ A_2 & A_3 & A_4 & A_4 & A_3 & A_2 & A_1, \end{array}$$

donde A_l es la matriz de adyacencia entre las copias i y j , siendo

$$l = \min\{|i - j|, 7 - |i - j|\} + 1.$$

Notemos que el segundo conjunto de p filas es igual al primero, pero los bloques o submatrices están desplazados una unidad a la derecha, de forma cíclica. Esto es un caso particular de las denominadas matrices circulantes por bloques, cuyas propiedades principales pasamos a describir brevemente (véase [16] para un estudio en profundidad).

Dadas A_1, A_2, \dots, A_k , k matrices cuadradas de orden p , llamaremos *matriz circulante por bloques* de tipo (k, p) a una matriz cuadrada de orden $kp \times kp$ de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3 & \cdots & A_k \\ A_k & A_1 & A_2 & \cdots & A_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ A_2 & A_3 & A_4 & \cdots & A_1 \end{pmatrix}$$

esto es, los bloques o submatrices de una fila de la matriz circulante por bloques son iguales a los elementos de la fila previa, pero desplazados una unidad a la derecha, circulando. Obviamente toda matriz circulante por bloques queda determinada por su primera fila (o columna) de bloques y esto lo denotaremos por

$$A = bcirc(A_1, A_2, A_3, \dots, A_k).$$

Teniendo en cuenta que las operaciones de producto por un escalar, adición y multiplicación de matrices circulantes por bloques, se realizan del mismo modo que cuando se expresan las matrices con la notación habitual, es fácil verificar (ver [16]) el siguiente resultado:

Si $\mathcal{BC}_{k,p}$ denota al conjunto de matrices circulantes por bloques de tipo (k, p)

P4.1 Dadas A_1 y $A_2 \in \mathcal{BC}_{k,p}$ y $\alpha_j \in \mathbf{R}$ se verificará

$$\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2, A_1 A_2 \text{ y } P(A_1) = \sum_{j=0}^r \alpha_j A_1^j \in \mathcal{BC}_{k,p}.$$

Por lo tanto, la matriz de adyacencia, que denotaremos por A , de los grafos que vamos a construir será circulante por bloques. Notemos que se trata de un tipo especial de matrices circulantes por bloques ya que la podremos determinar sin necesidad de conocer en su totalidad la primera fila (o columna) de bloques, como mencionamos anteriormente.

4.2.2 Algoritmo para el cálculo del diámetro

A continuación vamos a desarrollar un método que nos permita determinar si los grafos que vamos a construir son o no candidatos a grafos $(\Delta, D, D, 1)$.

Recordemos que una cadena de longitud l entre los vértices v_i y v_j es una secuencia de vértices del grafo G del tipo

$$v_i = u_0 u_1 \cdots u_l = v_j,$$

donde u_{t-1} y u_t son vértices adyacentes para $1 \leq t \leq l$.

El siguiente resultado presentado en [8] nos permite determinar el número de cadenas que podemos tomar entre cualquier par de vértices del grafo. Efectivamente:

P4.2 *Dado un grafo G con conjunto de vértices $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, y dada su matriz de adyacencia A se verifica que el elemento que ocupa la posición (i, j) de la matriz A^l , con l un número natural, nos da el número de cadenas de longitud l entre los vértices v_i y v_j .*

Obviamente los elementos de la matriz identidad se pueden interpretar como el número de caminos de longitud 0 que existen entre cualquier par de vértices. Análogamente, los elementos de la matriz de adyacencia A asociada al grafo G corresponderán al número de caminos de longitud 1 que existen entre cualquier par de vértices.

Es fácil verificar, ver [30], que los elementos de la matriz $A^2 - \Delta I$ corresponden al número de caminos de longitud 2 que se pueden tomar entre cualquier par de vértices del grafo. Efectivamente, si de las cadenas de longitud 2 descontamos aquellas que repiten ramas, obtendremos los caminos de longitud 2.

En general, si denotamos por

$$\begin{aligned} P_0(A) &= I \\ P_1(A) &= A \\ P_2(A) &= A^2 - \Delta I, \end{aligned}$$

tendremos que la expresión matricial

$$P_n(A) = AP_{n-1}(A) - (\Delta - 1)P_{n-2}(A), \quad \text{con } n \geq 3,$$

nos permite determinar el número de caminos de longitud n entre vértices del grafo G . Ahora bien, si el diámetro del grafo G es D , se deberá verificar que D es el primer valor entero que satisface la siguiente desigualdad:

$$P_0(A) + P_1(A) + P_2(A) + \cdots + P_D(A) \geq J,$$

donde J es la matriz cuadrada de orden $p \cdot k$ cuyos elementos son todos 1. Y esto equivale a decir que ningún elemento de la matriz

$$\sum_{i=0}^D P_i(A)$$

será cero, pues de lo contrario tendríamos al menos dos vértices del grafo que se encontrarían a distancia $> D$, lo cual es absurdo, por ser D el diámetro del grafo. Además, si G debe ser un grafo $(\Delta, D, D, 1)$, deberá verificar también la siguiente desigualdad:

$$P_0(A) + P_1(A) + \frac{P_2(A) + P_3(A) + \cdots + P_D(A)}{2} \geq J,$$

la cual implica que entre cualquier par de vértices, diferentes y no adyacentes, del grafo habrá como mínimo dos caminos de longitud $\leq D$. Si estos caminos fueran internamente disjuntos, podríamos afirmar que el diámetro de los subgrafos resultantes de eliminar 1 vértice cualquiera de G también sería D . Por ello esta última desigualdad es una condición necesaria pero no suficiente para que el grafo sea un grafo $(\Delta, D, D, 1)$. Sólo nos permitirá hallar candidatos a grafos $(\Delta, D, D, 1)$, y en tal caso, mediante un estudio individual comprobaremos si existen dos caminos internamente disjuntos entre cualquier par de vértices del grafo.

Al tener en cuenta que la matriz de adyacencia A asociada a estos grafos es circulante por bloques, por la propiedad P4.2 tenemos que todo polinomio en

A también es circulante por bloques, y este hecho nos facilitará en gran medida nuestra tarea.

El algoritmo que hemos descrito para el cálculo del diámetro de este tipo de grafos lo hemos implementado en un programa de ordenador. Hemos escogido el lenguaje de programación C++ para poder tratar las matrices de adyacencia como objetos y hacer, de esta manera, el código más transparente. La elección de C++ dentro de los lenguajes orientados a objetos se ha debido a una cuestión de disponibilidad (fácil acceso a compiladores C++ tanto para entorno MS-DOS como UNIX), de familiaridad con el lenguaje C y de eficiencia (C++ es uno de los lenguajes orientados a objeto que mejor optimiza el código con respecto a la velocidad).

En el Apéndice A presentamos el programa que implementa la *regla de adyacencia*. Este programa lo hemos desglosado en dos módulos, *admat.c* y *diámetro.c*. El primero implementa las funciones propias de la clase matriz, definida en el fichero de cabecera *admat.h*, y el segundo contiene el código de entrada de datos (a través de un fichero leído por el programa) y el algoritmo propiamente dicho. Los comentarios dentro del propio código son suficientemente aclaratorios, por lo que no nos extenderemos más en este punto.

4.3 Nuevos grandes grafos $(\Delta, D, D, 1)$

Aplicando la técnica descrita en el apartado anterior con las herramientas también descritas en ese apartado, hemos obtenido cuatro grafos $(\Delta, D, D, 1)$ que nos permiten mejorar cinco de los ordenes de grandes grafos $(\Delta, D, D, 1)$ presentados en [24]. Los nuevos valores los hemos contemplado en la Tabla 4.3.

A continuación pasaremos a describir los grafos obtenidos que mejoran las cotas, así como a verificar que efectivamente se trata de grafos $(\Delta, D, D, 1)$.

D	4	5	6	7	8	9
Δ						
	C_6	C_7	C_8	C_9	C_{10}	C_{11}
2	6	7	8	9	10	11
	P_2	$17K_{1,1}$	$13K_{1,3}$	H_2	$31K_{1,3}$	$43K_{1,3}$
3	18	34	52	102	124	172
	$C_s(9, 2, 2)$	$4P_2$	$4Q_2$	K_+	$C_s(8, 6, 2)$	$C_s(9, 7, 2)$
4	36	68	203	203	512	1152
	O_5	O_5	$4O_3$	$16 \oplus Q_3$	$4H_3$	$6 \oplus H_3$
5	126	146	320	548	2912	4368
	O_5	O_6	K_+	K_+	$4H_4$	K_+
6	126	462	975	2917	10920	26225
	O_5	O_6	O_7	$2 \times 2H_3$	$4H_5$	$8 \oplus H_5$
7	126	462	1716	5460	31248	62496
	K_+	K_+	K_+	K_+	K_+	K_+
8	324	1281	5124	20481	81924	327681
	$P(2, 3)$	$P(2, 4)$	$P(2, 5)$	$2 \times 2H_5$	$4H_7$	$10 \oplus H_7$
9	384	1536	6141	31248	156864	392160
	K_+	K_+	K_+	K_+	$K_6 \Lambda^2 H_7$	$HS \Lambda^2 H_7$
10	755	3751	18875	93751	588240	2941200

Tabla 4.3: Orden de grandes grafos $(\Delta, D, D, 1)$ ($2 \leq \Delta \leq 10, 4 \leq D \leq 9$)

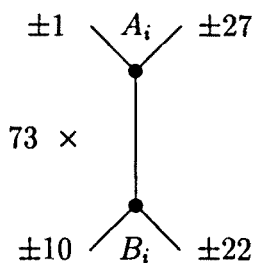


Figura 4.3: Grafo $(5, 5, 5, 1)$

4.3.1 Grafo $(5, 5, 5, 1)$ de orden 146

Conectando entre si 73 copias del grafo completo K_2 mediante la siguiente regla de conexión entre copias

$$A_i \sim A_{i+1}, A_{i-1}, A_{i+27}, A_{i-27}$$

$$B_i \sim B_{i+10}, B_{i-10}, B_{i+22}, B_{i-22},$$

donde $i \in \mathbb{Z}_{73}$, obtendremos un grafo conexo regular de grado 5 y orden 146 (puede verse su esquema representado en la Figura 4.3).

El grupo de automorfismos asociado a este grafo contiene el subgrupo de orden 73×2 generado por los dos automorfismos:

$$\Phi_1 : i \longrightarrow i + 1 \quad (\text{orden } 73)$$

$$\Phi_2 : A_i \longrightarrow B_{4i}$$

$$B_i \longrightarrow A_{4i}$$

Notemos como la acción de este subgrupo de automorfismos sobre el conjunto de vértices del grafo da lugar a una órbita, por lo que podremos afirmar que el grafo que hemos construido es vértice-transitivo.

Comprobemos a continuación que efectivamente se trata de un grafo $(5, 5, 5, 1)$.

Fijemos una copia cualquiera de las que constituyen el grafo, la cual consideraremos como copia 0. Notemos que los saltos que debemos realizar para conectar

los vértices de esta copia con sus adyacentes en otras copias están en función de los elementos del siguiente subgrupo normal de $(\mathbb{Z}_{73} - \{0\}, \cdot)$, a saber:

$$\{1, 10, 27, -22, -1, -10, -27, 22\}$$

el cual da lugar a las siguientes clases laterales:

$$\begin{aligned} [1] &= \{1, 10, 27, -22, -1, -10, -27, 22\} \\ [2] &= \{2, 20, -19, 29, -2, -20, 19, -29\} \\ [3] &= \{3, 30, 8, 7, -3, -30, -8, -7\} \\ [4] &= \{4, -33, 35, -15, -4, 33, -35, 15\} \\ [5] &= \{5, -23, -11, 36, -5, 23, 11, -36\} \\ [6] &= \{6, -13, 16, 14, -6, 13, -16, -14\} \\ [9] &= \{9, 17, 24, 21, -9, -17, -24, -21\} \\ [12] &= \{12, -26, 32, -28, -12, 26, -32, 28\} \\ [18] &= \{18, 34, -25, 31, -18, -34, 27, -22\} \end{aligned}$$

A continuación tenemos representados dos caminos internamente disjuntos de longitud ≤ 5 entre vértices de la copia 0 y vértices de cada una de las copias representantes de las clases. Los números en los caminos corresponden a las copias y las letras a los vértices con los que se llevará a cabo la adyacencia.

Copia 1

$$\begin{array}{c} \underline{A \quad A} \\ 0 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \underline{B \quad B \quad B \quad A \quad A \quad A} \\ 0 \quad -22 \quad 29 \quad 29 \quad 28 \quad 1 \\ \underline{B \quad B \quad A \quad A \quad B \quad B} \\ 0 \quad -10 \quad -10 \quad -9 \quad -9 \quad 1 \\ \underline{A \quad A \quad A \quad B \quad B \quad B} \\ 0 \quad 27 \quad -19 \quad -19 \quad -9 \quad 1 \end{array}$$

Copia 2

$$\begin{array}{cccc} \text{B} & \text{B} & \text{B} & \text{B} \\ \hline 0 & 22 & 12 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{A} & \text{A} & \text{A} \\ \hline 0 & 1 & 2 \end{array}$$

Copia 3

$$\begin{array}{cccc} \text{A} & \text{A} & \text{A} & \text{A} \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{B} & \text{B} & \text{A} & \text{A} & \text{A} \\ \hline 0 & 22 & 22 & -24 & 3 \\ \text{A} & \text{A} & \text{A} & \text{B} & \text{B} \\ \hline 0 & 27 & -19 & -19 & 3 \end{array}$$

Copia 4

$$\begin{array}{ccccc} \text{A} & \text{A} & \text{A} & \text{B} & \text{B} \\ \hline 0 & -1 & 26 & 26 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{B} & \text{B} & \text{A} & \text{A} & \text{A} \\ \hline 0 & -22 & -22 & 5 & 4 \end{array}$$

Copia 5

$$\begin{array}{cccc} \text{B} & \text{B} & \text{A} & \text{A} \\ \hline 0 & -22 & -22 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \text{A} & \text{A} & \text{B} & \text{B} \\ \hline 0 & 27 & 27 & 5 \end{array}$$

Copia 6

$$\begin{array}{ccccc} \text{B} & \text{B} & \text{A} & \text{A} & \text{A} \\ \hline 0 & -22 & -22 & 5 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} \text{A} & \text{A} & \text{A} & \text{B} & \text{B} \\ \hline 0 & 27 & 28 & 28 & 6 \end{array}$$

Copia 9

$$\begin{array}{cccc} \text{B} & \text{B} & \text{A} & \text{A} \\ \hline 0 & 10 & 10 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \text{A} & \text{A} & \text{B} & \text{B} \\ \hline 0 & -1 & -1 & 9 \end{array}$$

Copia 12



Copia 18



Estos caminos nos proporcionan dos caminos internamente disjuntos de longitud ≤ 5 entre los vértices de la copia 0 y los vértices de cualquier copia que constituye el grafo. Efectivamente, dada una copia m la cual está incluida en la clase n , si obtenemos el valor x tal que $n \cdot x = m$, tendremos determinados los caminos que buscamos, al multiplicar por x (y reducir módulo 73) las copias que aparecen en los correspondientes caminos entre las copias 0 y n . Por lo tanto, si eliminamos un vértice cualquiera del grafo siempre tendremos un camino de longitud ≤ 5 entre los vértices de la copia 0 y los vértices de las restantes copias. Al ser el grafo vértice-transitivo, esto es válido para cualquier copia del grafo. Así pues, el diámetro de los subgrafos resultantes de eliminar un vértice cualquiera del grafo es 5, luego se tratará de un grafo $(5, 5, 5, 1)$ de orden 146. (El mayor grafo $(5, 5, 5, 1)$ que se conocía hasta el momento era el grafo O_5 de orden 126).

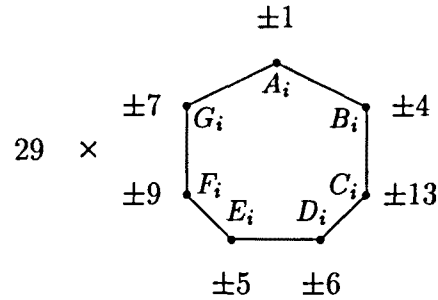


Figura 4.4: Grafo $(4, 6, 6, 1)$

4.3.2 Grafo $(4, 6, 6, 1)$ de orden 203

Si conectamos entre si 29 copias del ciclo de orden 7, C_7 , mediante la regla de conexión entre copias

$$\begin{aligned}
 A_i &\sim A_{i-1}, A_{i+1} \\
 B_i &\sim B_{i-4}, B_{i+4} \\
 C_i &\sim C_{i-13}, C_{i+13} \\
 D_i &\sim D_{i-6}, D_{i+6} \\
 E_i &\sim E_{i-5}, E_{i+5} \\
 F_i &\sim F_{i-9}, F_{i+9} \\
 G_i &\sim G_{i-7}, G_{i+7},
 \end{aligned}$$

donde la suma de subíndices se entiende módulo 29, obtendremos un grafo conexo regular de grado 4 y orden 203 (véase la Figura 4.4).

El grupo de automorfismos asociado a este grafo contiene el subgrupo de orden 29×7 generado por los siguientes automorfismos:

$$\begin{aligned}
 \Phi_1 : A_{i,j} &\longrightarrow A_{i+1,j} \quad (\text{orden } 29) \\
 \Phi_2 : A_{i,j} &\longrightarrow A_{4i,j+1} \quad (\text{orden } 7),
 \end{aligned}$$

donde $A_{i,1} = A_i, A_{i,2} = B_i, \dots, A_{i,7} = G_i$, siendo $i \in \mathbb{Z}_{29}$ y $j \in \mathbb{Z}_7$.

Es fácil comprobar que este subgrupo al actuar sobre el conjunto de vértices del grafo da lugar a una órbita, por lo tanto el grafo que hemos construido es vértice-transitivo.

Veamos a continuación que efectivamente se trata de un grafo $(4, 6, 6, 1)$. Para ello tomaremos una copia cualquiera del grafo la cual designaremos por copia

0. Los saltos que debemos realizar para conectar los vértices de esta copia con sus adyacentes en otras copias están en función de los elementos del siguiente subgrupo normal del grupo conmutativo $(\mathbb{Z}_{29} - \{0\}, \cdot)$:

$$\{1, 4, -13, 6, -5, 9, 7, -1, -4, 13, -6, 5, -9, -7\},$$

el cuál da lugar a las siguientes clases laterales:

$$[1] = \{1, 4, -13, 6, -5, 9, 7, -1, -4, 13, -6, 5, -9, -7\}$$

$$[2] = \{2, 8, 3, 12, -10, -11, 14, -2, -8, -3, -12, 10, 11, -14\}.$$

Si entre cada vértice de la copia 0 y cada vértice de las copias representantes de las clases podemos trazar dos caminos internamente disjuntos, tendremos probado que este grafo es $(4, 6, 6, 1)$.

Este hecho ha sido posible. A continuación tenemos representados dos caminos internamente disjuntos entre los vértices de la copia 0 y los vértices de las copias 1 y 2. Al igual que en el caso anterior, los números corresponden a las copias y las letras a los vértices con los que tendrá lugar la adyacencia.

En primer lugar consideramos los caminos internamente disjuntos entre cada vértice de la copia 0 y todos los vértices de la copia 1.

Desde A a copia 1

$$\begin{array}{c} \text{A} \text{-----} \text{A} \\ 0 \qquad \qquad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{B} \text{-----} \text{B} \text{-----} \text{C} \text{-----} \text{C} \text{-----} \text{C} \\ 0 \quad 4 \quad 4 \quad -12 \quad 1 \\ \text{A} \text{-----} \text{A} \text{-----} \text{G} \text{-----} \text{G} \text{-----} \text{F} \text{-----} \text{F} \\ 0 \quad -1 \quad -1 \quad -8 \quad -8 \quad 1 \end{array}$$

Desde B a copia 1

$$\begin{array}{c} \text{A} \text{-----} \text{A} \\ 0 \qquad \qquad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{B} \text{-----} \text{B} \text{-----} \text{C} \text{-----} \text{D} \text{-----} \text{E} \text{-----} \text{E} \\ 0 \quad -4 \quad -4 \quad -4 \quad -4 \quad 1 \\ \text{B} \text{-----} \text{B} \text{-----} \text{B} \text{-----} \text{A} \text{-----} \text{G} \text{-----} \text{G} \\ 0 \quad 4 \quad 8 \quad 8 \quad 8 \quad 1 \\ \text{B} \text{-----} \text{B} \text{-----} \text{C} \text{-----} \text{C} \text{-----} \text{C} \\ 0 \quad 4 \quad 4 \quad -12 \quad 1 \end{array}$$

Desde C a copia 1

$$\begin{array}{c} \underline{A \quad A} \\ 0 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \underline{C \quad C \quad B \quad A \quad G \quad G \quad G} \\ 0 \quad -13 \quad -13 \quad -13 \quad -13 \quad -6 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \underline{C \quad C \quad C \quad B \quad B} \\ 0 \quad 13 \quad -3 \quad -3 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \underline{C \quad C \quad D \quad D \quad D} \\ 0 \quad 13 \quad 13 \quad 7 \quad 1 \end{array}$$

Desde D a copia 1

$$\begin{array}{c} \underline{D \quad D \quad E \quad E} \\ 0 \quad 6 \quad 6 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \underline{E \quad E \quad D \quad D} \\ 0 \quad -5 \quad -5 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \underline{A \quad A} \\ 0 \quad 1 \end{array}$$

Desde E a copia 1

$$\begin{array}{c} \underline{E \quad E \quad D \quad D} \\ 0 \quad -5 \quad -5 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \underline{D \quad D \quad E \quad E} \\ 0 \quad 6 \quad 6 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \underline{A \quad A} \\ 0 \quad 1 \end{array}$$

Desde F a copia 1

$$\begin{array}{c} \underline{A \quad A} \\ 0 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \underline{F \quad F \quad G \quad A \quad B \quad B \quad B} \\ 0 \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad 9 \quad 5 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \underline{F \quad F \quad E \quad E \quad E} \\ 0 \quad -9 \quad -9 \quad -4 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \underline{F \quad F \quad G \quad G \quad A \quad A} \\ 0 \quad 9 \quad 9 \quad 2 \quad 2 \quad 1 \end{array}$$

Desde G a copia 1

$$\begin{array}{c} \text{A} \quad \text{A} \\ \hline 0 \quad 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{A} \quad \text{A} \quad \text{A} \quad \text{A} \quad \text{B} \quad \text{B} \\ \hline 0 \quad -1 \quad -2 \quad -3 \quad -3 \quad 1 \\ \text{G} \quad \text{G} \quad \text{G} \quad \text{G} \quad \text{G} \\ \hline 0 \quad -7 \quad -14 \quad 8 \quad 1 \\ \text{G} \quad \text{G} \quad \text{A} \quad \text{A} \quad \text{G} \quad \text{F} \quad \text{F} \\ \hline 0 \quad -7 \quad -7 \quad -8 \quad -8 \quad -8 \quad 1 \\ \text{G} \quad \text{G} \quad \text{F} \quad \text{E} \quad \text{D} \quad \text{D} \\ \hline 0 \quad 7 \quad 7 \quad 7 \quad 7 \quad 1 \end{array}$$

Y a continuación presentaremos los correspondientes caminos entre vértices de las copias 0 y 2.

Desde A a copia 2

$$\begin{array}{c} \text{A} \quad \text{A} \quad \text{A} \\ \hline 0 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{G} \quad \text{G} \quad \text{F} \quad \text{F} \\ \hline 0 \quad -7 \quad -7 \quad 2 \\ \text{A} \quad \text{A} \quad \text{B} \quad \text{C} \quad \text{C} \quad \text{C} \\ \hline 0 \quad -1 \quad -1 \quad -1 \quad -14 \quad 2 \end{array}$$

Desde B a copia 2

$$\begin{array}{c} \text{A} \quad \text{A} \quad \text{A} \\ \hline 0 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{B} \quad \text{B} \quad \text{A} \quad \text{A} \quad \text{G} \quad \text{G} \\ \hline 0 \quad -4 \quad -4 \quad -5 \quad -5 \quad 2 \\ \text{B} \quad \text{B} \quad \text{C} \quad \text{D} \quad \text{D} \\ \hline 0 \quad -4 \quad -4 \quad -4 \quad 2 \end{array}$$

Desde C a copia 2

$$\begin{array}{c} \text{A} \quad \text{A} \quad \text{A} \\ \hline 0 \quad 1 \quad 2 \\ \text{B} \quad \text{B} \quad \text{C} \quad \text{D} \quad \text{D} \\ \hline 0 \quad -4 \quad -4 \quad -4 \quad 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{E} \quad \text{E} \quad \text{F} \quad \text{G} \quad \text{G} \\ \hline 0 \quad -5 \quad -5 \quad -5 \quad 2 \\ \text{D} \quad \text{D} \quad \text{C} \quad \text{B} \quad \text{B} \\ \hline 0 \quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 2 \\ \text{C} \quad \text{C} \quad \text{C} \quad \text{D} \quad \text{E} \quad \text{E} \\ \hline 0 \quad 13 \quad -3 \quad -3 \quad -3 \quad 2 \end{array}$$

Desde D a copia 2

<u>D</u>	<u>D</u>	<u>C</u>	<u>B</u>	<u>B</u>		
0	6	6	6	2		

<u>D</u>	<u>D</u>	<u>C</u>	<u>C</u>	<u>D</u>	<u>E</u>	<u>E</u>
0	-6	-6	7	7	7	2

<u>E</u>	<u>E</u>	<u>F</u>	<u>G</u>	<u>G</u>		
0	-5	-5	-5	2		

<u>E</u>	<u>E</u>	<u>D</u>	<u>C</u>	<u>C</u>	<u>C</u>
0	5	5	5	-11	2

<u>B</u>	<u>B</u>	<u>C</u>	<u>D</u>	<u>D</u>		
0	-4	-4	-4	2		

<u>F</u>	<u>F</u>	<u>F</u>	<u>F</u>			
0	-9	11	2			

<u>A</u>	<u>A</u>	<u>A</u>				
0	1	2				

Desde E a copia 2

<u>E</u>	<u>E</u>	<u>D</u>	<u>C</u>	<u>C</u>	<u>C</u>
0	5	5	5	-11	2

<u>G</u>	<u>G</u>	<u>F</u>	<u>E</u>	<u>E</u>		
0	7	7	7	2		

<u>E</u>	<u>E</u>	<u>F</u>	<u>G</u>	<u>G</u>		
0	-5	-5	-5	2		

<u>F</u>	<u>F</u>	<u>F</u>	<u>F</u>			
0	-9	11	2			

<u>D</u>	<u>D</u>	<u>C</u>	<u>B</u>	<u>B</u>		
0	6	6	6	2		

De F a copia 2

<u>D</u>	<u>D</u>	<u>C</u>	<u>B</u>	<u>B</u>		
0	6	6	6	2		

<u>F</u>	<u>F</u>	<u>F</u>	<u>F</u>			
0	-9	11	2			

<u>A</u>	<u>A</u>	<u>A</u>				
0	1	2				

<u>E</u>	<u>E</u>	<u>E</u>	<u>D</u>	<u>D</u>	<u>D</u>
0	-5	-10	-10	-4	2

<u>G</u>	<u>G</u>	<u>F</u>	<u>E</u>	<u>E</u>		
0	7	7	7	2		

<u>F</u>	<u>F</u>	<u>G</u>	<u>G</u>			
0	9	9	2			

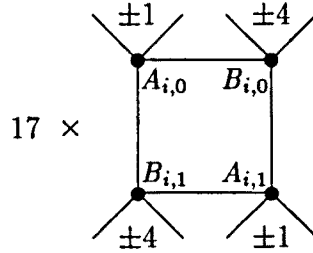
De G a copia 2

<u>A</u>	<u>A</u>	<u>A</u>				
0	1	2				

<u>G</u>	<u>G</u>	<u>F</u>	<u>E</u>	<u>E</u>		
0	7	7	7	2		

<u>G</u>	<u>G</u>	<u>A</u>	<u>A</u>	<u>B</u>	<u>B</u>
0	7	7	6	6	2

<u>G</u>	<u>G</u>	<u>F</u>	<u>F</u>			
0	-7	-7	2			

Figura 4.5: Grafo $(4, 5, 5, 1)$

Siguiendo para este grafo los mismos argumentos que han sido formulados para el grafo presentado en el apartado anterior, podremos concluir que se trata de un grafo $(4, 6, 6, 1)$, que mejora la cota anteriormente conocida en 83 unidades. Además este grafo también mejora la cota correspondiente al grafo $(4, 7, 7, 1)$ en 10 unidades.

4.3.3 Grafo $(4, 5, 5, 1)$ de orden 68

Conectando 17 copias del ciclo C_4 , mediante la regla de conexión entre copias:

$$A_{i,0} \sim A_{i+1,1}, A_{i-1,1}$$

$$B_{i,0} \sim B_{i+4,1}, B_{i-4,1}$$

$$A_{i,1} \sim A_{i+1,0}, A_{i-1,0}$$

$$B_{i,1} \sim B_{i+4,0}, B_{i-4,0},$$

entendiendo que $i \in \mathbb{Z}_{17}$, hemos obtenido un grafo conexo regular de grado 4 y orden 68, el cual tenemos representado de forma esquematizada en la Figura 4.5. Dado a que el orden de este grafo es bajo, nos ha sido posible obtener una representación no esquematizada del mismo, véase la Figura 4.6.

El grupo de automorfismos asociado a este grafo contiene el subgrupo de orden

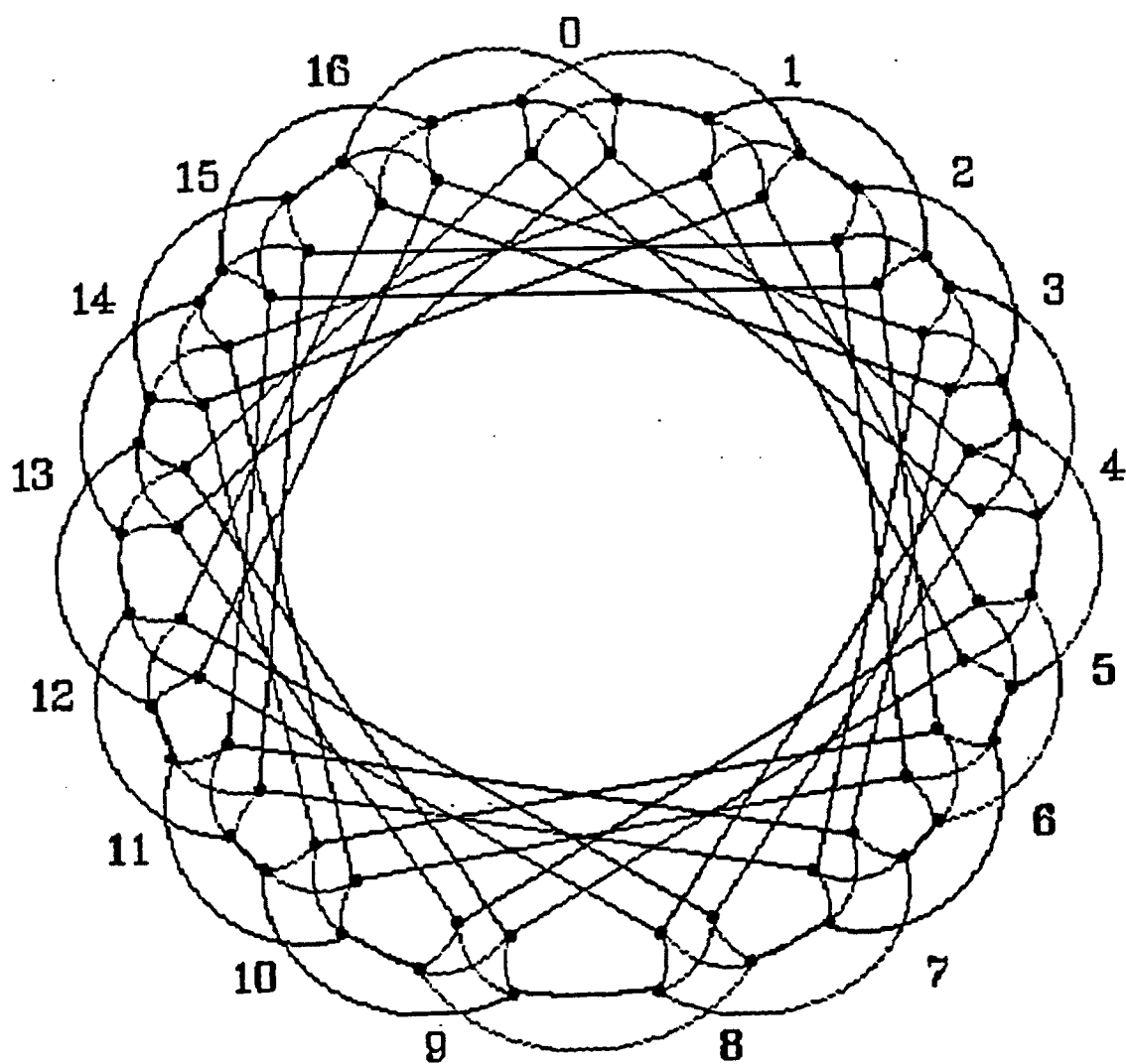


Figura 4.6: Grafo de orden 68

17×4 generado por los dos automorfismos:

$$\Phi_1 : (i, j) \longrightarrow (i + 1, j) \quad (\text{orden } 17)$$

$$\Phi_2 : A_{i,j} \longrightarrow B_{4i,j} \quad (\text{orden } 4).$$

$$B_{i,j} \longrightarrow A_{4i,j+1}$$

Es fácil verificar como la acción de este subgrupo de automorfismos sobre el conjunto de vértices del grafo da lugar a una órbita, por lo que podremos afirmar que el grafo que hemos construido es vértice-transitivo.

A continuación, veremos gráficamente cómo el grafo que hemos construido es un grafo $(4, 5, 5, 1)$. Para ello nos fijaremos en el subgrafo generador representado en la Figura 4.7. Es fácil verificar que desde el vértice $A_{0,0}$ a cualquier vértice del grafo hay dos caminos internamente disjuntos de longitud ≤ 5 . Y al ser este grafo vértice-transitivo, tendremos que esta propiedad también la verificará cualquier vértice del grafo. Por lo tanto, hemos obtenido un grafo $(4, 5, 5, 1)$ que mejora en 12 unidades la cota conocida hasta el momento.

4.3.4 Grafo $(5, 7, 7, 1)$ de orden 548

Al conectar 137 copias del grafo completo K_4 , mediante la siguiente regla de adyacencia entre copias:

$$A_i \sim A_{i+1}, A_{i-1}$$

$$B_i \sim B_{i+10}, B_{i-10}$$

$$C_i \sim C_{i+37}, C_{i-37}$$

$$D_i \sim D_{i+41}, D_{i-41},$$

entendiendo los subíndices y la suma en los subíndices módulo 137, obtenemos un grafo conexo regular de grado 5 y orden 548 (véase el esquema en la Figura 4.8).

El grupo de automorfismos asociado a este grafo contiene el subgrupo de orden 137×8 generado por los dos automorfismos:

$$\Phi_1 : A_{i,j} \longrightarrow A_{i+1,j} \quad (\text{orden } 137)$$

$$\Phi_2 : A_{i,j} \longrightarrow A_{10i,j+1} \quad (\text{orden } 8),$$

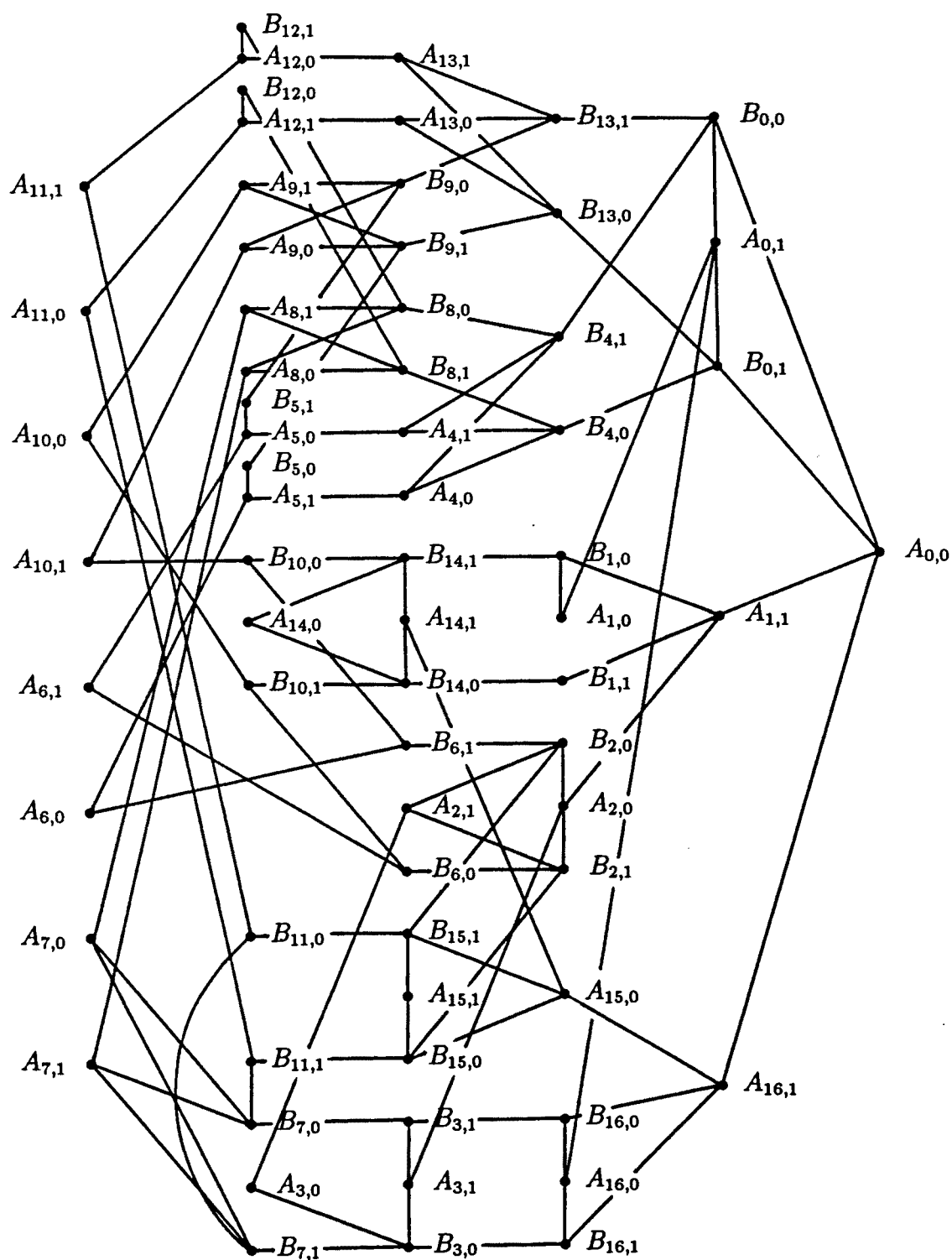
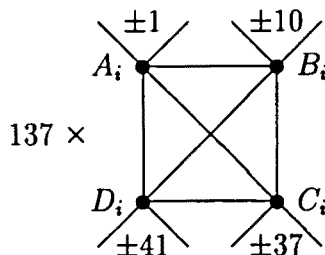


Figura 4.7: Subgrafo generador del grafo de orden 68

Figura 4.8: Grafo $(5, 7, 7, 1)$

donde $A_{i,1} = A_i, \dots, A_{i,4} = D_i$, siendo $i \in \mathbb{Z}_{137}$ y $j \in \mathbb{Z}_4$.

Es fácil verificar que la acción de este subgrupo de automorfismos sobre el conjunto de vértices del grafo da lugar a una única órbita, por lo que podemos afirmar que este grafo es vértice-transitivo.

Comprobemos a continuación cómo se trata de un grafo $(5, 7, 7, 1)$. Para ello tomemos una copia cualquiera de las que constituyen el grafo y designémosla como copia 0. Notemos que los saltos que debemos realizar para conectar los vértices de esta copia con sus adyacentes en otras copias están en función de los elementos del siguiente subgrupo normal de $(\mathbb{Z}_{137} - \{0\}, \cdot)$, a saber:

$$\{1, 10, -37, 41, -1, -10, 37, -41\},$$

el cual da lugar a las siguientes clases laterales:

$$\begin{aligned} [1] &= \{1, 10, -37, 41, -1, -10, 37, -41\} \\ [2] &= \{2, 20, 63, -55, -2, -20, -63, 55\} \\ [3] &= \{3, 30, 26, -14, -3, -30, -26, 14\} \\ [4] &= \{4, 40, -11, 27, -4, -40, 11, 27\} \\ [5] &= \{5, 50, -48, 68, -5, -50, 48, -68\} \\ [6] &= \{6, 60, 52, -28, -6, -60, -52, 28\} \\ [7] &= \{7, -67, 15, 13, -7, 67, -15, -13\} \\ [8] &= \{8, -57, -22, 54, -8, 57, 22, -54\} \\ [9] &= \{9, -47, -59, -42, -9, 47, 59, 42\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 [12] &= \{12, -17, -33, -56, -12, 17, 33, 56\} \\
 [16] &= \{16, 23, -44, -29, -16, -23, 44, 29\} \\
 [18] &= \{18, 43, 19, 53, -18, -43, -19, -53\} \\
 [21] &= \{21, -64, 45, 39, -21, 64, -45, -39\} \\
 [24] &= \{24, -34, -66, 25, -24, 34, 66, -25\} \\
 [31] &= \{31, 36, -51, 38, -31, -36, 51, -38\} \\
 [32] &= \{32, 46, 49, -58, -32, -46, -49, 58\} \\
 [35] &= \{35, -61, -62, 65, -35, 61, 62, -65\}.
 \end{aligned}$$

A continuación tenemos representados dos caminos internamente disjuntos de longitud ≤ 7 entre vértices de la copia 0 y vértices de cada una de las copias representantes de las clases. Los números en los caminos corresponden a las copias y las letras a los vértices con los que se llevará a cabo la adyacencia.

Copia 1

$$\begin{array}{c}
 \text{A} \text{---} \text{A} \\
 0 \quad 1
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{B} \text{---} \text{B} \text{---} \text{A} \text{---} \text{A} \text{---} \text{B} \text{---} \text{B} \\
 0 \quad 10 \quad 10 \quad 11 \quad 11 \quad 1
 \end{array}$$

Copia 2

$$\begin{array}{c}
 \text{A} \text{---} \text{A} \text{---} \text{A} \\
 0 \quad 1 \quad 2
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{D} \text{---} \text{D} \text{---} \text{A} \text{---} \text{A} \text{---} \text{A} \text{---} \text{D} \text{---} \text{D} \\
 0 \quad 41 \quad 41 \quad 42 \quad 43 \quad 43 \quad 2 \\
 \text{C} \text{---} \text{C} \text{---} \text{A} \text{---} \text{A} \text{---} \text{A} \text{---} \text{C} \text{---} \text{C} \\
 0 \quad -37 \quad -37 \quad -36 \quad -35 \quad -35 \quad 2 \\
 \text{B} \text{---} \text{B} \text{---} \text{A} \text{---} \text{A} \text{---} \text{A} \text{---} \text{B} \text{---} \text{B} \\
 0 \quad 10 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 12 \quad 2
 \end{array}$$

Copia 3

$$\begin{array}{c}
 \text{A} \text{---} \text{A} \text{---} \text{A} \text{---} \text{A} \\
 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3
 \end{array}$$

$$\begin{array}{c}
 \text{D} \text{---} \text{D} \text{---} \text{A} \text{---} \text{A} \text{---} \text{C} \text{---} \text{C} \\
 0 \quad 41 \quad 41 \quad 40 \quad 40 \quad 3
 \end{array}$$

Copia 4

$$\begin{array}{cccc} \text{C} & \text{C} & \text{D} & \text{D} \\ \hline 0 & -37 & -37 & 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \text{D} & \text{D} & \text{C} & \text{C} \\ \hline 0 & 41 & 41 & 4 \end{array}$$

Copia 5

$$\begin{array}{cccccc} \text{A} & \text{A} & \text{A} & \text{A} & \text{A} & \text{A} \\ \hline 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \text{D} & \text{D} & \text{A} & \text{A} & \text{C} & \text{C} \\ \hline 0 & 41 & 41 & 42 & 42 & 5 \end{array}$$

Copia 6

$$\begin{array}{cccccc} \text{D} & \text{D} & \text{B} & \text{B} & \text{C} & \text{C} \\ \hline 0 & -41 & -41 & -31 & -31 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \text{C} & \text{C} & \text{D} & \text{D} & \text{B} & \text{B} \\ \hline 0 & 37 & 37 & -4 & -4 & 6 \end{array}$$

Copia 7

$$\begin{array}{cccccc} \text{B} & \text{B} & \text{A} & \text{A} & \text{A} & \text{A} \\ \hline 0 & 10 & 10 & 9 & 8 & 7 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccc} \text{C} & \text{C} & \text{B} & \text{B} & \text{B} & \text{B} \\ \hline 0 & 37 & 37 & 27 & 17 & 7 \end{array}$$

Copia 8

$$\begin{array}{cccc} \text{B} & \text{B} & \text{A} & \text{A} \\ \hline 0 & 10 & 10 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \text{A} & \text{A} & \text{A} & \text{B} \\ \hline 0 & -1 & -2 & -2 \end{array}$$

Copia 9

$$\begin{array}{cccc} \text{B} & \text{B} & \text{A} & \text{A} \\ \hline 0 & 10 & 10 & 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \text{A} & \text{A} & \text{B} & \text{B} \\ \hline 0 & -1 & -1 & 9 \end{array}$$

Copia 12

A A A B B
0 1 2 2 12

B B A A A
0 10 10 11 12

Copia 16

C C C C B B
0 -37 63 26 26 16

B B C C C C
0 -10 -10 -47 53 16

Copia 18

D D D C C
0 -41 55 55 18

B B B A A A
0 10 20 20 19 18

Copia 21

B B B A A
0 10 20 20 21

D D B B B
0 41 41 31 21

Copia 24

B B D D D D
0 10 10 -31 65 24

D D D D B B
0 -41 55 14 14 24

Copia 31

D D B B
0 41 41 31

B B D D
0 -10 -10 31

Copia 32



Copia 35



Conocer estos caminos implica conocer dos caminos internamente disjuntos de longitud ≤ 7 entre los vértices de la copia 0 y los vértices de cualquier copia que constituye el grafo. Por lo tanto, si eliminamos un vértice cualquiera del grafo siempre tendremos un camino de longitud ≤ 7 entre los vértices de la copia 0 y los vértices de las restantes copias. Al ser el grafo vértice-transitivo, ésta propiedad la podemos generalizar para cualquier copia del grafo. Así pues, el diámetro de los subgrafos resultantes de eliminar un vértice cualquiera del grafo es 7, luego se tratará de un grafo $(5, 7, 7, 1)$ de orden 548. De este modo hemos mejorado la cota en 68 unidades.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo hemos realizado un estudio completo sobre la vulnerabilidad del diámetro de dos familias de grafos: los grafos Odd y los n -cubo plegados. Y en ambos casos, hemos probado que se trata de dos familias de grafos densos, poco vulnerables. En el caso de los grafos O_{n+1} , hemos demostrado la existencia de $n + 1$ caminos internamente disjuntos de longitud $\leq D(O_{n+1}) + 2$. Basándonos en esta propiedad, hemos probado que la eliminación de un conjunto adecuado de vértices de O_{n+1} incrementa el diámetro en dos unidades. Y hemos estudiado cómo varían los parámetros D'_k y D''_k cuando eliminamos k vértices o ramas del grafo, siendo k un número inferior al grado del grafo. Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

- Dado O_{n+1} , con $n \geq 4$, se verifica

$$D'_k = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ n + 1 & \text{si } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq k < 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ n + 2 & \text{si } 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq k \leq n. \end{cases}$$

- El grafo O_5 verifica

$$D''_k = \begin{cases} 4 & \text{si } k = 0, \\ 5 & \text{si } 1 \leq k < 4, \\ 6 & \text{si } k = 4. \end{cases}$$

- Los grafos O_{n+1} , con $n \geq 5$, verifican

$$D_k'' = \begin{cases} n & \text{si } 0 \leq k < \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \\ n+1 & \text{si } \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq k < \lceil \frac{n}{2} \rceil, \\ n+2 & \text{si } 2\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq k \leq n. \end{cases}$$

Análogamente para los grafos \square_{n+1} hemos probado la existencia de $n+1$ caminos internamente disjuntos de longitud $\leq D(\square_{n+1}) + 1$. Y basándonos en esta propiedad hemos estudiado cómo varían los parámetros D_k' y D_k'' cuando eliminamos k vértices o ramas del grafo (para k un número inferior al grado del grafo), obteniendo los siguientes resultados:

- Dado \square_{n+1} , con $n \geq 2$, se verifica:

$$D_k' = \begin{cases} D & \text{si } 0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1 \\ D+1 & \text{si } \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \leq k \leq n \end{cases}$$

- Dado \square_{n+1} , con $n \geq 2$, se verifica:

$$D_k'' = \begin{cases} D & \text{si } 0 \leq k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor - 1, \\ D+1 & \text{si } \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor \leq k \leq n. \end{cases}$$

Por lo tanto, ambas familias de grafos son adecuadas para la implementación de redes de interconexión tolerantes a fallos.

El segundo estudio que hemos realizado en esta tesis, también está relacionado con la vulnerabilidad y trata sobre el diseño de redes densas fiables.

Utilizando la técnica de construcción de grafos "*compound graphs*" presentada por Bermond et al. [7], hemos formulado y programado un algoritmo que nos ha permitido obtener posibles candidatos a grafos $(\Delta, D, D, 1)$. Y hemos obtenido de entre todos los posibles candidatos, cuatro grafos $(\Delta, D, D, 1)$ que mejoran cinco cotas presentadas en la tabla de grandes grafos $(\Delta, D, D, 1)$.

Finalmente comentaremos cuales son nuestros próximos temas de trabajo:

- Estudio de la vulnerabilidad del diámetro de otras familias de grafos densos.
- Búsqueda de grafos (Δ, D) y (Δ, D, D', s) siguiendo las pautas establecidas en el Capítulo 4.

Apéndice A

Programa `vertices.c`

A continuación presentamos el fichero `admat.c` que contiene la declaración de la clase `admat`, un tipo especial de matrices, cuya implementación se encuentra en `admat.c`. En el programa `vertices.c` utilizamos dicha clase para implementar de forma transparente el algoritmo resultado de aplicar la *primera regla de adyacencia* presentada en el Capítulo 4.

Fichero de cabecera `admat.h`

```
/*
----- ADMAT.H -----

    This file contains the declaration of the class admat, a special
    kind of matrices.
-----
*/

#include <stdio.h> /* we don't use C++ streams, for this class is
                    intended */
                    /* for use from a traditional ANSI C program */
```

```

#define lint long int /* long int's are fundamental for admat */

/* an structure to hold matrix information */
/*
    See
        Eckel, B., "Using C++", Osborne/McGraw-Hill, chap. 9
    for a discussion of "deep" copying and reference counting
*/

struct matrep {
    lint **fb; /* the fundamental block of an admat */
    lint nv; /* number of vertices of the fundamental graph. */
            /* Equals the number of rows of fb */
    lint nc; /* number of copies of the fundamental graph. */
            /* It must be a prime number. The number of columns */
            /* of fb is nv*(1+(nc-1)/2) */
    lint cols; /* number of columns of fb */
    lint comps; /* number of elemental matrices of fb */
    lint dim; /* dimension of the actual square matrix. */
            /* equals nv*nc; */
    int count; /* reference count */
};

class admat{

    matrep *p; /* a pointer to a matrep structure */

    void error(char *,char *msg2=""); /* a private function for elegant */
            /* quitting when encountering problems. It has a default */
            /* (null) second argument */

public:
    admat(lint,lint,lint diag=0); /* constructor of a diagonal */
            /* matrix of order nv*nc */

```

```
admat(lint,lint,lint **); /* general constructor */
admat(admat&); /* copy-initializer */
~admat(); /* the destructor of admat. It is non-trivial, to allow *
        /* for the "deep" copying of data */
/* now come a couple of operators to allow the multiplication */
/* of admats by scalars (from the left and from the right */
friend admat operator*(const lint&,const admat&);
friend admat operator*(const admat&, const lint&);
/* now the rest of overloaded operators */
admat operator =(const admat&); /* assigment of admats */
admat operator +(const admat&); /* sum of admats */
admat operator -(const admat&); /* subtraction of admats */
admat operator *(admat&); /* product of admats */

/* a couple of functions to print an admat */
void mprint(FILE *); /* the whole matrix */
void fbprint(FILE *); /* only the fundamental block */

/* finally, a pair of fundamental functions for admats */
int is_critical(lint); /* determines whether all the elements of an
        /* admat a less than a given integer */

lint value(lint,lint); /* allows the reading of elements of the */
        /* actual (whole) matrix */

};
```

Fichero *admat.c*

```

/* ----- ADMAT.C ----- */

/*
   Methods for the class ADMAT
*/

#include "admat.h"
#include <malloc.h>
#include <stdio.h>
#include <stdlib.h>

/* error function */

void admat::error(char *msg1, char *msg2) {
    fprintf(stderr, "\n\tClass admat error: %s\n\t%s\n", msg1, msg2);
    exit(1);
}

/* general constructor for the class */

admat::admat(int anv, int anc, int **afb) {

    p = new matrep; /* allocate memory for the structure; */
    if(!p) error("Memory allocation failure");
    p->nv = anv;
    p->nc = anc;
    p->comps=1+anc>>1;
    p->cols=anv*(p->comps);
    p->dim=anv*anc;
    /* now allocate memory for the actual matrix and copy the passed data */
    p->fb = new int *[anv];

```

```

    if(!(p->fb)) error("Memory allocation failure");
    for(lint i=0;i<anv;i++) {
        p->fb[i] = new lint[p->cols];
        if(!(p->fb[i])) error("Memory allocation failure");
        for(lint j=0;j<p->cols;j++)
            p->fb[i][j]=afb[i][j];
    }
    p->count=1; // so far, only one reference to this data
}

/* constructor for the admat associated to a diagonal matrix */

admat::admat(lint anv,lint anc,lint g) {

    p = new matrep; /* allocate memory for the structure; */
    if(!p) error("Memory allocation failure");
    p->nv = anv;
    p->nc = anc;
    p->comps=1+anc>>1;
    p->cols=anv*(p->comps);
    p->dim=anv*anc;
    /* now allocate memory for the actual matrix and construct the admat */
    p->fb = new lint *[anv];
    if(!(p->fb)) error("Memory allocation failure");
    for(lint i=0;i<anv;i++) {
        p->fb[i] = new lint[p->cols];
        if(!(p->fb[i])) error("Memory allocation failure");
        for(lint j=0;j<p->cols;j++)
            p->fb[i][j] = (i==j ? g : 0);
    }
    p->count=1; // so far, only one reference to this data
}

```



```

/* The copy-constructor */
/* This function is essential for the deep copying of data */

admat::admat(admat& x) {
    x.p->count++; // we are adding another reference to this data
    p=x.p; // point to the new matrep
}

/* the destructor of admats. We must free the allocated memory, but
   only when no references to it remain
*/

admat::~admat() {

    if(--p->count==0) {
        for(int i=0;i<p->nv;i++)
            delete p->fb[i];
        delete p->fb;
        delete p;
    }
}

/* to allow the reading of the data of the actual matrix */

lint admat::value(lint a,lint b) {
    if(a<p->dim && b<p->dim) {
        ldiv_t frac,fracb;
        frac=ldiv(a,p->nv);
        fracb=ldiv(b,p->nv);
        if(frac.quot==fracb.quot) /* we are un a diagonal block */
            return p->fb[frac.rem][fracb.rem];
        if(a>b) { /* the matrix is symmetric */
            lint aux;

```

```

        aux=a;
        a=b;
        b=aux;
    }
    lint i,j,m,des;
    /* we have to move up and left, parallely to the diagonal */
    frac=ldiv(a,p->nv);
    m=frac.quot;
    i=frac.rem; /* this is the correct row */
    j=b-m*(p->nv); /* but this may not be the correct column */
    if(j>(p->cols)-1) { /* we are not in the fundamental block */
        frac=ldiv(j,p->nv); /* we are in elemental matrix frac.quot + 1 */
        des=1+frac.quot-(p->comps); /* this is the number of blocks
                                   we are off */
        j=j-(2*des-1)*(p->nv); /* so we resituate ourselves */
    }
    return p->fb[i][j];
}
else error("Dimension error","Index out of range");
}

/* assignation operator for admat */

admat admat::operator=(const admat& rval) {
    /* if convenient, clean up current value */
    if(--p->count == 0) { /* nobody else references this data */
        for(lint i=0;i<p->nv;i++)
            delete p->fb[i];
        delete p->fb;
        delete p;
    }
    /* connect to the new value */
    rval.p->count++; /* tell the assigned data that it has
                    another reference */
    p = rval.p; /* point to the assigned data */
}

```

```

    return *this;
}

/* function to find out whether all the elements of an admat
    are less than a given value */

int admat::is_critical(int value) {
    int i,j;
    for(i=0;i<p->nv;i++)
        for(j=0;j<p->cols;j++)
            if(p->fb[i][j]<value) return 0;
    return 1;
}

/* sum of admats */

admat admat::operator+(const admat& rval) {

    if((p->nv != rval.p->nv) || (p->nc != rval.p->nc))
        error("Dimension error","Must be same type for addition");

    admat sum(p->nv,p->nc); /* the default constructor */

    int i,j;
    for(i=0;i<p->nv;i++)
        for(j=0;j<p->cols;j++)
            sum.p->fb[i][j] = p->fb[i][j]+rval.p->fb[i][j];

    return sum; /* due to the fact that the copy-initializer acts */
                /* before the destructor does, reference count is 2 */
                /* when the destructor is called, */
                /* and we are returning */
                /* a "safe" memory address */
}

```

```

/* subtraction of admatats */

admat admat::operator-(const admat& rval) {

    if((p->nv != rval.p->nv) || (p->nc != rval.p->nc))
        error("Dimension error","Must be same type for subtraction");

    admat sum(p->nv,p->nc); /* the default constructor */

    lint i,j;
    for(i=0;i<p->nv;i++)
        for(j=0;j<p->cols;j++)
            sum.p->fb[i][j] = p->fb[i][j]-rval.p->fb[i][j];

    return sum; /* due to the fact that the copy-initialyzer acts */
                /* before the destructor does, reference count is 2 */
                /* when the destructor is called, and we are returning */
                /* a "safe" memory address */
}

/* product of admatats */

admat admat::operator*(admat& rval) {

    if((p->nv != rval.p->nv) || (p->nc != rval.p->nc))
        error("Dimension error","Must be same type for product");

    admat product(p->nv,p->nc); /* the default constructor */

    lint i,j,k;
    for(i=0;i<p->nv;i++)
        for(j=0;j<p->cols;j++) {
            lint sum=0;
            for(k=0;k<p->dim;k++)
                sum += value(i,k)*rval.value(k,j);
        }
}

```

```

        product.p->fb[i][j]=sum;
    }

    return product; /* due to the fact that the
                     copy-initialyzer acts */
    /* before the destructor does, reference count is 2 */
    /* when the destructor is called,
       and we are returning */
    /* a "safe" memory address */
}

/* product of an admat by an escalar from the left */

admat operator*(const lint& esc,const admat& rval) {
    admat result(rval.p->nv,rval.p->nc);
    lint i,j;
    for(i=0;i<rval.p->nv;i++)
        for(j=0;j<rval.p->cols;j++)
            result.p->fb[i][j] = esc*rval.p->fb[i][j];
    return result;
}

/* product of an admat by an escalar from the right */

admat operator*(const admat& lval,const lint& esc) {
    admat result(lval.p->nv,lval.p->nc);
    lint i,j;
    for(i=0;i<lval.p->nv;i++)
        for(j=0;j<lval.p->cols;j++)
            result.p->fb[i][j] = esc*lval.p->fb[i][j];
    return result;
}

void admat::mprint(FILE *out) {
    lint i,j;

```

```
    for(i=0;i<p->dim;i++) {
        fprintf(out,"\n");
        for(j=0;j<p->dim;j++)
            fprintf(out,"%ld ",value(i,j));
    }
    fprintf(out,"\n");
}

void admat::fbprint(FILE *out) {
    lint i,j;
    for(i=0;i<p->nv;i++) {
        fprintf(out,"\n");
        for(j=0;j<p->cols;j++)
            fprintf(out,"%ld ",p->fb[i][j]);
    }
    fprintf(out,"\n");
}
```

Programa *vertices.c*

```
/*
```

```
----- VERTICES.C -----
```

```
Programa en C++
```

```
Utiliza la clase admat, declarada y definida en admat.h y admat.c
```

```
-----
```

Programa que calcula el diametro de un grafo obtenido enlazando un copias de grafo elemental, asi como su vulnerabilidad.

```
Ver:
```

```
-----
```

Uso: vertices s input output

donde s es el numero de vertices a eliminar, input es el fichero de entrada que contiene la descripcion del grafo, y output es el fichero de salida (vacio).

El fichero de entrada debe contener los siguientes datos

```
numero_de_vertices_del_grafo_componente
grado_del_grafo (debe ser regular)
numero_de_copias
matriz_de_construccion
```

donde matriz_de_construccion tiene un numero de filas igual a numero_de_vertices_del_grafo_componente, y cada fila contiene

```
vertice  c1 v1 c2 v2 c3 v3 ..... (grado_del_grafo veces)
```

donde ci es el numero de copias que tenemos que desplazarnos hacia adelante para encontrar el vertice adyacente, y vi es el numero

del vertice dentro de la copia (ci=0 indica vertice adyacente dentro de la misma copia).

```
*/

#include <stdio.h>
#include <malloc.h>
#include <string.h>
#include <stdlib.h>
#include <math.h>
#include "admat.h"

lint diametro(lint);

lint copias; /* numero de copias */
lint N; /* numero total de vertices */
lint n; /* numero de vertices de cada grafo componente */
lint **ADYA; /* matriz de adyacencia del grafo total */
lint **cc; /* matriz n por 3 que define la construccion del */
           /* grafo total a partir de los componentes */
lint grado; /* grado de cada vertice */

char entrada[20];
char salida[20];
FILE *input;
FILE *output;
lint s; /* vértices a eliminar */
lint diam; /* resultado del calculo */
lint cols; /* columnas de la matriz fundamental */

int main(int argc, char **argv)
{
    lint i,j,k;
    lint p,q;
```



```

if(argc!=4) {
    fprintf(stderr,
        "\n\t Uso: vertices vertices_a_eliminar fichero_de_entrada
            fichero_de_salida\n");
    exit(0);
}

s=atoi(argv[1]);
strcpy(entrada,argv[2]);
strcpy(salida,argv[3]);

input=fopen(entrada,"r");
output=fopen(salida,"w");
/* leemos el numero de vertices de un grafo componente */
fscanf(input,"%ld",&n);
/* leemos el grado del grafo */
fscanf(input,"%ld",&grado);

fscanf(input,"%ld",&copias); /* lee copias */
cols=n*(1+copias>>1);
N=copias*n;
/* reserva de memoria para ADYA y cc */
ADYA=(lint **)calloc((unsigned long)n,sizeof(lint *));
if(!ADYA) exit(0);
for(i=0;i<n;i++) {
    ADYA[i]=(lint *)calloc((unsigned long)cols,sizeof(lint));
    if(!ADYA[i]) exit(0);
}
cc=(lint **)calloc((unsigned long)n,sizeof(lint *));
if(!cc) exit(0);
for(i=0;i<n;i++) {
    cc[i]=(lint *)calloc((unsigned long)1+grado*2,sizeof(lint));
    if(!cc[i]) exit(0);
}

```

```

/* lectura de cc */
for(i=0;i<n;i++)
    for(j=0;j<1+grado*2;j++) {
        fscanf(input,"%ld",*(cc+i)+j);
        if(2*(j>>1)==j) cc[i][j]--;
    }
/* construimos ADYA */
for(i=0;i<copias;i++)
    for(j=0;j<n;j++)
        for(k=0;k<grado;k++) {
            p=n*i+j;
            q=(n*cc[j][2*k+1]+cc[j][2*k+2]+n*i)%N;
            if(p<=q && p<n && q< cols) ADYA[p][q]=1;
        }
for(i=0;i<n;i++)
    for(j=0;j<i;j++)
        ADYA[i][j]=ADYA[j][i];

fprintf(stderr,"\n Empezamos a calcular ... \n");
diam=diametro(s);

fprintf(output,
        "\ndiametro = %ld\t orden = %ld\t vertices eliminados = %ld",
        diam,n*copias,s);

fclose(input);
fclose(output);

return 1;
}

lint diametro(lint s)
{

```

```
admat A(n,copias,ADYA);
admat I(n,copias,1);

admat P1=A;
admat P2=A*A-grado*I;
admat P3(n,copias);

admat B=(s+1)*(I+A)+P2;

diam =1;

while(1) {
    diam ++;
    fprintf(stderr,"Comprobando diametro %ld\n",diam);
    if(B.is_critical(s+1)) break;
    P3=A*P2-(grado-1)*P1;
    B=B+P3;
    P1=P2;
    P2=P3;
}

return diam;

}

*/
/
*/
```

Bibliografía

- [1] I. Alegre, M.A. Fiol and J.L.A. Yebra, *Some Large Graphs with Given Degree and Diameter*, Journal of Graph Theory, vol.10 (1986) 219-224.
- [2] P. Banerjee and A. Dugar, *The Design, Analysis and Simulation of a Fault-Tolerant Interconnection Network Supporting the fetch-and-Add Primitive*, IEEE transactions on computers, January 1989, 30-38.
- [3] P. Banerjee et al., *Algorithm-Based Fault Tolerance on a Hypercube Multiprocessor*, IEEE Transactions on Computers, September 1990, 1132-1144.
- [4] B. Becker and H.U. Simon, *How robust is the n-cube?*, Inform. Computat., vol.77, 1988, 162-178.
- [5] J-C. Bermond, J. Bond, M. Paoli and Peyrat, *Graphs and interconnection networks, diameter and vulnerability*, London Mathematical Society Lecture Notes Series 82, Cambridge Uni. Press, Cambridge 1983, 1-30.
- [6] J-C. Bermond, N. Homobono and C. Peyrat, *Large fault-tolerance interconnection networks*, Graphs and Combinatorics, 1989, 107-123.
- [7] J-C. Bermond, C. Delorme and J-J. Quisquater, *Strategies for Interconnection Networks: Some Methods from Graph Theory*, Journal of Parallel and Distributed Computingn 3, 1986, 433-449.
- [8] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, 1993.

- [9] N. Biggs, *Some Odd Graph Theory*, Annals of the New York Academy of Sciences, vol.319, 1979, 71-81.
- [10] Frank T. Boesch and Frank Harary, *Graphs as Models of Communication Network Vulnerability: Connectivity and persistence*, Networks, vol. 11, 1981, 57-63.
- [11] J. Bond and C. Peyrat, *Diameter vulnerability in networks*, Graph Theory with Application to Algorithms and Computer Science, Wiley Interscience, 1985, 123-149.
- [12] A. Brouwer, A. Cohen, A. Neumaier, *Distance-Regular Graphs*, Springer-Verlag.
- [13] J. Bruck, R. Cypher and D. Soroker, *Tolerating Faults in Hypercubes Using Subcube Partitioning*, IEEE Transactions on Computers, vol. 41, May 1992.
- [14] Ming-Syan Chen and Kang G. Shin, *Adaptive Fault-Tolerant Routing in Hypercube Multicomputers*, IEEE Transactions on Computers, vol. 39, December 1990.
- [15] F.R.K. Chung and M. R. Garey, *Diameter bounds for altered graphs*, J. Graph Theory, vol. 8, 1984, 511-534.
- [16] Philip J. Davis, *Circulant Matrices*, John Wiley and Sons, New York 1979.
- [17] Shantanu Dutt and John P. Hayes, *Some Practical Issues in the Design of Fault-olerant Multiprocessors*, IEEE Transactions on Computers, May 1992, 588-598.
- [18] B. Eckel, *Using C++*, Osborne/MacGraw-Hill, chap. 9.
- [19] Abdol-Hossein Esfahanian, *Generalized Measures of Fault Tolerance with Application to N-cube Networks*, IEEE Transactions on Computers, November 1989, 1586-1591.

- [20] A. Ghafoor and T.R. Bashkow, *A Study of Odd Graphs as Fault-Tolerant Interconnection Networks*, IEEE Trans. on Comp., vol.40, 1991, 225-232.
- [21] Arif Ghafoor and Patrick Solé, *Performance of Fault-Tolerant Diagnostics in the Hypercube Systems*, IEEE Transactions on Computers, vol. 38, August 1989.
- [22] C.D. Godsil, *More Odd Graph Theory*, Discrete Math., vol.32, 1980, 205-207.
- [23] J. Gómez, M.A. Fiol and O. Serra, *On large (Δ, D) -graphs*, discrete mathematics 114 (1993) 219-235.
- [24] J. Gómez and J.L.A. Yebra, *Strategies to construct $(\Delta, D, D, 1)$ graphs*, sometido a Ars Combinatoria, 1994.
- [25] J. Gómez, *Diámetro y vulnerabilidad en redes de interconexión*, Tesis Doctoral, Barcelona 1986.
- [26] J. Gómez, *Some $(\Delta, D, D, 1)$ graphs*, Report of investigation, E.T.S.I.T., Barcelona 1993.
- [27] Ronald Gould, *Graph Theory*, The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1988.
- [28] Frank Harary, *Graph Theory*, Addison-Wesley, October 1972.
- [29] W.D. Hillis, *The Connection Machine*, ACM distinguish dissertation, MIT Press Cambridge, 1987.
- [30] A.J. Hoffman and R.R. Singleton, *On Moore graphs with diameter 2 and 3*, IBM J. Res. Develop.4, 1960, 497-504.
- [31] M. Imase, T. Soneoka and K. Okada, *Connectivity of Regular Directed Graphs with Small Diameter*, IEEE Transactions on Computer, vo. 34, 1985, 267-273.

- [32] M.S. Krishnamoorthy and B. Krishnamurthy, *Fault Diameter of interconnection networks*, Comput. Math. Appl., vol.13, 1987, 577-582.
- [33] J.G. Kuhl and M.S. Reddy, *Fault-tolerance considerations in large multiprocessor systems*, IEEE Computer, 1986, 56-67.
- [34] Shahram Latifi, *Combinatorial Analysis of Fault-Diameter of the n -cube*, IEEE Transactions on Computers, January 1993, 27-33.
- [35] H. Pham and S.J. Upadhyaya, *Optimal Design of Fault-Tolerant Distributed Systems Based on a recursive Algorithm*, IEEE Transactions on Reliability, August 1991, 375-379.
- [36] D.K. Pradhan, *Fault-Tolerant Multiprocessor Link and Bus network Architectures*, IEEE Transactions on Computers, January 1985, pp 33-45.
- [37] C. Peyrat, *Les reseaux d'interconnexion et leur vulnérabilité These d'état*, LRI, Paris 1987.
- [38] C. Peyrat, *Diameter vulnerability of graphs*, Discr. Appl. Math., 1984, 245-250.
- [39] Y. Saad and M.H. Schultz, *Topological Properties of Hypercubes*, IEEE Transactions on Computers, July 1988, 867-872.
- [40] C.L. Seitz, *The Cosmic Cube*, Commun. ACM, vol.28 1985, 22-33.
- [41] A. Sengupta, A. Sen and S. Bandyopadhyay, *On an Optimally Fault-Tolerant network architecture*, IEEE Transactions on Computer, vol. C-36, 1987, 619-623.
- [42] E. Simó and J.L.A. Yebra, *Vulnerability of the Diameter of Odd Graphs*, sometido a IEEE Transactions on Networks, 1995.
- [43] E. Simó and J.L.A. Yebra, *Vulnerability of the Diameter of Folded n -Cubes*, sometido a Discrete Mathematics, 1994.

- [44] B. Stroustrup, *The C++ Programming Language*, Addison-Wesley, 1987.
- [45] N-F. Tzeng and S. Wei, *Enhanced Hypercubes*, IEEE Transac. on Comp., vol.40, March 1991, 284-294.
- [46] Dajin Wang, *Diagnosability of Enhanced Hypercubes*, IEEE Transactions on Computers, vol.43, September 1994, 1054-1061.
- [47] C. S. Yang, J. F. Lee and F. T. Boesch, *Graph Theoretic Reliability Analysis for the Boolean n cube Networks*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. 35, September 1988.
- [48] J.L.A. Yebra, *Largest invulnerable graphs*, sometido a Journal of Graph Theory.
- [49] J.L.A. Yebra, M.A. Fiol and I. Alegre, *Some large graphs with given degree and diameter*, Journal of Graphs Theory **110**, 1986, 219-224.
- [50] J.L.A. Yebra, V.J. Rayward-Smith and A.P. Revilt, *The $(\Delta, D, D', \Delta - 1)$ -Problem with Application to Computer Networks*, Annals of Op. Res., vol.33, 113-124.



M M M M M
M M M M M
M M M M M

T