

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Programa de Doctorat:
SOFTWARE

Tesi Doctoral

**UN MODEL D'INCERTESA FITADA
PER A LA PROPAGACIÓ I FUSIÓ
D'INFORMACIÓ GEOMÈTRICA INCERTA**

M. Assumpta Sabater i Pruna

Director: Dr. Federico Thomas Arroyo

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Programa de Doctorat:
SOFTWARE

Tesi Doctoral

**UN MODEL D'INCERTESA FITADA
PER A LA PROPAGACIÓ I FUSIÓ
D'INFORMACIÓ GEOMÈTRICA INCERTA**

M. Assumpta Sabater i Pruna

Director: Dr. Federico Thomas Arroyo

Setembre de 1996

Agraïments

Vull agrair al Dr. Federico Thomas Arroyo la seva constant i pacient dedicació en la direcció d'aquesta tesi.

Agraeixo al departament de Matemàtica Aplicada III de la Universitat Politècnica de Catalunya, així com a l'Institut de Cibernètica de la mateixa UPC, els medis que han posat a la meva disposició per a realitzar aquest treball.

Als companys del departament d'Expressió Gràfica a l'Enginyeria els agraeixo la realització d'algunes figures.

I també vull agrair a tots els companys i amics que m'han ajudat durant la realització d'aquesta tesi amb els seus comentaris, suggèrencies i suport anímic.

Índex

1	Introducció	1
2	Model geomètric de l'entorn	5
2.1	Representació matemàtica dels elements geomètrics	5
2.2	Propietats desitjables de les parametritzacions d'elements geomètrics	9
2.3	Parametrització a través de transformacions de referències	14
3	Model d'incertesa adoptat	18
3.1	Model d'incertesa fitada	18
3.2	Regions el·lipsoidals d'incertesa	19
3.3	Informació completa, parcial i semiexacta	21
3.4	Mesura de la incertesa	22
3.5	Propietats	23
4	Fusió d'informació competitiva	24
4.1	Fusió de regions el·lipsoidals generals	26
4.2	Fusió de regions el·lipsoidals via franges	29
4.2.1	Fusió el·lipsoide – franja	29
4.2.2	Descomposició d'un el·lipsoide en franges	32
4.2.3	Fusió iterativa d'el·lipsoide i franges	33
4.3	Fusió de regions el·lipsoidals complementàries	35
4.4	Propietats	39
5	Propagació d'informació. Relacions geomètriques	41
5.1	Relacions geomètriques	41
5.2	Propagació local d'informació	42
5.2.1	Propagació local de regions el·lipsoidals	43

5.2.2	La propagació local com a projeccions i extensions	48
5.2.3	Càlcul d'estimacions per la linealització d'equacions	50
5.3	Satisfacció de relacions geomètriques	52
5.4	Propietats	53
6	Graf de relacions geomètriques. Propagació global	55
6.1	Definició del graf	55
6.2	Propagació global en el graf	56
6.3	Càlcul d'estimacions finals	58
7	Exemple d'aplicació: Imposició de condicions de consistència a projeccions bidimensionals de políedres	61
7.1	Definició del problema	62
7.2	Graf de relacions geomètriques d'un dibuix incert	63
7.3	Propagació i fusió en els grafs de dibuixos incerts	64
7.4	Condicions de consistència	67
7.5	L'algorisme	69
7.6	Exemples	72
8	Comparació amb altres models d'incertesa	76
8.1	Comparació amb el model probabilístic	76
8.2	Comparació amb el model de fitació politòpica	81
8.3	Comparació amb el model de fitació ortotòpica	83
9	Conclusions	86
A	Matrius inverses generalitzades. Fórmula generalitzada d'Schur	89
	Bibliografia	91

Llista de figures

2.1	Parametritzacions de les rectes del pla: (a) (r, θ) , (b) (a, b) , (c) (p, q) i (d) (\mathbf{p}, \mathbf{v})	8
2.2	Parametrització dels objectes rígids del pla: (x, y, θ)	8
2.3	Referències locals a l'espai de: (a) punt, (b) recta, (c) pla i (d) objecte rígid	15
2.4	Representació d'un punt en diferents referències	15
2.5	Paràmetres lliures i lligats de les referències locals d'una recta	17
3.1	Incertesa d'una recta en (a) l'entorn i en (b) l'espai de paràmetres	19
3.2	(a) Politop i (b) politop aproximat per el·lipsoide	20
3.3	Politop com a intersecció de semiespais	20
3.4	Regions el·lipsoidals	21
3.5	Regions el·lipsoidals i politòpiques, (a) fitades, (b) no fitades	22
4.1	(a) Fusió de politops i (b) fusió d'el·lipsoïdes	25
4.2	Fusió el·lipsoïde – franja	29
4.3	El·lipsoïde i franja incompatibles	30
4.4	Franges redundants respecte els el·lipsoïdes	31
4.5	(a) Franja que no talla l'el·lipsoïde pels dos costats, (b) estrenyiment de la franja i (c) fusió resultant	31
4.6	Caixes envolupants d'el·lipsoïdes	32
4.7	Fusió de cilindres complementaris	35
5.1	Propagació local de regions d'incertesa	42
5.2	Interpretació geomètrica de la propagació d'informació	48
5.3	Projecció d'un el·lipsoïde no cilíndric	49
5.4	Projecció d'el·lipsoïdes cilíndrics ortogonals a la varietat de projecció	49
5.5	Projecció d'el·lipsoïdes cilíndrics sobre tota la varietat de projecció	50
5.6	Projecció no ortogonal ni total d'el·lipsoïde cilíndric	50

6.1	(a) Un rectangle amb una diagonal i (b) el graf corresponent	56
6.2	(b) Camins de propagació corresponents al graf (a) amb inici en V_1	57
6.3	(b) Camins de propagació del node N_1 al node N_2 en el graf (a)	57
7.1	(a) Una aresta i els seus vèrtexs i (b) el graf corresponent	65
7.2	(a) Propagació local de la incertesa dels vèrtexs, \mathcal{E}_{V_1} i \mathcal{E}_{V_2} , a l'espai de paràmetres de l'aresta i fusió de les franges $\mathcal{P}(\mathcal{E}_{V_1})$ i $\mathcal{P}(\mathcal{E}_{V_2})$ obtingudes i (b) la incertesa de l'aresta obtinguda en el pla del dibuix.	66
7.3	(a) Condició d'arestes alineades i (b) condició d'arestes concurrents	67
7.4	(a) Cicle del tipus ACAC i (b) imposició de la condició d'arestes alineades al cicle	68
7.5	(a) Cicle de tipus ACACAC i (b) imposició de la condició d'arestes concurrents	69
7.6	Cicle ACAC on la condició d'arestes alineades és redundant	70
7.7	Condició d'arestes coplanàries	70
7.8	(a) Subgraf per la condició d'arestes coplanàries i (b) imposició de la condició	71
7.9	Dibuix sense restriccions	73
7.10	Dibuixos amb la condició d'arestes concurrents: (a) consistent, (b) modificable per ser consistent, (c) inconsistent, (d) incerteses dels vèrtexs en (a) i (e) incerteses dels vèrtexos en (b)	74
7.11	Dibuixos amb la condició d'arestes alineades: (a) consistent, (b) modificable per ser consistent i (c) inconsistent	74
7.12	Dibuix impossible	75
8.1	Funcions de densitat gaussianes (a) unidimensional i (b) bidimensional	77
8.2	El·lipsoides associats a una distribució bidimensional gaussiana	80
8.3	(a) Politop com a intersecció de semiespais i (b) politop donat pels seus vèrtexos i facetes	81
8.4	Regions d'incertesa politòpiques d'observacions (a) completes i (b) parcials	82
8.5	Fusió de politops	82
8.6	Regió d'incertesa ortotòpica	84
8.7	(a) Fusió d'ortotops i (b) menor ortotop contenint un politop	84

Capítol 1

Introducció

Un sistema robòtic obté informació sobre el seu entorn i sobre ell mateix a partir dels diversos sensors dels quals disposa, com per exemple: càmeres de video, sensors de proximitat, sensors de tacte, etc. La demanda creixent d'adaptabilitat i autonomia dels robots fa necessària l'habilitat del sistema per reaccionar a les dades sensorials. Això és especialment cert quan el sistema ha de treballar en entorns no estructurats o poc estructurats. Per a que les dades sensorials siguin utilitzables per a les tasques del robot cal integrar-les en una sola estructura sobre la qual poder prendre decisions. A més, és necessari poder treballar en aquesta estructura amb dades de diferents tipus, en especial en sistemes robòtics multisensorials i en robots mòbils, que canvien contínuament la perspectiva.

En un sistema robòtic multisensorial, cada sensor proporciona normalment observacions parcials i amb un cert error sobre l'entorn, per tant cal la contribució de diversos mecanismes sensorials i cal tenir en compte la incertesa o l'error de les dades per a construir un model consistent. A més, per a que la informació sigui d'utilitat cal processar-la, és a dir, cal combinar, comparar i transformar les observacions provinents dels diferents sensors fins a obtenir un model de l'entorn tant ajustat a la realitat com sigui possible i d'ell extreure'n la informació necessària per a la realització d'una determinada tasca.

L'objectiu principal d'aquesta tesi és dissenyar un sistema general de tractament d'informacions geomètriques incertes, no depenent dels sensors utilitzats o de les fonts d'origen de la informació ni de les tasques a realitzar amb la informació un cop processada. Aquest sistema ha de ser capaç de tractar informació incerta (mesures amb un cert error), de tractar tant informació completa com parcial, de tractar informació competitiva (diverses mesures d'un mateix element) i d'aprofitar les relacions conegudes entre els diferents elements de l'entorn per a propagar informacions. A més, els procediments del sistema han de ser eficients, ja que molts cops la informació s'ha de processar en temps real, com per exemple quan un robot ha d'obtenir una localització a partir d'unes dades acabades d'observar pels seus sensors.

Molts dels treballs anteriors en el tema d'integració d'informació es basen en un enfoc probabilístic per a modelar la incertesa [Dur86, LLS88, MS87, NX89, SSC88, SL91]. En ells es considera l'error com una variable aleatòria amb distribució de probabilitat gaussiana, i aleshores els mecanismes bàsics del sistema venen donats per mètodes probabilístics d'estimació (estimació per màxima versemblança o equivalents) i càlcul matricial. Un altre enfoc utilitzat per

a representar la incertesa de les informacions és el de regions fitadores de la incertesa. Aquestes són regions de l'espai de paràmetres determinades per les fites de l'error que cada observació proporciona. Dins d'aquest enfoc s'utilitzen regions de diferents tipus. Un primer tipus utilitzat són les regions ortotòpiques paral·leles als eixos, equivalents a trobar fites per cada coordenada dels paràmetres. En aquest cas, els procediments bàsics del sistema es realitzen optimitzant amb tècniques de programació lineal [AH91, DP89, MB82]. Altres autors obtenen les fites per a cada coordenada per mitjà de càlcul simbòlic a partir de les inequacions de les fites [Bro82, FO91]. Un segon tipus de regions fitadores utilitzat són les regions politòpiques generals, que per al seu tractament necessiten calcular la intersecció de politops i la projecció de politops, que es realitzen mitjançant tècniques de Geometria Computacional [BS90, DP90, MN90, PW90]. Finalment també s'utilitzen regions el·lipsoidals, on les operacions bàsiques de tractament d'informació es fan a través del càlcul matricial [ST91, WP90].

L'enfoc utilitzat en aquesta tesi és el de regions fitadores de la incertesa perquè no necessita suposar cap distribució de probabilitat a l'error de les dades, la qual cosa permet utilitzar-lo en casos on no es té informació estadística prèvia sobre aquest error. A més, contràriament a l'enfoc probabilístic clàssic, amb les regions fitadores d'incertesa no és necessària la hipòtesi de no esbiaixament i independència de les dades, i per tant no cal utilitzar grans matrius de covariances globals per a tractar la dependència entre variables. Com a regions d'incertesa s'utilitzen regions el·lipsoidals, les quals contenen de forma ajustada les regions d'incertesa exactes, que habitualment són politòpiques. Les regions el·lipsoidals tenen com a avantatge principal el fet de poder-se representar per matrius, la qual cosa redueix els càlculs a operacions matricials i redueix l'espai d'emmagatzamament, alhora que permeten modelar la diferent incertesa en les diferents direccions i permeten representar tant informacions completes com parcials.

El model d'incertesa adoptat, amb regions fitadores en l'espai de paràmetres es troba, no només en el camp de la Robòtica, sinó també en el camp de l'estimació de paràmetres en Teoria de sistemes [FH82, WP90, Sch73, TV90, NM90, RH90] i en el camp del Processament de senyals [Com93, Del89]. Per altra banda cal també senyalar la connexió amb la Programació Lineal, ja que l'algorisme de fusió proposat es basa en un procediment que és equivalent a un pas iteratiu del mètode de l'el·lipsoide [BGT81].

Les informacions que permet tractar el sistema proposat són de tipus geomètric, com són localitzacions espacials d'objectes rígids o alguns dels seus elements (cares, arestes, vèrtexs), o altres elements geomètrics com rectes, arcs, corbes, superfícies, díedres, polígons, etc. També es tracten relacions topològiques i geomètriques entre aquests elements, com poden ser la igualtat, pertinença, alineament, paral·lisme, concurrència i d'altres.

El disseny del sistema de tractament d'informació presentat es basa en dues operacions: la fusió d'informació competitiva i la propagació d'informació. Per altra banda el sistema s'estructura en un graf, anomenat de relacions geomètriques, sobre el qual es realitzen totes les fusions i propagacions.

S'entén per fusió qualsevol mecanisme tal que donades diverses observacions d'un mateix element geomètric, cada una d'elles amb un cert error, permeti trobar una bona estimació d'aquest element. Una mitjana ponderada de les diferents observacions seria, per exemple, un mecanisme de fusió. L'algorisme de fusió presentat es realitza amb càlculs matricials i permet fusionar tant observacions completes, on es té informació sobre tots els paràmetres d'un element, com parcials, on només es tenen dades sobre alguns dels paràmetres o sobre relacions entre ells.

Un aspecte molt important del mecanisme de fusió presentat és que permet la fusió de dades sense cap hipòtesi d'independència entre elles, cosa que el fa aplicable a un ampli ventall de casos. Finalment es disposa d'un mecanisme de detecció de dades incompatibles, per detectar inconsistències de les hipòtesis formulades o casos de malfuncionament d'algun sensor.

L'altra operació bàsica és la propagació o transformació de la informació que es té sobre un element en informació sobre un altre element de l'entorn que té alguna relació coneguda amb l'anterior. Per exemple, la informació sobre la posició d'una cara d'un objecte ha de permetre deduir informació sobre la posició de les cares adjacents o sobre la posició del propi objecte. La transformació d'informació s'utilitza per a propagar una observació d'un element a tots els elements relacionats amb ell i així aprofitar al màxim cada observació. En el sistema presentat la propagació, com la fusió, es calcula a través d'operacions matricials. Per a realitzar aquesta propagació de forma global s'utilitza com a un graf, en el qual els diferents elements de l'entorn estan representats pels nodes i les relacions entre ells pels arcs.

Les informacions que poden ser tractades pel sistema presentat són en principi qualsevols i poden provenir de qualsevol tipus de mecanisme sensorial, mentre siguin de informacions tipus geomètric. Això és degut a que no es pressuposa cap tipus concret d'informacions en el desenvolupament dels procediments. Per altra banda això vol dir que no s'estudien sistemes robòtics concrets amb uns tipus concrets de sensors, la qual cosa té l'avantatge de fer el sistema útil per a sistemes multisensorials. De la mateixa manera tampoc s'estudien tipus concrets de representació de les informacions geomètriques ja que el sistema no està basat en cap representació concreta. De fet, es pot utilitzar qualsevol representació paramètrica no sobredeterminada dels elements.

Com ja s'ha dit el mecanisme dissenyat és general i per tant aplicable a qualsevol tasca del robot o sistema robòtic. Es poden citar algunes de les tasques més importants, com són el reconeixement d'objectes, la localització, la planificació geomètrica de trajectòries, l'ensamblatge, la interpretació d'objectes tridimensionals a partir de dibuixos, etc. El sistema de tractament d'informació incerta desenvolupat sembla adequat per aquestes tasques, ja que en elles es realitzen moltes operacions geomètriques, com: restricció de la posició d'un objecte a partir de la posició d'un o diversos dels seus elements o parts, combinació de restriccions per deduir la posició de l'objecte, comparació de mesures entre elements observats i elements del model, combinació d'informacions d'un mateix element des de diversos punts de vista, comprovació de la satisfacció de determinades relacions entre objectes o elements, etc. A banda de les aplicacions en el camp de la Robòtica, que han motivat el treball, i en el camp de l'estimació de paràmetres, algunes parts del sistema desenvolupat són d'aplicació a altres camps, on no tenen la interpretació de regions d'incertesa. Així, per exemple, en el Modelat Geomètric pot ser d'interès, quan es treballa amb caixes envelopants el·lipsoïdals, ja que les operacions de fusió i propagació proposades permeten el càlcul de la transformació d'el·lipsoïdes en diverses operacions necessàries en un sistema de modelat.

Malgrat que no és objectiu primordial d'aquesta tesi l'estudi concret de les aplicacions, es desenvolupa i s'implementa un exemple d'aplicació, la imposició de condicions de consistència a dibuixos bidimensionals per a ser projeccions d'objectes tridimensionals. En aquest exemple es pot veure com el graf introduït és una estructura còmode i útil per imposar les condicions i com les eines de fusió i propagació poden ser utilitzades com a operacions bàsiques de molt diversos procediments.

La tesi s'estructura en 7 capítols, a més de la introducció i les conclusions. En el capítol 2 es fa una breu introducció al model geomètric de l'entorn, és a dir a la representació dels elements geomètrics. En el capítol 3 es presenta el model d'incertesa adoptat. Els capítols 4 i 5 contenen, respectivament, les dues operacions bàsiques del sistema: la fusió d'informacions competitives i la propagació local d'informació. El capítol 6 introdueix el graf de relacions geomètriques i estudia la propagació global d'informació, utilitzant les dues operacions bàsiques dels capítols anteriors. En el capítol 7 es presenta un exemple d'aplicació del sistema desenvolupat a una tasca concreta: la imposició de condicions de consistència a un dibuix bidimensional per a poder ser interpretat com el dibuix d'un objecte tridimensional. Finalment, en el capítol 8 es fa una comparació entre el model d'incertesa adoptat i els models més utilitzats en la literatura del tema.

Capítol 2

Model geomètric de l'entorn

Els models geomètrics de l'entorn utilitzats en Robòtica es basen generalment en una sèrie d'elements geomètrics i una sèrie de relacions topològiques o geomètriques entre ells. Alguns dels tipus d'elements geomètrics bàsics més freqüents són: punts o vèrtexs; rectes, semirectes i segments rectilinis; circumferències i arcs de circumferències; altres corbes bàsiques planes o de l'espai; plans, semiplans o cares planes; superfícies i trossos de superfícies esfèriques, cilíndriques i còniques; altres superfícies bàsiques; sòlids de l'espai; direccions de l'espai; etc. A partir dels elements bàsics se'n poden construir d'altres, per exemple: díedres com a composició de parelles de plans que es tallen en una recta, triédres anàlogament, rotacions com a sòlids amb un punt fix, etc. També es poden considerar elements geomètrics d'un entorn pla, com: punts o vèrtexs; rectes, circumferències, corbes o arcs de corbes; objectes rígids; etc. Per altra banda, algunes de les relacions entre elements geomètrics més emprades són: igualtat, pertinença, com en el cas *punt pertany a recta*; incidència de fronteres, com en *punt és vèrtex d'aresta*, *segment és aresta de cara* i *superfície és cara de sòlid*; parallelisme entre elements d'un mateix tipus; perpendicularitat; etc.

En aquest capítol s'estudia de forma genèrica la representació matemàtica dels elements de l'entorn. Ara bé, els conceptes, eines, procediments i resultats d'aquest treball són independents dels tipus d'elements geomètrics utilitzats i de la seva representació matemàtica concreta, excepte quan s'expliciti contràriament.

2.1 Representació matemàtica dels elements geomètrics

Per a representar matemàticament cada un dels tipus d'elements geomètrics de l'entorn es poden utilitzar diferents models. En general, i també en aquest treball, s'utilitzen models parametritzats, on cada element és representat per un vector de paràmetres. En aquesta tesi s'utilitzen només paràmetres reals, però en la literatura del tema s'han utilitzat altres tipus de paràmetres, com els quaternions o els números duals. També s'han utilitzat models no parametritzats, com en [Abi91], on els elements geomètrics es representen per funcions de pertinença.

Definició 2.1 (Parametrització) Una parametrització dels elements de tipus X és una aplicació bijectiva

$$\Gamma : \mathcal{E}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X),$$

on $\mathcal{E}(X)$ és el conjunt dels elements geomètrics de tipus X i $\mathcal{P}(X) \subset \mathbb{R}^n$ per algun $n \in \mathbb{N}$. $\mathcal{P}(X)$ s'anomena espai de paràmetres de X o espai de configuracions de X .

Definició 2.2 (Dimensió d'una parametrització) Donada una parametrització $\Gamma : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, on l'espai de paràmetres $\mathcal{P}(X)$ és una varietat diferenciable, s'anomena dimensió de Γ a la dimensió de l'espai de paràmetres $\mathcal{P}(X)$. Si $\mathcal{P}(X) \subset \mathbb{R}^n$ i la dimensió de Γ és $m < n$ es diu que la parametrització és sobredimensionada.

Hi ha diverses formes d'escollir els paràmetres que representen els elements geomètrics de cada tipus d'element, és a dir, hi ha diverses parametritzacions possibles. La resta de capítols d'aquesta tesi treballen amb parametritzacions no sobredeterminades. Ara bé, aquesta és l'única hipòtesi que se'ls suposa, sempre que no s'indiqui contràriament.

A continuació es descriuen alguns exemples de parametritzacions.

- Els punts de l'espai s'acostumen a parametritzar per les seves coordenades en un sistema de referència fix. Aquesta parametrització té dimensió 3.

$$\begin{aligned} \{\text{punts de l'espai}\} & \xrightarrow{\Gamma_1} \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) & \longrightarrow (x, y, z). \end{aligned}$$

Anàlogament els punts del pla es parametritzen per les seves coordenades (x, y) .

- Quatre exemples de parametritzacions de les rectes del pla (figura 2.1), totes elles de dimensió 2:

$$\begin{aligned} \{\text{rectes del pla}\} & \xrightarrow{\Gamma_2} \mathbb{R} \times \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \subset \mathbb{R}^2 \\ \text{recta d'equació } (x \sin \theta + y \cos \theta = r) & \longrightarrow (r, \theta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\text{rectes del pla no passant per l'origen}\} & \xrightarrow{\Gamma_3} \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \\ \text{recta d'equació } (ax + by + 1 = 0) & \longrightarrow (a, b), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\text{rectes del pla no paral·leles a l'eix } y\} & \xrightarrow{\Gamma_4} \mathbb{R}^2 \\ \text{recta d'equació } (y = px + q) & \longrightarrow (p, q), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{\text{rectes del pla}\} & \xrightarrow{\Gamma_5} \bigcup_{\mathbf{v} \in S^1} (R_{\mathbf{v}} \times \{\mathbf{v}\}) \subset \mathbb{R}^4 \\ \left(\begin{array}{l} \text{recta de vector director unitari } \mathbf{v} \text{ i} \\ \text{passant pel punt } \mathbf{p} \text{ tal que } \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = 0 \end{array} \right) & \longrightarrow (\mathbf{p}, \mathbf{v}), \end{aligned}$$

on S^1 és la circumferència de radi 1 i centre l'origen i $R_{\mathbf{v}} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}^2 \mid \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = 0\}$ recta passant per l'origen i de vector normal \mathbf{v} .

- Els objectes rígids del pla s'acostumen a parametritzar a través d'un punt fix i un vector fix en l'objecte (figura 2.2). La dimensió d'aquesta parametrització és 3.

$$\left(\begin{array}{l} \{\text{objectes rígids del pla}\} \\ \text{objecte amb un punt fix } (x, y) \text{ i} \\ \text{angle } \theta \text{ d'un vector fix amb l'eix } x \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_6} \mathbb{R}^2 \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow (x, y, \theta).$$

- Tres exemples de parametritzacions reals per a les rotacions de l'espai: pel vector director de l'eix de rotació i l'angle, pels angles de *roll*, *pitch* and *yaw* i pels coeficients de la matriu ortogonal. Totes aquestes parametritzacions tenen dimensió 3.

$$\left(\begin{array}{l} \{\text{rotacions de l'espai}\} \\ \text{rotació d'angle } \theta \text{ entorn d'una recta} \\ \text{de vector director unitari } \mathbf{u} \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_7} S_+^2 \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^4 \longrightarrow (\mathbf{u}, \theta),$$

on S_+^2 és un hemisferi de l'esfera de centre l'origen i radi 1 d' \mathbb{R}^3 .

$$\left(\begin{array}{l} \{\text{rotacions de l'espai}\} \\ \text{Rot}_z(\phi) \cdot \text{Rot}_y(\theta) \cdot \text{Rot}_x(\psi) \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_8} [0, 2\pi) \times \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times [0, 2\pi) \subset \mathbb{R}^3 \longrightarrow (\phi, \theta, \psi).$$

Als angles ϕ , θ i ψ se'ls anomena angles *Roll*, *Pitch* i *Yaw* de la rotació.

$$\left(\begin{array}{l} \{\text{rotacions de l'espai}\} \\ \text{rotació de matriu } \mathbf{R} \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_9} \{\text{matrius ortogonals directes}\} \subset \mathbb{R}^{3 \times 3} \longrightarrow \mathbf{R}.$$

- Qualsevol parametrització Γ de rotacions de l'espai junt amb les coordenades d'un punt fix donen una parametrització dels objectes rígids de l'espai. Aquesta última parametrització tindrà dimensió 6.

$$\left(\begin{array}{l} \{\text{objectes rígids de l'espai}\} \\ \text{objecte amb un punt fix } (x, y, z) \text{ i rotació } R \\ \text{que porta l'eix } x \text{ a un vector fix} \end{array} \right) \xrightarrow{\Gamma_{10}} \mathbb{R}^3 \times \mathcal{P}(\text{rotacions}) \longrightarrow (x, y, z, \Gamma(R)).$$

Altres parametritzacions molt utilitzades són: les coordenades esfèriques o cilíndriques per als punts de l'espai, les rectes de l'espai parametritzades per un punt i un vector director, les direccions de l'espai parametritzades per vectors o bé per coordenades esfèriques, els plans de l'espai parametritzats, de forma anàloga a les rectes del pla, pels coeficients de l'equació o bé per coordenades esfèriques del vector normal i la distància a l'origen, etc.

A continuació s'estudien algunes propietats desitjables de les parametritzacions i en l'apartat 2.3 es presenta un exemple de sistema de parametritzacions aplicable a tot tipus d'element.

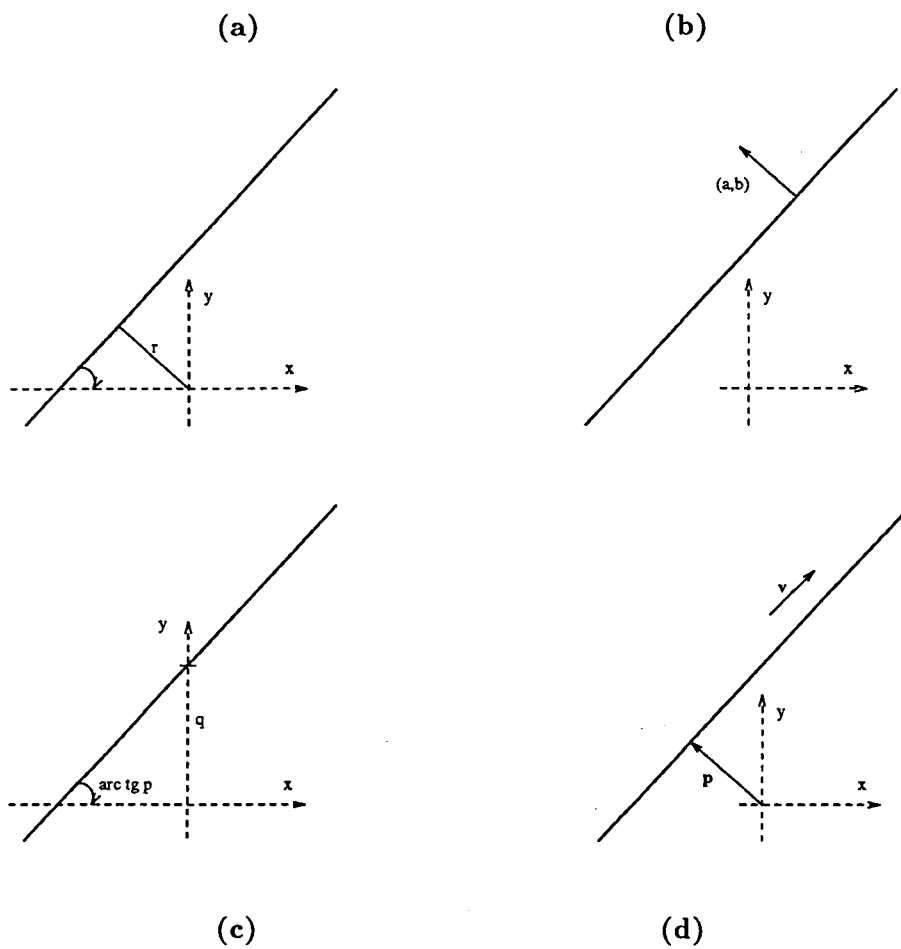


Figura 2.1: Parametritzacions de les rectes del pla: (a) (r, θ) , (b) (a, b) , (c) (p, q) i (d) (p, v)

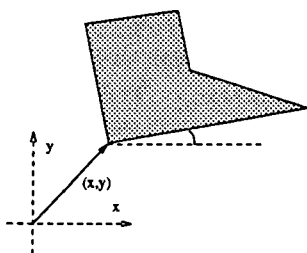


Figura 2.2: Parametrització dels objectes rígids del pla: (x, y, θ)

2.2 Propietats desitjables de les parametritzacions d'elements geomètrics

A l'hora de triar una parametrització o una altra per a un determinat tipus d'elements geomètrics cal tenir en compte l'estructura matemàtica de l'espai de paràmetres i les propietats de la parametrització.

Dues de les propietats de les parametritzacions més bàsiques per al desenvolupament del sistema presentat en els següents capítols són les propietats de regularitat i estabilitat d'una parametrització. Aquestes propietats són especialment importants en la mesura de la incertesa de les informacions. En aquest apartat s'estudien aquests dos conceptes, així com els criteris per a comprovar si es satisfan o no.

En una parametrització que compleixi *bones propietats* cal que molts conceptes, com dimensió o volum, siguin independents de la posició de l'element en l'entorn. És a dir, cal que al fer un moviment rígid en el conjunt d'elements l'aplicació que aquest moviment defineix de manera natural en l'espai de paràmetres conservi aquests conceptes. Per això s'intodueix la següent definició:

Definició 2.3 Donada una parametrització $\Gamma : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ i un moviment rígid $M : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(X)$ s'anomena aplicació associada a M a l'aplicació

$$\begin{aligned} M^* : \mathcal{P}(X) &\rightarrow \mathcal{P}(X) \\ \mathbf{x} &\rightarrow M^*(\mathbf{x}) = \Gamma(M(\Gamma^{-1}(\mathbf{x}))). \end{aligned}$$

Una de les propietats desitjables d'una bona parametrització és la regularitat. Si l'espai de paràmetres és una varietat diferenciable en cada vector de paràmetres hi ha definit un espai tangent i per a que la parametrització sigui regular (no singular) cal que al fer un moviment rígid en el conjunt d'elements els corresponents paràmetres tinguin espais tangents isomorfs. Així en particular es conservarà la dimensió.

Definició 2.4 (Parametrització regular) Una parametrització $\Gamma : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, on l'espai de paràmetres $\mathcal{P}(X)$ és una varietat diferenciable, s'anomena regular en $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{P}(X)$ si les aplicacions tangents dM^* de les aplicacions M^* associades a tot moviment rígid M són isomorfismes, és a dir,

$$\forall M \text{ moviment rígid} \quad dM^* : T_{\mathbf{x}_0} \mathcal{P}(X) \rightarrow T_{M^*(\mathbf{x}_0)} \mathcal{P}(X) \text{ és un isomorfisme .}$$

on $T_{\mathbf{x}} \mathcal{P}(X)$ és l'espai tangent a $\mathcal{P}(X)$ en \mathbf{x} . Un punt que no és regular s'anomena singular.

La següent proposició dóna un criteri pràctic per a comprovar la regularitat o singularitat.

Proposició 2.1 En una parametrització $\Gamma : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$, on l'espai de paràmetres $\mathcal{P}(X) \subset \mathbb{R}^n$ és una varietat diferenciable de dimensió n , $\mathbf{x}_0 \in \mathcal{P}(X)$ és regular si i només si

$$\forall \text{ moviment rígid } M : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(X) \quad \det \left(\frac{\partial M^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \right) \neq 0, \quad (2.1)$$

on $\frac{\partial M^*}{\partial \mathbf{x}}$ és la matriu jacobiana de M^* . Si $\dim(\mathcal{P}(X)) < n$, la condició 2.1 és només una condició suficient de regularitat de la parametrització en \mathbf{x}_0 .

Demostració:

Si la dimensió de $\mathcal{P}(X)$ és n , l'aplicació tangent dM^* té matriu $\frac{\partial M^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0)$. I per a

que aquesta aplicació lineal entre dos espais tangents de dimensió n sigui isomorfisme és necessari i suficient que el determinant no s'anulli. Si la dimensió de $\mathcal{P}(X)$ és menor que n , la condició anterior assegura un isomorfisme entre espais tangents d'una supravarietat de $\mathcal{P}(X)$ que restringit als subespais tangents de $\mathcal{P}(X)$ coincideix amb dM^* i que per tant també és isomorfisme. ■

Una altra de les propietats desitjables d'una bona parametrització és l'estabilitat. Una parametrització estable és aquella que a un mateix conjunt d'elements li assigna el mateix volum en l'espai de paràmetres, independentment de la posició. És a dir que la mesura de volum en l'espai de paràmetres sigui invariant per moviments rígids en el conjunt d'elements.

Definició 2.5 (Parametrització estable) Una parametrització $\Gamma : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ s'anomena estable si l'espai de paràmetres $\mathcal{P}(X)$ té definida una mesura μ i si les aplicacions M^* associades a tot moviment rígid M conserven la mesura de $\mathcal{P}(X)$, és a dir,

$$\forall M \text{ moviment rígid} \quad \forall A \subset \mathcal{P}(X) \quad \mu(A) = \mu(M^*(A)).$$

En les parametritzacions no estables un mateix volum en l'espai de paràmetres no representarà el mateix volum en el conjunt d'elements. Per tant en aquests casos no es podran comparar volums d'incertesa (apartat 3.4).

Proposició 2.2 [Dur89] Una parametrització $\Gamma : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{P}(X) \subset \mathbb{R}^n$, on l'espai de paràmetres $\mathcal{P}(X) \subset \mathbb{R}^n$ és una varietat diferenciable on hi ha definida la mesura estàndar

$$\mu(A) = \int_A 1 \quad \text{on} \quad A \subset \mathcal{P}(X),$$

és estable si i només si

$$\forall \text{ moviment rígid } M : \mathcal{E}(X) \rightarrow \mathcal{E}(X) \quad \forall \mathbf{x}_0 \in \mathcal{P}(X) \quad \det \left(\frac{\partial M^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0) \right) = 1. \quad (2.2)$$

Demostració:

Només cal veure com varia la mesura μ al fer un moviment rígid M ,

$$\mu(M^*(A)) = \int_{M^*(A)} 1 = \int_A \left| \frac{\partial M^*}{\partial \mathbf{x}} \right| \quad \text{i} \quad \mu(A) = \int_A 1 \quad \forall A \subset \mathcal{P}(X),$$

per tant el fet que la mesura és conservi és equivalent a $\left| \frac{\partial M^*}{\partial \mathbf{x}} \right| = 1$ ■

Sempre que sigui possible es triaran parametritzacions estables o com a mínim sense singularitats. Ara bé, si això no és possible, per evitar les singularitats o punts on l'estabilitat sigui molt dolenta es poden fer canvis de referència per moviments rígids.

S'analitza a continuació l'estabilitat dels exemples de l'apartat 2.1 (més detalls en [San76]).

- La parametrització Γ_1 dels punts de l'espai per les seves coordenades (x, y, z) és estable, i per tant regular, en tot punt. En efecte, un moviment rígid M té equació $M(\mathbf{x}) = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{m}$, essent $\mathbf{x} = (x, y, z)^t$, \mathbf{M} una matriu 3×3 ortogonal d'orientació positiva i $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$ i la seva aplicació associada coincideix, és a dir $M^* = M$. La matriu jacobiana $\frac{\partial M^*}{\partial \mathbf{x}}$ és igual a la matriu ortogonal \mathbf{M} i per tant en tot punt $\det \left(\frac{\partial M^*}{\partial \mathbf{x}} \right) = \det(\mathbf{M}) = 1$.

- La parametrització Γ_2 de les rectes del pla per (r, θ) , essent l'equació de la recta $x \cos \theta + y \sin \theta = r$, és estable, i per tant regular. En efecte, un moviment rígid M té equació

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} m \\ n \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

La recta d'equació $x \cos \theta + y \sin \theta = r$ es converteix per M en la recta

$$x'(\cos \theta \cos \alpha - \sin \theta \sin \alpha) + y'(\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \alpha) = r - m \cos \theta - n \sin \theta,$$

és a dir, en la recta $x \cos \theta' + y \sin \theta' = r'$, essent $\theta' = \theta + \alpha$ i $r' = r - m \cos \theta - n \sin \theta$. Per tant l'aplicació $M^* : (r, \theta) \rightarrow (r', \theta')$ associada a M té jacobià

$$\left| \frac{\partial(r', \theta')}{\partial(r, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} 1 & m \sin \theta - n \cos \theta \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1.$$

- La parametrització Γ_3 de les rectes del pla per (a, b) , essent l'equació de la recta $ax + by + 1 = 0$, no és estable ni regular. En efecte, un moviment rígid M té equació (2.3) i la recta d'equació $ax + by + 1 = 0$ es converteix per M en la recta

$$x'(a \cos \alpha - b \sin \alpha) + y'(a \sin \alpha + b \cos \alpha) + 1 + ma + nb = 0,$$

és a dir, en la recta $a'x' + b'y' + 1 = 0$, essent

$$a' = \frac{a \cos \alpha - b \sin \alpha}{1 + ma + nb} \quad \text{i} \quad b' = \frac{a \sin \alpha + b \cos \alpha}{1 + ma + nb}.$$

D'aquí calculant es dedueix que l'aplicació $M^* : (a, b) \rightarrow (a', b')$ associada a M té jacobià

$$\left| \frac{\partial(a', b')}{\partial(a, b)} \right| = \frac{1}{(1 + ma + nb)^3}.$$

Per tant la parametrització és singular en aquelles rectes que fan $1 + ma + nb = 0$, que són aquelles que tenen imatge per M passant per l'origen de coordenades. A més, tampoc és estable en totes les rectes on és regular, ja que en general el jacobià no és igual a 1.

- La parametrització Γ_4 de les rectes del pla per (p, q) , essent l'equació de la recta $y = px + q$, no és estable ni regular. En efecte, un moviment rígid M té equació (2.3) i la recta d'equació $y = px + q$ es converteix per M en la recta

$$y'(\cos \alpha - p \sin \alpha) = x'(\sin \alpha + p \cos \alpha) + m(-\sin \alpha - p \cos \alpha) + n(\cos \alpha - p \sin \alpha) + q,$$

és a dir, en la recta $y' = p'x' + q'$, essent

$$p' = \frac{\sin \alpha + p \cos \alpha}{\cos \alpha - p \sin \alpha} \quad \text{i} \quad q' = -m \frac{\sin \alpha + p \cos \alpha}{\cos \alpha - p \sin \alpha} + n + \frac{q}{\cos \alpha - p \sin \alpha}.$$

D'aquí calculant es dedueix que l'aplicació $M^* : (p, q) \rightarrow (p', q')$ associada a M té jacobià

$$\left| \frac{\partial(p', q')}{\partial(p, q)} \right| = \frac{1}{(\cos \alpha - p \sin \alpha)^3}.$$

Per tant la parametrització és singular en aquelles rectes que fan $\cos \alpha - p \sin \alpha = 0$, que són aquelles que tenen imatge per M paral·lela a l'eix y . A més, tampoc és estable en totes les rectes on és regular, ja que en general el jacobià no és igual a 1.

- La parametrització Γ_5 de les rectes del pla per (\mathbf{p}, \mathbf{v}) , essent \mathbf{v} un vector director unitari de la recta i \mathbf{p} un punt de la recta tal que $\mathbf{p} \cdot \mathbf{v} = 0$, és estable i per tant regular. En efecte, un moviment rígid M té equació $\mathbf{x}' = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{m}$, essent \mathbf{M} una matriu 2×2 ortogonal directa, $\mathbf{x} = (x, y)^t$ i $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^2$. La recta d'equació $\mathbf{x} = \mathbf{p} + \lambda \mathbf{v}$ es converteix per M en la recta $\mathbf{x}' = \mathbf{m} + \mathbf{M}\mathbf{p} + \lambda \mathbf{M}\mathbf{v}$, que es pot escriure també com $\mathbf{x}' = \mathbf{p}' + \lambda \mathbf{v}'$, essent $\mathbf{v}' = \mathbf{M}\mathbf{v}$ un vector unitari i $\mathbf{p}' = \mathbf{m} + \mathbf{M}\mathbf{p} + (\mathbf{m} \cdot \mathbf{v})\mathbf{v}$ un punt de la recta tal que $\mathbf{p}' \cdot \mathbf{v}' = 0$. D'aquí calculant es dedueix que l'aplicació $M^* : (\mathbf{p}, \mathbf{v}) \rightarrow (\mathbf{p}', \mathbf{v}')$ associada a M té jacobià

$$\left| \frac{\partial(\mathbf{p}', \mathbf{v}')}{\partial(\mathbf{p}, \mathbf{v})} \right| = |\mathbf{M}|^2 = 1.$$

- La parametrització Γ_6 dels objectes rígids del pla per (x, y, θ) , essent (x, y) un punt fix de l'objecte i θ l'angle entre l'eix x i un vector fix en l'objecte, és estable i per tant regular. En efecte, un moviment rígid M té equació (2.3), la qual ja dona l'expressió de la imatge per M del punt fix i el vector fix $(\cos \theta, \sin \theta)$ es converteix en $(\cos \theta', \sin \theta')$, essent $\theta' = \theta + \alpha$. Així doncs, el jacobià de l'aplicació M^* associada a M és

$$\left| \frac{\partial(x', y', \theta')}{\partial(x, y, \theta)} \right| = \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

- La parametrització Γ_7 de les rotacions de l'espai per un vector director unitari de l'eix i l'angle, (\mathbf{u}, θ) , no és estable ni regular. En efecte, un moviment rígid M és una rotació ja que no hi pot haver translació perquè l'origen ha de ser fix en aquests elements. La imatge per M de la rotació $R(\mathbf{u}, \theta)$ és la rotació $R(\mathbf{u}', \theta') = R(\mathbf{n}, \alpha) \circ R(\mathbf{u}, \theta)$, essent $M = R(\mathbf{n}, \alpha)$ i les equacions implícites de l'aplicació $M^* : (\mathbf{u}, \theta) \rightarrow (\mathbf{u}', \theta')$ són

$$\begin{aligned} \cos \frac{\theta'}{2} &= \cos \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\theta}{2} - \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{n}^t \mathbf{u}, \\ \sin \frac{\theta'}{2} \mathbf{u}' &= \cos \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{u} + \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\theta}{2} \mathbf{n} + \sin \frac{\alpha}{2} \sin \frac{\theta}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Derivant a partir d'aquestes equacions i operant s'obté que el jacobià és

$$\left| \frac{\partial(\mathbf{u}', \theta')}{\partial(\mathbf{u}, \theta)} \right| = \frac{\sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta'}{2}}.$$

Per tant la parametrització és singular en aquelles rotacions que fan $\sin \frac{\theta}{2} = 0$ o $\sin \frac{\theta'}{2} = 0$, que corresponen a la rotació identitat. A més, tampoc és estable en totes les rotacions on és regular, ja que en general el jacobià no és igual a 1.

- La parametrització Γ_8 de les rotacions de l'espai pels seus angles *Roll-Pitch-Yaw* (ϕ, θ, ψ) no és estable ni regular. En efecte, un moviment rígid M és una rotació i la imatge per M de la rotació $R = \text{Rot}_z(\phi) \cdot \text{Rot}_y(\theta) \cdot \text{Rot}_x(\psi)$ és $\text{Rot}_z(\phi') \cdot \text{Rot}_y(\theta') \cdot \text{Rot}_x(\psi') = MR$. L'expressió de ϕ', θ' i ψ' en funció de ϕ, θ i ψ , així com la seva matriu jacobiana es poden trobar en [Tar90] i el jacobià que s'obté és

$$\left| \frac{\partial(\phi', \theta', \psi')}{\partial(\phi, \theta, \psi)} \right| = \frac{\cos \theta}{\cos \theta'}.$$

Per tant la parametrització és singular en aquelles rotacions d'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$ o $\theta' = \frac{\pi}{2}$. A més, tampoc és estable en totes les rotacions on és regular, ja que en general el jacobià no és igual a 1.

- La parametrització Γ_9 de les rotacions de l'espai pels coeficients de les seves matrius ortogonals directes \mathbf{R} és estable i per tant regular. En efecte, un moviment rígid M és una rotació de matriu \mathbf{M} i la imatge per M de la rotació té matriu $\mathbf{R}' = \mathbf{M}\mathbf{R}$. L'aplicació M^* expressa els coeficients de \mathbf{R}' en funció dels coeficients de \mathbf{R} i la seva matriu jacobiana és

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} m_{11}\mathbf{I} & m_{21}\mathbf{I} & m_{31}\mathbf{I} \\ m_{12}\mathbf{I} & m_{22}\mathbf{I} & m_{32}\mathbf{I} \\ m_{13}\mathbf{I} & m_{23}\mathbf{I} & m_{33}\mathbf{I} \end{pmatrix},$$

essent m_{ij} els coeficients de \mathbf{M} i \mathbf{I} la matriu identitat 3×3 . I el determinant d'aquesta matriu és

$$\det(\mathbf{J}) = \det(\mathbf{M})^3 = 1.$$

- La parametrització Γ_{10} dels objectes rígids de l'espai per les coordenades \mathbf{p} d'un punt fix i la parametrització $\Gamma(R)$ d'una rotació R que transformi l'eix x en una direcció fixa és estable si ho és la parametrització de les rotacions. En efecte, un moviment rígid M té equació $\mathbf{x}' = \mathbf{M}\mathbf{x} + \mathbf{m}$, essent \mathbf{M} una matriu 3×3 ortogonal directa i $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^3$. La imatge per M de l'objecte de paràmetres $(\mathbf{p}, \Gamma(R))$ és l'objecte de paràmetres $(\mathbf{p}', \Gamma(R'))$, essent $\mathbf{p}' = \mathbf{M}\mathbf{p} + \mathbf{m}$ i $R' = M \circ R$ i per tant el jacobià de M^* és

$$|\mathbf{J}| = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial \mathbf{p}'}{\partial \mathbf{p}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}(\Gamma) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}(\Gamma) \end{pmatrix} = |\mathbf{M}| |\mathbf{J}(\Gamma)| = |\mathbf{J}(\Gamma)|,$$

essent $\mathbf{J}(\Gamma)$ la matriu jacobiana de Γ . Per tant el jacobià $|\mathbf{J}|$ és igual a 1 si i només si ho és $|\mathbf{J}(\Gamma)|$.

A més de les propietats d'estabilitat i regularitat és desitjable que una parametrització converteixi les relacions geomèriques més freqüents en equacions lineals. Aquesta propietat és molt important per a la propagació d'incertesa que s'introduirà en el capítol 5. Ara bé, no és fàcil trobar parametritzacions que facin lineals les relacions.

Un exemple de relació lineal pot ser el paral·lisme entre rectes, amb la parametrització Γ_2 , ja que el paral·lisme entre les rectes de paràmetres (r, θ_1) i (r_2, θ_2) es converteix en $\theta_1 = \theta_2$.

Per contra, vegem a continuació com la relació *punt pertany a recta* en el pla no té equacions lineals per cap de les parametritzacions de rectes més usades.

- Per la parametrització Γ_2 la relació el punt (x, y) pertany a la recta (r, θ) té equació $x \cos \theta + y \sin \theta = r$, que no és lineal clarament.
- Per la parametrització Γ_3 la relació el punt (x, y) pertany a la recta (a, b) té equació $ax + by + 1 = 0$, que tampoc és una equació lineal en les variables (x, y, a, b) , encara que és bilineal.
- Per la parametrització Γ_4 la relació el punt (x, y) pertany a la recta (p, q) té equació $y = px + q$, que és bilineal, però no lineal respecte les variables (x, y, p, q) , com en el cas anterior.
- Per la parametrització Γ_5 la relació el punt (x, y) pertany a la recta (\mathbf{p}, \mathbf{v}) té equació $(\mathbf{p} - \mathbf{p}_0) \cdot \mathbf{v} = 0$ que és bilineal respecte (\mathbf{p}, \mathbf{v}) , però no lineal, com en els casos anteriors.

2.3 Parametrització a través de transformacions de referències

En aquest apartat es presenta breument un exemple de parametritzacions molt usades en el camp de la Robòtica [Por88, SSC88, TL92, Tar90] i que és homogeni pels diferents tipus d'elements geomètrics. Aquestes parametritzacions es basen en la idea de referències locals de cada element i de simetries d'aquests elements. Es pot trobar una descripció més extensa en [Tar90].

Es pot associar a cada tipus d'element geomètric una referència, anomenada referència local, de forma que l'origen estigui situat sobre l'element i els eixos *alineats amb ell*. Per exemple: una referència local d'un punt de l'espai té l'origen en el punt i els eixos són qualsevols (figura 2.3 a); una referència local d'una recta de l'espai té l'origen en un punt qualsevol de la recta, té l'eix x alineat amb la recta i els altres dos eixos són qualsevols formant un trièdre ortogonal junt amb el primer (figura 2.3 b); un pla de l'espai té referència local amb origen en un punt qualsevol del pla, eixos x i y qualsevols ortogonals sobre el pla i l'eix z normal al pla (figura 2.3 c); una referència local d'un objecte rígid de l'espai té l'origen en un punt de l'element i els eixos fixats respecte les arestes de l'element (figura 2.3 d).

Un cop associada una referència local a cada tipus d'element geomètric, cada un dels elements d'aquest tipus pot ser determinat pel moviment rígid t_{ME} que transforma la referència global de l'entorn M (referència món) en la referència local E corresponent. La imatge per aquest moviment t_{ME} d'un punt P expressat en la referència E és el mateix punt expressat en la referència M , és a dir, $\mathbf{p}_M = t_{ME}(\mathbf{p}_E)$ (veure la figura 2.4).

Els moviments rígids positius, i per tant les transformacions de referències, es poden expressar com a composició d'una rotació i una translació i per tant es poden representar amb

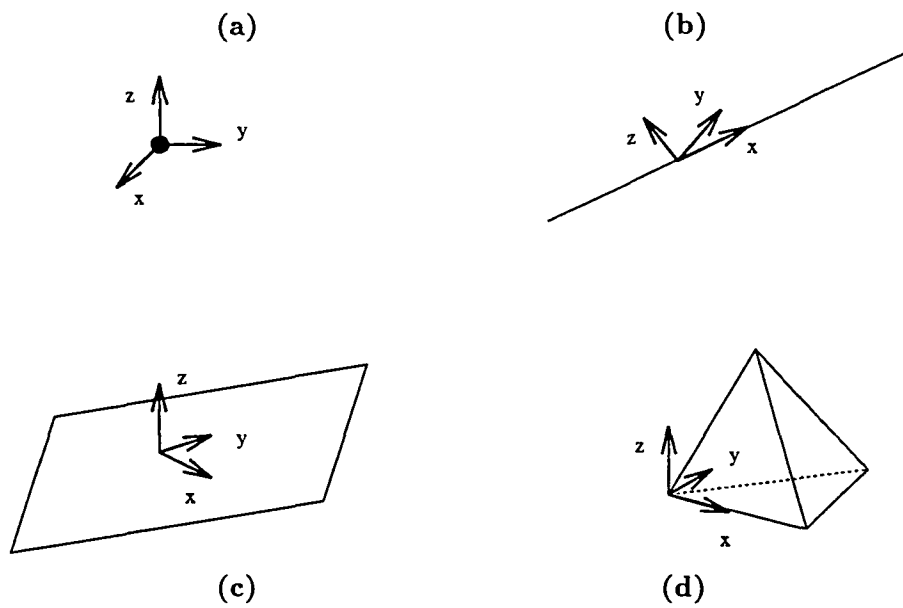


Figura 2.3: Referències locals a l'espai de: (a) punt, (b) recta, (c) pla i (d) objecte rígid

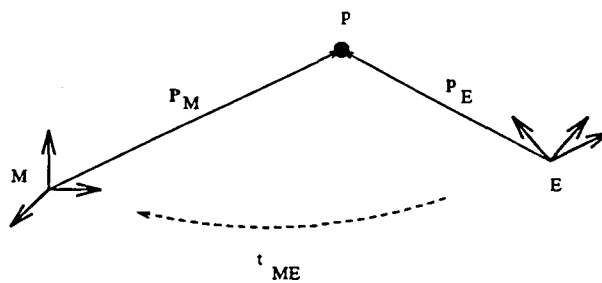


Figura 2.4: Representació d'un punt en diferents referències

Element	Grup de simetria
punt	R_{xyz}
recta	$T_x \cdot R_x \cdot C_{2y}$
pla	$T_{xy} \cdot R_z \cdot C_{2z}$
objecte rígid	I

Taula 2.1: Grups de simetria dels elements bàsics

una parametrització qualsevol de les rotacions (apartat 2.1) i les coordenades del vector de translació. Expressant les rotacions pels angles *Roll-Pitch-Yaw*, un moviment rígid $t \in MO(3)$ té associat el vector de paràmetres $\mathbf{x}(t) = (x, y, z, \phi, \theta, \psi)$, on

$$t = T(x, y, z) \cdot R_z(\phi) \cdot R_y(\theta) \cdot R_x(\psi).$$

Ara bé, per molts dels tipus d'elements geomètrics les referències locals, no són úniques i per tant no es poden utilitzar directament per a parametritzar aquests elements. Per exemple, com a referència local d'un punt és vàlida qualsevol referència amb origen en el punt i eixos qualsevols. L'estudi del conjunt de referències locals vàlides està lligat a l'estudi de les simetries de l'element.

Les simetries d'un element geomètric \mathcal{E} estan representades pel *grup de simetria associat*, $S_{\mathcal{E}}$, que està format pel conjunt de moviments rígids positius que deixen l'element invariant, és a dir,

$$S_{\mathcal{E}} = \{t \in MO(3) \mid t(\mathcal{E}) = \mathcal{E}\},$$

conjunt que forma un subgrup del grup $MO(3)$ dels moviments rígids de l'espai amb l'operació composició. Si es fixa una de les referències en una referència local E de l'element \mathcal{E} i s'expressen els moviments com a transformacions d'aquesta referència E a altres E' , el grup de simetria $S_{\mathcal{E}}$ correspon a les referències E' que també són locals, és a dir:

$$S_{\mathcal{E}} = \{t_{EE'} \in MO(3) \mid \text{la referència } E' \text{ és local per } \mathcal{E}\}.$$

Els elements d'un mateix tipus tenen grups de simetria conjugats i per tant isomorfs. A més, els grups de simetria d'elements del mateix tipus són iguals si s'expressen en les respectives referències locals. Així, expressant els grups de simetria en referències locals, es pot parlar de grup de simetria d'un determinat tipus d'elements.

Per altra banda el grup de simetria d'un element es pot expressar com el producte $S = M \cdot C$, on M és un grup infinit, anomenat *grup de moviment continu*, i C és un grup finit i cíclic. El grup de moviment continu M es pot expressar com a producte de subgrups de translacions i subgrups de rotacions. En la taula 2.1 es poden veure els grups de simetria dels elements geomètrics més bàsics.

Tal com s'han escollit les referències locals, els grups de simetria corresponen a les transformacions de referències que modifiquen amb qualsevol valor alguns paràmetres (els que corresponen als eixos de simetria) i que no modifiquen els altres paràmetres. Per exemple el grup continu de simetria d'una recta $M = T_x R_x$ està format per moviments que són composició de

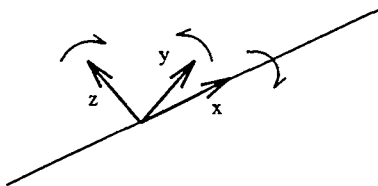


Figura 2.5: Paràmetres lliures i lligats de les referències locals d'una recta

translacions en la direcció de l'eix x i rotacions entorn d'aquest eix i per tant són transformacions que modifiquen els paràmetres x i ψ , però no els paràmetres y, z, ϕ i θ , és a dir,

$$T_x \cdot R_x = \{t \in MO(3) \mid \mathbf{x}(t) = (x, y, z, \phi, \theta, \psi) \quad y = z = \phi = \theta = 0 \quad x, \psi \text{ qualsevol} \}.$$

En general, el grup de simetria d'un tipus concret d'elements està format pels moviments que tenen uns determinats paràmetres nuls, que s'anomenen *paràmetres lligats*, i els altres paràmetres, que poden prendre qualsevol valor i s'anomenen *paràmetres lliures*. Així per les rectes de l'espai els paràmetres lliures són (x, ψ) i els lligats (y, z, ϕ, θ) (figura 2.5).

Els conceptes de paràmetres lligats i lliures permeten definir parametrizacions dels elements geomètrics a través de les referències locals. En efecte, un cop fixada una referència global de l'entorn de treball, un element geomètric d'un cert tipus queda determinat per una referència local. D'entre les infinites referències locals possibles per cada element s'escull aquella referència local E tal que la transformació t_{ME} tingui els paràmetres lliures nuls. Així, els paràmetres lligats de t_{ME} formaran el vector de paràmetres de l'element.

Definició 2.6 S'anomena parametrizació referencial dels elements de tipus X a l'aplicació

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(X) & \xrightarrow{\Gamma_X} \mathbb{R}^l \\ \text{element } \mathcal{E} & \longrightarrow \mathbf{p}_{ME} = \text{vector de paràmetres lligats de } t_{ME} \\ & \text{essent } E \text{ és una referència local de } \mathcal{E} \\ & \text{i tenint } t_{ME} \text{ els paràmetres lliures nuls,} \end{aligned}$$

on M és una referència món.

La regularitat i l'estabilitat d'aquestes parametrizacions depèn del tipus d'element geomètric.

Capítol 3

Model d'incertesa adoptat

Les observacions sensorials comporten un cert error i per tant es diu que són incertes. Un sistema de tractament d'informació sensorial ha de tenir en compte la incertesa de les dades per a construir un model consistent de l'entorn. L'objectiu d'aquest capítol és establir un model matemàtic per al tractament d'aquesta incertesa.

El model d'incertesa ha de permetre el càlcul efectiu de les dues operacions bàsiques d'un sistema d'integració d'informació: la fusió de diverses observacions d'un mateix element i la propagació d'informació entre elements relacionats. A més, el model ha de permetre representar informació parcial i obtenir mesures de la incertesa o magnitud d'error d'una determinada observació.

En robòtica i altres camps s'ha utilitzat bàsicament dos models d'incertesa: el model probabilístic i el model d'error fitat. En el model probabilístic es considera l'error com una variable aleatòria amb una certa distribució de probabilitat, en general gaussiana, i els mecanismes de fusió d'informació venen donats per mètodes probabilístics d'estimació (estimació per màxima versemblança o equivalents) i la propagació d'informació es realitza per càlcul matricial. En el model d'error fitat es consideren les regions fitadores de la incertesa, que són regions de l'espai de paràmetres determinades per les fites de l'error que cada observació proporciona. En el capítol 8 es fa una comparació d'aquests models. En aquest treball s'ha adoptat el model de fitació per la seva major aplicabilitat alhora que significa un cost computacional raonable.

3.1 Model d'incertesa fitada

En aquest treball un element geomètric està representat per un vector de paràmetres d'una certa dimensió. Tal com s'exposa en el capítol 2 hi ha diverses formes d'assignar aquests vectors de paràmetres, diverses parametritzacions. Ara bé, el sistema de tractament d'incertesa presentat és independent de la parametrització utilitzada i per tant és vàlid per qualsevol.

Un element geomètric està representat per un vector de paràmetres $\mathbf{x}_r \in \mathbb{R}^n$ d'una certa dimensió n . Una mesura o observació d'un element geomètric representat pel vector de paràmetres \mathbf{x}_r no dona el valor exacte de \mathbf{x}_r , sinó que té associat un error. L'error és desconegut,

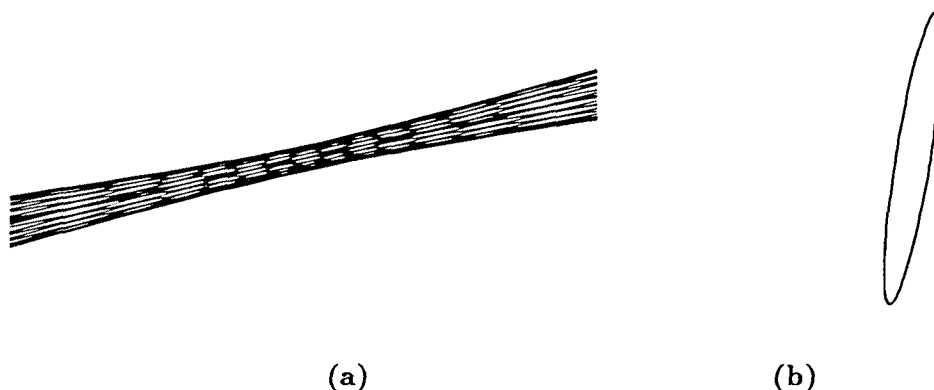


Figura 3.1: Incertesa d'una recta en (a) l'entorn i en (b) l'espai de paràmetres

però sí se'n poden conèixer unes fites (en totes o algunes direccions). Aquestes fites formen una regió \mathcal{I}_x en l'espai de paràmetres \mathbb{R}^n , anomenada *regió d'incertesa* de la mesura, dins de la qual podem assegurar que s'hi troba el paràmetre real x_r . Així, doncs, una mesura o observació d'un element geomètric en aquest model consisteix únicament en donar una regió d'incertesa.

Definició 3.1 (Observació) Donat un element geomètric \mathcal{E} representat per un vector de paràmetres $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, una observació o mesura de l'element és una regió \mathcal{I}_x de \mathbb{R}^n , tal que el valor real x_r de \mathbf{x} pertany a \mathcal{I}_x (figura 3.1).

Qualsevol punt de la regió d'incertesa \mathcal{I}_x és igualment vàlid com a estimació del paràmetre x_r , ja que no es pressuposa cap distribució de probabilitat dins de la regió. Això, per una banda, permet utilitzar el model en una gran varietat de casos, inclús quan es desconeix la distribució de les observacions. Ara bé, per altra banda, té l'inconvenient que no dóna una estimació única de l'element. Si cal obtenir una estimació única i no hi ha cap criteri addicional, es tria el centre de la regió, si existeix.

3.2 Regions el·lipsoidals d'incertesa

El tipus de conjunts que s'esculli per a les regions d'incertesa ha de permetre modelar la incertesa diferent en les diferents direccions alhora que ha de comportar la realització de forma eficient de les operacions de fusió i propagació d'informació. Alguns dels tipus de conjunts utilitzats en la literatura són: politops, ortotops (politops de cares ortogonals entre sí), el·lipsoides o regions el·lipsoidals i altres tipus de conjunts convexos. En aquest treball s'utilitzaran els el·lipsoides per a les regions d'incertesa, ja que els corresponents mecanismes de fusió i propagació d'informació estan basats en el càlcul matricial i per tant són raonablement eficients. Els el·lipsoides s'han utilitzat per a modelar incerteses, tant en el camp de la robòtica com en el de teoria de sistemes [Del89, FH82, PMS91, RH90, ST91, ST93, WP90].

Les fites de l'error de mesures donades per sensors són, habitualment, fites de cada una de les coordenades de la mesura; defineixen per tant semiespais o franges en l'espai de paràmetres. Les regions d'incertesa són aleshores intersecció d'aquests semiespais i/o franges, i per tant són politops (figura 3.2a). A efectes de reduir l'espai d'emmagatzemament i el cost dels

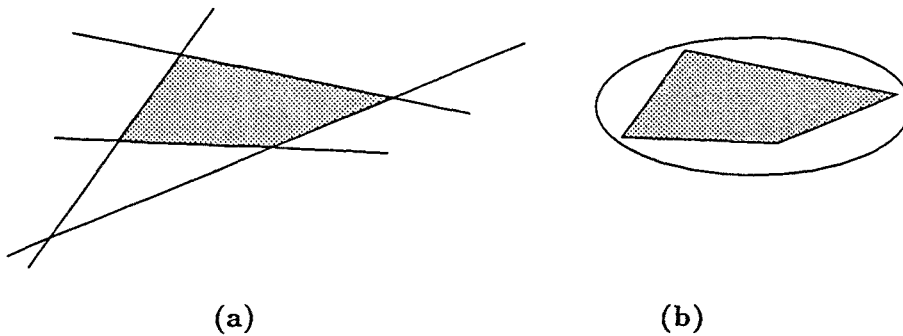


Figura 3.2: (a) Politop i (b) politop aproximat per el·lipse

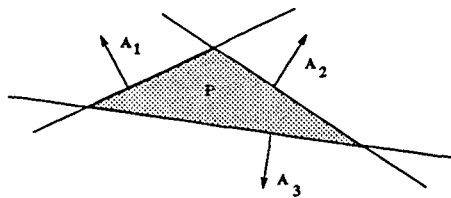


Figura 3.3: Politop com a intersecció de semiespais

càlculs, aquestes regions d'incertesa politòpiques (exactes) s'aproximaran per regions el·lipsoidals (el·lipsoides o cilindres el·lipsoidals) que els continguin de la forma més ajustada possible (figura 3.2b).

A continuació s'introdueix la notació utilitzada per a representar semiespais, franges, politops i regions el·lipsoidals.

- Un semiespai S de \mathbb{R}^n té equació $\mathbf{n}^t \mathbf{x} \leq b$ on \mathbf{n} és un vector normal exterior.
- Un politop \mathcal{P} de \mathbb{R}^n té equació $\mathbf{A}^t \mathbf{x} \leq \mathbf{m}$ on \mathbf{A} és una matriu $m \times n$ i $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^m$. Les files d' \mathbf{A} són els vectors normals exteriors als semiespais que intersecats defineixen el politop (figura 3.3).
- Una regió el·lipsoidal \mathcal{E} de \mathbb{R}^n té equació $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t \mathbf{E} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leq 1$ on $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ és el centre i \mathbf{E} és una matriu simètrica i definida positiva (o semidefinida positiva), que s'anomena *matriu d' \mathcal{E}* , o bé l'equació equivalent $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leq 1$ on $\mathbf{B} = \mathbf{E}^{-1}$ i s'anomena *matriu inversa de l'el·lipse \mathcal{E}* (figura 3.4). Si l'el·lipse és no degenerat (té dimensió n i no és cilindre) \mathbf{E} i \mathbf{B} són matrius ben definides i no singulars i el centre és únic. Si la regió és un cilindre el·lipsoidal no degenerat (dimensió n), \mathbf{E} és singular i \mathbf{B} no està definida i té tota una varietat lineal de centres. I si la regió és degenerada, és a dir està continguda en una varietat lineal, cilindre o no, té una equació com l'anterior, però de dimensió menor, junt amb l'equació de la varietat lineal que la contingui.
- Una franja \mathcal{F} de \mathbb{R}^n té equació $c \leq \mathbf{n}^t \mathbf{x} \leq b$ on \mathbf{n} és un vector normal. Una franja és la intersecció de dos semiespais paral·lels amb vectors normals en sentit contrari ($\mathbf{n}^t \mathbf{x} \leq b$ i

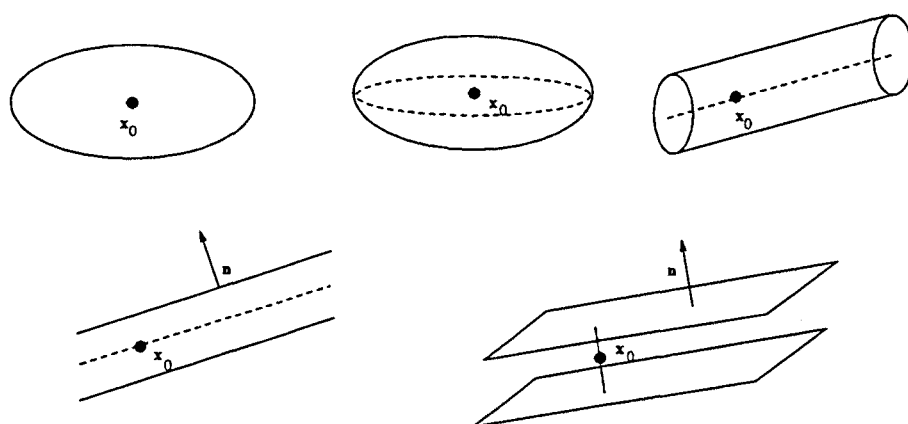


Figura 3.4: Regions el·lipsoidals

$-n^t x \leq -c$). Una franja també és una regió el·lipsoidal cilíndrica en totes les direccions menys una (d'equació $(x - x_0)^t n n^t (x - x_0) \leq 1$) (figura 3.4).

3.3 Informació completa, parcial i semiexacta

Una informació exacta d'un paràmetre $x \in \mathbb{R}^n$ és completa si dóna el valor cada una de les coordenades x_1, \dots, x_n de x . En canvi es diu que la informació és parcial si només dóna algunes de les coordenades de x o certes relacions entre aquestes coordenades que no permeten deduir el valor de totes elles. En el cas d'informacions incertes el valor exacte no es dóna mai, però els conceptes d'informació completa i parcial es defineixen de la següent forma:

Definició 3.2 (Observació completa) Una observació incerta d'un paràmetre $x \in \mathbb{R}^n$ és completa si la regió d'incertesa \mathcal{I}_x de l'observació és una regió fitada de \mathbb{R}^n

En el model el·lipsoidal la regió d'incertesa d'una observació completa és, doncs, un el·lipsoide no cilíndric, que per tant té matriu associada i matriu inversa definides positives no singulars i centre únic (figura 3.5a).

Definició 3.3 (Observació parcial) Una observació incerta d'un paràmetre $x \in \mathbb{R}^n$ és parcial si la regió d'incertesa \mathcal{I}_x de l'observació és una regió no fitada de \mathbb{R}^n

En el model el·lipsoidal la regió d'incertesa d'una observació parcial és, doncs, un cilindre el·lipsoidal, que per tant té matriu semidefinida positiva i singular, no té matriu inversa i el centre no és únic. El cilindre és il·limitat en una o més direccions, que corresponen als valors propis nuls de la matriu. Els centres del cilindre formen una varietat lineal que és il·limitada en les mateixes direccions (figura 3.5b).

En les direccions no fitades d'un cilindre el·lipsoidal d'incertesa tot valor és possible, és a dir, la incertesa és total en aquelles direccions. Per tant una observació parcial no dóna informació en totes direccions, sinó només en algunes. En canvi, una observació completa té regió d'incertesa fitada en totes les direccions i per tant dóna informació en totes les direccions; i com a conseqüència dóna informació de totes les coordenades del paràmetre.

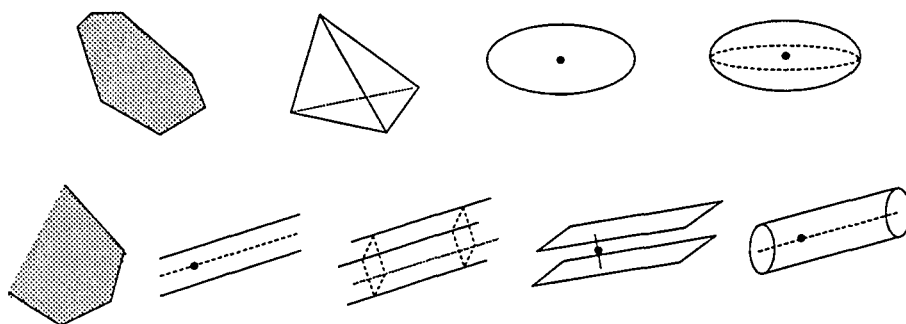


Figura 3.5: Regions el·lipsoidals i politòpiques, (a) fitades, (b) no fitades

En ocasions es coneix el valor exacte d'algunes coordenades del paràmetre o d'algunes relacions entre ells. En aquests casos es parla d'informació semiexacta.

Definició 3.4 (Observació semiexacta) Una observació incerta d'un paràmetre $x \in \mathbb{R}^n$ és semiexacta si la regió d'incertesa \mathcal{I}_x de l'observació és una regió de \mathbb{R}^n de dimensió r menor que n .

La regió d'incertesa d'una observació semiexacta està continguda en una varietat de dimensió r de \mathbb{R}^n , que té equació vectorial $h(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{0}$. Això significa que les coordenades de x satisfan la relació $h(x_1, \dots, x_n) = \mathbf{0}$ de forma exacta (sense incertesa). Una observació semiexacta tant pot ser completa com parcial dependent de si la regió d'incertesa és fitada o no. En aquest treball s'utilitzen varietats d'equacions lineals solament i en el cas que les equacions reals no siguin lineals són aproximades localment per equacions lineals.

En el model el·lipsoidal la regió d'incertesa d'una observació semiexacta és un el·lipsoide (cilíndric o no) inclòs en una varietat lineal de \mathbb{R}^n , que té matriu inversa semidefinida positiva i singular (de rang r) i no té matriu associada definida.

Una observació exacta és un cas particular d'una observació semiexacta on la regió d'incertesa és de dimensió zero, és a dir, es redueix a un sol element (el valor exacte del paràmetre).

3.4 Mesura de la incertesa

La mesura de l'incertesa d'una observació ve donada pel volum de la regió d'incertesa corresponent. Aquí cal destacar que s'està treballant amb parametritzacions no sobredeterminades (apartat 2.1) i per tant la mesura d'una regió o conjunt en l'espai de paràmetres és igual al volum d'aquesta regió.

El volum d'un el·lipsoide \mathcal{E} no cilíndric és:

$$\text{vol}(\mathcal{E}) = k_n \cdot \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{E}}} = k_n \cdot \sqrt{\det \mathbf{B}},$$

on $k_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+\frac{n}{2})}$ és igual al volum de l'esfera de radi unitat en \mathbb{R}^n , essent n la dimensió de l'el·lipsoide.

Per cilindres el·lipsoïdals, el volum és infinit, encara que es pot definir un volum degenerat igual al volum de la secció ortogonal.

Es poden definir altres mesures d'incertesa, com el diàmetre, que és la distància màxima entre elements de la regió, l'estretor, que és la distància mínima entre elements o l'àrea de la superfície [Com93]. En el·lipsoïdes el diàmetre és igual al doble de l'arrel quadrada del valor propi màxim de la seva matriu inversa, l'estretor és igual al doble de l'arrel quadrada del valor propi mínim d'aquesta matriu i l'àrea de la superfície està relacionada en certa forma amb la traça de la matriu.

Per a que els volums de les regions d'incertesa (o les altres mesures d'incertesa) tinguin significat cal que totes les coordenades del vector de paràmetres estiguin mesurades en les mateixes unitats o equivalents. A més, per a poder comparar mesures d'incertesa d'elements en posicions diferents cal que la parametrització usada sigui estable (capítol 2).

3.5 Propietats

El model anterior té tota una sèrie de propietats positives, que es resumeixen a continuació:

Incertesa. El model permet representar mesures amb error, així com la variació d'aquesta incertesa en les diferents direccions de l'espai de paràmetres.

Informacions parcials. Permet representar tant informacions parcials com completes d'un element geomètric.

Emmagatzemament. L'espai necessari per a emmagatzemar la informació d'un element és constant, ja que consisteix en un vector i una matriu.

Distribució d'error. No pressuposa cap distribució de probabilitat de l'error.

Mesura de la incertesa. Es pot mesurar la incertesa de cada observació.

Cal també enumerar les propietats negatives:

Estimació. No dóna una única estimació, sinó tot un conjunt de possibles estimacions, sense distingir quines tenen major o menor probabilitat de ser reals.

Incertesa no exacta. Les regions d'incertesa el·lipsoïdals no són exactes, sinó aproximades. Cada regió el·lipsoïdal conté la corresponent regió exacta donada per la font d'informació, però pot haver introduït incertesa.

Capítol 4

Fusió d'informació competitiva

Cada sensor proporciona normalment observacions parcials i amb un cert error sobre els elements geomètrics de l'entorn, per tant cal la contribució de diversos mecanismes sensorials i cal tenir en compte la incertesa de les dades per a construir un model consistent de l'entorn. Es parla d'informació competitiva quan es disposa de diverses observacions d'un mateix element geomètric provinents de diferents sensors o fonts d'informació, cada una amb una certa incertesa associada. En aquest cas és important poder calcular una sola estimació, la millor estimació possible, i calcular-ne també la incertesa corresponent.

En el model de fitació d'incerteses adoptat una observació del vector de paràmetres d'un element geomètric és una regió d'incertesa que contingui la mesura real del paràmetre. I la millor estimació serà aquella que tingui regió d'incertesa menor. Com que cada observació d'un mateix element geomètric té la seva regió d'incertesa i la mesura real està en cada una d'elles amb tota seguretat, la menor regió on es pot assegurar que hi ha el valor real és la intersecció de les regions de cada observació. Ara bé, si les regions d'incertesa estan limitades a tenir una forma determinada (el·lipsoidal, politòpica o altra), aleshores la millor estimació és la que té associada la regió menor que contingui la intersecció i tingui la forma demanada. Aquesta 'millor estimació' junt amb la seva regió d'incertesa és el que s'anomenarà *fusió*.

En el cas de regions politòpiques, la intersecció és sempre politòpica i per tant la fusió es redueix a la intersecció (figura 4.1 a). En canvi, si les regions són el·liptoidals, la intersecció no és en general el·lipsoidal i per tant la fusió és l'el·lipsoide que conté la intersecció dels el·lipsoïdes donats de la forma més ajustada possible (figura 4.1 b). La següent definició precisa aquest concepte.

Definició 4.1 (Fusió de regions d'incertesa) *Donat un conjunt d'observacions d'un mateix element geomètric amb regions d'incertesa el·liptoidals $(\mathcal{E}_k)_{k \in K}$, la fusió d'aquestes regions és la regió el·lipsoidal $\hat{\mathcal{E}}$ de menor volum que conté $\bigcap_{k \in K} \mathcal{E}_k$. Aquesta regió la notarem $\hat{\mathcal{E}} = \tilde{\bigcap}_{k \in K} \mathcal{E}_k$.*

En altres paraules es pot dir que la fusió d'un conjunt d'el·lipsoïdes és l'*envolupant el·lipsoidal* de la intersecció dels el·lipsoïdes.

Es parla d'informació competitiva quan es disposa de diverses observacions d'un mateix element geomètric que formen un conjunt sobredeterminat d'informació, és a dir, que si fossin observacions exactes i estessin en posició general, serien incompatibles entre sí. Geomètricament

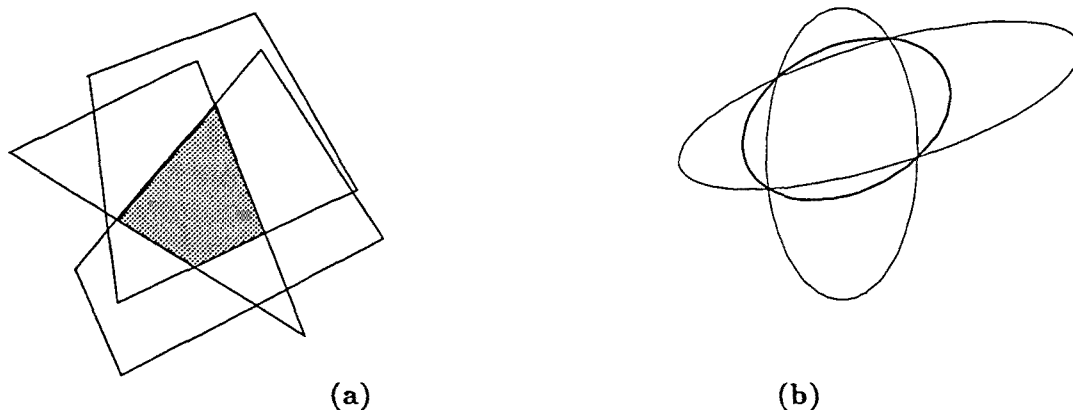


Figura 4.1: (a) Fusió de politops i (b) fusió d'el·lipsoides

dos el·lipsoides d'incertesa, degenerats o no, corresponen a informacions competitives si les respectives varietats de centres no es tallen en posició general. Cal observar que dos el·lipsoides diferents són competitiu encara que els seus centres (estimacions) coincideixin, perquè representen incerteses diferents. Aquest concepte es precisa en la següent definició.

Definició 4.2 (Observacions competitives) *Dues observacions d'un mateix element geomètric amb el·lipsoides d'incertesa respectius \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 són competitives si i només si*

$$\text{rang}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) < \text{rang}(\mathbf{E}_1) + \text{rang}(\mathbf{E}_2),$$

essent \mathbf{E}_1 i \mathbf{E}_2 les respectives matrius associades.

Un conjunt d'observacions d'un mateix element pot ser incompatible degut a errors. En el model de fitació d'incerteses la incompatibilitat significa impossibilitat que la mesura real estigui en totes les regions, és a dir, que la intersecció sigui buida.

Definició 4.3 (Observacions incompatibles) [Com93] *Un conjunt d'observacions d'un mateix element geomètric amb regions d'incertesa el·lipsoidals $(\mathcal{E}_k)_{k \in K}$ és incompatible si*

$$\bigcap_{k \in K} \mathcal{E}_k = \emptyset.$$

Una observació és redundant si no aporta cap informació nova respecte la informació donada per observacions anteriors. És important detectar les observacions redundants, ja que així no cal fusionar-les i s'estalvien càlculs.

Definició 4.4 (Observació redundant) [Com93] *Es defineix la contribució d'un conjunt \mathcal{E}_m al conjunt $(\mathcal{E}_k)_{k \in K}$ com*

$$\text{cont}(\mathcal{E}_m) = \text{vol} \left(\bigcap_{k \in K - \{m\}} \mathcal{E}_k \right) - \text{vol} \left(\bigcap_{k \in K} \mathcal{E}_k \right),$$

que és la mesura de la informació que es perd en treure \mathcal{E}_m . Un conjunt \mathcal{E}_m es diu que és redundant si la seva contribució és nul·la.

El procediment de fusió de regions el·lipsoidals que s'exposa en els apartats següents és iteratiu i per tant cal estudiar la seva convergència.

Definició 4.5 (Observacions convergents) [Com93] *Donat un conjunt numerable de regions d'incertesa $(\mathcal{E}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es defineix com a convergent si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bigcap_{k \leq n} \mathcal{E}_k \text{ és un sol punt.}$$

En els apartats següents s'exposen els procediments per al càlcul de la fusió, la detecció d'incompatibilitats i redundàncies i l'estudi de la convergència amb regions d'incertesa el·lipsoidals [ST91].

4.1 Fusió de regions el·lipsoidals generals

La fusió de dues regions el·lipsoidals és el menor el·lipsoide (degenerat o no), que conté la intersecció de les regions donades. Per a calcular aquesta fusió es parteix dels el·lipsoides que contenen ajustadament la intersecció dels dos el·lipsoides donats, ja que la fusió serà un d'ells.

Definició 4.6 *Donat un conjunt A de \mathbb{R}^n es diu que l'el·lipsoide \mathcal{E} conté A de forma ajustada si el conté i no hi ha cap altre el·lipsoide entre \mathcal{E} i A , és a dir, si*

$$A \subset \mathcal{E} \text{ i } \nexists \mathcal{E}' \text{ el·lipsoide } \mathcal{E}' \neq \mathcal{E} : A \subset \mathcal{E}' \subset \mathcal{E}.$$

En [Kah68] es demostra, pel cas d'el·lipsoides amb el mateix centre, que és equivalent contenir ajustadament la intersecció de dos el·lipsoides a tenir per equació una combinació lineal de les equacions dels dos donats. Per altra banda, tal com s'enuncia en la proposició següent, tenir aquest tipus d'equació amb factors positius, és equivalent a tenir la frontera passant per la intersecció de les fronteres dels el·lipsoides donats.

Proposició 4.1 [SK63] *Donats dos el·lipsoides \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 en posició general, de matrius associades \mathbf{E}_1 i \mathbf{E}_2 i centres \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 , respectivament, els el·lipsoides \mathcal{E} d'equacions*

$$\sum_{i=1}^2 \lambda_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^t \mathbf{E}_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \leq 1 \text{ on } \lambda_i \geq 0 \text{ i } \sum_{i=1}^2 \lambda_i = 1. \quad (4.1)$$

són els el·lipsoides la varietat frontera dels quals conté la intersecció de fronteres de \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 .

L'el·lipsoide fusió de dos el·lipsoides introdueix zones d'incertesa sobreres (que no estan en la intersecció), però convé observar que mai no s'introdueix incertesa que no estés prèviament en algun del el·lipsoides donats. Això és degut al següent corollari.

Corollari 4.1 *En les hipòtesis de la proposició 4.1, els el·lipsoides \mathcal{E} estan continguts en $\mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2$.*

La demostració del corollari és immediata.

En la següent proposició s'expressen les equacions 4.1 de forma simplificada.

Proposició 4.2 *En les hipòtesis de la proposició 4.1 les equacions dels el·lipsoide \mathcal{E} es poden expressar de la forma*

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t \mathbf{E} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leq 1 \text{ on } \begin{cases} \mathbf{E} = \frac{1}{k} (\sum \lambda_i \mathbf{E}_i) \\ \mathbf{x}_0 = (\sum \lambda_i \mathbf{E}_i)^{-1} (\sum \lambda_i \mathbf{E}_i \mathbf{x}_i) \\ k = 1 - \sum \lambda_i \mathbf{x}_i^t \mathbf{E}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_0^t (\sum \lambda_i \mathbf{E}_i) \mathbf{x}_0 \\ \lambda_i \geq 0 \quad i = 1, 2 \end{cases} \quad (4.2)$$

Demostració:

Desenvolupant cada terme de l'equació (4.1) i agrupant els termes quadràtics, lineals i de grau zero, s'obté

$$\mathbf{x}^t \left(\sum \lambda_i \mathbf{E}_i \right) \mathbf{x} - 2\mathbf{x}^t \left(\sum \lambda_i \mathbf{E}_i \mathbf{x}_i \right) \leq 1 - \sum \lambda_i \mathbf{x}_i^t \mathbf{E}_i \mathbf{x}_i.$$

Aquesta és l'equació d'una quàdrica, el centre \mathbf{x}_0 de la qual és la solució del sistema:

$$\left(\sum \lambda_i \mathbf{E}_i \right) \mathbf{x} = \sum \lambda_i \mathbf{E}_i \mathbf{x}_i \quad \text{és a dir,} \quad \mathbf{x}_0 = \left(\sum \lambda_i \mathbf{E}_i \right)^{-1} \left(\sum \lambda_i \mathbf{E}_i \mathbf{x}_i \right).$$

I la quàdrica té, doncs, equació

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t \left(\sum \lambda_i \mathbf{E}_i \right) (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leq \sum \lambda_i - \sum \lambda_i \mathbf{x}_i^t \mathbf{E}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_0^t \left(\sum \lambda_i \mathbf{E}_i \right) \mathbf{x}_0.$$

I dividint pel membre dret de l'equació s'obté l'expressió buscada. ■

Cal destacar que el centre \mathbf{x}_0 és el punt \mathbf{x} que minimitza la suma ponderada de distàncies als centres dels el·lipsoides donats, perquè $\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^t \mathbf{E}_i (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \right) = \mathbf{0}$ per $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$.

En el corollari següent es dona una altra expressió pels el·lipsoides de la proposició anterior.

Corollari 4.2 *En les hipòtesis de la proposició 4.1 les equacions dels el·lipsoides \mathcal{E} es poden expressar de la forma*

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t \mathbf{E} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \leq 1 \quad \text{on} \quad \begin{cases} \mathbf{E} = \frac{1}{k} (\mathbf{E}_1 + \lambda \mathbf{E}_2) \\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_1 + \lambda (\mathbf{E}_1 + \lambda \mathbf{E}_2)^{-1} \mathbf{E}_2 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \\ k = 1 + \lambda - \lambda (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^t \mathbf{E}_2 (\mathbf{E}_1 + \lambda \mathbf{E}_2)^{-1} \mathbf{E}_1 (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \\ \lambda \geq 0 \end{cases} \quad (4.3)$$

Demostració:

Les expressions de \mathbf{x}_0 i k del corollari es dedueixen de les expressions en la proposició 4.2 utilitzant operacions matricials i fent $\lambda_1 = \frac{1}{1+\lambda}$ i $\lambda_2 = \frac{\lambda}{1+\lambda}$. ■

De tots els el·lipsoides d'equació (4.3), per a obtenir l'el·lipsoide fusió cal calcular el paràmetre λ corresponent a aquell el·lipsoide de volum mínim. Utilitzant les tècniques clàssiques de càlcul diferencial per a la minimització i les propietats de les operacions matricials s'obté la proposició:

Teorema 4.1 *En les hipòtesis del corollari 4.2, essent \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 dos el·lipsoides no degenerats, l'el·lipsoide $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_1 \tilde{\cap} \mathcal{E}_2$ fusió de \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 té equació (4.3) on λ és arrel de*

$$\begin{aligned} & n \left(\det(\mathbf{E}_1 + \lambda \mathbf{E}_2)^2 - \mathbf{c}^t \mathbf{E}_1 [\mathbf{E}_1 + \lambda \mathbf{E}_2] \mathbf{E}_2 [\mathbf{E}_1 + \lambda \mathbf{E}_2] \mathbf{E}_1 \mathbf{c} \right) - \\ & - \text{tr} \left([\mathbf{E}_1 + \lambda \mathbf{E}_2] \mathbf{E}_2 \right) \left((1 + \lambda) \det(\mathbf{E}_1 + \lambda \mathbf{E}_2) - \lambda \mathbf{c}^t \mathbf{E}_2 [\mathbf{E}_1 + \lambda \mathbf{E}_2] \mathbf{E}_1 \mathbf{c} \right) = 0 \end{aligned} \quad (4.4)$$

i $\mathbf{c} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, on $[\mathbf{A}]$ denota la matriu de cofactors de \mathbf{A} .

Demostració:

En primer lloc expressem l'equació anterior a partir de les matrius inverses dels el·lipsoides, en lloc de les matrius associades \mathbf{E} . Si $\hat{\mathbf{B}}$, \mathbf{B}_1 i \mathbf{B}_2 són respectivament les matrius inverses de $\hat{\mathcal{E}}$, \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{B}} = k \mathbf{B}_2 (\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1)^{-1} \mathbf{B}_1 \\ \hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{B}_1 (\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1)^{-1} (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \\ k = 1 + \lambda - \lambda (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)^t (\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1)^{-1} (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \end{cases},$$

ja que $(\mathbf{E}_1 + \lambda \mathbf{E}_2)^{-1} = (\mathbf{B}_1^{-1} + \lambda \mathbf{B}_2^{-1})^{-1} = \mathbf{B}_2(\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1)^{-1} \mathbf{B}_1$.

Minimitzar el volum d'un el·lipsoide és equivalent a minimitzar el determinant de la seva matriu inversa \mathbf{B} , ja que $\text{vol}(\mathcal{E}) = k_n \cdot \sqrt{\det \mathbf{B}}$. Cal, doncs, calcular λ tal que $\frac{d}{d\lambda}(\det \mathbf{B}) = 0$. Com que

$$\det(\mathbf{B}) = \det(k\mathbf{B}_2(\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1)^{-1} \mathbf{B}_1) = (\det \mathbf{B}_1)(\det \mathbf{B}_2)k^n \frac{1}{\det(\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1)},$$

només cal calcular λ tal que $f'(\lambda) = 0$, essent $f(\lambda) = \frac{k^n}{D}$ i $D = \det(\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1)$. Operant matriuicament s'obté:

$$\begin{aligned} k' &= 1 - \mathbf{c}^t(\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1)^{-1} \mathbf{c} + \lambda \mathbf{c}^t(\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1)^{-1} \mathbf{B}_1(\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1)^{-1} \mathbf{c} = \\ &= 1 - \mathbf{c}^t(\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1)^{-1} \mathbf{B}_2(\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1)^{-1} \mathbf{c}, \quad \text{essent } \mathbf{c} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 \end{aligned}$$

i també s'obté:

$$D' = \text{traça}([\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1] \mathbf{B}_1).$$

$$\text{Per tant } f'(\lambda) = 0 \iff \frac{k^{n-1}}{D^2}(nk'D - kD') = 0 \iff nk'D - kD' = 0 \iff$$

$$\begin{aligned} nD \left(1 - \mathbf{c}^t(\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1)^{-1} \mathbf{B}_2(\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1)^{-1} \mathbf{c} \right) - \\ - \text{traça}([\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1] \mathbf{B}_1) \left(1 + \lambda - \lambda \mathbf{c}^t(\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1)^{-1} \mathbf{c} \right) = 0, \end{aligned}$$

que, multiplicant per D , dóna

$$\begin{aligned} n \left(\det(\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1)^2 - \mathbf{c}^t[\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1] \mathbf{B}_2 [\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1] \mathbf{c} \right) - \\ - \text{traça}([\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1] \mathbf{B}_1) \left((1 + \lambda) \det(\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1) - \lambda \mathbf{c}^t[\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1] \mathbf{c} \right) = 0, \end{aligned}$$

equació que es converteix en l'equació de l'enunciat.

Aquesta és una equació de grau $2n - 1$ en λ , perquè els termes de grau $2n$ s'anul·len entre sí. En efecte, el coeficient de grau $2n$ en $n \det(\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1)^2$ és $n(\det \mathbf{B}_1)^2$, el coeficient de grau n en $\det(\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1)$ és $\det \mathbf{B}_1$, el coeficient de grau $n - 1$ en $\text{traça}([\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1] \mathbf{B}_1)$ és $n \det \mathbf{B}_1$ i llavors el coeficient de grau $2n$ en $\text{traça}([\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1] \mathbf{B}_1)(1 + \lambda) \det(\mathbf{B}_2 + \lambda \mathbf{B}_1)$ és $n(\det \mathbf{B}_1)^2$. A més, el grau no és menor que $2n - 1$ perquè inclús en el cas que $\mathbf{B}_1 = a\mathbf{I}$, $\mathbf{B}_2 = \mathbf{I}$ i $\mathbf{c} = (c, \dots, c)^t$ l'equació queda

$$(1 + \lambda a)^{2(n-1)} n \left((1 - a - nc^2) + \lambda a(1 - a + nc^2) \right) = 0,$$

que és de grau $2n - 1$. ■

El teorema anterior dóna una fórmula tancada per a la fusió el·lipsoide-el·lipsoide. Ara bé, el càlcul del paràmtre λ en el cas general no és gaire eficient, ja que l'equació (4.4) és una equació polinòmica de grau $2n - 1$. En general, per $n > 2$, per a resoldre l'equació calen tècniques numèriques. En el cas $n = 2$, és a dir, quan l'element geomètric observat té 2 graus de llibertat i per tant les regions d'incertesa són el·lipses, l'equació es pot resoldre de forma exacta.

En el cas on els dos el·lipsoïdes inicials \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 tenen el mateix centre el càlcul del paràmtre λ és molt més eficient, perquè aleshores $\mathbf{c} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ i per tant l'equació 4.4 es redueix a

$$n \det(\mathbf{E}_1 + \lambda \mathbf{E}_2) - (1 + \lambda) \text{traça}([\mathbf{E}_1 + \lambda \mathbf{E}_2] \mathbf{E}_2) = 0,$$

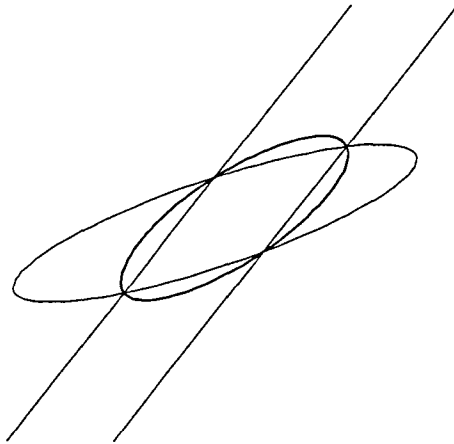


Figura 4.2: Fusió el·lipsoide – franja

que té grau $n - 1$.

4.2 Fusió de regions el·lipsoïdals via franges

Tal com s'ha vist en l'apartat anterior el càlcul de l'el·lipsoide fusió de dos el·lipsoïdes en el cas general porta a la resolució numèrica d'una equació polinòmica. En aquest apartat es presenta una alternativa a aquest càlcul utilitzant la fusió en un cas particular, la fusió d'un el·lipsoide i una franja.

Com es veurà tot seguit l'el·lipsoide fusió d'un el·lipsoide no degenerat i una franja es pot calcular a través d'una fórmula matricial. I per calcular la fusió de dos el·lipsoïdes és possible donar un procediment aproximat, descomposant un dels el·lipsoïdes en diverses franges, les quals es fusionaran successivament amb l'altre el·lipsoide o el resultat de la fusió anterior. L'el·lipsoide resultant amb aquest procés no és el menor el·lipsoide contenint la intersecció dels donats (fusió exacta), però sí que n'és una bona aproximació, ja que conté aquesta intersecció i és menor que els dos el·lipsoïdes inicials. Per tant l'estimació obtinguda redueix la incertesa de les observacions inicials.

Els dos apartats següents exposen amb detall el procés descrit.

4.2.1 Fusió el·lipsoide – franja

L'el·lipsoide fusió d'un el·lipsoide i una franja donats és l'el·lipsoide de menor volum contenint la seva intersecció (figura 4.2). L'expressió de la matriu i el centre d'aquesta fusió venen donades pel següent teorema. Cal destacar, que aquest càlcul és exactament el mateix que es realitza en cada pas del mètode de l'el·lipsoide de programació lineal.

Teorema 4.2 (Fusió el·lipsoide – franja) Donat un el·lipsoide \mathcal{E} de \mathbb{R}^n de matriu inversa \mathbf{B} i centre \mathbf{x}_0 i donada una franja \mathcal{F} d'equació $\beta' \leq \mathbf{n}^t \mathbf{x} \leq \beta$ on $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$ és el seu vector normal i $\beta, \beta' \in \mathbb{R}$, situats en posició general, l'el·lipsoide fusió $\hat{\mathcal{E}} = \mathcal{E} \tilde{\cap} \mathcal{F}$ té matriu inversa $\hat{\mathbf{B}}$ i centre $\hat{\mathbf{x}}$ donats per

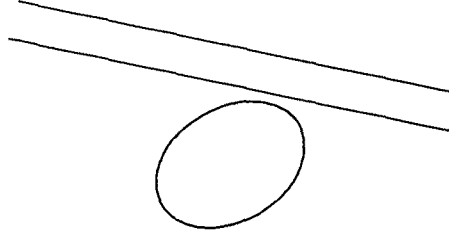


Figura 4.3: El·lipsoïde i franja incompatibles

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{B}} &= k \left(\mathbf{B} - \frac{\sigma}{G} \mathbf{B} \mathbf{n} \mathbf{n}^t \mathbf{B} \right), \\ k &= \frac{n}{2(n^2 - 1)} \left(n(2 - \alpha^2 - \alpha'^2) + \rho \right), \\ \hat{\mathbf{x}} &= \mathbf{x}_0 - \frac{\alpha - \alpha'}{2\sqrt{G}} \sigma \mathbf{B} \mathbf{n}, \\ \sigma &= \frac{n(\alpha - \alpha')^2 + 2(1 - \alpha\alpha') - \rho}{(n+1)(\alpha - \alpha')^2} \quad \text{si } \alpha \neq \alpha' \quad \text{i} \quad \sigma = \frac{1 - n\alpha^2}{1 - \alpha^2} \quad \text{si } \alpha = \alpha', \\ \rho &= \sqrt{4(1 - \alpha^2)(1 - \alpha'^2) + n^2(\alpha^2 - \alpha'^2)^2}, \\ G &= \mathbf{n}^t \mathbf{B} \mathbf{n}, \\ \alpha &= \frac{\mathbf{n}^t \mathbf{x}_0 - \beta}{\sqrt{G}} \quad \text{i} \quad \alpha' = \frac{\beta' - \mathbf{n}^t \mathbf{x}_0}{\sqrt{G}} \\ &\text{si } -1 \leq \alpha, \alpha' \leq 1, \alpha\alpha' < \frac{1}{n} \text{ i } n > 1.\end{aligned}$$

La demostració d'aquest teorema, així com les de les proposicions 4.3, 4.5 i 4.6 es poden trobar en [BGT81].

Cal fer notar que α i α' són les distàncies amb signe en la mètrica de la matriu \mathbf{B} de \mathbf{x}_0 als hiperplans de la franja $\mathbf{n}^t \mathbf{x} \leq \beta$ i $\beta' \leq \mathbf{n}^t \mathbf{x}$, respectivament.

La fórmula del teorema 4.2 facilita la detecció a priori d'incompatibilitats i de redundàncies de forma eficient, tal com es veurà en les proposicions següents. D'aquesta manera s'evitarà l'esforç computacional del càlcul de la fusió en aquests casos. A més, s'obté un segon criteri d'incompatibilitat que serà d'utilitat teòrica més endavant.

Proposició 4.3 (Criteri d'incompatibilitat 1) *Amb les hipòtesis i la notació del teorema 4.2, l'el·lipsoïde \mathcal{E} i la franja \mathcal{F} són incompatibles si, i només si, $\alpha \geq 1$ o $\alpha' \geq 1$ (figura 4.3).*

Proposició 4.4 (Criteri d'incompatibilitat 2) *Amb les hipòtesis i la notació del teorema 4.2, l'el·lipsoïde \mathcal{E} i la franja \mathcal{F} són incompatibles si, i només si, $k \leq 0$.*

Demostració:

$$\begin{aligned}k \leq 0 &\iff n(2 - \alpha^2 - \alpha'^2) + \rho \leq 0 \iff \\ &\iff \sqrt{4(1 - \alpha^2)(1 - \alpha'^2) + n^2(\alpha^2 - \alpha'^2)^2} \leq n(\alpha^2 + \alpha'^2 - 2)\end{aligned}$$

Definint $a = 1 - \alpha^2$ i $a' = 1 - \alpha'^2$, $k \leq 0$ és equivalent a

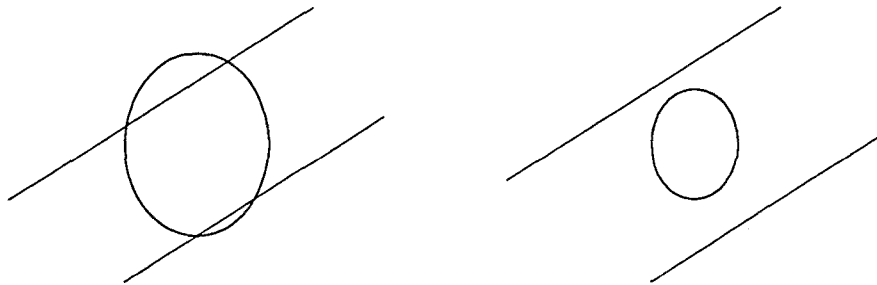


Figura 4.4: Franges redundants respecte els el·lipsoïdes

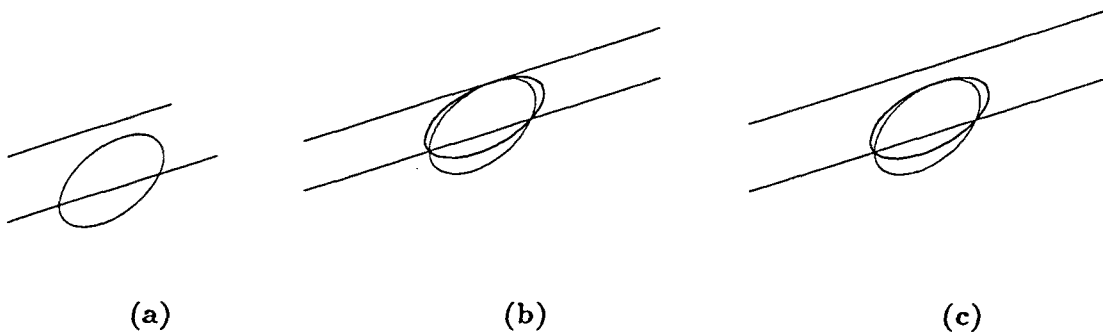


Figura 4.5: (a) Franja que no talla l'el·lipsoïde pels dos costats, (b) estrenyiment de la franja i (c) fusió resultant

$$4aa' + n^2(a - a')^2 \leq n^2(a + a')^2 \iff 4aa'(n^2 - 1) \geq 0 \iff a \geq 0 \text{ o } a' \geq 0 \iff \\ \iff |\alpha| \leq 1 \text{ o } |\alpha'| \leq 1$$

i com que $\beta' \leq \beta \implies \alpha' \leq -\alpha$, és equivalent a:

$$\alpha \geq 1 \text{ (i aleshores } \alpha' \leq -1) \text{ o } \alpha' \geq 1 \text{ (i aleshores } \alpha \leq -1) \blacksquare$$

Proposició 4.5 (Criteri de redundància) *Amb les hipòtesis i la notació del teorema 4.2, una franja \mathcal{F} és redundant respecte l'el·lipsoïde \mathcal{E} si, i només si, $\alpha\alpha' \geq 1/n$ (figura 4.4).*

Un cas particular de redundància es dona quan la franja conté l'el·lipsoïde, és a dir, quan $\alpha \leq -1$ i $\alpha' \leq -1$.

En els casos que un hiperplà de la franja no talla l'el·lipsoïde les fórmules del teorema 4.2 no donen la fusió, perquè aquesta no és un el·lipsoïde de la família lineal definida per l'el·lipsoïde i la franja (figura 4.5 a). Per a calcular la fusió s'ha de calcular una franja auxiliar paral·lela a l'anterior i tangent a l'el·lipsoïde (figura 4.5 b) i calcular la fusió amb la franja auxiliar (figura 4.5 c), tal com especifica la proposició següent.

Proposició 4.6 (Estrenyiment de franja) *Amb les hipòtesis i la notació del teorema 4.2, si $\alpha < -1$ i $-1 \leq \alpha' \leq 1$ la fusió s'obté fent $\alpha = -1$. Anàlogament, si $\alpha' < -1$ i $-1 \leq \alpha \leq 1$ la fusió s'obté fent $\alpha' = -1$.*

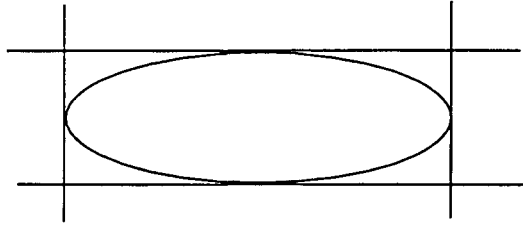


Figura 4.6: Caixes envelopants d'el·lipsoides

En la proposició següent es demostra que la fusió el·lipsoide – franja sempre redueix el volum d'incertesa.

Proposició 4.7 (Reducció de la incertesa) *Amb les hipòtesis i la notació del teorema 4.2,*

$$\frac{\text{vol}(\mathcal{E} \tilde{\cap} \mathcal{F})}{\text{vol}(\mathcal{E})} = \left(\frac{n}{2(n^2-1)} (\rho + n(2 - \alpha^2 - \alpha'^2)) \right)^{\frac{n}{2}} \left(\frac{n-1}{2 - \alpha^2 - \alpha'^2 + \rho} \right)^{\frac{1}{2}} |\alpha + \alpha'| \leq 1$$

si $\alpha\alpha' < \frac{1}{n}$.

Demostració:

$$\frac{\text{vol}(\mathcal{E} \tilde{\cap} \mathcal{F})}{\text{vol}(\mathcal{E})} = \sqrt{\frac{\det \tilde{\mathbf{B}}}{\det \mathbf{B}}} = \left(\frac{k^n}{1+\lambda H} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{i}$$

$$1 + \lambda H = 1 + \frac{1}{4(n-1)} (-n(\alpha + \alpha')^2 + 2(\alpha\alpha' + 1) + \rho) \frac{4}{(\alpha + \alpha')^2} = \frac{1}{(\alpha + \alpha')^2 (n-1)} (2 - \alpha^2 - \alpha'^2 + \rho)$$

$$k = \frac{n}{2(n^2-1)} (\rho + n(2 - \alpha^2 - \alpha'^2)) \quad \blacksquare$$

Les fórmules de fusió el·lipsoide–franja exposades tenen una altra formulació equivalent [PWPL89]. Aquestes fórmules, en una o altra versió, s'apliquen en altres camps, a part del ja citat de programació lineal, com poden ser el processat de senyals [Del89] i l'estimació de paràmetres en teoria de sistemes [FH82, WP90]. En altres casos s'adopta com a el·lipsoide fusió aquell que minimitza mesures d'incertesa diferents del volum, com la traça [FH82] o el terme de grau zero k [RH90].

4.2.2 Descomposició d'un el·lipsoide en franges

Per a fusionar dos el·lipsoides via franges cal descomposar un dels el·lipsoides en franges. Aquesta descomposició es fa a través de la caixa envelopant de l'el·lipsoide, que és l'ortotop circumscrit paral·lel a les direccions principals de l'el·lipsoide. Aquesta caixa es pot expressar com a intersecció d'un número finit de franges, menor o igual que la dimensió de l'el·lipsoide. Si l'el·lipsoide té matriu \mathbf{E} i centre \mathbf{x}_0 , les equacions de les franges són

$$\left| \frac{\mathbf{n}_i^t}{a_i} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \right| \leq 1 \quad i = 1, \dots, n$$

on $\mathbf{n}_1, \dots, \mathbf{n}_n$ són els vectors propis de la matriu \mathbf{E} i $\frac{1}{a_1}, \dots, \frac{1}{a_n}$ són els valors propis de \mathbf{E} , essent $0 < a_i \leq +\infty$ (figura 4.6).

Si en alguna direcció $a_i = +\infty$, això significa que en aquella direcció E té valor propi 0 i per tant que l'el·lipsoide és degenerat. És a dir, és un cilindre i llavors en aquella direcció no hi ha franja.

L'error que es comet al aproximar un el·lipsoide per la seva caixa envoltant és proporcional al volum de l'el·lipsoide. Concretament

$$\begin{aligned} \text{error} &= \text{Volum}(\text{caixa}) - \text{Volum}(\text{el·lipsoide}) = (2a_1) \cdots (2a_n) - k_n \sqrt{\det B} = \\ &= 2^n a_1 \cdots a_n - k_n a_1 \cdots a_n = K \cdot a_1 \cdots a_n = K \cdot \text{Volum}(\text{el·lipsoide}) \end{aligned}$$

essent k_n i K constants.

Normalment, es descomposa en franges l'el·lipsoide de volum més gran, perquè la fusió el·lipsoide-franja redueix incertesa respecte l'el·lipsoide no descomposat, però no està garantida respecte el descomposat; i així s'aconsegueix reduir la incertesa.

Es poden considerar altres caixes envoltants d'un el·lipsoide. Per exemple es poden afegir altres franges a les franges de direccions principals que escapin les parts sobreres de la caixa, especialment quan el volum de l'ortotop és molt més gran que el de l'el·lipsoide. O bé es poden considerar les franges no en les seves direccions principals, sinó en altres direccions, per exemple les direccions principals de l'el·lipsoide amb el qual s'han de fusionar.

4.2.3 Fusió iterativa d'el·lipsoide i franges

Amb el procés descrit en els apartats anteriors la fusió el·lipsoide – el·lipsoide via franges es converteix de fet en una fusió iterativa (amb un número finit de passos) el·lipsoide – franges. En aquest apartat s'estudia la fusió iterativa el·lipsoide – diverses franges en general. Aquest procés consisteix en fusionar cada franja amb l'últim el·lipsoide calculat, partint d'un el·lipsoide inicial i fins esgotar les franges.

Cal destacar que aquesta fusió iterativa dona la millor estimació el·lipsoidal en cada pas, però no globalment. Per això, l'ordre amb el qual es fusionen les diferents franges amb un el·lipsoide no és irrellevant, perquè els resultats són diferents. Concretament

$$(\mathcal{E} \tilde{\cap} \mathcal{F}_1) \tilde{\cap} \mathcal{F}_2 \neq (\mathcal{E} \tilde{\cap} \mathcal{F}_2) \tilde{\cap} \mathcal{F}_1,$$

on \mathcal{E} és un el·lipsoide i \mathcal{F}_1 i \mathcal{F}_2 són franges. L'ordre recomanat és fusionar primer aquelles franges que redueixen més el volum de l'el·lipsoide resultant, que són les franges amb $|\alpha + \alpha'|$ més petita. Això es deu al fet que $|\alpha + \alpha'|$ és igual a l'amplada de la franja segons la distància definida per la matriu inversa de l'el·lipsoide i la reducció de volum és quasi proporcional a aquesta amplada. Concretament, amb les notacions del teorema 4.2,

$$\frac{\text{vol}(\mathcal{E} \tilde{\cap} \mathcal{F})}{\text{vol}(\mathcal{E})} = k \sqrt{\frac{(\rho + nu)^n}{\rho + u}} |\alpha + \alpha'| \quad \text{on} \quad \begin{cases} k & \text{no depèn de } \alpha \text{ i } \alpha' \\ a & = 1 - \alpha^2 \\ a' & = 1 - \alpha'^2 \\ u & = a + a' \\ \rho & = \sqrt{4aa' + n^2(a - a')^2} \\ 0 & \leq a, a' \leq 1 \end{cases}.$$

Entre aquelles franges de mateixa amplada, reduiran més el volum aquelles amb $\alpha^2 + \alpha'^2$ més gran, perquè $\alpha^2 + \alpha'^2$ mesura la distància (definida per la matriu inversa de l'el·lipsoide) de la franja al centre de l'el·lipsoide.

Definició 4.7 (Fusió d'el·lipsoides via franges) Donades dues observacions d'un mateix element geomètric amb regions d'incertesa el·lipsoidals \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 , on se suposa que $\text{vol}(\mathcal{E}_1) < \text{vol}(\mathcal{E}_2)$, la fusió d'aquestes regions via franges és la regió el·lipsoidal

$$\mathcal{E}_1 \tilde{\cap}_f \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_1 \tilde{\cap} (\mathcal{F}_{2,1} \tilde{\cap} (\mathcal{F}_{2,2} \tilde{\cap} (\dots \tilde{\cap} \mathcal{F}_{2,k} \dots))),$$

on $\mathcal{F}_{2,1}, \dots, \mathcal{F}_{2,k}$ són les franges en què descomposa \mathcal{E}_2 en ordre lexicogràfic respecte $|\alpha_i + \alpha'_i|$ creixent i $\alpha_i^2 + \alpha'_i{}^2$ decreixent, essent $\alpha_i = \alpha_i(\mathcal{E}_i, \mathcal{F}_i)$ i anàlogament per α'_i .

El procés de fusió iterativa de franges i el·lipsoide necessita un el·lipsoide inicial no degenerat. En el cas que tots els sensors del sistema donin incertesa politòpica, aquest el·lipsoide inicial es calcula amb els procediments de fusió d'informació complementària descrit en el proper apartat. En efecte, n franges de \mathbb{R}^n amb vectors normals linealment independents formen regions complementàries i per tant aquests procediments permeten calcular el seu el·lipsoide fusió, que serà no degenerat i es podrà utilitzar com a el·lipsoide inicial de la iteració.

En la fusió iterativa es poden introduir una sèrie de millores per a augmentar l'eficiència. Una possible millora s'obté fusionant l'el·lipsoide amb una franja combinació lineal de les franges donades, abans de fusionar amb elles mateixes. Algunes combinacions lineals de franges redueixen molt ràpidament el volum d'incertesa [BGT81]. Una altra possible millora s'obté amb la refusió amb les mateixes franges. Com que la fusió iterativa dona la millor estimació el·lipsoidal en cada pas, però no globalment; un cop fusionades totes les franges es pot tornar a fusionar el resultat amb les mateixes franges fins que el volum no es redueixi o es redueixi molt poc.

La següent proposició estableix la convergència de la fusió iterativa el·lipsoide – franges. La proposició diu que els el·lipsoides fusió convergeixen a un punt si, i només si, les corresponents franges hi convergeixen. Així, doncs, es pot dir que, asimptòticament, els el·lipsoides fusió no tenen més incertesa (ni menys) que les corresponents franges, tal com és de desitjar.

Proposició 4.8 [FH82] Donada una successió de franges $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k, \dots$ que fusionades iterativament donen els el·lipsoides $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k, \dots$,

$$\text{vol}(\mathcal{E}_k) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0 \iff \exists \text{ subsuccessió } \mathcal{F}_{i_1}, \dots, \mathcal{F}_{i_k}, \dots \text{ tal que } \text{vol} \left(\bigcap_{j=1}^k \mathcal{F}_{i_j} \right) \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Demostració:

\implies) Aquelles franges que no estan en la subsuccessió són les que s'eliminen en algun moment per no reduir el volum de l'últim el·lipsoide obtingut. Si les restants franges donen el·lipsoides amb volum tendint a zero, com que els el·lipsoides contenen els politops intersecció de les franges, aleshores el volum dels politops tendeix a zero.

$$\iff \text{Sigui } \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_k, \dots \text{ la subsuccessió de franges on } \text{vol} \left(\bigcap_{j=1}^k \mathcal{F}_j \right) \longrightarrow 0 \implies$$

$$\implies \bigcap_{j=1}^k \mathcal{F}_j \longrightarrow \{\hat{\mathbf{x}}\} \text{ un punt } \implies \forall \mathbf{x} \neq \hat{\mathbf{x}} \exists \text{ infinites franges } \mathcal{F}_j \text{ tals que } \mathbf{x} \notin \mathcal{F}_j$$

$$\text{Si } \mathbf{x}_{j-1} \notin \mathcal{F}_j \implies \frac{\text{vol } \mathcal{E}_j}{\text{vol } \mathcal{E}_{j-1}} \leq \left(\frac{n^2}{n^2-1} \right)^{n-1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^2 = k < 1$$

$$\text{Si } \mathbf{x}_i = \hat{\mathbf{x}} \implies \exists j \text{ on } \mathbf{x}_i \text{ arbitràriament a prop de la vora de } \mathcal{F}_j.$$

$$\text{Escollim, doncs, l'ordre de les franges: } \forall j \quad \mathbf{x}_{j-1} \notin \mathcal{F}_j \text{ o } \mathbf{x}_{j-1} = \hat{\mathbf{x}} \implies$$

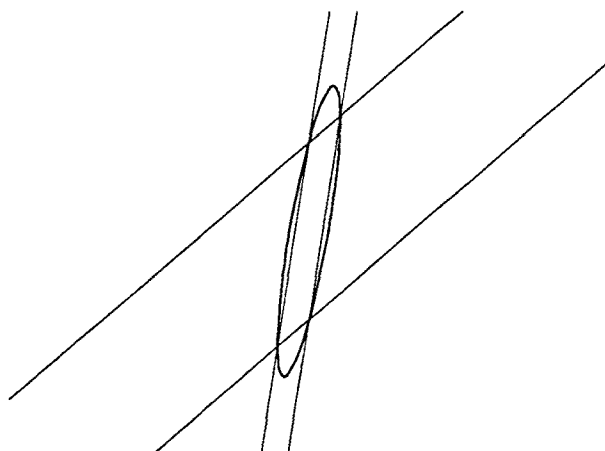


Figura 4.7: Fusió de cilindres complementaris

$$\Rightarrow \forall j \quad \text{vol } \mathcal{E}_j < k \cdot \text{vol } \mathcal{E}_{j-1} < \dots < k^j \cdot \text{vol } \mathcal{E}_0 \rightarrow 0.$$

Per tant $\text{vol } \mathcal{E}_j \rightarrow 0$. ■

4.3 Fusió de regions el·lipsoidals complementàries

Els procediments descrits fins ara en aquest capítol pressuposen que almenys un dels dos el·lipsoides que s'estan fusionant no és cilíndric. Ara bé, en alguns casos caldrà fusionar dos cilindres el·lipsoidals, com és el cas, per exemple, de sistemes amb sensors que només donen informacions parcials. En aquest apartat es tracta la fusió d'informacions parcials complementàries, és a dir, aquelles que permeten deduir de forma determinada una informació completa (figura 4.7). Contràriament al cas general, per a informacions complementàries la fusió es pot calcular de forma exacta i simple.

En el sistema que es descriu en aquest treball la fusió d'informacions complementàries apareix en dues situacions molt importants. La primera es refereix a les primeres fases d'observació d'un element (apartat 4.2.3), on és possible que només es disposi d'informacions parcials i per tant no es pot utilitzar la fusió general d'el·lipsoides, que necessita almenys una informació completa. En aquest cas s'utilitza la fusió de cilindres complementaris per obtenir un el·lipsoide no degenerat, a partir del qual ja es pot utilitzar el procés de fusió general. La segona situació es produeix quan cal propagar les regions d'incertesa de dues variables o més per obtenir la regió imatge d'una tercera o nova variable, com per exemple per la comprovació de la satisfacció d'una determinada relació (apartat 5.3). Per això cal en primer lloc calcular la regió d'incertesa d'un parell ordenat de variables, el qual es calcula com un cas particular de fusió de regions complementàries.

Definició 4.8 (Observacions complementàries) *Dues observacions parcials d'un mateix element geomètric de dimensió n amb cilindres d'incertesa respectius \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 són*

complementàries si

$$n = \text{rang}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) = \text{rang}(\mathbf{E}_1) + \text{rang}(\mathbf{E}_2),$$

essent \mathbf{E}_1 i \mathbf{E}_2 les respectives matrius associades.

Geomètricament dos cilindres d'incertesa complementaris tenen intersecció fitada i varietats de centres que es tallen. En efecte, si el rang de $(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2)$ és n , vol dir que les direccions principals no infinites de \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 generen tot \mathbb{R}^n i per tant la intersecció $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ està fitada en totes direccions. A més, el fet que el rang $(\mathbf{E}_1) + \text{rang}(\mathbf{E}_2)$ sigui n fa que els subspais de les direccions principals finites respectius tinguin intersecció trivial, és a dir, que les direccions principals infinites (també) generin tot \mathbb{R}^n i per tant les varietats de centres es tallin (en un sol punt).

La següent proposició dóna una expressió tancada per a la fusió de cilindres complementaris.

Proposició 4.9 *Donats dos cilindres el·lipsoidals complementaris \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 de matrius associades \mathbf{E}_1 i \mathbf{E}_2 i centres \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 , respectivament, l'el·lipse (no degenerat) fusió $\hat{\mathcal{E}}$ té centre*

$$\hat{\mathbf{x}} = (\mathbf{E}_1^t \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2^t \mathbf{E}_2)^{-1} (\mathbf{E}_1^t \mathbf{E}_1 \mathbf{x}_1 + \mathbf{E}_2^t \mathbf{E}_2 \mathbf{x}_2)$$

i matriu $\hat{\mathbf{E}} = \frac{p}{n} \mathbf{E}_1 + \frac{n-p}{n} \mathbf{E}_2$, on $p = \text{rang}(\mathbf{E}_1)$.

Demostració:

En primer lloc vegem que \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 tenen un centre comú. Per ser un cilindre el·lipsoïdal \mathcal{E}_1 té tota una varietat lineal de centres, d'equació $\mathbf{E}_1 \mathbf{x} = \mathbf{E}_1 \mathbf{x}_1$ i anàlogament per \mathcal{E}_2 . Ajuntant les dues equacions s'obté el sistema $\begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix} \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{E}_2 \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}$, que té una sola solució $\hat{\mathbf{x}}$. En efecte, els sistemes de centres de \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 tenen, un cop reduïts per files, p i $n-p$ equacions respectivament, perquè $\text{rang}(\mathbf{E}_1) = p$ i $\text{rang}(\mathbf{E}_2) = n-p$. Al ajuntar els dos sistemes s'obtenen n equacions i per tant el rang de la matriu ampliada és menor o igual que n . Per altra banda, com que $\text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix} = n$, el rang de la matriu associada i ampliada són iguals i igual a n i per tant el sistema té una sola solució. Aquesta solució es pot expressar com

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix}^e \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{E}_2 \mathbf{x}_2 \end{pmatrix},$$

on A^e indica la matriu inversa a l'esquerra d' A , i operant (apèndix A) es converteix en l'expressió de l'enunciat.

Vegem ara quina és l'equació dels el·lipsoides que contenen ajustadament $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$. Com que $\hat{\mathbf{x}}$ és un centre comú, les equacions de \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 es poden expressar com

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^t \mathbf{E}_i + (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \leq 1 \quad \text{on } i = 1, 2.$$

I per tant l'equació dels el·lipsoides que contenen ajustadament $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$, que és combinació afí del les dues equacions, té la forma

$$(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^t (\lambda \mathbf{E}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{E}_2) (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \leq 1 \quad \text{on } 0 \leq \lambda \leq 1.$$

D'aquí es dedueix que el centre d'aquests el·lipsoides, i en particular el de l'el·lipse fusió $\hat{\mathcal{E}}$, és $\hat{\mathbf{x}}$.

Finalment vegem quin ha de ser el valor de λ en l'equació anterior per l'el·lipse fusió $\hat{\mathcal{E}}$. Com que ha de tenir volum mínim, correspondrà al λ tal que el determinant de $\lambda \mathbf{E}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{E}_2$

sigui màxim. Per a calcular aquest determinant es fa un canvi de base a una nova base formada pels vectors propis de valor propi nul (direccions lliures) d'ambdós cilindres.

Sigui U_1 la matriu que té per columnes els vectors propis de E_1 de valor propi no nul i anàlogament U_2 . Aleshores $E_1 U_1 = 0$ i $E_2 U_2 = 0$. Com que $\text{rang}(U_1, U_2) = \text{rang}(E_1, E_2) = n$, $M = (U_1, U_2)$ és una matriu de canvi de base.

Així, la matriu $\lambda E_1 + (1 - \lambda)E_2$ es transforma en la nova base en la matriu $M^t(\lambda E_1 + (1 - \lambda)E_2)M$ i $\det(\lambda E_1 + (1 - \lambda)E_2)$ és proporcional a

$$\begin{aligned} \det(M^t(\lambda E_1 + (1 - \lambda)E_2)M) &= \det\left(\begin{pmatrix} U_1^t \\ U_2^t \end{pmatrix}(\lambda E_1 + (1 - \lambda)E_2)(U_1 \ U_2)\right) = \\ &= \det\begin{pmatrix} \lambda U_1^t E_1 U_1 + (1 - \lambda)U_1^t E_2 U_1 & \lambda U_1^t E_1 U_2 + (1 - \lambda)U_1^t E_2 U_2 \\ \lambda U_2^t E_1 U_1 + (1 - \lambda)U_2^t E_2 U_1 & \lambda U_2^t E_1 U_2 + (1 - \lambda)U_2^t E_2 U_2 \end{pmatrix} = \\ &= \det\begin{pmatrix} (1 - \lambda)U_1^t E_2 U_1 & 0 \\ 0 & \lambda U_2^t E_1 U_2 \end{pmatrix} = \det((1 - \lambda)U_1^t E_2 U_1) \det(\lambda U_2^t E_1 U_2) = \\ &= (1 - \lambda)^{n-p} \det(U_1^t E_2 U_1) \lambda^p \det(U_2^t E_1 U_2) \quad \text{que té el seu màxim en } \lambda = \frac{p}{n}, \end{aligned}$$

tal com es volia demostrar. ■

La següent propietat d'ajust de la fusió de cilindres complementaris demostra que no es perd informació (no es guanya incertesa) al fer la fusió. És a dir, si les incerteses exactes de les observacions venen donades per regions politòpiques i aquestes s'aproximen per regions el·lipsoidals, l'el·lipsoide que s'obté al fusionar no és més gran que l'aproximació el·lipsoidal de la intersecció dels politops. Això és degut al fet que la informació donada per les observacions és complementària.

Proposició 4.10 *Si els cilindres el·lipsoidals complementaris \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 són els menors el·lipsoides contenint els politops \mathcal{P}_1 i \mathcal{P}_2 respectivament, llavors l'el·lipsoide $\hat{\mathcal{E}}$ és el menor el·lipsoide contenint $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$.*

Demostració:

Fent un canvi de base lineal la intersecció $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ es pot expressar com un producte cartesià $\mathcal{E}_x \times \mathcal{E}_y$, agafant com a vectors de la nova base els de les direccions principals finites dels dos cilindres. Aleshores $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ es transforma en $\mathcal{E}_{(x,y)}$, el menor el·lipsoide contenint $\mathcal{E}_x \times \mathcal{E}_y$. A més, si \mathcal{E}_1 és el menor el·lipsoide contenint \mathcal{P}_1 , aquest és ilimitat en les mateixes direccions que aquell i per tant \mathcal{P}_1 es transforma en $\mathcal{P}_x \times \mathbb{R}^n$ amb el canvi de base. Anàlogament succeeix amb \mathcal{P}_2 i per tant $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$ es transforma en $\mathcal{P}_x \times \mathcal{P}_y$.

Per veure que $\mathcal{E}_{(x,y)}$ és el menor el·lipsoide contenint $\mathcal{P}_x \times \mathcal{P}_y$, només cal veure que els el·lipsoides \mathcal{E} que contenen $\mathcal{P}_x \times \mathcal{P}_y$ també contenen $\mathcal{E}_x \times \mathcal{E}_y$. En efecte, \mathcal{E} conté $\mathcal{P}_x \times y_i$, on y_i són els vèrtexs del politop \mathcal{P}_y . Com que $\mathcal{P}_x \times y_i$ és una translació de \mathcal{P}_x , \mathcal{E} ha de contenir $\mathcal{E}_x \times y_i$, que és una translació de \mathcal{E}_x . Com que \mathcal{E} conté $\mathcal{E}_x \times y_i$ per tots els vèrtexs de \mathcal{P}_y , aleshores per convexitat \mathcal{E} ha de contenir $\mathcal{E}_x \times \mathcal{P}_y$. Això vol dir que per tot $x \in \mathcal{E}_x$, \mathcal{E} conté $x \times \mathcal{P}_y$, que és una translació de \mathcal{P}_y , i per tant ha de contenir $x \times \mathcal{E}_y$. Per tant \mathcal{E} conté $\mathcal{E}_x \times \mathcal{E}_y$.

Finalment, desfent el canvi de base s'obté el resultat buscat, perquè la fusió complementària es conserva per canvis de base. ■

Un cas particular especialment interessant de regions d'incertesa complementàries és el de producte cartesià de regions. En concret, aquest cas apareix al calcular la imatge \mathcal{E}_z de regions d'incertesa \mathcal{E}_x i \mathcal{E}_y per aplicacions de més d'una variable de la forma $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{0}$, on cal primer calcular la regió d'incertesa $\mathcal{E}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$ (apartat 5.3).

Definició 4.9 (Regió d'incertesa del producte cartesià) *Donada una observació \mathbf{x} de \mathbb{R}^m amb regió el·lipsoidal d'incertesa \mathcal{E}_x i una observació \mathbf{y} de \mathbb{R}^n amb regió el·lipsoidal d'incertesa \mathcal{E}_y , la regió el·lipsoidal d'incertesa de (\mathbf{x}, \mathbf{y}) en \mathbb{R}^{m+n} és la regió*

$$\mathcal{E}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = (\mathcal{E}_x \times \mathbb{R}^n) \widetilde{\cap} (\mathbb{R}^m \times \mathcal{E}_y).$$

Corol·lari 4.3 *Donada una observació \mathbf{x} de \mathbb{R}^m amb regió el·lipsoidal d'incertesa \mathcal{E}_x (de centre \mathbf{x}_0 i matriu \mathbf{E}_x) i una observació \mathbf{y} de \mathbb{R}^n amb regió el·lipsoidal d'incertesa \mathcal{E}_y (de centre \mathbf{y}_0 i matriu \mathbf{E}_y), la regió el·lipsoidal d'incertesa $\mathcal{E}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})}$ de (\mathbf{x}, \mathbf{y}) en \mathbb{R}^{m+n} té centre $(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)$ i matriu*

$$\mathbf{E}_{(\mathbf{x}, \mathbf{y})} = \begin{pmatrix} \frac{m}{n+m} \mathbf{E}_x & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \frac{n}{n+m} \mathbf{E}_y \end{pmatrix}.$$

La demostració d'aquest corol·lari és immediata.

Tal com es veurà a continuació, els resultats d'aquest apartat es poden generalitzar al cas de cilindres semicomplementaris i de més de dos cilindres complementaris. Cilindres semicomplementaris són aquells on els subspais de direccions principals finites tenen intersecció trivial, però no generen tot l'espai. Geomètricament, corresponen als cilindres amb varietats de centres que es tallen, però amb intersecció no fitada.

Definició 4.10 (Observacions semicomplementàries) *Dues observacions parcials d'un mateix element geomètric de dimensió n amb cilindres d'incertesa respectius \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 són semicomplementàries si*

$$\text{rang}(\mathbf{E}_1) + \text{rang}(\mathbf{E}_2) = \text{rang}(\mathbf{E}_1, \mathbf{E}_2) \neq n,$$

essent \mathbf{E}_1 i \mathbf{E}_2 les respectives matrius associades.

Corol·lari 4.4 *Donats dos cilindres el·lipsoidals semicomplementaris \mathcal{E}_1 i \mathcal{E}_2 de matrius associades \mathbf{E}_1 i \mathbf{E}_2 i centres \mathbf{x}_1 i \mathbf{x}_2 , respectivament, el cilindre el·lipsoidal fusió $\hat{\mathcal{E}}$ té centre*

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \mathbf{E}_2 \end{pmatrix}^\# \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{E}_2 \mathbf{x}_2 \end{pmatrix}$$

i matriu $\hat{\mathbf{E}} = \frac{p}{p+q} \mathbf{E}_1 + \frac{q}{p+q} \mathbf{E}_2$, on $\mathbf{A}^\#$ indica la pseudoinversa de la matriu \mathbf{A} , $\text{rang}(\mathbf{E}_1) = p$ i $\text{rang}(\mathbf{E}_2) = q$.

La demostració es basa en considerar les seccions dels cilindres pel subspai generat per aquestes direccions principals finites. Aquestes seccions són cilindres complementaris i es poden, doncs, fusionar segons la proposició 4.9. L'extensió ortogonal de l'el·lipse fusió és el cilindre fusió dels cilindres inicials.

Corol·lari 4.5 *Donats k cilindres el·lipsoidals complementaris de matrius associades $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k$ i centres $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_k$, respectivament, l'el·lipse (no degenrat) fusió té centre*

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_k \end{pmatrix}^e \begin{pmatrix} \mathbf{E}_1 \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{E}_k \mathbf{x}_k \end{pmatrix}$$

i matriu $\hat{E} = \frac{1}{p_1 + \dots + p_k} (p_1 \mathbf{E}_1 + \dots + p_k \mathbf{E}_k)$, on $p_i = \text{rang}(\mathbf{E}_i)$ per $i = 1, \dots, k$.

Demostració:

El centre es calcula, com en el cas de dos cilindres, com l'únic punt intersecció de totes les varietats de centres.

Per calcular la matriu es pot fer de forma iterativa. Els dos primers cilindres són semicomplementaris i per tant es poden fusionar segons el corollari 4.4, obtenint un cilindre de matriu

$$\mathbf{E}_2^* = \frac{1}{p_1 + p_2} (p_1 \mathbf{E}_1 + p_2 \mathbf{E}_2).$$

Aquest cilindre es pot fusionar de la mateixa forma amb el tercer cilindre inicial, obtenint

$$\mathbf{E}_3^* = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3} ((p_1 + p_2) \mathbf{E}_2^* + p_3 \mathbf{E}_3) = \frac{1}{p_1 + p_2 + p_3} (p_1 \mathbf{E}_1 + p_2 \mathbf{E}_2 + p_3 \mathbf{E}_3).$$

I així successivament, fins $\mathbf{E}_n^* = \hat{E}$. ■

La clau del fet que la fusió el·lipsoidal dels cilindres complementaris o semicomplementaris es pugui calcular de forma exacta està en el fet de poder calcular el centre d'aquesta fusió independentment de la matriu. Així, en els casos d'el·lipsoides no cilíndrics o de cilindres no complementaris ni semicomplementaris, les varietats de centres en general no es tallen i per tant el centre de la fusió no es pot calcular com en els casos anteriors, com un punt intersecció.

4.4 Propietats

En aquest apartat es resumeixen les propietats de l'operació fusió d'informacions amb incertesa el·lipsoidal, considerant la fusió d'informacions complementàries i la fusió d'el·lipsoides via franges.

Competitivitat. Permet fusionar tant informacions competitives com no competitives, ja siguin complementàries o no.

Ponderació de la incertesa. Al fusionar informacions la influència de cada factor és ponderada per la incertesa de cada factor.

Idempotència. Al fusionar informacions iguals s'obté el mateix resultat. És a dir, per tot el·lipsoide $\mathcal{E} = \mathcal{E} \tilde{\cap} \mathcal{E}$ Una conseqüència d'aquesta propietat és que la fusió d'informacions similars, encara que siguin independents, redueixen molt poc la regió d'incertesa del resultat.

Reducció de la incertesa. El resultat de la fusió de dues informacions té menor incertesa que qualsevol dels factors. És a dir, $\text{vol}(\mathcal{E}_1 \tilde{\cap} \mathcal{E}_2) \leq \text{vol}(\mathcal{E}_1), \text{vol}(\mathcal{E}_2)$.

Càlcul. L'operació de fusió d'observacions amb incertesa el·lipsoidal es redueix a operacions matricials; excepte en la descomposició d'un el·lipsoide en franges, on cal trobar els valors propis d'una matriu.

Incompatibilitat. Permet detectar informacions incompatibles entre sí, quan $\mathcal{E}_1 \cap \mathcal{E}_2$ sense fer tots els càlculs de la fusió.

Redundància. Permet detectar informacions redundants sense fer tots els càlculs de la fusió; essent \mathcal{E}_1 redundant respecte \mathcal{E}_2 si $\mathcal{E}_1 \tilde{\cap} \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_2$.

No independència. No necessita que les diferents observacions a fusionar siguin independents entre sí.

Conservació del bon ajust. Si es fusionen dues observacions complementàries d'incertesa el·lipsoidal (aproximada) ben ajustada a una incertesa politòpica (real), la incertesa de la fusió el·lipsoidal també està ben ajustada a la incertesa de la fusió politòpica. Aquesta propietat no es satisfà en el cas general de fusió d'el·lipsoides no complementaris.

Convergència. La fusió d'una successió d'el·lipsoides d'incertesa aproximant politops d'incertesa és convergent a un punt (incertesa nul·la), si i només si existeix una subsuccessió dels politops d'incertesa que fusionant-los convergeixen a un punt.

Capítol 5

Propagació d'informació. Relacions geomètriques

Entre els diferents objectes de l'entorn hi ha una sèrie de relacions topològiques o geomètriques, com per exemple: un vèrtex pertany a una aresta, dues rectes són paral·leles, un pla conté un vèrtex, etc. Aquestes relacions són necessàries per a construir models complets de l'entorn i es poden aprofitar per a propagar informacions. En aquest treball es tracten només relacions entre dos elements o relacions entre més elements que es puguin descomposar en un conjunt de relacions binàries.

Les relacions geomètriques poden ser conegudes a priori (ja establertes en el model de l'entorn) i per tant no sotmeses a incertesa. En aquest cas permetran trametre informació, perquè la informació sobre un element dóna informació sobre els altres relacionats amb ell. En altres casos interessa comprovar si una determinada relació entre dos elements es satisfà o no. La informació que dels elements es disposi permetrà fer aquesta comprovació.

En aquest capítol s'estudia la propagació d'informació d'un element geomètric a un altre relacionat amb ell, així com també el concepte de satisfacció amb incertesa de relacions geomètriques.

5.1 Relacions geomètriques

Una relació geomètrica entre dos elements de l'entorn ve donada per una equació funcional vectorial entre els vectors de paràmetres respectius. Es classifiquen les relacions en: explícites, aquelles que tenen equació del tipus $y = f(x)$ o $x = g(y)$, i implícites, aquelles amb equació del tipus $h(x, y) = 0$, on $x \in \mathbb{R}^m$ i $y \in \mathbb{R}^n$ són els vectors de paràmetres corresponents. Les equacions explícites són un cas particular de les implícites, per això en aquest treball es fa l'anàlisi detallada només per aquestes últimes i es detallen els dos casos quan la reducció de la formulació per les explícites és notable.

Les equacions entre els vectors de paràmetres donen unes relacions entre les respectives regions d'incertesa, com es veurà en els apartats següents. Això permetrà que, donada la relació entre regions d'incertesa i una de les regions d'incertesa, es pugui calcular la regió d'incertesa de

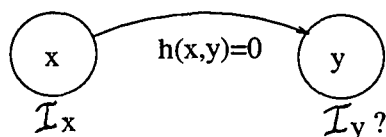


Figura 5.1: Propagació local de regions d'incertesa

l'altre element; és a dir, permetrà trametre informació incerta d'un element a un altre. Aquest procés l'anomenem *propagació local d'informació*, mentre que la *propagació global* es refereix a la propagació a través de tot el conjunt de relacions entre elements de l'escena. Per altra banda, es podrà també comprovar la satisfacció de relacions entre elements tenint en compte la incertesa, mirant si les regions d'incertesa dels dos elements satisfan o no la corresponent relació.

Per a calcular les relacions entre regions d'incertesa a partir de les equacions entre vectors de paràmetres cal que aquestes últimes siguin lineals, tant si les regions d'incertesa són politòpiques com si són el·lipsoidals. En cas de no ser lineals, es linealitzen per la fórmula de Taylor entorn de punts \mathbf{x}_0 i \mathbf{y}_0 , que seran els centres de les regions d'incertesa o punts propers. Així, aplicant la fórmula de Taylor a una equació $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ no lineal en els punts \mathbf{x}_0 i \mathbf{y}_0 s'obté

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0)(\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) = \mathbf{0},$$

que és una equació lineal de la forma $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$. Per tant les equacions entre vectors de paràmetres considerades en aquest treball són de la forma: lineal implícita ($\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$) o bé lineal explícita ($\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{d}$ o bé $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{d}$).

El fet d'utilitzar regions d'incertesa el·lipsoidals té l'avantatge, com es veurà en els apartats següents, que la propagació local es pot calcular de forma exacta, si les relacions tenen equacions lineals. Dit en unes altres paraules, no cal fer l'envolupant el·lipsoidal del resultat de la propagació, sinó que aquest resultat és sempre el·lipsoidal.

Les relacions geomètriques entre més de dos elements, del tipus $\mathbf{h}(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \mathbf{0}$, es poden reduir fàcilment a relacions entre dos elements, fent per exemple $\mathbf{y} = (\mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)$, i per tant en els apartats següents només s'estudia el cas de dos elements.

5.2 Propagació local d'informació

Donada una relació lineal entre els vectors de paràmetres $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ de dos elements de l'entorn i coneguda la regió d'incertesa d'un dels dos elements relacionats, diguem \mathcal{I}_x , es pot calcular la regió d'incertesa imatge, \mathcal{I}_y , de l'altre element (figura 5.1). La regió d'incertesa imatge correspon a la informació que sobre \mathbf{y} es pot obtenir a partir de la informació coneguda sobre \mathbf{x} i la relació entre ambdós.

Definició 5.1 (Regió d'incertesa imatge) Donats dos elements, amb vectors de paràmetres respectius $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ i $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, donada una relació entre ells d'equació vectorial $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$ i la regió d'incertesa \mathcal{I}_x , la regió d'incertesa imatge \mathcal{I}_y per aquesta relació és

$$\mathcal{I}_y = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mathbf{x} \in \mathcal{I}_x \quad \mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}\}.$$

Es consideren tres casos de propagació local: la propagació directa, inversa i implícita. Coneguda la regió \mathcal{I}_x per calcular la regió \mathcal{I}_y propagada, si l'equació és de la forma $y = f(x)$ la propagació s'anomena directa, si l'equació és de la forma $x = g(y)$ la propagació s'anomena inversa i si és de la forma $h(x, y) = 0$ la propagació és implícita. Malgrat que el cas de propagació implícita inclou els altres, quan la reducció sigui notable es detallaran els casos particulars de propagació directa i inversa.

En l'apartat següent s'exposen les fórmules de propagació local per a regions el·lipsoidals a través de relacions lineals i com a cas particular s'obté la propagació local de franges.

5.2.1 Propagació local de regions el·lipsoidals

El següent teorema dona un procediment per a la propagació local de regions el·lipsoidals a través de relacions lineals.

Teorema 5.1 (Propagació implícita de regions el·lipsoidals) *Donada una regió el·lipsoïdal \mathcal{E}_x de centre x_0 i matriu E_x en \mathbb{R}^m i donada una relació lineal $Ax + Cy + d = 0$, per $y \in \mathbb{R}^n$, on $\text{rang}(A) = \text{rang}(C) = r \leq n, m$, la regió el·lipsoïdal imatge \mathcal{E}_y té centre qualsevol y_0 tal que $Ax_0 + Cy_0 + d = 0$ i matriu $E_y = C^t A^{d^t} (E_x - E_x N_A (N_A^t E_x N_A)^{\#} N_A^t E_x) A^d C$.*

En aquest teorema $X^{\#}$ indica la matriu pseudoinversa d' X , $A^d = A^t(AA^t)^{-1}$ la inversa a la dreta d' A i N_A una matriu anul·ladora a la dreta d' A (apèndix A).

Demostració:

La demostració es fa en tres passos.

- 1) Cas de propagació directa, és a dir, la relació és de la forma $y = Ax + d$

És suficient considerar el cas $y = Ax$ i $x_0 = 0$, on l'el·lipsoide tindrà equació $x^t E_x x \leq 1$. Altrament fent translacions s'obté el resultat.

Per ser E_x una matriu definida positiva es pot expressar de la forma $E_x = M \cdot M^t$ essent $M = \sqrt{E_x}$ una matriu que té per columnes vectors propis d' E_x de valor propi no nul i de longitud els corresponents semieixos. Si $\text{rang}(E_x) = k$ la matriu M és del tipus $m \times k$ i té rang màxim per columnes.

Per altra banda, per ser A de rang màxim per files, fent $P = A^d$ una inversa a la dreta d' A i $Q = N_A$ una matriu anul·ladora a la dreta d' A , existeix B tals que $\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^{-1} = (P, Q)$. Perquè, $\text{rang}(P, Q) = \text{rang}(P) + \text{rang}(Q) = r + m - r = m$ i per tant la matriu (P, Q) és no singular i existeix $(P, Q)^{-1} = \begin{pmatrix} \bar{A} \\ \bar{B} \end{pmatrix}$. Es pot veure que $\bar{A} = A$. En efecte, Q serà matriu anul·ladora a la dreta d' \bar{A} i llavors el subspai $\langle \text{files d}'\bar{A} \rangle = \langle \text{columnes de } Q \rangle^{\perp} = \langle \text{files d}'A \rangle$ i per tant existeix una matriu Λ de tipus $r \times r$ tal que $\bar{A} = \Lambda A$. A més, $I_r = \bar{A}P = \Lambda AP = \Lambda I_r = \Lambda$, per tant $\bar{A} = A$.

Fent el canvi de variables $\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x$ es pot expressar la pertinença a l'el·lipsoide imatge \mathcal{E}_y de la següent forma:

$$y \in \mathcal{E}_y \iff \exists x \in \mathcal{E}_x \quad y = Ax \iff \exists x \quad x^t E_x x \leq 1 \quad y = Ax$$

$$\begin{aligned}
&\iff \exists x \quad x^t(A^t, B^t) \begin{pmatrix} P^t \\ Q^t \end{pmatrix} E_x (P \quad Q) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} x \leq 1 \quad y = Ax \\
&\iff \exists z \quad (y^t, z^t) \begin{pmatrix} P^t \\ Q^t \end{pmatrix} E_x (P \quad Q) \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \leq 1 \\
&\iff \exists z \quad y^t P^t E_x P y + 2y^t P^t E_x Q z + z^t Q^t E_x Q z \leq 1. \tag{5.1}
\end{aligned}$$

L'equació (5.1) és la d'un el·lipsoide en l'espai de z , considerant y constant. Aquest el·lipsoide en z és la intersecció de \mathcal{E}_x i la varietat lineal y constant. Aquest el·lipsoide té centre \bar{z} , essent \bar{z} solució del sistema $(Q^t E_x Q)z + Q^t E_x P y = 0$ d'incògnita z . Per les propietats de les matrius pseudoinverses (apèndix A) una solució és $\bar{z} = -(Q^t E_x Q)^\# Q^t E_x P y$. Aleshores l'el·lipsoide de l'equació 5.1 es pot escriure com

$$(z - \bar{z})^t Q^t E_x Q (z - \bar{z}) + \bar{z}^t Q^t E_x Q \bar{z} + 2y^t P^t E_x Q \bar{z} + y^t P E_x P y - 1 \leq 0.$$

Aquest ha de ser un el·lipsoide no imaginari (no buit) i per tant cal que tingui el terme independent negatiu, és a dir,

$$\begin{aligned}
&\bar{z}^t Q^t E_x Q \bar{z} + 2y^t P^t E_x Q \bar{z} + y^t P^t E_x P y - 1 \leq 0 \\
&\iff y^t P^t E_x Q (Q^t E_x Q)^\# Q^t E_x Q (Q^t E_x Q)^\# Q^t E_x P y - \\
&\quad - 2y^t P^t E_x Q (Q^t E_x Q)^\# Q^t E_x P y + y^t P^t E_x P y \leq 1 \\
&\iff y^t P^t E_x P y - y^t P^t E_x Q (Q^t E_x Q)^\# Q^t E_x P y \leq 1 \\
&\iff y^t (P^t E_x P - P^t E_x Q (Q^t E_x Q)^\# Q^t E_x P) y \leq 1.
\end{aligned}$$

I per tant la matriu de l'el·lipsoide imatge és $E_y = P^t E_x P - P^t E_x Q (Q^t E_x Q)^\# Q^t E_x P$, que és el es volia demostrar, perquè $P = A^d$ i $Q = N_A$.

2) Cas de propagació inversa, és a dir, la relació és de la forma $x = Cy + d$, o, el que és el mateix, $x - x_0 = C(y - y_0)$. L'equació de l'el·lipsoide s'expressa com

$$(x - x_0)^t E_x (x - x_0) \leq 1 \iff (y - y_0)^t C^t E_x C (y - y_0) \leq 1.$$

Per tant la matriu de l'el·lipsoide imatge és $E_y = C^t E_x C$.

3) Cas de propagació implícita, és a dir, la relació és de la forma $Ax + Cy + d = 0$

Definint $z = A(x - x_0) = -C(y - y_0)$ i aplicant les fórmules de propagació directa a $x \mapsto z$ del cas 1) i de propagació inversa $z \mapsto y$ del cas 2) s'obté el resultat desitjat. ■

El següent teorema dóna expressions simplificades per a la propagació local de regions el·lipsoïdals a través de relacions lineals en molts casos.

Teorema 5.2 *En les hipòtesis del teorema 5.1 la matriu E_y es pot expressar de forma més simplificada en els següents casos:*

1. Si E_x és matriu no singular, $E_y = C^t (A E_x^{-1} A^t)^{-1} C$. I si a més A és no singular, $E_y = C^t A^{-t} E_x A^{-1} C$.
2. Si E_x és singular i $\text{rang} \begin{pmatrix} A \\ E_x \end{pmatrix} = \text{rang}(A)$ o $\text{rang}(E_x)$,
 $E_y = C^t A^{dt} E_x A^d C$.

3. Si E_x és singular i $\text{rang} \begin{pmatrix} A \\ E_x \end{pmatrix} = \text{rang}(A) + \text{rang}(E_x)$, $E_y = 0$, és a dir, la imatge $\mathcal{E}_y = \mathbb{R}^n$.
4. Si $\text{rang}(A^d E_x A^d) + \text{rang}(N_A^t E_x N_A) = \text{rang}(E_x)$, $E_y = C^t (A E_x^\# A^t)^\# C$

Cal observar que el cas 2 és un cas particular del cas 4 i que en la llista no apareix el cas 5, cas complementari del 4 si E_x és singular.

Demostració:

Només cal demostrar el cas de propagació directa, ja que aleshores els casos de propagació inversa i implícita són immediats.

En aquesta demostració, $P = A^d$, $Q = N_A$ i $M = \sqrt{E_x}$, com en la demostració del teorema 5.1.

Per veure les expressions simplificades de E_y s'aplica el corollari A.1 de la fórmula generalitzada d'Schur (apèndix A), on, en determinades condicions, s'obté:

$$\begin{aligned} E_y^\# &= (P^t E_x P - P^t E_x Q (Q^t E_x Q)^\# Q^t E_x P)^\# = (I \ 0) \begin{pmatrix} P^t E_x P & P^t E_x Q \\ Q^t E_x P & Q^t E_x Q \end{pmatrix}^\# \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= (I \ 0) \left(\begin{pmatrix} P^t \\ Q^t \end{pmatrix} E_x (P \ Q) \right)^\# \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} = (I \ 0) (P \ Q)^{-1} E_x^\# \begin{pmatrix} P^t \\ Q^t \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} = \\ &= (I \ 0) \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} E_x^\# \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} = A E_x^\# A^t, \end{aligned}$$

és a dir, $E_y = (A E_x^\# A^t)^\#$.

Les condicions d'aplicació de la fórmula són:

$$\begin{aligned} \text{rang}(P^t E_x P) + \text{rang}(Q^t E_x Q) &= \text{rang} \begin{pmatrix} P^t E_x P & P^t E_x Q \\ Q^t E_x P & Q^t E_x Q \end{pmatrix}, \\ \text{és a dir, } \text{rang}(P^t M) + \text{rang}(Q^t M) &= \text{rang} \begin{pmatrix} P^t E_x P & P^t E_x Q \\ Q^t E_x P & Q^t E_x Q \end{pmatrix} = \\ &= \text{rang} \begin{pmatrix} P^t \\ Q^t \end{pmatrix} E_x (P \ Q) = \text{rang}(E_x). \end{aligned}$$

Cal veure que $\text{rang} \begin{pmatrix} A \\ M^t \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} A \\ E_x \end{pmatrix}$. Això és degut al fet que $\langle \text{files d}'M^t \rangle = \langle \text{files d}'MM^t \rangle$ o, el que és el mateix, que $\langle \text{columnes d}'M \rangle = \langle \text{columnes d}'MM^t \rangle$. La inclusió \supseteq és clara i per altra banda l'aplicació lineal

$$\begin{array}{ccc} \langle \text{columnes d}'M \rangle & \mapsto & \langle \text{columnes d}'MM^t \rangle \\ \mathbf{x} & \mapsto & MM^t \mathbf{x} \end{array}$$

és injectiva. Efectivament, si $\mathbf{x} \in \langle \text{columnes d}'M \rangle$ tal que $MM^t \mathbf{x} = \mathbf{0}$, llavors existeix \mathbf{z} tal que $\mathbf{x} = M\mathbf{z}$ i $MM^t M\mathbf{z} = \mathbf{0}$; com que $\text{rang}(M) = \dim M^t M\mathbf{z}$, això implica que $M^t M\mathbf{z} = \mathbf{0}$; i com que $\text{rang}(M^t M) = \dim \mathbf{z}$, això implica que $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ i per tant $\mathbf{x} = M\mathbf{z} = \mathbf{0}$. La injectivitat implica que $\dim \langle \text{columnes d}'M \rangle \leq \dim \langle \text{columnes d}'MM^t \rangle$ i per tant la igualtat dels dos espais.

En els diferents casos, s'obté:

1. Com que $\mathbf{E}_x = \mathbf{M}\mathbf{M}^t$ és no singular, \mathbf{M}^t és no singular i al ser \mathbf{P} de rang màxim per columnes, les columnes de $\mathbf{M}^t\mathbf{P}$ són linealment independents. Per tant $\mathbf{P}^t\mathbf{M}$ és de rang màxim per files. Anàlogament es veu que $\mathbf{Q}^t\mathbf{M}$ és de rang màxim per files.

Així, $\text{rang}(\mathbf{P}^t\mathbf{M}) + \text{rang}(\mathbf{Q}^t\mathbf{M}) = n + (m - n) = m = \text{rang}(\mathbf{E}_x)$ i aleshores aplicant el corollari A.1 s'obté $\mathbf{E}_y = (\mathbf{A}\mathbf{E}_x^{-1}\mathbf{A}^t)^{-1}$.

2. En el cas que $\text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{M}^t \end{pmatrix} = \text{rang}(\mathbf{A})$, el subspai $\langle \text{columnes d}'\mathbf{M} \rangle \subset \langle \text{files d}'\mathbf{A} \rangle$ i per tant les columnes de \mathbf{Q} són ortogonals a les columnes d' \mathbf{M} , és a dir, $\mathbf{M}^t\mathbf{Q} = \mathbf{0}$. Per tant

$$\mathbf{E}_y = \mathbf{P}^t\mathbf{E}_x\mathbf{P} - \mathbf{P}^t\mathbf{E}_x\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^t\mathbf{E}_x\mathbf{Q})^\# \mathbf{Q}^t\mathbf{E}_x\mathbf{P} = \mathbf{P}^t\mathbf{E}_x\mathbf{P} - \mathbf{0} = \mathbf{A}^{dt}\mathbf{E}_x\mathbf{A}^d.$$

Per altra banda $\text{rang}(\mathbf{P}^t\mathbf{M}) = k$, rang màxim per columnes. En efecte: el subspai $\langle \text{columnes d}'\mathbf{M} \rangle$ està contingut en $\langle \text{files d}'\mathbf{A} \rangle$ i llavors existeix una matriu $\mathbf{\Lambda}$ $n \times k$ tal que $\mathbf{M} = \mathbf{A}^t\mathbf{\Lambda}$ i per tant $\mathbf{P}^t\mathbf{M} = \mathbf{P}^t\mathbf{A}^t\mathbf{\Lambda} = (\mathbf{A}\mathbf{P})^t\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}$ de rang $= \text{rang}(\mathbf{M}) = k$. Així, $\text{rang}(\mathbf{P}^t\mathbf{M}) + \text{rang}(\mathbf{Q}^t\mathbf{M}) = k + 0 = k = \text{rang}(\mathbf{E}_x)$ i aleshores aplicant el corollari A.1 s'obté $\mathbf{E}_y = (\mathbf{A}\mathbf{E}_x^\# \mathbf{A}^t)^\#$.

En el cas que $\text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{M}^t \end{pmatrix} = \text{rang}(\mathbf{M})$, el subspai $\langle \text{files d}'\mathbf{A} \rangle \subset \langle \text{columnes d}'\mathbf{M} \rangle$ i per tant existeix una matriu $\mathbf{\Lambda}$ tal que $\mathbf{A}^t = \mathbf{M}\mathbf{\Lambda}$. Aleshores la inversa a la dreta d' \mathbf{A} s'expressa com $\mathbf{P} = \mathbf{M}(\mathbf{M}^t\mathbf{M})^{-1}\mathbf{\Lambda}(\mathbf{\Lambda}^t\mathbf{\Lambda})^{-1}$ i

$$\mathbf{P}^t\mathbf{E}_x\mathbf{Q} = (\mathbf{\Lambda}^t\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Lambda}^t(\mathbf{M}^t\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}^t\mathbf{M}\mathbf{M}^t\mathbf{Q} = (\mathbf{\Lambda}^t\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Lambda}^t\mathbf{M}^t\mathbf{Q} = (\mathbf{\Lambda}^t\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{0}.$$

Per tant, com en el cas anterior,

$$\mathbf{E}_y = \mathbf{P}^t\mathbf{E}_x\mathbf{P} - \mathbf{P}^t\mathbf{E}_x\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^t\mathbf{E}_x\mathbf{Q})^\# \mathbf{Q}^t\mathbf{E}_x\mathbf{P} = \mathbf{P}^t\mathbf{E}_x\mathbf{P} - \mathbf{0} = \mathbf{A}^{dt}\mathbf{E}_x\mathbf{A}^d.$$

A més, en aquest últim cas, $\mathbf{E}_y = (\mathbf{A}\mathbf{E}_x^\# \mathbf{A}^t)^\#$ perquè

$$\mathbf{E}_y = \mathbf{A}^{dt}\mathbf{E}_x\mathbf{A}^d = (\mathbf{\Lambda}^t\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Lambda}^t(\mathbf{M}^t\mathbf{M})^{-1}\mathbf{M}^t\mathbf{M}\mathbf{M}^t\mathbf{M}(\mathbf{M}^t\mathbf{M})^{-1}\mathbf{\Lambda}(\mathbf{\Lambda}^t\mathbf{\Lambda})^{-1} = (\mathbf{\Lambda}^t\mathbf{\Lambda})^{-1}$$

$$\text{i } (\mathbf{A}\mathbf{E}_x^\# \mathbf{A}^t)^\# = (\mathbf{\Lambda}^t\mathbf{M}^t(\mathbf{M}\mathbf{M}^t)^\# \mathbf{M}\mathbf{\Lambda})^\# = (\mathbf{\Lambda}^t\mathbf{M}^t\mathbf{M}(\mathbf{M}^t\mathbf{M})^{-2}\mathbf{M}^t\mathbf{M}\mathbf{\Lambda})^\# = (\mathbf{\Lambda}^t\mathbf{\Lambda})^{-1}.$$

3. En aquest cas, $\text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{M} \end{pmatrix} = \text{rang}(\mathbf{A}) + \text{rang}(\mathbf{M})$, cosa que és equivalent al fet que $\langle \text{files d}'\mathbf{A} \rangle \cap \langle \text{columnes d}'\mathbf{M} \rangle = \{0\}$. Això significa que $\mathbf{Q}^t\mathbf{M}$ té rang màxim per columnes. Perquè altrament les columnes de $\mathbf{Q}^t\mathbf{M}$ serien linealment dependents i llavors existiria un vector $\lambda \neq \mathbf{0}$ tal que $\mathbf{Q}^t\mathbf{M}\lambda = \mathbf{0}$. Sigui $\mu = \mathbf{M}\lambda$. Si $\mu = \mathbf{0}$ llavors $\mathbf{M}\lambda = \mathbf{0}$ i $\lambda \neq \mathbf{0}$, cosa que faria les columnes d' \mathbf{M} dependents (contra hipòtesi). Per altra banda, si $\mu \neq \mathbf{0}$ aleshores $\mathbf{Q}\mu = \mathbf{0}$ i $\mu \in \langle \text{columnes de } \mathbf{Q} \rangle^\perp = \langle \text{files d}'\mathbf{A} \rangle$. Per tant existiria $\nu \neq \mathbf{0}$ tal que $\mu = \mathbf{A}^t\nu$ i llavors $\mathbf{A}^t\nu = \mathbf{M}\lambda$ i $\langle \text{files d}'\mathbf{A} \rangle \cap \langle \text{columnes d}'\mathbf{M} \rangle \neq \{0\}$ (contra hipòtesi).

Com que $\mathbf{Q}^t\mathbf{M}$ té rang màxim per columnes, $(\mathbf{Q}^t\mathbf{M}\mathbf{M}^t\mathbf{Q})^\# = \mathbf{Q}^t\mathbf{M}(\mathbf{M}^t\mathbf{Q}\mathbf{Q}^t\mathbf{M})^{-2}\mathbf{M}^t\mathbf{Q}$ i per tant

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_y &= \mathbf{P}^t\mathbf{E}_x\mathbf{P} - \mathbf{P}^t\mathbf{E}_x\mathbf{Q}(\mathbf{Q}^t\mathbf{E}_x\mathbf{Q})^\# \mathbf{Q}^t\mathbf{E}_x\mathbf{P} = \\ &= \mathbf{P}^t\mathbf{E}_x\mathbf{P} - \mathbf{P}^t\mathbf{E}_x\mathbf{Q}\mathbf{Q}^t\mathbf{M}(\mathbf{M}^t\mathbf{Q}\mathbf{Q}^t\mathbf{M})^{-2}\mathbf{M}^t\mathbf{Q}\mathbf{Q}^t\mathbf{E}_x\mathbf{P} = \mathbf{P}^t\mathbf{E}_x\mathbf{P} - \mathbf{P}^t\mathbf{E}_x\mathbf{P} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Cal observar que en aquest cas no es pot aplicar el corollari A.1 perquè la condició d'aplicació $\text{rang}(\mathbf{E}_x) = \text{rang}(\mathbf{Q}^t\mathbf{M}) + \text{rang}(\mathbf{P}^t\mathbf{M})$ no es satisfà en general. Ja que és equivalent a $\text{rang}(\mathbf{P}^t\mathbf{M}) = 0$, perquè $\text{rang}(\mathbf{Q}^t\mathbf{M}) = k$ màxim per columnes, i això és equivalent a $\mathbf{P}^t\mathbf{M} = \mathbf{0}$, equivalent a $(\mathbf{A}\mathbf{A}^t)^{-1} = \mathbf{0}$ i a $\mathbf{A}\mathbf{M} = \mathbf{0}$, equivalent alhora a files d' $\mathbf{A} \perp$ columnes d' \mathbf{M} , cosa que no es satisfà en general.

4. Aquest cas és aplicació directa del corollari el corollari A.1 ■

Com a casos particulars del teorema 5.1 es dedueixen de forma immediata els següents corollaris:

Corollari 5.1 (Propagació directa de regions elipsoidals) Donada una regió elipsoidal \mathcal{E}_x de centre \mathbf{x}_0 i matriu \mathbf{E}_x en \mathbb{R}^m i donada una relació lineal $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{d}$, per $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ on $\text{rang}(\mathbf{A}) = n$, ($n \leq m$), la regió elipsoidal imatge \mathcal{E}_y té centre $\mathbf{y}_0 = \mathbf{A}\mathbf{x}_0 + \mathbf{d}$ i matriu $\mathbf{E}_y = \mathbf{A}^{dt} \left(\mathbf{E}_x - \mathbf{E}_x \mathbf{N}_A (\mathbf{N}_A^t \mathbf{E}_x \mathbf{N}_A)^{\#} \mathbf{N}_A^t \mathbf{E}_x \right) \mathbf{A}^d$.

Corollari 5.2 (Propagació inversa de regions elipsoidals) Donada una regió elipsoidal \mathcal{E}_x de centre \mathbf{x}_0 i matriu \mathbf{E}_x en \mathbb{R}^m i donada una relació lineal $\mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{D}$, per $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, on $\text{rang}(\mathbf{C}) = m$, la regió elipsoidal imatge \mathcal{E}_y té centre qualsevol \mathbf{y}_0 tal que $\mathbf{x}_0 = \mathbf{C}\mathbf{y}_0 + \mathbf{D}$ i matriu $\mathbf{E}_y = \mathbf{C}^t \mathbf{E}_x \mathbf{C}$.

Demostració:

$\mathbf{E}_x = \mathbf{n}_x \mathbf{n}_x^t$ matriu singular i $\mathbf{M} = \mathbf{n}_x$, per tant $\text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{M}^t \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{E}_x \end{pmatrix}$ és igual a $\text{rang}(\mathbf{A})$ o bé és igual a $\text{rang}(\mathbf{A}) + 1$ (rang màxim). Per tant només es poden donar els casos 2. i 3. ■

Anàlogament al corollari 5.1 del teorema 5.1 es podria escriure la versió del teorema 5.2 per a propagació directa.

Com que les franges són un cas particular d'elipsoides degenerats, del teorema 5.1 es pot deduir el següent corollari:

Corollari 5.3 (Propagació implícita de franges) Donada una franja \mathcal{F}_x de normal exterior \mathbf{n}_x en \mathbb{R}^m i equació $c_x \leq \mathbf{n}_x^t \mathbf{x} \leq b_x$ i donada una relació lineal $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$, per $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, on $\text{rang}(\mathbf{A}) = \text{rang}(\mathbf{C}) = r \leq n, m$, la franja imatge \mathcal{F}_y és:

- $\mathcal{F}_y = \mathbb{R}^n$, si $\text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{n}_x^t \end{pmatrix} > r$
- \mathcal{F}_y és la franja d'equació $c_y \leq \mathbf{n}_y^t \mathbf{y} \leq b_y$, on $\mathbf{n}_y = -\mathbf{C}^t \mathbf{A}^{dt} \mathbf{n}_x$, $b_y = b_x + \mathbf{A}^{dt} \mathbf{n}_x^t \mathbf{d}$ i $c_y = c_x + \mathbf{A}^{dt} \mathbf{n}_x^t \mathbf{d}$, altrament.

D'aquest corollari es dedueixen immediatament les fórmules per a propagació local directa i inversa de franges. També se'n dedueixen les fórmules per a propagació local (implícita, directa i inversa) de semiespais, ja que un semiespai es pot pensar com un cas particular de franja on $c = -\infty$.

Totes les propietats i corollaris anteriors es refereixen a la propagació d'una informació sobre \mathbf{x} a una informació sobre \mathbf{y} a través d'una relació entre dos elements $\mathbf{h}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{0}$. Ara

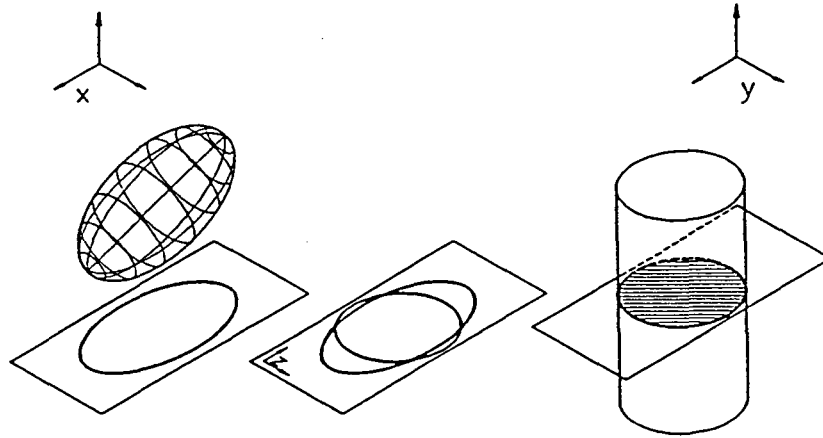


Figura 5.2: Interpretació geomètrica de la propagació d'informació

bé, es pot generalitzar tot al cas de relacions entre més de dos elements. En efecte, per a propagar les informacions sobre x_1, \dots, x_n a una informació sobre y a través d'una relació $h(x_1, \dots, x_n, y) = 0$, cal considerar un nou vector $x = (x_1, \dots, x_n)$ i tot es redueix al cas anterior. Només cal tenir present que l'el·lipse d'incertesa de x es calcula a partir dels el·lipsoides de x_1, \dots, x_n amb les fórmules de fusió d'informacions complementàries (apartat 4.3).

5.2.2 La propagació local com a projeccions i extensions

El procés de propagació local de regions el·lipsoidals per una relació lineal implícita donat en el teorema 5.1 es pot interpretar geomètricament com una projecció ortogonal seguida d'una extensió (relació que dona els conjunts antimatges d'una projecció). Aquesta interpretació es fa de la següent forma. En primer lloc, l'el·lipse \mathcal{E}_x es projecta ortogonalment sobre una varietat de direccions donades per les files de la matriu A , identificant aquesta varietat amb \mathbb{R}^r ; en segon lloc, l'el·lipse projectat es transforma de manera afí en \mathbb{R}^r i finalment, identificant \mathbb{R}^r amb una varietat de direccions donades per les files de la matriu C , l'el·lipse transformat s'extén ortogonalment fins obtenir l'el·lipse \mathcal{E}_y (figura 5.2).

El procés es descriu formalment a continuació. S'identifica \mathbb{R}^r amb la varietat lineal V de \mathbb{R}^m que passa pel punt $A^d A x_0$ i que té per vectors directors les files d' A a través de l'afinitat bijectiva

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^r &\mapsto V \\ z &\mapsto A^d(z + A x_0) \end{aligned}$$

i aleshores l'aplicació

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^m &\mapsto \mathbb{R}^r && \text{es converteix en la projecció} && \mathbb{R}^m &\mapsto V \\ x &\mapsto z = A(x - x_0) && && x &\mapsto A^d A x \end{aligned}$$

Anàlogament es pot identificar \mathbb{R}^r amb la varietat lineal W de \mathbb{R}^n que passa pel punt $-C^d C y_0$ i que té per vectors directors les files de C a través de l'afinitat bijectiva

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^r &\mapsto W \\ z &\mapsto t = C^d(z - C y_0) \end{aligned}$$

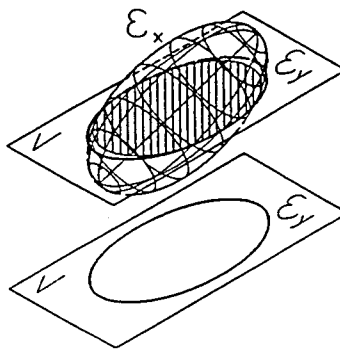


Figura 5.3: Projecció d'un elipsoide no cilíndric

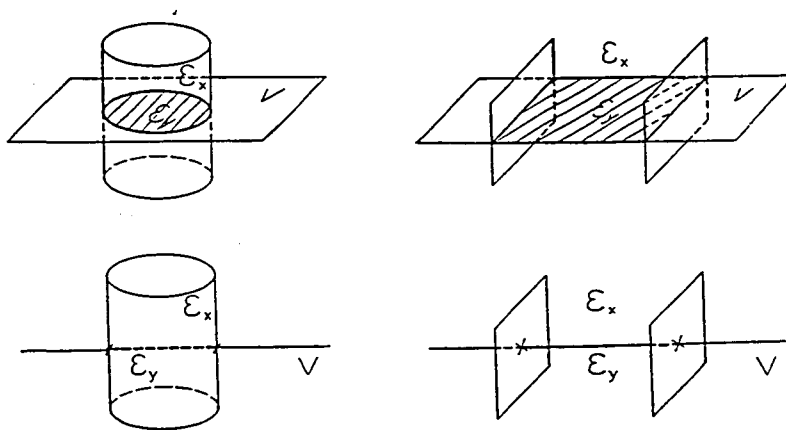


Figura 5.4: Projecció d'el·lipsoides cilíndrics ortogonals a la varietat de projecció

i aleshores la relació

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^r &\mapsto \text{Parts}(\mathbb{R}^n) \\ z &\mapsto \{y \mid z = -C(y - y_0)\} \end{aligned}$$

es converteix en l'extensió ortogonal

$$\begin{aligned} W &\mapsto \text{Parts}(\mathbb{R}^n) \\ t &\mapsto \{y \mid -C^d C y = t\} \end{aligned}$$

De forma anàloga es poden interpretar els processos de propagació directa i inversa. I amb la interpretació de projecció els diferents casos del teorema 5.2 corresponen als següents casos:

1. Projecció d'un elipsoide no cilíndric (figura 5.3)
2. Projecció d'un elipsoide cilíndric ortogonal a la varietat de projecció (figura 5.4)

En efecte, utilitzant la notació de la demostració del teorema 5.2, $\text{rang} \begin{pmatrix} A \\ E_x \end{pmatrix} = \text{rang}(A)$ o $\text{rang}(E_x)$ és equivalent a que $\langle \text{files d}'A \rangle$ sigui paral·lel a $\langle \text{columnes d}'M \rangle$ i per tant equivalent a que les direccions finites del cilindre siguin paral·leles a la varietat de projecció.

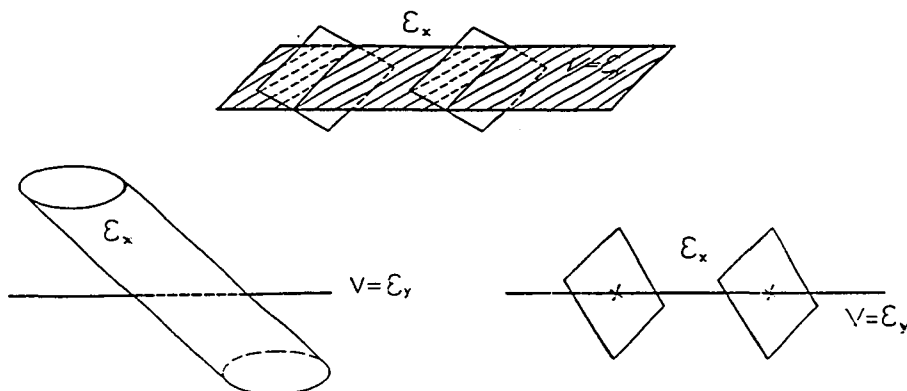


Figura 5.5: Projectió d'el·lipsoïdes cilíndrics sobre tota la varietat de projectió

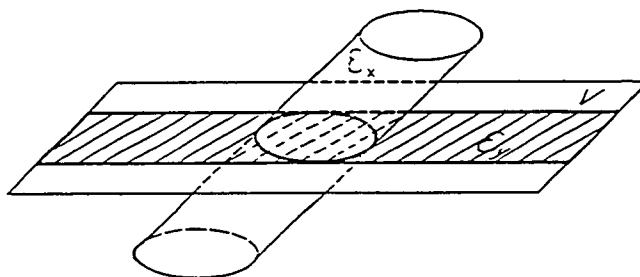


Figura 5.6: Projectió no ortogonal ni total d'el·lipsoïde cilíndric

3. Projectió d'un el·lipsoïde cilíndric tal que el subespai de les direccions finites de l'el·lipsoïde i la varietat de projectió tenen intersecció trivial. La imatge és tota la varietat. (figura 5.5).

En efecte, $\text{rang} \begin{pmatrix} \mathbf{A} \\ \mathbf{E}_x \end{pmatrix} = \text{rang}(\mathbf{A}) + \text{rang}(\mathbf{E}_x)$ és equivalent a $\langle \text{files d}'\mathbf{A} \rangle \cap \langle \text{columnes d}'\mathbf{M} \rangle = 0$

4. Projectió d'un el·lipsoïde cilíndric on la suma dels rangs de la intersecció del cilindre amb la varietat de projectió i de la intersecció del cilindre amb la varietat ortogonal és igual al rang de l'el·lipsoïde.

La interpretació es dedueix del fet que $\mathbf{A}^{d^t} \mathbf{E}_x \mathbf{A}^d$ és la matriu de $\mathcal{E}_x \cap V$ i $\mathbf{N}_A^t \mathbf{E}_x \mathbf{N}_A$ és la matriu de $\mathcal{E}_x \cap V^\perp$.

5. Projectió d'un el·lipsoïde cilíndric en el cas complementari al cas 4 (figura 5.6).

5.2.3 Càlcul d'estimacions per la linealització d'equacions

El procediment de propagació local d'informació descrit en l'apartat 5.2.1 necessita que la relació a través de la qual es propaga tingui equació vectorial lineal. Quan una relació té equació

$\mathbf{h}(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0) = \mathbf{0}$ no lineal, es considera una aproximació lineal per la fórmula de Taylor entorn d'unes estimacions prèvies \mathbf{x}_0 i \mathbf{y}_0 de \mathbf{x} i \mathbf{y} . Per a que aquesta linealització sigui raonablement aproximada cal que les estimacions \mathbf{x}_0 i \mathbf{y}_0 siguin properes als valors reals. En aquest apartat s'exposa com s'escullen les estimacions en cada pas del procés, de tal manera que queda garantida al màxim la seva proximitat als valors reals.

En els passos inicials d'un procés d'adquisició de dades és habitual la utilització d'una esfera molt gran, centrada en un punt a vegades arbitrari, per aproximar l'espai total de paràmetres i fusionar aquesta esfera amb les franges d'incertesa corresponents a les primeres observacions de l'element. En el nostre cas s'evita la utilització del punt arbitrari com a estimació inicial fusionant les regions d'incertesa de les primeres observacions amb l'operació de fusió complementària. Així es calcula l'el·lipsoide d'incertesa de forma exacta i per tant es pot agafar com a estimació inicial el centre de l'el·lipsoide resultant. D'aquesta forma es garanteix, tant com permeten les informacions disponibles, la bondat de les estimacions.

La proximitat de les estimacions als valors reals està també garantida quan es fa una propagació local d'un el·lipsoide. Això és clar en el cas que l'el·lipsoide resultant és no degenerat, ja que s'escull el centre com a estimació. En el cas que l'el·lipsoide imatge \mathcal{E}_y és un cilindre cal precisar la forma d'elecció del centre nominal. El cilindre no té un sol centre sinó tota una varietat de centres i qualsevol pot ser vàlid com a centre nominal si les equacions de totes les relacions són lineals. Ara bé, si hi ha equacions no lineals, el centre nominal, \mathbf{y}_0 , que s'utilitza posteriorment com a estimació, s'agafa tan pròxim com sigui possible a l'estimació prèvia, \mathbf{y}_p , que se suposa pròxima al valor real. El vector de paràmetres \mathbf{y}_0 així escullit és la projecció ortogonal de l'estimació prèvia \mathbf{y}_p sobre la varietat de centres de \mathcal{E}_y . La següent proposició dóna la fórmula per calcular-lo.

Proposició 5.1 *En les hipòtesis del teorema 5.1, donat $\mathbf{y}_p \in \mathbb{R}^n$, el vector projecció ortogonal de \mathbf{y}_p sobre la varietat d'equació $\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ és*

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_p + \mathbf{C}^d(-\mathbf{d} - \mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{C}\mathbf{y}_p).$$

Demostració:

La varietat ortogonal a la varietat V de l'equació que passa per \mathbf{y}_p és $V^\perp = \mathbf{y}_p + \langle \text{files de } \mathbf{C} \rangle$ i com que \mathbf{y}_0 ha de pertànyer a $V^\perp \implies \mathbf{y}_0 = \mathbf{y}_p + \mathbf{C}^t \boldsymbol{\lambda}$ per algun $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^r$. Com que \mathbf{y}_0 ha de ser també de V , $\mathbf{C}\mathbf{y}_0 = -\mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{d}$, i per tant $\mathbf{C}(\mathbf{y}_p + \mathbf{C}^t \boldsymbol{\lambda}) = -\mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{d}$, d'on $\boldsymbol{\lambda} = (\mathbf{C}\mathbf{C}^t)^{-1}(-\mathbf{A}\mathbf{x}_0 - \mathbf{d} - \mathbf{C}\mathbf{y}_p)$, que substituït en \mathbf{y}_0 dóna el resultat buscat ■

Per altra banda, les operacions de fusió i propagació local permeten millorar les estimacions usades en qualsevol linealització. El procediment de millora exposat és equivalent al filtre de Kalman iterat utilitzat en [Por88, Tar90] per a mètodes probabilístics d'estimació. En [Nei93] la millora de linealitzacions d'equacions s'aconsegueix fent canvis de referència local entre els elements relacionats.

En el cas d'una relació lineal, després de propagar la regió d'incertesa coneguda \mathcal{I}_x a la regió buscada \mathcal{I}_y , aquesta es fusiona amb la regió d'incertesa $\mathcal{I}_y^{\text{previ}}$ de la informació prèvia en y utilitzant els procediments de l'apartat 4.1. Si la relació no és lineal el procés pot ser el mateix,

algorisme *Propagació_Amb_Linealització_Iterada*

```

donades la regió  $\mathcal{I}_x$  de  $x$ , la regió  $\mathcal{I}_y^{\text{previ}}$  de  $y$  i la relació  $h(x, y) = 0$ 
escull una estimació  $x_0$  de  $\mathcal{I}_x$ 
 $\mathcal{I}_y^{\text{fus}} = \mathcal{I}_y^{\text{previ}}$ 
escull una estimació  $y$  de  $\mathcal{I}_y^{\text{fus}}$ 
fes
   $\mathcal{I}_y^{\text{fus}} = \mathcal{I}_y^{\text{fus ant}}$ 
  linealitzat  $h(x, y) = 0$  entorn de  $(x_0, y)$  obtenint  $Ax + Cy + d = 0$ 
   $\mathcal{I}_y^{\text{propag}} =$  propagació local de  $\mathcal{I}_x$  a través de  $Ax + Cy + d = 0$ 
   $\mathcal{I}_y^{\text{fus}} =$  fusió de  $\mathcal{I}_y^{\text{previ}}$  i  $\mathcal{I}_y^{\text{propag}}$ 
  escull una estimació  $y$  de  $\mathcal{I}_y^{\text{fus}}$ 
fins que  $\text{distància}(\mathcal{I}_y^{\text{fus}}, \mathcal{I}_y^{\text{fus ant}}) < \text{PETITA}$ 
resultat regió d'incertesa  $\mathcal{I}_y^{\text{fus}}$ 
fialg

```

Algorisme 5.1: *Propagació_Amb_Linealització_Iterada*

amb l'excepció que cal amb anterioritat linealitzar les equacions entorn d'unes estimacions prèvies x_0 i y_0 . Ara bé, aquestes estimacions, i com a conseqüència la linealització, es poden millorar amb un procés iteratiu. Cada pas del procés iteratiu consisteix en utilitzar l'estimació y_i obtinguda en el pas anterior per linealitzar de nou la relació, amb la nova linealització propagar de nou la regió \mathcal{I}_x i fusionar el resultat amb la regió inicial $\mathcal{I}_y^{\text{previ}}$. El procés està descrit amb tot rigor en l'algorisme 5.1, *Propagació_Amb_Linealització_Iterada*. Un bon criteri per aturar el procés pot ser quan les regions d'incertesa obtingudes en dos passos consecutius siguin molt semblants.

Cal observar que les estimacions intermitges y_i només s'utilitzen com a punt on linealitzar la relació i l'única estimació que s'utilitza per obtenir la incertesa final \mathcal{I}_y és l'última estimació y_p . Això fa que y_0 i y_i siguin independents en cada pas i per tant aquest procés és vàlid inclús amb un mètode de fusió que requereixi per entrades informacions independents.

5.3 Satisfacció de relacions geomètriques

En determinats camps de la Robòtica, com en el reconeixement i la generació de models d'objectes, cal comprovar la satisfacció o no de determinades relacions geomètriques per part dels elements observats. Quan la informació sobre aquests elements és incerta en comprovar si una equació es satisfà o no cal tenir en compte la incertesa, i per tant només es podrà assegurar una satisfacció incerta (no exacta) de les relacions.

Definició 5.2 (Satisfacció incerta) *Donats dos elements parametritzats per $x \in \mathbb{R}^n$ i $y \in \mathbb{R}^m$ amb regions d'incertesa respectives \mathcal{I}_x i \mathcal{I}_y i donada una equació vectorial $g(x, y) = 0$, direm que $g(x, y) = 0$ és satisfeta amb incertesa \mathcal{I}_g si $0 \in \mathcal{I}_g$, on \mathcal{I}_g és la regió d'incertesa imatge de $\mathcal{I}_{(x,y)}$ per l'aplicació $(x, y) \mapsto g(x, y)$.*

A partir dels conjunts d'incertesa \mathcal{I}_x i \mathcal{I}_y es calcula el conjunt d'incertesa $\mathcal{I}_{(x,y)}$ per mitjà de les fórmules de fusió complementària (apartat 4.3). El conjunt \mathcal{I}_g es calcula a partir de $\mathcal{I}_{(x,y)}$ per les fórmules de propagació local de regions d'incertesa (teoremes 5.1 i 5.2).

Si l'equació té més de dos arguments la definició i procediment de càlcul corresponent es fan anàlogament.

En els processos de reconeixement d'objectes i generació de models s'efectuen moltes comprovacions de relacions la resposta de les quals és negativa. Això és computacionalment costós. Ara bé, en el cas de representar les incerteses per regions el·lipsoidals es pot establir un test previ (de càlcul més ràpid) al test de satisfacció amb incertesa de restriccions que permetrà detectar de forma eficient els casos de clara no satisfacció. La següent proposició permet establir aquest test, adaptat del que es proposa en [OHF92].

Proposició 5.2 Donat un el·lipsoide \mathcal{E} de matriu invers \mathbf{B} i centre \mathbf{x}_0 i donat $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$,

$$\text{si } \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\text{traça}(\mathbf{B})} > 1 \implies \mathbf{x} \notin \mathcal{E}.$$

Demostració:

Per ser \mathbf{B} simètrica i definida positiva, segons el teorema de Rayleigh-Ritz

$$\forall \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \quad \lambda_{\text{mín}} \leq \frac{\mathbf{z}^t \mathbf{B} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^t \mathbf{z}} \leq \lambda_{\text{màx}},$$

on $\lambda_{\text{mín}}$ i $\lambda_{\text{màx}}$ són els valors propis mínim i màxim de \mathbf{B} .

Com que $\lambda_{\text{màx}} \leq \text{traça}(\mathbf{B})$, s'obté que $\forall \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \quad \frac{\mathbf{z}^t \mathbf{B} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^t \mathbf{z}} \leq \text{traça}(\mathbf{B})$

Fent $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 = \mathbf{M} \mathbf{z}$, on \mathbf{M} és la matriu ortogonal tal que $\mathbf{B} = \mathbf{M}^t \mathbf{M}$, s'obté

$$\text{traça}(\mathbf{B}) \geq \frac{\mathbf{z}^t \mathbf{B} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^t \mathbf{z}} = \frac{\mathbf{z}^t \mathbf{M}^t \mathbf{M} \mathbf{z}}{\mathbf{z}^t \mathbf{z}} = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t \mathbf{M} \mathbf{M}^t (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)} = \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}.$$

I, per tant, si

$$\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\text{traça}(\mathbf{B})} > 1 \implies (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^t \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \geq 1,$$

és a dir, $\mathbf{x} \notin \mathcal{E}$. ■

Segons la definició 5.2, la comprovació de la satisfacció d'una determinada relació geomètrica es converteix en una comprovació del tipus $\mathbf{x} \in \mathcal{E}$, essent \mathcal{E} un el·lipsoide d'incertesa. Per tant, la condició introduïda en la proposició serà d'utilitat per a rebutjar de manera poc costosa moltes de les parelles d'elements que no satisfan les restriccions donades.

5.4 Propietats

En aquest apartat es resumeixen les propietats de l'operació de propagació local d'informació amb incertesa el·lipsoidal a través de relacions geomètriques, així com altres operacions sobre aquestes relacions.

Propagació. Permet obtenir informació sobre un element a partir d'informació sobre un altre element i una relació entre ells.

Generalitat. Es poden propagar tant informacions completes com parcials d'un element, i tant si la informació obtinguda de l'altre element és completa com si és parcial.

Relacions implícites. Es pot propagar a través de relacions expressades de forma explícita (directa o inversa) i implícita.

Càlcul. L'operació de propagació es realitza a través de càlculs matricials.

Propagació exacta Si les relacions són lineals, l'operació de propagació calcula de forma exacta l'el·lipse imatge i no cal fer envoltant el·lipsoidal del resultat.

Linealitat. Es pot propagar només a través de relacions lineals.

Satisfacció de relacions. Es pot comprovar la satisfacció d'una relació amb incertesa a partir de l'operació propagació.

Capítol 6

Graf de relacions geomètriques. Propagació global

Les relacions geomètriques entre els diferents objectes de l'entorn han estat tractades de forma individual en el capítol 5. En aquest capítol es tractarà el conjunt de relacions geomètriques de l'entorn globalment. De fet, aquest capítol exposa l'estructura general del sistema de tractament d'incertesa, basat en la propagació global d'informació [ST93]. Aquesta propagació global es basa alhora en les eines de fusió (capítol 4) i propagació local (apartat 5.2).

6.1 Definició del graf

Per a construir un model complet de l'entorn es defineix un graf, en el qual els nodes corresponen als elements geomètrics de l'escena i els arcs corresponen a les relacions entre cada dos elements.

Definició 6.1 (Graf de relacions geomètriques) *Donat un entorn de treball, s'anomena graf de relacions geomètriques al graf (N, A) , on el conjunt de nodes N és el conjunt d'elements geomètrics de l'entorn i el conjunt d'arcs A és el conjunt de parells de nodes (N_1, N_2) entre els quals hi hagi alguna relació geomètrica d'equació coneguda (figura 6.1).*

Tal com ja s'ha descrit en els capítols anteriors, cada element de l'entorn i per tant cada node del graf té associat un el·lipsoide d'incertesa i cada relació geomètrica, i per tant cada arc del graf, té associada l'equació d'aquesta relació.

En la literatura s'utilitzen altres grafs de relacions geomètriques [Dur86, Dur89, SSC88, SL92, TL92, Tar90, Tar92], on els arcs no representen les relacions conegudes, com en aquesta tesi, sinó les posicions relatives incertes entre els diferents elements. Per altra banda la forma de propagar en el graf també és diferent, ja que en aquest treball es fa una propagació a través de camins selectius en el graf, mentre que en els altres casos es fa mitjançant matrius globals.

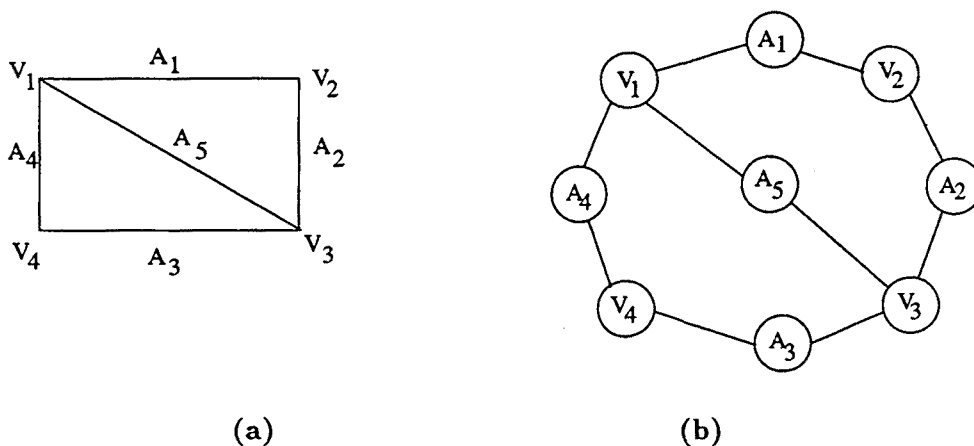


Figura 6.1: (a) Un rectangle amb una diagonal i (b) el graf corresponent

6.2 Propagació global en el graf

En l'apartat 5.2 s'ha tractat la propagació local d'informació a través d'un arc del graf; en aquest apartat es tractarà la propagació global d'una informació a tots els nodes del graf. D'aquesta forma s'aprofita al màxim cada informació sensorial.

Cada informació sensorial que s'obté en un node es propaga a través dels arcs del graf a tots els altres nodes. Aquest procés es realitza de forma recursiva, de manera que en cada node on es rep una nova informació (ja sigui provinent directament d'un sensor o propagada des d'un node veí), aquesta es fusiona amb la informació prèvia i posteriorment es propaga als nodes veïns.

Abans de propagar la informació rebuda en un node, aquesta es fusiona amb la informació prèvia, ja que així la informació propagada és més fiable. Cal observar que d'aquesta forma la informació propagada és possiblement dependent amb anteriors o futures informacions propagades des del mateix node, i per tant és necessari que l'operació de fusió emprada no precisi independència entre les dades, tal com ho satisfà la fusió emprada i descrita en el capítol 4.

Per a propagar la informació des d'un node a un altre, cal passar per tots els camins possibles de l'un a l'altre, perquè la mateixa informació propagada a través dels arcs d'un camí o d'un altre pot donar una informació resultant diferent. Així doncs, cal propagar des del node inicial, on arriba la informació des del sensor, a tots els altres nodes i a través de tots els camins possibles en el graf. Però aquests camins no han de tenir bucles tancats, perquè al fer un bucle la informació retorna al node del qual ha partit i la informació provinent d'un node passant per altres nodes quan torna a aquest no dona informació nova (figura 6.2).

En aquest procés una mateixa regió al propagar-se des d'un node N_1 a un node N_2 genera diverses regions d'incertesa en aquest segon node (una per cada camí de N_1 a N_2) i totes aquestes regions es fusionen en el node N_2 junt amb la regió anterior (figura 6.3). Com que les diferents informacions en el node N_2 són possiblement dependents, ja que provenen d'una mateixa observació, cal que l'operació de fusió emprada no precisi la hipòtesi d'independència entre les dades a fusionar, tal com succeeix en el cas de l'operació proposada (capítol 4).

La propagació a través d'un camí finalitza per algun dels següents motius: quan s'arriba a

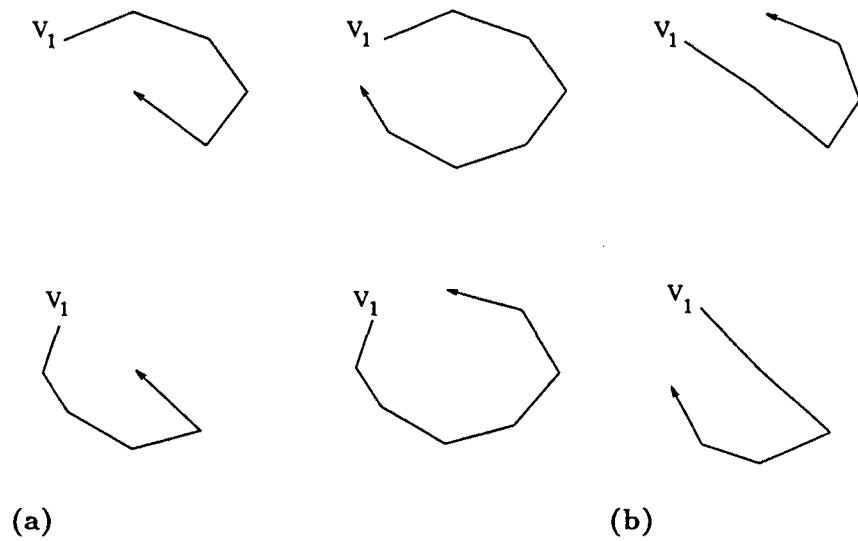


Figura 6.2: (b) Camins de propagació corresponents al graf (a) amb inici en V_1

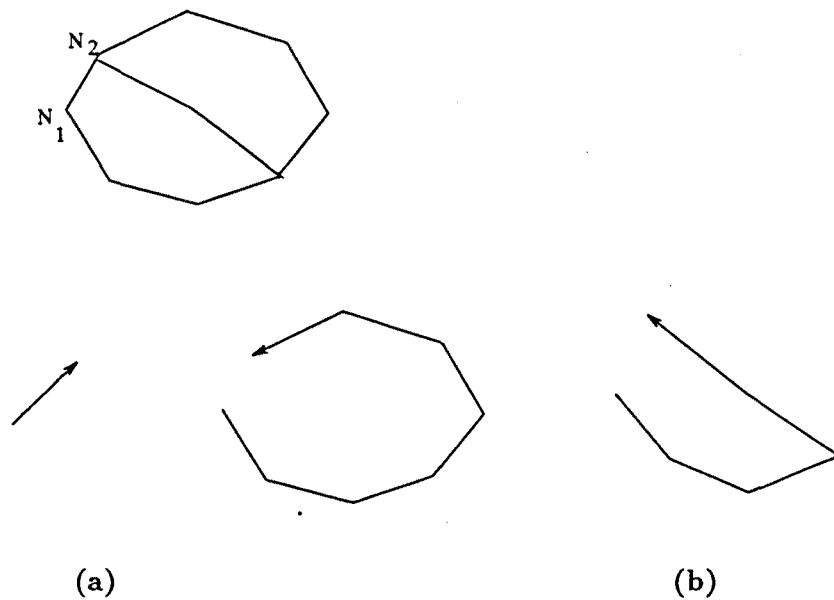


Figura 6.3: (b) Camins de propagació del node N_1 al node N_2 en el graf (a)

un node terminal en el graf, quan la informació que arriba a un node no millora la informació prèvia (apartat 4.2.1), quan la informació que arriba a un node és nul·la (de fet un cas particular de l'anterior) o bé quan la informació que arriba a un node és massa petita (volum d'incertesa massa gran), perquè aleshores l'esforç de propagació no val la pena pel poc profit que se'n pot treure. Per altra banda, quan la informació que arriba a un node és incompatible amb la informació prèvia cal aturar la propagació per tots els camins i donar un avís d'incompatibilitat.

L'algorisme 6.1, *Propagació_Global*, implementa el procés de propagació global descrit. Aquest és un algorisme recursiu on, donada una nova informació d'un node amb la seva regió d'incertesa, propaga aquesta informació per tots els altres nodes del graf, actualitzant en cada un les corresponents regions d'incertesa. Per implementar els camins de propagació s'associa a cada arc una variable booleana, anomenada *visitat*, que indica si la informació actual ha estat ja propagada o no a través de l'arc. Així, els arcs marcats en un determinat nivell de recursivitat es mantenen com a marcats en els nivells successius, la qual cosa fa que un mateix camí no passi dos cops pel mateix arc; per altra banda, al desmarcar-los abans de tornar al nivell recursiu anterior permet que altres camins puguin utilitzar aquests arcs. A més, els arcs d'arribada a un node es marquen com a visitats per impedir els bucles tancats. Per a que cada arc del graf permeti la propagació d'informació en els dos sentits, en l'algorisme se suposa que cada arc ha estat substituït per dos arcs, un en cada sentit. També se suposa que tots els arcs estan marcats com a no visitats a l'inici de l'algorisme. L'arc fictici creat a l'inici de l'algorisme permet incloure la propagació local des del primer node com un pas més de la recursivitat.

L'algorisme *Propagació_Global* per a propagació d'una nova informació en el graf és vàlida per a qualsevol model d'incertesa, sempre que es disposi dels subalgorismes *Propagació_Local* i *Fusió* i que aquest últim no necessiti independència entre les dades.

6.3 Càlcul d'estimacions finals

Un cop el graf ha estat actualitzat amb totes les informacions disponibles, si no s'ha trobat cap incompatibilitat, l'el·lipsoide d'incertesa de cada node dona la millor fita el·lipsoidal pel corresponent element. A més, els el·lipsoïdes d'incertesa dels nodes satisfan les equacions dels arcs. El conjunt d'aquests el·lipsoïdes forma la informació de sortida o resultant del sistema, perquè donen la informació buscada: les possibles posicions dels elements de l'escena amb la millor precisió possible.

Ara bé, en algunes aplicacions cal utilitzar una estimació única o nominal de cada node. Com que en el model d'incertesa fitada no hi ha definida cap distribució de probabilitat dins de les regions d'incertesa, qualsevol punt d'aquesta regió és igualment vàlid com a estimació. En particular, si no hi ha cap criteri addicional, és habitual triar com a estimació el centre de cada el·lipsoide d'incertesa. Aquests centres no sempre satisfaran les equacions dels arcs de forma exacta, ja que una informació arribada a un node per un arc pot no satisfer les equacions dels altres arcs que arriben al node. No obstant això, si una informació d'un node dista molt de satisfer l'equació d'un arc del node, vol dir que no s'ha arribat a la fase final, perquè la informació s'ha de propagar per l'arc, obtenint una nova informació en el node veí. Així doncs, els centres sí satisfan de forma aproximada totes les equacions, un cop actualitzades totes les informacions disponibles.

```

algorisme Propagació_Global
  donats el node node i la regió d'incertesa  $\mathcal{I}_{node}^{nou}$ 
  crea arc fictici amb sortida i arribada a node i amb equació d'igualtat
  Propaga_A_Través(fictici)
fialg

```

```

subalgorisme Propaga_A_Través (arc)
  nodei = node inicial (arc)
  nodef = node final (arc)
   $\mathcal{I}_{nodef}^{nou}$  = Propagació_Local ( $\mathcal{I}_{nodei}$ ) per les relacions d'arc
  si TestVolum ( $\mathcal{I}_{nodef}^{nou}$ ) = MASSA GRAN aleshores torna fisi
  si TestIncompatibilitat ( $\mathcal{I}_{nodef}^{nou}$ ,  $\mathcal{I}_{nodef}$ ) = SI aleshores fora fisi
  si TestMillora ( $\mathcal{I}_{nodef}^{nou}$ ,  $\mathcal{I}_{nodef}$ ) = NO aleshores torna fisi
   $\mathcal{I}_{nodef}$  = Fusió ( $\mathcal{I}_{nodef}$ ,  $\mathcal{I}_{nodef}^{nou}$ )
  per cada arc arri d'arribada a nodef
    visitat(arri) = SI
  fiper
  per cada arc sort de sortida de nodef
    si visitat(sort) = NO aleshores Propaga_A_Través (sort) fisi
  fiper
  per cada arc arri d'arribada a nodef
    visitat(arri) = NO
  fiper
fisubalg

```

Algorisme 6.1: Propagació_Global

De totes maneres, en alguns casos serà desitjable que les estimacions escollides satisfacin de forma exacta les relacions dels arcs. Aleshores una forma d'escollir aquestes estimacions és triar aquells punts dels el·lipsoides que satisfacin les equacions i que siguin més propers als centres. És a dir, calcular globalment el conjunt de vectors de paràmetres que, pertanyent a les regions d'incertesa corresponents, satisfan les equacions dels arcs i minimitzen la suma de distàncies (definides per cada el·lipsoide) al centre. Més formalment, escollir com a estimacions els vectors $\hat{\mathbf{x}}_1, \dots, \hat{\mathbf{x}}_k$ dels nodes $1, \dots, k$ tals que:

$$\hat{\mathbf{x}}_i \in \mathcal{E}_i, \quad \mathbf{h}_{ij}(\hat{\mathbf{x}}_i, \hat{\mathbf{x}}_j) = \mathbf{0} \quad \text{i minimitzen} \quad \sum_{i=1}^k (\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_i)^t \mathbf{E}_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{c}_i), \quad (6.1)$$

essent \mathcal{E}_i l'el·lipsoide del node i , amb centre \mathbf{c}_i i matriu \mathbf{E}_i , i $\mathbf{h}_{ij}(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_j) = \mathbf{0}$ l'equació de l'arc (i, j) per $i, j = 1, \dots, k$.

El fet de minimitzar les distàncies definides pels el·lipsoides fa que es potenciïn les solucions del sistema que pertanyen als el·lipsoides. D'aquesta forma, es garanteix que les solucions $\hat{\mathbf{x}}_1, \dots, \hat{\mathbf{x}}_k$ de (6.1) pertanyen als respectius el·lipsoide $\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k$, a no ser que no existeixin punts en els el·lipsoides satisfent globalment les equacions.

El càlcul de les estimacions satisfent les equacions de forma exacta és computacional costós. Per tant, en aquells casos on la satisfacció aproximada d'equacions és suficient, s'evita aquest càlcul i s'agafen els centres dels el·lipsoides com a estimacions.

Capítol 7

Exemple d'aplicació: Imposició de condicions de consistència a projeccions bidimensionals de políedres

El sistema de tractament d'incertesa desenvolupat en els capítols anteriors és general i per tant en principi aplicable a qualsevol tasca del robot o sistema robòtic. En aquest sentit s'han desenvolupat aplicacions d'altres sistemes de tractament d'incertesa en diversos camps com: localització i reconeixement d'objectes [ElI91, Nei93, Tar90, Tar92, OHF92], construcció de models [Por88], planificació geomètrica de trajectòries [Ala93, GMR92], ensamblatge amb incertesa [DP93], interpretació d'objectes a partir de dibuixos bidimensionals [PS92], etc. El sistema de tractament d'informació incerta desenvolupat sembla adequat per aquestes tasques, ja que en elles es realitzen moltes operacions geomètriques, com: restricció de la posició d'un objecte a partir de la posició d'un o diversos dels seus elements o parts, combinació de restriccions per deduir la posició de l'objecte, comparació de mesures entre elements observats i elements del model, combinació d'informacions d'un mateix element des de diversos punts de vista, comprovació de la satisfacció de determinades relacions entre objectes o elements, etc.

Malgrat que no és objectiu primordial d'aquesta tesi l'estudi concret de les aplicacions, en aquest capítol se'n desenvolupa un exemple: la imposició de condicions de consistència a dibuixos bidimensionals per a ser projeccions d'objectes tridimensionals [ST96]. En aquest exemple es pot veure com el graf introduït és una estructura còmode i útil per treballar amb restriccions geomètriques, com són les citades condicions de consistència, alhora que es mostra com les eines de fusió i propagació poden ser utilitzades com a operacions elementals de molt diversos procediments.

L'aplicació presentada en aquest capítol ha estat implementada en llenguatge C.

7.1 Definició del problema

Aquest capítol tracta el problema de la consistència d'un dibuix poligonal donat, amb incertesa en la posició dels vèrtexs, quan s'interpreta com la projecció d'un políedre. Si un dibuix poligonal correspon a la projecció d'un políedre tridimensional, ha de satisfer una sèrie de condicions geomètriques. En aquest capítol es presenta un algorisme que comprova la satisfacció d'aquestes condicions i que està basat en el sistema de tractament d'incertesa descrit en els capítols anteriors.

Un dels treballs més importants en el camp de la interpretació de dibuixos rectilinis és [Sug82, Sug86], on es demostra que el problema de la interpretació de dibuixos rectilinis és equivalent a la resolució d'un problema de Programació Lineal i també es proposa un algorisme de correcció d'errors basat en les mateixes tècniques. A més, [PS92] introdueix la incertesa en aquest enfoc tractant els errors com a noves variables en les equacions de la programació lineal. Ara bé, en aquesta tesi no s'aborda la interpretació tridimensional d'un dibuix, sinó només l'estudi de la consistència del dibuix per a posteriorment ser interpretat com a políedre.

Els dibuixos considerats estan formats per un conjunt de vèrtexs que tenen una certa incertesa en la seva posició i que estan connectats per segments rectilinis (arestes). Inicialment no es disposa de cap informació sobre la posició de les arestes, aquesta informació es deduirà de la informació dels vèrtexos usant les tècniques de propagació d'incertesa. Per altra banda, per simplicitat, s'han considerat només dibuixos amb arestes ocultes no representades, encara que l'extensió al cas d'arestes ocultes representades no presenta problemes. Les cares del possible políedre s'introdueixen per a tenir informació topològica, però no s'utilitza cap representació de la seva posició. De fet, en tot moment es treballa només en el pla del dibuix, ja que no es planteja la interpretació polièdrica i per tant no es consideren les posicions en l'espai tridimensional, ni de cares, ni de vèrtexs ni d'arestes. La deducció, a partir del dibuix, de les arestes i vèrtexos que corresponen a les cares no s'aborda en aquesta tesi i es pot fer a partir del mètode d'etiquetat d'arestes de [Sug86].

En l'algorisme proposat es comproven, com a exemples, dues condicions de consistència que un dibuix ha de satisfer per a ser la projecció d'un políedre. Si el dibuix donat no satisfà les condicions es modifiquen les posicions dels vèrtexos lleugerament, dins de les fites d'error, per tal que les satisfaci. Quan les modificacions no són possibles, vol dir que el dibuix és inconsistent.

Les dues condicions imposades no garanteixen la consistència completa del dibuix, ja que són condicions necessàries, però no suficients per a ser la projecció d'un políedre. Aquestes dues condicions han estat triades a efectes il·lustratius i utilitzant les mateixes tècniques es poden imposar altres condicions de consistència. Malgrat tot, les dues condicions utilitzades permeten detectar molts casos d'inconsistències.

Per al tractament de la incertesa s'utilitza el model de fites el·lipsoidals descrit en el capítol 3. El graf de relacions geomètriques (capítol 6) entre els elements del dibuix, vèrtexs i arestes, permet la manipulació de la informació incerta alhora que manté la consistència. Per això es fa propagació global (capítol 6) utilitzant la fusió d'informació competitiva (capítol 4) i la propagació a través de relacions geomètriques (capítol 5). Les condicions de consistència es defineixen de forma natural com a subgrafs, de tal forma que la comprovació i imposició de les condicions es redueix a una propagació global en el graf.

7.2 Graf de relacions geomètriques d'un dibuix incert

L'estructura de dades que s'utilitza per a la imposició de condicions de consistència a un dibuix incert és el graf de relacions geomètriques. Els nodes del graf són, en principi, els elements del dibuix susceptibles de tenir informació de posició, és a dir, els vèrtexs i les arestes. Els arcs del graf representen relacions, generalment d'incidència, entre les nodes. Cada node vèrtex i cada node aresta tenen associats una estimació de posició i una regió d'incertesa el·lipsoidal. Cada arc té associada unes equacions que corresponen a la relació geomètrica que representa.

Les cares del possible políedre del dibuix s'inclouen en el graf com a nodes i es lliguen per arcs als seus vèrtexs i arestes per a disposar de la informació topològica que proporcionen. Ara bé, com que són nodes sense informació geomètrica de posició, no tenen regió d'incertesa associada, com tampoc els arcs que els lliguen amb altres nodes no tenen equacions associades.

En la figura 6.1 es veu el graf de relacions geomètriques d'un dibuix molt simple: un quadrilàter amb una diagonal. Té 4 nodes vèrtex, 5 nodes aresta i els corresponents arcs d'incidència ca vèrtex-aresta, a més de 2 nodes cara i els arcs d'incidència vèrtex-cara i aresta-cara.

La representació de la posició dels elements geomètrics, en aquest cas vèrtexos i arestes, es fa amb una representació paramètrica (capítol 2). La representació paramètrica dels vèrtexos és simplement el vector de les seves coordenades (x, y) en el pla del dibuix. La posició d'una aresta ve donada per la posició de la seva recta de suport. S'ha triat com a representació de les rectes del pla la parametrització Γ_2 introduïda en el capítol 2 i així la representació paramètrica d'una aresta és un parell (θ, r) tal que la recta suport de l'aresta té equació

$$x \sin \theta + y \cos \theta = r, \quad (7.1)$$

on $-\frac{\pi}{2} < \theta \leq \frac{\pi}{2}$. A més, r és la distància amb signe des de l'origen a la recta i θ és l'angle entre la recta i l'eix x . Aquesta representació per les arestes s'ha triat per les seves propietats de regularitat i estabilitat (apartat 2.2). La primera propietat assegura que no hi ha punts singulars en la parametrització i l'altra que el volum de les regions paramètriques no varien al fer moviments rígids en l'espai dels elements. Per altra banda, la parametrització dels vèrtexos per les seves coordenades (x, y) és clarament regular i estable.

La incertesa associada a les posicions dels vèrtexos i les arestes ve donada per regions el·lipticals en els respectius espais de paràmetres, \mathbb{R}^2 en ambdós casos. Com a conseqüència de l'estabilitat, el volum de les regions d'incertesa (apartat 3.4) dona una mesura de la incertesa real que és independent de la posició del vèrtex o de l'aresta. Per tant, els volums d'incertesa d'un mateix tipus d'element es poden comparar entre sí i es poden utilitzar valors llinars per a determinar volums molt grans o molt petits.

Es consideren dos tipus diferents d'arcs, els arcs d'incidència i els arcs d'igualtat, a més dels arcs purament topològics que no tenen equacions associades. Els arcs d'incidència lliguen un node vèrtex i un node aresta i representen una relació del tipus *el vèrtex V pertany a la recta de suport de l'aresta A* . Aleshores, l'equació de l'arc és (7.1), on (x, y) i (θ, r) són els vectors de paràmetres del vèrtex V i l'aresta A respectivament. Els arcs d'igualtat representen relacions del tipus *les rectes de suport de les arestes A_1 i A_2 són la mateixa* i l'equació vectorial associada

és

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ r_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_2 \\ r_2 \end{pmatrix}, \quad (7.2)$$

on (θ_i, r_i) , $i = 1, 2$, són els vectors de paràmetres de les dues arestes.

L'algorisme de propagació local de l'apartat 5.2 només és vàlid per equacions lineals, ja que està basat en operacions matricials lineals. Ara bé, els arcs d'incidència entre un node vèrtex i un node aresta tenen equacions no lineals i per tant cal utilitzar una aproximació lineal. L'equació (7.1) linealitzada en els paràmetres (x_0, y_0) i (θ_0, r_0) dona

$$x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0 + \theta(x_0 \cos \theta_0 - y_0 \sin \theta_0) - r - \theta_0(x_0 \cos \theta_0 - y_0 \sin \theta_0) = 0. \quad (7.3)$$

És molt important que les estimacions (x_0, y_0) i (θ_0, r_0) utilitzades per linealitzar siguin properes als valors reals. Per a això, les estimacions utilitzades en cada pas de propagació local són els centres de les el·lipses d'incertesa.

7.3 Propagació i fusió en els grafs de dibuixos incerts

A l'inici del procés cada vèrtex té associada una regió d'incertesa el·líptica, usualment un cercle de tolerància. En canvi, inicialment, les arestes no tenen informació de posició, és a dir, la seva regió d'incertesa és tot l'espai de paràmetres \mathbb{R}^2 . Així doncs, les regions de les arestes s'han de deduir de les regions dels vèrtexos utilitzant la propagació local a través dels arcs d'incidència.

Abans d'estudiar les característiques específiques de la propagació en aquest tipus de graf, és important ressaltar la independència de les equacions dels arcs confluents en un node. La propietat geomètrica que diu que dos punts qualsevols, V_1 i V_2 , determinen una recta A (figura 7.1a), es tradueix en el graf en la independència de les equacions dels arcs d'incidència V_1-A i V_2-A (figura 7.1b). En efecte, les equacions

$$x \sin \theta_0 + y \cos \theta_0 + \theta(x_i \cos \theta_0 - y_i \sin \theta_0) - r - \theta_0(x_i \cos \theta_0 - y_i \sin \theta_0) = 0 \quad \text{per } i = 1, 2,$$

essent (x_i, y_i) les estimacions en V_i i (θ_0, r_0) l'estimació en A , són independents en (θ, r) si

$$\det \begin{pmatrix} x_1 \cos \theta_0 - y_1 \sin \theta_0 & -1 \\ x_2 \cos \theta_0 - y_2 \sin \theta_0 & -1 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{és a dir, si } \theta_0 \neq \arctan \frac{x_1 - x_2}{y_1 - y_2}.$$

I, com que $\theta_0 = \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$, la independència és equivalent a $(x_1, y_1) \neq (x_2, y_2)$, cosa que està garantida a no ser que els dos vèrtexs tinguessin la mateixa estimació. D'una forma similar, donat un vèrtex V i dues arestes A_1 i A_2 que hi concorren, les equacions dels arcs d'incidència $V-A_1$ i $V-A_2$

$$x \sin \theta_i + y \cos \theta_i + \theta(x_0 \cos \theta_i - y_0 \sin \theta_i) - r - \theta_i(x_0 \cos \theta_i - y_0 \sin \theta_i) = 0 \quad \text{per } i = 1, 2,$$

essent (x_0, y_0) l'estimació en V i (θ_i, r_i) les estimacions en A_i , són independents en (x, y) si

$$\det \begin{pmatrix} \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \neq 0, \quad \text{és a dir, si } \tan \theta_1 \neq \tan \theta_2,$$

és a dir, si A_1 i A_2 no són paral·leles. Això reflecteix la propietat que un punt del pla està determinat per dues arestes qualsevols que hi passin.

La incertesa de les arestes en el pas inicial s'obté com s'explica seguidament. Donada una aresta A amb dos vèrtexos V_1 i V_2 , la regió d'incertesa el·líptica \mathcal{E}_{V_1} de V_1 es propaga a través

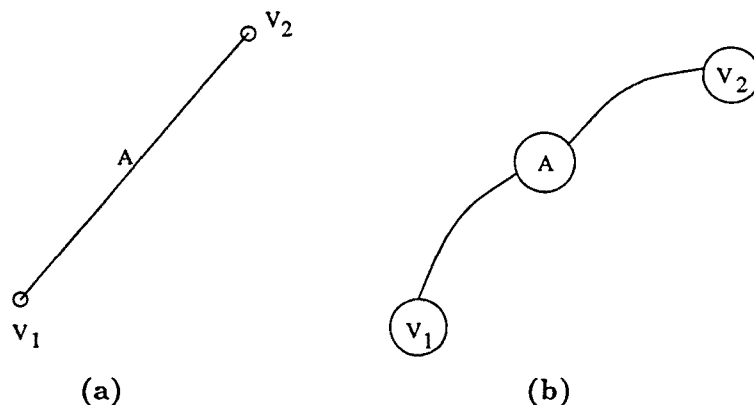


Figura 7.1: (a) Una aresta i els seus vèrtexs i (b) el graf corresponent

de l'equació d'incidència fins a l'espai de paràmetres de l'aresta (propagació local de l'apartat 5.2). Com que l'equació d'incidència té rang 1, només dona informació en una direcció en l'espai de paràmetres (θ, r) i per tant la regió d'incertesa resultant és una franja (regió el·líptica degenerada). Anàlogament, des del vèrtex V_2 s'obté una altra franja d'incertesa en l'espai de paràmetres de l'aresta. Les dues equacions d'incidència són independents i per tant les franges no són paral·leles, és a dir, donen informacions complementàries en l'espai de paràmetres de l'aresta i per tant es fusionen via la rutina de fusió complementària (apartat 4.3), obtenint una el·lipse no degenerada, que serà la regió d'incertesa de l'aresta. El fet que les dues franges siguin complementàries fa que no calgui aproximar la incertesa prèvia de l'aresta (incertesa total) amb un cercle molt gran, la qual cosa significaria una fusió aproximada, sinó que es fa una fusió d'informacions complementàries, que és una fusió exacta. La figura 7.2a il·lustra el procés descrit.

La incertesa de l'aresta obtinguda a partir dels vèrtexs està representada en el pla del dibuix en la figura 7.2b. Es pot observar que en la regió d'incertesa de l'aresta hi ha algunes rectes que tallen l'el·lipse d'incertesa d'un vèrtex, però no la de l'altre. Aquestes rectes corresponen als vectors de paràmetres de l'el·lipse fusió resultant que pertanyen a una franja, però no a l'altra (vegeu la figura 4.1). El volum de la regió d'incertesa de l'aresta depèn dels volums d'incertesa dels vèrtexs veïns i de la distància entre ells, però no de la posició dels vèrtexos, gràcies a la propietat d'estabilitat.

Per altra banda, la independència de les equacions d'incidència en un node aresta fa que de la informació d'un vèrtex no es pugui deduir cap informació de la posició de l'altre. En efecte, si la informació provinent del vèrtex V_1 es propaga a l'aresta veïna A , s'obté una franja; la franja després es propaga a un altre node veí, el vèrtex V_2 , obtenint una el·lipse totalment degenerada, és a dir, tot el pla de paràmetres. Per tant, en el vèrtex V_2 no s'obté cap informació i el camí de propagació moren en aquest node. Això significa que la propagació global des d'un vèrtex només arriba als seus nodes veïns tipus aresta, si en el graf només hi ha arcs d'incidència, com és el cas en la propagació inicial.

Com s'explicarà tot seguit, després d'afegir les restriccions de consistència, la propagació global no serà tant limitada, perquè s'hauran afegit altres nodes i arcs al graf.

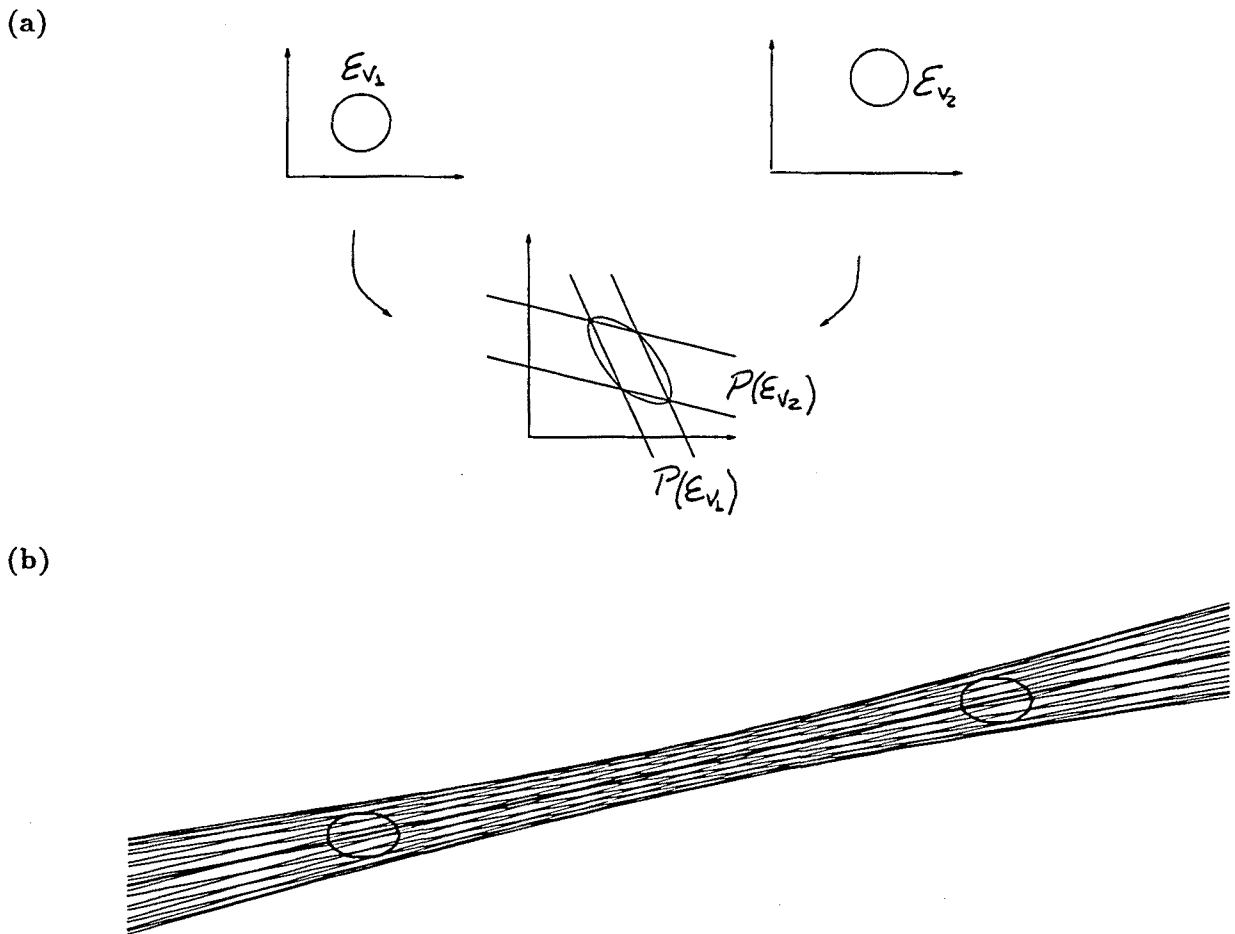


Figura 7.2: (a) Propagació local de la incertesa dels vèrtexs, \mathcal{E}_{V_1} i \mathcal{E}_{V_2} , a l'espai de paràmetres de l'aresta i fusió de les franges $\mathcal{P}(\mathcal{E}_{V_1})$ i $\mathcal{P}(\mathcal{E}_{V_2})$ obtingudes i (b) la incertesa de l'aresta obtinguda en el pla del dibuix.

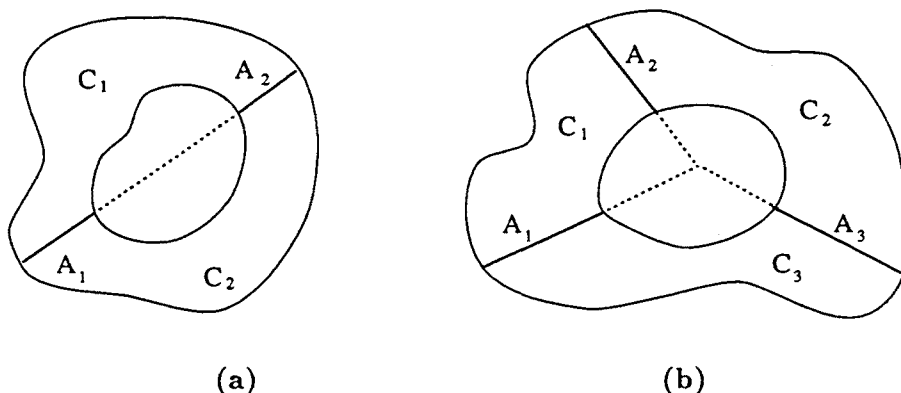


Figura 7.3: (a) Condició d'arestes alineades i (b) condició d'arestes concurrents

7.4 Condicions de consistència

Un dibuix bidimensional poligonal s'anomenarà *consistent* si és la projecció d'un políedre tridimensional. Hi ha algunes condicions o restriccions que un dibuix poligonal ha de satisfer per ser consistent. En aquest treball s'utilitzen dos tipus de restriccions de consistència: la *condició d'arestes alineades* i la *condició d'arestes concurrents* [Sug86]. Són condicions necessàries per la consistència, però no suficients; és a dir, un dibuix que no les satisfaci no és projecció d'un políedre (és inconsistent), però un dibuix que les satisfaci no té garantida la consistència. Utilitzant les mateixes tècniques es poden imposar altres restriccions de consistència al dibuix.

Quan sigui possible les inconsistències dels valors nominals de les posicions dels vèrtexos i les arestes es corregiran amb canvis en la posició dins de les seves regions d'incertesa. En aquest apartat també es presenta el procediment de correcció d'inconsistències.

La condició d'*arestes alineades* estableix que dues arestes que comparteixen les seves dues cares han de tenir la mateixa recta de suport (figura 7.3a). La condició d'*arestes concurrents* estableix que tres arestes tals que comparteixen una cara dues a dues, han de tenir les tres rectes de suport interseccant en un sol punt (figura 7.3b).

Un dibuix amb cares i arestes en situació d'haver-los d'imposar alguna de les condicions de consistència es pot dir que és un dibuix sensible a la posició dels seus vèrtexos; perquè si estan en posició general no es satisfà la condició, sinó que cal una posició particular. Hi ha dibuixos que no són sensibles a la posició dels vèrtexos, és a dir, que qualsevol posició (dins d'uns determinats límits) dona un dibuix consistent. Aquests últims són els dibuixos on les cares i arestes no satisfan les hipòtesis de cap condició de consistència.

En l'algorisme que es proposa, per imposar la satisfacció de les restriccions en ambdós casos cal només afegir nous nodes o arcs en el graf de relacions geomètriques. Això transforma el problema d'imposar les condicions en un problema de propagació global en el graf.

Per imposar la condició d'arestes alineades en primer lloc cal detectar tots els parells d'arestes que comparteixen les dues cares. Aquests parells corresponen als cicles del graf del tipus (A_1, C_1, A_2, C_2) , essent A_i arestes i C_j cares (figura 7.4a). N'hi ha prou amb afegir un nou arc entre els nodes A_1 i A_2 amb la relació d'igualtat i propagar les seves regions d'incertesa (figura 7.4b). Si les el·lipses d'incertesa resultants són incompatibles significa que les arestes no

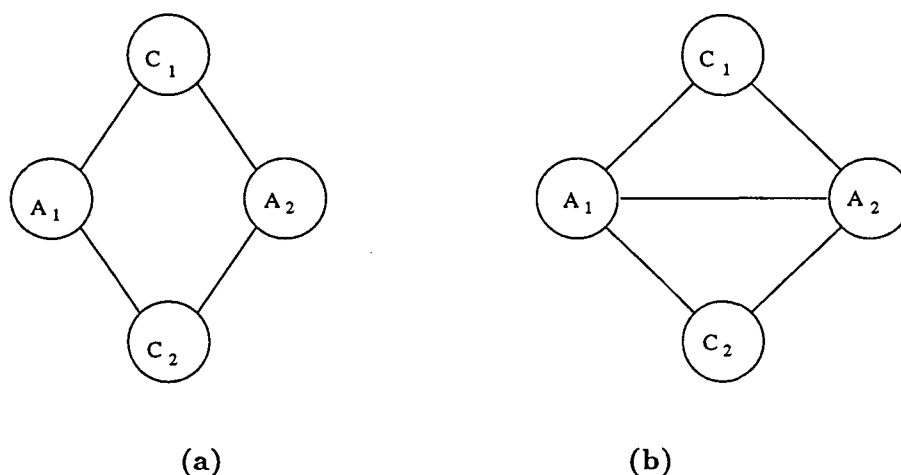


Figura 7.4: (a) Cicle del tipus ACAC i (b) imposició de la condició d'arestes alineades al cicle

poden tenir la mateixa recta de suport, altrament sí la posen tenir i la fusió d'ambdues el·lipses probablement reduirà el volum d'incertesa, de manera que la imposició de la condició millora la informació. Per altra banda, l'el·lipse resultant de la fusió pot tenir un centre diferent de les anteriors, la qual cosa vol dir que les posicions de les arestes poden haver canviat lleugerament. Quan la nova informació es propaga a tots els nodes del graf es poden obtenir noves estimacions per la posició d'alguns vèrtexs i arestes.

Anàlogament, per imposar la condició d'arestes concurrents es requereix primer detectar tots els cicles del tipus $(A_1, C_1, A_2, C_2, A_3, C_3)$, essent A_i arestes i C_j cares (figura 7.5a). Les tres rectes de A_1 , A_2 i A_3 s'han d'interceptar en un sol punt, per tant un nou node vèrtex s'afegeix al graf i s'enllaça amb les tres arestes i les tres cares (figura 7.5b). Com en el cas anterior, la propagació de la incertesa de les arestes en aquest subgraf és suficient per imposar la consistència o per detectar les inconsistències. Si la fusió en algun dels nodes del subgraf dona incompatibilitat entre les el·lipses significa que no hi ha posicions de les arestes en les regions d'incertesa que donin rectes concurrents. Com que la propagació afecta tots els nodes, es pot detectar una incompatibilitat al fer fusió en qualsevol node, no només en els del subgraf. En cas contrari, si no ha cap incompatibilitat de fusió en els nodes dels camins de propagació, la condició es satisfà i a més els volums d'incertesa probablement s'han reduït i les estimacions de posició s'han modificat.

Els nodes i arcs extra afegits en els procediments d'imposició de les dues condicions garanteixen la consistència no només en les propagacions fetes en aquests procediments, sinó també en futures propagacions. Per tant els nodes i arcs extra no s'eliminen del graf fins al final de tot el procés.

En alguns casos la condició d'arestes alineades és conseqüència de la condició d'arestes concurrents. Donat un cicle (A_1, C_1, A_2, C_2) de tipus ACAC, si cada aresta té com a mínim un vèrtex amb tres cares i només tres i aquestes no són ocultes (figura 7.6), aleshores el cicle satisfà la condició d'arestes alineades si tots els cicles del tipus ACACAC satisfan la condició d'arestes concurrents. Per demostrar-ho s'anomena V_1 el vèrtex de l'aresta A_1 que té tres cares, C_1 , C_2 i C_3 . Suposant que A_1 , A_3 i A_4 són les tres arestes que es tallen en V_1 . Anàlogament, l'aresta A_2 té el vèrtex V_2 de tres cares, C_1 , C_2 i una tercera C_4 , i les tres arestes A_2 , A_5 i A_6 . Aleshores

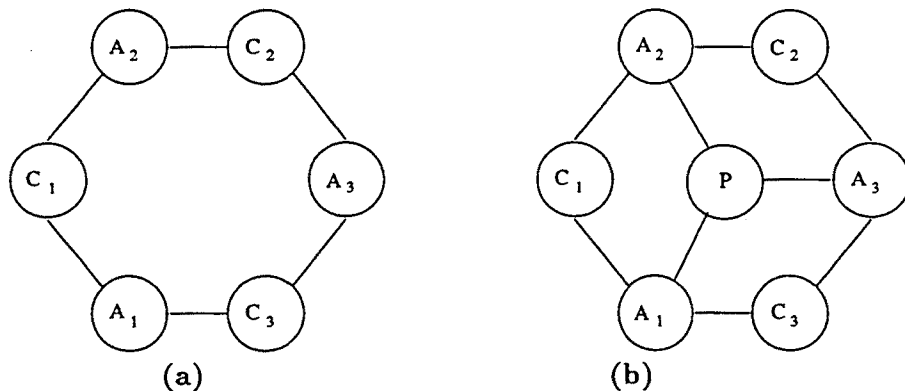


Figura 7.5: (a) Cicle de tipus ACACAC i (b) imposició de la condició d'arestes concurrents

apareixen dos cicles del tipus ACACAC: $(A_2, C_2, A_3, C_3, A_4, C_1)$ i $(A_1, C_2, A_5, C_4, A_6, C_1)$. Quan s'imposa la condició de'arestes concurrents al primer cicle, les rectes de les arestes A_2, A_3 i A_4 són forçades a tallar-se en un sol punt, que ha de ser V_1 , i per tant V_1 ha d'estar en la rcta de A_2 . De la mateixa forma es veu que V_2 ha d'estar en la recta de A_1 . Així doncs, la recta determinada per V_1 i V_2 ha de ser igual a la recta de suport tant de l'aresta A_1 com de l'aresta A_2 i això assegura la satisfacció de la condició d'arestes alineades.

Quan s'imposa les dues condicions exposades a tots els cicles corresponents, si es troba alguna incompatibilitat significa que el dibuix és inconsistent i el procés s'acaba. En cas contrari, si no es troba cap incompatibilitat, el dibuix es pot considerar consistent (respecte aquestes condicions). En aquest últim cas les posicions dels vèrtexs i les arestes poden haver canviat, dins de les seves regions d'incertesa. Això significaria que les estimacions inicials no satisfien les condicions, però que se n'han calculat de noves que sí les satisfan. Finalment, els volums de les regions d'incertesa probablement s'han reduït, degut a la imposició de les condicions.

A més de les dues condicions exposades, es poden imposar altres condicions de consistència amb processos anàlegs. Un altre exemple podria ser la condició, que anomenarem *condició d'arestes coplanàries*, que estableix que 5 cares C_1, \dots, C_5 que es tallen en les arestes $A_{13} = C_1 \cap C_3, A_{32} = C_3 \cap C_2, A_{14} = C_1 \cap C_4, A_{42} = C_4 \cap C_2, A_{15} = C_1 \cap C_5$ i $A_{52} = C_5 \cap C_2$, han de tenir els 3 punts intersecció $P_{132} = A_{13} \cap A_{32}, P_{142} = A_{14} \cap A_{42}$ i $P_{152} = A_{15} \cap A_{52}$ alineats (figura 7.7). Aquesta restricció prové del fet que els 3 punts han de pertànyer a la recta intersecció del pla C_1 , determinat per A_{13}, A_{14} i A_{15} , i el pla C_2 , determinat per A_{32}, A_{42} i A_{52} . En la figura 7.8a es pot veure el subgraf del graf de relacions geomètriques corresponent a un conjunt d'arestes i cares que han de satisfer la condició. Per imposar la satisfacció de la condició s'introdueix en el subgraf els nodes i arcs extres següents: 3 nodes pels punts intersecció P_{214}, P_{234} i P_{254} i els arcs d'incidència que els lliguen amb les arestes corresponents, un node aresta A per la recta que ha de passar pels 3 punts i els arcs d'incidència que lliguen aquesta aresta amb aquests punts. El subgraf resultant està representat en la figura 7.8b.

7.5 L'algorisme

L'algorisme exposat en els apartats anteriors està esquematitzat en 7.1 i ha estat implementat en el llenguatge C. A continuació es comenten breument cada un dels passos de l'algorisme.

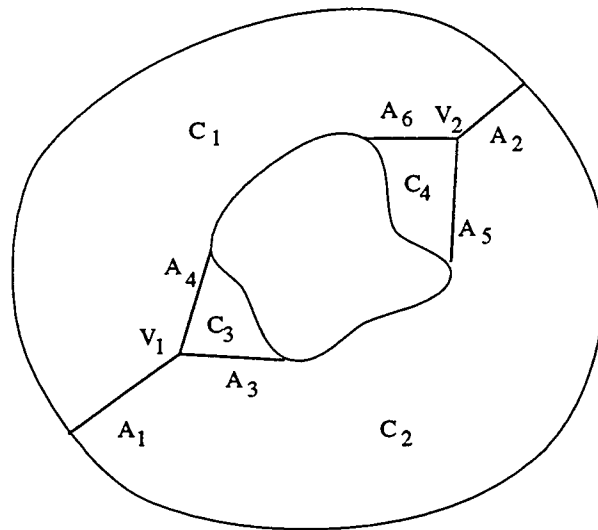


Figura 7.6: Cicle ACAC on la codició d'arestes alineades és redundant

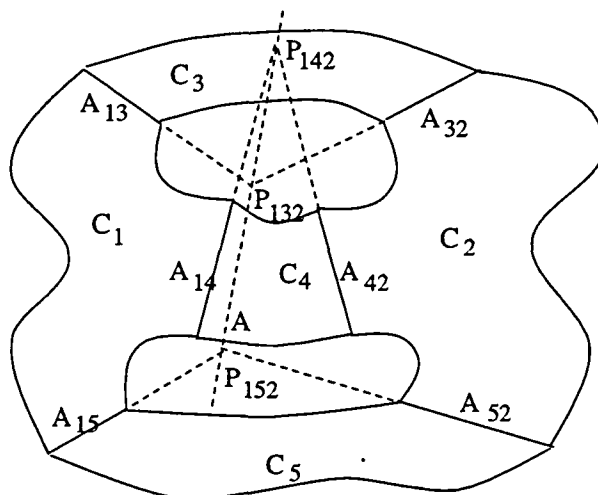


Figura 7.7: Condició d'arestes coplanàries

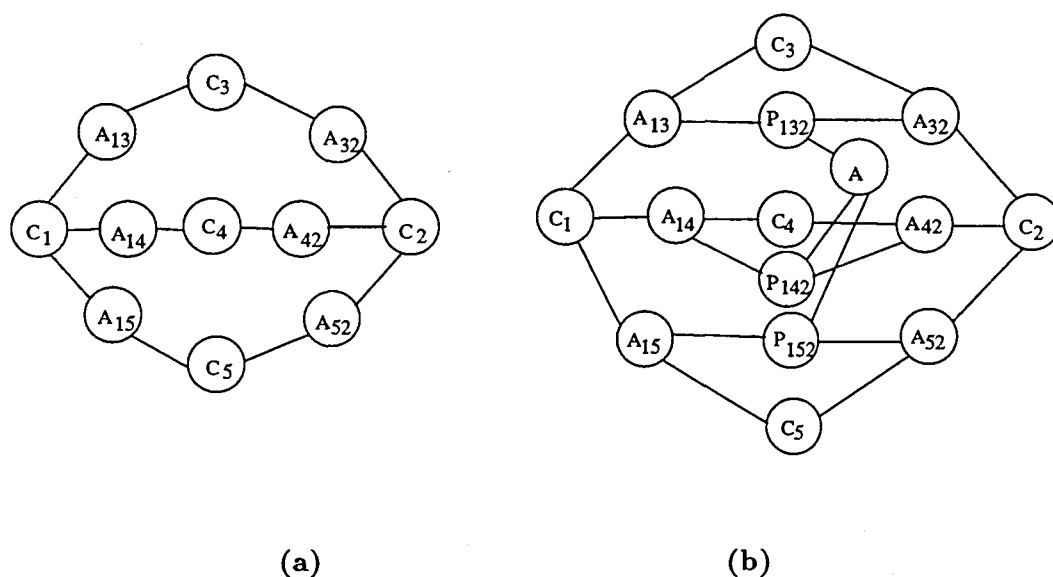


Figura 7.8: (a) Subgraf per la condició d'arestes coplanàries i (b) imposició de la condició

algorisme *Imposició_De_Consistència*

Donat un dibuix poligonal amb regions d'incertesa el·líptica associades als vèrtexs, una llista de parells de vèrtexs representant les arestes i una llista de conjunts de vèrtexs representant les cares

- 1) Construeix el graf de relacions geomètriques associat al dibuix
- 2) Calcula les estimacions de les posicions de les arestes
- 3) Propagació global des de cada vèrtex
- 4) Detecta tots els cicles ACACAC
- 5) Imposa la consistència a cada cicle ACACAC
- 6) Detecta tots els cicles ACAC
- 7) Imposa la consistència a cada cicle ACAC
- 8) Propagació global des de cada aresta d'un cicle ACACAC o ACAC
- 9) Calcula les estimacions finals per les posicions dels nodes
- 10) Esborra els nodes i arcs extres del graf

Resultat El dibuix amb les posicions dels vèrtexs i les arestes modificades i les incerteses actualitzades, o bé una etiqueta de *dibuix inconsistent*

fialg

Algorisme 7.1: *Imposició_De_Consistència*

El procediment de construcció del graf, pas 1, s'ha explicat en l'apartat 7.2.

El pas 2 és necessari per garantir que les estimacions de les posicions de les arestes són bones. En el pas 1 les el·lipses d'incertesa de les arestes són tot l'espai de paràmetres \mathbb{R}^2 , perquè no n'hi ha informació disponible. Ara bé, tal com s'explica en el capítol 5, la linealització de les equacions necessita bones estimacions abans de realitzar cap propagació. La millor estimació per la posició d'una aresta és el vector de paràmetres (θ_0, r_0) que correspon a la recta determinada pels dos vèrtexs de l'aresta:

$$\theta_0 = \arctan \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2} \qquad r_0 = x_1 \sin \theta_0 + y_1 \cos \theta_0,$$

on (x_1, y_1) i (x_2, y_2) són les estimacions de la posició dels vèrtexs.

La propagació global del pas 3 es fa segons l'algorisme 6.1. Tal com s'explica en l'apartat 7.3, els camins de propagació comencen en cada vèrtex i moren en els vèrtexs aresta veïns, perquè en aquest punt només hi ha arcs d'incidència en el graf.

Les rutines d'imposició de condicions de consistència als cicles dels dos tipus, passos 5 i 7, s'expliquen a l'apartat 7.4. En aquests passos s'afegeixen nodes i arcs al graf i es realitzen propagacions locals de regions d'incertesa en els subgrafs. Si es troba incompatibilitat en algun node el procés global s'acaba i es torna l'etiqueta de *dibuix inconsistent*.

El pas 8 realitza una propagació global de les noves regions d'incertesa que s'han obtingut en els passos 5 i 7. Els nodes que poden tenir regions d'incertesa modificades són les arestes dels cicles, perquè les cares no tenen regions d'incertesa, i els vèrtexs extra. És suficient, però, propagar des del vèrtex extra perquè els camins de propagació passaran per les arestes del cicles. Contràriament al pas 3, els camins de propagació recorreran més de dos nodes, degut als nous nodes i arcs del graf. Com en els passos 5 i 7, si es troba alguna incompatibilitat en la propagació el procés s'atura i es torna el resultat de dibuix inconsistent.

El pas 9 calcula estimacions nominals per les posicions de tots els nodes que satisfacin les equacions dels arcs. Degut a la presència dels nodes i arcs extrems la consistència es manté en el procés.

En el pas 10 s'esborren del graf els nodes vèrtex extrems, així com els arcs que els enllacen amb altres nodes, perquè són vèrtexs que no formen part del dibuix. Els arcs d'igualtat extrems introduïts al imposar la condició d'arestes alineades es poden esborrar o no, ja que no molesten al dibuix.

7.6 Exemples

En aquest apartat s'il·lustra l'algorisme d'imposició de condicions de consistència amb alguns exemples de diferents tipus: exemples de dibuixos consistents (ja siguin sensibles a la posició dels vèrtexos o no), dibuixos amb posició dels vèrtexos modificable per a ser consistent i dibuixos inconsistents (per motius geomètrics o topològics).

En primer lloc un exemple que no té cap cicle al qual imposar condicions (figura 7.9). En aquest exemple és clar que els passos 4 al 7 de l'algorisme no fan res. No hi ha cap possible inconsistència dels tipus estudiats en aquest treball, perquè no hi ha cicles del tipus ACAC ni del tipus ACACAC. Per tant, qualsevol posició dels vèrtexos dona un dibuix correcte.

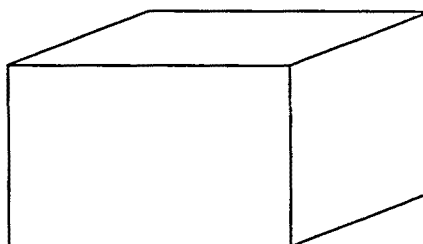


Figura 7.9: Dibuix sense restriccions

Les figures 7.10a, 7.10b i 7.10c, de [PS92], corresponen a dibuixos que tenen una condició d'arestes concurrents en les arestes A_1 , A_2 i A_3 . Segons la posició dels vèrtexs i les seves incerteses, el dibuix d'entrada pot ser: consistent perquè ja satisfà la condició (figura 7.10a), inconsistent amb les posicions d'entrada però consistent després de modificar-les (figura 7.10b), o simplement inconsistent (figura 7.10c). Les figures 7.10d i 7.10e mostren els dibuixos de la figura 7.10a i la figura 7.10b amb els vèrtexs extrems i les el·lipses d'incertesa associades als vèrtexs després de la propagació.

La condició d'arestes alineades s'illustra en els dibuixos de les figures 7.11a, 7.11b i 7.11c, de [PS92]. La figura 7.11a mostra el cas consistent, la figura 7.11b mostra un cas que pot ser modificat per ser consistent i la figura 7.11c mostra el cas inconsistent.

Finalment, la figura 7.12 mostra un dibuix impossible. Encara que aquest tipus de dibuixos tenen inconsistències topològiques i aquest treball tracta condicions geomètriques, l'algorisme presentat detecta aquestes inconsistències en molts casos. En el dibuix de la figura 7.12, segons la condició d'arestes concurrents, les arestes A_1 , A_2 i A_3 haurien d'interceptar. Però no interceptaran a no ser que els vèrtexs V_1 , V_2 i V_3 fossin el mateix, cas en el que el dibuix seria ben diferent.

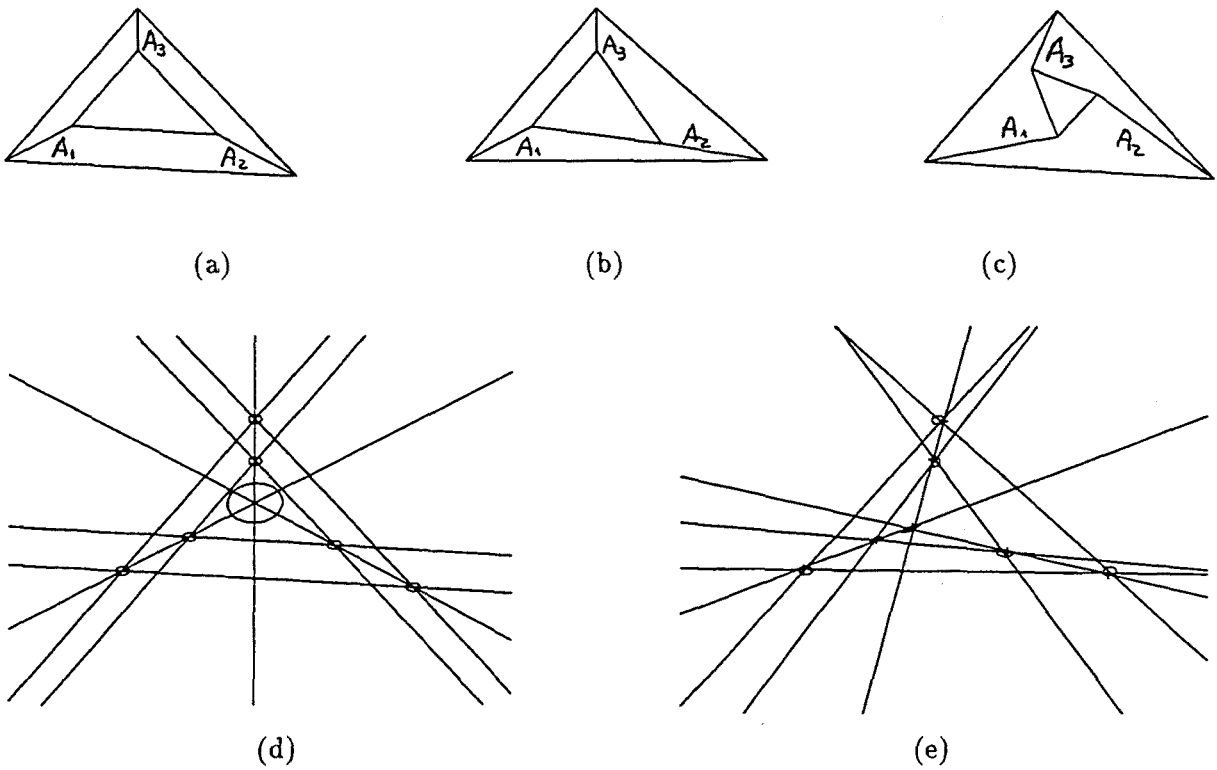


Figura 7.10: Dibuxos amb la condició d'arestes concurrents: (a) consistent, (b) modificable per ser consistent, (c) inconsistent, (d) incerteses dels vèrtexs en (a) i (e) incerteses dels vèrtexos en (b)

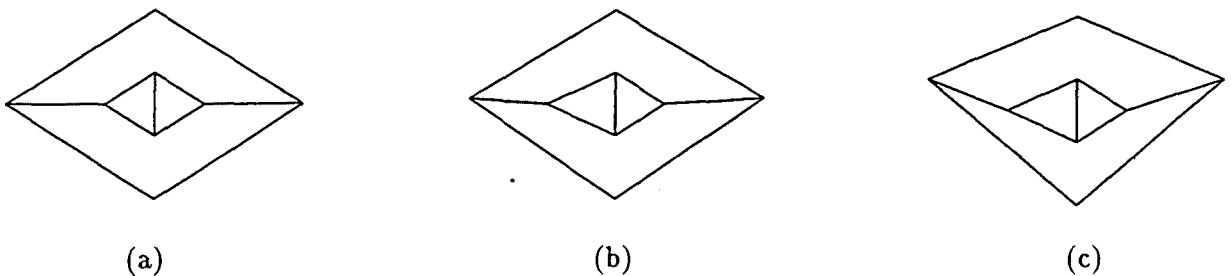


Figura 7.11: Dibuxos amb la condició d'arestes alineades: (a) consistent, (b) modificable per ser consistent i (c) inconsistent

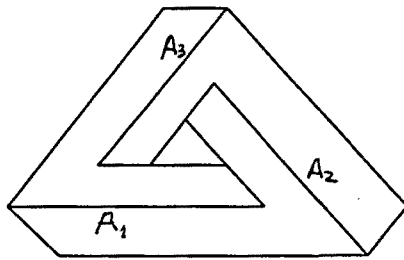


Figura 7.12: Dibuix impossible

Capítol 8

Comparació amb altres models d'incertesa

En robòtica i altres camps s'ha utilitzat bàsicament dos models d'incertesa: el model probabilístic i el model de fites o model conjuntista. S'han utilitzat també, encara que de forma no tan extesa, altres models d'incertesa, com per exemple el de conjunts difusos [ACA93, Com93]. Dins del model de fites es poden considerar diversos submodels, segons el tipus de regions fitadores utilitzat: regions politòpiques, regions ortotòpiques, regions el·lipsoidals i altres tipus de regions, especialment convexes [Com93].

En aquest apèndix es fa una concisa comparació del model probabilístic, el model de fites politòpiques i el model de fites ortotòpiques amb el model adoptat en aquest treball, és a dir, el model de fites per regions el·lipsoidals.

8.1 Comparació amb el model probabilístic

En el model d'incertesa probabilística es considera l'error comès al mesurar un paràmetre com una variable aleatòria amb una determinada distribució de probabilitat. Es pot trobar un compendi d'aquest enfoc en [LK89].

Normalment es treballa amb la hipòtesi que la distribució és gaussiana, per la simplicitat de càlculs i d'espai d'emmagatzamament que això suposa. L'enfoc probabilístic gaussià està molt extès, alguns dels treballs més destacats són: [BC86, Dur86, HS90, LLS88, MS87, NX89, Nei93, OHF92, Por88, SSC88, SL92, Tar90, Tar92, Xu92].

A continuació es presenta un resum de l'enfoc probabilístic amb distribució gaussiana. En aquest model una observació està representada pel vector mitjana $\bar{\mathbf{x}}$ i la matriu de variàncies-covariàncies $\Sigma_{\mathbf{x}}$, ja que la funció de densitat multidimensional ve donada per

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}(\det(\Sigma_{\mathbf{x}}))^{1/2}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^t \Sigma_{\mathbf{x}}^{-1}(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})\right).$$

Aquestes distribucions (figura 8.1) permeten representar la diferent incertesa en les diferents direccions. També permeten representar tant observacions completes com parcials, on la

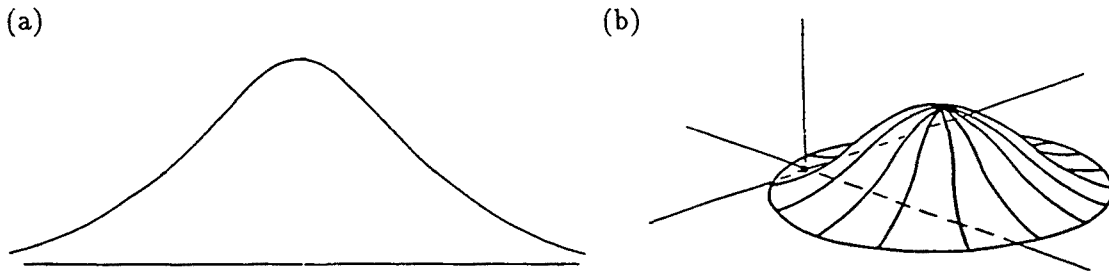


Figura 8.1: Funcions de densitat gaussianes (a) unidimensional i (b) bidimensional

distribució serà impròpia [Dur86, NX89, Xu92]. La mesura de la incertesa ve determinada per la matriu de variàncies-covariàncies.

La fusió d'informació competitiva es tradueix en el model probabilístic en procediments d'estimació. En concret en el cas gaussià, si es disposa de p observacions $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ independents amb les corresponents matrius de covariàncies $\Sigma_1, \dots, \Sigma_p$, es pot obtenir una única estimació $\hat{\mathbf{x}}$ segons els següents criteris:

1. *Mínims quadrats ponderats* [MS87] L'òptim és aquell valor de \mathbf{x} que minimitza l'error quadràtic o distància de Mahalanobis

$$\epsilon(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^p (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)^t \Sigma_i^{-1} (\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)$$

i s'obté per optimització diferencial clàssica imposant $\frac{\partial \epsilon}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}$.

2. *Màxima versemblança* [BC86, LLS88, Xu92] L'òptim és aquell valor de \mathbf{x} que maximitza la versemblança

$$v(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_1 \wedge \dots \wedge \mathbf{x}_p | \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^p f_i(\mathbf{x}_i | \mathbf{x})$$

i també s'obté per optimització diferencial clàssica imposant $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{x}} = \mathbf{0}$.

3. *Mínim volum de l'el·lipsoide de covariàncies* [NX89] Suposa que l'estimació es pot expressar com una combinació lineal de les coordenades de les observacions i que no és esbiaixada, la qual cosa significa que

$$\hat{\mathbf{x}} = \sum_{i=1}^p \mathbf{W}_i \mathbf{x}_i \quad \text{on} \quad \sum_{i=1}^p \mathbf{W}_i = \mathbf{I}.$$

Les matrius \mathbf{W}_i es calculen imposant que l'el·lipsoide associat amb la matriu de covariàncies resultant $\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}}$ tingui volum mínim, equivalent a imposar que $\det(\Sigma_{\hat{\mathbf{x}}})$ sigui mínim.

4. *Òptim en el sentit del filtre de Kalman* [Dur86, OHF92, Por88, SL92] Essent la dinàmica la identitat i l'estat estàtic, l'òptim ve donat pel valor de \mathbf{x} que minimitza

$$\mathbf{a}^t \Sigma_{\mathbf{x}} \mathbf{a} \quad \text{essent a una constant}$$

Tots aquests criteris porten al mateix resultat, una distribució de mitjana i matriu de covariàncies:

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\sum_{i=1}^p \Sigma_i^{-1} \right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^p \Sigma_i^{-1} \mathbf{x}_i \right) \quad \text{i} \quad \Sigma_{\hat{\mathbf{x}}} = \left(\sum_{i=1}^p \Sigma_i^{-1} \right)^{-1}. \quad (8.1)$$

Cal destacar que aquestes fórmules de fusió utilitzen només càlculs matricials i per tant donen processos eficients. A més, aquesta fusió té les propietats associativa i commutativa, que permeten fusionar les observacions en qualsevol ordre obtenint el mateix resultat. I també permet detectar els casos d'observacions redundants o incompatibles de forma eficient [Dur86, LLS88]. Ara bé, cal remarcar que aquest mètode pressuposa que les observacions fusionades són independents, la qual cosa limita molt el seu camp d'aplicabilitat. Amb variables gaussianes també s'han utilitzat altres mètodes d'estimació: en [LLS88] es busca la màxima probabilitat total i s'obté l'estimació per mètodes numèrics i també en [LLS88] s'usa la mateixa estimació $\hat{\mathbf{x}}$ de l'equació (8.1), però la matriu de covariàncies s'obté per interpolació.

La propagació local d'observacions amb incertesa gaussiana a través de relacions lineals es realitza amb càlculs matricials. Aquests càlculs són equivalents als que es fan per a propagar regions d'incertesa el·lipsoïdals (apartat 5.2.1), ja que propagar per una relació lineal una distribució gaussiana és equivalent a propagar l'el·lipsoïde associat. En concret, en el cas de distribucions no degenerades, la imatge d'un vector aleatori \mathbf{x} de mitjana $\bar{\mathbf{x}}$ i matriu de covariàncies $\Sigma_{\mathbf{x}}$ per una relació lineal $\mathbf{Ax} + \mathbf{Cy} + \mathbf{d} = \mathbf{0}$ és un vector \mathbf{y} de mitjana i matriu de covariàncies

$$\bar{\mathbf{y}} = -\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{Ax} + \mathbf{d}) \quad \text{i} \quad \Sigma_{\mathbf{y}}^{-1} = \mathbf{C}^t (\mathbf{A} \Sigma_{\mathbf{x}} \mathbf{A}^t)^{-1} \mathbf{C}.$$

Com en aquell cas, si la relació no és lineal cal linealitzar-la de forma aproximada [Nei93, Por88].

L'algorisme de propagació global descrit en l'apartat 6.2 no es pot aplicar al model probabilístic, ja que cal poder fusionar informacions no independents. En aquest model, per a poder propagar en el graf de relacions geomètriques d'un node a un altre no veïns s'ha de calcular prèviament quina relació directa (arc sense nodes intermitjos) hi ha definida entre els dos, a base de fer inversions, composicions i interseccions de relacions [SSC88]. Això de fet és equivalent a considerar un graf totalment interconnectat, on cada dos nodes estan units per un arc, en lloc del graf descrit en l'apartat 6.2. Aquest enfoc és equivalent a considerar un vector aleatori global que fos la reunió dels vectors aleatoris de tots els nodes, i per tant també una matriu de covariàncies global [Dur86, SSC88]. El manteniment d'aquesta matriu global actualitzada és costós i és un dels majors inconvenients de l'enfoc probabilístic.

Comparant el model probabilístic gaussià i el model de fitació d'incerteses es pot dir que en el primer no es necessiten unes fites exactes de l'error, mentre que en el segon no cal suposar que l'error és aleatori ni conèixer la seva distribució de probabilitat cas de ser-ho. Per altra banda en el model probabilístic observacions similars d'un mateix element milloren l'estimació final, en canvi en el model de fitació observacions similars donen un resultat amb incertesa similar; és a dir que en el primer cas els resultats són més optimistes que en el segon. Ara bé, això és degut al fet que en el primer cas les observacions han de ser independents i en el segon això no és necessari. Això també implica que en el primer cas per a fer propagació global cal un graf totalment interconnectat, mentre que en l'altre cas només calen arcs entre nodes directament

	Probabilístic	Fitació
no calen fites exactes d'error	+	-
no cal suposar error aleatori	-	+
no cal conèixer distribució d'error	-	+
espai d'emmagatzamament constant	+	?
mesures similars milloren estimació	+	-
no calen dades independents	-	+
càlculs de fusió i propagació fàcils	+	?
fusió associativa i commutativa	+	?
graf de relacions directes només	-	+
calen relacions lineals	-	-

Taula 8.1: Comparació dels models d'incertesa probabilístic i de fitació

relacionats i el seu manteniment és menys costós. En quant a la efectivitat o simplicitat dels càlculs de fusió i propagació local, en el model gaussià són tots matricials i en el model de fitació depèn del tipus de regions escollit. Igualment, l'espai per representar una observació és constant en el model gaussià i depèn de les regions escollides en el model d'incertesa fitada. Finalment cal dir que en tots dos models cal que les relacions siguin lineals per a poder propagar. La taula 8.1 resumeix aquestes comparacions. En [HEA93] es fa una comparació des del punt de vista pràctic del mètode probabilístic i el mètode de fitació en general, arribant a la conclusió que és més eficient un mètode o l'altre segons les característiques del problema on aplicar-lo.

Finalment és important remarcar que hi ha també una certa relació entre el model de fites el·lipsoidals i el model probabilístic gaussià través de l'el·lipsoide associat a la distribució gaussiana. Aquest el·lipsoide o el·lipsoides concèntrics són els conjunts de nivell de la funció distribució (figura 8.2) i tenen equació

$$(\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}})^t \Sigma_{\mathbf{x}}^{-1} (\mathbf{x} - \bar{\mathbf{x}}) \leq k^2$$

i la probabilitat que el valor real \mathbf{x}_r estigui en aquest el·lipsoide és $F_{\mathbf{x}}(k)$ (taula 8.2). Així per valors grans de k ($k \geq 2.5$) aquest el·lipsoide és quasi equivalent a un el·lipsoide fitador, on la probabilitat que el valor hi sigui és de 100%. Per altra banda el model de fitació d'errors es pot considerar equivalent a un model probabilístic on les observacions sensorials són vectors \mathbf{x} aleatoris amb distribució de probabilitat uniforme sobre la regió d'incertesa $\mathcal{I}_{\mathbf{x}}$, és a dir:

$$f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \frac{1}{\text{vol}(\mathcal{I}_{\mathbf{x}})} & \text{si } \mathbf{x} \in \mathcal{I}_{\mathbf{x}} \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \notin \mathcal{I}_{\mathbf{x}} \end{cases}$$

Si la regió d'incertesa és un el·lipsoide no cilíndric, aleshores la mitjana d'aquesta distribució és el centre de l'el·lipsoide i la matriu de covariàncies és $\Sigma_{\mathbf{x}} = \frac{1}{n+2} \mathbf{B}$, essent \mathbf{B} la matriu inversa de l'el·lipsoide. Per tant la matriu inversa d'una regió d'incertesa el·lipsoidal es pot interpretar com una matriu de covariàncies.

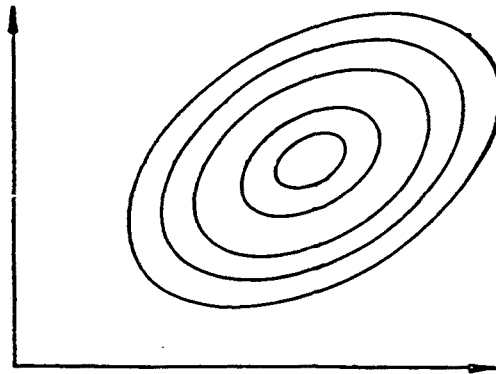


Figura 8.2: El·lipsoides associats a una distribució bidimensional gaussiana

k	k^2	$F_x(k)$					
		$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
1	1	68'27%	39'37%	19'87%	9'02%	3'74%	1'44%
1'25	1'56	78'87%	54'22%	33'21%	18'45%	9'43%	4'48%
1'5	2'25	86'64%	67'54%	47'78%	31'01%	18'64%	10'47%
2	4	95'45%	86'47%	73'85%	59'40%	45'06%	32'33%
2'5	6'25	98'76%	95'60%	89'99%	81'88%	71'74%	60'42%
3	9	99'73%	98'89%	97'07%	93'89%	89'09%	82'64%
3'5	12'25	99'95%	99'78%	99'34%	98'44%	96'87%	94'34%
4	16	99'99%	99'97%	99'87%	99'70%	99'32%	98'62%

Taula 8.2: Probabilitats que una observació estigui dins dels el·lipsoides associats a una distribució gaussiana de dimensió n

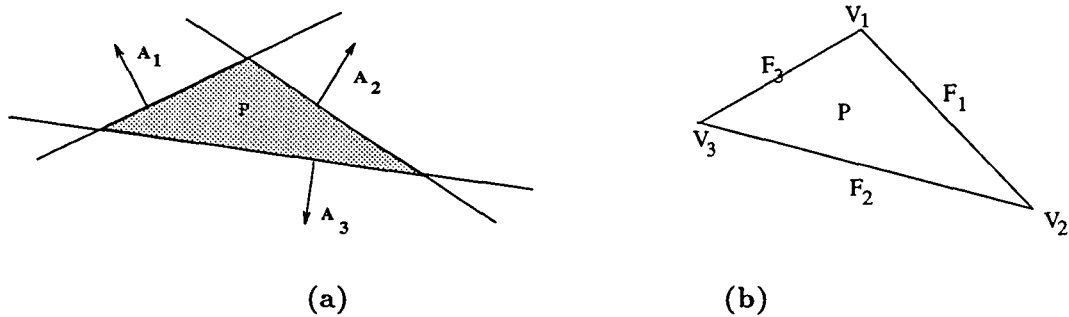


Figura 8.3: (a) Politop com a intersecció de semiespais i (b) politop donat pels seus vèrtexos i facetes

8.2 Comparació amb el model de fitació politòpica

En el model de fitació politòpica es considera l'error de les observacions fitat per regions politòpiques en l'espai de paràmetres. Aquest és el cas, per exemple, de molts sistemes sensorials, que donen la incertesa per intervals en cada coordenada, la qual cosa correspon en l'espai de paràmetres a un determinat tipus de politop.

El model d'incertesa amb regions fitadores politòpiques s'ha utilitzat tant en el camp de la robòtica [DP89, DP90] com en els de la teoria de control i de sistemes [BS90, MB82, MN90, PW90, WP90].

Les regions politòpiques poden representar-se bàsicament de dues maneres: com un sistema d'inequacions lineals o com una llista de vèrtexs i cares. En el primer cas un politop \mathcal{P} de \mathbb{R}^n té equació $\mathbf{A}^t \mathbf{x} \leq \mathbf{m}$ on \mathbf{A} és una matriu $m \times n$ i $\mathbf{m} \in \mathbb{R}^m$. Les files d' \mathbf{A} són els vectors normals exteriors als semiespais que intersecats defineixen el politop (figura 8.3 a). Aquesta representació no permet calcular directament la forma ni el volum del politop, ni tan sols si aquest és buit o no. Per això la majoria de treballs transformen aquests sistemes en una representació per vèrtexs i cares o bé en una representació ortotòpica (apartat 8.3). Hi ha diverses variants de representació de politops per llistes de cares ([BS90, Man88, MN90]), però totes necessiten un espai variable segons la complexitat del politop. Un exemple podria ser un politop \mathcal{P} de \mathbb{R}^n representat per una llista de vèrtexs $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_p\}$ i una llista de facetes $\{f_1, \dots, f_q\}$ així com un conjunt d'índexos $\{V_1, \dots, V_q\}$ que indiquen per cada cara quins vèrtexos contenen (figura 8.3 b).

Les regions politòpiques permeten representar la diferent incertesa en les diferents direccions. Les informacions parcials venen representades per regions politòpiques no fitades en algunes direccions (figura 8.4). La mesura de la incertesa ve donada pel volum del politop, el qual cal calcular amb tècniques de Geometria Computacional [Man88].

La fusió de regions politòpiques es redueix a la intersecció, ja que el valor real pertany a tots els politops (figura 8.5). El càlcul d'aquesta intersecció, així com la detecció de redundàncies i incompatibilitats, depèn de la representació politòpica utilitzada. Però, en general, amb la representació per cares, la intersecció es calcula a través de tècniques de Geometria Computacional de complexitat elevada [BS90, Man88, MN90, PW90, PS85].

La propagació local per relacions lineals de regions politòpiques es basa en el càlcul de

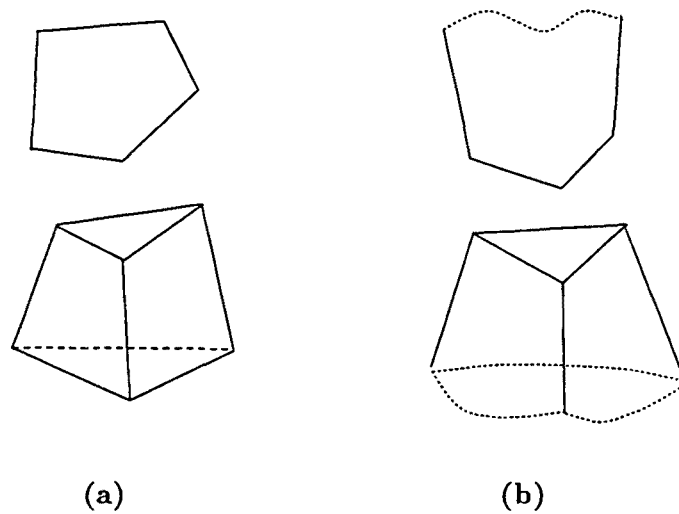


Figura 8.4: Regions d'incertesa politòpiques d'observacions (a) completes i (b) parcials

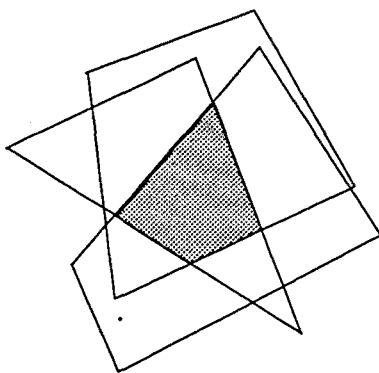


Figura 8.5: Fusió de politops

	El·lipsoides	Politops	Ortotops
fites exactes de l'error	-	+	-
incertesa en diferents direccions	+	+	-
informacions parcials	+	+	-
espai d'emmagatzamament constant	+	-	+
càlculs de fusi'o i propagació fàcils	+	-	-
fusió associativa i commutativa	-	+	+
detecció de redundàncies i incompatibilitats	+	+	-

Taula 8.3: Comparació dels models de fitació d'incertesa segons el tipus de regions

les imatges dels vèrtexs i les projeccions de les cares. Si la relació és bijectiva el càlcul de la propagació es limita al càlcul de les imatges dels vèrtexs, però en cas de no ser-ho cal recórrer a mètodes de Geometria Computacional relativament costosos [DP90]. Com sempre, si les relacions no són lineals cal fer una linealització aproximada.

Com s'ha dit en l'apartat 3.2 les regions de fitació el·lipsoidals es poden considerar una aproximació a les regions de fitació exacta, que serien politòpiques si es considera el cas habitual que les observacions disponibles donen incertesa politòpica.

Si es compara el model politòpic amb el model el·lipsoidal es veu que en el primer les regions d'incertesa són exactes i en el segon només aproximades i per tant aquest guarda menys informació que el primer. Però a canvi l'espai d'emmagatzamament necessari en el primer cas és elevat i variable (segons la complexitat del politop) i en el segon és constant i reduït. En ambdós casos, però, es pot representar la diferent incertesa en les diferents direccions i les informacions parcials. Els procediments de fusió i propagació local amb el·lipsoides comporten operacions matricials i per tant algorismes eficients, mentre que amb politops comporten algorismes geomètrics de complexitat elevada. Ara bé, la fusió de politops és associativa i commutativa i encanvi la d'el·lipsoides no ho és. En ambdós casos es necessiten relacions lineals per a propagar localment, no és necessari que les observacions siguin independents per a ser fusionades i és vàlid l'algorisme de propagació global en el graf de relacions de l'apartat 6.2. La taula 8.3 resumeix aquestes comparacions.

8.3 Comparació amb el model de fitació ortotòpica

En el model de fitació ortotòpica es considera que l'error de cada coordenada o variable de les observacions ve fitat per un interval, és a dir, per un valor mínim i un valor màxim. Geomètricament això és equivalent a dir que el vector de paràmetres de l'observació està fitat per un politop de cares ortogonals (ortotop) en les direccions de coordenades (figura 8.6), també anomenat interval multidimensional.

Alguns dels treballs més importants on s'utilitza la incertesa ortotòpica o per intervals són: [AH91, Bro82, DP89, Hag92, FO91, Tay76] en robòtica i [MB82, WP90] en el camp de la teoria de sistemes.

Les regions ortotòpiques no permeten representar la diferent incertesa en diferents

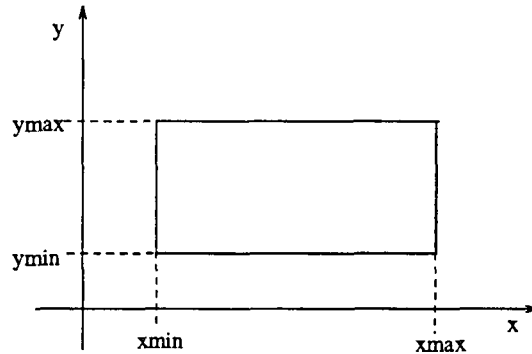


Figura 8.6: Regió d'incertesa ortotòpica

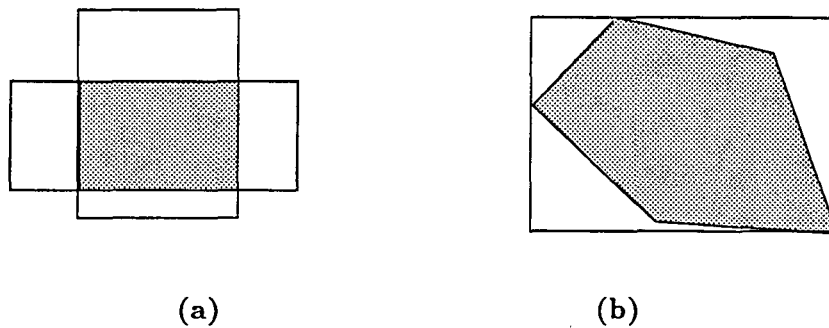


Figura 8.7: (a) Fusió d'ortotops i (b) menor ortotop contenint un politop

direccions, ja que només es guarda informació de les direccions de coordenades. I com a conseqüència tampoc poden representar informacions parcials, excepte en aquestes direccions. Per altra banda la mesura d'incertesa ve donada pel volum, fàcilment calculable.

La fusió d'observacions competitives es redueix a la intersecció dels ortotops, que és equivalent a trobar els mínims dels diferents extrems inferiors dels intervals i els màxims dels extrems superiors de cada variable (figura 8.7 a). Alguns autors combinen les regions d'incertesa politòpica, representades per un sistema d'inequacions, i ortotòpica [AH91, DP89, MB82, Tay76]. En aquest cas la fusió es converteix en una intersecció de politops, sobre la qual s'apliquen tècniques d'optimització lineal per a trobar els màxims i mínims de cada coordenada i definir així el corresponent interval multidimensional (figura 8.7 b).

Per propagar localment un ortotop cal tenir en compte que la imatge d'un ortotop per una relació lineal és un politop i per tant cal calcular els valors màxims i mínims que pren cada variable sobre el politop. Per a això s'ha utilitzat el càlcul simbòlic [Bro82, FO91], l'anàlisi d'intervals [Hag92] o bé tècniques de programació lineal [AH91, DP89, MB82]. Les dues primeres opcions permeten propagar a través de relacions no lineals, encara que no de qualsevol tipus, i l'última opció necessita relacions lineals o linealitzades de forma aproximada.

Com en el cas de les regions el·lipsoidals, les regions ortotòpiques es poden considerar una

aproximació a les regions politòpiques. Aquestes últimes donen en general una representació més exacta i reduïda de la incertesa, però els algorismes de tractament són més simples en el cas dels ortotops.

Si es compara el model ortotòpic amb el model el·lipsoidal es veu que en tots dos les regions d'incertesa són aproximades i un espai d'emmagatzamament constant, però en el segon la regió d'incertesa queda representada d'una forma més ajustada, ja que es tenen en compte les diferents direccions d'incertesa i en el primer no. Els procediments de fusió i propagació local amb el·lipsoides comporten només operacions matricials, mentre que amb ortotops es converteixen en problemes d'optimització lineal, que sempre comporten algorismes iteratius. A més en el primer cas és fàcil detectar prèviament les informacions redundants o incompatibles i en canvi en el segon cal fer tot el procés de fusió per a detectar-les. Ara bé, com en els politops, la fusió d'ortotops és associativa i commutativa i en canvi la d'el·lipsoides no ho és. En ambdós casos es necessiten relacions lineals per a propagar localment, no és necessari que les observacions siguin independents per a ser fusionades i l'algorisme de propagació global en el graf de relacions geomètriques de l'apartat 6.2 és vàlid. En la taula 8.3 es resumeixen aquestes comparacions.

Capítol 9

Conclusions

En aquesta tesi s'ha presentat un model d'incertesa fitada per a la propagació i fusió d'informació geomètrica. El sistema desenvolupat és molt adequat pels sistemes robòtics multisensorials, on s'han de tractar dades sensorials possiblement parcials i amb un cert error. El sistema no està dissenyat per cap conjunt concret de sensors o fonts d'informació, ni tampoc per cap aplicació concreta; sinó que es tracta d'un sistema de caràcter general, adaptable a les diferents aplicacions.

El model d'incertesa adoptat considera conjunts fitadors el·lipsoidals per les dades sensorials en l'espai de paràmetres. Aquest enfoc geomètric per modelar la incertesa s'ha presentat com una alternativa a l'enfoc probabilístic, àmpliament difòs. Els avantatges més importants del model fitador, comparat amb el probabilístic, són: que no suposa cap distribució probabilística de les dades, que no precisa l'habitual hipòtesi d'independència de les diferents dades del mateix element i que no utilitza matrius de variàncies-covariàncies globals. Això fa que el model sigui de gran interès per aquelles situacions on no es disposa de descripció probabilística dels errors i només se'n coneixen fites; com també pels casos on no es pot garantir la independència entre les diferents observacions d'un mateix element o bé no es coneix la dependència entre les variables. Per altra banda, els conjunts fitadors el·lipsoidals poden representar incerteses direccionals, contràriament als conjunts fitadors ortotòpics. La informació completa i la parcial són tractades en el model presentat de la mateixa forma, perquè la primera es representa per el·lipsoides no degenerats i la segona per cilindres el·lipsoidals i en tots dos casos per representació matricial, permetent així un tractament homogeni d'ambdós casos. El volum dels el·lipsoides associats a cada element geomètric es pot calcular fàcilment, cosa que dóna al sistema una mesura de la incertesa. Per altra banda, el major inconvenient del model és que les fites no són exactes i pertant inclouen una part d'incertesa extra, que, depenent de les aplicacions, porta a resultats conservadors. Aquesta incertesa extra, però no és introduïda de nou, sinó que sempre correspon a incertesa continguda en alguna de les dades.

S'ha presentat un algorisme de fusió d'informació competitiva basat en conjunts el·lipsoidals fitadors d'incertesa. Donades diverses observacions del mateix element, cada una amb la seva regió el·lipsoidal, l'algorisme de fusió obté una estimació per la regió d'incertesa resultant, que és la menor fita el·lipsoidal. Una de les contribucions d'aquesta tesi és la fórmula tancada per calcular aquesta fusió en el cas general presentada en el capítol 4. Ara bé, com que la fórmula pot portar a càlculs ineficients quan les dimensions són altes, es presenta també un algorisme alternatiu, basat en la fusió el·lipsoide-franja.

Es demostra que la fusió exacta franja-ellipsoide és equivalent a un pas iteratiu del mètode de l'ellipsoide de Programació Lineal. S'ha desenvolupat un procediment pel càlcul de la fita estimació en el cas general basat en aquesta fusió franja-ellipsoide i en la descomposició en franges d'un ellipsoide. Les informacions a fusionar amb el mètode proposat poden ser tant completes com parcials, ja que la descomposició en franges és vàlida també per cilindres. Per altra banda es calcula la fusió exacta de regions degenerades i complementàries, la qual cosa permet obtenir informació completa quan només es disposa d'informacions parcials complementàries. Això evita haver d'aproximar tot l'espai de paràmetres per grans regions el·lipsoidals en els passos inicials. L'algorisme de fusió inclou procediments eficients per detectar incompatibilitats, sense calcular tot el procés de fusió, permetent detectar malfuncionaments dels mecanismes sensorials. Anàlogament, també inclou procediments per la detecció de redundàncies. Això evita càlculs de fusió inútils quan l'ellipsoide resultant seria l'inical. Les operacions de fusió, així com els tests previs, es realitzen amb càlculs matricials en tots els casos.

Tal com ja s'ha dit, no s'ha fet cap hipòtesi respecte la independència de les dades, la qual cosa fa que l'operació de fusió sigui aplicable a una gran varietat d'aplicacions. Com a conseqüència, quan es fusionen observacions amb regions d'incertesa similars, la incertesa resultant no decreix, com era d'esperar en un model de fites. De totes maneres, l'ellipsoide fusió resultant té sempre volum d'incertesa menor que els inicials.

Les relacions espacials entre els objectes o elements de l'entorn estan també representades en el sistema desenvolupat. Aquestes relacions, quan són conegudes a priori, s'utilitzen per propagar informacions d'uns elements a d'altres. En altres casos, com en aplicacions de reconeixement d'objectes, s'utilitzen les tècniques presentades per comprovar la satisfacció o no d'aquestes relacions. Donats dos elements relacionats i una informació amb incertesa el·lipsoidal d'un d'ells, l'operació de propagació local calcula la informació tramesa a través de la relació a l'altre element i la seva incertesa el·lipsoidal. La propagació d'el·lipsodes es fa a través de les equacions corresponents a les relacions entre elements i comporta càlculs matricials. Una altra de les contribucions d'aquesta tesi és la generalització de la propagació d'el·lipsoides als casos degenerats, que permet la propagació també d'informació parcial. En aquests casos, la propagació es fa amb càlculs matricials que utilitzen pseudo-inverses i es presenten fórmules simplificades derivades de la fórmula de Schur generalitzada.

El manteniment de la informació global de tots els elements geomètrics s'ha estructurat en el graf de relacions geomètriques, en el qual els nodes representen els elements i els arcs les seves relacions. En aquesta tesi s'ha proposat un algorisme d'actualització d'informació basat en les tècniques de fusió i propagació desenvolupades. L'algorisme treu el màxim profit de cada informació, perquè aquestes es propaguen a través de tots els camins possibles i per tant a tots els elements relacionats, ja sigui directament o indirectament. També s'han introduït alguns mecanismes per escurçar aquells camins de propagació que no portarien millores significatives en les regions fitadores. És molt important disposar d'una operació de fusió que eviti la hipòtesi d'independència, com en el nostre cas, perquè quan arriben a un node informacions provinents d'un altre node per diferents camins de propagació, s'han de fusionar dades que són dependents.

Finalment, s'ha proposat, com a exemple d'aplicació del sistema de tractament d'incertesa desenvolupat, un algorisme per a la imposició de condicions de consistència a dibuixos poligonals per a ser projeccions bidimensionals de poliedres tridimensionals. L'algorisme s'ha implementat completament en el llenguatge C i s'han presentat els resultats de diversos exemples. La incertesa

dels vèrtexos dels dibuixos poligonals s'ha tingut en compte utilitzant un model d'error fitat amb conjunts el·lipsoïdals d'incertesa. Les regions d'incertesa de les arestes dels dibuixos es dedueixen de les regions d'incertesa dels vèrtexos utilitzant la propagació i la fusió i es comprova que els el·lipsoïdes resultants són coherents amb les propietats geomètriques bàsiques. A través de les operacions de fusió d'informació competitiva i de propagació d'informació en el graf s'imposen condicions necessàries de consistència, condicions que els dibuixos han de satisfer per ser projeccions de políedres. Aquestes condicions es defineixen de forma natural com a subgrafs i per tant la imposició es fa fusionant i propagant dins del subgraf. Un cop els subgrafs de les condicions estan generats, la satisfacció està garantida inclús si es propaguen noves informacions en el graf global. Per altra banda, la no satisfacció d'aquestes condicions es detecta amb els tests de detecció d'incompatibilitats de l'operació de fusió.

S'han presentat diversos exemples de dibuixos corresponents diferents situacions. En primer lloc, dibuixos consistents, on es veu com la seva incertesa es redueix per la imposició de les condicions. En segon lloc, dibuixos que amb la posició dels vèrtexos no són consistents i que són modificats dins de les fites d'incertesa per l'algorisme fins a obtenir un dibuix consistent. Finalment, s'ha vist com els dibuixos inconsistents, tant per raons geomètriques com topològiques, són detectats per l'algorisme. Aquesta aplicació ha demostrat ser de gran interès per a provar les estratègies de fusió i propagació d'informació amb incertesa fitada i mostra la versatilitat del sistema per adequar-se a les aplicacions.

Dos són els principals aspectes que han de ser estudiats en el futur. En primer lloc, sembla convenient l'estudi d'algorismes alternatius per la fusió d'el·lipsoïdes generals. La nostra segona alternativa utilitza la descomposició en franges dels el·lipsoïde, la qual cosa introdueix una petita part d'incertesa extra. A més precisa el càlcul de valors propis, que pot ser ineficient en els espais de paràmetres de dimensió alta. L'algorisme alternatiu hauria de ser capaç de calcular la fusió de forma eficient i més exacta alhora. En segon lloc, s'haurien d'estudiar estratègies per evitar les males conseqüències que es poden derivar de la no linealitat de les equacions en les relacions. Una estratègia a estudiar podria ser buscar parametritzacions dels elements geomètrics que fessin lineals les equacions, garantint alhora la seva regularitat i estabilitat. Altres possibilitats són la utilització d'aproximacions de segon ordre o l'anàlisi i minimització dels efectes de la no linealitat quan sigui possible.

Dues àrees de recerca dins del camp de la Robòtica, en les quals el sistema desenvolupat pot ser d'interès són la Sensorització Activa i la Generació de Models de l'Entorn. El model de fites el·lipsoïdals sembla adequat pel primer cas, ja que la direcció de màxima incertesa es pot calcular amb poques operacions, donant una valuosa informació per la sensorització activa. En el segon cas, en entorns inestructurats per a generar models consistents es requereix la utilització de dades sensorials incertes i per tant el sistema desenvolupat en aquesta tesi sembla adequat. Per altra banda, algunes parts del sistema es poden també aplicar a altres camps, com l'estimació de paràmetres en el camp de la Teoria de sistemes i el modelat d'objectes amb caixes el·lipsoïdals en el Modelat Geomètric.

Apèndix A

Matrius inverses generalitzades. Fórmula generalitzada d'Schur

En aquest apèndix s'inclouen les definicions, propietats i teoremes sobre matrius inverses generalitzades necessàries per al capítol 5. Per un tractament més exhaustiu d'aquest tema es pot consultar [Sea82, Nak91, Str86, MS74].

Definició A.1 (Matrius inverses a la dreta i a l'esquerra) *La matriu A^d és inversa a la dreta de la matriu A , si i només si, $A \cdot A^d = I$. Anàlogament, la matriu A^e és inversa a l'esquerra de la matriu A , si i només si, $A^e \cdot A = I$*

Propietats:

1. Donada una matriu A les matrius A^d i A^e no sempre existeixen i cas d'existir no són úniques, en general
2. Si una matriu A és no singular, aleshores $A^e = A^d = A^{-1}$ única
3. Una matriu A té inversa a la dreta si i només si el seu rang és màxim per files. I aleshores el rang de la inversa a la dreta és màxim per columnes. Anàlogament, A té inversa a l'esquerra si i només si el seu rang és màxim per columnes i aleshores el rang de la inversa a l'esquerra és màxim per files.
4. Si A té rang màxim per files, una inversa a la dreta és $A^d = A^t(AA^t)^{-1}$. I si A té rang màxim per columnes, una inversa a l'esquerra és $A^e = (A^tA)^{-1}A^t$

Definició A.2 (Matrius anul·ladores a la dreta) *Donada una matriu A de dimensions $n \times m$ ($m \geq n$) s'anomena matriu anul·ladora a la dreta d' A a tota matriu N de rang màxim per columnes igual a $m - \text{rang}(A)$ tal que $A \cdot N = 0$. És a dir, N és tal que les seves columnes formen una base del subspai ortogonal a les files d' A .*

Propietat. Si A té rang màxim per files, aleshores el subspai vectorial generat per les columnes d' N és igual al subspai generat per les columnes de $I - A^dA$, és a dir, $\langle \text{columnes d}'N \rangle = \langle \text{columnes de } I - A^dA \rangle$

Definició A.3 (Matriu pseudoinversa) La matriu $A^\#$ és la pseudoinversa de la matriu A si satisfà

$$\begin{cases} AA^\#A = A \\ A^\#AA^\# = A^\# \\ AA^\# \text{ i } A^\#A \text{ són matrius simètriques} \end{cases}$$

A la matriu $A^\#$ també se l'anomena inversa generalitzada de Moore-Penrose.

Les matrius $A^\#$ que satisfan alguna o algunes de les 4 condicions anteriors s'anomenen inverses generalitzades d' A .

Propietats:

1. La pseudoinversa $A^\#$ de qualsevol matriu A és única.
2. Si A és no singular, aleshores $A^\# = A^{-1}$ única.
3. Si A admet inversa a la dreta, $A^d = A^\#$ única. I si A admet inversa a l'esquerra, $A^e = A^\#$ única.
4. Si el sistema $Ax = b$ és compatible, llavors $x = A^\#b$ és una solució.
5. $(A^\#)^\# = A$
6. Si M té rang màxim per columnes, $(MM^t)^\# = M(M^tM)^{-2}M^t$

Teorema A.1 (Fórmula generalitzada d'Schur) [MS74] Donada una matriu simètrica definida positiva

$$E = \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & D \end{pmatrix}$$

sigui $S = A - BD^\#B^t$ el complement d'Schur de D . Aleshores,

$$\begin{aligned} E^\# &= \begin{pmatrix} S^\# & -S^\#BD^\# \\ -D^\#B^tS^\# & D^\# + D^\#B^tS^\#BD^\# \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D^\# \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & \\ -D^\#B^t & \end{pmatrix} S^\# (I \quad -BD^\#) \iff \\ &\iff \text{rang}(E) = \text{rang}(A) + \text{rang}(D) \end{aligned}$$

Corol·lari A.1 Amb les mateixes hipòtesis que el teorema A.1, si $\text{rang}(E) = \text{rang}(A) + \text{rang}(D)$,

$$(I \quad 0) \begin{pmatrix} A & B \\ B^t & D \end{pmatrix}^\# \begin{pmatrix} I \\ 0 \end{pmatrix} = S^\# = (A - BD^\#B^t)^\#$$

El teorema A.1 és generalització de la fórmula d'Schur, que diu:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} S^{-1} & -S^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}CS^{-1} & D^{-1} + D^{-1}CS^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I & \\ -D^{-1}C & \end{pmatrix} S^{-1} (I \quad -BD^{-1}) \end{aligned}$$

Bibliografia

- [Abi91] M.A. Abidi. A regularized multi-dimensional data fusion technique. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pàg. 2738–2744, Sacramento (California, EUA), abril 1991.
- [ACA93] M. Abdulghafour, T. Chandra, i M.A. Abidi. Data fusion through fuzzy logic applied to feature extraction from multi-sensory images. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pàg. 359–366, 1993.
- [AH91] S. Atiya i G. Hager. Real-time vision-based robot localization. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pàg. 639–644, Sacramento (California, EUA), abril 1991.
- [Ala93] R. Alami. *Motion planning with uncertainty*. Memòria tècnica, LAAS/CNRS, Toulouse (França), març 1993.
- [BC86] R.M. Bolle i D.B. Cooper. On optimally combining pieces of information, with application to estimating 3-d complex-object position from range data. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 8, núm. 5, pàg. 619–638, setembre 1986.
- [BGT81] R.G. Bland, D. Goldfarb, i M.J. Todd. The ellipsoid method: a survey. *Operations Research*, vol. 29, pàg. 1039–1091, 1981.
- [Bro82] R.A. Brooks. Symbolic error analysis and robot planning. *The International Journal of Robotics Research*, vol. 1, núm. 4, pàg. 29–68, hivern 1982.
- [BS90] V. Broman i M.J. Shensa. A compact algorithm for the intersection and approximation of n-dimensional polytopes. *Mathematics and Computers in Simulation (Transactions of IMACS)*, vol. 32, núm. 5, pàg. 469–480, desembre 1990.
- [Com93] P.L. Combettes. The foundations of set theoretic estimation. *Proceedings of the IEEE*, vol. 81, núm. 2, pàg. 182–208, febrer 1993.
- [CY90] J.J. Clark i A.L. Yuille. *Data fusion for sensory information processing systems*. Kluwer Academic, Boston (EUA), 1990.
- [Del89] J.R. Deller. Set membership identification in digital signal processing. *IEEE ASSP Magazine*, pàg. 4–20, octubre 1989.

- [DP89] G. Dakin i R. Popplestone. *Calculation of object pose constraints from sparse, erroneous sensory data*. Memòria tècnica, University of Massachusetts, juliol 1989.
- [DP90] G. Dakin i R. Popplestone. *Computing applied force constraints for insertion tasks using halfspace intersection projections*. Memòria tècnica, University of Massachusetts, juliol 1990.
- [DP93] G. Dakin i R. Popplestone. Fine-motion planning in the contact space of narrow-clearance assemblies. En *Proc. of the IASTED International Conference on Robotics and Manufacturing*, pàg. 206–208, Oxford (Regne Unit), setembre 1993.
- [Dur86] H.F. Durrant-White. Consistent integration and propagation of disparate sensor observations. *The International Journal of Robotics Research*, vol. 6, núm. 3, pàg. 3–24, tardor 1986.
- [Dur89] H.F. Durrant-White. Uncertain geometry. En D.Kapur i J.L.Mundy, editors, *Geometric Reasoning*, pàg. 447–481, MIT Press, London, 1989.
- [Ell91] R.E. Ellis. Geometric uncertainties in polyhedral object recognition. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, vol. 7, núm. 3, pàg. 361–371, juny 1991.
- [FH82] E. Fogel i Y.F. Huang. On the value of information in system identification - bounded noise case. *Automatica*, vol. 18, núm. 2, pàg. 229–238, 1982.
- [FO91] R.B. Fisher i M.J.L. Orr. Geometric reasoning in a parallel network. *The International Journal of Robotics Research*, vol. 10, núm. 2, pàg. 103–122, abril 1991.
- [GMR92] K.Y. Goldberg, M.T. Mason, i A. Requicha. *Geometric uncertainty in motion planning: Summary report and bibliography*. Memòria tècnica, University of Southern California, Los Angeles (California, EUA), agost 1992.
- [Hag90] D.H. Hager. *Task-directed sensor fusion and planning*. Kluwer Academic, Boston (EUA), 1990.
- [Hag92] G. Hager. Constraint solving methods and sensor-based decision making. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pàg. 1662–1667, Nice (França), maig 1992.
- [HEA93] G.D. Hager, S.P. Engleson, i S. Atiya. On comparing statistical and set-based methods in sensor data fusion. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pàg. 352–358, 1993.
- [HS90] J.K. Hackett i M. Shah. Multi-sensor fusion: a perspective. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pàg. 1324–1330, 1990.
- [Kah68] W. Kahan. Circumscribing an ellipsoid about the intersection of two ellipsoids. *Canadian Mathematical Bulletin*, vol. 11, núm. 3, pàg. 437–441, 1968.
- [LK89] R.C. Luo i M.G. Kay. Multisensor integration and fusion in intelligent systems. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 19, núm. 5, pàg. 901–931, setem/oct 1989.

- [LLS88] R.C. Luo, M-H. Lin, i R.S. Scherp. Dynamic multi-sensor data fusion system for intelligent robots. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 4, núm. 4, pàg. 386–396, agost 1988.
- [Man88] M. Mantyla. *An introduction to solid modeling*. Computer Science Press, 1988.
- [MB82] M. Milanese i G. Belforte. Estimation theory and uncertain intervals evaluation in presence of unknown but bounded errors: linear families of models. *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 27, núm. 2, pàg. 408–414, abril 1982.
- [MN90] S.H. Mo i J.P. Norton. Fast and robust algorithm to compute exact polytope parameter bounds. *Mathematics and Computers in Simulation (Transactions of IMACS)*, vol. 32, núm. 5, pàg. 481–493, desembre 1990.
- [MS74] G. Marsaglia i P.H. Styan. Rank conditions for generalized inverses of partitioned matrices. *The Indian Journal of Statistics (Sankhya)*, vol. 36, pàg. 437–442, 1974.
- [MS87] L. Matties i S.A. Shafer. Error modeling in stereo navigation. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 3, núm. 3, pàg. 239–248, juny 1987.
- [Nak91] Y. Nakamura. *Advanced robotics. Redundancy and optimization*, pàg. 15–102. Addison-Wesley, Massachusetts, 1991.
- [Nak93] S. Nakamura. *Applied numerical methods in C*. Prentice-Hall, London (Regne Unit), 1993.
- [Nei93] J. Neira. *Geometric object recognition in multisensor systems*. Tesi doctoral, Universidad de Zaragoza (Departamento de Ingenierría Eléctrica e Informática), Zaragoza, agost 1993.
- [NM90] J.P. Norton i S.H. Mo. Parameter bounding for time-varying systems. *Mathematics and Computers in Simulation (Transactions of IMACS)*, vol. 32, núm. 5, pàg. 527–534, desembre 1990.
- [NX89] Y. Nakamura i Y. Xu. Geometrical fusion method for multi-sensor robotic systems. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pàg. 668–672, Scottsdale (Arizona, EUA), maig 1989.
- [OHF92] M.J.K. Orr, J. Hallam, i R.B. Fisher. *Fusion through interpretation*. Memòria tècnica, Edinburgh University (Department of Artificial Intelligence), 1992.
- [PMS91] A. Preciado, D. Meizel, i A. Segovia. Fusion of multi-sensor data: a geometric approach. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pàg. 2806–2811, Sacramento (California, EUA), abril 1991.
- [Por88] J. Porrill. Optimal combination and constraints for geometrical sensor data. *The International Journal of Robotics Research*, vol. 7, núm. 6, pàg. 66–77, 1988.
- [PS85] F.P. Preparata i M.I. Shamos. *Computational Geometry. An introduction*. Springer-Verlag, New York, 1985.

- [PS92] J. Ponce i I. Shimshoni. An algebraic approach to line-drawing analysis in the presence of uncertainty. En *proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pàg. 1786–1791, Nice (França), maig 1992.
- [PTV92] W.H. Press, S.A. Teukolsky, i W.T. Vetterling. *Numerical recipes in C. The art of scientific computing*. Cambridge University Press, New York (EUA), 1992.
- [PW90] H. Piet-Lahanier i E. Walter. Exact recursive characterization of feasible parameter sets in the linear case. *Mathematics and Computers in Simulation (Transactions of IMACS)*, vol. 32, núm. 5, pàg. 495–504, desembre 1990.
- [PWPL89] L. Pronzato, E. Walter, i H. Piet Lahanier. Mathematical equivalence of two ellipsoidal algorithms for bounded-error estimation. En *Proceedings of the 28th IEEE Conference on Decision and control*, pàg. 1952–1955, Tampa, 1989.
- [RH90] A.K. Rao i Y-F. Huang. Recent developments in optimal bounding ellipsoidal parameter estimation. *Mathematics and Computers in Simulation (Transactions of IMACS)*, vol. 32, núm. 5, pàg. 515–526, desembre 1990.
- [San76] L.A. Santaló. *Integral Geometry and Geometric Probability*. Addison-Wesley, London (Regne Unit), 1976.
- [Sch73] F.C. Schweppe. *Uncertain dynamic systems*. Prentice Hall, New Jersey, 1973.
- [Sea82] S.R. Searle. *Matrix algebra useful for statistics*. John Wiley and sons, New York, 1982.
- [SK63] J.G. Semple i G.T. Kneebone. *Algebraic projective geometry*. Clarendon Press, Oxford, 1963.
- [SL91] S.F. Su i S.G. Lee. Uncertainty manipulation and propagation and verification of applicability of actions in assembly. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pàg. 2471–2476, Sacramento (California, EUA), abril 1991.
- [SL92] S.-F. Su i C.S.G. Lee. Manipulation and propagation of uncertainty and verification of applicability of actions in assembly tasks. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 22, núm. 6, pàg. 1376–1389, novem/des 1992.
- [SSC88] R. Smith, M. Self, i P. Cheeseman. Estimating uncertain spatial relationships in robotics. En J.F. Lemmer i L.N. Kanal, editors, *Uncertainty in Artificial Intelligence 2*, pàg. 435–461, Elsevier Science, North-Holland, 1988.
- [ST91] A. Sabater i F. Thomas. Set membership approach to the propagation of uncertain geometric information. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pàg. 2718–2723, Sacramento (California, EUA), abril 1991.
- [ST93] A. Sabater i F. Thomas. Propagation and fusion of uncertain geometric information. En *Proc. of the IASTED International Conference on Robotics and Manufacturing*, pàg. 34–38, Oxford (Regne Unit), setembre 1993.

- [ST96] A. Sabater i F. Thomas. Consistency checking of 2D polyhedral projections using set-membership fusion techniques. Pendent d'acceptació, 1996.
- [Str86] G. Strang. *Algebra lineal y sus aplicaciones*. Addison-Wesley Iberoamericana, Argentina, 1986.
- [Sug82] K. Sugihara. Mathematical structures of line drawings of polyhedrons - toward man-machine communication by means of line drawings. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, vol. 4, núm. 5, pàg. 458-469, setembre 1982.
- [Sug86] K. Sugihara. *Machine interpretation of line drawings*. MIT Press, Cambridge (Massachusetts, EUA), 1986.
- [Tar90] J.D. Tardós. *Integración multisensorial para reconocimiento y localización de objetos en Robótica*. Tesi doctoral, Univ. de Zaragoza (Dep. Ingen. Elèctr. e Informa.), Zaragoza, desembre 1990.
- [Tar92] J.D. Tardós. Representing partial and uncertain sensorial information using the theory of symmetries. En *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pàg. 1799-1804, Nice (France), maig 1992.
- [Tay76] R.H. Taylor. *A synthesis of manipulator control programs from task-level specifications*. Tesi doctoral, Standford Artificial Intelligence Laboratory, juliol 1976.
- [TL92] Y.C. Tang i S.G. Lee. A geometric feature relation graph formulation for consistent sensor fusion. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics*, vol. 22, núm. 1, pàg. 115-129, geber/feb 1992.
- [TV90] R. Tempo i A. Vicino. Optimal algorithms for system identification: a review of some recent results. *Mathematics and Computers in Simulation (Transactions of IMACS)*, vol. 32, núm. 5, pàg. 585-595, desembre 1990.
- [WP90] E. Walter i H. Piet-Lahanier. Estimation of parameter bounds from bounded-error data: a survey. *Mathematics and Computers in Simulation (Transactions of IMACS)*, vol. 32, núm. 5, pàg. 449-468, desembre 1990.
- [Xu92] H. Xu. *On the fusion of disparate sensory data*. Memòria tècnica, Univ. of Brussels (Dept. Flexible Produc. Systems), 1992.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
ADMINISTRACIÓ D'ASSUMPTES ACADÈMICS

Aquesta Tesi ha estat enregistrada

a la pàgina 92 amb el número 820

Barcelona, 15-1-97

L'ENCARREGAT DEL REGISTRE,

