



Departament d'Enginyeria Electrònica



UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Aplicacions de tècniques de fusió de dades per a l'anàlisi d'imatges de satèl·lit en Oceanografia

Tesi doctoral presentada per a
l'obtenció del títol de doctor

Ramon Reig Bolaño

Directors

Dr. Vicenç Parisi Baradad
Dr. Emili García Ladona

Aplicacions de tècniques de fusió de dades per a l'anàlisi d'imatges de satèl·lit en Oceanografia

Memòria de la tesi doctoral de

Ramon Reig Bolaño

Programa interuniversitari de Doctorat en Enginyeria Electrònica
Departament d'Enginyeria Electrònica de la UPC

Directors:

Dr. Vicenç Parisi Baradad
Dr. Emili García Ladona

ACTA DE QUALIFICACIÓ DE LA TESI DOCTORAL

Reunit el tribunal integrat pels sota signants per jutjar la tesi doctoral:

Títol de la tesi:

Autor de la tesi:

Acorda atorgar la qualificació de:

- No apte
- Aprovat
- Notable
- Excel·lent
- Excel·lent Cum Laude

Barcelona, de/d'..... de

El President

El Secretari

.....
(nom i cognoms)

.....
(nom i cognoms)

El vocal

El vocal

El vocal

.....
(nom i cognoms)

.....
(nom i cognoms)

.....
(nom i cognoms)

a la Montse,
l'Anna
i l'Arnau

Reconeixements

Aquesta tesi no hagués estat possible sense el recolzament i impuls que m'han donat en tot moment els meus directors: en Vicenç va ser qui em va engrescar en aquest projecte tan singular i l'Emili qui va acceptar d'entrar-hi molt generosament. Han sigut anys de treball intens, encara que a batzegades, i per sort sempre he pogut comptar amb ells. També han estat anys de trobades, plenes de bons consells, comentaris i discussions. Agraeixo la bona disponibilitat de l'Antonio, sempre a punt de fer aportacions molt valuoses i també per la seva revisió d'alguns dels articles de difusió realitzats. Vull agrair la feina de la Cath per les seves correccions de les traduccions a l'anglès. Dins el CMIMA també volia agrair els comentaris d'en Jaume, qui em va posar sobre la pista del mètode CLEAN d'interpolació, així com l'Óscar i d'altres persones, per les aportacions en diverses presentacions a les que varen assistir. Segurament haurem de trobar alguna excusa per seguir fent aquells 'dinarets' que allargaven la trobada una mica més del compte.

També vull agrair el recolzament dels meus companys de la UVIC, sense la seva complicitat aquesta tesi no hagués arribat a bon port; el suport i estímul d'uns i altres m'han ajudat a superar els moments més crítics. A en Pere i l'Enric perquè som part 'del nucli dur', en Jordi per ser *'el adelantado'*, a en Moisès, en Juli i en Xavier perquè no podem deixar perdre els esmorzars tecnològics, a en Jordi i en Xevi per ajudar-me sempre amb els meus problemes *informàtic-electrònic-sentimentals*. A tots els companys i col·legues de la UVIC, moltes gràcies per tirar endavant i per lluitar per un projecte tant engrescador. A les persones que en algun moment s'han interessat pel meu treball, els vull agrair particularment el seu ànim; sempre que algú em preguntava "com va la tesi?", o "ja llegeixes aviat no?", o "quan tens previst llegir?", i jo responia lacònicament "espero que l'any que ve", m'ajudava a pensar que "l'havia d'abandonar" tan aviat com pogués, tal com em recomanaven els que ja hi havien passat.

A la meva família els vull agrair tot el que m'han donat i el que em donen, les virtuts que pogués tenir són mèrit seu, els defectes, que no penso esbombar, corren per compte propi. Per concloure aquestes ratlles, volia dedicar el treball a la Montse i als nens: a l'Anna i l'Arnau perquè sou el millor regal, i a tu Montse per fer-me costat sempre.

Vic, primavera del 2008

Ramon Reig i Bolaño

Abstract

During the last decades a systematic survey of the Earth environment has been set up from many spatial and airborne platforms. At present, there is a continuous effort to extract and combine the maximum of quantitative information from these different data sets, often rather heterogeneous. Data fusion can be defined as "a set of means and tools for the alliance of data originating from different sources with the aims of a greater quality result". In this thesis we have developed new techniques and schemes that can be applied on multispectral data obtained from remote sensors, with particular interest in oceanographic applications. They are based on image and signal processing. We have worked mainly on two topics: image registration techniques or image alignment; and data interpolation of multiscale and sparse data sets, with focus on two dimensional vector fields.

In many applications using satellite images, and specifically in those related to oceanographic studies, it is necessary to merge or compare multiple images of the same scene acquired from different captors or from one captor but at different times. Typical applications include pattern classification, recognition and tracking, multisensor data fusion and environmental monitoring. Image registration is the process of aligning the remotely sensed images to the same ground truth and transforming them into a known geographic projection (map coordinates). This step is crucial to correctly merge complementary information from multisensor data. The proposed approach to automatic image registration is a robust method, valid for multimodal images affected by distortions, rotations and, to a reasonably extend, with severe data occlusion. We derived a point to point matching of one image to a georeferenced map applying multiresolution signal processing techniques. The method is based on the contours of images: it uses a maximum cross correlation measure on the biorthogonal undecimated discrete wavelet transforms of the codified coastline contours sequences. Once this point to point correspondence is established, the coefficients of a global transform could be calculated and finally applied on the working image to register it to the georeferenced map.

The second topic of this thesis focus on the interpolation of sparse irregularly-sampled vector fields when these sparse data belong to different resolutions. It is proposed a new algorithm to iteratively approximate the intermediate values between irregularly sampled data when a set of sparse values at coarser scales is known. The procedure is optimal if there is a characterized model for the multiresolution decomposition / reconstruction scheme of the dataset. The scheme is based on a fast dyadic wavelet transform and on its inversion using a filter bank analysis/synthesis implementation for the wavelet transform model. Although the problem is ill-posed, and there are infinite solutions, our approach, firstly worked for one dimension signals, gives an easy strategy to interpolate the values of a vector field using all the information available at different scales. This reconstruction method could be used as an extension on any initial interpolation. It can also be suitable in cases where there are sparse measures from different instruments that are sensing the same scene simultaneously at several resolutions, without any restriction to the characteristics of the data distribution. Initially a filter model for the generation of multiresolution data and their synthesis counterpart is the main requisite but; this assumption can be partially relaxed with the only requirement of a reasonable approximation to the low pass counterpart. The thesis results can be easily implemented on the process stream of any satellite receiving station and therefore constitute a first contribution to potential applications on data fusion of environmental monitoring.

Resum

Durant dècades s'ha observat i monitoritzat sistemàticament la Terra i el seu entorn des de l'espai o a partir de plataformes aerotransportades. Paral·lelament, s'ha tractat d'extreure el màxim d'informació qualitativa i quantitativa de les observacions realitzades. Les tècniques de fusió de dades donen un "ventall de procediments que ens permeten aprofitar les dades heterogènies obtingudes per diferents mitjans i instruments i integrar-les de manera que el resultat final sigui qualitativament superior". En aquesta tesi s'han desenvolupat noves tècniques que es poden aplicar a l'anàlisi de dades multispectrals que provenen de sensors remots, adreçades a aplicacions oceanogràfiques. Bàsicament s'han treballat dos aspectes: les tècniques d'enregistrament o alineament d'imatges; i la interpolació de dades esparses i multiescalars, focalitzant els resultats als camps vectorials bidimensionals.

En moltes aplicacions que utilitzen imatges derivades de satèl·lits és necessari mesclar o comparar imatges adquirides per diferents sensors, o bé comparar les dades d'un sol sensor en diferents instants de temps, per exemple en: reconeixement, seguiment i classificació de patrons o en la monitorització mediambiental. Aquestes aplicacions necessiten una etapa prèvia d'enregistrament geomètric, que alinea els píxels d'una imatge, la imatge de treball, amb els píxels corresponents d'una altra imatge, la imatge de referència, de manera que estiguin referides a uns mateixos punts. En aquest treball es proposa una aproximació automàtica a l'enregistrament geomètric d'imatges amb els contorns de les imatges; a partir d'un mètode robust, vàlid per a imatges multimodals, que a més poden estar afectades de distorsions, rotacions i de, fins i tot, oclusions severes. En síntesi, s'obté una correspondència punt a punt de la imatge de treball amb el mapa de referència, fent servir tècniques de processament multiresolució. El mètode fa servir les mesures de correlació creuada de les transformades *wavelet* de les seqüències que codifiquen els contorns de la línia de costa. Un cop s'estableix la correspondència punt a punt, es calculen els coeficients de la transformació global i finalment es poden aplicar a la imatge de treball per a enregistrar-la respecte la referència.

A la tesi també es prova de resoldre la interpolació d'un camp vectorial espars mostregat irregularment. Es proposa un algorisme que permet aproximar els valors d'entremig de les mostres irregulars, si es disposa de valors esparsos a escales de menys resolució. El procediment és òptim si tenim un model que caracteritzi l'esquema multiresolució de descomposició i reconstrucció del conjunt de dades. Es basa en la transformada *wavelet* discreta diàdica i en la seva inversa, realitzades a partir d'uns bancs de filtres d'anàlisi i síntesi. Encara que el problema està mal condicionat i té infinites solucions, la nostra aproximació, que primer treballarem amb senyals d'una dimensió, dóna una estratègia senzilla per a interpolar els valors d'un camp vectorial bidimensional, utilitzant tota la informació disponible a diferents resolucions. Aquest mètode de reconstrucció es pot utilitzar com a extensió de qualsevol interpolació inicial. També pot ser un mètode adequat si es disposa d'un conjunt de mesures esparses de diferents instruments que prenen dades d'una mateixa escena a diferents resolucions, sense cap restricció en les característiques de la distribució de mesures. Inicialment cal un model dels filtres d'anàlisi que generen les dades multiresolució i els filtres de síntesi corresponents, però aquest requeriment es pot relaxar parcialment, i és suficient tenir una aproximació raonable a la part passa baixes dels filtres. Els resultats de la tesi es podrien implementar fàcilment en el flux de processament d'una estació receptora de satèl·lits, i així es contribuiria a la millora d'aplicacions que utilitzessin tècniques de fusió de dades per a monitoritzar paràmetres mediambientals.

Taula de continguts

Capítol 1.	Introducció.....	1
1.2	Enregistrament geomètric d'imatges.....	3
1.3	Anàlisi subbanda i transformades <i>wavelet</i>	7
1.4	Interpolació d'un camp de velocitats superficial.....	8
1.5	Objectius i estructura de la memòria.....	11
Capítol 2.	Mètodes i materials.....	13
2.1	Transformada <i>wavelet</i> discreta (DWT) i bancs de filtres.....	13
2.1.1	Transformada <i>wavelet</i> contínua.....	13
2.1.2	Transformada <i>wavelet</i> discreta.....	15
2.2	Anàlisi multiresolució amb l'algorisme ' <i>à trous</i> ' (UIDWT).....	16
2.3	Banc de filtres per a reconstrucció 'perfecte'.....	18
2.3.1	Propietats dels bancs de filtres amb reconstrucció 'perfecte'.....	18
2.3.2	Matrius AWT_L (<i>Analysis matrix from Wavelet Transform</i>) i $SIWT_L$ (<i>Synthesis matrix for Inverse Wavelet Transform</i>).....	22
2.4	Reconstrucció d'un senyal a partir dels màxims del mòdul i els passos per zero de la transformada <i>wavelet</i>	24
2.4.1	Presentació i resultats obtinguts.....	24
2.4.2	Esquema del banc de filtres de síntesi modificat.....	26
2.4.3	Factor d'escala en el processament de dades amb taxa múltiple.....	27
2.4.4	Proposta i justificació del banc de filtres de síntesi modificat.....	29
2.4.5	Resum.....	30
2.5	Materials i dades utilitzades.....	32
2.5.1	Dades SST (<i>Sea Surface Temperature</i>) i GEBCO (<i>General Bathymetric Chart of Oceans</i>).....	32
2.5.2	Camps vectorials de treball, procedents de mesures i dels models de simulació.....	33
Capítol 3.	Enregistrament geomètric d'imatges Alineament d'imatges.....	35
3.1	Introducció.....	35
3.2	Etapes per a l'enregistrament geomètric d'imatges.....	36
3.3	Casos exemple.....	38
3.4	Preprocessament, obtenció dels contorns de les imatges.....	40
3.5	Mètode de selecció i aparellament de GCPs per MCC d'àrea en domini temporal. Mètode de referència.....	42
3.6	Mètode de selecció i aparellament de GCP per MCC d'àrea amb anàlisi <i>wavelet</i> 2D.....	43
3.6.1	Esquema.....	44
3.6.2	Selecció dels GCP per cada escala de sL fins a 0.....	45
3.6.3	Aparellament dels GCP amb MCC.....	47
3.7	Mètode de selecció i aparellament de GCPs per MCC en 1D amb anàlisi <i>wavelet</i> i DTW (<i>Dynamic Time Warping</i>).....	48
3.7.1	Descriptors de contorns.....	48
a)	Codificació dels contorns amb un codi de cadena modificat (CFM) ...	48
b)	Descriptor d'una imatge a partir dels contorns codificats amb CFM ...	51
3.7.2	Exemple de treball.....	52
3.7.3	Anàlisi <i>wavelet</i> de cada segment dels contorns.....	54
3.7.4	Càlcul de les correlacions creuades dels segments.....	57
3.7.5	Aparellament dels segments.....	59
3.7.6	Aparellament elàstic de GCPs amb DTW (<i>Dynamic Time Warping</i>). ...	60
3.8	Etapes comuns a partir de les parelles de GCPs.....	64
3.8.1	Obtenció de coeficients de la transformació.....	64
a)	Càlcul dels coeficients a partir de les N parelles de GCPs inicials.....	64
b)	Càlcul de l'error RMSE als GCPs.....	64

c) Selecció de les parelles de GCPs minimitzant RMSE. Procés iteratiu	65
3.8.2 Etapa comú d'interpolació dels valors a la imatge resultant	65
3.9 Resultats de l'enregistrament	66
3.9.1 Enregistrament clàssic per MCC d'àrea en domini espacial	66
3.9.2 Mesura quantitativa resultats. Distància mínima mitjana ($dist_m$)	67
3.9.3 Enregistrament MCC en espai 2D, amb anàlisi <i>wavelet</i>	67
3.9.4 Enregistrament MCC en espai 1D, anàlisi <i>wavelet</i> i DTW	70
3.10 Resum de resultats i discussions finals	74
Capítol 4. Reconstrucció iterativa a partir d'un model i de dades multiescalars i esparses (RIMME)	77
4.1 Introducció	77
4.2 Una aproximació iterativa a la reconstrucció basada en un model a partir de dades multiescalars i esparses (RIMME)	77
4.2.1 Definicions de les matrius de treball i resultats RIMME	78
4.2.2 Deducció del mètode de Reconstrucció Iterativa a partir d'un Model i de dades Multiescalars i Esparses (RIMME)	80
4.2.3 Esquema general i algorisme d'interpolació RIMME	81
4.2.4 Discussió i comparació dels resultats	83
4.3 Extensió del mètode RIMME (camp de velocitats superficial)	85
4.3.1 Bancs de filtres per l'anàlisi i síntesi multiresolució	85
4.3.2 Definicions de les matrius de treball	86
4.3.3 Algorisme RIMME amb senyals bidimensionals complexes	86
4.3.4 Exemples i resultats	87
4.3.5 Conclusions	96
Capítol 5. Fusió de dades multiresolució	97
Capítol 6. Resum i conclusions generals	109
Capítol 7. Línies de treball futures	111
Bibliografia	113

Llista de figures

figura 1.1	Imatge de Temperatura Superficial del mar (SST) a la zona central la Costa Atlàntica Nord-americana, on s'aprecien estructures superficials.....	1
figura 1.2	Exemple de Imatge de temperatura Superficial (SST), representada conjuntament amb un camp vectorial de velocitats superficials. SST de la zona del corrent del Golf el 24 de Juliol de 1996, conjuntament amb vectors de velocitat obtinguts a partir de l'anàlisi Delft [50].	3
figura 1.3	Exemple d'enregistrament d'una imatge a una referència. Mar Mediterrània amb núvols sintètics, a la zona del mar d'Alborà. Els detalls a l'obtenció són a l'apartat 3.7.	5
figura 1.4	Esquema del sistema de georeferenciació d'imatges proposat. A l'entrada del sistema d'enregistrament automàtic tenim les imatges i per l'altre cantó una base de dades geogràfica de la línia de la costa. Per fer la georeferenciació amb precisió s'aplica un enregistrament de les imatges a partir de l'extracció i codificació de les línies de costa. Després es determinen els punts singulars de la línia de costa (GCP- Ground Control Points) i els corresponents punts aparellats a la imatge de referència. I finalment s'obté la Imatge Georeferenciada aplicant l'enregistrament geomètric corresponent sobre les imatges de treball.....	6
figura 1.5	Exemple de camp de velocitats interpolat (dreta), respecte el camp de velocitat espars original (esquerra).....	9
figura 2.1	Subespais de les aproximacions amb un esquema d'anàlisi multiresolució. La allargada de cada rectangle simbolitza la resolució corresponent, d'alta a baixa. Amb V_0 l'espai de senyal original, els V_i els espais aproximats, més grollers o de baixa resolució anuats i els W_i els espais de detalls complementaris, per a generar l'espai aproximat de nivell anterior.....	16
figura 2.2	Senyal f a través d'un banc de filtres. HP filtre passa altes, component de detall d i filtre passa baixes LP, component aproximada a . A la sortida tenim el senyal reconstruït \hat{f}	18
figura 2.3	Banc de filtres amb etapes d'anàlisi i síntesi sense submostreig. HP_{a_1} : filtre passa altes de l'etapa d'anàlisi a nivell 1, genera el senyal de detall a nivell 1 d_1 . LP_{a_1} : filtre passa baixes de l'etapa d'anàlisi a nivell 1, genera el senyal aproximat a nivell 1. HP_{s_1} : filtre passa altes de l'etapa de síntesi a nivell 1, genera la senyal de detall d . LP_{s_1} : filtre passa baixes de l'etapa de síntesi a nivell 1, genera el senyal aproximat a	18
figura 2.4	Respostes freqüencials de banc de filtres a escala 1. Freqüències normalitzades respecte de la freqüència de mostreig (F_s). A dalt a l'esquerra respostes dels filtres d'anàlisi. A la dreta respostes dels filtres de síntesi. A sota les respostes de la composició global en cascada dels filtres d'anàlisi i de síntesi, dels filtres passa altes (en vermell) i els passa baixes (en blau).	19
figura 2.5	Descomposició o anàlisi multiresolució fins al nivell 4. Descomposició multiresolució diàdica d'un senyal f a l'etapa d'anàlisi, amb 4 nivells. Per cada nivell s'obté una component de detalls (passa altes) d_i , i una component aproximada (passa baixes) a_i . A la següent etapa en cascada es descomposa la component aproximada amb les components de nivell 2 i així successivament fins a arribar al nivell L, on els filtres tenen una longitud comparable a les dimensions del senyal que es vol filtrar. Les sortides de l'etapa d'anàlisi la representarem com AWT_L	20
figura 2.6	Reconstrucció o síntesi a partir de l'anàlisi multiresolució representat a la figura anterior. Amb les components de detall $\{d_1...d_L\}$ a totes les escales i la component aproximada a_L al nivell màxim L. Els agruparem a la matriu $SIWT_L$. Es fan servir els bancs de filtres de síntesi per a reconstruir una aproximació al senyal \hat{f}	21

figura 2.7	Respostes freqüencials del banc de filtres fins al nivell 2. A dalt a l'esquerre respostes dels filtres de l'etapa d'anàlisi. A dalt a la dreta respostes dels filtres de l'etapa de síntesi. A sota la resposta composta de les etapes d'anàlisi i síntesi corresponents fins al nivell 2. Tenim les respostes dels filtres al nivell 1: els passa altes en vermell, i els passa baixes de color blau i ratllats (per indicar que es descomponen al nivell següent). En el nivell 2 es descomponen en una component passa altes (cian) i una passa baixes (rosa).....	21
figura 2.8	Respostes freqüencials del banc de filtres fins al nivell 3. A dalt a l'esquerre respostes dels filtres de l'etapa d'anàlisi. A dalt a la dreta respostes dels filtres de l'etapa de síntesi. A sota la resposta composta de les etapes d'anàlisi i síntesi corresponents fins al nivell 3. Les respostes dels filtres al nivell 1, en vermell els passa altes, i en blau i ratllat els passa baixes. Les components passa baixes es descomponen en el nivell 2 en una component passa altes (rosa) i una component passa baixes (cian ratllada). Les components passa baixes es descomponen en el nivell 3 en una component passa altes (verda) i una component passa baixes (cian).	22
figura 2.9	Senyal original arbitrari.	23
figura 2.10	Anàlisi multiresolució fins al nivell 8. Matriu $AWT_L=[d_1, \dots, d_8, a_8]$	23
figura 2.11	Vermell: \hat{f} síntesi de la descomposició fins al nivell $L=8$;Blau: f senyal original (estan superposats).	23
figura 2.12	Senyal original arbitrària f	25
figura 2.13	Mòduls màxims dels senyals de l'anàlisi multiresolució, $SIWT_L$. Corresponents als mòduls màxims de les components de detall a cada escala i el valor promitjat de la component aproximada a l'escala L	25
figura 2.14	En Vermell: el senyal \hat{f} reconstruït a partir de l'etapa de síntesi modificada amb L nivells ($L=8$). En Blau: el senyal original f	25
figura 2.15	Esquema final per a la reconstrucció d'un senyal a partir dels mòduls màxims dels detalls de les wavelets a diferents escales i el promig de l'escala més gran. L'esquema correspon a un banc de filtres de l'etapa de síntesi multiresolució modificats amb un factor multiplicador per cada escala.	26
figura 2.16	En vermell: Factor multiplicador a l'escala 'i' (M_i), respecte l'escala. En blau: longituds dels filtres respecte l'escala.....	26
figura 2.17	En vermell representem els senyals de detall als nivells 7 i 8, i en blau les seves simplificacions, els màxims.....	27
figura 2.18	Representació temporal de la primera etapa en la delmació de $x[n]$ en un factor M , el resultat és $y[n]$ que té $M-1$ zeros entre dos valors diferents de zero.	27
figura 2.19	Representació en el domini transformat del resultat de la primera etapa d'una delmació temporal de $x[n]$ per un factor M , $y[n]$. Relació de la transformada $X(w)$ amb la transformada del senyal de sortida $Y(w)$. Destaquem el factor M	28
figura 2.20	Esquema d'un interpolador per M . El senyal original $z[m]$ l'hi afegim M zeros entre mostres i s'obté $y[n]$; a continuació es fa el filtratge passa baixes i es multiplica per M , per a obtenir el senyal interpolat $x[n]$	29
figura 2.21	Intervals temporals T_{min} , T_{zc} , T_{mzc}	30
figura 2.22	Primera versió del banc de filtres de síntesi modificat. La versió utilitzada és eliminant els primers filtres passa baixes, ja que després, un cop s'ha sumat la component passa baixes, apliquem un filtre amb la mateixa banda de pas..	31
figura 3.1	Etaques generals esquemàtiques de les tècniques d'enregistrament de dues imatges.	37
figura 3.2	Imatge 1 de referència i Imatge 2 de treball, són imatges SST amb una lleugera rotació i desplaçament, utilitzades pel Cas 1.....	39
figura 3.3	Imatge 1 de referència. A la dreta els tres casos 2a, 2b i 2c de la Imatge 2 de treball. La imatge 2a és la SST estàndard, la imatge 2b es una SST amb rotació i desplaçada, i la imatge 2c té una rotació i un desplaçament més part de la imatge coberta per núvols.	40
figura 3.4	Contorns de les Imatges del Cas 1	40

figura 3.5	Contorns de les Imatges dels casos 2	41
figura 3.6	Plantilla bàsica del detector de contorns.....	41
figura 3.7	Finestres d'anàlisi i de cerca amb els seus paràmetres sobre les imatges. A la gràfica es marquen també els punts de treball esmentats al text.	42
figura 3.8	Selecció i aparellament de GCPs per MCC d'àrea en els contorns.....	43
figura 3.9	Diagrama de flux complert del mètode d'enregistrament basat en la MCC de les transformades wavelet 2D.	44
figura 3.10	Exemple dels histogrames del nivell de gris de cada una de les regions de la Imatge_2 a escala 1. Els mínims identifiquen els punts singulars de cada regió.	45
figura 3.11	Imatge_2 i Imatge_1 a escala 1. Sobre la Imatge_2 els GCP seleccionats estan remarcats en verd. A la Imatge_1 tots els punts de la línia de costa són considerats GCP.....	46
figura 3.12	Imatge_2 i Imatge_1 a escala 2. Sobre la Imatge_2 els GCP seleccionats estan remarcats en verd. A la Imatge_1 tots els punts de la línia de la costa són considerats GCP	46
figura 3.13	Aparellament dels GCPs entre Imatge_2 (punts verds) i Imatge_1 per les escales 0, 1 i 2.	47
figura 3.14	Plantilla bàsica del codificador de cadena / Valors assignats.....	48
figura 3.15	Seqüència del contorn: {1,2,1,7,6,7,1,2,2,2,1,2,1,3,3}.....	48
figura 3.16	Contorn de la costa africana i costa africana rotada i desplaçada.....	49
figura 3.17	Contorns codificats amb codi de cadena (CF).....	50
figura 3.18	Contorns codificats amb codi de cadena modificat (CFM).....	50
figura 3.19	Seqüències CFM suavitzades.....	50
figura 3.20	Descriptor d'imatges. Cada contorn és un pla de la matriu 3D, i per cada pla es té un descriptor dels contorns, amb tots els punts del contorn, els codis CF i CFM, i enllaços a altres contorns.	51
figura 3.21	Contorns de les imatges per trams. A l'esquerre la Imatge 1 de referència, amb els seus trams de contorns: c1i1 , c2i1 i c3i1 . A la dreta la Imatge 2 de treball, amb els seus trams de contorns: c1i2 , c2i2 , c3i2 i c4i2	52
figura 3.22	Codis de cadena dels trams dels contorns de la Imatge 1 de referència, a cada un s'indica la posició del píxel inicial. (c1i1,c2i1,c3i1).	53
figura 3.23	Codis de cadena dels trams dels contorns de la Imatge 2 de treball, a cada un s'indica la posició del píxel inicial. (c1i2,c2i2,c3i2,c4i2).	53
figura 3.24	Anàlisi wavelet del codi de contorn 1 de la Imatge 1, (c1i1). A dalt a l'esquerre la seqüència original, anar descendint es troba la descomposició wavelet de la component aproximada d'ordres successius, a l'esquerre la component aproximada i a la dreta la corresponent component de detall.....	54
figura 3.25	Anàlisi wavelet del codi de contorn 2 de la Imatge 1, (c2i1). A dalt a l'esquerre la seqüència original, anar descendint es troba la descomposició wavelet de la component aproximada d'ordres successius, a l'esquerre la component aproximada i a la dreta la corresponent component de detall.....	54
figura 3.26	Anàlisi wavelet del codi de contorn 3 de la Imatge 1, (c3i1). A dalt a l'esquerre la seqüència original, anar descendint es troba la descomposició wavelet de la component aproximada d'ordres successius, a l'esquerre la component aproximada i a la dreta la corresponent component de detall.....	55
figura 3.27	Anàlisi wavelet del codi de contorn 1 de la Imatge 2, (c1i2). A dalt a l'esquerre la seqüència original, anar descendint es troba la descomposició wavelet de la component aproximada d'ordres successius, a l'esquerre la component aproximada i a la dreta la corresponent component de detall.....	55
figura 3.28	Anàlisi wavelet del codi de contorn 2 de la Imatge2, (c2i2). A dalt a l'esquerre la seqüència original, anar descendint es troba la descomposició wavelet de la component aproximada d'ordres successius, a l'esquerre la component aproximada i a la dreta la corresponent component de detall.....	56
figura 3.29	Anàlisi wavelet del codi de contorn 3 de la Imatge2, (c3i2). A dalt a l'esquerre la seqüència original, anar descendint es troba la descomposició wavelet de	

la component aproximada d'ordres successius, a l'esquerre la component aproximada i a la dreta la corresponent component de detall.....	56
figura 3.30 Anàlisi wavelet del codi de contorn 4 de la Imatge2, (c4i2). A dalt a l'esquerre la seqüència original, anar descendint es troba la descomposició wavelet de la component aproximada d'ordres successius, a l'esquerre la component aproximada i a la dreta la corresponent component de detall.....	57
figura 3.31 Correlació creuada c4i2 amb c1i1 . A dalt representació de la correlació, el màxim marcat amb un asterisc vermell, a baix seqüència de les components aproximades utilitzades.	58
figura 3.32 Correlació creuada de c4i2 amb c2i1 . A dalt representació de la correlació, el màxim marcat amb un asterisc vermell, a baix seqüència de les components aproximades utilitzades.....	58
figura 3.33 Correlació creuada de c4i2 amb c3i1 . A dalt representació de la correlació, el màxim marcat amb un asterisc vermell, a baix seqüència de les components aproximades utilitzades.....	58
figura 3.34 Prova de consistència dels centres dels trams aparellats inicialment. Amb un cercle s'han marcat els trams inconsistents i amb una creu l'aparellament entre trams que s'ha eliminat.....	59
figura 3.35 Càlcul de DTW a partir de vectors r i s normalitzats: amb resultats de D i DAR amb el camí òptim W_{opt} marcat.	61
figura 3.36 Càlcul de DTW a partir de les transformades wavelets dels contorns c2i1 , c1i2 : amb resultats de DAR amb el camí òptim W_{opt} marcat.	61
figura 3.37 Càlcul de DTW a partir de les transformades wavelets dels contorns c3i1 , c2i2 : amb resultats de DAR amb el camí òptim W_{opt} marcat.	62
figura 3.38 Càlcul de DTW a partir de les transformades wavelets dels contorns c3i1 , c4i2 : amb resultats de DAR amb el camí òptim W_{opt} marcat.	62
figura 3.39 Càlcul de DTW a partir de les transformades wavelets dels contorns c2i1 , c3i2 : amb resultats de DAR amb el camí òptim W_{opt} marcat.	62
figura 3.40 Aparellament de GCP de les imatges de contorns i1 , i2	63
figura 3.41 Representació d'un parell de GCPs relacionats.....	64
figura 3.42 Esquema d'enregistrament	65
figura 3.43 Enregistrament MCC 2D clàssic pel Cas 1, d'una imatge rotada (imatge 2) respecte una imatge de referència (imatge 1). S'inclou la imatge resta Imatge2 modificada - Imatge 1, que pot servir de comparació. Es fa sobre la imatge de contorns ($dist_m=3.83$) i sobre la imatge complerta.....	66
figura 3.44 Resultats de l'enregistrament MCC 2D wavelet, cas 1 ($dist_m=0.42$).	68
figura 3.45 Resultats de l'enregistrament MCC 2D wavelet, cas 2a ($dist_m=4.47$) ..	69
figura 3.46 Representació dels resultats de l'enregistrament amb el mètode MCC amb wavelet 1D i DTW pel Cas 1 ($dist_m=0.52$).....	70
figura 3.47 Representació dels resultats de l'enregistrament amb el mètode MCC amb wavelet 1D i DTW pel Cas 2a ($dist_m=1.33$).....	71
figura 3.48 Representació dels resultats de l'enregistrament amb el mètode MCC amb wavelet 1D i DTW pel Cas 2b ($dist_m=1.35$).....	72
figura 3.49 Representació dels resultats de l'enregistrament amb el mètode MCC amb wavelet 1D i DTW pel Cas 2c ($dist_m=1.37$).....	73
figura 3.50 Imatge georeferenciada amb l'enregistrament MCC wavelet 1D i DTW cas 2c ($dist_m=1.37$).	74
figura 3.51 Temps relatiu de càlcul en funció del nombre de punts d'un contorn. ..	76
figura 4.1 Valors multiescalars esparsos SHRIWT (cercles vermells) i senyals multiescalars originals AHRWT(puntejats blaus).....	79
figura 4.2 Senyal reconstruïda (\hat{s}) amb 12 iteracions del mètode RIMME comparada amb el senyal original (s).	79
figura 4.3 Esquema per a l'implementació de l'algoritme RIMME. Amb aquest esquema s'obté l'interpolació \hat{s} a partir de les dades esparses i multiescalars fins a	

escala 1 **SHRIWT**₁= [**sm**, **am**₁]. Amb B1 es fa la interpolació inicial de les dades **vm**. Amb B2 s'implementa (65). Amb B3 s'implementa (63). Amb B4 s'implementa (64) en el nivell L, i en els L-1 nivells restants es faria la suma de l'error i el resultat de l'error del nivell anterior..... 82

figura 4.4 Valors $10\log(\text{RMSE}_1)$ per cada iteració. Els pics representen l'entrada de nous nivells de l'arbre de descomposició a l'esquema RIMME. Es comença amb només nivell 1. Després s'incorpora el nivell 2. A continuació el nivell 3. I així fins al nivell 7 en aquest cas..... 83

figura 4.5 Resultats reconstrucció CLEAN 1000 iteracions (línia contínua) respecte senyal original (puntejat) a partir de mostres esparses (cercles). 84

figura 4.6 Resultats de RIMME amb 15 iteracions (línia continua) a partir del resultat de CLEAN a l'etapa inicial (mirar figura anterior), respecte senyal original (línia discontinua). 84

figura 4.7 Banc de filtres per a matrius de reals (NxM), **X**. 85

figura 4.8 Banc de filtres per a matrius de complexes (NxM), **F=U+jV**. 85

figura 4.9 Mòdul de les respostes freqüencials globals (anàlisi/síntesi conjunts) Low-Low, High-Low, Low-High & High-High. 86

figura 4.10 Camp de velocitats nivell 0 (original) i les components. **F=U+j V**. 87

figura 4.11 Camp de velocitats nivell 1 i les components. **Fa₁=Ua₁+j Va₁**. 88

figura 4.12 Camp de velocitats nivell 2 i les components. **Fa₂=Ua₂+j Va₂**. 88

figura 4.13 Camp de velocitats nivell 3 i les components. **Fa₃=Ua₃+j Va₃**. 89

figura 4.14 Camp de velocitats nivell 4 i les components. **Fa₄=Ua₄+j Va₄**. 89

figura 4.15 Camp espars de velocitats nivell 0 i les components. **Fm=Um+j Vm**... 90

figura 4.16 Camp espars a nivell 1 i les components. **Fam₁=Uam₁+j Vam₁**. 90

figura 4.17 Camp espars nivell 2 i les components. **Fam₂=Uam₂+j Vam₂**. 91

figura 4.18 Camp espars a nivell 3 i les components. **Fam₃=Uam₃+j Vam₃**. 91

figura 4.19 Camp espars nivell 4 i les components. **Fam₄=Uam₄+j Vam₄**. 92

figura 4.20 Camp interpolat nivell 4 i les components. **Fa₄ = Ua₄ + jVa₄**. 92

figura 4.21 Camp interpolat nivell 3 i les components. **Fa₃ = Ua₃ + jVa₃**. 93

figura 4.22 Camp interpolat nivell 2 i les components. **Fa₂ = Ua₂ + jVa₂**. 93

figura 4.23 Camp interpolat nivell 1 i les components. **Fa₁ = Ua₁ + jVa₁**. 94

figura 4.24 Camp interpolat nivell 0 i les components. **F = U + jV**. 94

figura 5.1 Camp de velocitats nivell 0 (original), **F=U+j V**. 98

figura 5.2 Components del camp de velocitats nivell 0 (original), **F=U+j V**. 98

figura 5.3 Camp de velocitats nivell 1, **Fa₁=Ua₁+j Va₁**. 99

figura 5.4 Components del camp de velocitats nivell 1, **Fa₁=Ua₁+j Va₁**. 99

figura 5.5 Camp de velocitats nivell 2, **Fa₂=Ua₂+j Va₂**. 100

figura 5.6 Components del camp de velocitats nivell 2, **Fa₂=Ua₂+j Va₂**. 100

figura 5.7 Camp espars de velocitats a nivell 0 **Fm=Um+j Vm**. 101

figura 5.8 Components del camp espars de velocitats a nivell 0 **Fm=Um+j Vm**. ... 101

figura 5.9 Camp espars a nivell 1. **Fam₁=Uam₁+j Vam₁**. 102

figura 5.10 Components del camp espars a nivell 1. **Fam₁=Uam₁+j Vam₁**. 102

figura 5.11 Camp espars a nivell 2. **Fam₂=Uam₂+j Vam₂**. 103

figura 5.12 Components del camp espars a nivell 2. **Fam₂=Uam₂+j Vam₂**. 103

figura 5.13 Camp interpolat a nivell 2. **Fa₂ = Ua₂ + jVa₂**. 104

figura 5.14 Components del camp interpolat a nivell 2. **Fa₂ = Ua₂ + jVa₂**. 104

figura 5.15 Camp interpolat a nivell 1. **Fa₁ = Ua₁ + jVa₁**. 105

figura 5.16 Components del camp interpolat a nivell 1. **Fa₁ = Ua₁ + jVa₁**. 105

figura 5.17 Camp interpolat a nivell 0. **F = U + jV**. 106

figura 5.18 Components del camp interpolat a nivell 0. **F = U + jV**. 106

Lista de taules

Taula 3-1: Matriu de correlacions creuades màximes entre els diferents segments de contorns.....	57
Taula 3-2: <i>Figures associades als resultats de cada cas per cada un dels mètodes...</i>	74
Taula 3-3: <i>Resultats quantitius per cada mètode amb cada cas, valors de $dist_m$.....</i>	75
Taula 4-1: <i>PSNR dels camps de velocitat superficials de l'exemple en els diferents nivells multiresolució.....</i>	95
Taula 4-2: <i>EVM (Error Vector Magnitude) dels camps de velocitat superficials de l'exemple en els diferents nivells multiresolució.</i>	95
Taula 5-1: <i>PSNR dels camps de velocitat superficials de l'exemple en els diferents nivells multiresolució.....</i>	107
Taula 5-2: <i>EVM (Error Vector Magnitude) dels camps de velocitat superficials de l'exemple en els diferents nivells multiresolució.</i>	107

Capítol 1. Introducció

Durant dècades s'han anat acumulant grans quantitats de dades molt diverses que provenen de l'observació de la Terra des de l'espai o a partir de plataformes aerotransportades. Sistemàticament s'han monitoritzat fenòmens naturals, tant a la superfície terrestre, com a la superfície marina, així com també a l'atmosfera. Per a poder extreure el màxim d'informació d'aquesta gran quantitat de dades, que són molt heterogènies i al mateix temps de diferents naturaleses, s'han anat perfeccionant els models teòrics des de diferents disciplines científiques, al mateix temps que s'han elaborat i aplicat tècniques i metodologies de processament de senyal, que moltes vegades han permès fer la fusió de dades recollides a la pròpia superfície terrestre amb dades que provenen de les mesures remotes. Normalment anomenem fusió de dades al "conjunt de procediments que ens permeten aprofitar les dades obtingudes per diferents mitjans i instruments i integrar-les de manera que el resultat final sigui qualitativament superior" ([94], [110]). L'observació dels oceans des de plataformes orbitals és la única metodologia de sondeig capaç de monitoritzar de manera sinòptica àrees extenses dels oceans ([36], [83]). Els sensors remots de temperatura com els de l'AVHRR (*Advanced Very High Resolution Radiometer*), embarcats als satèl·lits de la sèrie Nimbus de la NOAA (*National Oceanic and Atmospheric Administration*), o l'ATSR (*Along Track Scanning Radiometer*) de l'ERS-2 de la ESA (*Agència Espacial Europea*); els de color com el SeaWiFS (*Sea-viewing Wide-Field-of View Sensor*) del SeaStar o anteriorment el CZCS (*Coastal Zone Color Scanner*) del Nimbus-7; o els altímetres com els TOPEX/Poseidon o els de l'ERS-2, ens mostren un oceà en el que hi ha estructures actives a l'ordre de mesoscala: amb escales temporals de l'ordre de dies i/o setmanes i escales espacials de l'ordre del radi de deformació de Rossby - R_d - [83] (p.e. R_d a la Mediterrània Occidental és de l'ordre de 15-20 Km)

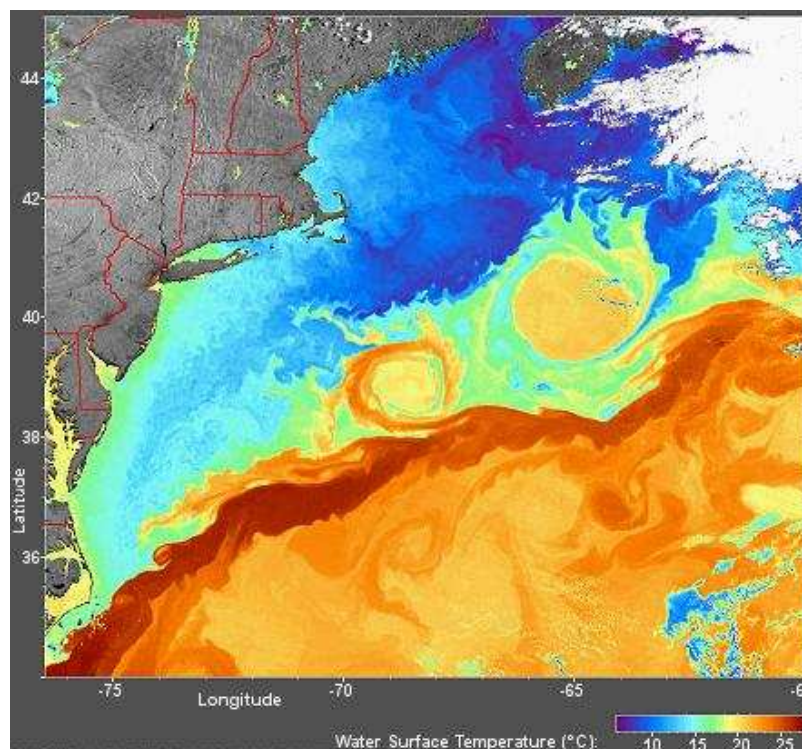


figura 1.1 *Imatge de Temperatura Superficial del mar (SST) a la zona central la Costa Atlàntica Nord-americana, on s'aprecien estructures superficials.*

Aquestes estructures actives en forma de fronts, remolins, dipols o filaments, contribueixen de manera fonamental al transport d'energia, de biomassa, de substàncies químiques dissoltes, o de matèria en suspensió. El camp de velocitats és el paràmetre més important per a poder entendre adequadament la dinàmica dels processos de transport i mescla als oceans, i és difícil d'obtenir a partir de les imatges i dades dels satèl·lits [83]. En una primera aproximació es pot obtenir la component geostrofica del camp de velocitats indirectament a partir de dades altimètriques, o de forma aproximada a partir de l'evolució temporal de les estructures tèrmiques presents a les imatges d'infrarojos. A partir de dades altimètriques es pot calcular la forma de la superfície de l'oceà (SSH - *Sea Surface Height*-) respecte la geòide de referència, i per tant ens permet estimar la component geostrofica del camp de velocitats, però amb una resolució espacial limitada, ja que només és al llarg de la traça del satèl·lit i correspon a la component del camp de velocitats superficial perpendicular a la traça. Aquest fet permet pensar en les possibilitats de combinar dades de diferents satèl·lits conjuntament amb tècniques d'interpolació espacials i temporals ([48], [49]) per tal d'obtenir un camp de velocitats superficial dens i calibrat [67]. Per altra banda l'observació de seqüències temporals d'imatges pot proporcionar informació sobre el transport associat a estructures de mesoscala ([37], [41], [83]) encara que les condicions atmosfèriques i la forta presència de núvols són l'obstacle principal per poder realitzar estimacions quantitatives i sistemàtiques a partir d'aquestes sèries. En el cas de sensors passius, com els d'infraroig o els de color, generalment tenen una ampla finestra d'observació sinòptica i amb suficient resolució (1.1 Km/píxel i 4-8 imatges al dia).

Per a derivar dades no directament mesurades, com el camp de velocitats a partir de la temperatura, es fan necessàries hipòtesis més heurístiques [43]. Per exemple uns algorismes basats en xarxes neurals han servit per a determinar camps de velocitat a partir d'imatges tèrmiques ([15], [64], [65], [66]) o per a calibrar imatges de clorofil·la [35], amb resultats força satisfactoris. També hi ha el problema de la calibració dels sensors. Per exemple en imatges en color, la relació entre senyal visible i la concentració de substàncies a la superfície marina, depèn críticament de la calibració de dades 'in situ' [53]. A les dificultats inherents al procediment de mesura dels sensors, i per tant a les magnituds directament observables, cal afegir-hi la representativitat d'aquestes dades com a reflex de la dinàmica associada als processos oceanogràfics. Es pot fer la consideració que la velocitat és tangent a les isoterms i proporcional al gradient de temperatura; sabent que això només és vàlid en condicions de fluxos geostroffics, on el camp de temperatura traça el moviment de les masses d'aigua. El problema es que aquests traçadors superficials, en aquest cas les imatges de temperatura, més que dependre de l'estat instantani del camp superficial de velocitats, reflecteixen l'efecte acumulatiu de la seva evolució temporal. És a dir, reflecteixen més la dinàmica Lagrangiana de les trajectòries dels elements de fluid en moviment, que el retrat instantani del camp eulerià de velocitats. A més, ni la temperatura, ni per exemple el color de la superfície són traçadors bidimensionals ideals, ja que estan molt influenciats pels fluxos verticals. Els processos involucrats produeixen deformacions a les estructures d'una imatge a l'altre i per a modelitzar-los cal idealitzar els patrons que els caracteritzen, per tant la seva detecció no sempre és possible a partir de conclusions deterministes [37].

Tot i les dificultats, apareixen nous enfocaments per a tractar de trobar solucions més ajustades al comportament real. Un possible exemple seria que es comencen a aplicar de forma generalitzada noves tècniques de processament digital de senyal per a la detecció i el seguiment d'estructures, per a obtenir camps de velocitats superficials com a alternativa als mètodes clàssics de màxima correlació creuada (MCC) [25], [62] o els mètodes inversos [43].

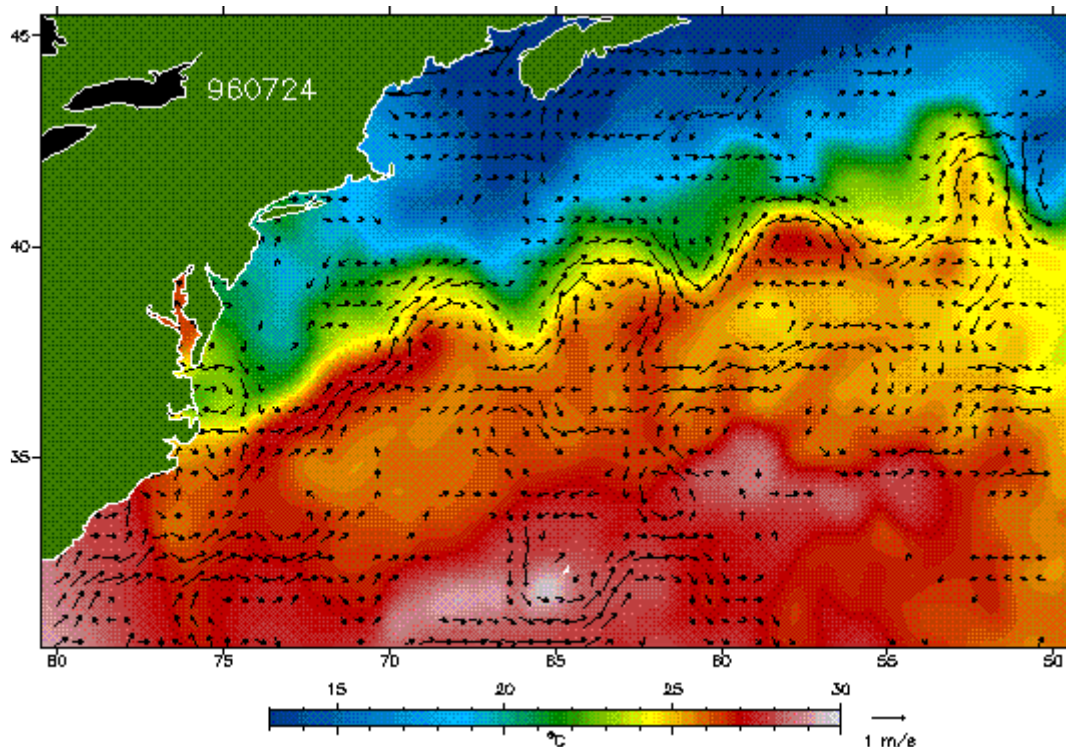


figura 1.2 Exemple de Imatge de temperatura Superficial (SST), representada conjuntament amb un camp vectorial de velocitats superficials. SST de la zona del corrent del Golf el 24 de Juliol de 1996, conjuntament amb uns vectors de velocitat [51].

El repte plantejat és: poder realitzar un anàlisi quantitatiu de diferents paràmetres oceànics, per exemple el camp de velocitats superficial, més enllà de l'anàlisi qualitatiu més immediat. Per això convenen tècniques de processament com les que es plantejaran en aquesta tesi: per exemple l'enregistrament d'imatges o la interpolació de dades que pertanyen a diferents resolucions. A la vegada, per tal de poder analitzar aquests ingents volums de dades, existeix un gran interès en automatitzar al màxim els sistemes d'observació, de tractament i d'interpretació, de manera que es minimitzi la intervenció directa de persones al llarg dels diferents processos que és necessari dur a terme per a extreure resultats.

1.2 Enregistrament geomètric d'imatges

Si ens centrem en les tècniques i metodologies associades al processament digital d'imatge que es fan servir en les aplicacions d'anàlisi de dades de Teledetecció, també en les aplicacions relacionades amb dades oceanogràfiques, ens trobarem que es solen fer comparacions de múltiples imatges d'una mateixa escena adquirides per diferents sensors (dades multimodals), o bé imatges preses pel mateix sensor però en temps diferents (dades multitemporals) [36]. En general, cada vegada hi ha més sistemes en els que es vol fer la fusió de dades de múltiples sensors [110]. L'enregistrament geomètric acurat és un pas necessari per tal que les imatges i les dades obtingudes amb diferents sensors, en diferents condicions i amb diferents satèl·lits, es puguin superposar i que estiguin referides als mateixos punts de la superfície terrestre. Per tant és indispensable per poder desenvolupar metodologies eficients per la fusió de dades multimodals i multitemporals.

L'enregistrament geomètric de dues imatges és una etapa de processament que permet alinear els píxels d'una imatge, la imatge de treball, amb els píxels corresponents d'una altra imatge, la imatge de referència, de manera que estiguin referides a uns mateixos punts de l'escena que representen [70]. En el cas de la georeferenciació la imatge de referència està normalitzada respecte d'una projecció geogràfica de referència. En pràcticament tots els sistemes de processament d'imatge que fusionen dades de diferents tipus és imprescindible una etapa prèvia d'enregistrament de les imatges. Amb els sistemes de Teledetecció actuals, es disposa cada vegada de més dades, de més plataformes i amb instruments més sofisticats, i per aquest motiu hi ha una gran necessitat d'obtenir metodologies de georeferenciació i correcció geomètrica autònomes, eficients i precises [83]. En alguns casos aquest pas ens permetrà aprofitar la capacitat de visió fora del *nadir* d'alguns instruments embarcats en plataformes orbitals, en altres casos ens permetrà fer un anàlisi de dades multisatèl·lit o multitemporals més correcte. Per exemple es pot reduir l'error en el camp de velocitat estimat si es té una georeferenciació més exacte dels diferents satèl·lits implicats en la mesura [24].

S'han proposat multitud de tècniques d'enregistrament espacial d'imatges, [17], [29], [34], [50], [100] i [113]. Les tècniques d'enregistrament geomètric també es coneixen amb els noms d'alineament d'imatges o anàlisi de correspondència. Hi ha un gran ventall d'aplicacions que necessiten utilitzar aquestes tècniques d'enregistrament. Dins el camp de la Teledetecció les aplicacions típiques inclouen: la classificació de dades multispectrals; el seguiment de patrons específics en sistemes de control i seguiment mediambiental; la detecció de canvis en diferents imatges d'una regió; la generació de mosaics d'imatges; l'agregació de dades en els sistemes de predicció meteorològica; la generació d'imatges d'alta resolució o la integració d'informació en GIS - Sistemes d'Informació Geogràfica -. També s'utilitza l'enregistrament geomètric en sistemes de processament d'imatges en altres camps ([34] i [113]): dins la diagnosi mèdica a partir d'imatges, per exemple en la combinació d'informació de TAC - Tomografia Axial Computeritzada - amb dades de NMR - Ressonància Magnètica Nuclear - per tenir dades complertes dels pacients; o bé pel control de variacions en sèries d'imatges radiològiques; o per la verificació i seguiment de tractaments mèdics; o per la comparació de les dades del pacient amb un atlas anatòmic d'una determinada zona. Sense voler ser exhaustius en aquest breu ventall d'aplicacions de l'enregistrament geomètric d'imatges es poden destacar també les aplicacions en cartografia, en la generació d'ortofotogrames; o en els sistemes de visió artificial: per la localització d'objectes, el control de qualitat en línies de producció o la composició d'imatges estèreo en sistemes de visió tridimensionals.

Les variacions entre les imatges que es volen enregistrar poden ser degudes a diferents factors: per exemple imatges que no tinguin el mateix angle de visió, o imatges preses en diferents temps (multitemporals), o imatges preses en condicions ambientals variants, o imatges que tenen un solapament o superposició parcial de les escenes; també poden ser imatges multimodals, de diferent naturalesa o també de diferent resolució: com el cas en que la imatge de referència és un model, una imatge sintètica o un atlas; o bé si les dues imatges es deriven de dades de diferents sensors.

A dia d'avui no existeix un enfocament únic per abordar satisfactòriament de forma automàtica tots els problemes que es plantegen sota el paraigües de l'enregistrament geomètric d'imatges, a [34] i [113] es pot trobar un recull dels principals mètodes i els seus camps d'aplicació preferents. La extensa bibliografia citada a ambdós reculls, permanentment actualitzada, mostra la bastíssima varietat de mètodes i tècniques utilitzades. Cada àrea de coneixement on s'utilitza alguna variant relacionada amb l'enregistrament geomètric, normalment ha generat les seves pròpies tècniques, adequades a les característiques i particularitats del tipus de dades a enregistrar, o a

la menor o major intervenció manual durant el procés d'enregistrament, o els tipus de distorsions o variacions entre les imatges més comuns en una determinada casuística. En el camp de la oceanografia per satèl·lit, i generalitzant en l'àrea de la Teledetecció (*remote-sensing*), també és així. Podríem citar com a referències que tenen més relació amb el treball que aquí es presenta, [17], [27], [28], [29], [50], [97] i [100], tot i que en la actualitat no existeixen mesures quantitatives generalitzables per a poder fer la comparació entre les diferents tècniques, convé destacar que la majoria d'algorismes existents no poden treballar amb oclusions considerables de parts de la imatge a través de núvols, aquesta és una de les característiques més rellevants del segon algorisme propi que es proposa en aquest treball.

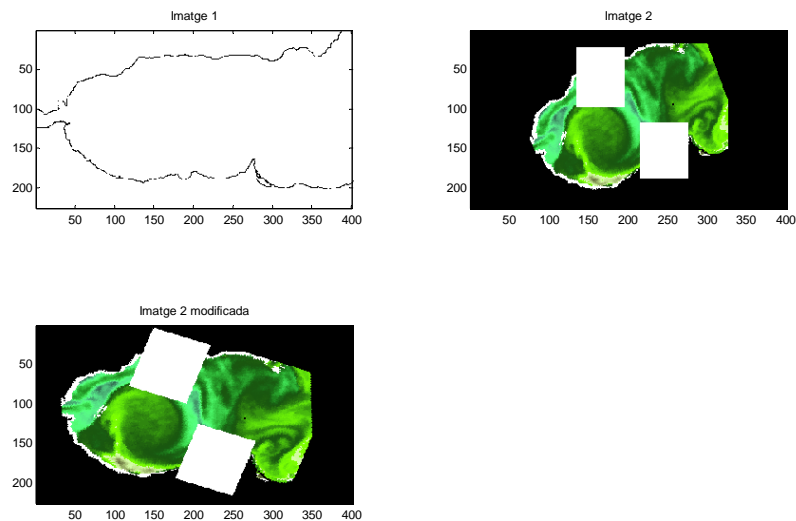


figura 1.3 Exemple d'enregistrament d'una imatge a una referència. Mar Mediterrània amb núvols sintètics, a la zona del mar d'Alborà. Els detalls a l'obtenció són a l'apartat 3.7.

Si es vol filar més prim, en aplicacions oceanogràfiques, la comparació o fusió de dades multitemporals o multisensors es sol fer georeferenciant cada imatge a una única projecció geogràfica de referència, de manera que també ens permeti la comparació i la fusió d'informació amb mesures locals i amb diferents tipus de sensors, i així s'obté informació complementària de la regió d'interès. A [4], [12], [24], [53], [83] o [86], es tenen unes bones referències dels mètodes de registre i correcció geomètrica dels satèl·lits. En aquestes referències es presenten mètodes de diferents complexitats, basats en les trajectòries dels satèl·lits, des de trajectòries simplificades amb òrbites localment circulars fins a òrbites el·líptiques complexes, tenint en compte les perturbacions de la Terra o els efectes gravitacionals de la Lluna i el Sol. La precisió obtinguda amb els diferents models és variable. Cal tenir en compte també que es produeixen errades en la precisió interna dels rellotges dels satèl·lits o imprecisions en els models orbitals Keplerians, o en els angles dels satèl·lits, que pot comportar que fins i tot el mètode més complex no permeti obtenir errors amb precisió per sota del píxel, que normalment són les precisions desitjades en les aplicacions de fusió de dades. Per a poder aconseguir aquestes precisions es sol aplicar una etapa més de processament, un enregistrament geomètric fent servir punts de control sobre la superfície terrestre (*Ground Control Points GCP*): punts de referència únics per a la localització de referències geogràfiques, com poden ser petites illes, llacs o sortints, de manera que es puguin identificar amb facilitat a la imatge i que la seva localització geogràfica sigui coneguda. A les aplicacions pràctiques es fa servir sovint la selecció

manual de GCP a través d'un operador entrenat en el tipus d'imatges i la zona que correspon a l'escena ([83], [86]). Però per tal d'aconseguir un nombre suficient de GCP cal una tasca intensiva, feixuga i que a més depèn en gran mesura de l'habilitat de l'operador. A més ens podem trobar amb problemes de precisió limitada, o fins i tot la manca de disponibilitat de punts prou identificables, degut a la cobertura parcial o total amb núvols a les zones d'interès. Per tant, sembla oportú desenvolupar tècniques totalment automàtiques o que requereixin poca intervenció humana per a la georeferenciació d'imatges multitemporals o multisensorials amb una gran precisió.

Seguint aquest objectiu diversos autors han desenvolupat diferents metodologies, per exemple basades en la Màxima Correlació Creuada (MCC) d'àrees d'imatges, p.e. en sistemes automàtics pels satèl·lits NOAA AVHRR a [4] i [30]. En aquests casos, una petita finestra de punts a la imatge de referència es compara estadísticament amb finestres de la mateixa mida a la imatge que es vol enregistrar. La mesura de similitud és el càlcul de la correlació creuada de les àrees de les finestres. De totes maneres aquestes mesures de correlació són poc apropiades quan hi ha oclusions parcials o totals, o quan els nivells de gris característics varien entre imatges, per exemple si són nocturnes o diürnes, o d'un AVHRR o dades del SeaWiFS. En canvi, si es fan servir mètodes basats en característiques extrems prèviament de les imatges, les tècniques són molt més robustes i apropiades. Aquest és un enfocament més utilitzat en mètodes d'enregistrament. En aquestes tècniques s'extreuen característiques de les imatges i les fan servir com a dades de comparació entre imatges, per exemple fan servir límits de regions, o contorns definits, com els elements principals o primitives per a trobar la semblança entre imatges, com a [17], [28] o [50]. Els mètodes d'enregistrament multimodal que es presenten en aquesta tesi fan servir aquesta aproximació, i com a elements característics d'una imatge utilitzaran els contorns de la línia de costa. A la figura 1.4 proposem un esquema d'un sistema per a georeferenciar una imatge amb precisió.

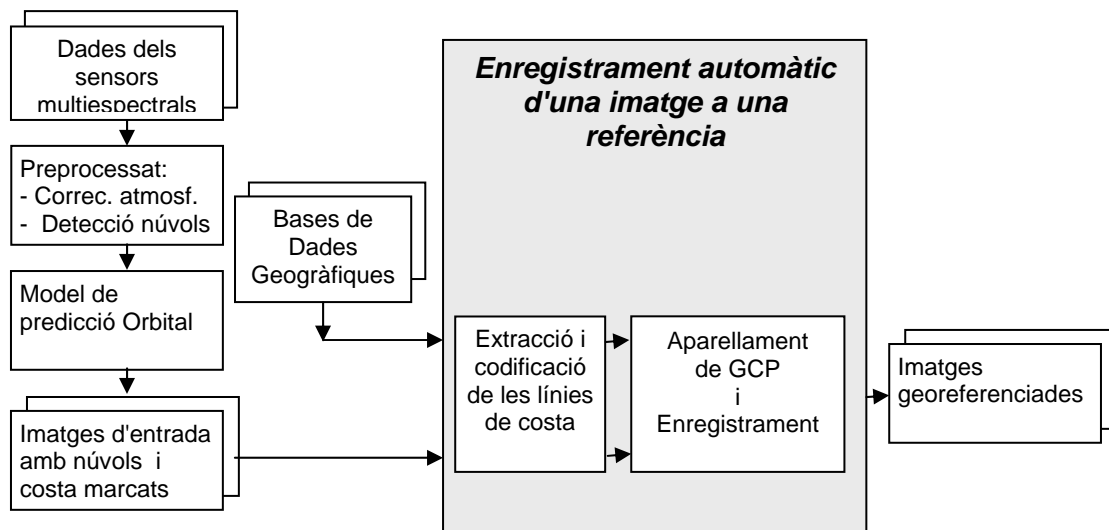


figura 1.4 Esquema del sistema de georeferenciació d'imatges proposat. A l'entrada del sistema d'enregistrament automàtic tenim les imatges i per l'altre cantó una base de dades geogràfica de la línia de la costa. Per fer la georeferenciació amb precisió s'aplica un enregistrament de les imatges a partir de l'extracció i codificació de les línies de costa. Després es determinen els punts singulars de la línia de costa (GCP- Ground Control Points) i els corresponents punts aparellats a la imatge de referència. I finalment s'obté la Imatge Georeferenciada aplicant l'enregistrament geomètric corresponent sobre les imatges de treball.

Es parteix d'una imatge de treball (obtinguda a partir de les mesures dels sensors dels instruments d'un satèl·lit), a la que s'han aplicat les correccions radiomètriques atmosfèriques, i a la que s'ha fet una georeferenciació de baixa resolució amb un model de predicció orbital. A continuació s'ajusten les resolucions i s'extreuen els contorns que ressegueixen la línia de costa de la imatge. Per una altra banda també es disposa d'una imatge de referència que és un mapa de la zona d'interès en una determinada projecció, i que conté la línia de costa referenciada [33], aquesta imatge disposa dels contorns de referència. En el nostre cas els contorns es codificaran amb un codi de cadena, Codi de Freeman modificat [50], i seran els elements característics de la imatge que es faran servir per a identificar-les a la imatge de referència; a continuació es calcularà una matriu amb les correlacions creuades normalitzades de tots els contorns, a més les mesures es realitzaran en el domini de la transformada *wavelet* discreta (*Discrete Wavelet Transform* - DWT). Un cop es seleccionin els contorns aparellats, es farà una selecció local que permeti l'aparellament elàstic punt a punt dins els parells de contorns a partir de tècniques de programació dinàmica (*Dynamic Time Warping*) DTW [84]. Finalment amb tots els GCP seleccionats es farà una estimació dels coeficients de la transformació afí que minimitzi l'error en els GCP aparellats. Per acabar es realitzarà una transformació afí inversa i una interpolació per a poder assignar els valors als píxels de la imatge georeferenciada respecte els valors de la imatge original.

1.3 Anàlisi subbanda i transformades *wavelet*

En tots els apartats d'aquesta tesi hi ha alguna aplicació realitzada a partir de transformades *wavelet* discretes, i per tant aquestes transformades i les seves implementacions també són un eix important dins el treball que presentem. La descomposició d'un senyal en un conjunt de senyals subbanda, per tal d'analitzar i tractar el contingut de les diferents bandes freqüencials de manera independent, ha estat present en el processament digital del senyal modern des d'un bon començament ([26], [73]). Quan els senyals amb els que cal treballar estan en un domini no temporal, per exemple l'espacial, aquest mateix anàlisi subbanda s'anomena anàlisi multiresolució, i es parla de senyals d'alta resolució, amb molt detall espacial, que correspondrien als senyals d'alta freqüència quan estàvem en el domini temporal; i de senyals de baixa resolució, senyals més grollers, que correspondrien a la informació de baixa freqüència. Aquest anàlisi multiresolució tant pot tractar amb senyals unidimensionals com multidimensionals. Un dels marcs teòrics més referenciats per a abordar aquests problemes ha sigut les diferents variants de la transformada *wavelet* [54]. Les implementacions pràctiques de les diferents transformades *wavelet*, quan es treballa sobre senyals discrets, a través de les transformades *wavelet* discretes ràpides, sempre han estat molt properes als bancs de filtres [18], [22], [40] i [91]. Es poden trobar molts paral·lelismes amb altres bancs de filtres [104]-[108], tenint en compte els anomenats bancs de filtres paraunitaris [98], amb filtres amb estructura en cel·losia que permeten aconseguir implementacions menys sensibles a les quantificacions dels coeficients dels filtres, i que són fàcilment configurables per adaptar l'estructura de filtrat a les característiques generals dels tipus de senyals que es volen tractar. Aquests filtres són molt adequats per a sistemes d'aplicacions de camp, que treballen amb senyals no sintètics.

Les transformades *wavelet* van ser popularitzades a partir de [18] i [54], i també tenen una relació molt estreta amb altres visions de problemes molt semblants, en particular l'anàlisi multiresolució procedent de la visió per computador i l'anàlisi de patrons (*pattern matching*). Els bancs de filtres i la descomposició subbanda s'originen en l'àmbit del processament de senyal, en particular el processament digital de veu ([16], [26]) i d'imatge [5]. Les primeres aplicacions que es poden trobar són en sistemes de

codificació i descodificació de veu a partir de bancs de filtres, introduïts a [16], [26] i [85], i més completats a les referències [93], [104]-[108]. Per tenir una visió completa de les transformacions *wavelet*, ens podem adreçar a textos ja clàssics com [13], [18], [55] i [98].

L'algorisme més utilitzat per a la realització de la Transformada *Wavelet* Discreta (DWT) és la Transformació *Wavelet* Biortogonal amb Delmat (DDWT), que s'utilitza en la codificació JPEG2000 ([1], [103]). Aquesta transformació ha estat molt reeixida per la codificació i compressió d'imatges, i s'han utilitzat variants per a sistemes de reducció del soroll [52], o d'altres aplicacions com el filtrat, la desconvolució, la detecció o en general a l'anàlisi de dades ([10], [44], [68], [69], [87], [88], [95], [99]). Altres aplicacions no han estat tan reeixides, segurament degut a la pèrdua de la propietat de invariança a la translació que apareix amb el delmat, que comporta un gran nombre d'artefactes en el moment de reconstruir el senyal un cop s'han modificat els coeficients *wavelet* [95]. En els sistemes d'eliminació del soroll, moltes vegades s'ha optat per la utilització dels mateixos algorismes ràpids a partir de bancs de filtres diàdics, però sense fer la delmació (UDWT - *Undecimated Discrete Wavelet Transform*) [96], com també a [60].

1.4 Interpolació d'un camp de velocitats superficial

A la tesi també s'ha tractat de donar una resposta a un altre problema generalitzable en Teledetecció: l'interpolació o reconstrucció de dades si es disposa de dades esparses multiescalars. En moltes aplicacions de processament de senyal cal fer la interpolació o reconstrucció de senyals a partir de dades esparses, en alguns casos aquestes dades esparses pertanyen a diferents escales espacials. Per a fixar el problema, es podria pensar en un cas hipotètic i idealitzat dins la oceanografia física, on es tinguessin un conjunt de mesures esparses d'un paràmetre (p.e. la Temperatura Superficial del Mar SST), que s'haurien inferit a partir de mesures simultànies amb diferents instruments, que estarien ubicats en diferents plataformes (vaixells, avions, satèl·lits). Totes les mostres tindrien resolucions espacials diverses, les oclusions i els buits de dades deguts als factors atmosfèrics i a les limitacions del mètodes i els instruments de recollida de dades afectarien a les mesures de manera no homogènia. En aquestes condicions seria desitjable disposar d'un mètode que permetés el càlcul d'una bona aproximació al mapa de la SST "real", a partir de la fusió d'aquest conjunt de mesures heterogènies, i aconseguir la millor resolució possible.

El problema plantejat té punts en comú a moltes aplicacions de processament de senyal, on cal interpolar o reconstruir dades que són esparses, amb mostres poc denses i distribuïdes irregularment en el seu domini [63]. Altres exemples d'aplicacions on es podrien trobar lligams amb el problema plantejat, serien [9], [20], [38], [39], [61] i [72]. Per altra banda hi ha un parell de característiques particulars del nostre problema: en primer lloc suposar que les mostres esparses pertanyen a diferents escales espacials, en el nostre cas inicialment suposem que són escales amb una relació diàdica; i en segon lloc suposar que es disposa d'un model a partir de bancs de filtres per a la descomposició multiresolució diàdica del senyal i per a la seva reconstrucció. Aquestes dues característiques fan que el problema, i per tant la solució que es proposa, no sigui tant directament generalitzable; a la vegada que ens trobem, que les solucions ja existents per a la interpolació de dades esparses, no siguin del tot adequades al problema plantejat. En el nostre cas també cal tenir present que hi pot haver una distribució de mostres molt heterogènia; a cada escala s'hi poden trobar buits (*gaps*) de diferents mides, i repartits aleatòriament. A partir d'aquestes dades es vol obtenir la millor aproximació al camp de velocitats real, un camp de velocitat dens i

espaïat regularment, amb el màxim detall. A la vegada es vol fer el càlcul d'aquest camp a partir d'una metodologia tractable a nivell de complexitat computacional.

Els mètodes d'interpolació clàssics més utilitzats – veí més pròxim, bilinial, cúbic, *splines*, interpolació òptima, entre d'altres – es poden aplicar fàcilment quan hi ha una graella de dades al voltant del punt que es vol interpolar. Es poden fer moltes aproximacions al càlcul de la interpolació de dades quan són esparses, des dels mètodes polinòmics o basats en *spline*; també amb la interpolació òptima multiescalar ([11], [31], [59]); fins a altres aproximacions basades en mètodes transformats com el *zero-padding* de la FFT o a partir de transformades *wavelet* ([3], [47], [72], [92], [101], [111] i [112]) o com els mètodes de regularització (WIPE) o la deconvolució CLEAN ([2] i [45]). Tots aquests mètodes o bé fan alguna assumptió o bé posen alguna restricció a les dades. A la vegada que pocs disposen de versions adaptades a conjunts de dades esparses que pertanyen a diferents resolucions simultàniament. Al final de la tesi s'haurà presentat un mètode que pot ser una extensió de qualsevol mètode d'interpolació inicial, si a banda de dades esparses per a una primera interpolació es disposa de dades esparses que pertanyen a escales de menys resolució, i també es disposa d'un model per a l'obtenció de les dades multiresolució. A aquest mètode l'hem batejat com **RIMME** (Reconstrucció Iterativa a partir d'un Model i de dades Multiescalars i Esparses), i no fixa cap restricció a la distribució o durada dels espais sense dades. Si es parla genèricament, una interpolació està estretament relacionada a la reconstrucció d'un senyal continu a partir de les seves mostres. Com és ben conegut el teorema del mostreig popularitzat a [90], permet la reconstrucció exacte d'un senyal de banda limitada a partir de les seves mostres, sempre que la freqüència de mostreig sigui igual o superior al doble de la freqüència màxima del senyal. Aquest teorema també és pot generalitzar al cas de mostres irregularment espaiades. A [102] es pot trobar una discussió en profunditat del teorema de mostreig i les seves múltiples extensions. La interpolació o reconstrucció que nosaltres plantejem es fa en dues etapes: en primer lloc es calcula una interpolació inicial -p.e. lineal, bilinial o cúbica, o qualsevol altre -; i en una segona etapa iterativa es refina el resultat, minimitzant l'error a les mostres de les escales espacials de menys resolució. La qualitat final no depèn del tipus d'interpolació que es fa servir en la primera etapa, sinó de la representativitat i densitat de les mostres a totes les escales. Direm que unes dades esparses són representatives si comparteixen les característiques singulars de l'entorn local més pròxim a cada una d'elles (p.e. els pics d'una certa magnitud d'un senyal que té creuaments per zero, són mostres representatives d'aquest senyal). Posteriorment es discutirà breument quin és l'efecte de canviar la interpolació inicial utilitzada.

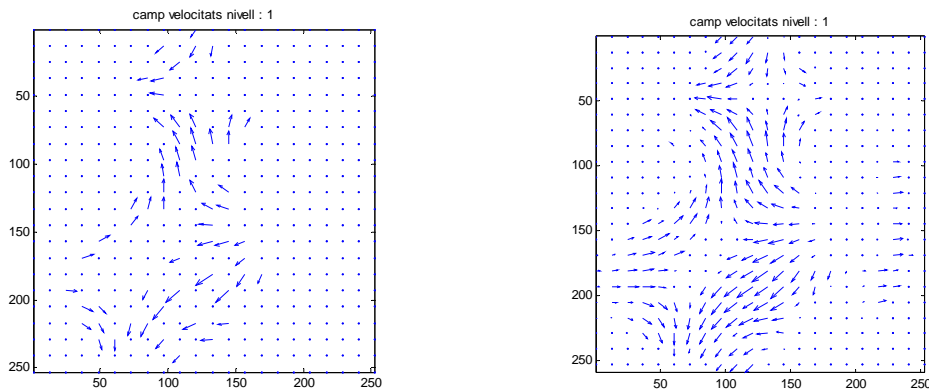


figura 1.5 Exemple de camp de velocitats interpolat (dreta), respecte el camp de velocitat espars original (esquerre). Resultats obtinguts al Capítol 5.

El mètode desenvolupat deriva de l'aproximació a la interpolació de dades des de l'òptica del processament de senyal que es podria considerar iniciada a [85]. També com a referències més immediates cal destacar la reconstrucció de senyals a partir dels màxims dels mòduls de les transformades *wavelet* a [57], o la reconstrucció d'imatges a partir dels contorns a múltiples escales [56]. En aquests darrers dos treballs es descriuen unes metodologies per a obtenir l'aproximació d'un senyal a partir de valors esparsos en el domini transformat, també es troben recollits més extensament a [55]. A [32] es presenta un sistema per a reconstrucció de senyals amb mostreig irregular a partir d'un mètode molt similar (la seva existència l'hem conegut amb posterioritat al desenvolupament del mètode), en certa manera es pot considerar que la nostra aportació és una extensió a dades multiresolució i esparses d'aquest mètode.

Convé aclarir en aquest punt la referència a l'amplada de banda d'un senyal respecte les seves mostres. Al llarg del treball parlarem de senyals discrets de manera genèrica, també els anomenarem vectors, seran una seqüència de valors escalars de durada finita, que poden provenir tant d'una seqüència temporal de valors d'una determinada font o instrument, com d'un conjunt de valors corresponents a una determinada distribució de localitzacions espacials que siguin coherents en el temps. Aquests senyals podran ser unidimensionals o de més dimensions, llavors tindrem matrius. En general, i per simplificar, a vegades es parla que aquests senyals estan en el domini temporal quan són unidimensionals i espacial quan són matrius, però això depèn del tipus d'informació que representin i quin ha estat el procediment per a la seva obtenció. De la mateixa manera si a aquests senyals genèrics se'ls aplica una transformació com la FFT (Transformada Ràpida de Fourier), podem dir de manera genèrica que la transformada té informació del contingut freqüencial del senyal, i que podem determinar la seva amplada de banda, quines bandes freqüencials tenen més importància. Convé remarcar que en el nostre context aquesta amplada de banda o freqüència màxima d'un senyal discret no es presta a confusió quan el senyal discret prové d'una seqüència temporal, però sí quan les ordenades són espacials o d'un altre tipus, on llavors freqüència màxima o amplada de banda limitada, s'ha de llegir més com variació màxima entre mostres consecutives, o variabilitat entre mostres veïnes. Aquesta segona interpretació ja és àmpliament utilitzada quan es treballa amb imatges, on es parla de freqüències horitzontals i verticals en aquest sentit. En el cas de la Teledetecció la confusió pot venir perquè amplada de banda d'un senyal bidimensional pot tenir diferents interpretacions: o ens estem referint a l'amplada de banda en el sentit radiològic, que ens diu el conjunt de bandes espectrals de radiació electromagnètica que unes mesures estan representant, en definitiva la finestra espectral que tenen associada; o bé ens estem referint a les amplades de banda de les mesures en la direcció horitzontal i/o vertical, que depenen de la separació espacial entre les mostres, i que determinen la freqüència màxima o el grau de variació màxima que podrà resoldre una determinada representació discreta; i que ens donen els diferents graus de variació en un conjunt de dades associat a una mesura concreta.

En aquest treball s'ha tractat d'obtenir un camp de velocitat superficial dens i espaiat regularment a partir d'uns valors de camps inicials esparsos, que pertanyen a diferents escales espacials relacionades. A [64] es mostrava com es podia extreure una aproximació a un camp de velocitats geotròfic corresponent a la superfície marina i es podia calcular a diferents escales espacials dins l'ordre de la mesoscala. El camp de velocitats era no calibrat, corresponia al rang de mesoscala, i s'obtenia a partir d'una única imatge SST (*Sea Surface Temperature*, Temperatura Superficial del Mar), sota la hipòtesi geotròfica, considerant que els corrents superficials es podien traçar sobre els contorns isogradients (amb gradient de temperatura constant) [83]. Amb aquestes limitacions el camp de velocitats superficial que s'obtenia era un camp espars, amb un conjunt de valors significatius al llarg dels contorns isogradients prou remarcables,

però poc densos i distribuïts irregularment en la superfície analitzada. Una aportació important del treball [64] era fer una interpolació d'aquest camp a partir d'un paràmetre que ponderava la divergència i el rotacional del camp inicial espars. El mètode que es proposa per a fer l'aproximació al camp de velocitat és inèdit, nosaltres l'hem derivat a partir de l'anàlisi i la reconstrucció de senyals amb bancs de filtres. Sembla probable que també es pogués derivar a partir d'altres enfocaments com la descomposició subbanda, anàlisi multiresolució o multiescala, o bé a partir de les propietats de les transformacions *wavelet* discretes.

Presentem una extensió a qualsevol mètode d'interpolació de dades esparses, quan es compleixen dues condicions:

- En primer lloc, si aquestes dades són multiescalars, és a dir, pertanyen a diferents resolucions espacials.
- En segon lloc, si es disposa d'un model que permet obtenir les dades multiresolució a partir d'una etapa d'anàlisi i permet la reconstrucció de nou amb una etapa de síntesi.

1.5 Objectius i estructura de la memòria

Per a concloure la introducció podríem focalitzar els objectius que d'entrada es varen plantejar per aquesta tesi i que s'han acabat desenvolupant:

- 1.- Estudi de l'enregistrament espacial d'imatges oceanogràfiques, com a un mètode per a poder obtenir mesures quantitatives més exactes a partir de les tècniques de fusió de dades multimodals i multitemporals [94].
- 2.- Estudi de l'interpolació d'un camp vectorial de velocitats superficials geotròfiques, a partir de camps esparsos a diferents resolucions espacials dins l'ordre de la mesoescala.

La resta de la memòria està estructurada en els següents capítols. En el Capítol 2 es fa un recull dels mètodes i materials utilitzats, focalitzant-lo en les Transformades *wavelets* discretes i la seva relació amb l'anàlisi multibanda amb bancs de filtres d'anàlisi i síntesi. En el Capítol 3 es fa l'estudi i el desenvolupament d'uns mètodes d'enregistrament d'imatges basats en els contorns de les línies de costa i en les Transformades *wavelet*, i la seva comparació amb el mètode clàssic d'enregistrament d'imatges a partir de la màxima correlació creuada d'àrea. En el Capítol 4 es desenvolupa un algorisme per a la reconstrucció d'un senyal unidimensional (representat amb un vector) a partir d'un conjunt de valors esparsos de diferents resolucions 4.2, i posteriorment es descriurà l'algorisme pel cas de la reconstrucció d'un camp de vectors superficials 4.3, que podem representar amb una matriu bidimensional de valors complexos, a partir d'un conjunt de valors de velocitat superficial esparsos a diferents resolucions. En els capítols posteriors es mostraran els resultats dels mètodes de fusió presentats sobre conjunts de dades Capítol 5 i acabarem amb uns anàlisis i conclusions d'aquests treballs al Capítol 6. Finalment al Capítol 7 s'esbossaran les possibles línies de recerca futures que es poden entreveure com a continuació dels treballs aquí realitzats.

Part dels treballs desenvolupats es varen emmarcar dins el Projecte IMAGEN: PROCESOS DE TRANSPORTE, CAMPOS DE VELOCIDADES, Y ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS OCEÁNICAS MEDIANTE IMÁGENES DE SATÉLITE 2000-2003, en el qual vàrem participar activament. L'objectiu fonamental del projecte va ser el desenvolupament de mètodes quantitius per l'anàlisi d'imatges de satèl·lit (color, temperatura i altura dinàmica) de la superfície marina, que permetessin identificar les estructures presents i l'avaluació dels camps de velocitats, així com el seu ús per a la

quantificació de processos de transport de masses d'aigua i de substàncies d'interès pels ecosistemes marins (nutrients, biomassa,...).

Capítol 2. Mètodes i materials

En aquest capítol relacionarem les transformades *wavelets* discretes que s'utilitzaran al llarg de la tesi amb les seves implementacions a partir de bancs de filtres d'anàlisi i síntesi, per a tenir en consideració una visió unificada. A l'apartat 2.1 s'introdueix la transformada *wavelet* seguint la nomenclatura empleada a [55]. A l'apartat 2.2 es descriu una transformació UDWT que s'utilitzarà al Capítol 3. A l'apartat 2.3 es resumeixen les propietats dels bancs de filtres amb reconstrucció perfecte, i la formulació utilitzada és la que farem servir en el Capítol 4 per a desenvolupar el sistema RIMME de reconstrucció a partir de dades esparses multiescalars. I finalment a l'apartat 2.4 abordem el problema de la reconstrucció de senyals a partir dels màxims dels mòduls de les transformades *wavelet*, no des de la manera tradicional de [57], sinó que es fa a partir d'una explicació més intuïtiva, des de l'òptica dels bancs de filtres amb reconstrucció perfecte, i com a una modificació d'aquests filtres.

2.1 Transformada *wavelet* discreta (DWT) i bancs de filtres

2.1.1 Transformada *wavelet* contínua

Donada una funció $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$ -d'energia finita-, es pot expressar la seva transformada *wavelet* en el temps ' u ' i a l'escala ' s ', $Wf(u,s)$, com una projecció de la funció $f(t)$ en una funció *wavelet* desplaçada i escalada $\psi_{u,s}$:

$$Wf(u,s) = \langle f, \psi_{u,s} \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt, \quad (1)$$

sent $\psi(t) \in L^2(\mathbb{R})$, una funció *wavelet* de mitja zero, normalitzada a energia unitària i centrada a $t=0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (2)$$

A partir d'ella es pot definir una família de funcions *wavelet* d'escala ' s ' i amb desplaçament ' u ' com:

$$\psi_{u,s}(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{s}} \psi \left(\frac{t-u}{s} \right). \quad (3)$$

La transformada *wavelet* en el temps ' u ' i a l'escala ' s ', a la vegada es pot entendre com la integral de convolució d'una funció amb un filtre:

$$Wf(u,s) = f * \bar{\psi}_s(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{t-u}{s} \right) dt, \quad (4)$$

amb el filtre relacionat amb el conjugat de la funció *wavelet*,

$$\bar{\psi}_s(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{s}} \psi^* \left(\frac{-t}{s} \right), \quad (5)$$

tenint en compte que totes les *wavelets* escalades i desplaçades segueixen normalitzades a energia 1:

$$\|\psi_{u,s}\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{s} \left| \psi \left(\frac{t-u}{s} \right) \right|^2 dt = \frac{1}{s} \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi(x)|^2 s dx = \|\psi\|^2 = 1. \quad (6)$$

Aquesta transformada *wavelet* $Wf(u,s)$, ens mesura la variació de la funció f al voltant de ' u ', amb una escala proporcional a ' s '.

Es defineix la transformada de Fourier de la funció *wavelet*,

$$\hat{\psi}(w) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) \cdot e^{-j\omega t} dt .$$

Si la funció *wavelet* és real i compleix

$$C_{\hat{\psi}} = \int_0^{+\infty} \frac{|\hat{\psi}(w)|^2}{w} dw < +\infty , \quad (7)$$

es pot reconstruir la funció original, $f(t)$, a partir de la descomposició amb els valors de la transformada *wavelet*:

$$f(t) = \frac{1}{C_{\hat{\psi}}} \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(u,s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2} . \quad (8)$$

Es defineix una família de funcions d'escala $\Phi_{u,s}(t)$, desplaçades 'u', i amb escala 's₀' que agrupen tots els coeficients transformats per a escales superiors a una escala finita s₀,

$$\phi_{u,s_0}(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{s_0}} \phi\left(\frac{t-u}{s_0}\right) , \quad (9)$$

i la seva transformada de Fourier,

$$\hat{\phi}(w) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) \cdot e^{-j\omega t} dt .$$

El mòdul de la transformada de Fourier de la funció d'escala agrupa els mòduls de les transformades de les funcions *wavelet* per escales superiors a s₀, tal com s'expressa a continuació,

$$|\hat{\phi}(w)|^2 = \int_{s_0}^{+\infty} |\hat{\psi}_s(w)|^2 ds . \quad (10)$$

Es pot veure la funció escala com la resposta impulsional d'un filtre passa baixes, i es pot definir el filtre a partir del conjugat de la funció d'escala,

$$\overline{\phi}_{s_0}(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{s_0}} \phi^*\left(\frac{-t}{s_0}\right) , \quad (11)$$

Podem expressar l'aproximació passa baixes de $f(t)$ a l'escala 's₀', amb desplaçament 'u' com la projecció de la funció $f(t)$ en la corresponent funció d'escala desplaçada i escalada, o bé com la sortida de la convolució de la funció $f(t)$ amb el filtre equivalent:

$$Lf(u,s_0) = \left\langle f(t), \frac{1}{\sqrt{s_0}} \phi\left(\frac{t-u}{s_0}\right) \right\rangle = f * \overline{\phi}_{s_0}(u) , \quad (12)$$

Finalment la reconstrucció del senyal $f(t)$ es pot fer a partir de les transformades *wavelet* fins a l'escala 's₀', $Wf(u,s)$ i l'aproximació passa-baixes que agrupi les escales superiors a 's₀' $Lf(u,s_0)$ amb,

$$f(t) = \frac{1}{C_{\hat{\psi}}} \int_0^{s_0} \int_{-\infty}^{+\infty} Wf(u,s) \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{t-u}{s}\right) du \frac{ds}{s^2} + \frac{1}{C_{\hat{\psi}} s_0} \int_{-\infty}^{+\infty} Lf(u,s_0) \frac{1}{\sqrt{s_0}} \phi\left(\frac{t-u}{s_0}\right) du . \quad (13)$$

2.1.2 Transformada *wavelet* discreta

La descomposició *wavelet* contínua és una representació redundants de la funció original, i en algun tipus d'aplicacions ens poden interessar representacions no redundants o com a mínim menys redundants, que es podrien relacionar amb aquesta representació de la *wavelet* contínua. Un camí per aconseguir-ho es pot fer a través de les *wavelets* discretes tant en l'escala com en desplaçament. Per tant a continuació veurem el desenvolupaments sobre senyals discretes.

Donat un senyal discret i finit de N mostres $\{f \in \mathbb{R}^N\}$, podem calcular la seva transformada *wavelet* discreta en la mostra 'n' i a l'escala 's', com la projecció d'un senyal **f** en una funció *wavelet* discreta $\psi_{n,j}$ (on arbitràriament considerem $s=a^j$),

$$Wf(n, a^j) = \langle f, \psi_{n,j} \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi^* \left(\frac{m-n}{a^j} \right). \quad (14)$$

Sent $\psi_{n,j}$ la funció *wavelet* discreta d'escala ' a^j ', i desplaçament ' n ',

$$\psi_{n,j}(m) \equiv \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi \left(\frac{m-n}{a^j} \right). \quad (15)$$

Anàlogament al cas continu també es pot expressar la transformada *wavelet* discreta a partir de la convolució circular amb un filtre.

$$Wf(n, a^j) = f \otimes \overline{\psi_j}(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \psi_j^*(m-n), \quad (16)$$

definim el filtre

$$\overline{\psi_j}(m) \equiv \psi_j^*(-m) \equiv \frac{1}{\sqrt{a^j}} \psi^* \left(\frac{-m}{a^j} \right). \quad (17)$$

En els càlculs es tracten els senyals discretes com a senyals periòdics de període N.

Al ser un senyal discret i finit, les escales de la seva transformada *wavelet* només es poden calcular des de 1 fins a N. Per simplicitat en els càlculs ens limitem a escales $s=a^j$, amb $a=2^{1/v}$, que permeten tenir v escales intermèdies entre les escales diàdiques $[2^j, 2^{j+1}]$.

La convolució circular també es pot calcular aplicant l'algorisme FFT (*Fast Fourier Transform*).

De manera paral·lela al cas continu, podem definir una família de Funcions d'Escala desplaçades ' n ' i que agrupen les respostes de les *wavelets* superiors a l'escala ' $s_0=a^J$ ':

$$\phi_{n,J}(m) \equiv \frac{1}{\sqrt{a^J}} \phi \left(\frac{m-n}{a^J} \right). \quad (18)$$

LLavors es pot obtenir una aproximació passa baixes residual $Lf(n, a^J)$, també anomenada component d'escala, que agrupa les respostes de totes les Transformades *wavelets* d'escala superior a ' a^J '. La podem expressar com la projecció de la funció **f** a la Funció d'Escala $\Phi_{n,J}$,

$$Lf(n, a^J) = \langle f, \phi_{n,J} \rangle = \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \frac{1}{\sqrt{a^J}} \phi^* \left(\frac{m-n}{a^J} \right), \quad (19)$$

o expressar-la a través d'una convolució circular amb un filtre equivalent,

$$Lf(n, a^j) = f \otimes \bar{\phi}_j(n) = \sum_{m=0}^{N-1} f(m) \phi_j^*(m-n), \quad (20)$$

si definim el filtre:

$$\bar{\phi}_j(m) \equiv \phi_j^*(-m) \equiv \frac{1}{\sqrt{a^j}} \phi^*\left(\frac{-m}{a^j}\right). \quad (21)$$

Podem expressar la reconstrucció del senyal original a partir de les transformades *wavelet* discretes $Wf(m, a^j)$ fins a l'escala a^j , i l'aproximació passa baixes $Lf(m, a^j)$ que agrupi les escales superiors, si suposem que l'escala de més detall és $a^L = 2$,

$$f(n) \approx \frac{\log_e a}{C_{\psi}} \sum_{j=L}^J \sum_{m=0}^{N-1} \frac{1}{a^j} Wf(m, a^j) \psi_j(m-n) + \frac{1}{C_{\psi} a^J} \sum_{m=0}^{N-1} Lf(m, a^J) \phi_J(m-n). \quad (22)$$

L'error que s'introdueix pel fet de tenir escales discretes decreix quan augmenta v , el nombre de salts entre octaves. L'aproximació de les convolucions contínues a les discretes provoca errors de reconstrucció d'alta freqüència. Però també es pot arribar a la reconstrucció perfecte si es dissenyen acuradament els filtres de reconstrucció. En algunes aplicacions (p.e. processament d'imatges) ens pot interessar que els filtres estiguin limitats als que tinguin fase lineal. A més a més es poden definir transformacions *wavelet* a partir de bases biortogonals, on els filtres d'anàlisi i els de reconstrucció són diferents, aquest aspecte el tractarem a l'apartat 2.3, quan es tracti l'anàlisi *wavelet* discret com un anàlisi multiresolució amb bancs de filtres.

2.2 Anàlisi multiresolució amb l'algorisme 'à trous' (UIDWT)

L'anàlisi multiresolució sense submostreig sobre imatges UIDWT (*Undecimated and Isotropic Discrete Wavelet Transform*) en la versió proposada per [96] i [97], consisteix a aproximar un senyal bidimensional qualsevol $\{f(x,y) \in L^2(\mathbb{R}^2)\}$ a diferents subespais aniuats $V_j, V_{j+1}, V_{j+2} \dots$ compresos uns dins els altres: $V_{j+1} \subset V_j$.

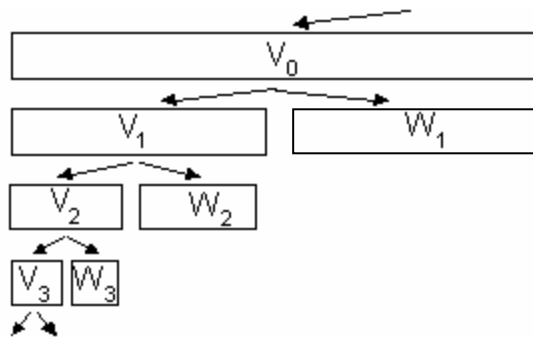


figura 2.1 Subespais de les aproximacions amb un esquema d'anàlisi multiresolució. La allargada de cada rectangle simbolitza la resolució corresponent, d'alta a baixa. Amb V_0 l'espai de senyal original, els V_j els espais aproximats, més grollers o de baixa resolució aniuats i els W_j els espais de detalls complementaris, per a generar l'espai aproximat de nivell anterior.

El canvi d'un subespai a l'altre és també el resultat d'un canvi d'escala (figura 2.1). Amb l'algorisme 'à trous' [22], [40], la imatge original $f(x,y)$ es pot projectar al subespai V_0 a través d'un producte escalar amb una funció d'escala $\Phi_0(x,y)$. El resultat és $a_0[m,n] \{m,n \in \mathbb{Z}\}$:

$$a_0[m, n] = \langle f(x, y), \phi_0(x - m, y - n) \rangle \quad (23)$$

L'aproximació a escales diàdiques successives (2,4,8...) es pot fer:

$$a_j[m, n] = \left\langle f(x, y), \frac{1}{4^j} \phi_0\left(\frac{x - m}{2^j}, \frac{y - n}{2^j}\right) \right\rangle, \quad (24)$$

amb

$$\phi_j(x, y) = \frac{1}{4^j} \phi_0\left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j}\right). \quad (25)$$

Els detalls a cada escala:

$$d_j[m, n] = a_{j-1}[m, n] - a_j[m, n],$$

es defineixen dins el subespai complementari \mathbf{W}_j , $\mathbf{V}_{j-1} = \mathbf{V}_j \oplus \mathbf{W}_j$

La funció d'escala a cada escala es pot expressar com la sortida d'un filtre 2D:

$$\frac{1}{4^{j+1}} \phi_0\left(\frac{x}{2^{j+1}}, \frac{y}{2^{j+1}}\right) = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} h[k, l] \phi_0\left(\frac{x}{2^j} - k, \frac{y}{2^j} - l\right), \quad (26)$$

que ens permet obtenir l'aproximació a escales successives de manera recursiva:

$$a_{j+1}[m, n] = \sum_{k, l \in \mathbb{Z}} h[k, l] a_j[2^j k + m, 2^j l + n]. \quad (27)$$

Amb l'algorisme 'à trous' es projecta la imatge a subespais aniuats consecutius d'escales diàdiques successives (2, 4, 8 ...), mitjançant el filtrat passa-baixes recursiu de la imatge aproximada resultant a cada escala, des de més resolució cap a menys resolució.

En aquest cas per a reconstruir només ens cal sumar els components de detall de totes les escales (les transformades *wavelet*) i la component aproximada d'escala màxima L,

$$\hat{f}(m, n) = \sum_{j=1}^{L-1} d_j(m, n) + a_L(m, n). \quad (28)$$

Hem definit uns filtres que equivalen a definir un anàlisi *wavelet* amb funcions d'escala del tipus *B-splines* cúbiques [97]:

$$\phi(r) = \frac{3}{8} \left(\frac{\sin \frac{\pi r}{4}}{\frac{\pi r}{4}} \right)^4 \quad (29)$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Aquestes transformades *wavelet* es faran servir a l'apartat 3.6 amb un filtre amb els coeficients:

$$h(k, l) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 256 & 64 & 128 & 64 & 256 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 64 & 16 & 32 & 16 & 64 \\ 3 & 3 & 6 & 3 & 3 \\ 128 & 32 & 64 & 32 & 128 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 64 & 16 & 32 & 16 & 64 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 256 & 64 & 128 & 64 & 256 \end{bmatrix}$$

2.3 Banc de filtres per a reconstrucció 'perfecte'

2.3.1 Propietats dels bancs de filtres amb reconstrucció 'perfecte'

Dins d'un esquema d'anàlisi/síntesi multiresolució mitjançant les transformades *wavelet* discretes, un senyal discret, f , considerat com un vector de N valors reals $\{f \in \mathbf{R}^N\}$, queda descomposat a la sortida de l'etapa d'anàlisi en dos vectors: un que és la fracció aproximada o passa baixes del senyal (a_1) i un vector d_1 que és la fracció de detalls o passa altes del senyal. Llavors es pot definir un banc de filtres amb reconstrucció perfecta (figura 2.2), dividint el domini de la transformada discreta de Fourier en un parell de regions complementàries (figura 2.4 inferior) i associant un filtre a cada regió: *LP* -passa baixes- ; *HP* -passa altes-.

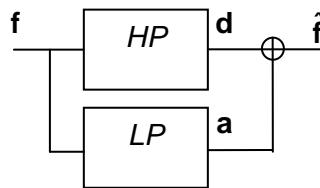


figura 2.2 Senyal f a través d'un banc de filtres. *HP* filtre passa altes, component de detall d i filtre passa baixes *LP*, component aproximada a . A la sortida tenim el senyal reconstruït \hat{f} .

Aquest banc de filtres també es pot dividir a la vegada en parelles de filtres d'anàlisi i síntesi, representats a la figura 2.3, amb les respostes freqüencials de la figura 2.4 superior. L'esquema resultant és equivalent a una descomposició QMF (*Quadrature Mirror Filter*) estretament relacionats amb els filtres CMF (*Conjugate Mirror Filters*), originàriament utilitzats en processament de veu ([26], [93]). També es podrien expressar a través de l'esquema els bancs de filtres biortogonals a ([106]-[108]), també l'anomenat *algoritme 'à trous'* de [22], o els bancs de filtres paraunitaris ([104], [105]). En el cas que presentarem, a diferència dels casos anteriors, no s'aplica el submostreig de dades al final de les etapes d'anàlisi, i per tant s'obté una descomposició multiresolució amb molta redundància.

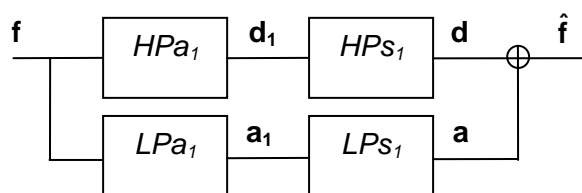


figura 2.3 Banc de filtres amb etapes d'anàlisi i síntesi sense submostreig. HPa_1 : filtre passa altes de l'etapa d'anàlisi a nivell 1, genera el senyal de detall a nivell 1 d_1 . LPa_1 : filtre passa baixes de l'etapa d'anàlisi a nivell 1, genera el senyal aproximat a nivell 1. HPs_1 : filtre passa altes de l'etapa de síntesi a nivell 1, genera la senyal de detall d . LPS_1 : filtre passa baixes de l'etapa de síntesi a nivell 1, genera el senyal aproximat a .

Les Transformades z d'aquests filtres satisfan:

$$LP(z) + HP(z) = 1$$

$$HP(z) = HPa_1(z) \cdot HPs_1(z) \quad (30a) \quad LPs_1(z) \cdot LPa_1(-z) + HPs_1(z) \cdot HPa_1(-z) = 0 \quad (30b)$$

$$LP(z) = LPa_1(z) \cdot LPS_1(z)$$

Quan s'aplica delmat a l'etapa d'anàlisi i interpolació de zeros a l'etapa de síntesi, l'equació (30b) ens dona la condició de cancel·lació de l'*aliasing* que produeixen aquestes operacions no lineals, que es fa efectiva a l'hora de reconstruir els senyals a l'etapa de síntesi. En el cas de sistemes sense delmat, només cal que compleixin les condicions de les equacions (30a). Un conjunt de filtres amb respostes freqüencials complementàries i equiespaiades en el domini freqüencial estan representades a la figura 2.4. (Les gràfiques de la part superior es corresponen a les respostes en mòdul dels filtres d'anàlisi i síntesi; i les gràfiques de la part inferior es corresponen a les composicions globals: LP blaus, HP vermells).

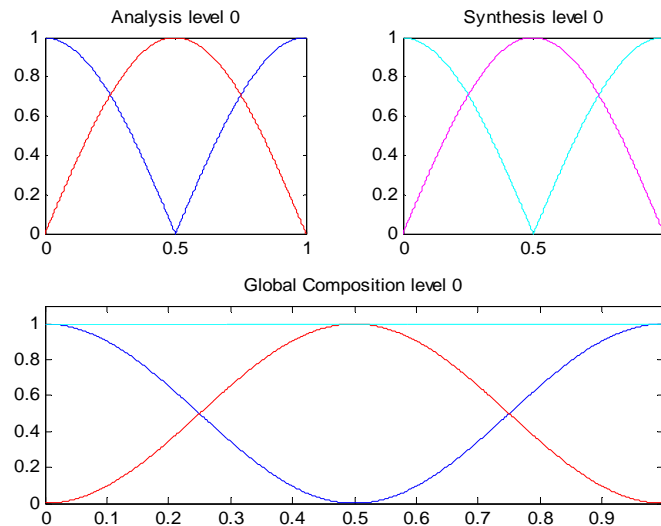


figura 2.4 Respostes freqüencials de banc de filtres a escala 1. Freqüències normalitzades respecte de la freqüència de mostreig (F_s). A dalt a l'esquerra respostes dels filtres d'anàlisi. A la dreta respostes dels filtres de síntesi. A sota les respostes de la composició global en cascada dels filtres d'anàlisi i de síntesi, dels filtres passa altes (en vermell) i els passa baixes (en blau).

D'acord amb l'esquema de la figura 2.3, i fent servir la notació utilitzada des de l'òptica de les transformades *wavelet* [55], el senyal \mathbf{f} de l'entrada es separa a la sortida de l'etapa d'anàlisi en un senyal de detalls (fracció passa altes) \mathbf{d}_1 , i un senyal aproximat (fracció passa baixes) \mathbf{a}_1 . A la sortida de l'etapa de síntesi, els senyals corresponents són \mathbf{d} i \mathbf{a} . El senyal reconstruït és $\hat{\mathbf{f}} = \mathbf{d} + \mathbf{a}$, i serà igual a \mathbf{f} en el cas de tenir un banc de filtres amb reconstrucció perfecta.

Si s'avança un pas més i la descomposició s'itera a la fracció passa baixes (senyal aproximat), podem obtenir una descomposició multiresolució, del nivell 1 fins al nivell L (el nivell 0 es reserva pel senyal a l'escala de més resolució inicial abans d'entrar al banc de filtres). També s'anomena descomposició en arbre binari, descomposició subbanda, arbre de descomposició, anàlisi multiresolució o multiescala, o bé transformada *wavelet*. A la figura 2.5 tenim una descomposició en arbre; i a la figura 2.6 es mostren les etapes de síntesi corresponents. A cada nivell que s'incrementa, el senyal aproximat és una representació més grollera (de més baixa resolució) de la del nivell anterior. En els càlculs en els que cal allargar els vectors es pot fer una extensió cíclica per a simplificar les operacions en el domini discret.

Si ens restringim a la descomposició diàdica, es pot trobar un esquema ràpid i senzill per realitzar la descomposició multiresolució. S'utilitzen filtres d'octava, que a cada nivell divideixen la seva banda de pas per dos, respecte el nivell anterior. A través de

l'algorisme 'à trous' ([22], [40]), els filtres per al nivell k es poden generar a partir dels filtres del nivell anterior k-1 interpolant zeros a la resposta impulsional, tal com podem recollir a l'equació (31). Aquesta interpolació de zeros equival a la compressió en 1/2 de l'eix de freqüències de la resposta freqüencial [71]. Als exemples de les figura 2.7 i figura 2.8 es fa servir la resposta freqüencial dels filtres corresponents a la transformada Haar, però els resultats finals dels apartats 2.3.2, 2.4 i 4.2 (figura 4.2) s'han obtingut amb el banc de filtres llistats a continuació i que corresponen als de la taula 7.4 pàg.273 de [55], amb els que s'implementa la transformada *wavelet* biortogonal amb suport compacte amb filtres de longitud semblant definits originàriament a [14], i que s'utilitzen per a compressió d'imatges.

$$\begin{aligned}
 \text{HPa}_N(z) &= \text{HPa}_{N-1}(z^2) \\
 \text{HPs}_N(z) &= \text{HPs}_{N-1}(z^2) \\
 \text{LPa}_N(z) &= \text{LPa}_{N-1}(z^2) \\
 \text{LPs}_N(z) &= \text{LPs}_{N-1}(z^2)
 \end{aligned}
 \tag{31}$$

Els filtres utilitzats en els diferents apartats tenen els coeficients:

$$\begin{aligned}
 hpa_1 &= [-0.0456 \quad 0.0288 \quad 0.2956 \quad -0.5575 \quad 0.2956 \quad 0.0288 \quad -0.0456] \\
 lpa_1 &= [-0.0456 \quad -0.0288 \quad 0.2956 \quad 0.5575 \quad 0.2956 \quad -0.0288 \quad -0.0456] \\
 hps_1 &= [-0.0267 \quad -0.0169 \quad 0.0782 \quad 0.2669 \quad -0.6029 \quad 0.2669 \quad 0.0782 \quad -0.0169 \quad -0.0267] \\
 lps_1 &= [0.0267 \quad -0.0169 \quad -0.0782 \quad 0.2669 \quad 0.6029 \quad 0.2669 \quad -0.0782 \quad -0.0169 \quad 0.0267]
 \end{aligned}$$

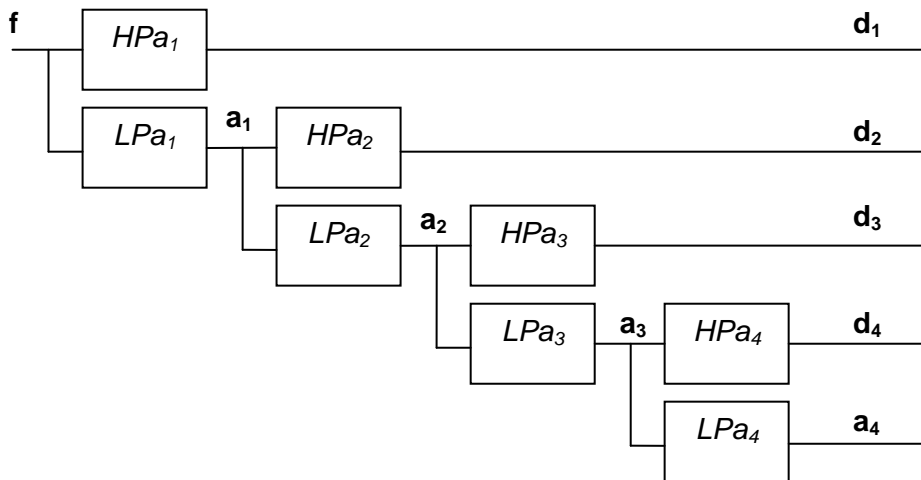


figura 2.5 Descomposició o anàlisi multiresolució fins al nivell 4. Descomposició multiresolució diàdica d'un senyal **f** a l'etapa d'anàlisi, amb 4 nivells. Per cada nivell s'obté una component de detalls (passa altes) **d_i**, i una component aproximada (passa baixes) **a_i**. A la següent etapa en cascada es descomposa la component aproximada amb les components de nivell 2 i així successivament fins a arribar al nivell L, on els filtres tenen una longitud comparable a les dimensions del senyal que es vol filtrar. Les sortides de l'etapa d'anàlisi la representarem com **AWT_L**.

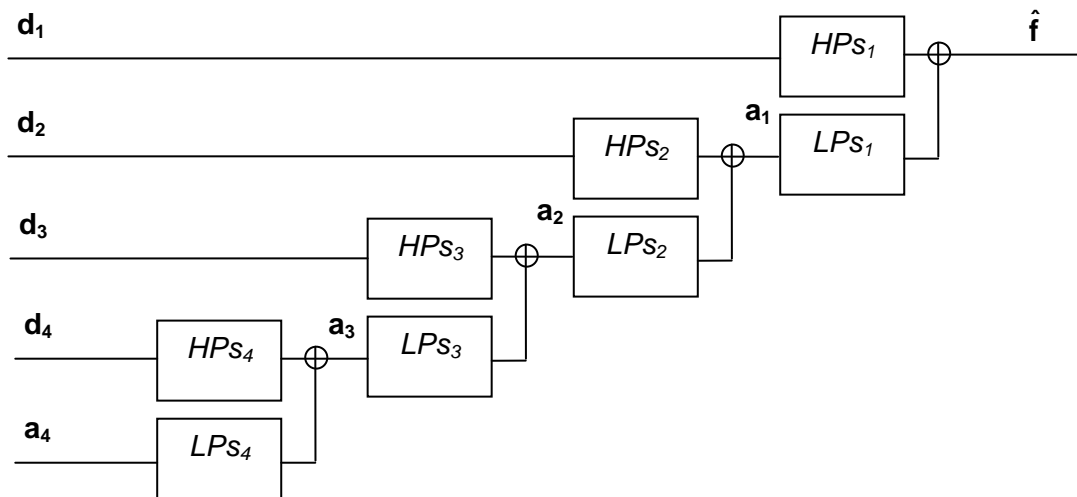


figura 2.6 *Reconstrucció o síntesi a partir de l'anàlisi multiresolució representat a la figura anterior. Amb les components de detall $\{d_1, \dots, d_L\}$ a totes les escales i la component aproximada a_L al nivell màxim L . Els agruparem a la matriu $SIWT_L$. Es fan servir els bancs de filtres de síntesi per a reconstruir una aproximació al senyal \hat{f} .*

Als exemples de les figura 2.7 i figura 2.8 es mostren les respostes freqüencials de la cadena de filtres del banc, des del nivell 1 fins al nivell 2 i 3 respectivament. Les respostes representades amb una línia de punts, són els filtres passa baixes en el nivell de descomposició previ de l'arbre. A mida que incrementa l'ordre en l'arbre de descomposició, la fracció passa baixes a la iteració L -èsima, amb $L \rightarrow \infty$, tendeix a la mitjana del senyal original, a la banda freqüencial de la component contínua del senyal.

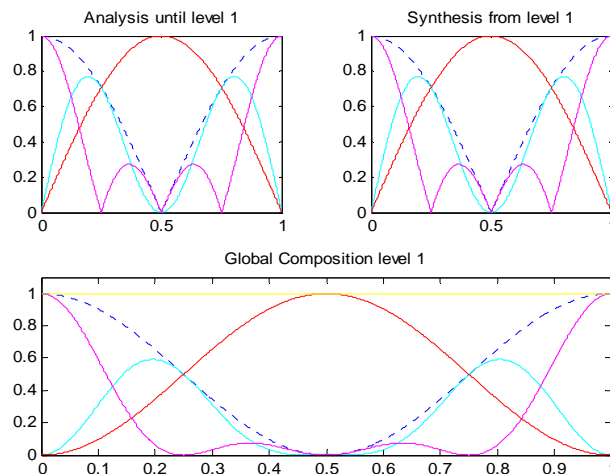


figura 2.7 *Respostes freqüencials del banc de filtres fins al nivell 2. A dalt a l'esquerra respostes dels filtres de l'etapa d'anàlisi. A dalt a la dreta respostes dels filtres de l'etapa de síntesi. A sota la resposta composta de les etapes d'anàlisi i síntesi corresponents fins al nivell 2. Tenim les respostes dels filtres al nivell 1: els passa altes en vermell, i els passa baixes de color blau i ratllats (per indicar que es descomponen al nivell següent). En el nivell 2 es descomponen en una component passa altes (cian) i una passa baixes (rosa).*

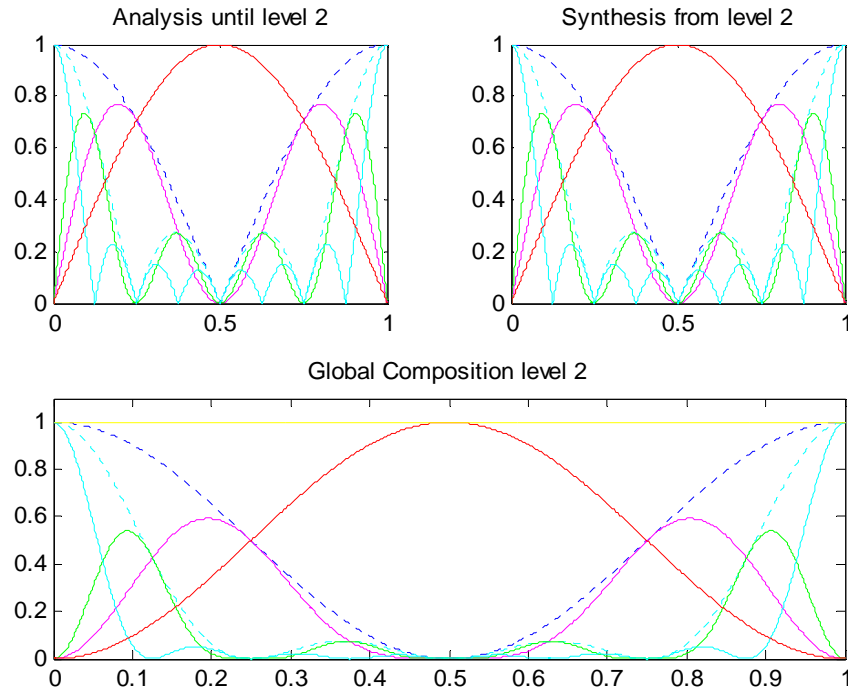


figura 2.8 Respostes freqüencials del banc de filtres fins al nivell 3. A dalt a l'esquerra respostes dels filtres de l'etapa d'anàlisi. A dalt a la dreta respostes dels filtres de l'etapa de síntesi. A sota la resposta composta de les etapes d'anàlisi i síntesi corresponents fins al nivell 3. Les respostes dels filtres al nivell 1, en vermell els passa altes, i en blau i ratllat els passa baixes. Les components passa baixes es descomponen en el nivell 2 en una component passa altes (rosa) i una component passa baixes (cian ratllada). Les components passa baixes es descomponen en el nivell 3 en una component passa altes (verda) i una component passa baixes (cian).

2.3.2 Matrius \mathbf{AWT}_L (Analysis matrix from Wavelet Transform) i \mathbf{SIWT}_L (Synthesis matrix for Inverse Wavelet Transform)

Segons els esquemes de la figura 2.5 i la figura 2.6 es poden definir dues matrius: \mathbf{AWT}_L (32) (Analysis matrix from Wavelet Transform / Matriu d'anàlisi de la transformada Wavelet) que conté el resultat de l'etapa d'anàlisi, i \mathbf{SIWT}_L (33) (Synthesis matrix for Inverse Wavelet Transform / Matriu de síntesi per a la Transformada Wavelet Inversa) a l'entrada de l'etapa de síntesi,

$$\mathbf{AWT}_L \equiv [\mathbf{d}_1 \ \mathbf{d}_2 \ \mathbf{d}_3 \ \dots \ \mathbf{d}_L \ \mathbf{a}_L] \quad (32)$$

$$\mathbf{SIWT}_L \equiv [\mathbf{d}_1 \ \mathbf{d}_2 \ \mathbf{d}_3 \ \dots \ \mathbf{d}_L \ \mathbf{a}_L] \quad (33)$$

Les matrius estan formades per $L+1$ columnes, una per cada component de detall a les escales successives de 1 a L i la darrera columna per a la component aproximada del nivell L .

Si s'aplica un senyal arbitrari \mathbf{f} (figura 2.9) a un esquema d'anàlisi com el de la figura 2.5, la matriu \mathbf{AWT}_L que s'obté a la sortida està formada per un senyal de detalls a cada escala \mathbf{d}_i , de 1 a L , i un senyal aproximat a la darrera escala \mathbf{a}_L . Aquests $L+1$ senyals (figura 2.10) són una representació redundant i suficient del senyal original \mathbf{f} .

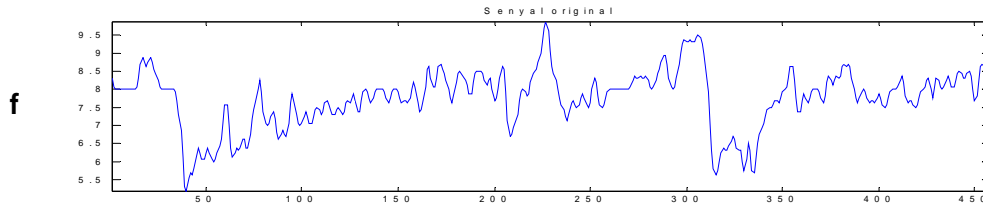


figura 2.9 Senyal original arbitrari.

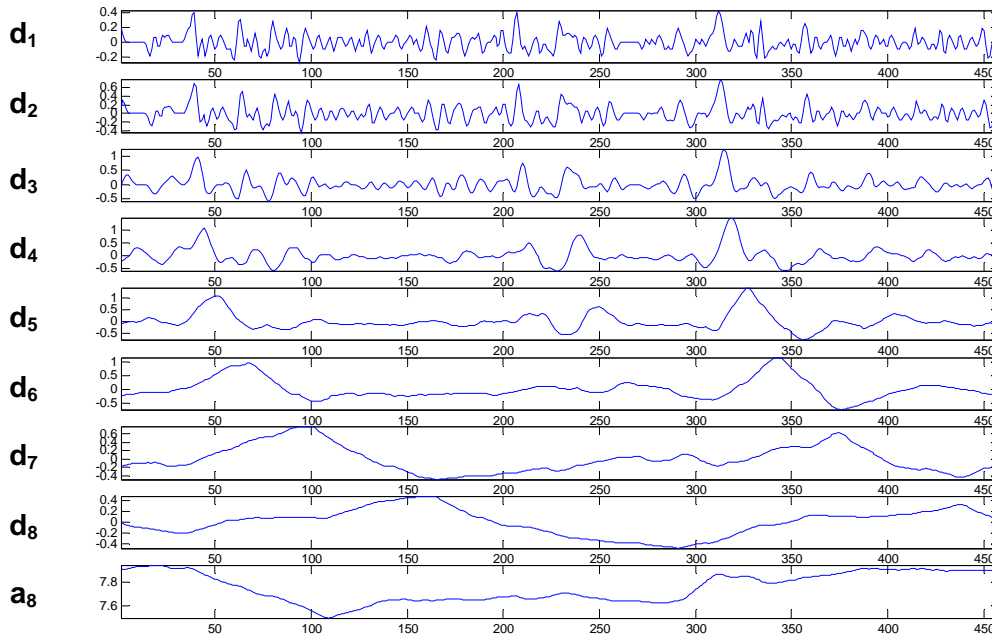


figura 2.10 Anàlisi multiresolució fins al nivell 8. Matriu $AWT_L = [d_1, \dots, d_8, a_8]$.

Ara analitzem què succeeix quan a l'entrada dels bancs de filtres de l'etapa de síntesi de la figura 2.6 posem aquests senyals que surten de l'etapa d'anàlisi ($SIWT_L = AWT_L$): en aquest cas el senyal \hat{f} reconstruït a la sortida és una reconstrucció 'perfecte', com es pot veure a la figura 2.11.

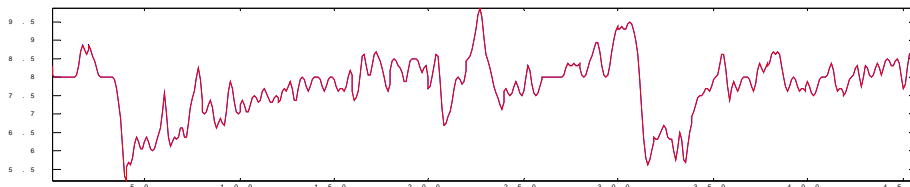


figura 2.11 Vermell: \hat{f} síntesi de la descomposició fins al nivell $L=8$;Blau: f senyal original (estan superposats).

Si definim l'error quadràtic mig del senyal f respecte la seva reconstrucció \hat{f} com :

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (\{\hat{\mathbf{f}}\}_i - \{\mathbf{f}\}_i)^2}{N}}. \quad (34)$$

amb $\{\mathbf{f}\}_i$, l'i-èssim element del vector \mathbf{f} .

L'error obtingut en aquest cas és molt petit, degut a efectes d'arrodoniment en els filtres ($RMSE=7.4 \cdot 10^{-4}$). A la vista dels resultats, sembla lògic considerar-lo un sistema amb 'reconstrucció perfecte'.

2.4 Reconstrucció d'un senyal a partir dels màxims del mòdul i els passos per zero de la transformada *wavelet*

2.4.1 Presentació i resultats obtinguts

També es pot obtenir una aproximació al senyal $\hat{\mathbf{f}}$ si es disposa només dels màxims del mòdul dels senyals de detall a totes les escales i una aproximació a la mitja del senyal aproximat a l'escala de menys detall. Al final d'aquest apartat haurem vist una variant del mètode de reconstrucció d'un senyal a partir dels màxims del mòdul de les transformades i els passos per zero tal com està definit a [57]. El mètode que s'utilitzarà és molt més simple, i és una modificació del banc de filtres per a reconstrucció de l'etapa de síntesi que s'ha utilitzat a l'apartat anterior. El banc de filtres modificat ens permetrà reconstruir un senyal a partir d'un conjunt de dades significatives però esparses. En aquest cas les dades esparses es defineixen amb la matriu \mathbf{SIWT}_L ,

$$\mathbf{SIWT}_L \equiv [\mathbf{dm}_1 \ \mathbf{dm}_2 \ \mathbf{dm}_3 \ \dots \ \mathbf{dm}_L \ \mathbf{am}_L]. \quad (35)$$

Els valors de la nova matriu s'obtenen prenent la matriu de sortida de l'etapa d'anàlisi \mathbf{AWT}_L figura 2.5 i simplificant cada columna:

- A partir de cada senyal de detall en un nivell de descomposició \mathbf{d}_i , es defineix un senyal de detall simplificat \mathbf{dm}_i , que té només els valors màxims en mòdul entre passos per zero consecutius, i deixant la resta de valors a zero, així s'obté un senyal simplificat amb valors no nuls significatius però esparsos.
- El senyal \mathbf{a}_L aproximat a l'escala L , es substitueix per la seva mitja \mathbf{am}_L ,

$$\mathbf{am}_L = \frac{\sum_{i=1}^N \{\mathbf{a}_L\}_i}{N}. \quad (36)$$

A la figura 2.13 es representa la nova matriu d'entrada al banc de síntesi corresponents als 8 nivells de descomposició utilitzats a l'apartat anterior (figura 2.10).

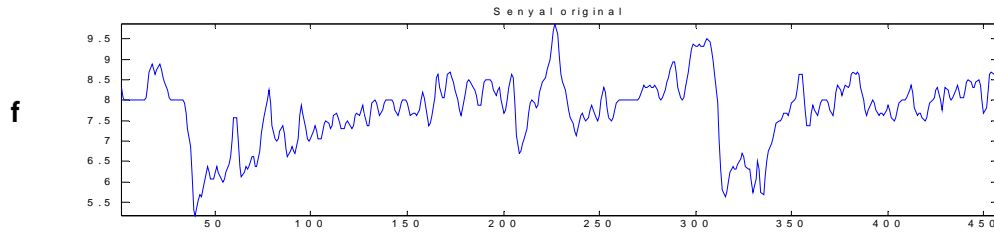


figura 2.12 Senyal original arbitrària f .

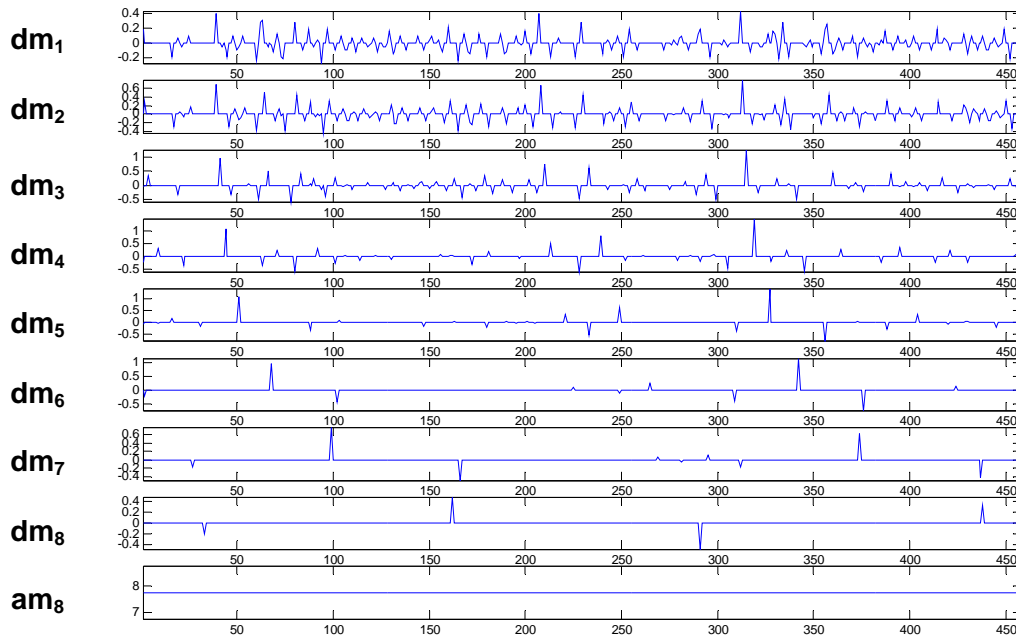


figura 2.13 Mòduls màxims dels senyals de l'anàlisi multiresolució, \mathbf{SIWT}_L . Corresponents als mòduls màxims de les components de detall a cada escala i el valor promitjat de la component aproximada a l'escala L .

Si s'aplica aquest conjunt de senyals esparsos \mathbf{SIWT}_L a un banc de filtres de síntesi modificats com els de la figura 2.15, s'aconsegueix una senyal \hat{f} (figura 2.14), que és la reconstrucció del senyal original f , amb un error (RMSE=0.33, del mateix ordre dels resultats obtinguts amb altres procediments [55] o [57]). En els apartats posteriors s'explicarà com es justifica el banc de síntesi modificat que nosaltres proposem.

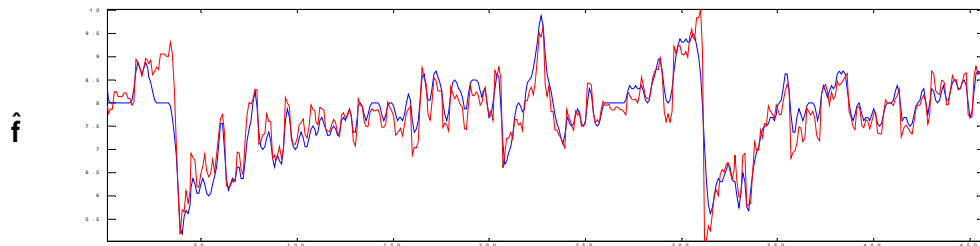


figura 2.14 En Vermell: el senyal \hat{f} reconstruït a partir de l'etapa de síntesi modificada amb L nivells ($L=8$). En Blau: el senyal original f .

2.4.2 Esquema del banc de filtres de síntesi modificat

Per aconseguir el resultat de síntesi de la figura 2.14, el mètode que es proposa és molt simple, només cal afegir un factor d'escala multiplicador a cada filtre passa altes del banc de filtres de l'etapa de síntesi original (figura 2.6), tal com es proposa a la figura 2.15.

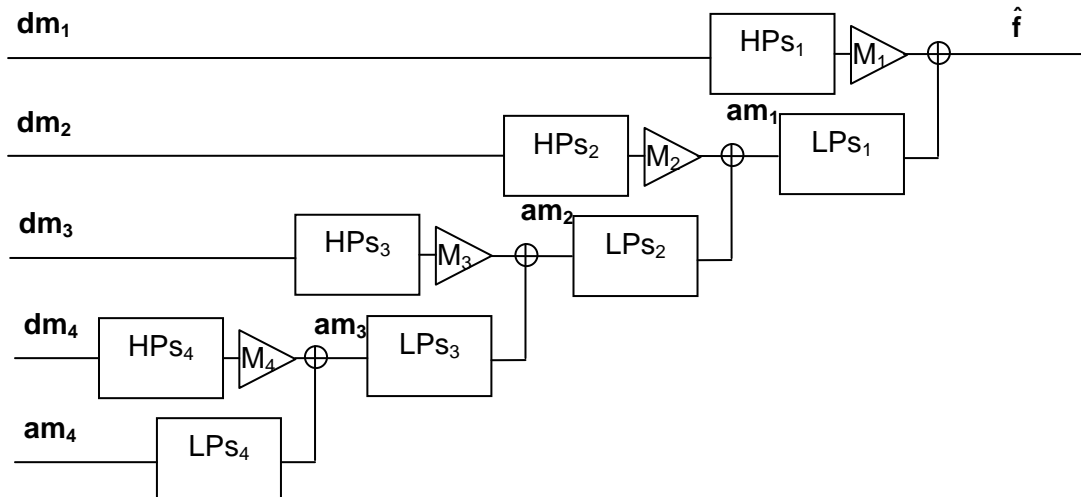


figura 2.15 Esquema final per a la reconstrucció d'un senyal a partir dels mòduls màxims dels detalls de les wavelets a diferents escales i el promig de l'escala més gran. L'esquema correspon a un banc de filtres de l'etapa de síntesi multiresolució modificats amb un factor multiplicador per cada escala.

A la figura 2.16 es mostren els factors multiplicadors i les longituds dels filtres respecte el nivell a l'arbre de descomposició.

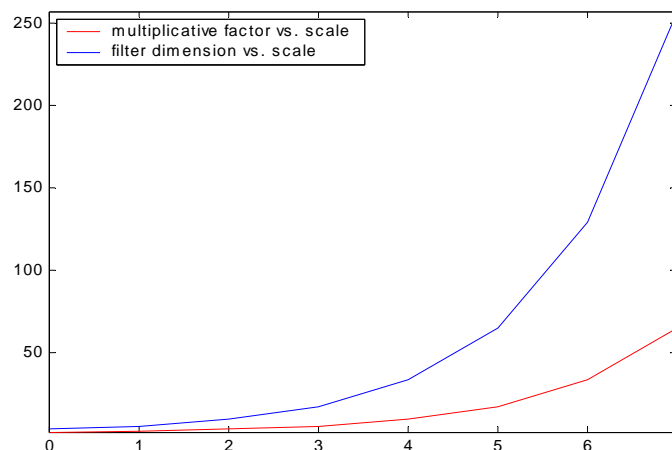


figura 2.16 En vermell: Factor multiplicador a l'escala 'i' (M_i), respecte l'escala. En blau: longituds dels filtres respecte l'escala.

Intuïtivament es pot entendre el factor multiplicador com a una aproximació grollera a l'energia del senyal no simplificat entre dos passos per zero consecutius. Per cada escala es pren la mitjana d'aquesta energia associada a una mostra, com a factor multiplicador. Per a il·lustrar el raonament, a la figura 2.17, es representen

conjuntament els senyals d_7 i d_8 (vermell) i les seves respectives simplificacions prenent només els pic del mòdul entre passos per zero dm_7 i dm_8 (blau).

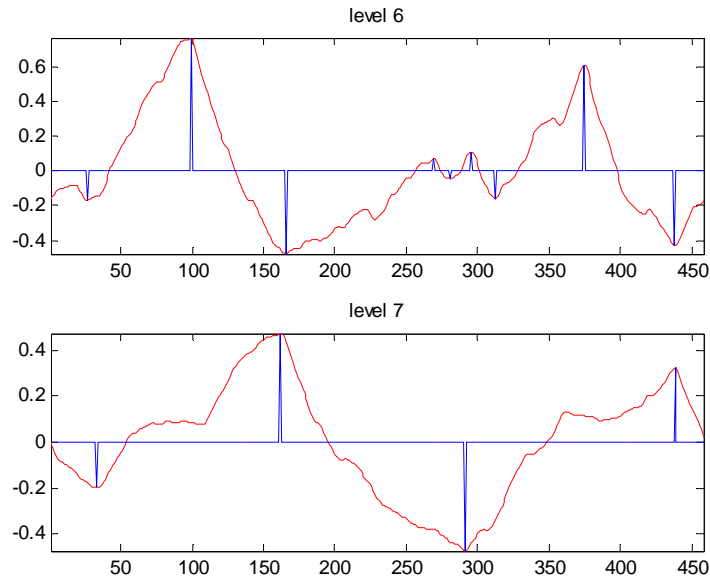


figura 2.17 En vermell representem els senyals de detall als nivells 7 i 8, i en blau les seves simplificacions, els màxims.

2.4.3 Factor d'escala en el processament de dades amb taxa múltiple

Quan s'utilitzen tècniques de processament de dades amb taxa múltiple, apareix un factor d'escala M . En la primera etapa d'un procés de delmació quan es multiplica un senyal per un tren de deltes espaiades M mostres, figura 2.18 (37) (veure el Cap. 10 de [71]).

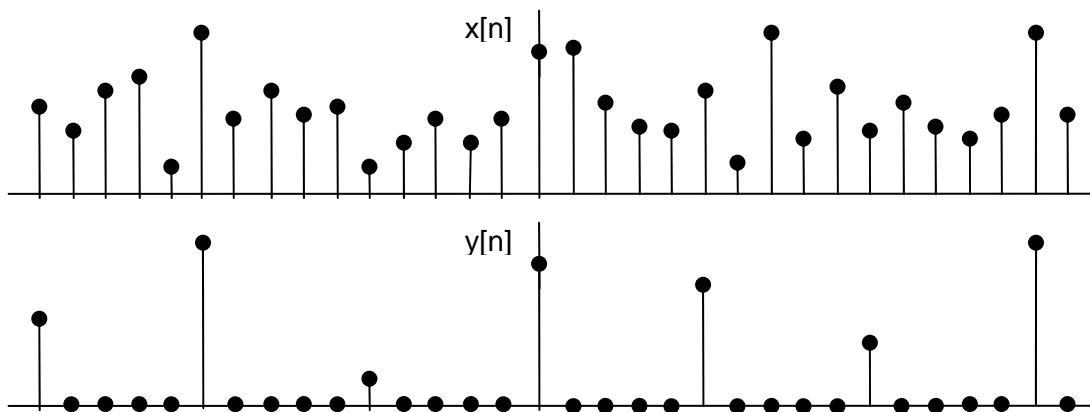


figura 2.18 Representació temporal de la primera etapa en la delmació de $x[n]$ en un factor M , el resultat és $y[n]$ que té $M-1$ zeros entre dos valors diferents de zero.

Analíticament es correspon a,

$$y[n] = x[n] \cdot p[n]$$

$$p[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n - k \cdot M] \tag{37}$$

Es pot expressar $p[n]$ amb el seu desenvolupament en Sèrie de Fourier per a un senyal periòdic i discret, a l'equació (38).

$$p[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} e^{j \frac{2\pi kn}{M}} \quad (38)$$

La Transformada z de $y[n]$ es pot desenvolupar segons,

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_n y[n] \cdot z^{-n} = \sum_n x[n] \cdot p[n] \cdot z^{-n} = \sum_n x[n] \cdot \left(\sum_k \delta[n - k \cdot M] \right) \cdot z^{-n} = \\ &= \sum_n x[n] \cdot \left(\frac{1}{M} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} e^{j \frac{2\pi kn}{M}} \right) \cdot z^{-n} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} \left(\sum_n \left(x[n] \cdot e^{j \frac{2\pi kn}{M}} \cdot z^{-n} \right) \right) = \\ &= \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} \left(\sum_n \left(x[n] \cdot \left(e^{-j \frac{2\pi k}{M}} \cdot z \right)^{-n} \right) \right) = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} X \left(e^{-j \frac{2\pi k}{M}} \cdot z \right) \end{aligned} \quad (39)$$

En el domini de la freqüència s'expressa com,

$$Y(w) = \frac{1}{M} \cdot \sum_{k=0}^{M-1} X \left(e^{j \left(w - \frac{2\pi k}{M} \right)} \right) \quad (40)$$

Podem veure que hi ha un factor multiplicador M , i a més es pot produir *aliasing* si el senyal original té una amplada de banda superior a π/M , com es pot veure a la figura 2.19.

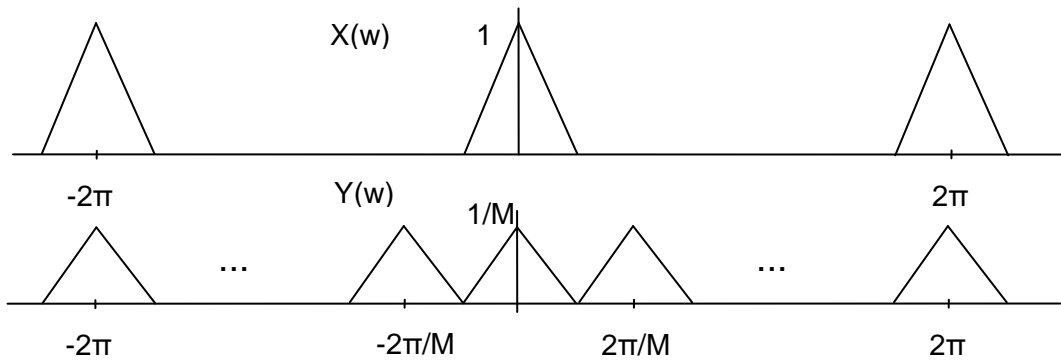


figura 2.19 Representació en el domini transformat del resultat de la primera etapa d'una delmació temporal de $x[n]$ per un factor M , $y[n]$. Relació de la transformada $X(w)$ amb la transformada del senyal de sortida $Y(w)$. Destaquem el factor M .

En el procés d'interpolació d'un senyal per a un factor M , també hi apareix el mateix terme multiplicador. Esquemàticament es pot resumir: primer cal afegir M zeros entre mostres, a continuació es realitza un filtrat passa baixes i finalment es multiplica l'amplitud per un factor M , com es recull a l'esquema de la figura 2.20 [71].

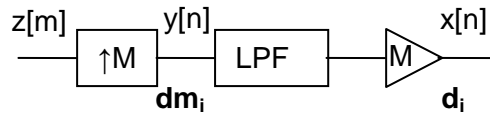


figura 2.20 Esquema d'un interpolador per M . El senyal original $z[m]$ l'hi afegim M zeros entre mostres i s'obté $y[n]$; a continuació es fa el filtratge passa baixes i es multiplica per M , per a obtenir el senyal interpolat $x[n]$.

Es pot establir un paral·lelisme entre els senyals simplificats \mathbf{dm}_i , que s'han obtingut a partir dels senyals originals \mathbf{d}_i , fent servir la notació de figura 2.15, i els senyals interpolats $x(n)$, que s'han obtingut a partir dels senyals amb zeros afegits $y(n)$. Cada \mathbf{dm}_i , (representat a la figura 2.17, i obtingut amb la simplificació de \mathbf{d}_i) es podria veure idealment com a un senyal parcialment interpolat en un factor M , en el que s'ha fet la primera etapa de la interpolació, i s'han afegit els M zeros entre mostres significatives. Aquesta visió és una idealització, ja que el senyal real no té un nombre de zeros fix entre mostres significatives, i el nombre de zeros depèn de les característiques del senyal original f .

2.4.4 Proposta i justificació del banc de filtres de síntesi modificat

La nostra proposta és que es pot obtenir un senyal interpolat $\mathbf{x}[n]$ o \mathbf{d}_i (senyal de detall a la sortida del filtre d'anàlisi al nivell i), a partir de $\mathbf{y}[n]$ o \mathbf{dm}_i (senyal de detall simplificada al nivell i , amb només els màxims del mòdul entre passos per zero), fent servir el mateix mètode d'interpolació que es faria servir en el cas que \mathbf{dm}_i fos regularment espaiada amb $M-1$ zeros entre valors significatius.

La justificació es pot fer a través de l'anàlisi de les característiques del senyal de detall \mathbf{d}_i . A partir de les respostes dels filtres de les etapes d'anàlisi mostrades a la figura 2.8, es pot veure que els filtres passa altes tenen una banda limitada a una amplada de $B=fs/(2^{i+1})=1/(2^{i+1}\cdot Ts)$ (amb fs = freqüència de mostreig, Ts = temps entre mostres), amb una freqüència màxima de $f_{\max}=1/(2^i\cdot Ts)$. La periodicitat mínima de \mathbf{d}_i és per tant $T_{\min}=2^i\cdot Ts$, tal com es pot veure a la figura 2.21. El senyal simplificat \mathbf{dm}_i , s'obté a partir dels valors amb mòdul màxim entre passos per zero del senyal \mathbf{d}_i , que és un senyal passa banda, de mitja zero. A la figura 2.21 el senyal \mathbf{dm}_i és una successió de pics (positius o negatius), zeros, pics inversos (negatius i positius) i zeros. La mitjana del temps entre passos per zero és $T_{zc} = 2^{i-1}\cdot Ts$, i finalment la mitjana entre pic i pas per zero és $T_{mzc} = 2^{i-2}\cdot Ts$.

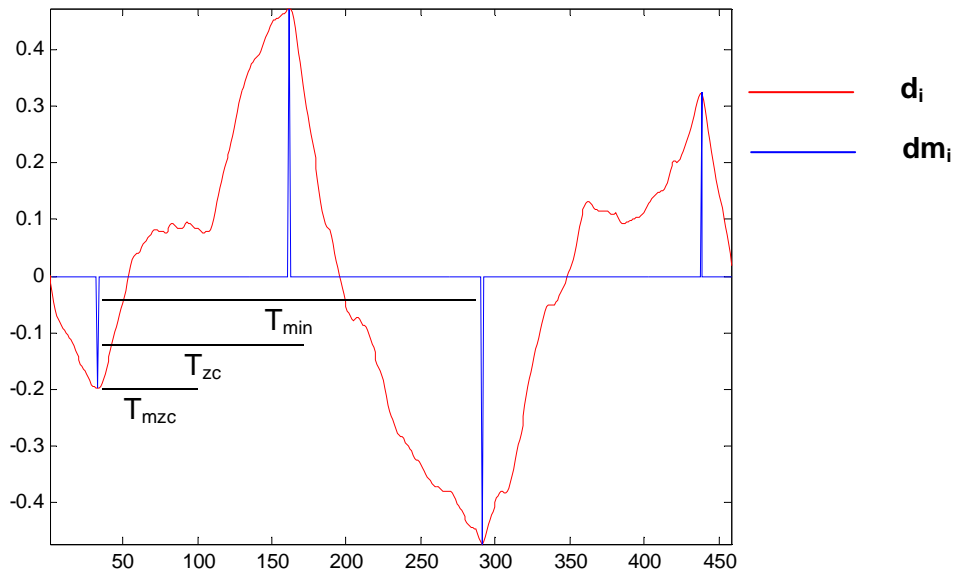


figura 2.21 Intervals temporals T_{min} , T_{zc} , T_{mzc} .

Per tant es pot concloure que el factor $M_i=2^{i-2}$ és una aproximació a la mitjana del nombre de mostres entre valors significatius (entre un pic i el proper pas per zero. en el punt intermedi cap al proper pic). I que com a tal es pot fer servir com a factor multiplicador en un esquema d'interpolació, donant una bona aproximació a la senyal interpolada a partir de les seves mostres esparses. Cal remarcar que la nostra aproximació a la reconstrucció a partir dels pics dels senyals multiresolució basada en una etapa de síntesi d'un banc de filtres, és més fàcil d'implementar que altres solucions (p.185 [55]) basades en mètodes iteratius, amb resultats similars en el cas de descomposició diàdica.

2.4.5 Resum

* En els sistemes discrets, la freqüència de fons d'escala és,

$$f_{fs} = \frac{F_s}{2} = \frac{1}{2 \cdot T_s}$$

F_s : freqüència de mostreig

T_s : període de mostreig

* Als filtres d'anàlisi necessaris per a obtenir les components de detalls (vd_i) de la descomposició subbanda de les figures (figura 2.7 i figura 2.8), la component freqüencial màxima és pot aproximar a:

$$f_{max} \approx \frac{1}{2^j \cdot T_s}$$

* Per tant es pot considerar, que el període mínim del senyal (d_i), per les components més energètiques es pot aproximar a:

$$T_{min} \approx 2^j \cdot T_s$$

* I que finalment, la separació entre dos pics o dos passos per zero de \mathbf{d}_i , \mathbf{T}_{zc} i la separació entre un pic i el següent pas per zero, \mathbf{T}_{mzc} , tal com es pot veure a la figura 2.21.

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{zc} &\approx 2^{i-1} \cdot \mathbf{T}_s \\ \mathbf{T}_{mzc} &\approx 2^{i-2} \cdot \mathbf{T}_s \end{aligned}$$

* Així la separació, en nombre de mostres, entre un pic i el pas per zero consecutiu de \mathbf{d}_i , a mig camí del següent pic, es pot aproximar per:

$$\mathbf{M}_i \approx 2^{i-2}$$

* Aquests factors \mathbf{M}_i són els que s'apliquen a l'etapa de síntesi (figura 2.15) per aconseguir l'aproximació resultant representada a la figura 2.14.

Per aconseguir l'esquema de reconstrucció de la figura 2.15, modifiquem l'esquema de síntesi original (figura 2.6), amb la part corresponent a la interpolació per \mathbf{M}_i (figura 2.20), i obtindrem l'esquema representat a la figura 2.22. Si es té en compte que els filtres passa baixes que s'introdueixen tenen una banda de pas de \mathbf{B}_i que compleix les relacions (41), l'esquema encara es pot simplificar: eliminant el filtre LP_i i deixant el $\text{LP}_{s(i-1)}$, ens queda l'esquema final de la figura 2.15.

$$\mathbf{B}_i = \frac{\pi}{M_i} = \frac{\pi}{2^{i-2}} \approx \mathbf{B}_{\text{LP}_{s(i-1)}} \tag{41}$$

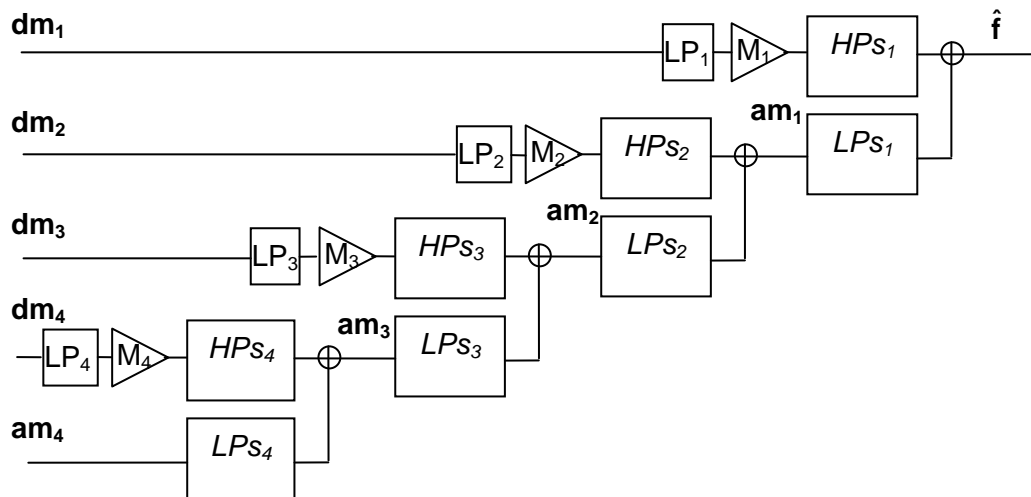


figura 2.22 Primera versió del banc de filtres de síntesi modificat. La versió utilitzada és eliminant els primers filtres passa baixes, ja que després, un cop s'ha sumat la component passa baixes, apliquem un filtre amb la mateixa banda de pas.

Al començar l'apartat 2.4.1 s'ha posat un exemple il·lustratiu per a mostrar els resultats i poder seguir l'explicació del mètode, els valors inicials esparsos que són els mòduls màxims i passos per zero de les transformades *wavelet* a escales successives i es troben representats a la figura 2.13, el resultat del senyal reconstruït a partir de l'esquema final de la figura 2.15 està representat a la figura 2.11.

2.5 Materials i dades utilitzades

2.5.1 Dades SST (Sea Surface Temperature) i GEBCO (General Bathymetric Chart of Oceans)

Les dades i imatges utilitzades per a aquest estudi es varen obtenir en el marc del projecte OMEGA (*Observing and modelling of Eddy scale Geostrophic and Ageostrophic circulation*). Les mesures de camp es varen realitzar al Mar d'Alborà, focalitzant-lo en el gir oriental (*western Alboran gyre*) i el front Almeria-Oran (*Almeria-Oran front*). Les dades de diferents sensors de satèl·lit, sobretot els AVHRR (*Advanced Very High Resolution Radiometer*) i el TM (*Thematic Mapper*), es varen adquirir alguns mesos abans i després de les campanyes. Els sensors de l'instrument AVHRR embarcat en els satèl·lits NOAA-12 i 14 de la NOAA (*National Oceanic and Atmospheric Administration*), operen a 5 bandes: en el visible (canal 1 de $0.6 - 0.7 \mu\text{m}$), en l'infraroig proper (canal 2 de $0.7 - 1.1 \mu\text{m}$), i en tres canals a l'infraroig tèrmic (canals 3, 4 i 5 amb bandes de $3.5 - 3.9$, $10.3 - 11.3$ i $11.5 - 12.5 \mu\text{m}$). A partir de l'algorisme MCSST (*Multi Channel SST*) també conegut com *Split Window* [58], s'estimen uns valors de temperatura superficial, la imatge SST, a partir de les mesures dels canals 4 i 5. La informació dels altres canals, juntament amb la obtinguda a partir del TOVS (*Tiros Operational Vertical Sounder*), permet incorporar també correccions atmosfèriques a les mesures. El NOAA-15 incorpora un canal a $1.6 \mu\text{m}$, que permet fer una separació correcta de la contribució dels núvols, la neu i el gel. Els satèl·lits NOAA tenen una òrbita polar amb 100 min de període, a una distància d'uns 850 Km de la superfície terrestre. Les plataformes AVHRR-NOAA produeixen imatges dues vegades al dia amb una resolució espacial 1.1 Km per cada costat dels píxels rectangulars al *nadir* (en la vertical de l'observador respecte al centre de la Terra), i de 4 Km als extrems de la traça. Amb una cobertura total al voltant de $3000 \times 7000 \text{ Km}^2$. Els valors de SST es deriven directament dels bits identificats com a superfície d'aigua, en els que no es detecta presència de núvols, els píxels identificats com a núvols es marquen amb un valor 255, i els que s'identifiquin com a terra, amb un 0, ja que es treballa amb 8 bits de quantificació, que representem amb un enter positiu de 8 bits. En els casos de treball la calibració efectuada ens permet un marge de valors entre 0.0°C correspon al valor 1 fins a 31.75°C , corresponent al 254. En aquest cas un salt de quantificació d'uns 0.125°C . Els valors de desviació respecte a les mesures *in situ* en condicions de bon funcionament i cel sense núvols, oscil·len per sota de $\pm 0.4^\circ\text{C}$ [24].

Les dades que es fan servir en el Capítol 3 són imatges SST, que s'enregistraran respecte una imatge de referència que s'obté a partir d'un Atlas baromètric. De les imatges SST se n'extreu la línia de costa per tal de fer-ne el geoenregistrament. Com a referència per a la línia de costa s'ha utilitzat l'atlas baromètric GEBCO i s'han seleccionat el conjunt de punts amb alçada 0, al nivell del mar, per a traçar la línia de costa de la zona d'interès en forma d'imatge [33]. Per a enregistrar altres tipus d'imatges oceanogràfiques, caldria fer un procés molt similar. En primer lloc caldria extreure la línia de la costa de la imatge que es volgués enregistrar, posteriorment caldria fer l'enregistrament geomètric de la imatge de la línia de la costa respecte una imatge de referència.

2.5.2 Camps vectorials de treball, procedents de mesures i dels models de simulació

En el Capítol 4 es treballa amb dades unidimensionals per a presentar el desenvolupament del mètode d'interpolació multiescalar que es proposa. S'utilitzen senyals arbitràries, en el nostre cas s'ha il·lustrat l'explicació a partir d'un codi de cadena de la línia de costa Africana de la Mediterrània, corresponent a la zona del mar d'Alborà, en concret s'ha utilitzat una versió allisada d'aquest senyal, per a disposar d'un senyal arbitrari, discret i finit. Per a poder realitzar l'explicació també s'han obtingut versions esparses i a diferents escales d'aquest senyal, cal remarcar que les dades esparses s'han triat arbitràriament entre els extrems locals dels senyals a diferents escales, a fi i efecte que els valors esparsos fossin representatius dels senyal que es volien reconstruir.

A continuació, en el mateix capítol, per a mostrar el mètode d'interpolació sobre un camp vectorial de velocitat, es treballa amb camps de velocitat superficials obtinguts a partir de les mesures SSH (*Sea Surface Height*), que representen l'alçada de la superfície marina respecte a la geòide de referència. Aquest paràmetre s'obté a partir de les mesures al llarg de la traça d'un satèl·lit, si aquest té un altímetre de precisió entre els seus instruments. Quan es treballa simultàniament amb les traces coincidents en el temps de diferents satèl·lits (o amb una diferència temporal prou petita per permetre la seva integració, perquè s'assumeix que les estructures es mantenen estables a les escales d'observació) es poden estimar les components del camp superficial en condicions de corrents geostrofiques, i d'aquí es pot extrapolar un camp de velocitats complet. Les dades amb les que s'han treballat pertanyen a mesures sobre la Bahia de Biscaia de l'1 de novembre del 2002 [46], derivades de les traces de quatre satèl·lits: Jason-1, ERS2/ENVISAT, TOPEX *interleaved* i GFO. Al fer la combinació de dades de quatre satèl·lits permet un gran guany en la qualitat del producte [67]. A partir d'aquest camp de velocitats superficials complet, s'obtenen uns camps esparsos a diferents escales espacials diàdiques. Els valors esparsos es trien arbitràriament entre els valors extrems locals dels camps de velocitats, per tal que siguin representatius dels camps que es volen reconstruir.

Finalment en el Capítol 5 es fan servir uns camps de velocitats que provenen del resultat de la simulació numèrica d'un model no hidrostàtic [21], en l'aproximació de Boussinescq i en un pla f que no té en compte l'esfericitat de la Terra; amb una inicialització basada en una aproximació a la inicialització de la vorticitat potencial PV [109], necessària per a evitar la generació inicial d'ones superficials degudes a l'efecte de la inèrcia de la gravetat. En aquest cas es disposa de 3 simulacions d'un mateix fenomen sobre el mateix domini espacial a tres resolucions diferents, 256x256, 128x128 i 64x64, que farem servir com si fossin mesures esparses en tres escales diàdiques.

Capítol 3. Enregistrament geomètric d'imatges Alineament d'imatges

3.1 Introducció

L'enregistrament geomètric de dues imatges és una eina de processament que permet alinear els píxels d'una imatge, la imatge de treball, amb els píxels corresponents d'una altra imatge, la imatge de referència, de manera que estiguin referides a uns mateixos punts de l'escena que representen. En pràcticament tots els sistemes de processament d'imatge que fusionen dades de diferents tipus és imprescindible una etapa prèvia d'enregistrament espacial de les imatges [94].

Es presentaran uns mètodes d'enregistrament totalment automàtics basats en els contorns de les imatges, per tant seran vàlids només per a parelles d'imatges on es puguin obtenir contorns distintius i l'enregistrament serà de qualitat si els contorns estan ben distribuïts a tota la imatge. Com a casos d'anàlisi es fan servir imatges derivades de dades oceanogràfiques de satèl·lits en les que hi ha línies de costa visibles. Aquestes línies de costa són els contorns principals per a fer l'enregistrament.

En aquest capítol es fa la comparació de dos mètodes d'enregistrament geomètric d'imatges oceanogràfiques de satèl·lit basats en les línies de costa, a partir d'un anàlisi multiescala amb transformades *wavelet*. Un mètode treballa en un domini 2D i l'altre en un domini 1D. Els dos mètodes són totalment automàtics. Com a referència comú per a la comparativa entre els sistemes es fa servir el mètode d'enregistrament clàssic basat en la màxima correlació creuada d'àrea (MCC) en el domini espacial [70]. En el cas 2D es fa un enregistrament basat en la MCC d'àrea en un domini de transformades *wavelet* 2D de les imatges de línies de costa [97]. En el segon cas es fa l'enregistrament basat en MCC d'uns descriptors 1D de les línies de costa a partir de codis de cadena i el seu anàlisi *wavelet*, conjuntament amb un alineament local elàstic a partir de tècniques de programació dinàmica (DTW: *Dynamic Time Warping*). Els mètodes que es presenten són especialment robustos al fet que les imatges tinguin lleugeres variacions en el tipus de projecció, o en l'escena, o en la naturalesa de la informació que representen; fins i tot el segon mètode permet superar la dificultat que representa que parts importants de la imatge no sigui operativa perquè la línia de costa està tapada per núvols o no es reproduïble, fita que no ens consta com a assolida per a cap dels algorismes que estan referits en els reculls referenciats a la introducció; la raó principal és que els codis de cadena utilitzats i les senyals derivades són pràcticament invariants a rotacions i a desplaçaments espacials.

3.2 Etapes per a l'enregistrament geomètric d'imatges

Tradicionalment l'enregistrament geomètric d'una imatge de treball respecte una imatge de referència, en Teledetecció, es fa en cinc etapes consecutives [70]. Primer cal seleccionar els elements i els paràmetres útils per fer l'enregistrament; després s'han de triar les mesures de semblança per aparellar els elements de les imatges; a continuació cal seleccionar el model de la transformació geomètrica i calcular-ne els coeficients; i finalment cal aplicar la transformació resultant a la imatge de treball que es vol enregistrar. De manera resumida:

1. Selecció dels punts de control (*Ground Control Points - GCP*)

Cal seleccionar un conjunt d'elements distintius de la imatge de treball que es vol enregistrar i els elements que poden ser corresponents a la imatge de referència. Com a elements distintius normalment es fan servir regions, objectes, contorns, angles o interseccions de línies. Pel processament posterior aquests elements es poden caracteritzar amb uns punts representatius (centres de gravetat, finals de línies, punts distintius, trams singulars, centres d'àrees singulars), que normalment s'anomenen *Ground Control Points* (GCP), en aplicacions de Teledetecció, o Punts de Control. També cal seleccionar, per cada aplicació, quin conjunt de paràmetres s'associen als punts de control per tal de completar la seva caracterització. La selecció dels GCP de la imatge de treball i dels punts aparellats a la imatge de referència, la pot fer manualment un operador entrenat en el tipus d'imatges d'interès. També es pot fer la selecció i aparellament semiautomàticament, amb la intervenció d'un operador en algun punt del procés per verificar o ajudar a prendre decisions. En aquest document es descriuen uns mètodes totalment automàtics, vàlids per a imatges on es puguin definir contorns característics de suficient longitud.

2. Aparellament entre GCP

En aquesta etapa s'aparellen els GCP de la imatge de treball amb els de la imatge de referència. Com ja hem comentat en els sistemes automàtics caldrà haver determinat en primer lloc quins paràmetres associats als GCP es fan servir per a caracteritzar-los. Després es trien quines mesures de distància o de semblança es calculen. I finalment es defineix un procés a partir dels paràmetres i les mesures de distància per escollir els aparellaments més versemblants entre els N GCP de la imatge de treball i els GCP de la imatge de referència.

3. Selecció del model de la transformació

Cal definir el model de la transformació geomètrica que permeti resoldre l'enregistrament entre les imatges. En els casos del nostre interès es concreten en models globals de transformació de primer o segon ordre. Cal triar les matrius de transformació geomètrica per passar dels punts de la imatge de referència als punts de la imatge de treball. Els models de primer ordre es poden descriure per la transformació afí, que permet resoldre rotacions, desplaçaments i escalats; o les transformacions d'ordre superior que ens permeten modelar canvis de projeccions, canvis d'angle de visió i altres distorsions. Les transformacions afins de primer ordre són les més utilitzades en la majoria de casos pràctics.

4. Obtenció dels coeficients de la transformació

Amb les N parelles de GCPs es calculen els coeficients de la transformació que més s'ajusten en tots els punts, segons un criteri que faci mínim l'error. Un cop

obtinguts els coeficients es pot calcular l'error en els propis GCPs, i fer servir aquest paràmetre per refinar els coeficients de manera iterativa, eliminant les parelles que tinguin els valors més grans d'error, i tornant a calcular els coeficients. El procés es pot repetir fins aconseguir una acotació a l'error o bé superar un cert nombre d'iteracions. A la vegada es pot proposar un mètode per mesurar la consistència dels resultats, per exemple a partir de mesures topològiques a la pròpia imatge abans i després de l'enregistrament.

5. Transformació i enregistrament de la imatge de treball

Per obtenir la imatge enregistrada es pot treballar amb els coeficients obtinguts a través d'un mètode invers d'interpolació de valors a partir de la imatge de treball, o bé calcular els coeficients de la transformació dual i aplicar el mètode de transformació directe. Si es fa el mètode invers cal interpoliar el valor dels píxels: es pot fer pel veí més pròxim, o bé per interpolació bilinial o cúbica. En el nostre cas s'ha implementat una transformació inversa i es fa la interpolació del valor amb el veí més pròxim.

A la figura 3.1 es representa el flux de processament que es farà servir per els nostres casos d'estudi respecte l'enregistrament geomètric, i es diferencien els passos que són comuns en tots els mètodes i els passos que són diferents en els mètodes estudiats. Aquest document està centrat en explorar dos possibles enfocaments de les dues primeres etapes, la selecció i l'aparellament dels GCP de forma totalment automàtica. En una etapa prèvia de preprocessament s'obtenen unes imatges amb la línia de costa i els contorns corresponents. L'avantatge de treballar amb els contorns d'una imatge en comptes de les pròpies imatges per fer l'enregistrament és que s'igualava el problema per poder fer l'enregistrament d'imatges del mateix tipus o imatges multimodals, a la vegada que tampoc depèn dels nivells d'intensitat de les imatges. En el fons es fa un transformació de les imatges a un espai simplificat, on només tenim els contorns principals que es volen fer servir per l'enregistrament de les imatges. Les tècniques d'enregistrament que es presentaran es poden esquematitzar:

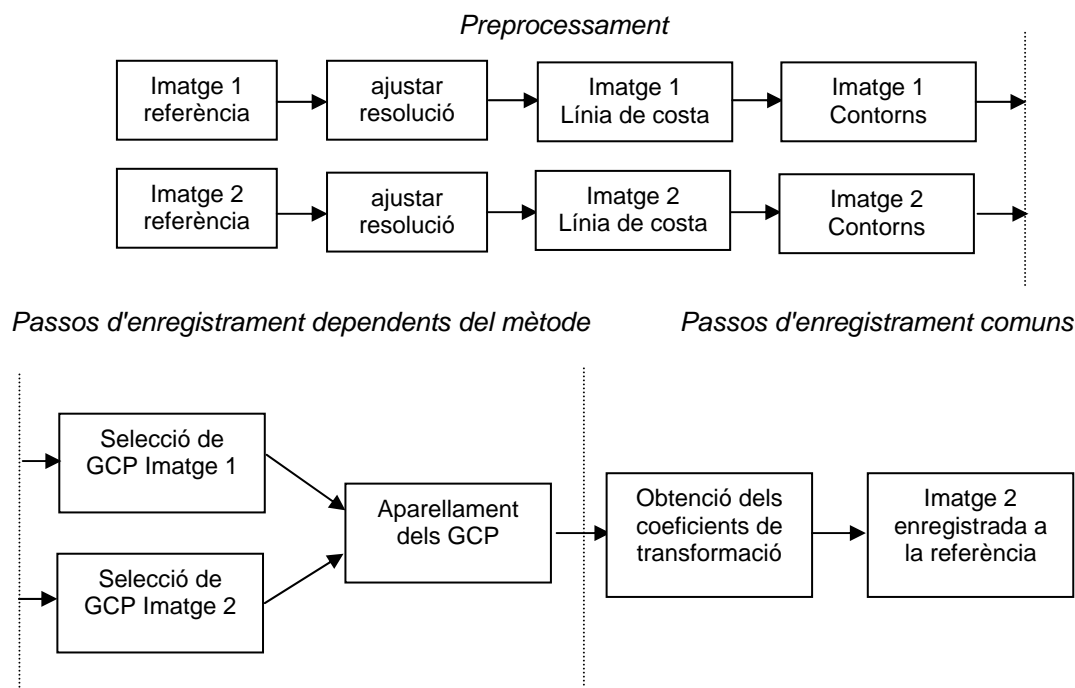


figura 3.1 Etapes generals esquemàtiques de les tècniques d'enregistrament de dues imatges.

En primer lloc, després d'ajustar les imatges a que estiguin aproximadament a la mateixa resolució espacial, es presentarà una etapa comuna a totes les tècniques d'enregistrament, el preprocessament inicial, que es basa en obtenir una imatge amb els contorns de la línia de costa, a l'apartat 3.4. A continuació ens centrarem en el nucli del problema, la selecció i aparellament dels GCPs de forma totalment automàtica, ho plantejarem a partir de tres mètodes.

1.- A l'apartat 3.5 es descriu el mètode que es farà servir de referència, és el mètode d'enregistrament basat en la màxima correlació creuada (MCC) de l'àrea a les imatges de contorns en el domini espacial [70].

2.- A l'apartat 3.6 s'analitza el mètode d'enregistrament a partir de MCC d'àrea a les imatges en el domini transformat, aplicant un anàlisi multiescala amb transformades *wavelet* 2D de les imatges de contorns. Es tracta d'una adaptació del mètode [19], [97].

3.- A l'apartat 3.7 es presenta el mètode d'enregistrament basat en la MCC 1D a partir dels descriptors de contorns, aplicant un anàlisi multiescala amb transformades *wavelet* 1D dels descriptors, i tècniques DTW (*Dynamic Time Warping*). D'entrada es presentaran els descriptors de contorns basats en un codi de cadena modificat, es veurà que són independents de la posició i la rotació del contorn que descriuen ([17], [50]). A continuació s'obtidran els passos per fer la selecció i aparellament dels GCPs a partir d'aquests descriptors.

A l'apartat 3.8 es presenten les etapes comuns dels mètodes d'enregistrament, que a partir de parelles de punts de control GCP permeten obtenir els coeficients de transformació geomètrica i finalment enregistrar la imatge de treball [70].

A 3.9 es dibuixen els resultats i es proposa una mesura quantitativa per a poder fer la comparació entre els mètodes i a 3.10 s'enceten les discussions finals dels resultats i els mètodes presentats, així com les propostes futures de treball.

3.3 Casos exemple

Per poder il·lustrar el funcionament dels mètodes ens centrarem en quatre casos, que representen exemples dels usos de l'enregistrament d'imatges oceanogràfiques en condicions diferents. Cal remarcar que tots els casos són independents de la diferència d'intensitat entre les imatges, ja que es fa un preprocessament per treballar amb els contorns que defineixen la línia de costa. La línia de costa es pot deduir a partir de les dades dels instruments a la majoria de satèl·lits, pot passar, però, que es produeixin discontinuïtats a la línia de costa degut a la presència de núvols, només les dades obtingudes de instruments que operin a les bandes de microones poden ser poc sensibles a la presència de núvols. De totes maneres aquest no és l'objectiu principal del nostre estudi, en el nostre cas la línia de costa es pot extreure fàcilment a partir del tipus d'imatges i dades de treball.

- **Cas 1:** es farà l'enregistrament de dues imatges en condicions d'adquisició diferents, on ha variat lleugerament la orientació i no són coincidents en el temps.
- **Cas 2a:** és un cas més complex on es farà un enregistrament multimodal, d'una imatge respecte un atlas, una imatge georeferenciada estàtica, però que tenen discordances lleugeres en l'escala, l'escena representada i el tipus de projecció.
- **Cas 2b:** és una variant del cas anterior, on s'aplica una rotació i un desplaçament a la imatge de treball.
- **Cas 2c:** finalment es complicarà el **cas 2b** afegint oclusions degudes als núvols de parts significatives de la imatge de treball.

Pel **Cas 1** farem servir les següents imatges (figura 3.2):

- **Imatge 1:** Com a referència una imatge SST (*Sea Surface Temperature*) de la zona del Mar d'Alborà (38°N-6°W, 35°N-2°E) que és a l'extrem occidental de la Mediterrània, on hi ha l'intercanvi d'aigües amb l'Oceà Atlàntic a través de l'Estret de Gibraltar. La imatge inicial és de nivells de gris, i les zones més fosques corresponen a les aigües més fredes. A efectes de millorar la visualització s'aplica una paleta de pseudocolor - *zebra palette* -, de manera que es realcen els canvis de nivell de gris i és poden apreciar millor les estructures de la imatge.
- **Imatge 2:** La imatge de treball és la mateixa imatge amb una rotació de alfa graus (10°) i un desplaçament horitzontal sdh (5) píxels.

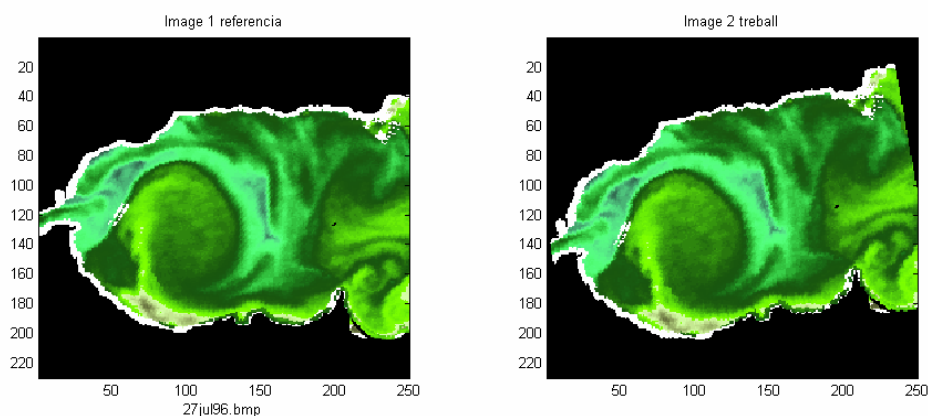


figura 3.2 *Imatge 1 de referència i Imatge 2 de treball, són imatges SST amb una lleugera rotació i desplaçament, utilitzades pel Cas 1.*

Pels Casos 2a, 2b, 2c les imatges són (figura 3.3):

- **Imatge 1:** Una imatge georeferenciada que conté el contorn de la línia de la costa, obtinguda a partir de la projecció d'un fitxer de la base de dades GEBCO [33], un atlas digital de referència.
- **Imatge 2:** Una imatge oceanogràfica de satèl·lit. Es farà servir la imatge SST del cas 1 amb modificacions diferents.
 - a.- Imatge de treball amb variació lleugera de l'escala, l'escena i la projecció.
 - b.- Imatge de treball aplicant una rotació (a l'exemple 20°)
 - c.- Imatge de treball amb una rotació important i amb oclusions molt significatives que afecten la línia de costa indiscriminadament.

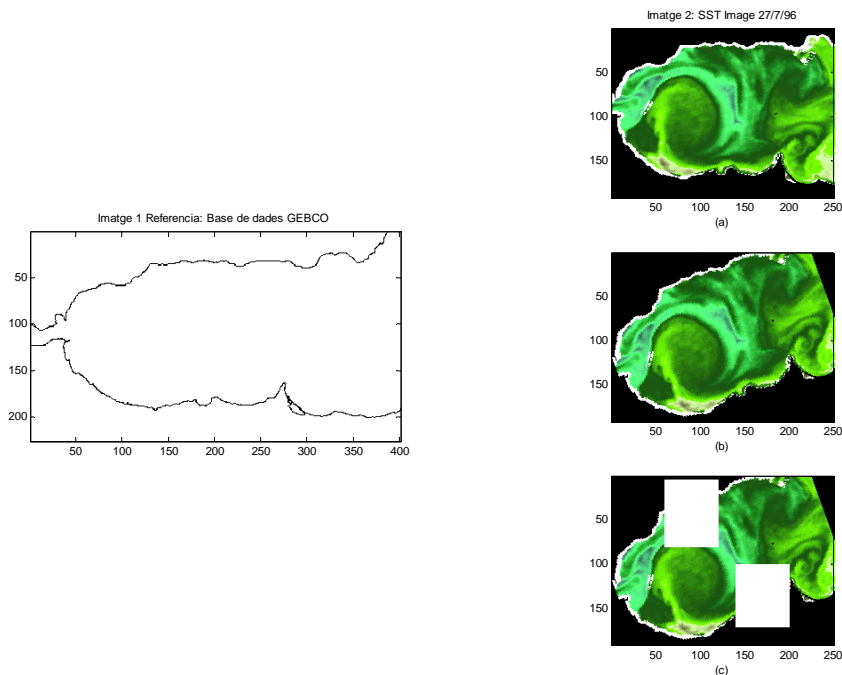


figura 3.3 Imatge 1 de referència. A la dreta els tres casos 2a, 2b i 2c de la Imatge 2 de treball. La imatge 2a és la SST estàndard, la imatge 2b es una SST amb rotació i desplaçada, i la imatge 2c té una rotació i un desplaçament més part de la imatge coberta per núvols.

3.4 Preprocessament, obtenció dels contorns de les imatges

Els contorns que segueixen la línia de costa seran els elements a partir dels que es farà l'enregistrament geomètric entre les imatges. Són objectes que es mantenen invariants entre les imatges i han de tenir una presència prou significativa i ben distribuïda en tota la escena per poder aconseguir un enregistrament de qualitat. En els casos exemple, les línies de costa compleixen aquest requisit.

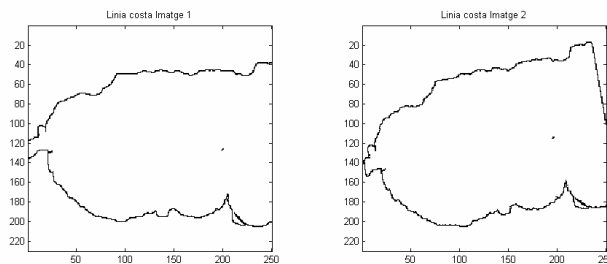


figura 3.4 Contorns de les Imatges del Cas 1

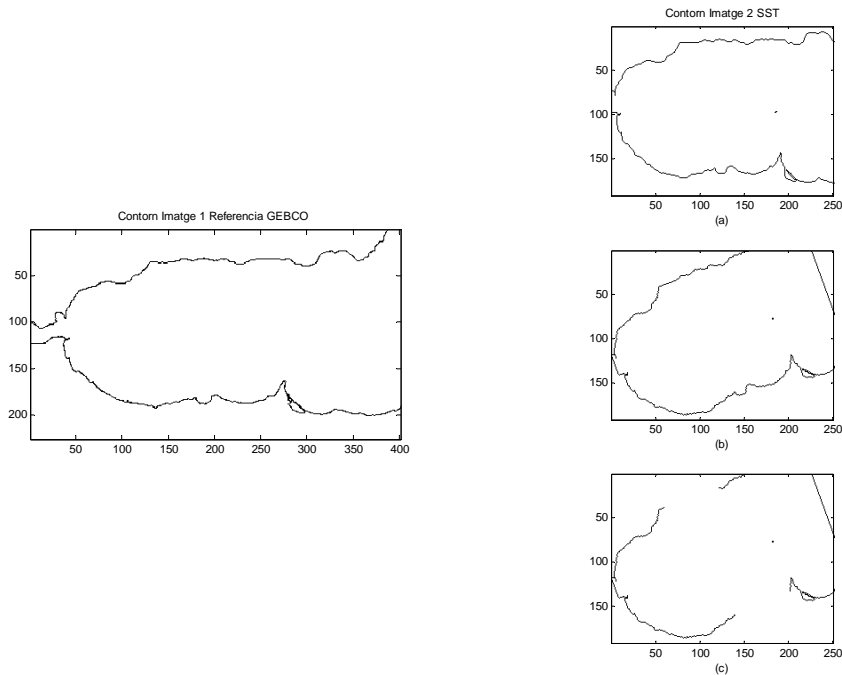


figura 3.5 Contorns de les Imatges dels casos 2

Aquesta etapa de preprocessament que ens permet obtenir els contorns de les imatges caldria ajustar-la específicament al tipus d'imatges que es volen enregistrar. Veurem els passos realitzats a les imatges dels Casos 2, ja que les imatges del Cas 1 equivalen a la imatge 2 dels Casos 2.

- La Imatge 1 de referència s'obté projectant els valors del fitxer de la base de dades GEBCO a una matriu referenciada als valors extrems de la base de dades. La imatge que ens dóna ja és una imatge de contorns.
- Per obtenir els contorns de la línia de la costa de la Imatge 2 (imatge SST) dels Casos 2, primer cal segmentar la terra del que no és terra, binaritzant la imatge; i després aplicar un detector de contorns. La binarització permet posar a 0 els píxels corresponents a terra i a 1 els corresponents a la resta, mar o núvols. Després el detector de contorns amb 4 veïns, posa a 1 un píxel de contorn sempre que en una finestra d'anàlisi de 3x3 al voltant d'un punt el píxel central sigui Terra (valor a 0) i algun dels veïns (N-S-E-W) sigui Mar (valor a 1), els píxels que són núvols actuen de màscara dels contorns:

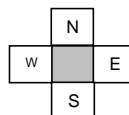


figura 3.6 Plantilla bàsica del detector de contorns

El detector de contorn utilitzat és una implementació directe de la definició d'un contorn en una imatge binària, que és equivalent a un detector de contorn morfològic clàssic [89]. El motiu per treballar amb 4 veïns i no amb 8 és obtenir un contorn continu d'amplada 1 píxel.

En imatges amb degradacions importants, per exemple amb molta presència de soroll, podria ser necessari un preprocessament més complex, el de l'exemple es limita a segmentar binàriament la imatge per separar la costa de l'oceà. També es podria fer servir un altre detector de contorns, p.e. Canny [7], i això obligaria a afegir alguna etapa de processament per tal que la imatge del contorn fos el més semblant a un contorn continu d'amplada 1 píxel.

Com ja s'ha dit, l'avantatge principal de treballar amb els contorns d'una imatge, en comptes de les pròpies imatges per fer l'enregistrament, és que s'igualava el problema per poder fer l'enregistrament d'imatges del mateix tipus o imatges multimodals, a la vegada que l'enregistrament tampoc depèn dels nivells d'intensitat de les imatges. En el fons es fa una transformació de les imatges a un espai simplificat, on només tenim els contorns principals que es volen fer servir per l'enregistrament de les imatges.

3.5 Mètode de selecció i aparellament de GCPs per MCC d'àrea en domini temporal. Mètode de referència

És una variant del mètode clàssic d'enregistrament per MCC d'àrea [42], [70]. En primer lloc els GCPs només poden ser punts de la línia de costa, això permet acotar la cerca dels punts d'aparellament i augmenta molt la velocitat de processament respecte el cas general, en el que els GCPs poden ser qualsevol punt de la imatge. El paràmetre per seleccionar l'aparellament és la *màxima correlació creuada* (MCC) d'una finestra d'anàlisi de la imatge de contorns en el domini espacial, dins una finestra de cerca possible. Les finestres d'anàlisi estan centrades en les potencials parelles dels GCP. A la figura 3.7 es pot veure una recreació de les finestres sobre les imatges, i a continuació un resum del procediment que cal implementar:

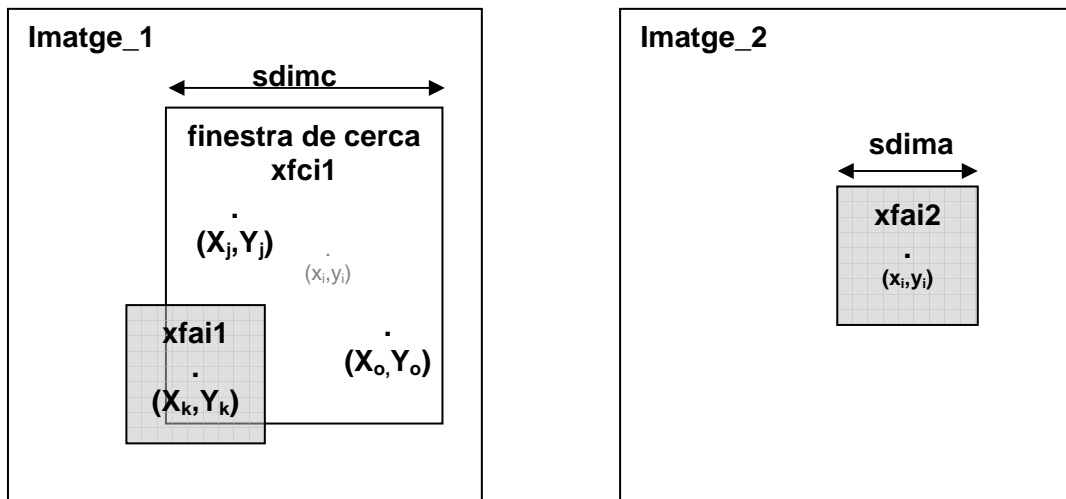


figura 3.7 Finestres d'anàlisi i de cerca amb els seus paràmetres sobre les imatges. A la gràfica es marquen també els punts de treball esmentats al text.

La Imatge_1 és la de referència i la Imatge_2 és la de treball. Cal trobar per cada punt de la línia de costa de Imatge_2 (x_i, y_i) , quin punt li correspon a Imatge_1:

- Es defineix una finestra d'anàlisi ($xfai2_{xy}$) a la Imatge_2. És una finestra quadrada de **sdima** punts, centrada al punt (x_i, y_i) . A la imatge està en gris.
- Es defineix una finestra de cerca (**xfc1**) a la Imatge_1. És una finestra quadrada més gran (**sdimc** > **sdima**), centrada al mateix punt (x_i, y_i) anterior, però sobre la Imatge_1.

c.- S'identifiquen dins la finestra de cerca tots els GCPs candidats a aparellar-se de la *Imatge_1*. Es correspondran amb tots els punts de la finestra de cerca que són de la línia de costa. A l'exemple són tres punts: (X_j, Y_j) , (X_k, Y_k) , (X_o, Y_o) .

d.- Per cada un dels possibles candidats de la finestra de cerca es defineix una finestra d'anàlisi **sdima** (**xfai1**). A la figura 3.7 està representada sobre el punt (X_k, Y_k) .

e.- Per cada candidat es calcula la correlació creuada normalitzada (MCC) (42) de la finestra d'anàlisi (**xfai1**) amb la del punt original de la *Imatge_2* (**xfai2**), en aquest cas sobre el punt (X_k, Y_k) :

$$MCC(x_k, y_k) = \frac{\sum_{m=1}^{sdima} \sum_{n=1}^{sdima} \mathbf{xfai1}_{x_k y_k}(m, n) \cdot \mathbf{xfai2}_{x_i y_i}(m, n)}{\left[\sum_{m=1}^{sdima} \sum_{n=1}^{sdima} \mathbf{xfai1}_{x_k y_k}^2(m, n) \right]^{1/2} \cdot \left[\sum_{n=1}^{sdima} \sum_{m=1}^{sdima} \mathbf{xfai2}_{x_i y_i}^2(m, n) \right]^{1/2}} \quad (42)$$

f.- De tots els candidats es selecciona el que té el valor màxim MCC. Si hi ha més d'un punt amb el valor màxim de MCC, es rebutja l'aparellament.

g.- Tornar al pas a.- amb el següent punt de la *Imatge_2*

Pot passar que diversos punts de la *Imatge_2* hagin quedat aparellats al mateix punt de la *Imatge_1*. En aquest cas s'aplica un procediment de manera que es força un aparellament un a un, i es queda amb l'aparellament amb un valor de MCC més alt.

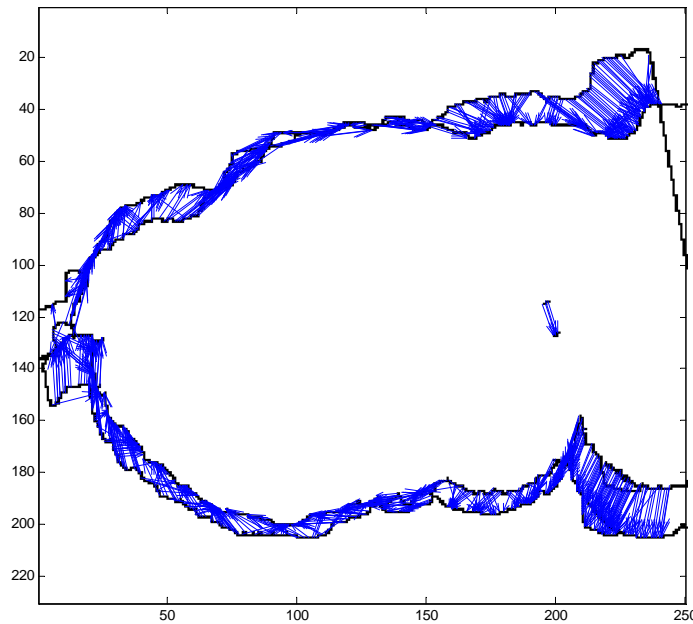


figura 3.8 Selecció i aparellament de GCPs per MCC d'àrea en els contorns.

3.6 Mètode de selecció i aparellament de GCP per MCC d'àrea amb anàlisi *wavelet* 2D

El mètode proposat a [19] i [97] es basa en aplicar la transformada *wavelet* UIDWT de 2.2 amb l'algorisme 'à trous' fins a ordre **sL** a les dues imatges de contorns. Per cada parell de transformades *wavelet* cal obtenir un conjunt de punts significatius (*Ground Control Points* - GCP) que es correspondran amb els punts més característics de les imatges. A continuació es determinen parelles de GCPs seguint un criteri de màxima correlació creuada (MCC) d'àrea, però ara a diferència del cas anterior es treballa amb

els resultats de l'anàlisi *wavelet* de les imatges. Finalment en els apartats posteriors es farà el càlcul dels coeficients de transformació per cada ordre i finalment es seleccionaran els que obtinguin millors resultats, minimitzant l'error en els punts de control.

3.6.1 Esquema

La descomposició mitjançant *wavelets* permet separar els objectes d'una imatge que pertanyen a diferents escales espacials. Tal com hem dit l'algorisme 'à trous' presentat a 2.2 projecta la imatge a subespais aniuats consecutius d'escala diàdiques successives (2, 4, 8 ...), mitjançant el filtrat passa-baixes recursiu de la imatge aproximada resultant a cada escala, des de més resolució cap a menys resolució. És equivalent a un anàlisi *wavelet* amb funcions base del tipus *B-splines* cúbiques [97].

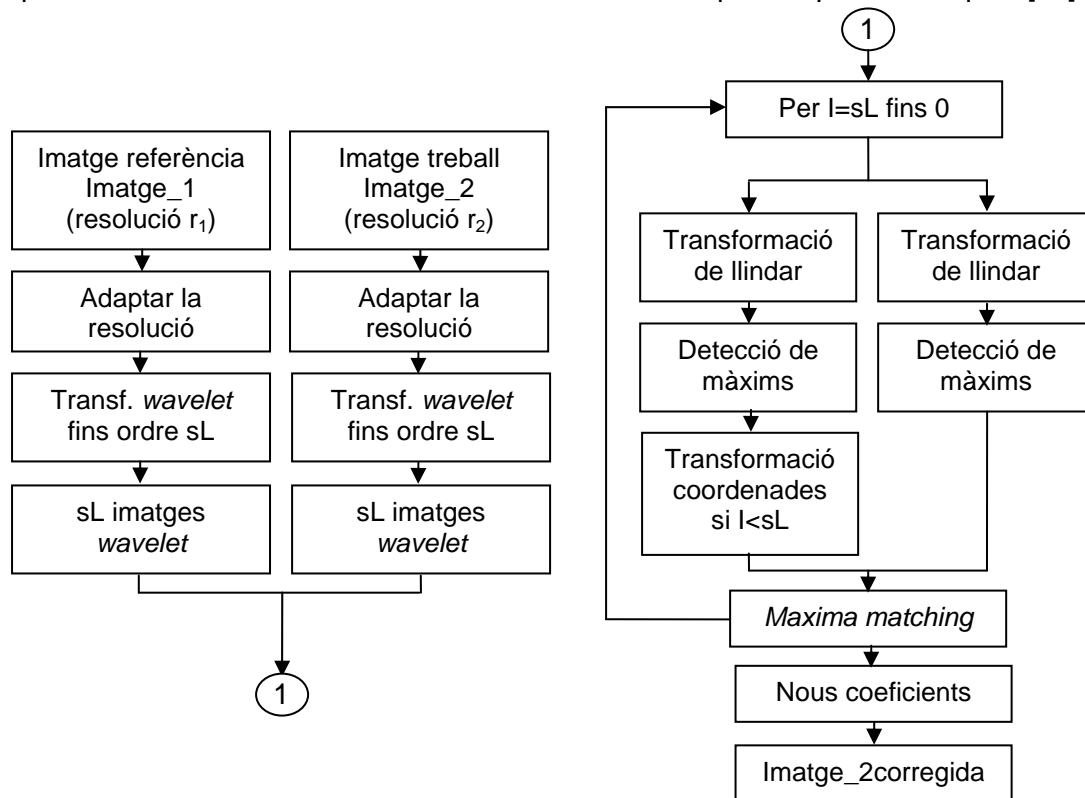


figura 3.9 Diagrama de flux complet del mètode d'enregistrament basat en la MCC de les transformades wavelet 2D.

- Respecte el mètode [19] i [97], descrit a la figura 3.9 s'han afegit algunes variants:
- 1.- Per seleccionar els candidats a GCP no fem servir el criteri de màxims. Sinó que es fa una cadena de selecció on d'entrada els candidats només seran els punts de la línia de costa.
 - 2.- Després s'introdueix un criteri regional per ser GCP, de manera que es busquen els representants corresponents a **snmaxr** regions (p.e. 4).
 - 3.- Es fa una darrera selecció basada en un criteri de punts estadísticament més singulars dins cada regió.

3.6.2 Selecció dels GCP per cada escala de sL fins a 0

Per cada escala es seleccionen els GCP del llistat de contorns de la línia de costa de la imatge de treball **Imatge_2**. Es fan servir les imatges transformades a l'escala corresponent (l'escala 0 són les imatges originals):

a.- Primer cal **parametritzar** cada possible GCP amb un valor que seria la mitjana del nivell de gris d'una finestra d'anàlisi al voltant del punt sobre la imatge transformada corresponent.

b.- La selecció dels GCP es fa seguint un primer criteri regional, es divideix la imatge en **smaxr** regions rectangulars (p.e. 4. Podem modificar aquest paràmetre en funció de la complexitat de les imatges). I s'obindran GCP a cada regió si és possible (si hi ha algun candidat).

c.- Per cada regió es selecciona un percentatge **sper** de punts que són singulars respecte el paràmetre triat (p.e. 10 de cada 100. Si es posa més gran augmenten el nombre de punts que es tractarà d'aparellar). Singulars vol dir que, si s'obté una aproximació a la funció densitat de probabilitat del paràmetre, apareixen mínims en el valor corresponent al d'aquells punts. Es trien aquests punts amb valors singulars com a punts de control, GCP.

El mètode de **selecció dels punts singulars** que es segueix dins cada regió és:

c.1.- Fer un histograma del paràmetre dels punts de la línia de la costa

c.2.- Prendre com a GCP un percentatge del punts de la regió (**sper**) començant pels que tenen un valor del paràmetre que és mínim a l'histograma.

d.- S'uneixen els de cada regió i s'obté finalment una actualització dels GCP de les dues imatges a l'escala que estem treballant.

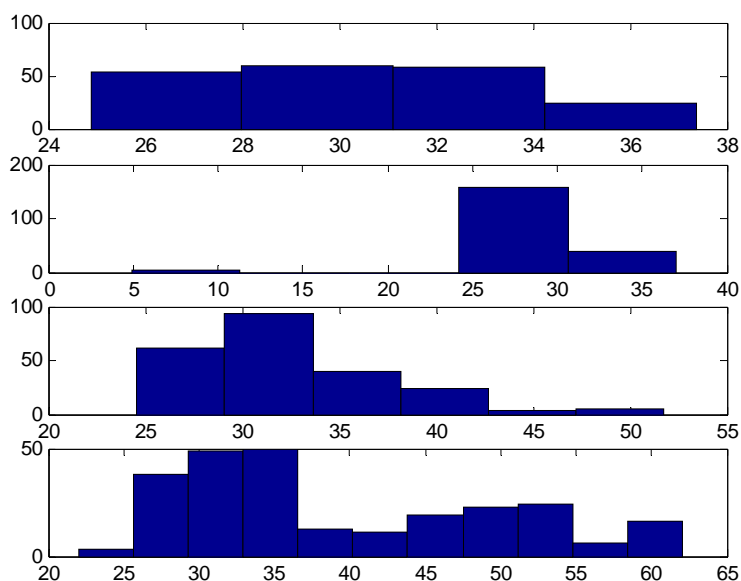


figura 3.10 Exemple dels histogrames del nivell de gris de cada una de les regions de la *Imatge_2* a escala 1. Els mínims identifiquen els punts singulars de cada regió.

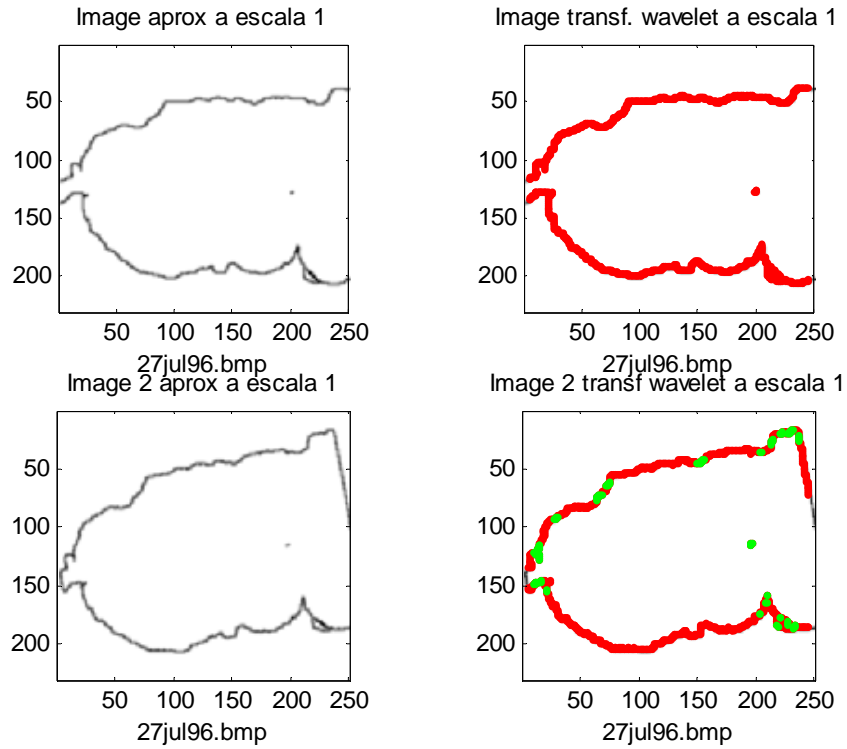


figura 3.11 *Imatge_2 i Imatge_1 a escala 1. Sobre la Imatge_2 els GCP seleccionats estan remarcats en verd. A la Imatge_1 tots els punts de la línia de costa són considerats GCP.*

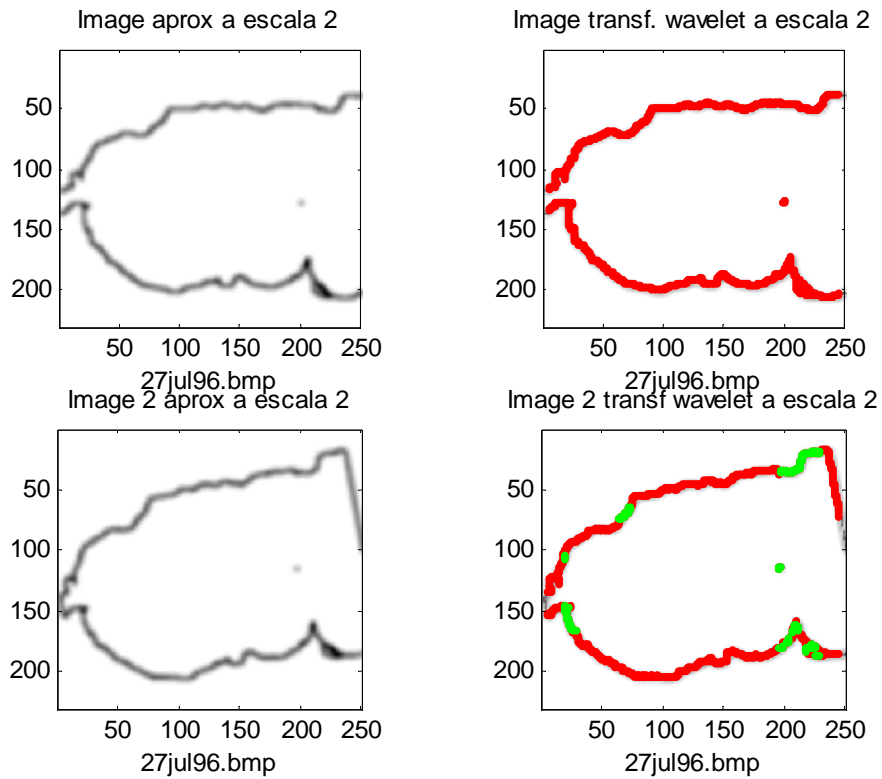


figura 3.12 *Imatge_2 i Imatge_1 a escala 2. Sobre la Imatge_2 els GCP seleccionats estan remarcats en verd. A la Imatge_1 tots els punts de la línia de la costa són considerats GCP*

3.6.3 Aparellament dels GCP amb MCC

A partir dels GCP que s'han seleccionat a cada escala, cal aparellar els de la **Imatge_2** amb els de la **Imatge_1** seguint un criteri de màxima correlació creuada (MCC). Després s'aplica una altre funció per quedar-nos amb un aparellament un a un. I finalment es mostren el resultats de l'aparellament per cada escala.

Per cada escala i per cada GCP (x_i, y_i) de la **Imatge_2** s'aplica el *maxima matching*:

a.- Es determina una finestra d'anàlisi centrada al GCP, de dimensions dependent de l'escala de treball $sdim=sdima*(sfact)^{si}$, on si és l'escala ($sdim = 9 \times 9, 18 \times 18, 36 \times 36 \dots$). La finestra és $xfai2_{x_i, y_i}$. Amb $sfact=2$ si les escales diàdiques. Per les imatges de treball, a partir de diverses proves s'ha pres a escala original $si=0, sdim=9$.

b.- Es busca dins una finestra de cerca de dimensions $sdimc$ (40×40) a la **Imatge_1** si hi ha punts de control GCP. Les dimensions de la finestra de cerca són superiors al valor màxim que prendrà $sdima$.

c.- Per cada candidat (X_k, Y_k) s'obté una finestra d'anàlisi $xfai1_{x_k, y_k}$ i es calcula el la correlació normalitzada de les dues finestres.

$$MCC(x_k, y_k) = \frac{\sum_{m=1}^{sdima} \sum_{n=1}^{sdima} xfai1_{x_k, y_k}(m, n) \cdot xfai2_{x_i, y_i}(m, n)}{\left[\sum_{m=1}^{sdima} \sum_{n=1}^{sdima} xfai1_{x_k, y_k}^2(m, n) \right]^{1/2} \cdot \left[\sum_{m=1}^{sdima} \sum_{n=1}^{sdima} xfai2_{x_i, y_i}^2(m, n) \right]^{1/2}} \quad (43)$$

d.- Ens quedarem com a molt amb un punt dels possibles candidats de la **Imatge_1**, serà el que tingui el valor màxim.

e.- Si hi ha més d'un punt que compleix el requisit anterior es descarta l'aparellament del punt corresponent de la **Imatge_2**

f.- Es passa al següent GCP de la **Imatge_2** a l'escala corresponent i es torna al començament. Quan s'acabin els GCP d'una escala es treballa sobre una altra.

Ens podem trobar que diferents punts de la **Imatge_2** tinguin màxima correlació amb un mateix punt de la **Imatge_1**, llavors s'ha aplicat una funció que elimina la major part dels casos de duplicitat en un mateix punt de **Imatge_1**, i ens quedem amb el que té el valor de la correlació creuada més alt.

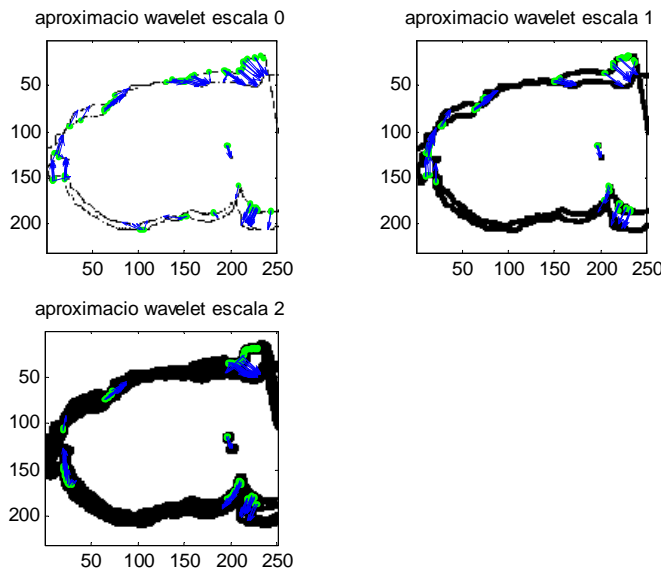


figura 3.13 Aparellament dels GCPs entre **Imatge_2** (punts verds) i **Imatge_1** per les escales 0, 1 i 2.

3.7 Mètode de selecció i aparellament de GCPs per MCC en 1D amb anàlisi *wavelet* i DTW (*Dynamic Time Warping*)

En aquest apartat és vol presentar un mètode inèdit d'enregistrament geomètric d'imatges a partir de l'anàlisi *wavelet* dels codis dels seus contorns principals. Primer es descriuen els codificadors de contorns utilitzats; a continuació es presenta l'anàlisi *wavelet* realitzat sobre els descriptors dels contorns; i finalment es presenta un mètode per a fer la selecció i l'aparellament automàtic d'un conjunt de GCPs a partir de tècniques de programació dinàmica DTW (*Dynamic Time Warping*). Els GCP seran els punts representatius de les imatges que es volen enregistrar.

3.7.1 Descriptors de contorns

Per codificar els contorns presents en una imatge hi ha principalment dos tipus de tècniques [42]: unes més orientades a la compressió d'informació; i les altres més a la descripció dels contorns. Tenim més interès per les segones, ja que volem utilitzar els codificadors de contorns com a eines per a l'enregistrament d'imatges oceanogràfiques de satèl·lit [17], [27], [28] i [50]. Primer els contorns es codifiquen amb un codi de cadena modificat [17] i [50]. A continuació es defineix una estructura que permet descriure una imatge a partir dels contorns codificats.

a) Codificació dels contorns amb un codi de cadena modificat (CFM)

Es fa servir un codi de cadena clàssic amb 8 veïns (0:7), a partir d'un punt inicial es codifica en la direcció del veí que continua el contorn (0 si Est; 1 si NE; 2 si N; 3 si NW; 4 si W; 5 si SW; 6 si S; 7 si SE) i així successivament fins arribar al final o a trobar-se amb un punt ja codificat. La solució adoptada si es troba una bifurcació ha estat prioritzar a partir de la direcció anterior en sentit horari, i marcar l'inici d'uns nous contorns. Amb aquestes condicions els contorns amb doble píxel poden donar codificacions amb artefactes o trossejament dels contorns.

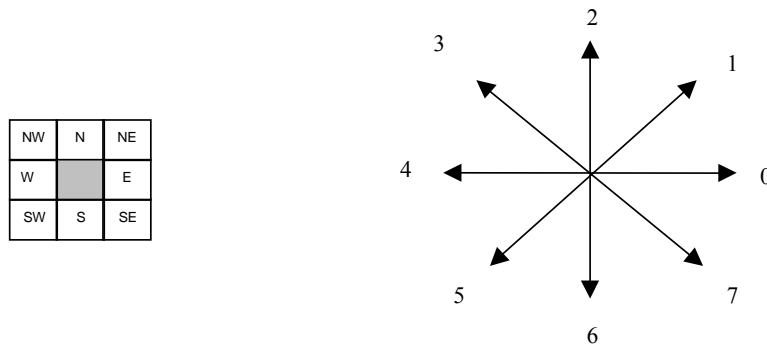


figura 3.14 Plantilla bàsica del codificador de cadena / Valors assignats.

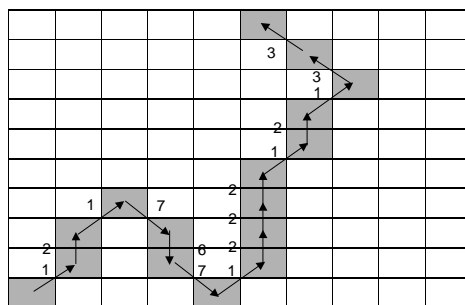


figura 3.15 Seqüència del contorn: {1,2,1,7,6,7,1,2,2,2,1,2,1,3,3}.

La codificació que es proposa fer servir és un codi de cadena modificat [17] i [50], la modificació permet resoldre el problema del salt de valor entre els codis (0 i 7) quan un contorn està orientat entre 0° i -45° , i a més proporciona una bona invariança a rotacions i desplaçaments.

Per il·lustrar-ho es pren el contorn associat a la costa africana de la figura 3.4 i es representa aquest contorn i el mateix contorn canviat - rotat 55° i desplaçat 2 píxels horitzontalment i 30 verticalment (figura 3.16) -.

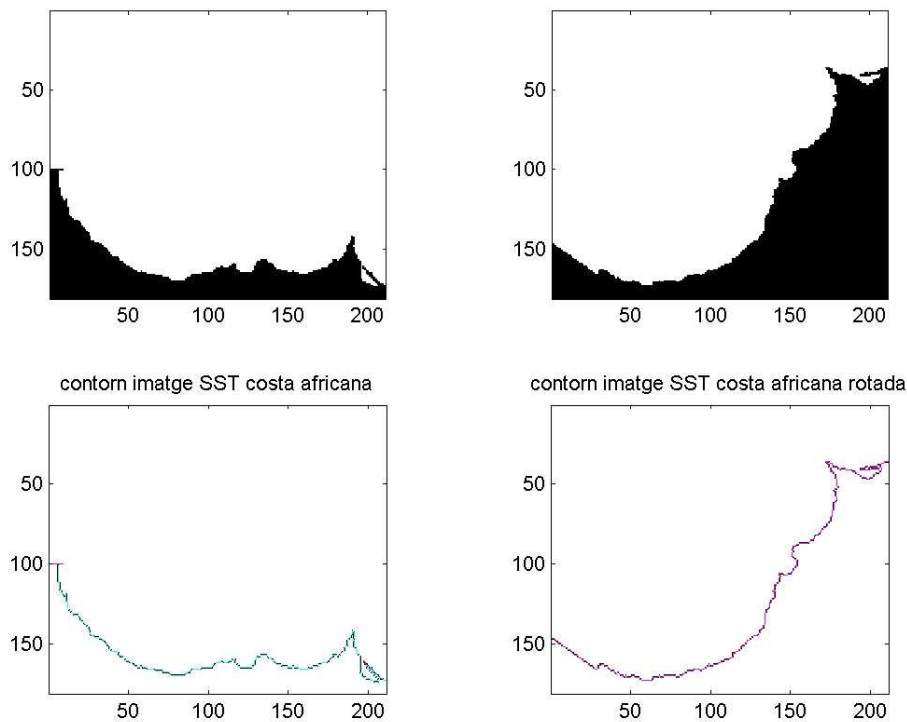


figura 3.16 Contorn de la costa africana i costa africana rotada i desplaçada.

La codificació amb un codi de cadena modificat es fa a partir d'un contorn codificat amb un codi de cadena. Si el contorn es descriu com una seqüència de valors (tants com píxels té el contorn) $\{a_1 a_2 a_3 \dots a_n\}$ amb $a_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. El nou codi descriptor $\{b_1 b_2 b_3 \dots b_n\}$ s'obté de manera recursiva:

1. $b_0 = 8$
2. $b_i = q_i$ q_i és un valor enter tal que minimitza $|q_i - b_{i-1}|$ i $(q_i - a_i) \bmod 8 = 0$
3. El rang dinàmic del nou codi depèn de la seqüència de valors $\{a_i\}$

Amb la rotació i el desplaçament el contorn pot canviar el nombre de píxels i la seva forma. Tot i que amb la codificació amb el codi de cadena modificat es mantenen uns trets bàsics característics del contorn independents de la seva posició i orientació.

Els dos contorns de l'exemple (figura 3.16), els podem veure codificats amb un codi de cadena (figura 3.17) - Codi de Freeman CF - on tenen poca semblança, en canvi si es codifiquen amb un codi de cadena modificat (figura 3.18) - Codi de Freeman Modificat CFM - tenen més punts en comú.

Per poder obtenir un descriptor més robust al soroll i poder apreciar millor la semblança entre els descriptors es pot suavitzar la seqüència $\{b_1 b_2 b_3 \dots b_n\}$ amb un filtre 1D de mitja amb 5 veïns $h(n)=1/5[1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1]$, el resultat és a la figura 3.19. On la semblança entre les dues seqüències és molt més gran.

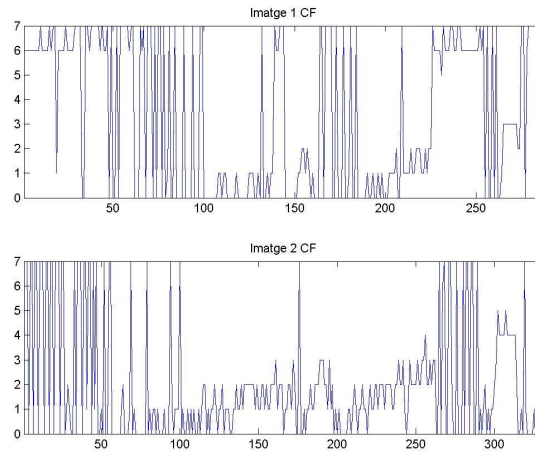


figura 3.17 Contorns codificats amb codi de cadena (CF).

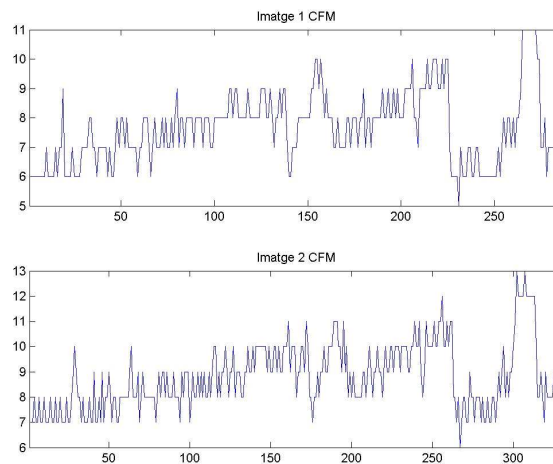


figura 3.18 Contorns codificats amb codi de cadena modificat (CFM).

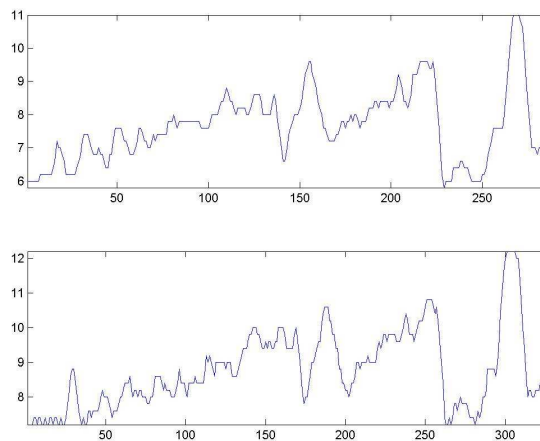


figura 3.19 Seqüències CFM suavitzades.

Com es pot veure hi ha un grau molt alt de correlació entre les dues representacions, es pot fer un seguiment en paral·lel de les principals variacions de les dues corbes. Per tant el descriptor sembla ser un bon paràmetre per poder mesurar la semblança entre els contorns, amb l'avantatge que descriu un contorn d'una imatge bidimensional (2D) amb un descriptor 1D (una seqüència de valors discrets).

b) Descriptor d'una imatge a partir dels contorns codificats amb CFM

Finalment cal definir una estructura per representar una imatge a partir dels descriptors dels contorns. Es fa servir una matriu 3D (NxPxM: N files, P columnes i M plans) on a cada pla hi ha les dades associades a un contorn:

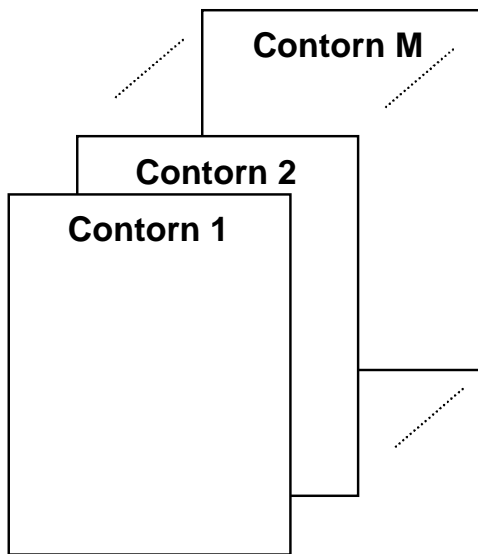


figura 3.20 *Descriptor d'imatges. Cada contorn és un pla de la matriu 3D, i per cada pla es té un descriptor dels contorns, amb tots els punts del contorn, els codis CF i CFM, i enllaços a altres contorns.*

Una matriu NxP encapsa les dades associades a un contorn. Cada fila correspon a un píxel del contorn i les P columnes són els diferents paràmetres associats als píxels:

Contorn i						
fila	columna	CF	CFM	Node 1	Node 2	Node 3

- . Les dues primeres columnes són la posició a la imatge (**fila,columna**)
- . **CF** és el codi de cadena que li correspon al píxel
- . **CFM** és el codi de cadena modificat
- . **Node 1** té valor diferent de zero si en el píxel actual el contorn té una bifurcació. Es posa l'índex del contorn amb el que s'enllaçarà
- . **Node 2** té valor diferent de zero si la bifurcació té un altre camí
- . **Node i** pot haver-hi fins a 4 continuacions diferents

El final d'un contorn es pot produir quan es tanca sobre un punt d'un contorn ja codificat (llavors al CF es posa -1). O bé si s'extingeix el contorn (llavors es posa un -2 al CF).

Es podria fer un postprocessament per obtenir els contorns més llargs quan es passa per una bifurcació. Caldria utilitzar la informació dels nodes amb els que està connectat el píxel i triar com a camí principal el que en una primera iteració fos més

llarg. La implementació actual no ho contempla, per tal de no penalitzar el temps d'execució excessivament. Cal remarcar que el procediment de codificació dels contorns és el més costós en temps de tots els procediments utilitzats per aquest mètode d'enregistrament geomètric, tal com s'analitzarà més endavant.

3.7.2 Exemple de treball

Si volem enregistrar les imatges del cas 2 de la figura 3.3, que correspon també als contorns de la figura 3.5. Podem representar les imatges de contorns del 2c a la figura 3.21, amb cada segment de contorn representat amb un color diferent. Tal com hem explicat el fet que hi hagi diferents segments és degut al mètode de codificació que no aplica refinaments posteriors per no allargar el temps de codificació, i veurem que els resultats són satisfactoris.

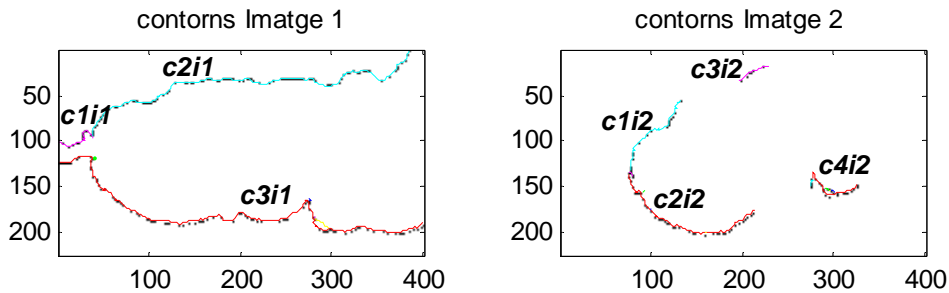


figura 3.21 Contorns de les imatges per trams. A l'esquerra la Imatge 1 de referència, amb els seus trams de contorns: **c1i1**, **c2i1** i **c3i1**. A la dreta la Imatge 2 de treball, amb els seus trams de contorns: **c1i2**, **c2i2**, **c3i2** i **c4i2**.

Per la Imatge 1 i la Imatge 2 de la figura 3.21, tenim els següents segments codificats amb els codis de cadena modificats segons la descripció de l'apartat 3.7.1 a) (Codis de Freeman modificats), només hem seleccionat els trams de més de 2 punts. A les gràfiques es representen gràficament les seqüències associades a cada un dels segments dels contorns.

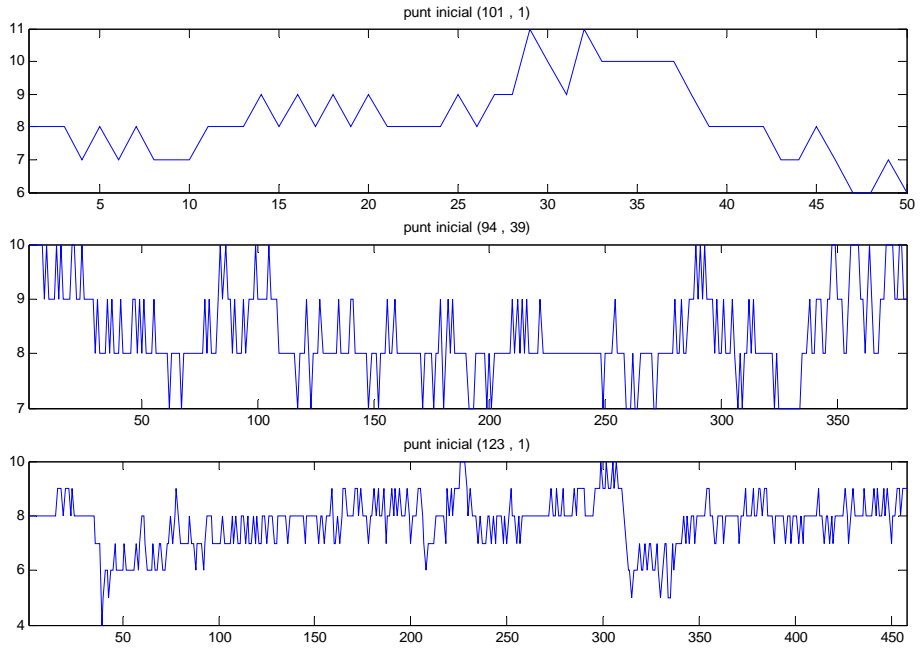


figura 3.22 Codis de cadena dels trams dels contorns de la Imatge 1 de referència, a cada un s'indica la posició del píxel inicial. (c1i1,c2i1,c3i1).

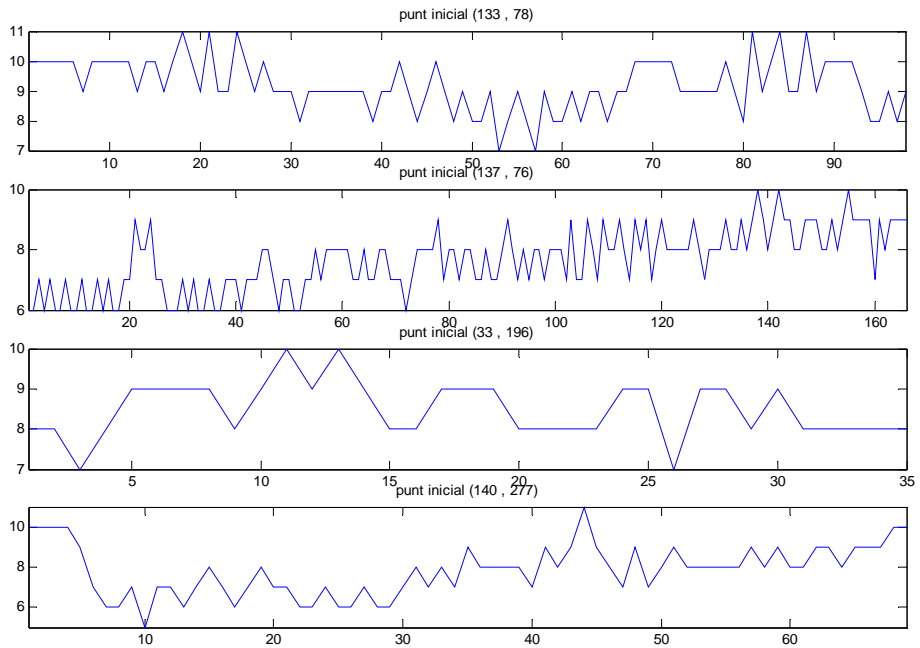


figura 3.23 Codis de cadena dels trams dels contorns de la Imatge 2 de treball, a cada un s'indica la posició del píxel inicial. (c1i2,c2i2,c3i2,c4i2).

3.7.3 Anàlisi wavelet de cada segment dels contorns

Per cada segment dels contorns es fa un anàlisi *wavelet*, segons el procediment descrit a 2.3.1. Per cada segment tenim una figura on es representa el segment del contorn codificat inicial i després en la mateixa columna de l'esquerre les aproximacions successives a diferents nivells de l'anàlisi *wavelet*. I a la dreta les corresponents senyals de detall a cada nivell.

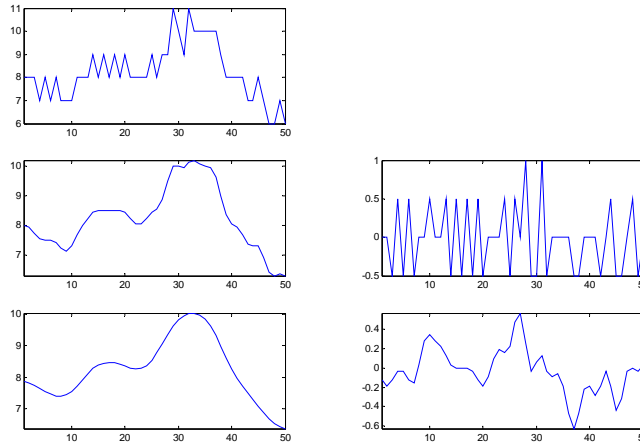


figura 3.24 Anàlisi wavelet del codi de contorn 1 de la Imatge 1, (c1i1). A dalt a l'esquerre la seqüència original, anar descendint es troba la descomposició wavelet de la component aproximada d'ordres successius, a l'esquerre la component aproximada i a la dreta la corresponent component de detall.

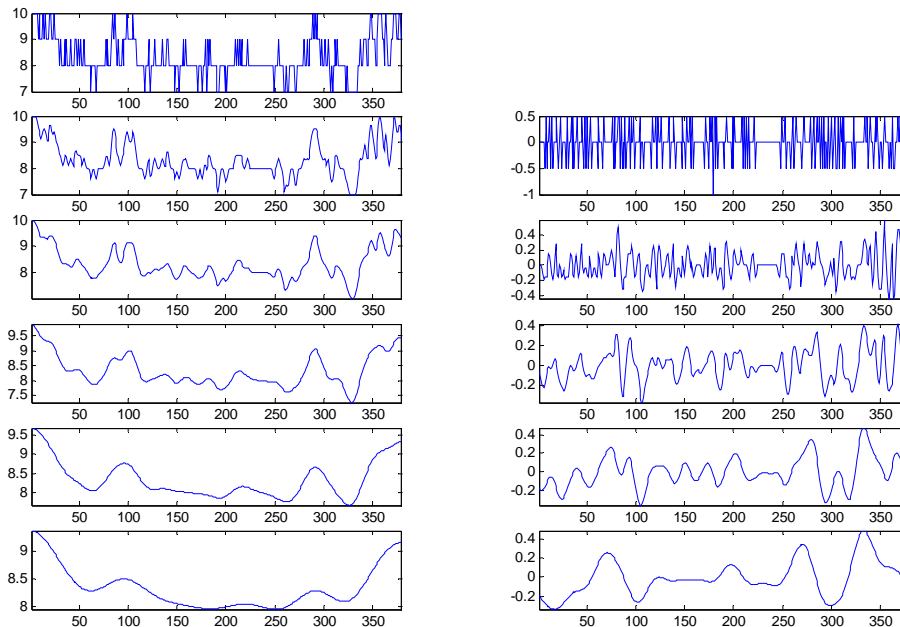


figura 3.25 Anàlisi wavelet del codi de contorn 2 de la Imatge 1, (c2i1). A dalt a l'esquerre la seqüència original, anar descendint es troba la descomposició wavelet de la component aproximada d'ordres successius, a l'esquerre la component aproximada i a la dreta la corresponent component de detall.

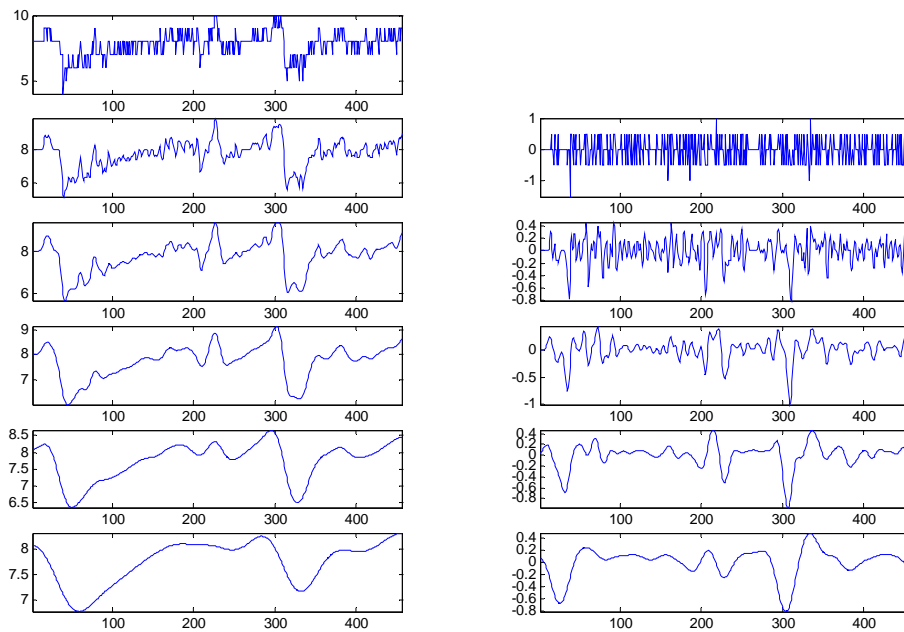


figura 3.26 Anàlisi wavelet del codi de contorn 3 de la Imatge 1, (c3i1). A dalt a l'esquerre la seqüència original, anar descendint es troba la descomposició wavelet de la component aproximada d'ordres successius, a l'esquerre la component aproximada i a la dreta la corresponent component de detall.

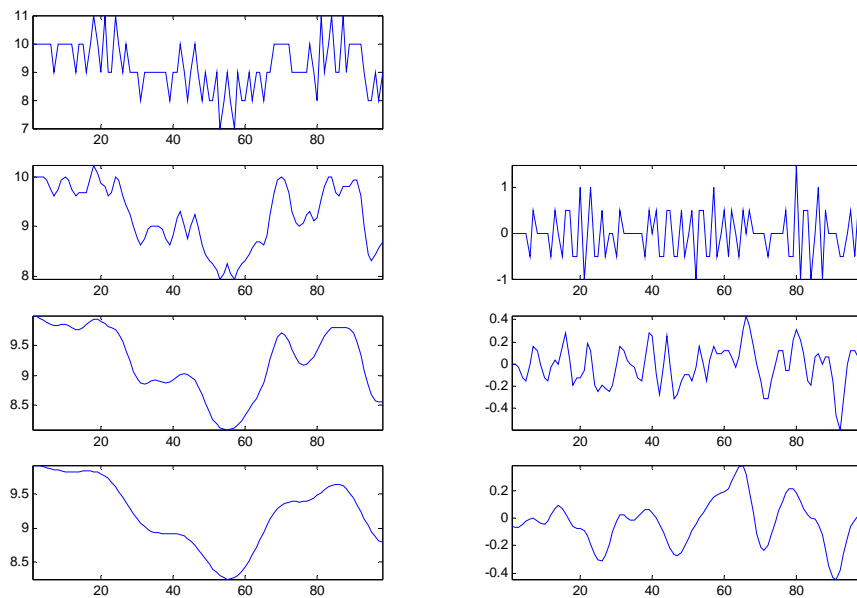


figura 3.27 Anàlisi wavelet del codi de contorn 1 de la Imatge 2, (c1i2). A dalt a l'esquerre la seqüència original, anar descendint es troba la descomposició wavelet de la component aproximada d'ordres successius, a l'esquerre la component aproximada i a la dreta la corresponent component de detall.

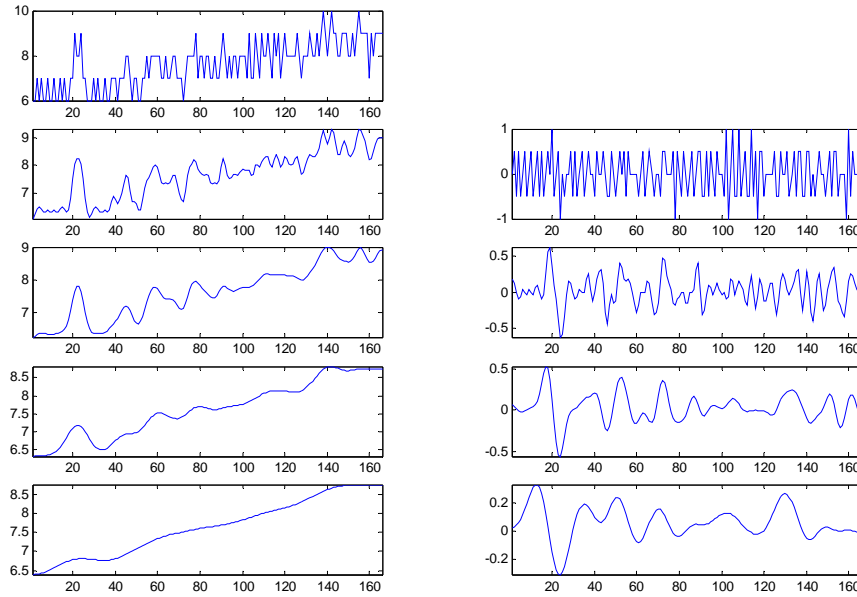


figura 3.28 Anàlisi wavelet del codi de contorn 2 de la *Imatge2*, (**c2i2**). A dalt a l'esquerre la seqüència original, anar descendint es troba la descomposició wavelet de la component aproximada d'ordres successius, a l'esquerre la component aproximada i a la dreta la corresponent component de detall.

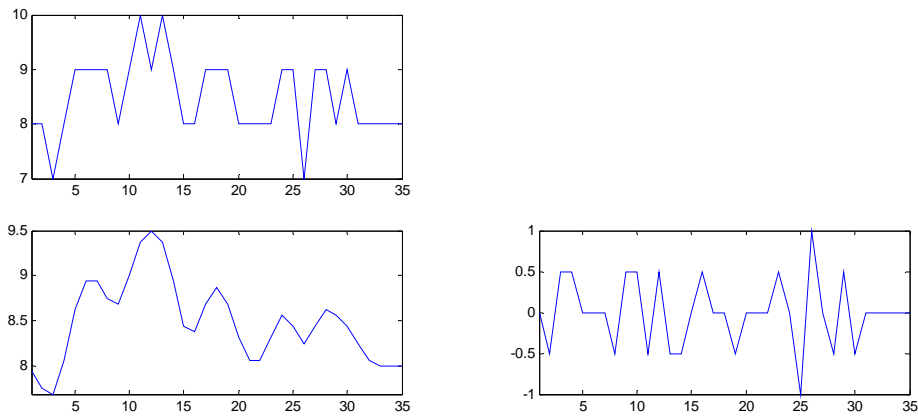


figura 3.29 Anàlisi wavelet del codi de contorn 3 de la *Imatge2*, (**c3i2**). A dalt a l'esquerre la seqüència original, anar descendint es troba la descomposició wavelet de la component aproximada d'ordres successius, a l'esquerre la component aproximada i a la dreta la corresponent component de detall.

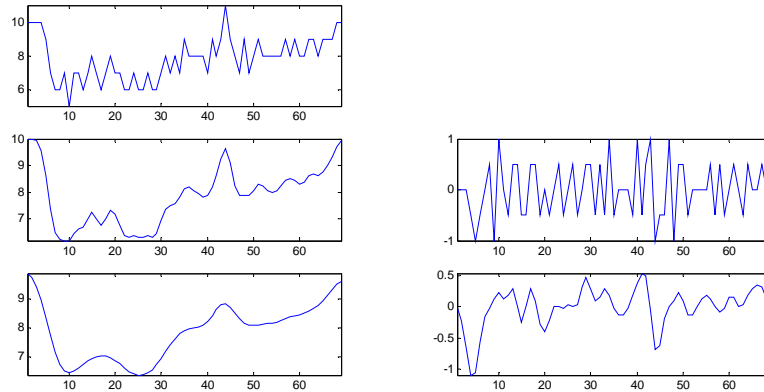


figura 3.30 Anàlisi wavelet del codi de contorn 4 de la Imatge2, (**c4i2**). A dalt a l'esquerre la seqüència original, anar descendint es troba la descomposició wavelet de la component aproximada d'ordres successius, a l'esquerre la component aproximada i a la dreta la corresponent component de detall.

3.7.4 Càlcul de les correlacions creuades dels segments

Per cada segment de la imatge 2 es fa la correlació creuada amb tots els segments de l'altre imatge. Es fa servir l'aproximació *wavelet* d'ordre màxim compartit pels dos segments per a fer el càlcul de la màxima correlació creuada normalitzada (44).

$$r(d) = \frac{\sum_i [(x(i) - mx) \cdot (y(i - d) - my)]}{\sqrt{\sum_i (x(i) - mx)^2} \cdot \sqrt{\sum_i (y(i - d) - my)^2}} \tag{44}$$

De cada funció obtinguda en retindrem el màxim i la posició on es produeix. Com a exemple per a un cas, a la figura 3.31, la figura 3.32 i la figura 3.33 es representen les tres funcions de correlació creuada normalitzada del **c4i2** amb els contorns **c1i1**, **c2i1**, **c3i1** respectivament, i a cada funció està remarcat el màxim i es representen les funcions aproximades que s'han utilitzat per fer el càlcul.

Els resultats obtinguts amb els contorns de les imatges de l'exemple, la matriu de correlacions màximes, la podem representar amb la següent taula,

Taula 3-1: Matriu de correlacions creuades màximes entre els diferents segments de contorns

	c1i1	c2i1	c3i1
c1i2	0.7708	0.8703	0.8337
c2i2	0.5298	0.6840	0.9583
c3i2	0.4542	0.7815	0.7589
c4i2	0.4709	0.7117	0.9594

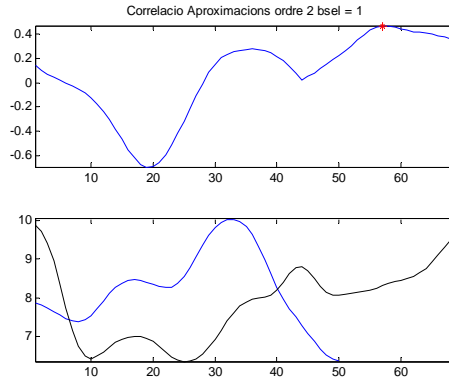


figura 3.31 *Correlació creuada **c4i2** amb **c1i1**. A dalt representació de la correlació, el màxim marcat amb un asterisc vermell, a baix seqüència de les components aproximades utilitzades.*

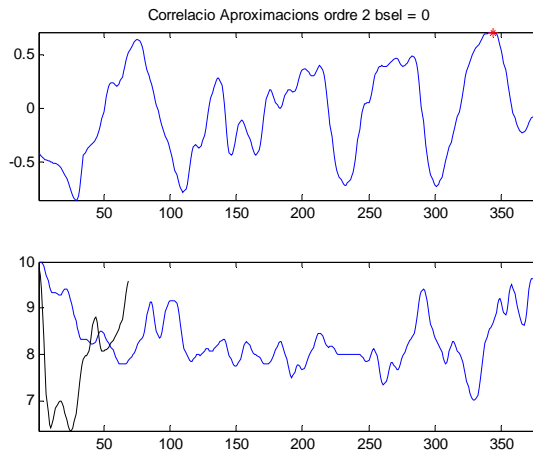


figura 3.32 *Correlació creuada de **c4i2** amb **c2i1**. A dalt representació de la correlació, el màxim marcat amb un asterisc vermell, a baix seqüència de les components aproximades utilitzades.*

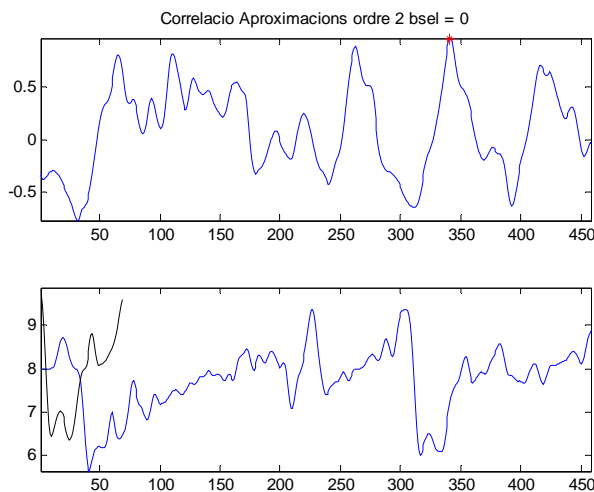


figura 3.33 *Correlació creuada de **c4i2** amb **c3i1**. A dalt representació de la correlació, el màxim marcat amb un asterisc vermell, a baix seqüència de les components aproximades utilitzades.*

En aquest cas que hem agafat d'exemple, la funció de correlació creuada que té el valor màxim de les tres és la tercera (figura 3.33) i es correspon efectivament als mateixos GCP dins les imatges. En aquest punt es guarden els màxims de cada parella de segments i els punts dels centres corresponents.

3.7.5 Aparellament dels segments

Un cop fet el càlcul de les màximes correlacions creuades de tots els segments amb tots els segments, cal aplicar un procediment per fer una primera tria dels aparellaments més versemblants entre segments. Nosaltres proposem el següents passos:

- 1.- Primer s'aparella cada segment de la imatge 2 amb el segment de la imatge 1 que tingui el valor màxim més gran a la correlació creuada, respecte als màxims de les correlacions amb els altres segments de la imatge 1. Els aparellaments múltiples es verifiquen si són possibles, i es resolen tenint en compte el de màxima correlació.
- 2.- En segon lloc es verifiquen consistències entre els aparellaments realitzats. Si es fa una representació gràfica de l'esquema dels segments que es volen aparellar, p.e. a la figura 3.34, en una imatge es mostren els segments de la imatge 1 representats pels seus centres, i els segments de la imatge 2 representats pels seus centres. A partir de trams de recta que uneixen els centres entre els segments aparellats, es verifica que no hi hagi cap intersecció entre trams, si existeix algun creuament preval l'aparellament més versemblant seguint un criteri de mínim error quadràtic.

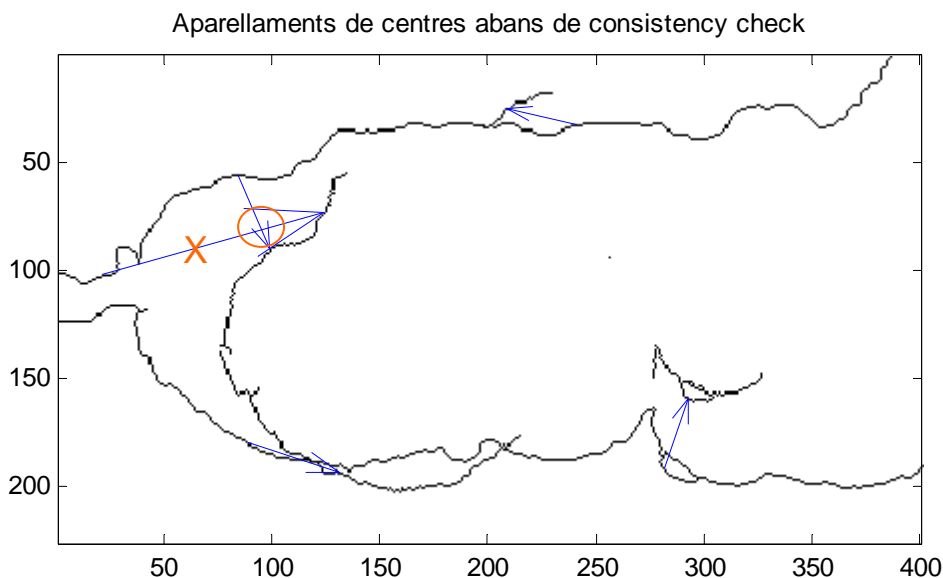


figura 3.34 Prova de consistència dels centres dels trams aparellats inicialment. Amb un cercle s'han marcat els trams inconsistents i amb una creu l'aparellament entre trams que s'ha eliminat.

3.7.6 Aparellament elàstic de GCPs amb DTW (*Dynamic Time Warping*).

A cada parella de segments que han quedat relacionats, es fa un aparellament local dels punts dels segments a partir de tècniques de *Dynamic Time Warping*, tenint en compte que això permet un cert alineament elàstic entre els punts dels dos segments. Aquestes tècniques d'alineament s'utilitzen tradicionalment en els sistemes de reconeixement de veu des de la seva introducció [84] amb múltiples variants [74], i també són àmpliament utilitzades en altres camps on calgui alinear sèries de dades [6] o [8]. Per a la implementació s'ha fet una versió a partir dels algorismes bàsics desenvolupats a [23]. Les seqüències utilitzades per a aquest apartat són la transformada *wavelet* d'ordre n , l'aproximació de la qual s'ha fet servir per a calcular la màxima correlació creuada.

Es disposa de dos vectors de valors reals, de longitud finita, que volem alinear:

$$\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \mathbb{R}^n \quad \mathbf{r} = [r_1, r_2 \dots r_n]$$

amb r_i el component i -èssim del vector,

$$i \in \{1:n\}.$$

Es defineix la matriu de cost \mathbf{D} de dimensions $n \times n$, amb les diferències entre les mostres de \mathbf{r} i \mathbf{s} ,

$$\mathbf{D}(i, j) = |r_i - s_j|,$$

també es pot treballar amb altres distàncies com a matriu de cost.

Definim com a possible camí alineament (*warping path*) $\mathbf{W} = [w_1, w_2, w_3, \dots, w_K]$ una seqüència de K cel·les de la matriu \mathbf{D} amb $w_k = [i_k, j_k]$ que compleixen unes condicions:

Condicions de contorn: $w_1 = [1, 1]$ i $w_K = [n, n]$. La primera i la darrera cel·la de la cada alineament \mathbf{W} estan fixats. Gràficament diríem que l'inici i el fi dels vectors coincideixen. (Posteriorment es veurà que aquesta condició es pot relaxar).

Continuïtat: donades $w_{k-1} = [i_{k-1}, j_{k-1}]$ i $w_k = [i_k, j_k]$, llavors $i_k - i_{k-1} \leq 1$ i $j_k - j_{k-1} \leq 1$. Això assegura que les cel·les del camí d'alineament \mathbf{W} són adjacents.

Monòtona: donades $w_{k-1} = [i_{k-1}, j_{k-1}]$ i $w_k = [i_k, j_k]$, llavors $i_k - i_{k-1} \geq 0$ i $j_k - j_{k-1} \geq 0$, on almenys una de les dues és una desigualtat estricta. Això força que el camí \mathbf{W} progressi al llarg de la sèrie.

Qualsevol camí d'alineament \mathbf{W} (*warping path*), defineix un alineament concret entre els vectors \mathbf{r} i \mathbf{s} . I per tant es pot definir com a funció de cost associada al camí, la suma de les distàncies acumulades en el camí escollit $\mathbf{DA}(\mathbf{W}) = \sum_{[i_k, j_k] \in \mathbf{W}} \mathbf{D}(i_k, j_k)$. Es

defineix com a camí d'alineament òptim el que minimitza aquesta distància acumulada. Per fer el càlcul d'aquest camí òptim es pot fer a partir d'una aproximació $O(L^2)$ basada en la programació dinàmica, on es calcula en primer lloc una matriu de distàncies acumulades \mathbf{DAR} de manera recursiva:

$$\mathbf{DAR}(i, j) = \mathbf{D}(i, j) + \min\{\mathbf{DAR}(i-1, j-1), \mathbf{DAR}(i, j-1), \mathbf{DAR}(i-1, j)\} \quad 1 \leq i, j \leq L \quad (45)$$

$$\mathbf{DA}(W_{opt}) = \mathbf{DAR}(n, n) \quad (46)$$

Un cop obtingut aquest valor extrem es dibuixa el camí d'alineament de mínima distància acumulada, creant \mathbf{W} anant enrere des de l'extrem $w_K = [n, n]$ fins a l'origen $w_1 = [1, 1]$, recorrent els valors mínims en caselles adjacents de la matriu \mathbf{DAR} .

A les aplicacions pràctiques els possibles camins d'alineament òptims es calculen a partir d'algunes restriccions prèvies. En primer lloc relaxant les condicions de contorn.

En el nostre cas hem permès que l'inici i la fi no coincidís amb els vèrtex de la matriu. En altres casos, quan es fa la matriu de distàncies acumulades es poden tenir en compte no només els tres veïns sinó altres de propers i a més es podrien ponderar, a [74] es pot trobar un conjunt de variants molt complert. També ens podem trobar que es limiti la desviació dels possibles camins respecte a la diagonal. O també que es normalitzin els vectors a mitja zero abans d'aplicar l'algorisme.

Si es disposa d'un parell de vectors $r=[1, 2, 2, 1, 0, 1, 1, 2]$ i $s=[3, 4, 5, 3, 3, 2, 3, 4]$ es poden calcular les matrius D i la matriu DAR , representades a la figura 3.35.

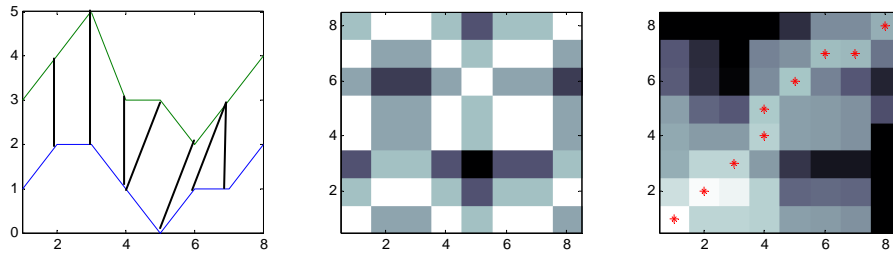


figura 3.35 Càlcul de DTW a partir de vectors r i s normalitzats: amb resultats de D i DAR amb el camí òptim W_{opt} marcat.

Si apliquem el mateix algorisme als contorn aparellats a la secció anterior. Podem obtenir els següents resultats de la figura 3.36.

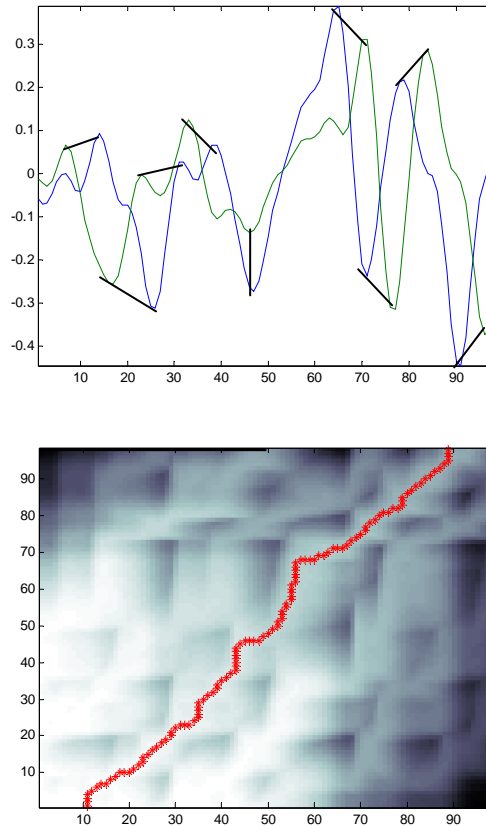


figura 3.36 Càlcul de DTW a partir de les transformades wavelets dels contorns $c2i1$, $c1i2$: amb resultats de DAR amb el camí òptim W_{opt} marcat.

Si s'aplica el mateix algorisme a totes les parelles de segments, tenim els següents resultats:

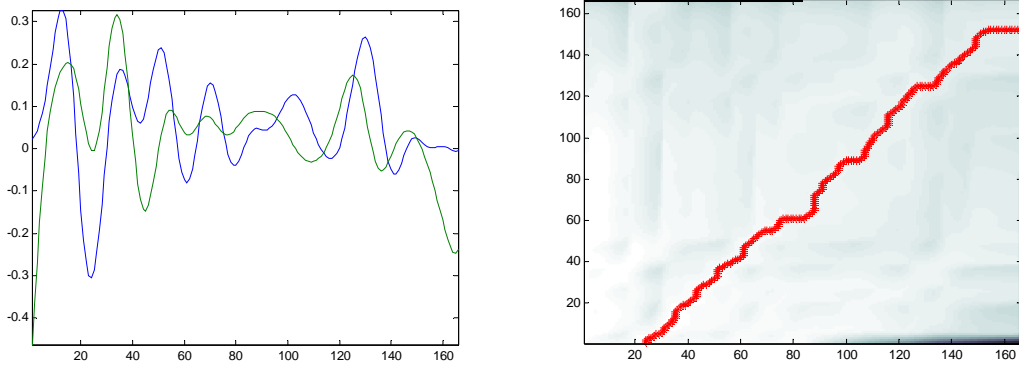


figura 3.37 Càlcul de DTW a partir de les transformades wavelets dels contorns **c3i1, c2i2**: amb resultats de **DAR** amb el camí òptim W_{opt} marcat.

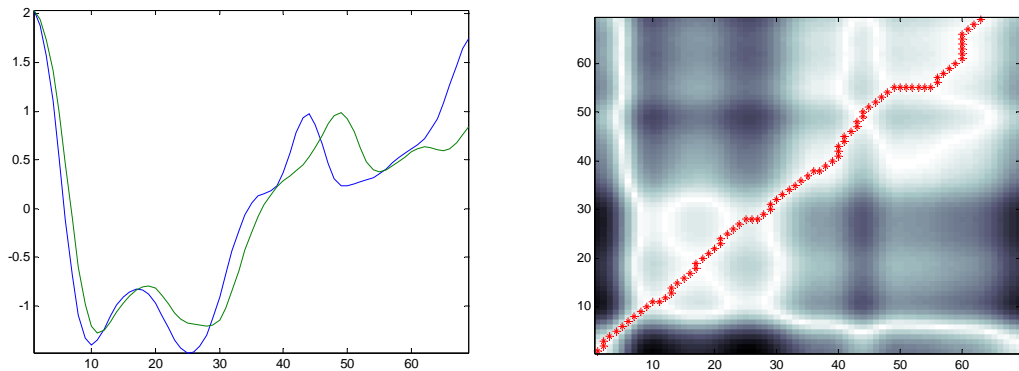


figura 3.38 Càlcul de DTW a partir de les transformades wavelets dels contorns **c3i1, c4i2**: amb resultats de **DAR** amb el camí òptim W_{opt} marcat.

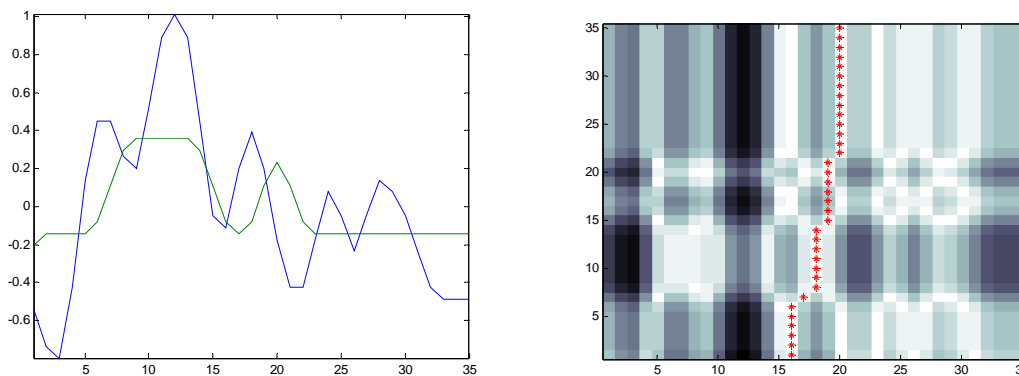


figura 3.39 Càlcul de DTW a partir de les transformades wavelets dels contorns **c2i1, c3i2**: amb resultats de **DAR** amb el camí òptim W_{opt} marcat.

Si ens quedem només els punts dels passos per zero de la transformada *wavelet*, aconseguim un aparellament de suficients **GCP** significatius, mostrats a la figura 3.40.

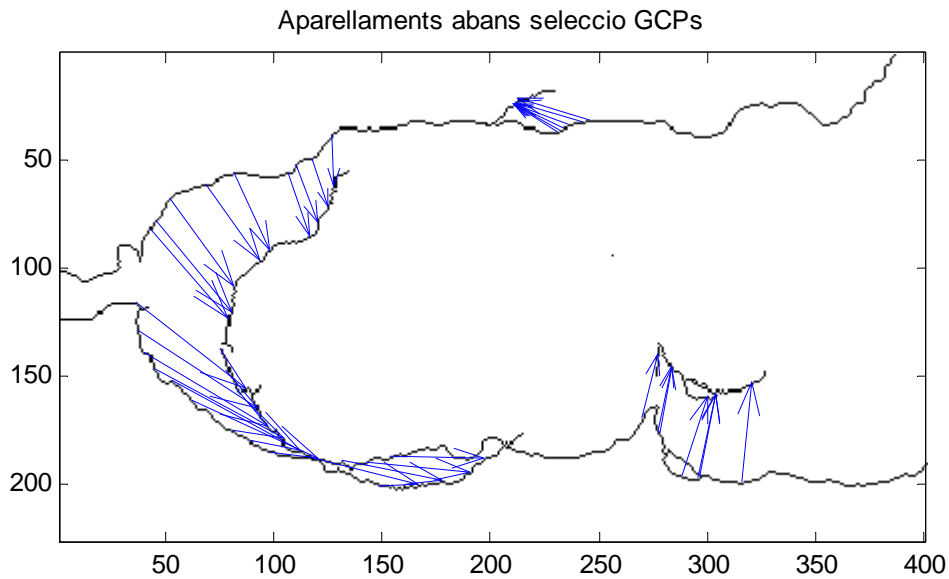


figura 3.40 Aparellament de GCP de les imatges de contorns *i1*, *i2*.

Si es compara el resultat obtingut amb aquest mètode, respecte el resultat obtingut amb el mètode anterior o el de referència a la figura 3.13, es veu la capacitat d'alinejar punts elàsticament i de trobar alineaments consistents encara que siguin dades multimodals (de diferent naturalesa), encara que hi hagi distorsions importants en les projeccions, o encara que hi hagi buits en els trams de segments deguts a núvols amagant trams sencers de la línia de costa; cosa impossible d'aconseguir amb el mètode anterior o el de referència, que no aconseguen alinear les imatges en aquests casos.

En les etapes posteriors s'obtenen els coeficients de la transformació més versemblant a partir de les parelles de GCPs, i finalment es fa l'enregistrament de les imatges. Aquestes etapes són comuns a tots els mètodes presentats. I per tant es fa una presentació comú i posteriorment es posen resultats per a cada un dels mètodes.

3.8 Etapes comuns a partir de les parelles de GCPs

3.8.1 Obtenció de coeficients de la transformació

a) Càlcul dels coeficients a partir de les N parelles de GCPs inicials

Les N parelles de GCPs, que surten inicialment de les etapes automàtiques d'obtenció i aparellament de GCP en qualsevol dels mètodes presentats als apartats anteriors (3.5, 3.6, 3.7 o qualsevol altre mètode), ens permeten que a continuació es pugui fer el càlcul dels coeficients de la transformació geomètrica que millor relaciona les dues imatges [70]. A la figura 3.41 representem una parella GCPs, un GCP pertany a la imatge de treball (Imatge 2), i l'altre GCP a la de referència (Imatge 1):

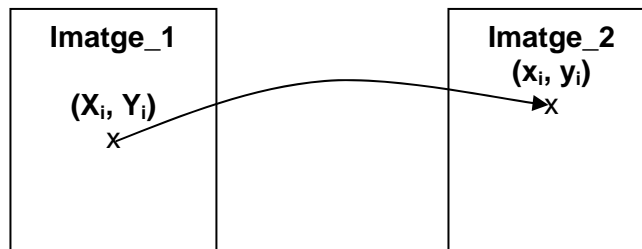


figura 3.41 Representació d'un parell de GCPs relacionats

La transformació directe amb la equació :
$$\begin{aligned} x_i &= a_0 + a_1 \cdot X_i + a_2 \cdot Y_i \\ y_i &= b_0 + b_1 \cdot X_i + b_2 \cdot Y_i \end{aligned} \quad (47)$$

permet resoldre totes les transformacions geomètriques afins (rotacions, desplaçaments i canvis d'escala), que ens relacionen un punt de la imatge de referència amb el corresponent punt a la imatge de treball.

A partir de les N parelles de GCPs es defineix un sistema d'equacions (48),

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_p & Y_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & X_1 & Y_1 \\ 1 & X_2 & Y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & X_p & Y_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix}, & (48) \\ \mathbf{XY} \cdot \mathbf{a} &= \mathbf{x} & \mathbf{XY} \cdot \mathbf{b} &= \mathbf{y} \end{aligned}$$

que cal resoldre per poder obtenir els coeficients de la transformació geomètrica. Es pot fer amb les equacions (49),

$$\mathbf{a} = (\mathbf{XY}^T \cdot \mathbf{XY})^{-1} \cdot (\mathbf{XY}^T \cdot \mathbf{x}) \quad \mathbf{b} = (\mathbf{XY}^T \cdot \mathbf{XY})^{-1} \cdot (\mathbf{XY}^T \cdot \mathbf{y}), \quad (49)$$

així els coeficients obtinguts seran la millor aproximació possible, minimitzant l'error quadràtic mig en el conjunt de parelles de punts disponibles.

b) Càlcul del l'error RMSE als GCPs

Un cop obtinguts els coeficients globals que descriuen millor la transformació es calcula l'error RMSE (51) en els GCPs com a mesura quantitativa del grau d'ajustament dels coeficients de la transformació entre totes les parelles de GCPs. El

càlcul es fa a partir de l'error promitjat entre els punts obtinguts aplicant els coeficients finals $(\mathbf{x}_a, \mathbf{y}_a)$ segons (50) i els punts ideals que es volien obtenir (\mathbf{x}, \mathbf{y}) .

$$\mathbf{x}_a = \mathbf{XY} \cdot \mathbf{a} \qquad \mathbf{y}_a = \mathbf{XY} \cdot \mathbf{b} \qquad (50)$$

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N ((x_{a_i} - x_i)^2 + (y_{a_i} - y_i)^2)}{N}} \qquad (51)$$

Cal remarcar que la mesura de RMSE no està relacionada directament amb la qualitat de l'enregistrament que s'aconseguirà. A l'apartat 3.9 s'aprofundirà en aquesta discussió, i es proposaran mesures alternatives de la qualitat de l'enregistrament vàlides pels casos presentats.

c) Selecció de les parelles de GCPs minimitzant RMSE. Procés iteratiu

Es pot activar un procediment per seleccionar les parelles de GCPs que minimitzen el valor RMSE. Es fixa un valor de RMSE màxim i es fan iteracions eliminant GCPs fins que es compleix el requeriment. A cada iteració es troba els GCPs que acumulen error RMSE màxim i s'eliminen del conjunt de GCPs. A continuació es torna a començar l'apartat 3.8.1, i es va repetint iterativament fins a aconseguir que l'error RMSE estigui per sota d'una acotació màxima.

3.8.2 Etapa comú d'interpolació dels valors a la imatge resultant

Finalment per a reconstruir la imatge enregistrada **Imatge_2_mod**, es fa una interpolació dels valors per un mètode invers a partir dels coeficients obtinguts a l'apartat anterior i la imatge de treball **Imatge_2**.

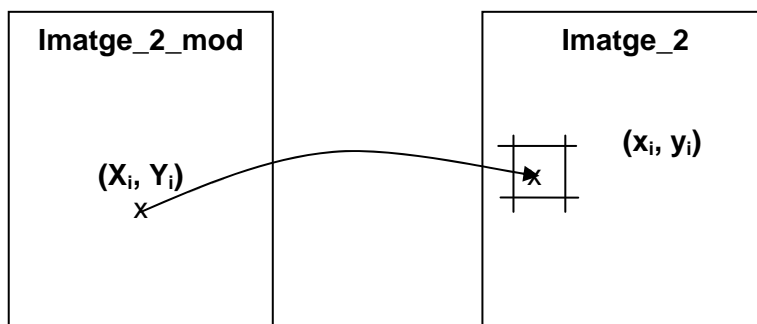


figura 3.42 Esquema d'enregistrament

Per saber el valor que li correspon a cada píxel de la imatge que es vol obtenir, a cada punt de la **Imatge_2_mod** es troba quin punt li correspon a la **Imatge_2**, a partir de la transformació (47) amb els coeficients obtinguts. Normalment no dóna un píxel exacte i cal fer una interpolació del valor; la més senzilla és aproximar amb el valor del píxel més proper (*nearest neighbour*), el valor d'aquest píxel es posa al píxel original de la **Imatge_2_mod**. Es podrien aplicar altres interpolacions, com la bilinial o la bicúbica, sense molta complexitat, a partir del conjunt de píxels veïns i les seves distàncies respectives amb el punt obtingut en la transformació. Però s'ha optat per la del veí més proper. Si s'apliqués un altre tipus d'interpolació sobre les imatges binàries de contorns, la imatge resultant ja enregistrada seria de nivells de gris, i caldria binaritzar-la novament per a mesurar la qualitat de l'enregistrament.

A continuació es mostraran els resultats qualitius i quantitius per a poder comparar els diferents sistemes d'enregistrament globalment.

3.9 Resultats de l'enregistrament

3.9.1 Enregistrament clàssic per MCC d'àrea en domini espacial

El primer resultat l'obtenim sobre la imatge de contorns del cas 1 amb els resultats d'aparellament de GCPs que hem representat a la figura 3.8, ens dona el resultat de la figura 3.43. els altres casos (cas 2a, cas 2b i cas 2c) dona error.

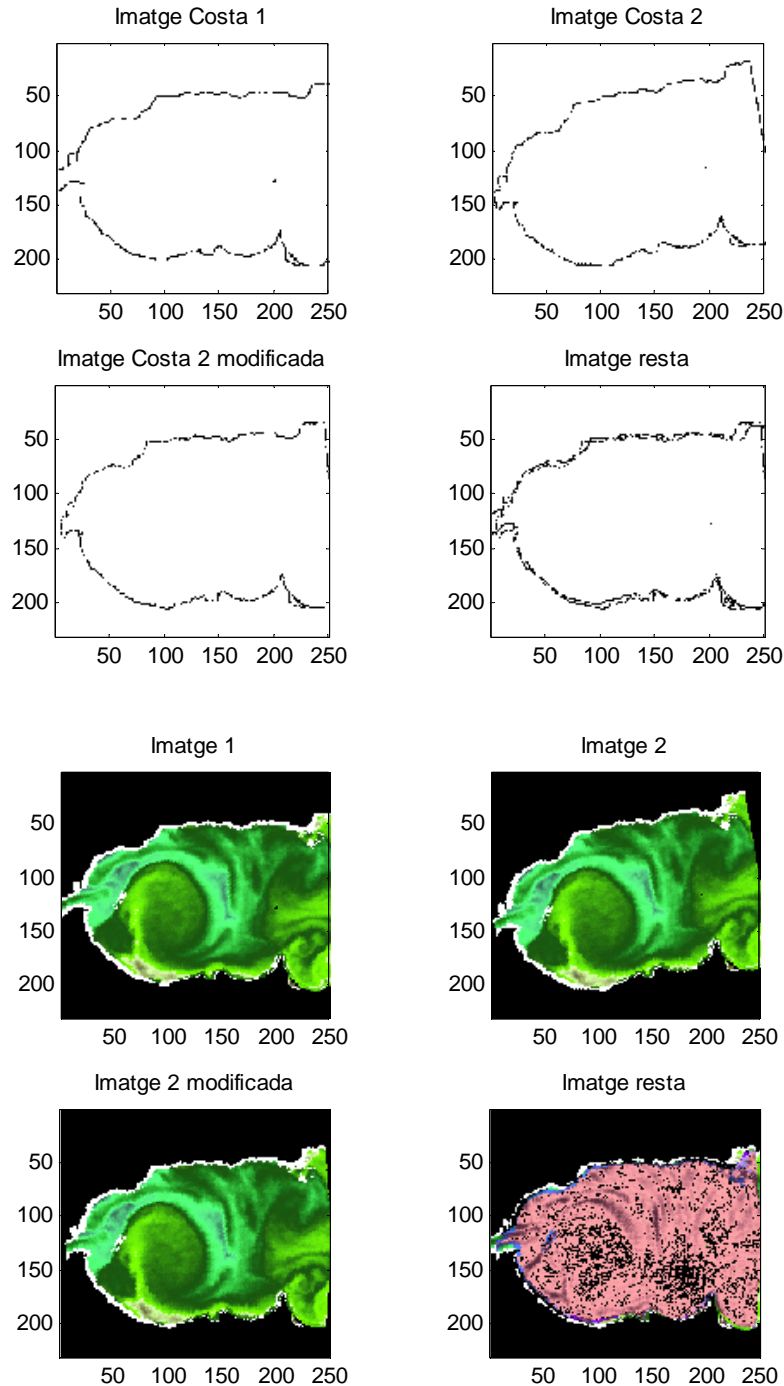


figura 3.43 Enregistrament MCC 2D clàssic pel Cas 1, d'una imatge rotada (imatge 2) respecte una imatge de referència (imatge 1). S'inclou la imatge resta Imatge2 modificada - Imatge 1, que pot servir de comparació. Es fa sobre la imatge de contorns ($dist_m=3.83$) i sobre la imatge completa.

3.9.2 Mesura quantitativa resultats. Distància mínima mitjana ($dist_m$)

Si es vol mesurar quantitativament la qualitat de l'enregistrament aconseguït amb la imatge de contorns, a banda del valor final de l'error de transformació entre els GCPs, obtingut a (51); es pot calcular la mitjana de la distància mínima entre els píxels del contorn de la **Imatge 2 modificada** respecte els píxels del contorn corresponent de la **Imatge 1**.

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{c}j1 \in \{\mathbf{c}1i1, \mathbf{c}2i1, \mathbf{c}3i1, \dots, \mathbf{c}Ni1\} \text{ contorns de la imatge } i1, \\
 & \mathbf{c}i2 \in \{\mathbf{c}1i2, \mathbf{c}2i2, \mathbf{c}3i2, \dots, \mathbf{c}Ni2\} \text{ contorns de la imatge } i2, \\
 & \text{cada contorn és un vector amb un nombre de punts amb les seves coordenades :} \\
 & \mathbf{c}i2 = [(x_{2_1}, y_{2_1}), (x_{2_2}, y_{2_2}), (x_{2_3}, y_{2_3}), (x_{2_4}, y_{2_4}) \dots (x_{2_L}, y_{2_L})], \\
 & \mathbf{c}j1 = [(x_{1_1}, y_{1_1}), (x_{1_2}, y_{1_2}), (x_{1_3}, y_{1_3}), (x_{1_4}, y_{1_4}) \dots (x_{1_K}, y_{1_K})], \tag{52} \\
 & dist_m = \frac{\sum_{\mathbf{c}i2=\mathbf{c}1i2}^{cNi2} \left(\sum_{(x_{2_i}, y_{2_i}) \in \mathbf{c}i2} \frac{\min_{\forall j \in \mathbf{c}j1} \left(\sqrt{(x_{2_i} - x_{1_j})^2 + (y_{2_i} - y_{1_j})^2} \right)}{L} \right)}{N}.
 \end{aligned}$$

En el cas que tots els contorns estiguessin separats 1 píxel en el vèrtex oposat, aquesta distància mínima mitjana donaria $\sqrt{2}$. En el cas que acabem de veure el resultat és $dist_m=3.83$. A la següent secció trobareu el resum de resultats quantitatius $dist_m$ a partir de les imatges de contorns, per cada cas i en cada un dels mètodes que dona un resultat sense errors.

Si aquest mateix mètode d'enregistrament MCC 2D clàssic, l'apliquem a els altres casos (cas 2a, cas 2b i cas 2c), els resultats són molt pobres, no s'aconsegueix fer l'aparellament correcte de cap segment, degut a les variacions entre la imatge de contorns i el mapa de referència, són dades multimodals amb una projecció diferent, conjuntament amb una escala espacial diferent i a més s'hi ha introduït una rotació més accentuada.

3.9.3 Enregistrament MCC en espai 2D, amb anàlisi *wavelet*

Si ara ens disposem a obtenir els resultats aplicant el mètode d'enregistrament MCC en l'espai de transformades *wavelet* 2D, que hem presentat a l'apartat 3.6. A partir dels aparellaments a cada nivell de l'anàlisi *wavelet*, es calculen els coeficients de la transformació de manera independent per cada nivell segons l'apartat 3.8.1. A continuació es seleccionen els coeficients de la transformació que tenen un valor RMSE (51) menor abans d'entrar en el procés iteratiu. Un cop seleccionats els aparellaments d'un nivell es continua amb el procés normal de refinament dels punts de control i finalment s'aplica l'enregistrament amb els paràmetres de la transformació resultant.

En primer lloc s'obtenen els resultats amb les imatges del cas 1, a continuació amb les del cas 2a, pels casos 2b i 2c ja no es posen resultats perquè són dolents i no s'aconsegueix l'enregistrament entre imatges.

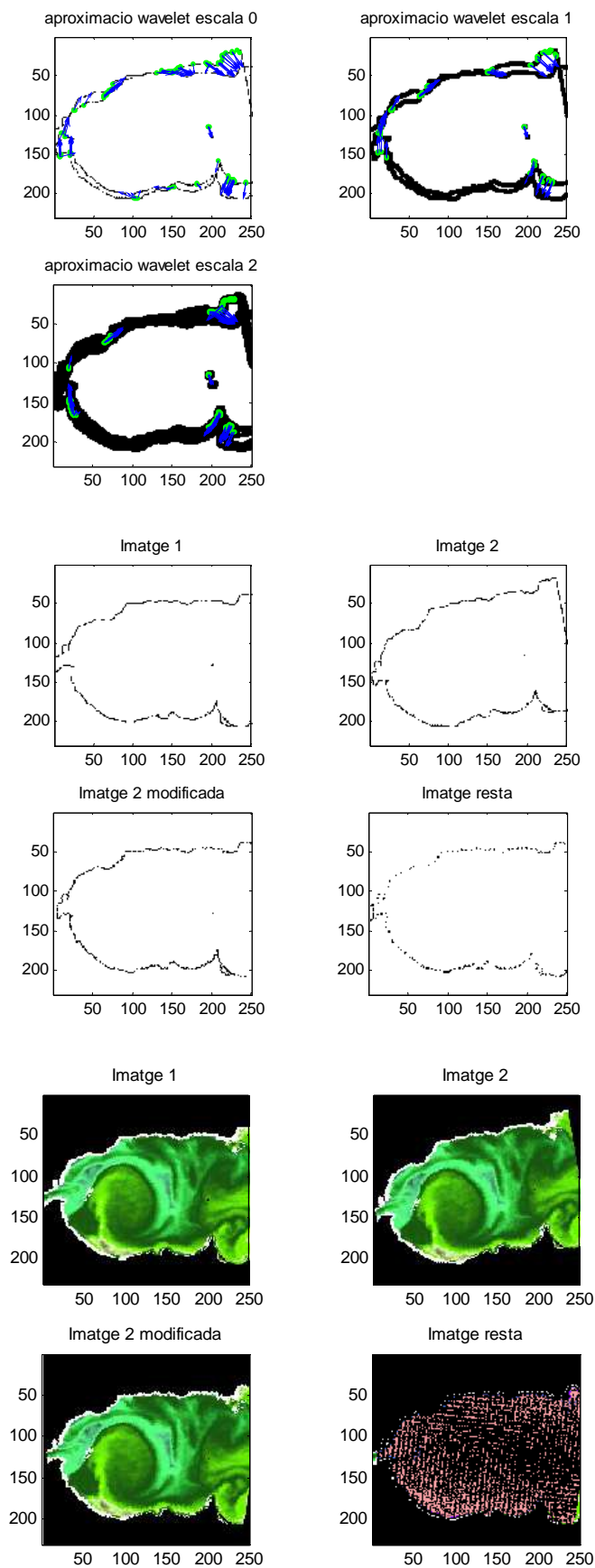


figura 3.44 Resultats de l'enregistrament MCC 2D wavelet, cas 1 ($dist_m=0.42$).

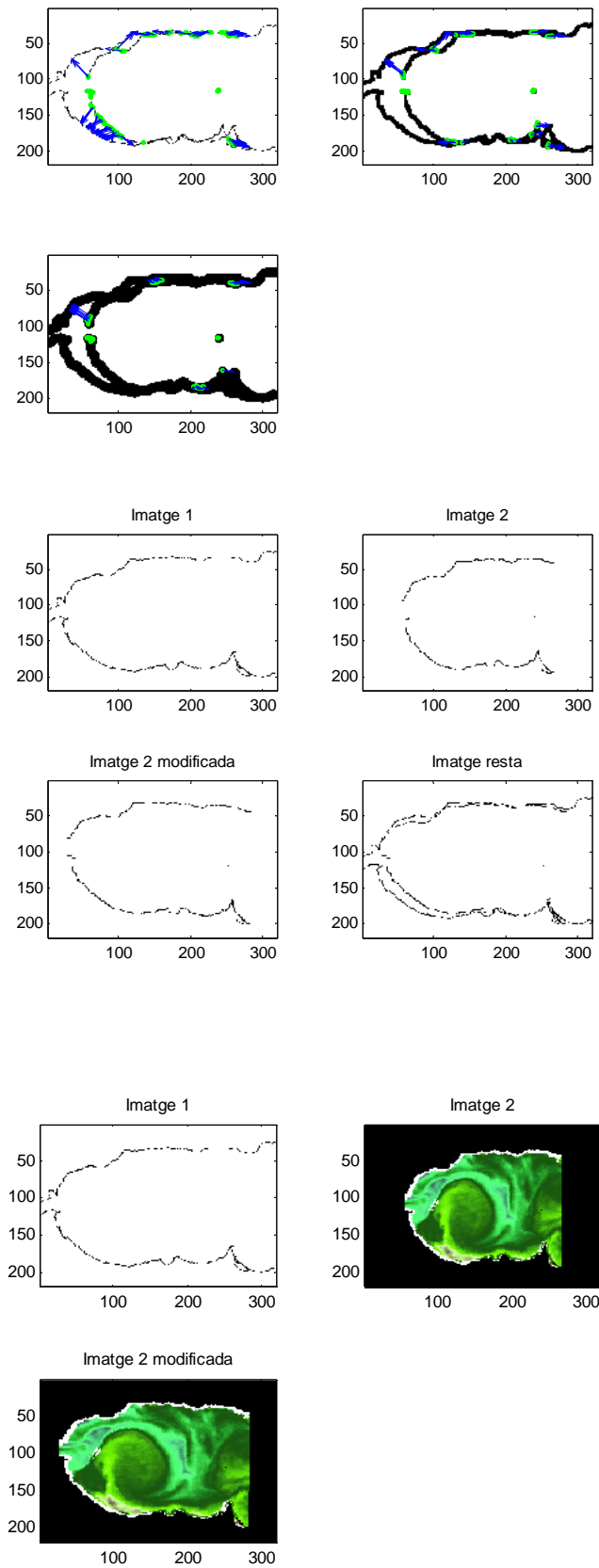


figura 3.45 Resultats de l'enregistrament MCC 2D wavelet, cas 2a ($dist_m=4.47$)

3.9.4 Enregistrament MCC en espai 1D, anàlisi *wavelet* i DTW

Si s'obtenen els resultats de l'enregistrament complet amb el mètode presentat a 3.7, a partir de la codificació dels contorns de la línia de costa amb un codi de cadena, i que utilitza tècniques d'anàlisi *wavelet* en els codis dels contorns per fer la selecció automàtica dels punts de control que tenen màxim valor de la MCC, i a la vegada utilitza tècniques de programació dinàmica (DTW) per fer l'aparellament elàstic dels segments. En aquest cas els resultats són correctes per tots els casos d'estudi cas 1, cas 2a, cas 2b i cas 2c.

Resultats pel cas 1, ($dist_m=0.52$)

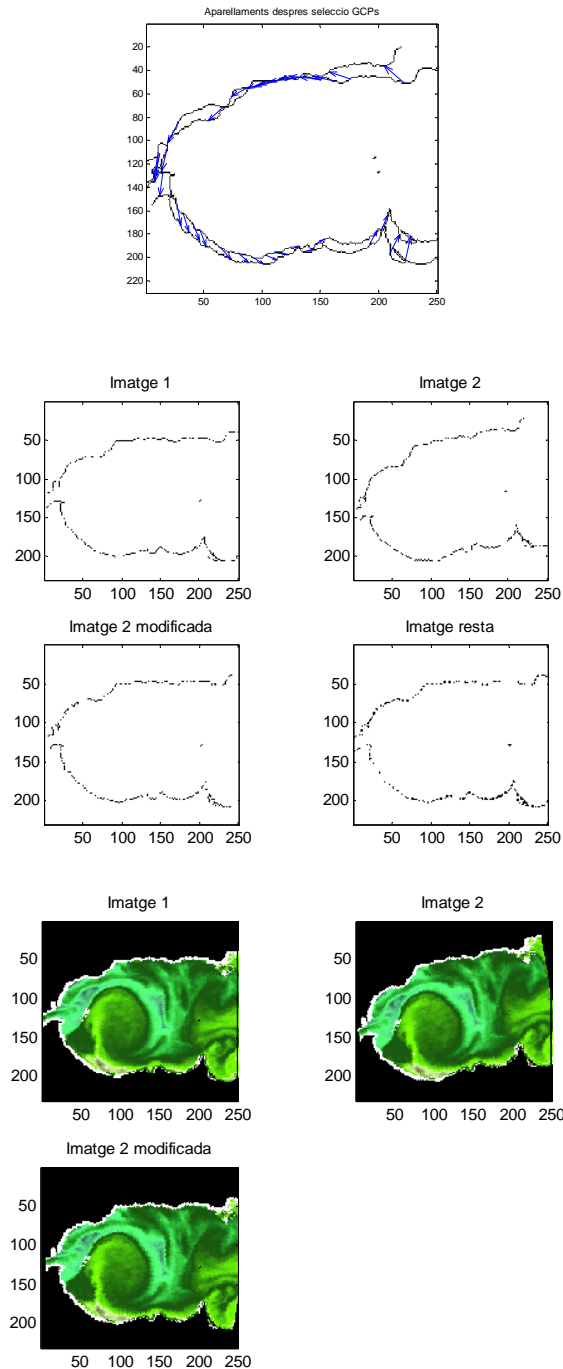


figura 3.46 Representació dels resultats de l'enregistrament amb el mètode MCC amb *wavelet* 1D i DTW pel Cas 1 ($dist_m=0.52$).

Resultats pel cas 2a, ($dist_m=1.33$).

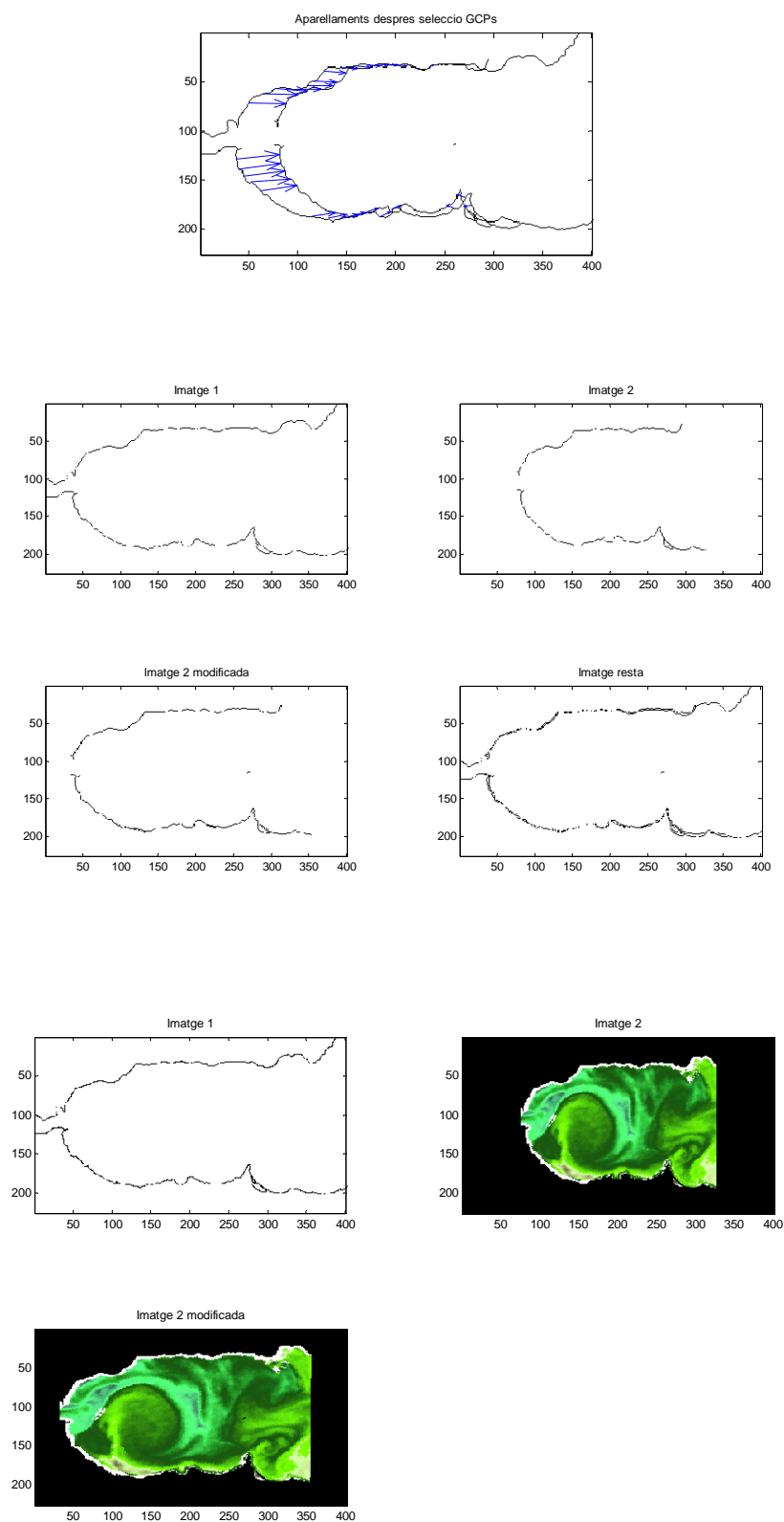


figura 3.47 Representació dels resultats de l'enregistrament amb el mètode MCC amb wavelet 1D i DTW pel Cas 2a ($dist_m=1.33$).

Resultats cas 2b, ($dist_m=1.35$).

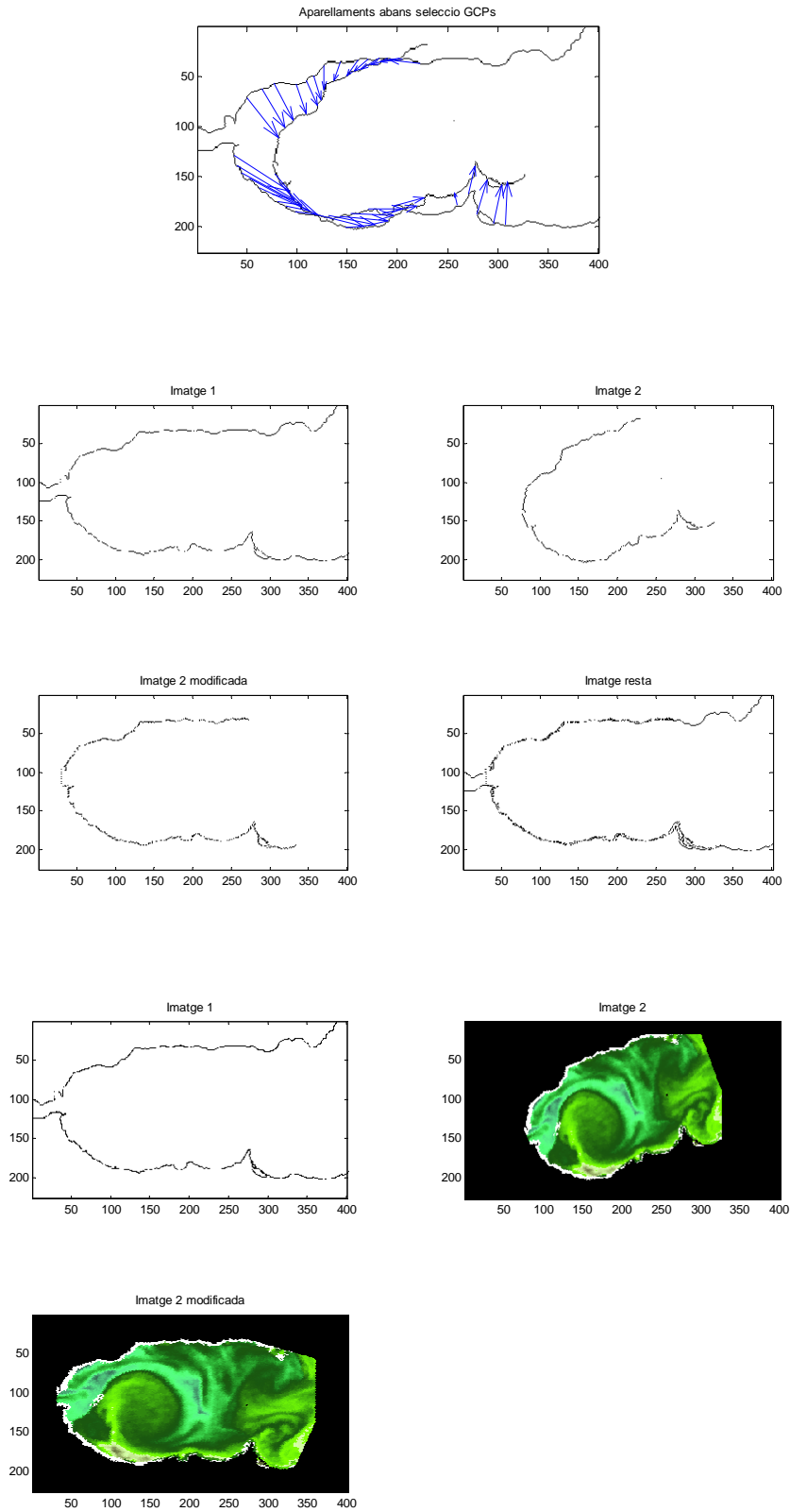


figura 3.48 Representació dels resultats de l'enregistrament amb el mètode MCC amb wavelet 1D i DTW pel Cas 2b ($dist_m=1.35$).

Resultats cas 2c, ($dist_m=1.37$).

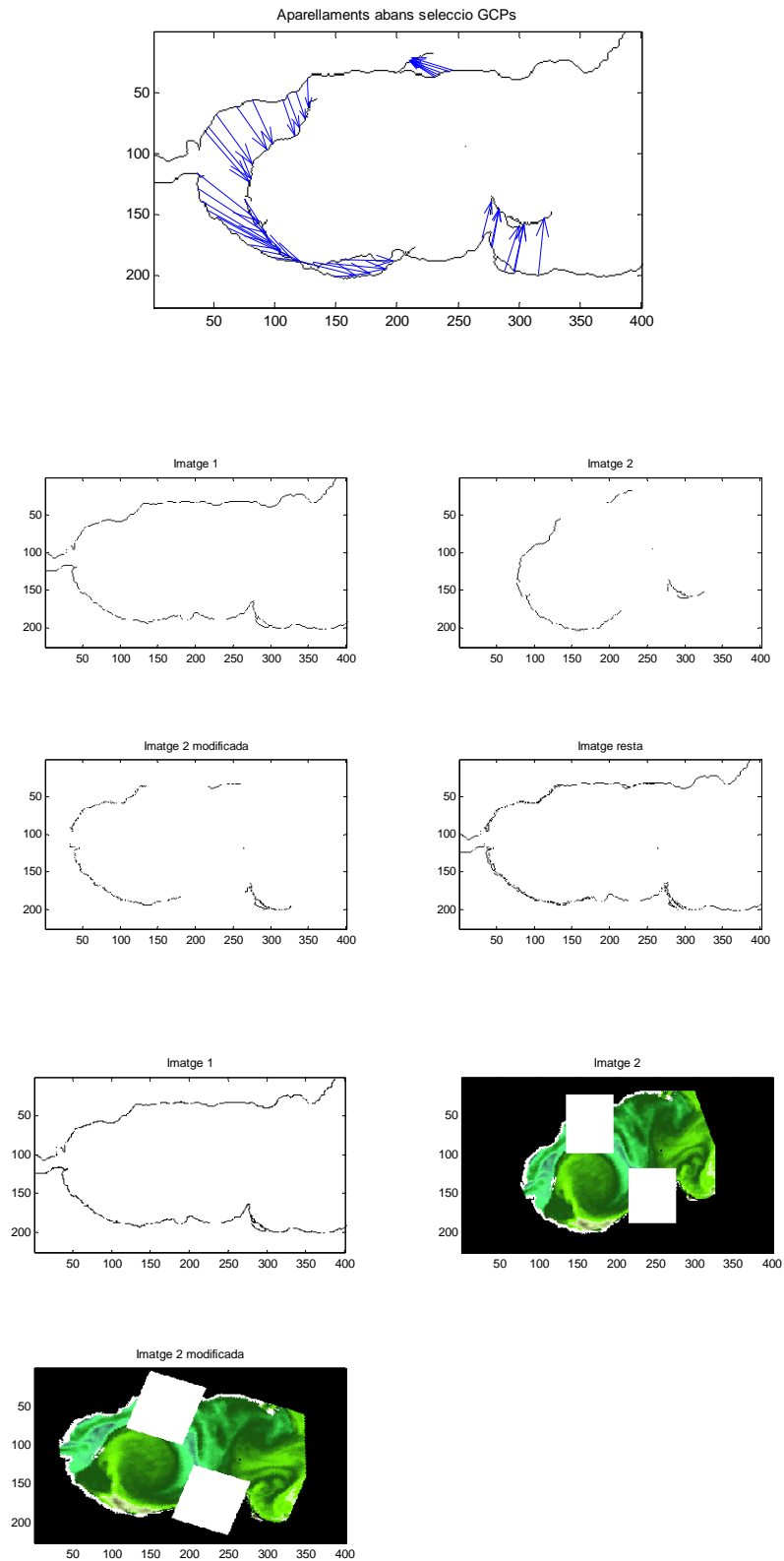


figura 3.49 Representació dels resultats de l'enregistrament amb el mètode MCC amb wavelet 1D i DTW pel Cas 2c ($dist_m=1.37$).

Com a resultat final es pot posar un exemple (cas 2c) de georeferenciació completa, el que s'obté si la imatge de la línia de la costa que es fa servir com a referència en els casos 2a, 2b i 2c, estigues georeferenciada respecte una determinada projecció i amb un *Datum* conegut (a l'exemple WGS84).

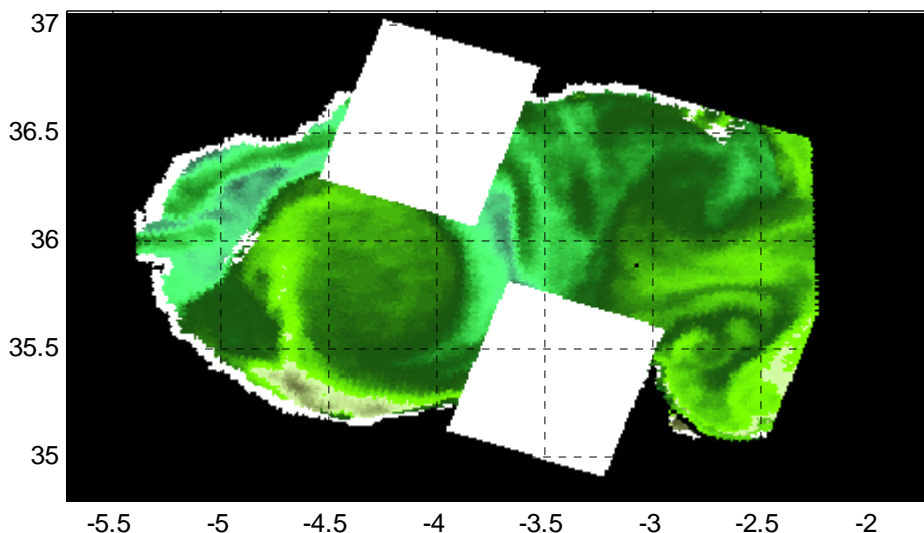


figura 3.50 Imatge georeferenciada amb l'enregistrament MCC wavelet 1D i DTW cas 2c ($dist_m=1.37$).

3.10 Resum de resultats i discussions finals

A la següent taula referenciem les figures que contenen els resultats principals per a cada un dels casos i amb cada un dels mètodes que es comparen.

Taula 3-2: Figures associades als resultats de cada cas per cada un dels mètodes.

	MCC 2D clàssic	MCC 2D a wavelet	MCC 1D a wavelet & DTW
cas 1.	figura 3.43	figura 3.44	figura 3.46
cas 2a.	-	figura 3.45	figura 3.47
cas 2b.	-	-	figura 3.48
cas 2c.	-	-	figura 3.49

El paràmetre RMSE (51) mesura la semblança dels valors dels GCPs esperats respecte dels valors aproximats amb els coeficients de la transformació. En molts sistemes es fa servir aquest paràmetre com a mesura de la qualitat de l'enregistrament, però el problema principal és que la relació del valor RMSE amb la

qualitat de l'enregistrament depèn molt del nombre de GCPs que es considerin, així com també de la distribució del GCPs dins la imatge, i si els GCP representen punts significatius de la imatge. Empíricament es pot verificar que ens podríem trobar un enregistrament amb un valor RMSE=1 que visualment fos qualitativament pitjor que un enregistrament amb un RMSE=10. Per tant com a paràmetre quantitatiu relacionat amb la qualitat de l'enregistrament és molt més apropiat la distància mínima mitjana entre els píxels dels contorns de les dues imatges $dist_m$ (52). A continuació tenim un resum amb els valors $dist_m$ (52), que pot servir com a paràmetre addicional als dels resultats gràfics, per a poder realitzar una comparació entre els diferents mètodes d'enregistrament geomètric que hem presentat.

Taula 3-3: Resultats quantitatius per cada mètode amb cada cas, valors de $dist_m$.

	MCC 2D clàssic	MCC 2D a wavelet	MCC 1D a wavelet & DTW
cas 1.	3.83	0.42	0.52
cas 2a.	-	4.47	1.33
cas 2b.	-	-	1.35
cas 2c.	-	-	1.37

En primer lloc cal destacar, tal com hem vist després de la definició de (52) que si tots els contorns estiguessin separats 1 píxel en el vèrtex oposat, aquesta distància mínima mitjana donaria $\sqrt{2}$. Per tant podem veure que el mètode MCC 1D *wavelet* & DTW de la tercera columna dona una $dist_m < \sqrt{2}$ en els 4 tipus d'imatges analitzats, es podria dir que s'assoleix un enregistrament amb una precisió per sota del píxel en mitjana (*sub-pixel accuracy*).

També cal destacar que els tres mètodes només els podem comparar en el cas 1, quan es tenen imatges del mateix tipus i amb una poca variació en el desplaçament i la rotació, i que el que dona millors resultats és el mètode MCC 2D en domini *wavelet*, i amb resultats molt propers ens trobem amb el mètode MCC 1D *wav* & DTW. A la resta de casos, quan les imatges són multimodals, el MCC 2D clàssic no és capaç d'enregistrar les imatges, i el MCC 2D en domini *wavelet* només aguanta -però amb resultats pobres- en el cas 2a, on no hi ha ni rotacions ni forats (*gaps*).

Per tant el mètode més robust per fer l'enregistrament d'imatges multimodals, que permet que hi hagi variacions d'escala, rotacions, lleugers canvis en la projecció, i discontinuïtats a la línia de costa és el darrer presentat, MCC 1D en domini *wavelet*. Que en els tres tipus de casos multimodals ha donat un valor $1.3 < dist_m < 1.4$, demostrant que el mètode és molt robust amb les distorsions que es representen en aquests casos.

Convé recordar que amb aquest mètode també es produeixen errors i mals enregistraments. En la majoria de casos que hem utilitzat per a assajar el funcionament, s'han observat els pitjors resultats -arribant a mostrar-se incapaç de poder enregistrar les imatges- en els casos que els contorns estaven molt fragmentats. En aquests casos els contorns no queden ben representats, les seqüències que els codifiquen no són prou llargues per a poder extreure'n patrons diferenciats. Altres casos problemàtics es produeixen si els contorns no estan ben distribuïts a tota la imatge, llavors el que pot passar és que localment, on hi ha els punts de control (GCP) es produeixi un bon enregistrament, però que no s'estengui l'enregistrament correcte a tota la imatge. Tampoc s'ha verificat el funcionament del sistema per a imatges amb un nombre de contorns moderadament gran (>10) i de certa durada.

Els diferents mètodes presentats s'han comparat també amb transformacions de segon ordre substituint les equacions de la transformació afí. Els resultats obtinguts eren més sensibles a errors lleugers de desplaçament en l'assignació dels GCPs, i amb les imatges de prova han donat uns resultats tan qualitativament com quantitativament inferiors, per això no els hem posat

Com a conclusions podríem dir que el darrer mètode presentat és més robust per fer enregistraments amb oclusions i en condicions adverses (diferent nombre de píxels dels contorns, escales espacials entre imatges no exactament coincidents). La necessitat de memòria i la complexitat dels càlculs és menor amb el mètode 1D que amb els mètodes 2D. Com a desavantatge principal hauríem de mencionar el temps de processament per fer l'extracció i la codificació dels contorns de les imatges. S'ha realitzat una gràfica amb els temps de càlcul necessaris amb operacions en coma flotant respecte el nombre de píxels del contorn i està representada a la figura 3.51.

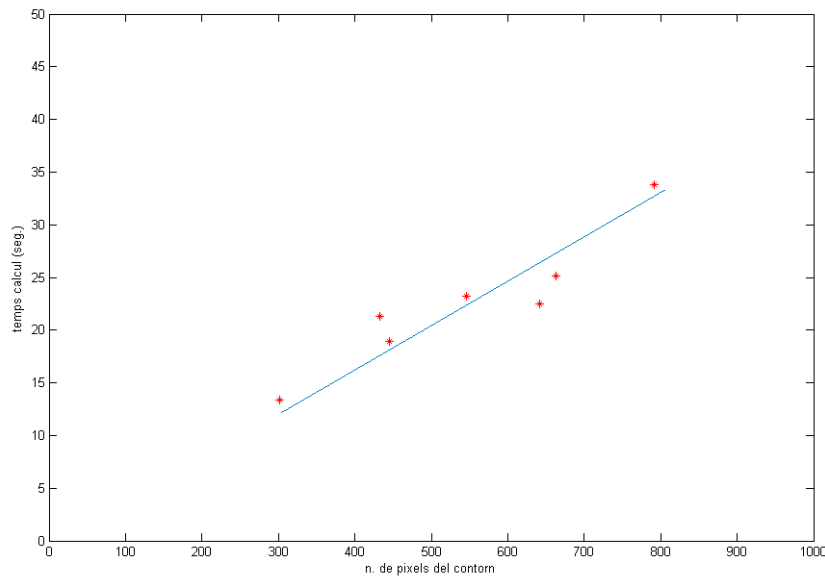


figura 3.51 Temps relatiu de càlcul en funció del nombre de punts d'un contorn.

Capítol 4. Reconstrucció iterativa a partir d'un model i de dades multiescalars i esparses (RIMME)

4.1 Introducció

En aquest capítol es vol obtenir un camp de velocitat superficial dens i espaiat regularment a partir d'uns valors de camps inicials esparsos, que pertanyen a diferents escales espacials relacionades. El mètode que es desenvolupa al llarg d'aquest capítol, fins on en tenim coneixement és inèdit, nosaltres l'hem derivat a partir de l'anàlisi i la reconstrucció amb bancs de filtres. Sembla probable que també es pogués derivar a partir d'altres enfocaments com la descomposició subbanda, anàlisi multiresolució o multiescala, o bé a partir de les propietats de les transformacions *wavelet* discretes.

A l'apartat 4.2 plantejarem el nostre problema central com una variant de l'apartat 2.4, en el que les dades esparses a múltiples escales no estan en el domini de les components de detall de les transformades *wavelet* discretes (DWT), sinó en les components aproximades de les DWT a diferents escales, que es podrien considerar que estan en el domini del senyal a diferents resolucions. Aquesta diferència entre els apartats 2.4 i el 4.2 és molt important, ja que en molts problemes on es vol obtenir la reconstrucció o la interpolació d'un senyal a partir de mostres que pertanyen a diferents escales, són més propers a aquest darrer model. Després de la presentació general del mètode, a l'apartat 4.2.4 es discutirà breument quin és l'efecte de canviar la interpolació inicial utilitzada. Finalment a l'apartat 4.3 es fa una generalització a dades multidimensionals, i en concret es treballa amb mostres esparses multiescalars d'un camp de velocitats superficial per a recuperar una aproximació al camp de velocitats original.

4.2 Una aproximació iterativa a la reconstrucció basada en un model a partir de dades multiescalars i esparses (RIMME)

En aquest apartat i a partir dels mètodes descrits al 2.3 desenvoluparem una nova metodologia per a fer una interpolació o reconstrucció de dades 1D esparses que pertanyen a diferents escales a través de tècniques multiresolució iteratives. El mètode que es proposa està pensat per a treballar amb mostres irregulars i poc denses en el domini del senyal, si es disposa de mostres en diferents escales i d'un model per a fer l'anàlisi i la síntesi multiresolució d'aquests senyals. La qualitat de la interpolació que s'obté és molt dependent del tipus de mostres que es tenen, de la seva densitat i de la seva distribució. A continuació, a l'apartat 4.3 es presenta una extensió a dades bidimensionals complexes. El nou mètode l'hem batejat amb el nom **(RIMME)** per ser l'acrònim de Reconstrucció Iterativa a partir d'un Model i de dades Multiescalars i Esparses (*Iterative model-based reconstruction from multiscalar sparse data*). Com es veurà és un mètode molt intuïtiu que ens permetrà reconstruir aproximadament un senyal a partir de mostres esparses que pertanyen a diferents escales.

4.2.1 Definicions de les matrius de treball i resultats RIMME

Tenim un senyal discret definit i arbitrari que expressem amb un vector de N mostres $\{\mathbf{s} \in \mathbb{R}^N\}$. El vector $\hat{\mathbf{s}}$ correspon al senyal reconstruït que s'obindrà a la sortida del mètode d'interpolació, que és una aproximació al senyal discret arbitrari original.

Es defineix la matriu **AHRWT_L** (*Analysis Highly Redundant from Wavelet Transform / Matriu molt redundant d'anàlisi de la transformada wavelet*) a (53),

$$\mathbf{AHRWT}_L \equiv [\mathbf{s} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_L], \quad (53)$$

formada per la pròpia senyal i les senyals aproximades a tots els nivells de l'arbre de descomposició de la figura 2.5.

Es defineix la matriu **SHRIWT_L** (*Synthesis Highly Redundant for Inverse Wavelet Transform / Matriu molt redundant per a la síntesi amb transformades wavelet inverses*) a (54),

$$\mathbf{SHRIWT}_L \equiv [\mathbf{sm} \mathbf{am}_1 \mathbf{am}_2 \dots \mathbf{am}_L], \quad (54)$$

formada a la primera columna per unes mostres irregulars i esparses de \mathbf{s} , que anomenem \mathbf{sm} , amb el mateix nombre de mostres, però amb poques mostres diferents de zero, només les que tenen l'índex emmagatzemat a \mathbf{m} ; i a cada columna una versió \mathbf{am}_k amb mostres irregulars i esparses de l'aproximació del nivell k , \mathbf{a}_k , amb mostres diferents de zero en els índex emmagatzemats al vector \mathbf{m}_k . Aquest conjunt de mostres multiescalars i esparses són les que es faran servir com entrada del sistema d'interpolació.

Finalment es pot emmagatzemar el conjunt de vectors d'índexs dels valors diferents de zero, que són de diferents longituds, a una estructura **ISIWT_L** (*Indexes from Synthesis for Inverse Wavelet Transform / Estructura d'índexs per a la síntesi per a la transformada Wavelet inversa*) definida a (55),

$$\mathbf{ISIWT}_L \equiv \{\mathbf{m} \mathbf{m}_1 \mathbf{m}_2 \dots \mathbf{m}_L\}, \quad (55)$$

amb els vectors d'índexs dels valors diferents de zero dels vectors \mathbf{sm} i la resta dels \mathbf{am}_k , que són el vector \mathbf{m} i els vectors \mathbf{m}_k . Aquesta estructura la definim per la comoditat que ens dona per a fer les expressions dels conceptes, de totes maneres no caldria emmagatzemar-ho i els valors es podrien derivar directament de **SHRIWT_L**.

A la figura 4.1 es mostra un exemple dels senyals **SHRIWT_L** (54) a cada nivell de l'arbre de descomposició, són els punts esparsos de cada nivell representats amb un cercle en vermell, conjuntament amb els **AHRWT_L** (53) senyals que els haurien originat, amb les línies blaves discontinües.

El mètode que exposarem en el següent apartat, ens permet obtenir una aproximació a la reconstrucció del senyal \mathbf{s} , que expressem com a $\hat{\mathbf{s}}$, i que està representada amb la línia blava contínua de la figura 4.2, i que s'ha obtingut a partir dels valors multiescalars i esparsos **SHRIWT_L** (54), i coneixent també un model d'anàlisi i síntesi. El càlcul es fa a partir d'un algoritme iteratiu inèdit, que hem anomenat **RIMME**, que treballa amb les dades multiescalars esparses de **SHRIWT_L**, de manera que $\hat{\mathbf{s}}$ passa pels punts que queden definits a \mathbf{sm} , i minimitza l'error en els punts definits als \mathbf{am}_k a cada un dels k nivells de la descomposició multiescalar. Per tal d'accelerar el procés de reconstrucció es pren com a base de $\hat{\mathbf{s}}$, a la iteració 0, una interpolació cúbica dels valors \mathbf{sm} .

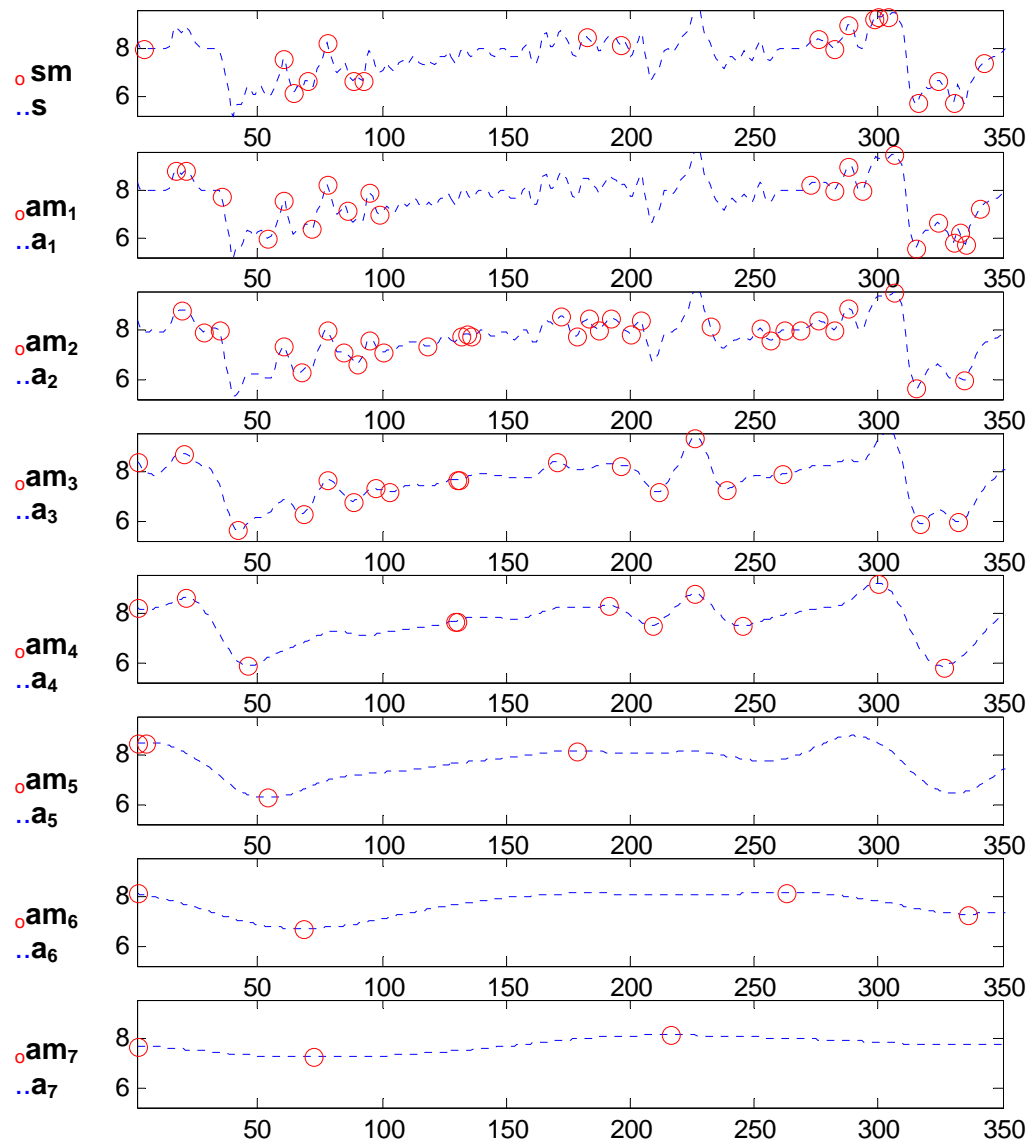


figura 4.1 Valors multiescalars esparsos SHRIWT (cercles vermells) i senyals multiescalars originals AHRWT (puntejats blaus).

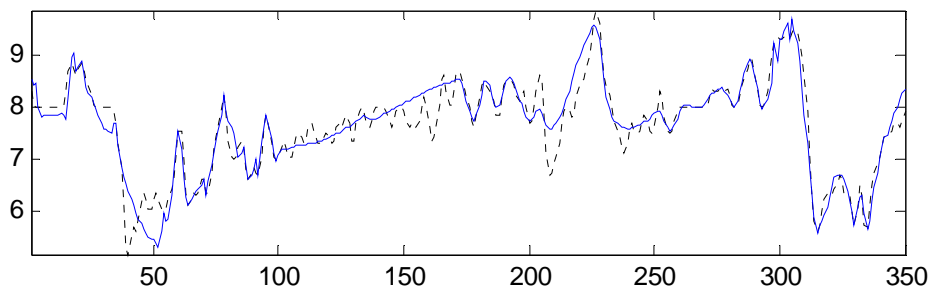


figura 4.2 Senyal reconstruïda ($-\hat{s}$) amb 12 iteracions del mètode RIMME comparada amb el senyal original ($--- s$).

4.2.2 Deducció del mètode de Reconstrucció Iterativa a partir d'un Model i de dades Multiescalars i Esparses (RIMME)

Cal fer unes consideracions prèvies. Podem definir un senyal error absolut com la diferència entre el senyal original i el senyal reconstruït:

$$\mathbf{e} \equiv \mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}. \quad (56)$$

A partir de la propietat de reconstrucció perfecte de l'esquema de bancs de filtres de la figura 2.3 (30a), es pot expressar l'equació complerta d'anàlisi i reconstrucció de qualsevol senyal, en particular d'aquest senyal error:

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e} * lpa_1) * lps_1 + (\mathbf{e} * hpa_1) * hps_1, \quad (57)$$

on * significa convolució amb les respostes impulsional dels filtres de les etapes d'anàlisi (lpa_1 , hpa_1) i síntesi (lps_1 , hps_1).

A partir de (56) podem expressar (57) com:

$$\mathbf{s} = \hat{\mathbf{s}} + ((\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}) * lpa_1) * lps_1 + ((\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}) * hpa_1) * hps_1. \quad (58)$$

També podem definir:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &\equiv \mathbf{s} * lpa_1 \\ \hat{\mathbf{a}}_1 &\equiv \hat{\mathbf{s}} * lpa_1 \\ \mathbf{ea}_1 &\equiv \mathbf{a}_1 - \hat{\mathbf{a}}_1 = (\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}) * lpa_1 = \mathbf{e} * lpa_1 \end{aligned} \quad (59)$$

llavors l'equació (58) queda:

$$\mathbf{s} = \hat{\mathbf{s}} + (\mathbf{a}_1 - \hat{\mathbf{a}}_1) * lps_1 + ((\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}) * hpa_1) * hps_1 \quad (60)$$

$$\mathbf{s} = \hat{\mathbf{s}} + (\mathbf{ea}_1) * lps_1 + ((\mathbf{s} - \hat{\mathbf{s}}) * hpa_1) * hps_1 \quad (61)$$

Aquest nou valor (\mathbf{ea}_1) es correspon a l'error a la fracció passa-baixes de la part d'anàlisi del banc de filtres. A partir de les dades esparses de \mathbf{SHRIWT}_L (54) i dels vectors d'índexs de \mathbf{ISIWT}_L (55) es pot obtenir una aproximació a aquest error, que anomenarem $\hat{\mathbf{ea}}_1$,

$$\mathbf{am}_1 \equiv \begin{cases} \{\mathbf{a}_1\}_n & n \in \mathbf{m}_1 \\ 0 & n \notin \mathbf{m}_1 \end{cases} \quad (62)$$

amb \mathbf{m}_1 : índexs dels valors no zero de \mathbf{am}_1 ,

$$\mathbf{eam}_1 \equiv \begin{cases} \{\mathbf{am}_1\}_n - \{\hat{\mathbf{a}}_1\}_n & n \in \mathbf{m}_1 \\ 0 & n \notin \mathbf{m}_1 \end{cases} \quad (63)$$

$$\hat{\mathbf{ea}}_1 \equiv \text{interp}(\mathbf{eam}_1) \quad (64)$$

Es proposa una aproximació iterativa a l'equació (61) quedant-nos només el primer terme, l'aproximació a l'error de la fracció passa-baixes, ja que el segon terme (l'error a la fracció passa-altes) el desconeixem completament amb les dades que tenim a disposició. La iteració s'efectua de manera que es renovin a $\hat{\mathbf{s}}(i)$ només als índexs on hi ha valors desconeguts $n \notin \mathbf{m}$, per tant $\hat{\mathbf{s}}(i+1)$:

$$\begin{aligned} \{\hat{\mathbf{s}}(i+1)\}_n &\approx \{\hat{\mathbf{s}}(i)\}_n + \{(\hat{\mathbf{e}}\mathbf{a}_1(i)) * l\mathbf{p}\mathbf{s}_1\}_n \\ \{\hat{\mathbf{s}}(i+1)\}_n &\approx \{\hat{\mathbf{s}}(i)\}_n + \{\hat{\mathbf{e}}(i)\}_n \end{aligned} \quad (65)$$

amb $n \notin \mathbf{m}$, on \mathbf{m} : índexs dels punts diferents de zero de \mathbf{sm} , amb i sent el número de la iteració de 0 a l.

En la primera iteració ($i=0$) es pot prendre com a aproximació inicial $\hat{\mathbf{s}}(0)$ la interpolació cúbica de les dades esparses originals \mathbf{sm} . S'han provat altres interpolacions clàssiques (veí més pròxim, lineal i *splines*) i totes donen resultats finals molt similars en mesures objectives d'error. A l'apartat 4.2.4 es discutirà més extensament aquest punt.

Per a decidir la finalització de les aproximacions iteratives es pot calcular l'error quadràtic mig als punts coneguts en cada iteració (66), fins que estiguin per sota d'un llindar (p.e. 10^{-3})

$$RMSE_1(i) = \sqrt{\frac{\sum_{n=1|n \in \mathbf{m}_0}^N (\{\mathbf{am}_1\}_n - \{\hat{\mathbf{a}}_1(i)\}_n)^2}{M}} \quad (66)$$

amb i nombre d'iteració,
 $n \in \mathbf{m}_1$, on \mathbf{m}_1 : índexs de valors diferents de zero del senyal \mathbf{am}_1 ,
 M : nombre de valors diferents a zero de \mathbf{am}_1 ,
 N : nombre de mostres totals

Aquesta aproximació podria no convergir. Fins ara en els senyals que s'ha provat aquest efecte no es produïa perquè no hi havia errors en les dades, però sempre es pot protegir el sistema per a evitar que es torni inestable, introduint un nou pas que forci l'aturada de les iteracions si el valor $RMSE_1(i)$ de (66) creix en dues o més iteracions consecutives, o bé posar un llindar d'error més gran si no convergeix.

4.2.3 Esquema general i algorisme d'interpolació RIMME

Per tractar de veure gràficament aquest mètode de reconstrucció es pot expressar el funcionament d'aquesta aproximació iterativa a partir d'un esquema, el podem comparar amb l'esquema de la descomposició d'un senyal en un banc de filtres a l'etapa d'anàlisi i un banc de filtres de reconstrucció a l'etapa de síntesi de la figura 2.3. El que proposem es pot veure com una evolució de l'esquema original, l'esquema global del mètode iteratiu d'interpolació de dades, o de reconstrucció a partir de dades esparses i multiescalars (RIMME) està representat a la figura 4.3:

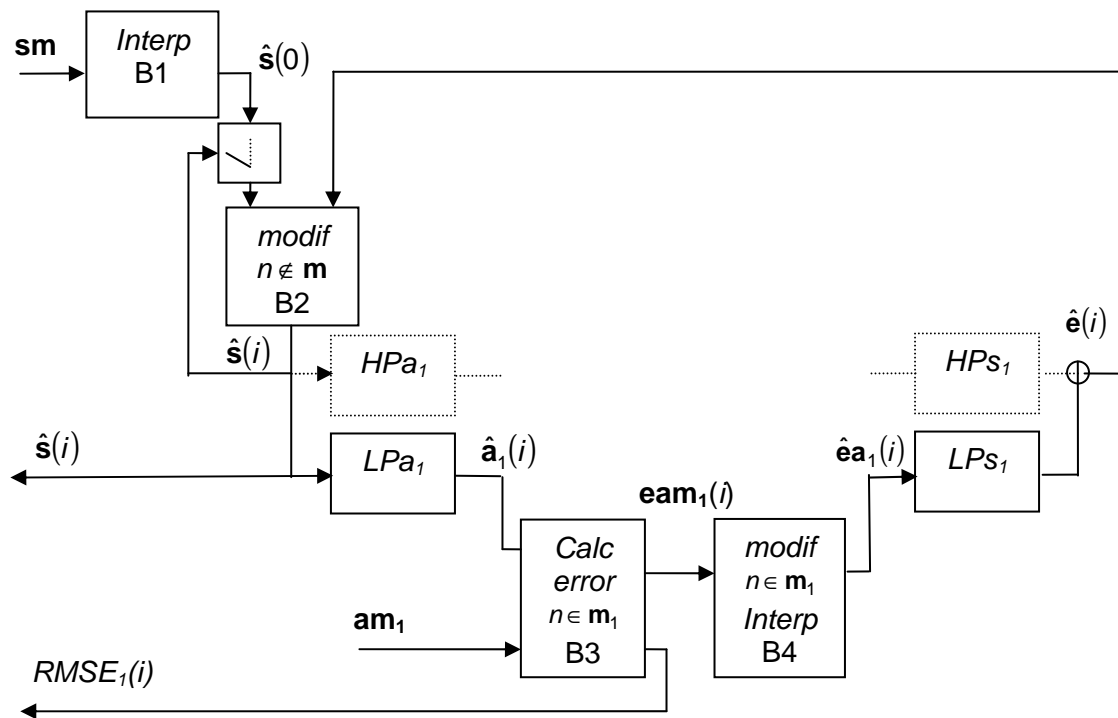


figura 4.3 Esquema per a l'implementació de l'algorisme RIMME. Amb aquest esquema s'obté l'interpolació $\hat{\mathbf{s}}$ a partir de les dades esparses i multiescalars fins a escala 1 $\mathbf{SHRIWT}_1 = [\mathbf{sm}, \mathbf{am}_1]$. Amb B1 es fa la interpolació inicial de les dades \mathbf{vm} . Amb B2 s'implementa (65). Amb B3 s'implementa (63). Amb B4 s'implementa (64) en el nivell L, i en els L-1 nivells restants es faria la suma de l'error i el resultat de l'error del nivell anterior.

A la vegada que també podem expressar-lo en forma d'algorisme. L'algorisme **RIMME** (Reconstrucció Iterativa a partir d'un Model i de dades Multiescalars i Esparses):

- . $i=0$
- . $\hat{\mathbf{s}}(i) = \text{interp}(\mathbf{sm})$
- . **mentre** $RMSE_1(i) \geq \text{llindar}$
 - . $\hat{\mathbf{a}}_1(i) = \hat{\mathbf{s}}(i) * \mathit{lpa}_1$
 - . $\mathit{eam}_1(i) = \begin{cases} \{\mathbf{am}_1\}_n - \{\hat{\mathbf{a}}_1(i)\}_n & n \in \mathbf{m}_1 \\ 0 & n \notin \mathbf{m}_1 \end{cases}$
 - . $\hat{\mathbf{e}}\mathbf{a}_1(i) = \text{interp}(\mathit{eam}_1(i))$
 - . $\{\hat{\mathbf{s}}(i+1)\}_n \approx \{\hat{\mathbf{s}}(i)\}_n + \{\hat{\mathbf{e}}\mathbf{a}_1(i)\}_n, n \notin \mathbf{m}$
 - . $RMSE_1(i) = \sqrt{\frac{\sum_{n=1|n \in \mathbf{m}_0}^N (\{\mathbf{am}_1\}_n - \{\hat{\mathbf{a}}_1(i)\}_n)^2}{M}}$
- . $i=i+1$

Aquest mateix mètode es pot extrapolar a un arbre de descomposició de L nivells. I s'obté finalment una reconstrucció del senyal original $\hat{\mathbf{s}}$ a partir de les mostres esparses multiescalars, com la que es mostra a la figura 4.2. En aquest punt convé remarcar que els resultats objectius d'error són poc dependents dels tipus

d'interpolació que s'utilitzi com a base de l'algorisme, ho discutirem en més detall a l'apartat posterior.

4.2.4 Discussió i comparació dels resultats

Cal destacar que l'aproximació obtinguda és qualitativament bona, com es pot veure a la figura 4.2 (amb un valor promig de l'error absolut,

$$NAE = \frac{\sum_{n=1}^N |\{\mathbf{s}\}_n - \{\hat{\mathbf{s}}\}_n|}{N} \quad (67)$$

(67) $NAE \leq 3 \cdot 10^{-2}$). L'aproximació que es realitza té un cost computacional baix, amb filtres de longituds $F < 16$, es pot quantificar amb un nombre de multiplicacions de nombres reals de l'ordre de $O(2L \cdot F \cdot N)$ a cada iteració: amb L el nombre de nivells a la descomposició, F la longitud del filtre inicial, i N el nombre de mostres finals que volem tenir.

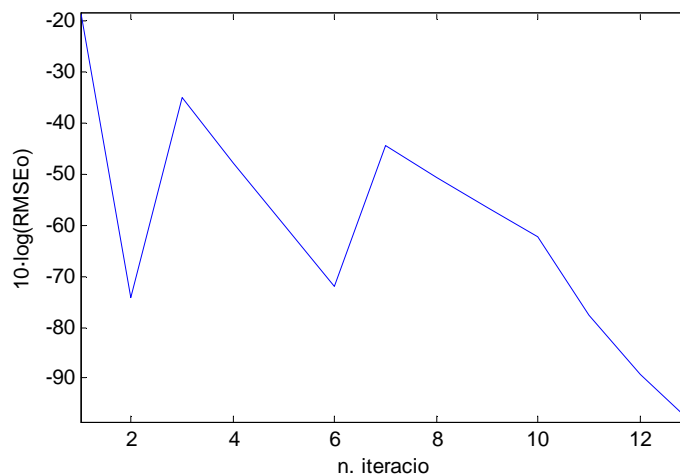


figura 4.4 *Valors $10\log(RMSE_o)$ per cada iteració. Els pics representen l'entrada de nous nivells de l'arbre de descomposició a l'esquema RIMME. Es comença amb només nivell 1. Després s'incorpora el nivell 2. A continuació el nivell 3. I així fins al nivell 7 en aquest cas..*

Si es compara aquesta aproximació a la reconstrucció a partir de mostres multiescalars esparses, amb altres mètodes d'interpolació de mostres esparses utilitzats (p.e la implementació de [2] del mètode CLEAN [45] utilitzat en Geociències i en Astronomia) a la figura 4.5, el mètode **RIMME** que hem presentat té més bons resultats. El mètode de regularització CLEAN a partir d'un conjunt de valors amb un mostreig irregular, tracta de reconstruir els valors que falten a partir de la transformada de Fourier i quedant-se només amb les components més energètiques, i això ho fa de manera iterativa minimitzant l'error produït en els valors que es coneixen.

L'avantatge addicional del mètode que presentem és que permet millorar els resultats obtinguts per altres mètodes d'interpolació. Per exemple, si fem servir el CLEAN com a mètode per a la primera interpolació ($\hat{\mathbf{s}}(0)$) de l'algorisme **RIMME**, el resultat que obtenim a la figura 4.6 té una millora qualitativa respecte la figura 4.2, que s'obtenia amb el **RIMME** a partir d'una primera interpolació lineal, tot i que les mesures quantitatives d'error no surten gaire diferents. Per tant, en una primera aproximació, es veu que la interpolació inicial es podria fer servir per a fixar les característiques esperades de la senyal interpolada, si són conegudes d'alguna manera. Per exemple

si es sap que volem reconstruir un senyal que té una banda freqüencial limitada, es podria aplicar un filtre amb la banda corresponent. Si en canvi es coneix que té components d'alta freqüència que segueixen la característica de la baixa freqüència, es pot aplicar una interpolació regularitzada com el mètode CLEAN.

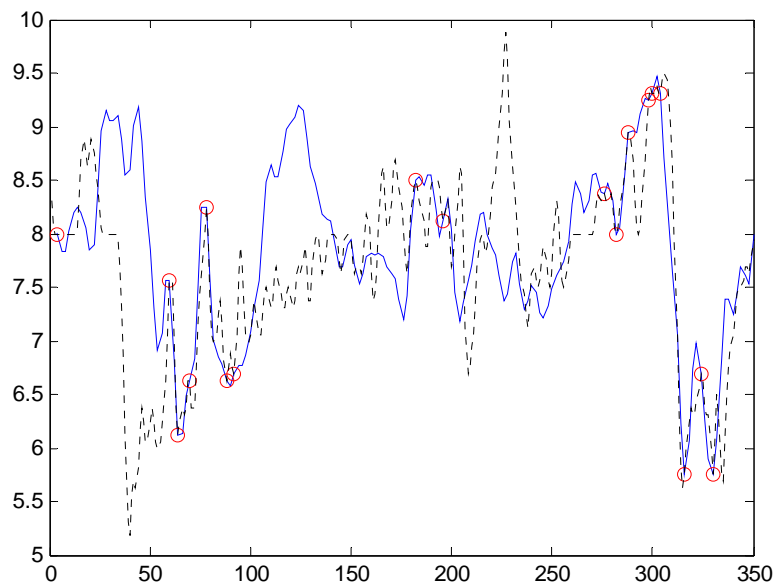


figura 4.5 Resultats reconstrucció CLEAN 1000 iteracions (línia contínua) respecte senyal original (puntejat) a partir de mostres esparses (cercles).

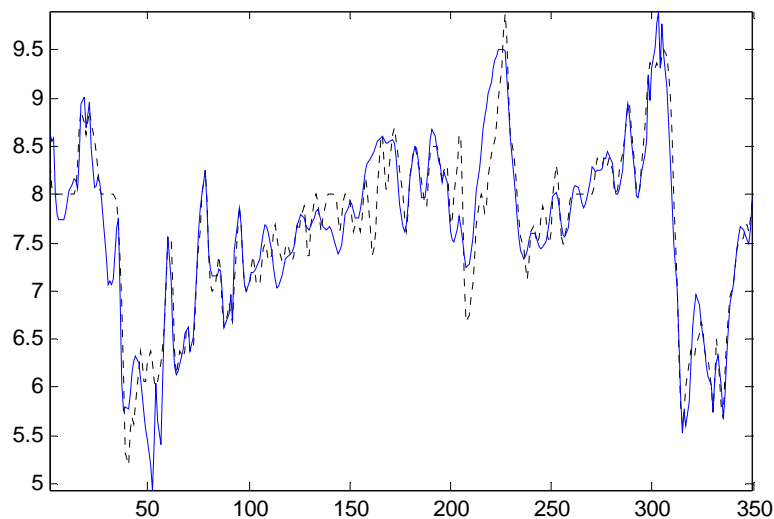


figura 4.6 Resultats de RIMME amb 15 iteracions (línia contínua) a partir del resultat de CLEAN a l'etapa inicial (mirar figura anterior), respecte senyal original (línia discontinua).

4.3 Extensió del mètode RIMME (camp de velocitats superficial)

Per fer l'extensió del mètode RIMME a un cas de senyals de més dimensions, el plantejarem sobre uns camps de velocitat superficials esparsos amb valors a múltiples escales. En aquest apartat donarem els punts bàsics per a fer l'extensió dels resultats de 4.2 per altres casos multidimensionals.

4.3.1 Bancs de filtres per l'anàlisi i síntesi multiresolució

En primer lloc podem representar un banc de filtres amb reconstrucció perfecte pel cas de senyals bidimensionals (figura 4.7). Els senyals \mathbf{X} són matrius de valors reals, amb dimensions $M \times N$. A continuació podem duplicar-lo per a definir el banc de filtres amb reconstrucció perfecte per a matrius de complexes - p.e. camp vectorial de velocitats en superfície ($M \times N$) - (figura 4.8). La matriu $\mathbf{F} = \mathbf{U} + j\mathbf{V}$, associada a un camp vectorial de velocitats en superfície, està formada per dues matrius bidimensionals de valors reals, \mathbf{U} i \mathbf{V} , associades a la component vertical i la component horitzontal del camp de velocitats superficial. Per a la descomposició diàdica s'itera l'arbre de descomposició sobre les successives components \mathbf{X}_{a_i} de cada nivell a l'etapa d'anàlisi, correspon a la sortida del filtre d'anàlisi LL (*Low-Low*) del nivell corresponent, filtre passa baixes tant en la component horitzontal com en la component vertical de la imatge.

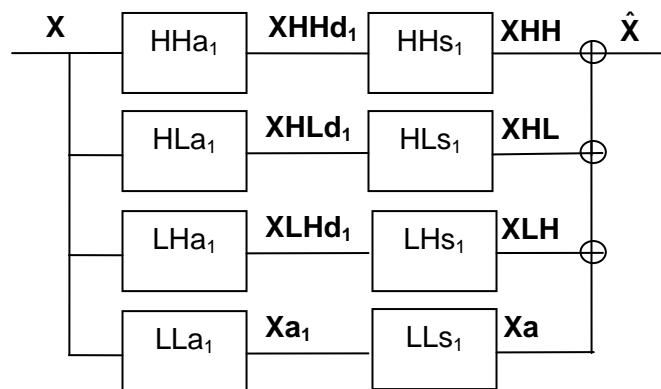


figura 4.7 Banc de filtres per a matrius de reals ($N \times M$), \mathbf{X} .

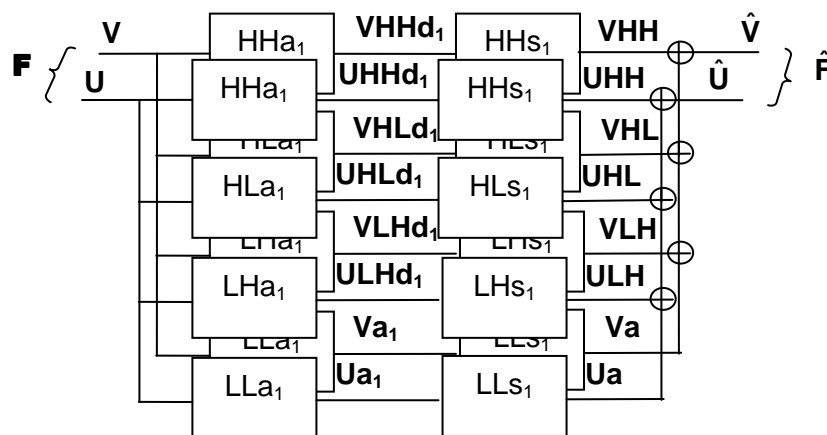


figura 4.8 Banc de filtres per a matrius de complexes ($N \times M$), $\mathbf{F} = \mathbf{U} + j\mathbf{V}$.

Finalment es pot obtenir una esquema d'anàlisi i síntesi multiresolució de manera paral·lela a com s'ha fet en el cas unidimensional. Els mòduls de les respostes freqüencials dels bancs de filtres per a reconstrucció perfecte en el nivell de descomposició zero, corresponen a les gràfiques de la figura 4.9.

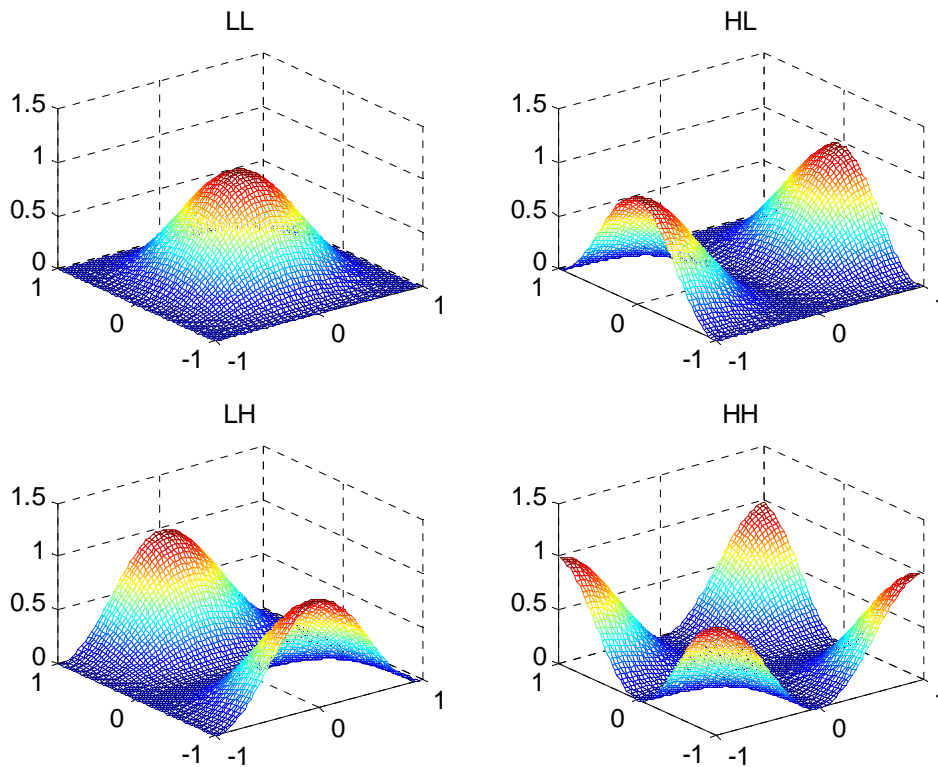


figura 4.9 Mòdul de les respostes freqüencials globals (anàlisi/síntesi conjunts) Low-Low, High-Low, Low-High & High-High.

4.3.2 Definicions de les matrius de treball

Generalitzem els vectors definits a 4.2.1 a matrius i matrius de valors complexes:

$$\mathbf{F}a_1 = \mathbf{U}a_1 + j \mathbf{V}a_1$$

$$\{\mathbf{U}a_1, \mathbf{V}a_1 \in \mathbb{R}^M \times \mathbb{R}^N\}; \{\mathbf{F}a_1 \in \mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^N\}$$

es pot fer de manera anàloga pels altres components de la descomposició de la figura 4.8, amb $M \times N$ igual a les dimensions de les matrius de treball bidimensionals.

Es poden generalitzar les matrius que es definien \mathbf{AHRWT}_L (53) i \mathbf{SHRIWT}_L (54), en matrius de matrius complexes, que pertanyen a un espai $\mathbb{C}^M \times \mathbb{C}^N \times \mathbb{N}^{L+2}$:

$$\mathbf{AHRWT}_L = [\mathbf{F} \mathbf{F}a_1 \mathbf{F}a_2 \dots \mathbf{F}a_L] \quad (68)$$

$$\mathbf{SHRIWT}_L = [\mathbf{F}m \mathbf{F}am_1 \mathbf{F}am_2 \dots \mathbf{F}am_L] \quad (69)$$

$$\mathbf{ISIWT}_L = \{\mathbf{M} \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \dots \mathbf{M}_L\} \quad (70)$$

4.3.3 Algorisme RIMME amb senyals bidimensionals complexes

Adaptem tot el sistema vist a 4.2 als senyals multidimensionals que hem definit, i volem que funcioni amb un ampli espectre de senyals a l'entrada.

Podem escriure l'algorisme per el cas de senyals bidimensionals complexes a partir del cas unidimensional com l'algorisme **RIMME** (Reconstrucció Iterativa a partir d'un Model i de dades Multiescalars i Esparses):

- . $k=0$
 - . $\hat{\mathbf{F}}(k)=\text{interp}(\mathbf{F}_m)$
 - . **mentre** $RMSE_1(i) \geq \text{llindar}$
 - . $\hat{\mathbf{F}}\mathbf{a}_1(k) = \hat{\mathbf{F}}(k) * \text{lla}_1$
 - . $\mathbf{Eam}_1(k) = \begin{cases} \{\mathbf{Fam}_1\}_{mn} - \{\hat{\mathbf{F}}\mathbf{a}_1(k)\}_{mn} & mn \in \mathbf{M}_1 \\ 0 & mn \notin \mathbf{M}_1 \end{cases}$
 - . $\hat{\mathbf{E}}\mathbf{a}_1(k) = \text{interp}(\mathbf{Eam}_1(k))$
 - . $\{\hat{\mathbf{F}}(k+1)\}_{mn} \approx \{\hat{\mathbf{F}}(k)\}_{mn} + \{\{\hat{\mathbf{E}}\mathbf{a}_1(k)\} * \text{lls}_1\}_{mn} \quad mn \in \mathbf{M}$
 - . $RMSE_1(k) = \sqrt{\frac{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^M (\{\mathbf{Fam}_1\}_{mn} - \{\hat{\mathbf{F}}\mathbf{a}_1(k)\}_{mn})^2}{M}}$
 - . $k=k+1$
- (amb M nombre de punts amb valor diferent de zero de \mathbf{Fam}_1 , que també és el nombre de punts de \mathbf{M}_1)

4.3.4 Exemples i resultats

A partir d'un conjunt de valors d'un camp de velocitats superficial que es pren com a exemple, descrit a 2.5.2, a continuació n'hem pres mostres esparses a diferents escales, i finalment els podem aplicar com entrades de l'algorisme obtingut i reconstruir el camp inicial. A l'hora de visualitzar el camp ho representarem amb una imatge per cada component per separat en una petita àrea, i també es representaran els detalls del vectors del camp superficial. De la figura 4.10 a la figura 4.14 es representen les matrius que formen **AHRWT** (68), cada figura es correspon a un nivell a l'arbre de descomposició.

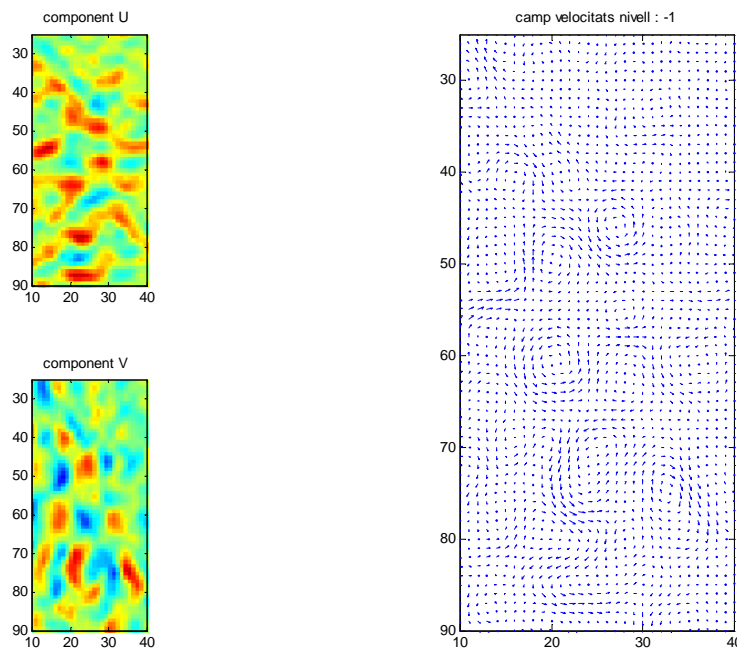


figura 4.10 Camp de velocitats nivell 0 (original) i les components. $\mathbf{F}=\mathbf{U}+\mathbf{j} \mathbf{V}$.

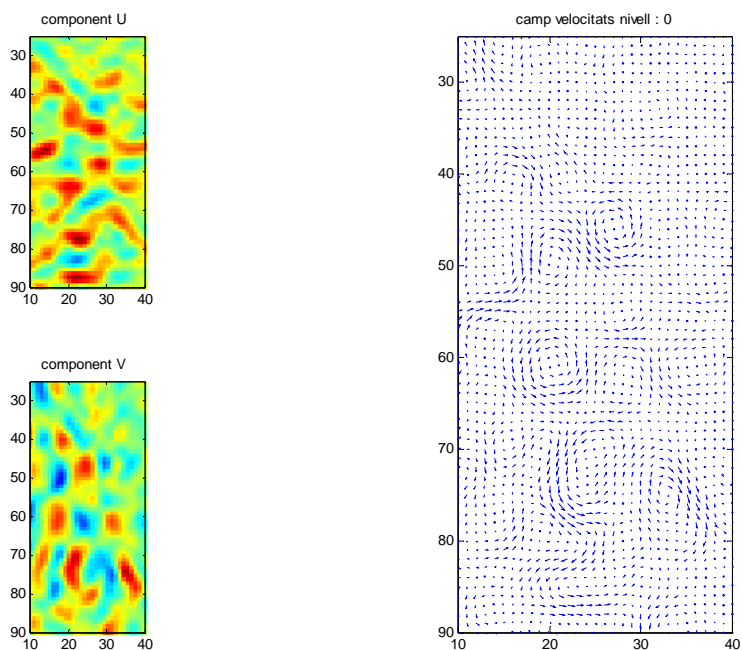


figura 4.11 Camp de velocitats nivell 1 i les components. $\mathbf{Fa}_1 = \mathbf{Ua}_1 + \mathbf{j Va}_1$.

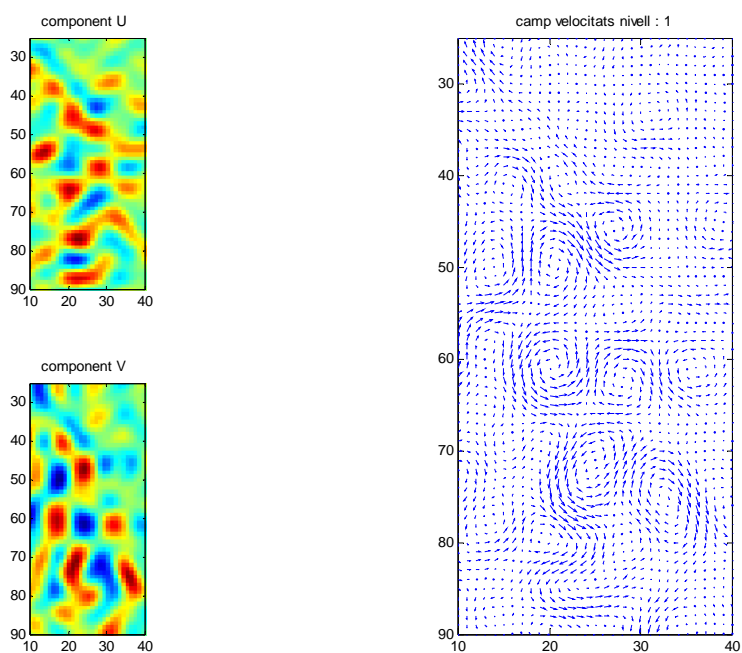


figura 4.12 Camp de velocitats nivell 2 i les components. $\mathbf{Fa}_2 = \mathbf{Ua}_2 + \mathbf{j Va}_2$.

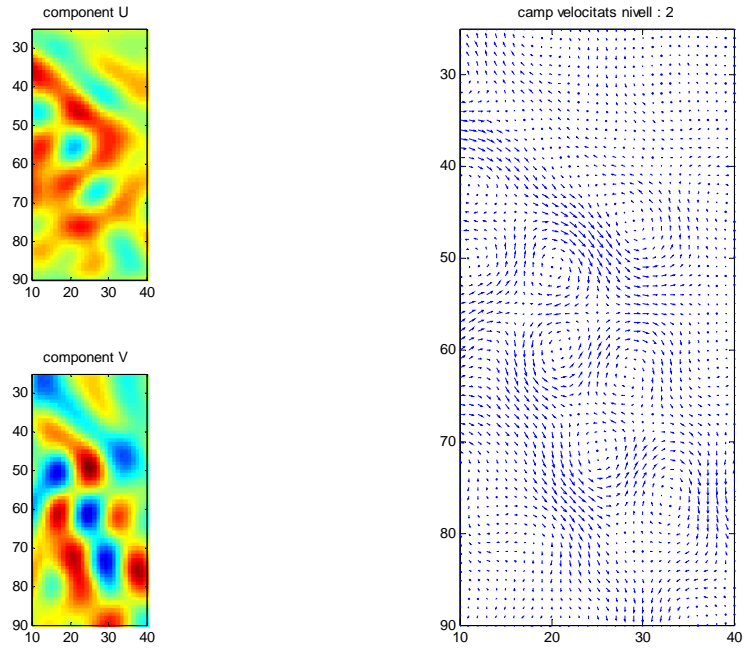


figura 4.13 Camp de velocitats nivell 3 i les components. $\mathbf{F}_3 = \mathbf{U}_3 + j \mathbf{V}_3$.

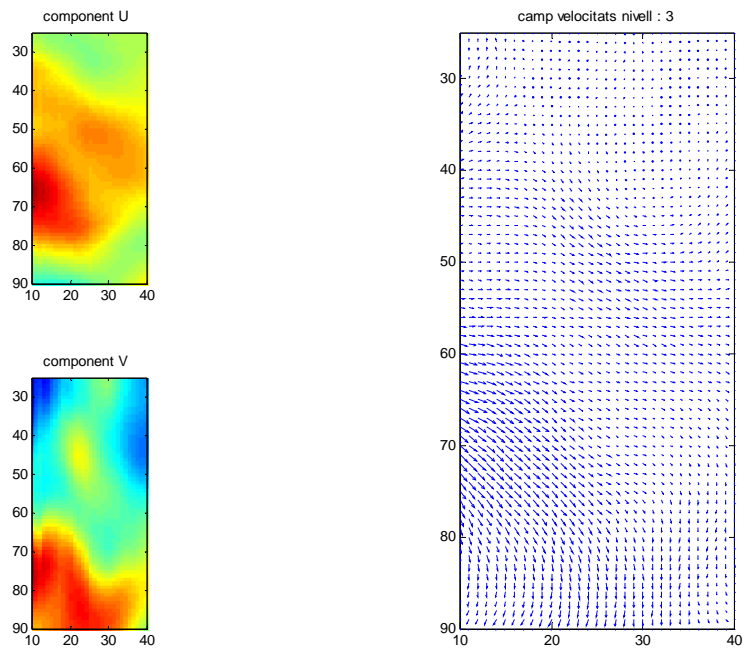


figura 4.14 Camp de velocitats nivell 4 i les components. $\mathbf{F}_4 = \mathbf{U}_4 + j \mathbf{V}_4$.

Si ara representem unes mostres esparses d'aquestes matrius, on només alguns punts són diferents de zero, es troben a \mathbf{SHRIWT}_L (69), a cada figura es representa un pla, que correspon a un nivell dins l'arbre d'anàlisi. De la figura 4.15 a la figura 4.19. Les mostres esparses es prenen arbitràriament entre valors que són extrems en el seu entorn local, per tal que siguin representatius del senyal que representen.

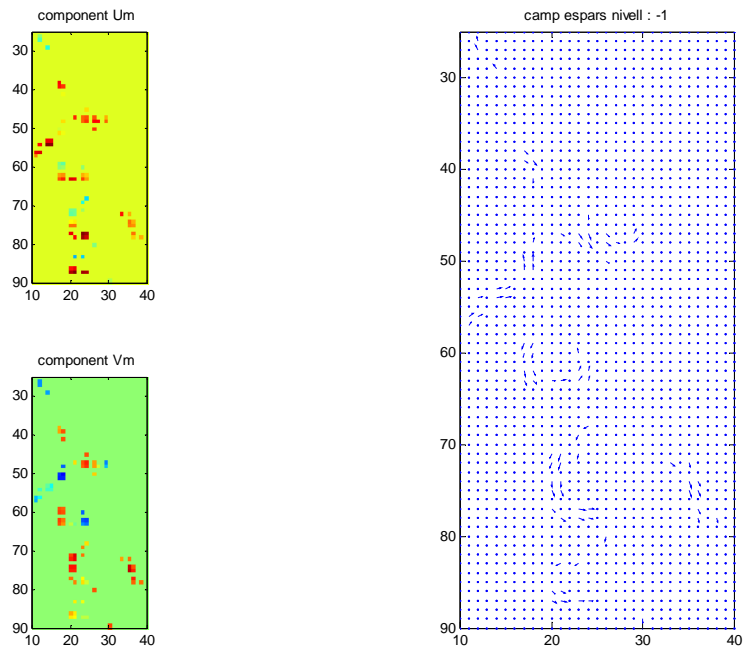


figura 4.15 Camp espars de velocitats nivell 0 i les components. $\mathbf{Fm}=\mathbf{Um}+j \mathbf{Vm}$.

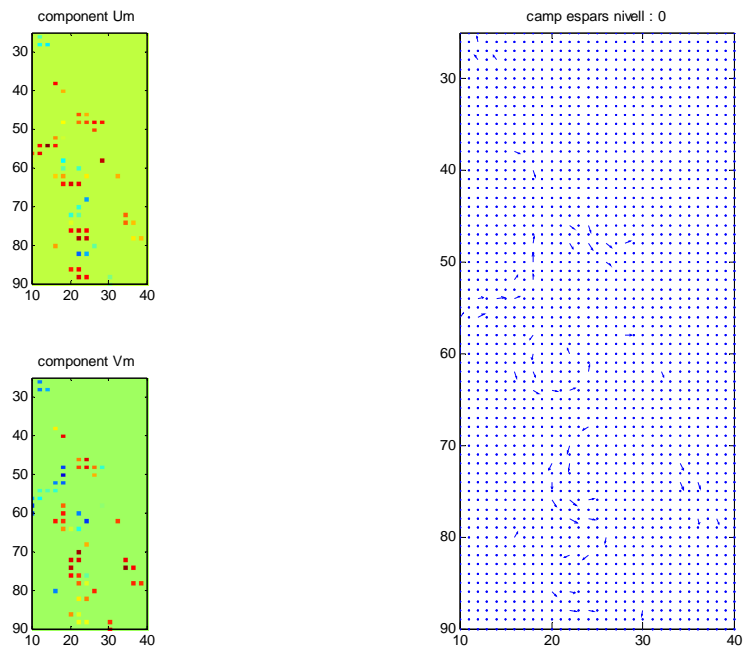


figura 4.16 Camp espars a nivell 1 i les components. $\mathbf{Fam}_1=\mathbf{Uam}_1+j \mathbf{Vam}_1$.

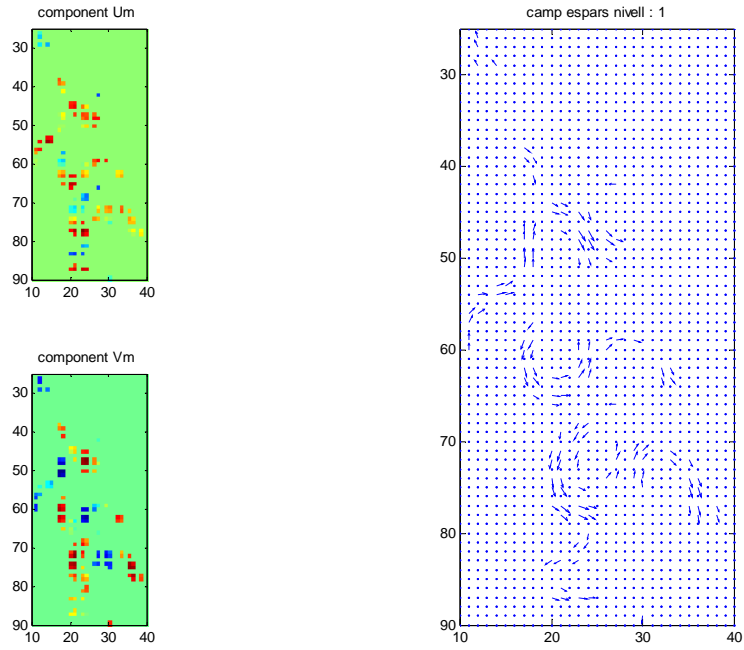


figura 4.17 Camp espars nivell 2 i les components. $\mathbf{Fam}_2 = \mathbf{Uam}_2 + j \mathbf{Vam}_2$.

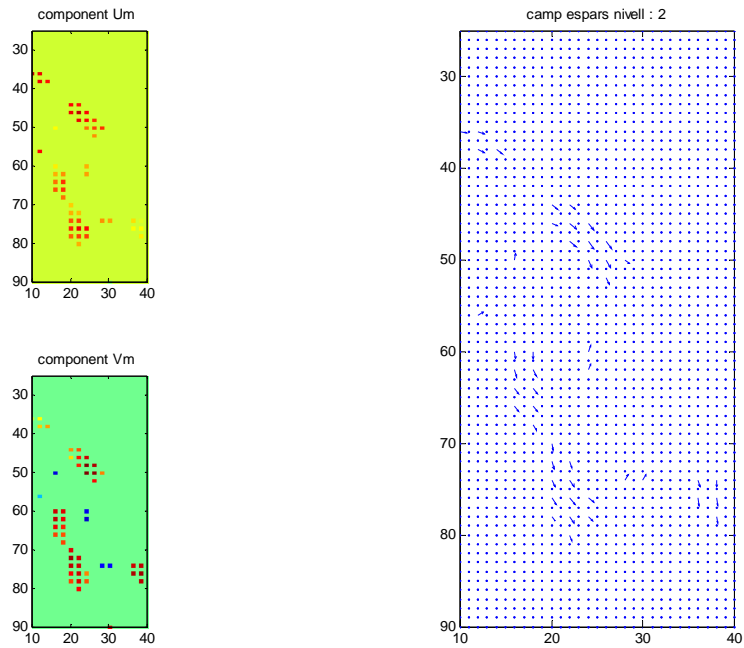


figura 4.18 Camp espars a nivell 3 i les components. $\mathbf{Fam}_3 = \mathbf{Uam}_3 + j \mathbf{Vam}_3$.

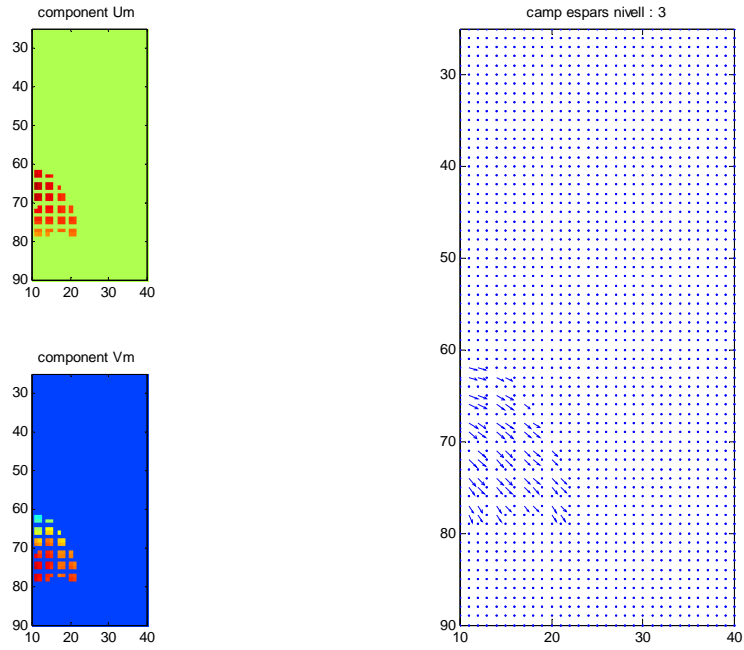


figura 4.19 Camp espars nivell 4 i les components. $\mathbf{Fam}_4 = \mathbf{Uam}_4 + j \mathbf{Vam}_4$.

Si ara apliquem aquests valors \mathbf{SHRIWT}_L a l'algorisme d'interpolació **RIMME** de l'apartat 4.3.3, que és una versió multidimensional de l'esquema de la figura 4.3. Els resultats obtinguts estan representats de la figura 4.20 a la figura 4.24.

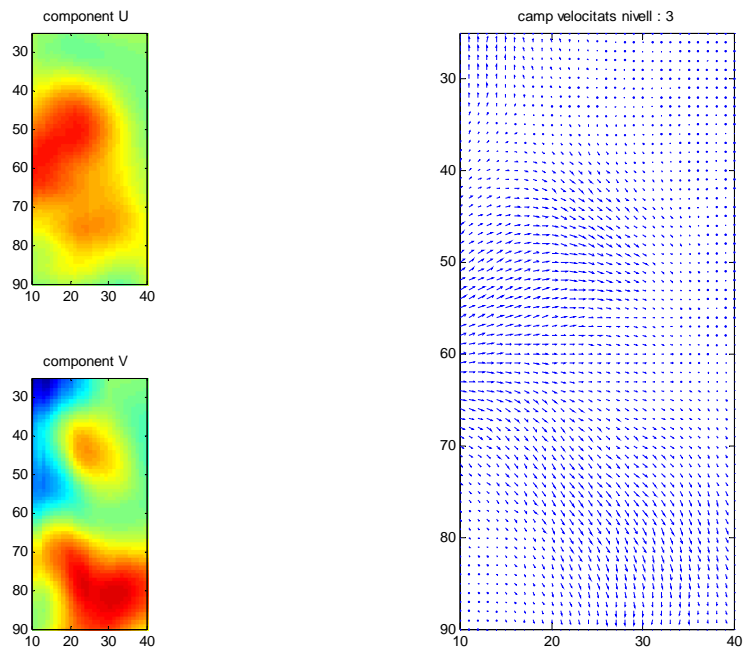


figura 4.20 Camp interpolat nivell 4 i les components. $\hat{\mathbf{F}}a_4 = \hat{\mathbf{U}}a_4 + j\hat{\mathbf{V}}a_4$.

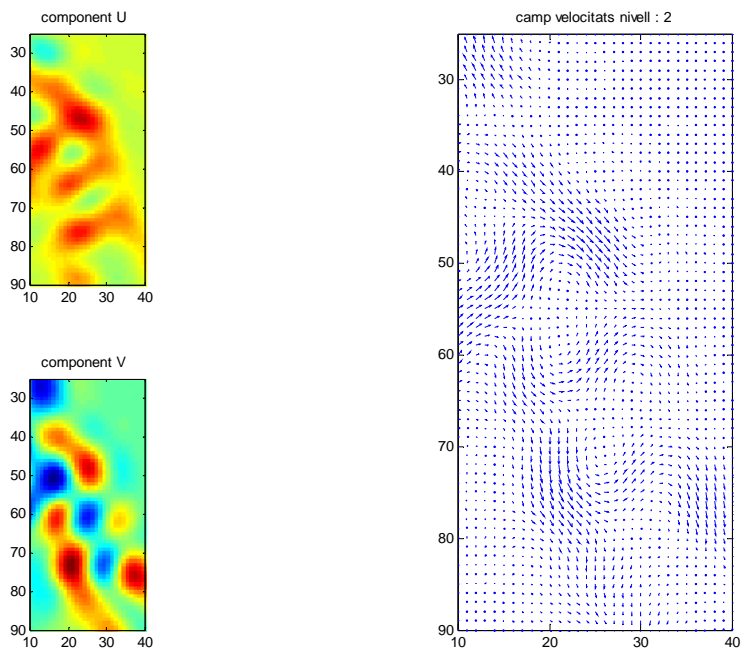


figura 4.21 Camp interpolat nivell 3 i les components. $\hat{\mathbf{F}}\mathbf{a}_3 = \hat{\mathbf{U}}\mathbf{a}_3 + \mathbf{j}\hat{\mathbf{V}}\mathbf{a}_3$.

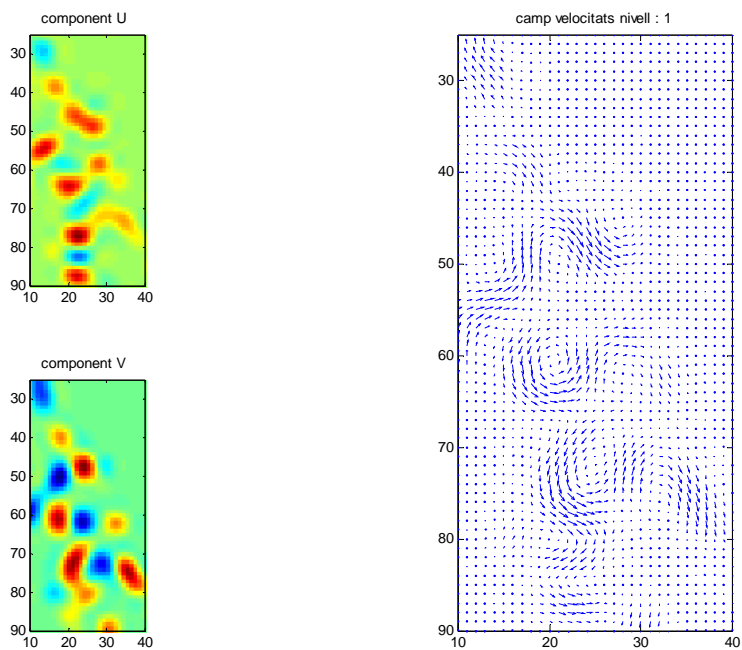


figura 4.22 Camp interpolat nivell 2 i les components. $\hat{\mathbf{F}}\mathbf{a}_2 = \hat{\mathbf{U}}\mathbf{a}_2 + \mathbf{j}\hat{\mathbf{V}}\mathbf{a}_2$.

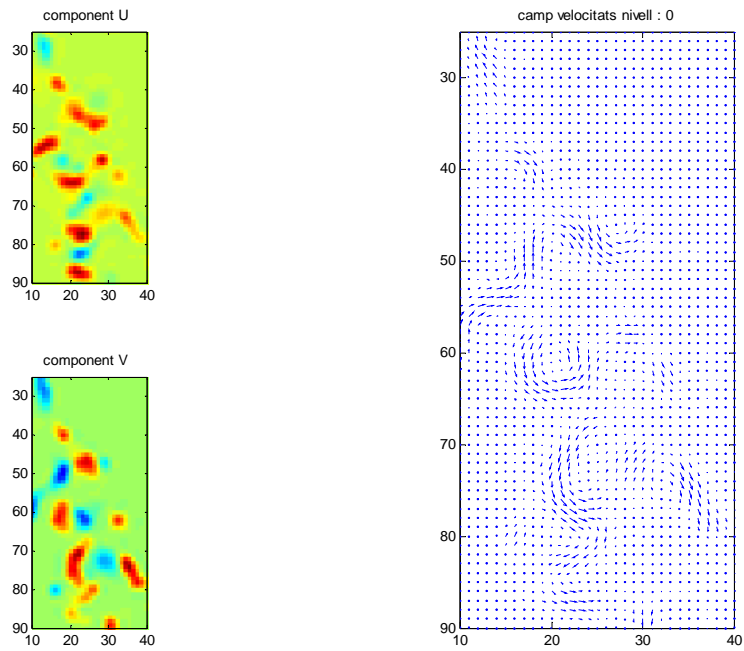


figura 4.23 Camp interpolat nivell 1 i les components. $\hat{\mathbf{F}}_1 = \hat{\mathbf{U}}_1 + \hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{V}}_1$.

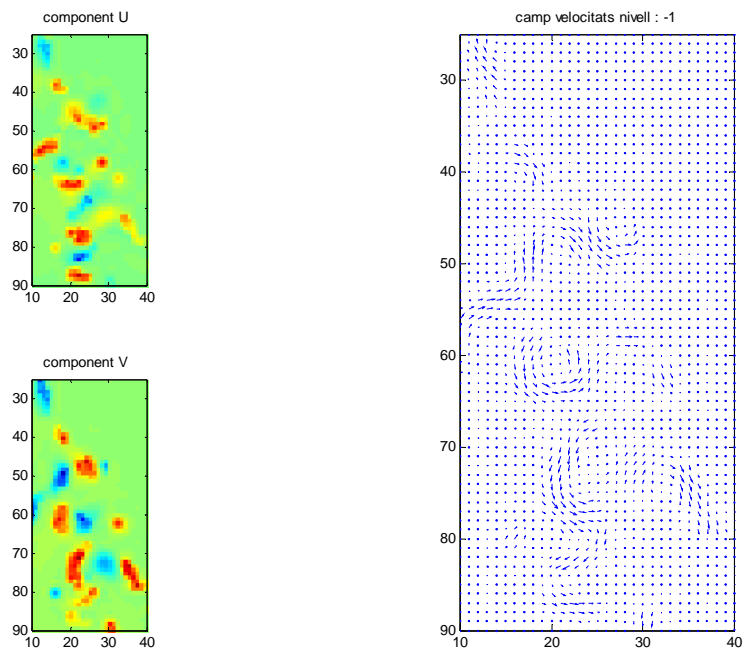


figura 4.24 Camp interpolat nivell 0 i les components. $\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{U}} + \hat{\mathbf{j}}\hat{\mathbf{V}}$.

Si es fa una valoració qualitativa dels resultats, veiem que a partir de mostres esparses a diferents escales, hem aconseguit uns resultats d'interpolació multiescalar molt interessants, amb un sistema directe que té uns costos computacionals molt continguts. Si es vol fer una valoració més quantitativa per a mesurar la bondat del

systema, es pot fer a través de la mesura de PSNR (*Peak to Signal Noise Ratio*), definit a partir dels components MSE (*Mean Square Error*),

$$MSE(\mathbf{U}_m, \mathbf{U}) = \frac{\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M (\{\mathbf{U}_m\}_{i,j} - \{\mathbf{U}\}_{i,j})^2}{M \cdot N} \quad (71)$$

$$MSE(\mathbf{F}_m, \mathbf{F}) = MSE(\mathbf{U}_m, \mathbf{U}) + MSE(\mathbf{V}_m, \mathbf{V}) \quad (72)$$

$$MSE(\hat{\mathbf{F}}, \mathbf{F}) = MSE(\hat{\mathbf{U}}, \mathbf{U}) + MSE(\hat{\mathbf{V}}, \mathbf{V}) \quad (73)$$

$$PSNR(\mathbf{F}_m, \mathbf{F}) = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\max(|\mathbf{F}|)}{\sqrt{MSE(\mathbf{F}_m, \mathbf{F})}} \right) \quad (74)$$

$$PSNR(\hat{\mathbf{F}}, \mathbf{F}) = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\max(|\mathbf{F}|)}{\sqrt{MSE(\hat{\mathbf{F}}, \mathbf{F})}} \right) \quad (75)$$

$$Gain = PSNR(\hat{\mathbf{F}}, \mathbf{F}) - PSNR(\mathbf{F}_m, \mathbf{F}) \quad (76)$$

Primer calcularem el PSNR dels valors esparsos respecte els corresponents camps originals a cada un dels nivells i després farem el càlcul del PSNR dels valors interpolats respecte els corresponents camps originals en els diferents nivells. El càlcul PSNR (74), (75) i (77) entre dos camps vectorials, ho definim a partir dels corresponents MSE (*Mean square Error*) que es calculen de (71) a (73). També es poden calcular els corresponents valors EVM (*Error Vector Magnitude*),

$$EVM(\hat{\mathbf{F}}, \mathbf{F}) = 20 \cdot \log_{10} \left(\frac{\sqrt{MSE(\hat{\mathbf{F}}, \mathbf{F})}}{\max(|\mathbf{F}|)} \right) \quad (77)$$

Taula 4-1: PSNR dels camps de velocitat superficials de l'exemple en els diferents nivells multiresolució.

Taula PSNR dels camps de velocitat superficials a múltiples nivells					
nivells	n. espars	PSNR(\mathbf{F}_m, \mathbf{F}) (dB)	PSNR($\mathbf{F}(\mathbf{0}), \mathbf{F}$) (dB)	PSNR($\hat{\mathbf{F}}, \mathbf{F}$) (dB)	Gain
0	2.14 %	15.76	16.63	17.62	1.86
1	1.25 %	14.11		16.54	2.43
2	2.15 %	11.87		14.67	2.80
3	1.25 %	11.72		14.78	3.06
4	2.14 %	9.16		12.48	3.32

Taula 4-2: EVM (*Error Vector Magnitude*) dels camps de velocitat superficials de l'exemple en els diferents nivells multiresolució.

Taula EVM dels camps de velocitat superficials a múltiples nivells					
nivells	n. espars	EVM(\mathbf{F}_m, \mathbf{F}) (dB)	EVM($\mathbf{F}(\mathbf{0}), \mathbf{F}$) (dB)	EVM($\hat{\mathbf{F}}, \mathbf{F}$) (dB)	Gain
0	2.14 %	-15.76		-17.62	-1.86
1	1.25 %	-14.11		-16.54	-2.43
2	2.15 %	-11.87		-14.67	-2.80
3	1.25 %	-11.72		-14.78	-3.06
4	2.14 %	-9.16		-12.49	-3.32

Per aquest cas, el percentatge de punts esparsos que es tenen en consideració a cada nivell és molt petit ($< 2.2\%$) tal com es pot apreciar a la taula resum de resultats, si calculem el valor de PSNR inicialment respecte les mostres esparses (74) i ho fem a cada escala, i comparem el valor de PSNR de la primera interpolació respecte el camp original (77) ens dóna un guany de 1dB, i si comparem amb la interpolació resultat després d'aplicar el sistema **RIMME**, ens trobem que es guanya 1dB més, el guany total respecte els valors esparsos originals (76) arriba pràcticament a 2 dB. El guany encara és millor a escales de menys detall, fet que es corrobora amb la millora qualitativa de la interpolació que es pot apreciar a simple vista a les figures precedents. Cal recordar però que la variabilitat dels resultats és molt alta, dependent del nombre de mostres esparses a cada escala i de la distribució i representativitat d'aquestes mostres a les diferents escales, tot i que sempre hi ha un guany en el grau d'aproximació de les dades estimades al senyal original respecte el cas de les dades esparses o de la primera interpolació; també és normalment cert que a escales de menys definició els resultats són millors, és més fàcil agregar la informació d'escales de més definició cap a menys que no al revés; en altres proves hem comprovat que moltes vegades el guany és gairebé zero, sobretot si les dades esparses a escales de menys resolució no aporten informació nova al senyal que es reconstrueix.

4.3.5 Conclusions

En aquest capítol s'ha donat una variant i una explicació a un mètode d'aproximació de senyals a partir de valors esparsos multiescalars en el domini de les transformades *wavelet* i a continuació s'ha desenvolupat un mètode d'interpolació de dades esparses multiescalars en el domini del senyal que hem anomenat **RIMME**, s'ha justificat el seu desenvolupament detallat pel cas de senyals unidimensionals i s'ha fet la seva extensió al cas multidimensional, per tots els casos s'han obtingut unes mesures quantitatives de la qualitat dels resultats. Per cada mètode també s'han fet valoracions dels resultats. Com a conclusió final podem dir que el mètode **RIMME** és una aportació inèdita a la interpolació i la reconstrucció de dades a partir de valors esparsos a diferents escales i d'un model per a l'anàlisi i síntesi multiresolució dels senyals. I per tant que és un mètode que permet fer una aproximació intuïtiva a la fusió de dades de diferents escales molt directament. També cal apuntar que els resultats preliminars obtinguts fan pensar en la possibilitat d'adaptar aquest model de reconstrucció a diferents casos reals en els que es tenen conjunts de senyals multiescalars esparsos, per a poder fer la reconstrucció dels senyals a diferents escales de manera conjunta.

En aquests casos aplicats amb dades reals caldria fer en primer lloc una caracterització el més acurada possible del model d'anàlisi i síntesi multiresolució que està adaptat al tipus de dades esparses multiresolució que es vulguin interpolar. Un cop aproximat aquest model s'introdueix en forma de paràmetres al sistema **RIMME** caracteritzant els filtres d'anàlisi i síntesi. A continuació les dades esparses multiresolució s'introdueixen al sistema **RIMME** ja caracteritzat. Es deixa iterar i es fixen les acotacions dels errors permesos i/o el nombre d'iteracions màximes. Un cop acabades les iteracions es disposa d'un conjunt de dades interpolades en les diferents resolucions però fet de tal manera que durant el procés d'interpolació s'han tingut en compte les aportacions de les dades esparses a totes les escales.

Capítol 5. Fusió de dades multiresolució

Per a avaluar els mètodes presentats aplicarem el mètode **RIMME** sobre uns valors esparsos a 3 escales diàdiques d'un camp de velocitats superficial. Suposarem que es disposa de camps de velocitat a escales diàdiques amb 256x256 píxels, 128x128 o 64x64 píxels, on s'ha aplicat submostreig. Es parteix d'uns camps superficials de velocitat obtinguts a partir d'una simulació on una sèrie de vòrtex interaccionen. Els resultats pertanyen a tres resolucions diferents. Les dades les hem descrit a l'apartat 2.5.2. Disposem, per tant, d'un camp de velocitats superficial amb les seves dues components. Si es manté la notació del capítol anterior, es correspondria al camp inicial amb la resolució màxima $\mathbf{F}=\mathbf{U}+\mathbf{j V}$.

Els tres camps de velocitat complerts de la simulació estan representats de la figura 5.1 a la figura 5.6. A cada resolució tenim la meitat menys d'elements en cada dimensió que la escala diàdica anterior. En primer lloc ens cal prendre unes mostres esparses arbitràries a cada escala per a tenir els valors d'entrada al nostre sistema de reconstrucció i interpolació **RIMME**. Triem un conjunt arbitrari de valors extrems dins l'entorn local de les mostres, de manera que sigui en certa manera representatiu de les dades properes que no han estat triades. A la part final, un cop acabada la reconstrucció, per a poder mesurar quantitativament el grau de guany que pot comportar el mètode **RIMME**, es faran servir les mesures definides al capítol anterior ((71)- (76)).

De la figura 5.7 a la figura 5.12 es representen les matrius esparses que formen **AHRWT** (68), cada parell de figures es correspon a un nivell a l'arbre de descomposició diàdic. Per adaptar aquestes dades al tipus d'entrada de l'algorisme s'ha efectuat una interpolació per repetició per tal que totes les dades a diferents escales tinguin el mateix nombre de punts. La representació del camp de velocitat les hem posat de manera que siguin visibles els vectors i a la vegada representin diferents densitats de valors originals.

Cal remarcar en aquest punt que en aquest cas es parteixen de tres camps de velocitat originals a diferents resolucions, que no es deriven un de l'altre directament sinó que són la sortida d'un sistema que modela uns fluxos de corrents superficials a diferents resolucions. Aquest aspecte afecta la qualitat del resultat, ja que com s'ha exposat des d'un començament, per tal que el mètode **RIMME** doni el seu màxim rendiment cal conèixer dades esparses a diferents resolucions diàdiques (que nosaltres sí que tindrem en aquest experiment) i un model d'anàlisi i síntesi multiresolució per a poder derivar les dades de menys resolució a partir de les de més resolució i poder desfer el camí (d'aquesta part no en tenim cap referència en aquest conjunt de dades actual). La decisió que s'ha pres és: suposar que el model estàndard que s'ha utilitzat al capítol anterior és el propi d'aquest conjunt de dades. Al final del capítol parlarem més extensament d'aquesta particularitat a partir dels resultats obtinguts, però podem avançar que a la vegada ens ha servit per provar si el sistema és molt sensible al model exacte d'anàlisi i síntesi.

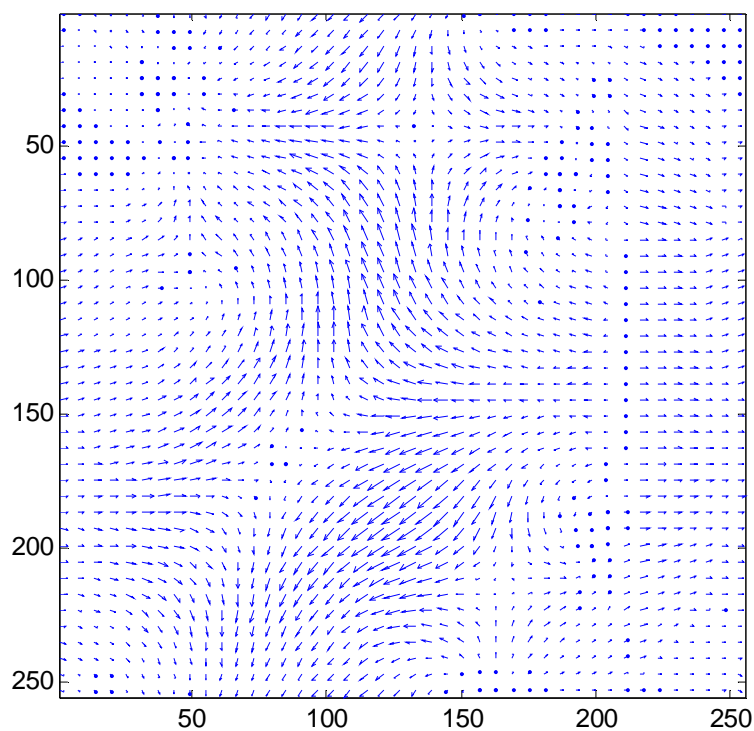


figura 5.1 Camp de velocitats nivell 0 (original), $\mathbf{F}=\mathbf{U}+\mathbf{j V}$.

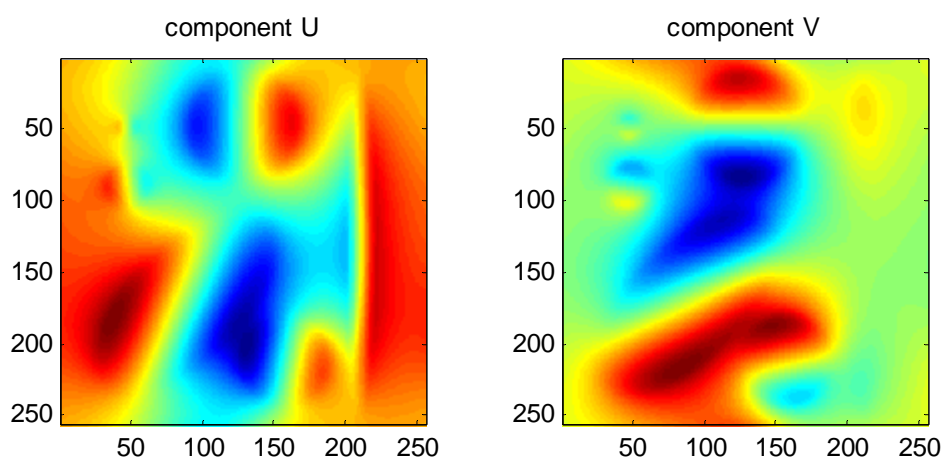


figura 5.2 Components del camp de velocitats nivell 0 (original), $\mathbf{F}=\mathbf{U}+\mathbf{j V}$.

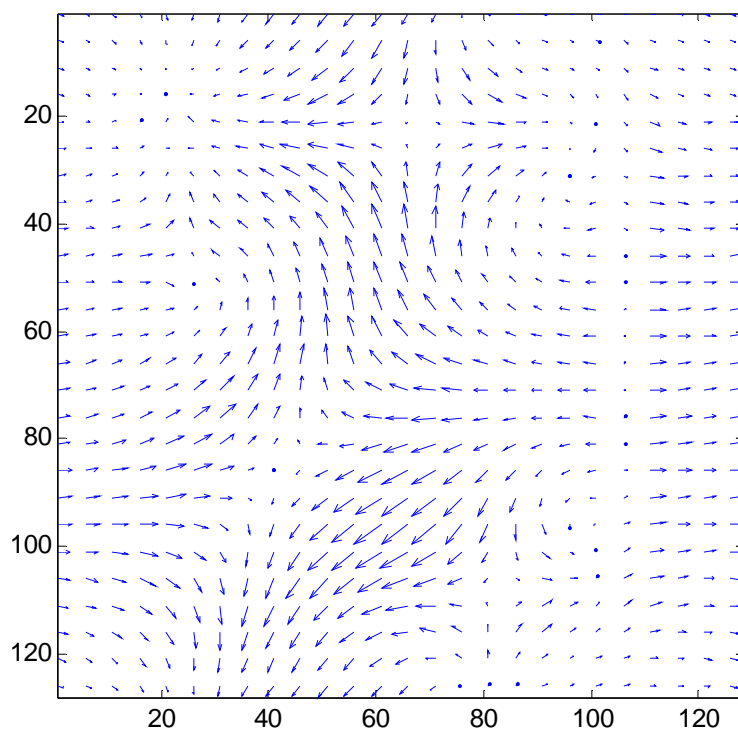


figura 5.3 Camp de velocitats nivell 1, $\mathbf{F}_1 = U\mathbf{a}_1 + j V\mathbf{a}_1$.

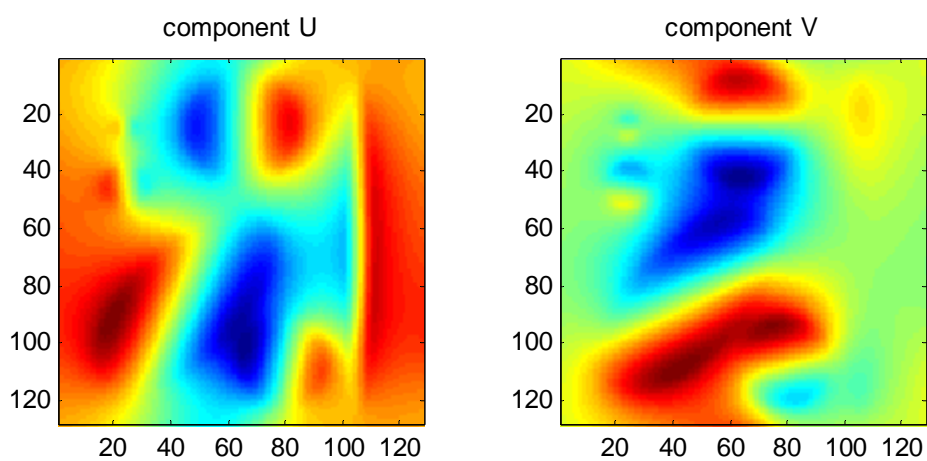


figura 5.4 Components del camp de velocitats nivell 1, $\mathbf{F}_1 = U\mathbf{a}_1 + j V\mathbf{a}_1$.

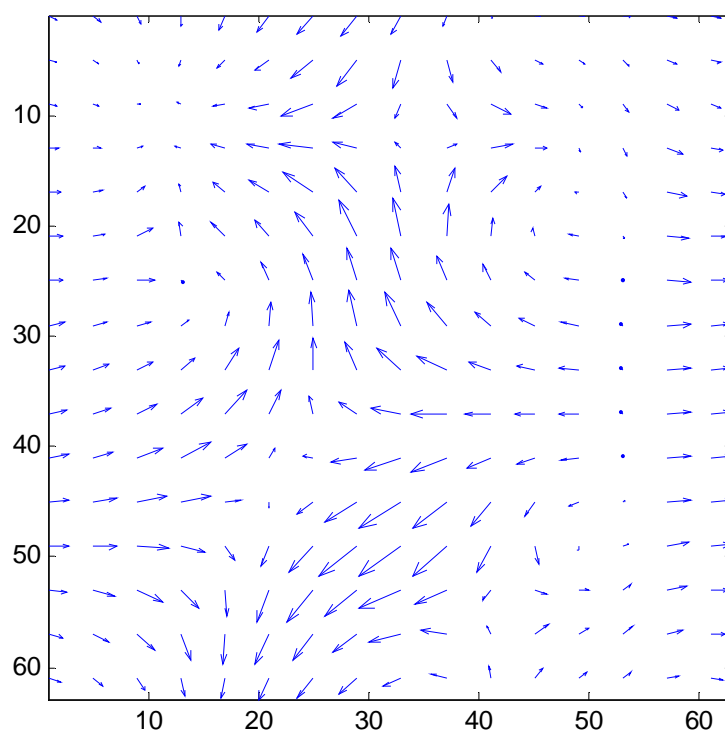


figura 5.5 Camp de velocitats nivell 2, $\mathbf{F}\mathbf{a}_2 = \mathbf{U}\mathbf{a}_2 + j \mathbf{V}\mathbf{a}_2$.

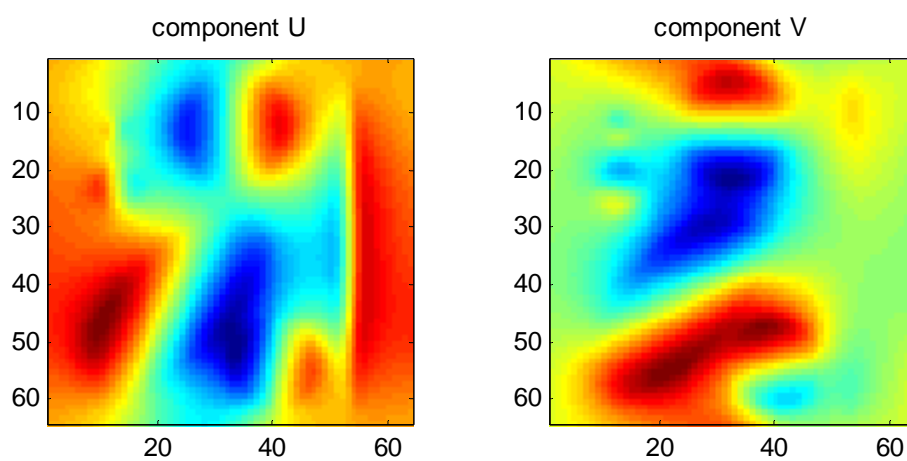


figura 5.6 Components del camp de velocitats nivell 2, $\mathbf{F}\mathbf{a}_2 = \mathbf{U}\mathbf{a}_2 + j \mathbf{V}\mathbf{a}_2$.

Si ara representem unes mostres esparses d'aquestes matrius, on només alguns punts són diferents de zero, es troben a \mathbf{SHRIWT}_L (69), a cada figura es representa un pla, que correspon a un nivell dins l'arbre d'anàlisi.

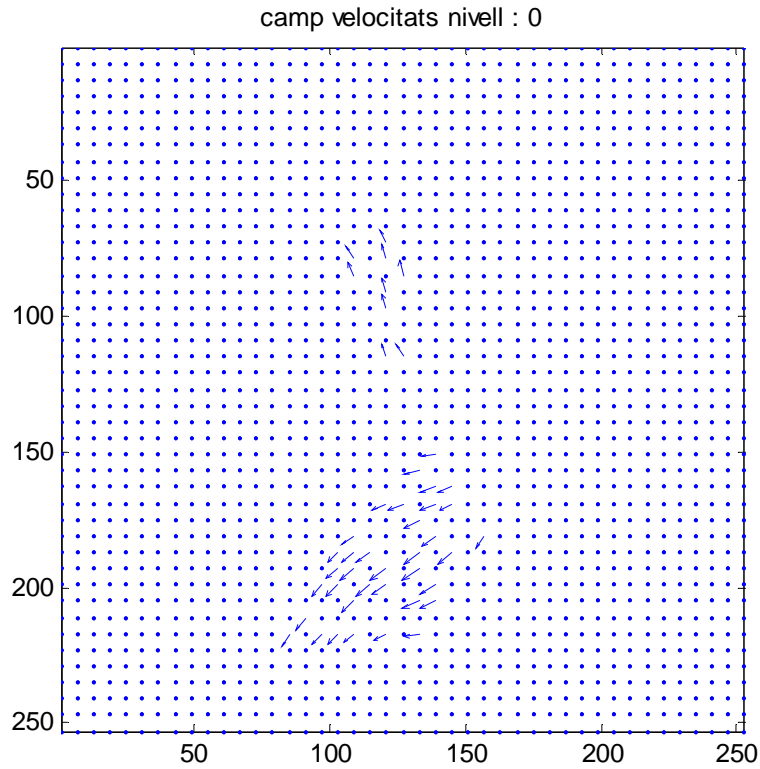


figura 5.7 Camp espars de velocitats a nivell 0 $\mathbf{Fm}=\mathbf{Um}+\mathbf{jVm}$.

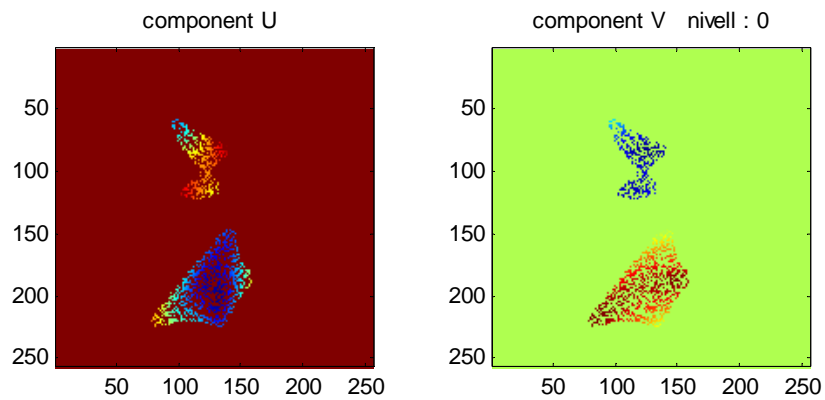


figura 5.8 Components del camp espars de velocitats a nivell 0 $\mathbf{Fm}=\mathbf{Um}+\mathbf{jVm}$.

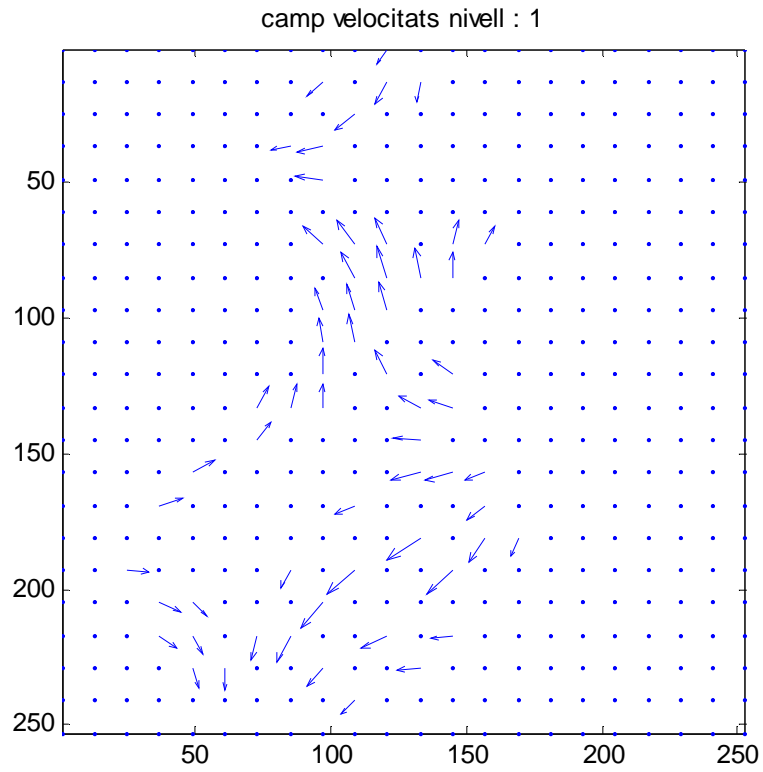


figura 5.9 Camp espars a nivell 1. $Fam_1 = Uam_1 + j Vam_1$.

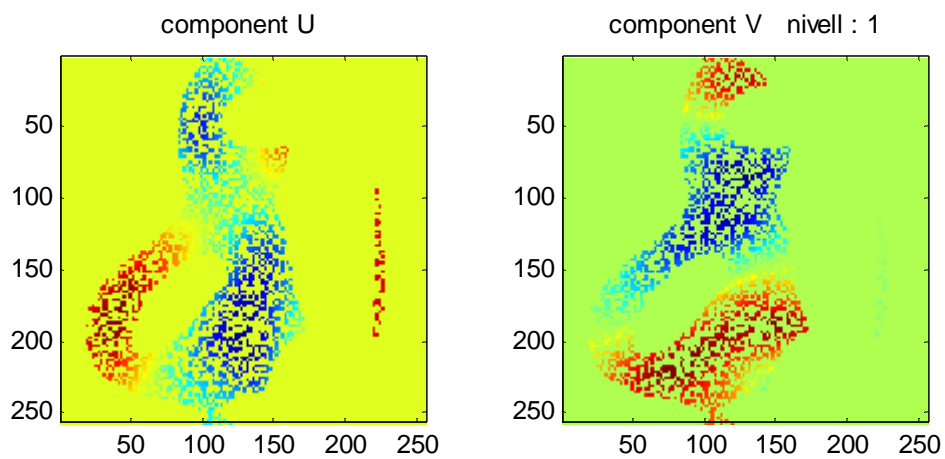


figura 5.10 Components del camp espars a nivell 1. $Fam_1 = Uam_1 + j Vam_1$.

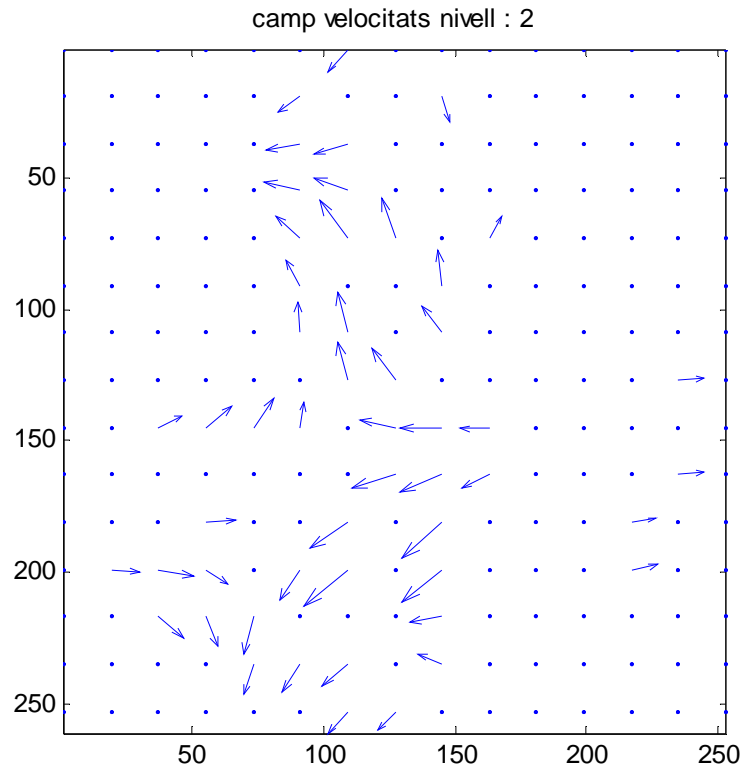


figura 5.11 Camp espars a nivell 2. $Fam_2=Uam_2+j Vam_2$.

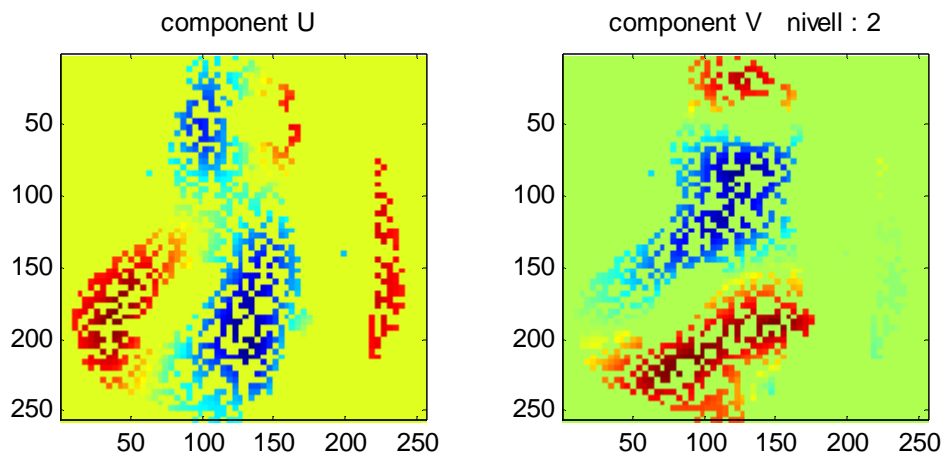


figura 5.12 Components del camp espars a nivell 2. $Fam_2=Uam_2+j Vam_2$.

Si ara apliquem aquests valors $\hat{\mathbf{SHRIWT}}_L$ a l'algorisme d'interpolació **RIMME** de l'apartat 4.3.3, que és una versió multidimensional de l'esquema de la figura 4.3. Els resultats obtinguts estan representats de la figura 5.13 a la figura 5.18.

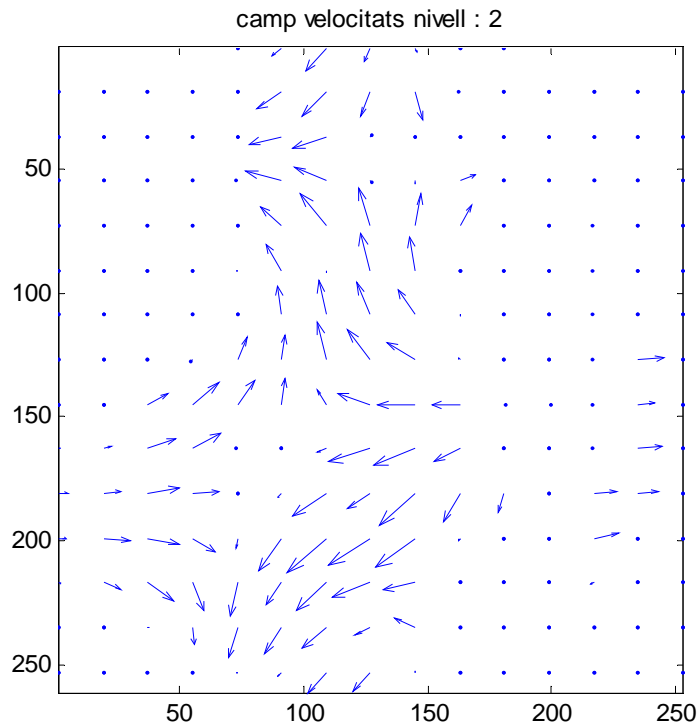


figura 5.13 Camp interpolat a nivell 2 . $\hat{\mathbf{F}}\mathbf{a}_2 = \hat{\mathbf{U}}\mathbf{a}_2 + \hat{\mathbf{j}}\mathbf{V}\mathbf{a}_2$.

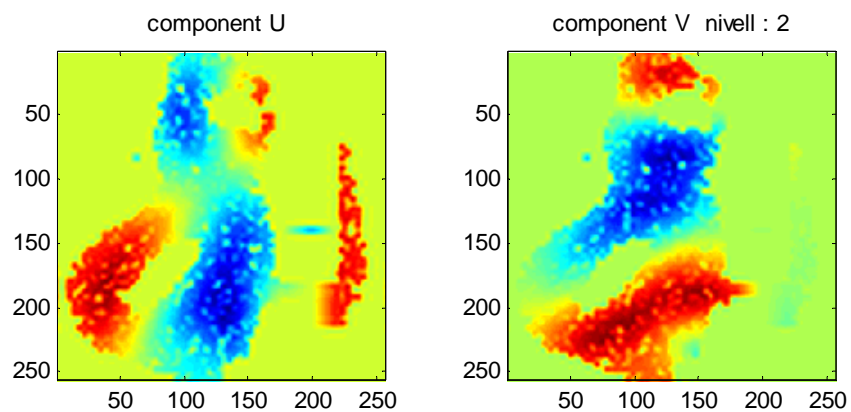


figura 5.14 Components del camp interpolat a nivell 2 . $\hat{\mathbf{F}}\mathbf{a}_2 = \hat{\mathbf{U}}\mathbf{a}_2 + \hat{\mathbf{j}}\mathbf{V}\mathbf{a}_2$.

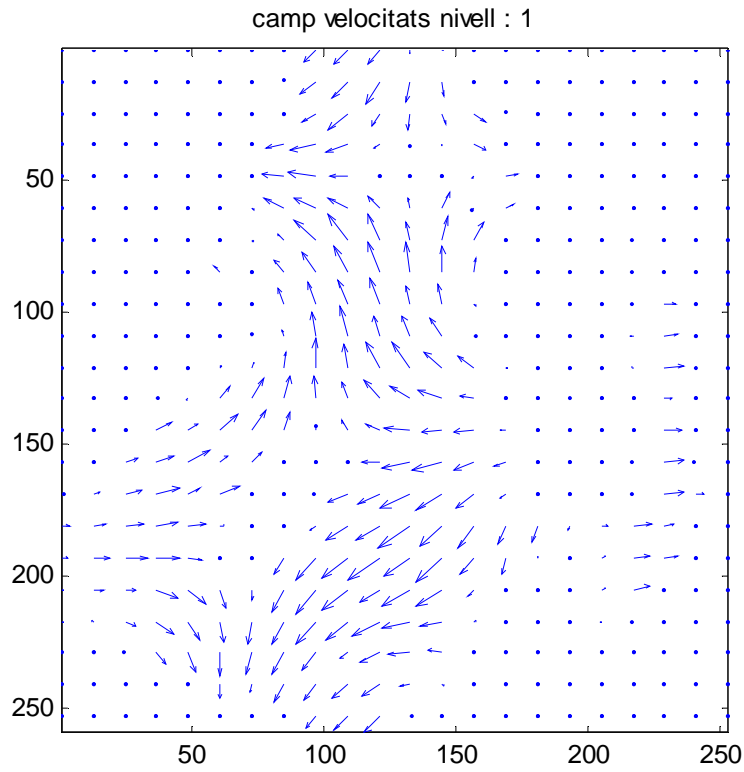


figura 5.15 Camp interpolat a nivell 1. $\hat{\mathbf{F}}\mathbf{a}_1 = \hat{\mathbf{U}}\mathbf{a}_1 + \mathbf{j}\hat{\mathbf{V}}\mathbf{a}_1$.

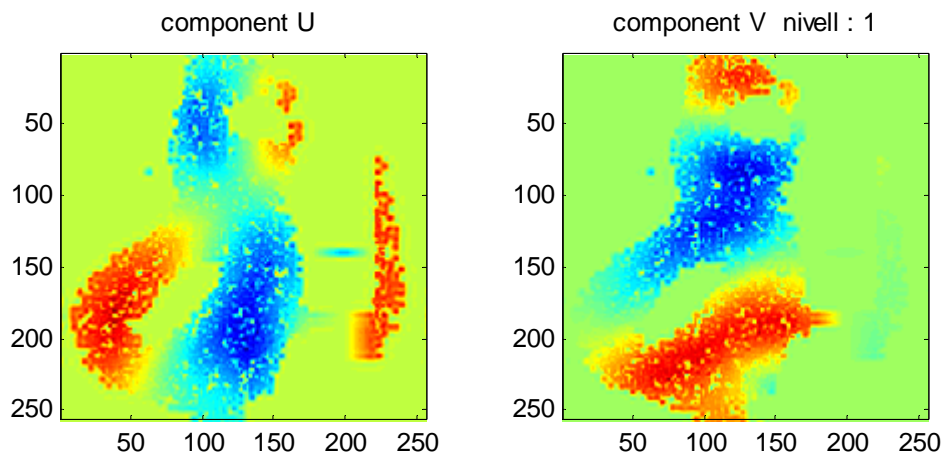


figura 5.16 Components del camp interpolat a nivell 1. $\hat{\mathbf{F}}\mathbf{a}_1 = \hat{\mathbf{U}}\mathbf{a}_1 + \mathbf{j}\hat{\mathbf{V}}\mathbf{a}_1$.

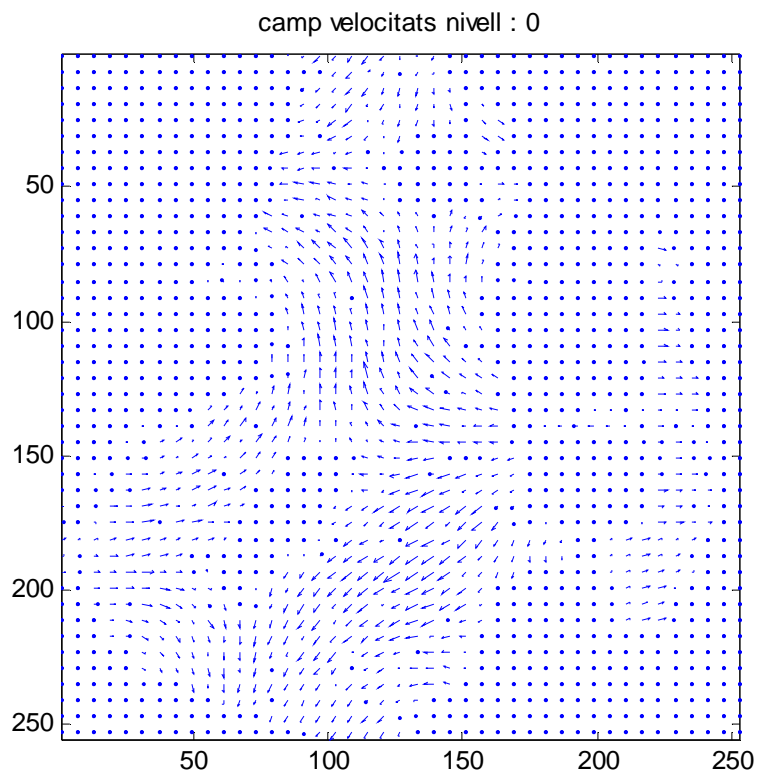


figura 5.17 Camp interpolat a nivell 0. $\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{U}} + \mathbf{j}\hat{\mathbf{V}}$.

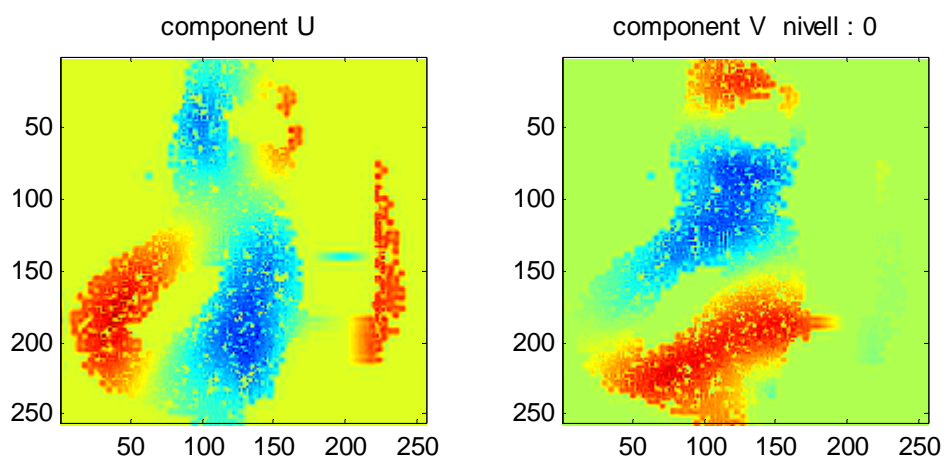


figura 5.18 Components del camp interpolat a nivell 0. $\hat{\mathbf{F}} = \hat{\mathbf{U}} + \mathbf{j}\hat{\mathbf{V}}$.

Per fer una valoració quantitativa dels resultats es mesura el PSNR ((74), (75) i (77)) a diverses escales abans i després de l'aplicació de la interpolació. Calcularem el PSNR dels valors esparsos respecte els corresponents camps originals a cada un dels nivells, i després farem el càlcul del PSNR dels valors interpolats respecte els corresponents camps originals en els diferents nivells. El càlcul PSNR ((74), (75) i (77)) entre dos camps vectorials, ho definim a partir dels corresponents MSE que es calculen segons les equacions de (71) a (73). També podem expressar l'EVM.

Taula 5-1: PSNR dels camps de velocitat superficials de l'exemple en els diferents nivells multiresolució.

Taula PSNR dels camps de velocitat superficials a múltiples nivells					
nivells	n. espars	PSNR(F_m, F) (dB)	PSNR($F(0), F$) (dB)	PSNR(\hat{F}, F) (dB)	Gain
0	2.96 %	8.07	8.10	12.51	4.44
1	11.97 %	8.91		12.76	3.85
2	19.63 %	9.58		13.10	3.52

Taula 5-2: EVM (Error Vector Magnitude) dels camps de velocitat superficials de l'exemple en els diferents nivells multiresolució.

Taula EVM dels camps de velocitat superficials a múltiples nivells					
nivells	n. espars	EVM(F_m, F) (dB)	EVM($F(0), F$) (dB)	EVM(\hat{F}, F) (dB)	Gain
0	2.96 %	-8.07	-8.10	-12.51	-4.44
1	11.97 %	-8.91		-12.76	-3.85
2	19.63 %	-9.58		-13.10	-3.52

Per aquest cas, el percentatge de punts esparsos que es tenen en consideració a cada nivell és petit i variable, tal com es pot apreciar a la taula resum de resultats. Si calculem el valor de PSNR inicialment respecte les mostres esparses (74) i ho fem a cada escala, ens trobem guanys variables, a nivell 0 (escala original) es guanya 4.44dB, el guany és menor als nivells superiors, a escales de menys detall, ja que la situació de partida era millor, amb més valors esparsos d'entrada. Si ara ho comparem amb el valor de PSNR de la primera interpolació respecte el camp original (77) ens dona un guany pràcticament inapreciable de 0.03dB. Per tant el mètode de interpolació utilitzat sembla força efectiu.

Si es tracta de fer una valoració crítica d'aquests resultats, sobretot si es comparen amb els resultats obtinguts a l'apartat 4.3.4, qualitativament i quantitativament semblen que no són tant bons com aquell cas, convé recordar però que hi ha algunes diferències fonamentals entre els conjunts de dades dels dos casos. Tal com s'ha exposat al darrer paràgraf de la introducció al present capítol, aquí es parteix d'un conjunt de dades a diferents resolucions però no es disposa d'un model d'anàlisi i síntesi que ens permeti relacionar directament les dades de les diferents resolucions. Per tal de poder avançar, es fa la suposició que és el mateix model utilitzat a l'apartat 4.3.4. A la vista dels resultats (sobretot l'apreciació qualitativa de les components del camp de velocitat en ambdós casos), sembla clar que si es disposa d'una bona aproximació sobre el model d'anàlisi i síntesi, com en el cas primer, els resultats són molt més bons. Per a il·lustrar el que diem, es pot apreciar que en aquest darrer cas els camps interpolats presenten nuls que no s'han pogut 'tapar' de manera completa a partir de la informació de les altres escales, es pot apreciar molt bé a la figura 5.18, la figura 5.16 i la figura 5.14. De totes maneres, si que s'aconsegueix una interpolació bona dels camps de velocitats a les diferents escales, aconseguint una fusió de les dades multiescalars, amb un mètode molt directe.

Capítol 6. Resum i conclusions generals

Al llarg de la tesi s'ha procurat donar resposta a dos dels problemes que hi havia plantejats dins les tècniques de fusió de dades, respecte a metodologies aplicables a l'anàlisi i interpretació d'imatges oceanogràfiques. En primer lloc s'ha presentat el marc de treball i alguns dels problemes dins el camp de la oceanografia física, als que en el seu dia es va decidir aplicar nous enfocaments, basats en disciplines com el processament de senyal de veu o d'imatge, i també a partir de l'anàlisi amb *wavelets*. A continuació s'ha fet una breu introducció a les eines matemàtiques al voltant de les transformades *wavelet* i l'anàlisi multiresolució a partir de bancs de filtres, que ens han estat d'utilitat en els capítols posteriors.

Respecte a les solucions proposades, en primer lloc s'ha tractat el problema de l'enregistrament automàtic d'imatges oceanogràfiques, plantejant tres mètodes basats en els contorns de les imatges: un primer mètode que s'ha utilitzat com a referència, que treballa amb la correlació d'àrea de les imatges de contorns MCC (*maximum cross-correlation*) d'àrea; un segon mètode aplicant la correlació d'àrea sobre les transformades *wavelet* a diferents escales de la imatge (MCC en domini *wavelet*); i un tercer mètode, que és el que dona millors resultats, que treballa en el domini de les transformades *wavelet* però sobre uns descriptors dels contorns basats en uns codis de cadena, i per tant fent una reducció d'imatges 2D a seqüències 1D com a elements per trobar les correlacions entre imatges. El mètode 1D necessita menys memòria i menys complexitat en els càlculs que els mètodes 2D, però en canvi el temps de processament necessari per fer la codificació dels contorns de les imatges és alt, i només s'ha de fer en el cas 1D. Convé considerar que el funcionament de cap dels mètodes no està lliure d'errors, el mètode 1D presenta problemes sobretot si els contorns estan massa segmentats i també si la distribució dels contorns a tota la imatge no queda prou ben repartida. També convé destacar que la principal aportació en aquest cas ha estat obtenir un mètode d'enregistrament molt robust (MCC& *wavelet* 1D), que permet fer enregistraments d'imatges multimodals amb oclusions i amb condicions molt adverses, com per exemple diferent nombre de píxels dels contorns, o escales espacials entre imatges no exactament coincidents, cosa que no permeten la majoria de mètodes automàtics més utilitzats.

El segon problema que s'ha plantejat és el de la interpolació i reconstrucció de dades a partir de mostres esparses, donant un nou enfocament per a un problema força comú en aplicacions de Teledetecció. En aquest cas s'ha desenvolupat el mètode **RIMME**, mètode d'interpolació i reconstrucció iteratiu per a dades esparses i multiescalars. És un mètode que es pot aplicar a partir de qualsevol interpolació inicial per a tal de millorar i incorporar a la solució les aportacions de valors que estan a escales amb resolucions espacials de menys definició. En aquest algorisme els mètodes d'interpolació utilitzats en la etapa prèvia inicial, permeten fixar paràmetres i característiques del senyal que es vol reconstruir en cas de que es sàpiguen. Finalment s'ha plantejat una extensió del mètode a dades complexes de dos dimensions, per veure que les seves aplicacions no queden limitades a senyals unidimensionals.

Els resultats obtinguts pels diferents mètodes plantejats són satisfactoris, i a més en algun cas han estat provats també amb diferents tipus de dades i contextos. Per exemple, els mètodes d'enregistrament s'han provat amb èxit en l'alineament d'imatges mamogràfiques per a poder realitzar l'anàlisi bilinial de mamografies [75]. Respecte al mètode d'interpolació s'ha fet un conjunt força extens de mesures, i els

resultats obtinguts són realment molt prometedors, cal tenir en compte que les mesures comparatives amb el mètode CLEAN no són molt significatives perquè aquest mètode no està basat en dades multiresolució, i no hem fet la comparació amb cap mètode que treballés amb dades multiresolució esparses i que per tant fos comparable directament. Cal considerar novament que la variabilitat dels resultats és molt alta, sobretot si les dades esparses a escales de menys resolució no aporten informació nova al senyal que es reconstrueix, el guany pot arribar a ser pràcticament nul. Però de totes maneres els resultats quantitius i qualitius amb els diferents conjunts de dades provats són molt satisfactoris.

S'han fet diverses aportacions en congressos, per tal de donar a conèixer els resultats dels diferents treballs que s'han anat realitzant [76]-[82], i també s'han realitzat diverses propostes d'articles en revistes especialitzades, en el moment de tancar l'edició encara no tenim les corresponents respostes.

Podríem concloure apuntant que els objectius que es varen plantejar inicialment semblen adequadament coberts. I que els treballs aquí presentats poden ser unes eines de gran utilitat en tots aquells sistemes que utilitzin les tècniques de fusió de dades per a obtenir informacions quantitatives a partir de l'integració de dades complementàries amb orígens diversos, i que per tant hi ha un ventall força ampli d'aplicacions que les podrien utilitzar en un futur immediat.

Capítol 7. Línies de treball futures

D'entrada, els resultats obtinguts es podrien incorporar en el flux de processament de qualsevol estació receptora de dades de satèl·lits i així es podria contribuir a la creació de nous productes més elaborats, en els que s'aplicarien tècniques de fusió de dades, i permetrien un control mediambiental més acurat.

Com a línies de treball futures que s'obren a partir del que s'ha realitzat convindria destacar-ne tres. En primer lloc els resultats obtinguts a l'apartat 2.4 per a trobar un mètode de reconstrucció de senyals a partir dels extrems i els passos per zero de les transformades *wavelet* multiresolució. Aquests resultats ens permeten entreveure un nou enfocament per a realitzar una codificació amb pèrdues d'un senyal, a partir d'aquests mètodes, incorporant als coeficients màxims un factor dependent de la distància entre els passos per zero veïns. D'aquesta manera sembla que es podria obtenir un codificador/descodificador molt eficient i simple, que en aquests moments no tenim constància que un mètode similar hagi estat utilitzat o publicat.

En segon lloc, fent referència als mètodes d'enregistrament provats es podrien explorar nous camins per a tractar de combinar els mètodes d'àrea amb el dels descriptors unidimensionals. El problema de l'enregistrament o alineament d'imatges és realment de molta complexitat, i no sembla que amb un sol mètode es pugui aconseguir bons resultats amb qualsevol tipus d'imatges, per tant, tot i la gran quantitat de recerca que encara s'està desenvolupant sobre el tema, convé insistir-hi més, perquè no es pot considerar tancat, i qualsevol algorisme és subjecte de multitud de possibles revisions i provatures diverses. Referent al mètode que s'ha presentat, convindria tractar de trobar descriptors de contorns que substituïssin els que s'han utilitzat, sempre i quan es poguessin calcular de manera més eficient.

En tercer lloc, i fent referència al mètode **RIMME** que s'ha exposat, sembla que obre noves possibilitats a la interpolació de dades esparses de diferents resolucions. D'entrada convindria fer una comparació exhaustiva amb un mètode multiresolució que pogués treballar amb el mateix conjunt de dades esparses, multiescalars i irregulars. També convindria analitzar en profunditat l'estabilitat del mètode a errors de diferents magnituds en el conjunt de dades. Posteriorment convindria veure com es podria ajustar el mètode a diferents escenaris sobre dades reals. D'entrada el veiem un camí interessant amb moltes possibilitats futures, que creiem que pot ésser d'utilitat en recerques posteriors. També convindria estudiar les possibles extensions a més dimensions, així presumiblement també es podria aplicar a dades esparses sobre volums de dades 3D, i aquí també s'obren noves expectatives d'aplicació molt interessants.

Convé destacar finalment que els treballs realitzats han estat desenvolupats pensant en aplicacions i problemes concrets dins la Oceanografia física, però que els resultats obtinguts, ja que aporten solucions a problemes generals que es poden donar de manera semblant en altres camps d'aplicació, també podrien ser explotats a d'altres casos aplicats sense haver-ne de canviar la part essencial.

Bibliografia

- [1] A. Antonini, M. Barlaud, P. Mathieu, and I. Daubechies, "Image coding using wavelet transforms," *IEEE Trans. Image Process.*, Vol. 1, pp. 205–220, Apr. 1992.
- [2] S. Baisch, G. Bokelmann, "Spectral analysis with incomplete time series: an example from seismology", *Computer and Geosciences*, Vol. 25, pp.739-750. 1999.
- [3] T. Brandtberg, JB. McGraw, T.A. Warner, RE. Landenberger. "Image Restoration Based on Multiscale Relationships of Image Structures". *IEEE Transactions on geoscience and remote sensing*, Vol. 41, no. 1, Jan. 2003.
- [4] P. Bordes, P. Brunel, and A. Marsouin, "Automatic adjustment of AVHRR navigation," *J. Atmos. Ocean. Technol.*, Vol. 9, pp. 15–27,1992.
- [5] P.J. Burt and E.H. Adelson, "The Laplacian pyramid as a compact image code", *IEEE Trans. Commun.*, Vol. 31, no.4, pp. 532-540, 1983.
- [6] D. Bylund et al "Chromatographic alignment by warping and dynamic programming as a pre-processing tool for PARAFAC modelling of liquid chromatography–mass spectrometry data", *Journal of Chromatography*, Vol. A 961, pp.237-244, 2002.
- [7] J. Canny, "A Computational Approach To Edge Detection", *IEEE Trans. Pattern Analysis and Machine Intelligence*, Vol. 8, pp. 679-714, 1986.
- [8] P. Capitani, P. Ciaccia, "Warping the time on data streams", *Data & Knowledge Engineering* , 2006.
- [9] M. Cetin, D.M. Malioutov, A.S. Willsky, "A variational technique for source localization based on a sparse signal reconstruction perspective". *IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing*, Vol. 3, pp. 2965–2968, May 2002.
- [10] S. G. Chang, B. Yu, and M. Vetterli, "Adaptive wavelet thresholding for image denoising and compression," *IEEE Trans. Image Process.*, Vol. 9, no. 9, pp. 1135–1151, Sep. 2000.
- [11] K. Chou, A. Willsky, and A. Benveniste, "Multiscale recursive estimation, data fusion, and regularization," *IEEE Trans. Automatic Control*, Vol. 39, no. 3, pp. 464–478, Mar. 1994.
- [12] A. P. Cracknell, *The Advanced Very High Resolution Radiometer*. New York: Taylor & Francis, 1997.
- [13] A. Cohen, *Numerical Analysis of Wavelet Methods*. New York: Elsevier, 2003.
- [14] A. Cohen, I. Daubechies and J.C. Feauveau, "Biorthogonal bases of compactly supported wavelets", *Commun. on Pure and Appl. Math.* Vol. 45, pp.485-560,1992.
- [15] S. Cote and A.R.L. Tatnall, "Estimation of Ocean Surface currents from satellite imagery using a Hopfield Neural network", *MTS journal*, Vol. 4, n. 30, 1998.
- [16] R.E. Crochiere, S.A. Webber, J.L. Flanagan, "Digital coding of speech in sub-bands",1976 Int'l IEEE Conf. on ASSP, Philadelphia, 1976.
- [17] X. Dai, S. Khorram, "A feature-based Image registration algorithm using improved chain-code representation combined with invariant moments". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 37, n. 5, pp. 2351-2361, Sep. 1999.
- [18] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*. Philadelphia, PA: SIAM,1992.
- [19] J.P. Djamdji, A. Bijaoui, "Disparity Analysis: A Wavelet Transform Approach". *IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing*, Vol. 33, No. 1, Jan. 1999.
- [20] D.L. Donoho et al. "Stable recovery of Sparse Overcomplete Representations in the Presence of Noise", *IEEE Trans. Inform.Theory*, Vol. 52, no. 1, Jan. 2006.
- [21] D.G. Dritschel and A. Viudez, "A balanced approach to modelling rotating stably-stratified geophysical flows". *Journal of Fluid Mechanics*, Vol 488, pp 123-150, 2003.

- [22] P. Dutilleux, "An implementation of the *algorithme à trous* to compute the wavelet transform", in: J.-M. Combes, A. Grossman, P. Tchamitchian (Eds.), *Wavelets: Time-Frequency Methods and Phase Space*, Springer-Verlag, Berlin, Germany, 1989, pp. 298-304, Proceedings of the International Conference, Marseille, France, Dec. 14-18, 1987.
- [23] D. Ellis. Dynamic Time Warp (DTW) in Matlab, Web resource, available: <http://www.ee.columbia.edu/~dpwe/resources/matlab/dtw/>. 2003.
- [24] W. J. Emery, J. Brown, and Z. Paul Nowack, "AVHRR image navigation: Summary and review," *Photogramm. Eng. Remote Sens.*, Vol. 55, pp. 1175–1183, 1989.
- [25] W. J. Emery, A. C. Thomas, M. J. Collins, W. R. Crawford, and D. L. Mackas, "An objective method for computing advective surface velocities from sequential infrared satellite images", *J. Geophysical Res.*, Vol. 91, pp. 12 865-12 878, 1986.
- [26] D. Esteban and C. Galand, "Application of quadrature mirror filters to split band voice coding schemes," *Proc. of 1977 ICASSP*, pp. 191-195, May 1977.
- [27] F. Eugenio, F. Marqués, J. Marcello, "Pixel and sub-pixel accuracy in satellite image georeferencing using an automatic contour matching approach". *Proceedings of IEEE 2001 International Conference on Image Processing*, Vol. 1, pp. 822-825, 2001.
- [28] F. Eugenio, F. Marqués, J. Marcello, "A contour-based approach to automatic and accurate registration of multitemporal and multisensor satellite imagery". *2002 IEEE International Geoscience and Remote Sensing Symposium, IGARSS '02*, Vol. 6, pp. 3390 -3392, 2002.
- [29] F. Eugenio, F. Marqués, " Automatic Satellite Image Georeferencing Using a Contour-Matching Approach". *IEEE Transactions On Geoscience And Remote Sensing*, Vol. 41, no. 12, Dec. 2003.
- [30] F. Eugenio, J. Marcello, A. Hernández-Guerra, and E. Rovaris, "Methodology to obtain accurate sea surface temperature from locally received NOAA-14 data in the Canary-Azores-Gibraltar area," *Sci. Marina*, Vol. 65, pp. 127–137, 2001.
- [31] P.W. Fieguth, W.C. Karl, A.S. Willsky and C. Wunsch, "Muyltiresolution optimal interpolation and statistical analysis of TOPEX/POSEIDON satellite altimetry", *IEEE Trans. Geosci. Remote Sens.*, Vol. 33, no.3, pp. 280-292, Mar.1995.
- [32] C. Ford and D. M. Etter "Wavelet Basis Reconstruction of Nonuniformly Sampled Data", *IEEE Transactions on Circuits and Systems - II: analog and digital signal processing*, Vol. 45, no. 8, Aug. 1998.
- [33] GEBCO database, <http://www.ngdc.noaa.gov/mgg/gebco/gebco.html>
- [34] Lisa Gottesfeld Brown. "A survey of image registration techniques". *ACM Computing Surveys*, Vol. 24, no 4, pp. 325--376, Dec. 1992.
- [35] L. Gross, S. Thiria, R. Frouin, B.G. Mitchell, "Artificial neural networks for modelling the transfer function between marine reflectance and phytoplankton pigment concentration". *J. Geophys. Res.* Vol. C 105, pp. 3483-3496, 2000.
- [36] D. Halpern, editor, *Satellites, oceanography, and society*. Elsevier, Amsterdam, 2000.
- [37] I. Herlin, I. Cohen, S. Bouzidi, "Image processing for sequences of oceanographic images". *The Journal of Visualization and Computer Animation*, Vol 7, pp. 166-176, 1996.
- [38] F. J. Herrmann. "Seismic deconvolution by atomic decomposition: a parametric approach with sparseness constraints". *Integr. Computer-Aided Eng.*, Vol. 12, no. 1, pp 69-91, 2005.
- [39] J.A. Högbom, "Aperture Synthesis with a Non-Regular Distribution of Interferometric Baselines." *Astron. Astrophys. Supp.* 15, 417-426, 1974
- [40] M. Holschneider, R. Kronland-Martinet, J. Morlet, and P. Tchamitchian, "A real-time algorithm for signal analysis with the help of the wavelet transform," *Wavelets, time-frequency methods and phase space*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

- [41] M. Ikeda, "Mesoscale variability revealed with sea surface temperature imaged by AVHRR on NOAA satellites", pp. 3-13, dins Oceanographic applications of remote sensing. CRC Press, 1995.
- [42] Anil K. Jain, "Fundamentals of digital image processing". Englewood Cliffs, New Jersey, USA. Prentice-Hall, pp. 362 - 375, 1989.
- [43] K.A. Kelly, P.T. Strub, "Comparison of velocity estimates from advanced very high resolution radiometer in the coastal transition zone.", J. Geophys. Res., Vol. 97, pp. 9653-9668, 1992.
- [44] N. G. Kingsbury, "Complex wavelets for shift invariant analysis and filtering of signals," J. Appl. Comput. Harmon. Anal., vol. 10, no. 3, pp. 234–253, May 2001.
- [45] A. Lannes, E. Anterrieu, and P. Maréchal, "CLEAN and WIPE" Astronomy & Astrophysics Supplement Series, Vol. 123, pp. 183-198, 1997.
- [46] G. Larnicol, S. Guinehut, M.-H. Rio, M. Drevillon, Y. Faugere and G. Nicolas. "The global observed ocean products of the {French} {Mercator} project." Proc. of the "15 years of progress in Radar altimetry" ESA Symposium, Venice, 2006.
- [47] T.M. Lehmann, C. Gonner, K. Spitzer. "Survey: interpolation methods in medical image processing". IEEE Trans Med Imaging, Vol 18, no.11, pp 1049-75, Nov. 1999.
- [48] Le Traon P.-Y. and F. Ogor, "ERS-1/2 orbit improvement using Topex/Poseidon: The 2 cm challenge", J. Geophys. Res., Vol.103, C4, pp. 8045-8057, 1998.
- [49] Le Traon, P. Y., J. Stum, J. Dorandeu, P. Gaspar and P. Vincent, "Global statistical analysis of Topex and Poseidon data", J. Geophys. Res., Vol. 99, pp. 24619-24631, 1994.
- [50] H. Li, B.S. Manjunath and S.K. Mitra, "A contour-based approach to multisensor image registration". IEEE Transactions on Image Processing, Vol. 4, n.3, pp. 320-334, Mar. 1995.
- [51] J. Lillibridge, R. Leben, F.Vossepoel, "Real-Time Altimetry from ERS-2". 3rd. ERS Symposium, 1997.
- [52] F. Luisier, T. Blue, M. Unser, "A new SURE approach to image denoising: interscale orthonormal wavelet thresholding", IEEE Trans. on Image Processing, Vol. 16, no 3, Mar. 2007.
- [53] C.R. McClain, W.E. Esaias, W. Barnes, B. Guenther, D. Endres, S.B. Hooker, G. Mitchell, R. Barnes, Calibration and Validation Plan for SeaWiFS, NASA Technical Memorandum 104566 Vol. 3, NASA Goddard Space Flight Center, Maryland, 1992.
- [54] S. Mallat, "A theory of multiresolution signal decomposition: the wavelet representation", IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell., Vol. 11, pp. 674-693, 1989.
- [55] S. Mallat, "A wavelet tour of signal processing". 2nd. ed. Academic Press, 1999.
- [56] S. Mallat, S. Zhong, "Characterization of signals from multiscale edges," IEEE Trans. Pattern Recognit. Mach. Intell., Vol. 14, no. 7, pp.710–732, Jul. 1992.
- [57] S. Mallat, "Zero-crossings of a wavelet transform", IEEE Trans. on Inform. Theory, Vol. 32, no. 4, pp. 1019--1033, 1991.
- [58] E.P. McClain, W.G. Pichel and C.C. Walton, "Comparative performances of avhrr-based multichannel sea surface temperature", Journal of Geophysical Research, Vol.90, pp. 11587-11601, 1985.
- [59] D. Menemenlis, P. Fieguth, C. Wunch and A. Willsky, "Adaptation of a fast optimal interpolation algorithm to the mapping of oceanographic data", Journal of Geophysical Research, Vol. 102, no. C5, pp.10573-10584, May 1997.
- [60] M. Mignotte, "A post-processing deconvolution step for wavelet-based image denoising methods", IEEE Signal Processing Letters, Vol. 14, no. 9, pp. 621-624, Set. 2007.
- [61] Dmitri Model, M. Zibulevsky, "Signal reconstruction in sensor arrays using sparse representations". Signal Processing, Vol. 86, pp. 624–638, 2006.

- [62] R. M. Ninnis, W. J. Emery and M. J. Collins, "Automated extraction of pack ice motion from advanced very high resolution radiometry", *J. Geophysical Res.*, Vol. 91, pp.10725-10734, 1986.
- [63] V. Parisi Baradad, H. Yahia, I. Herlin, "A new approach to the temporal evolution of a family of curves". *Proc. ICASSP'99*, Vol. 6, pp. 3109-3112, 15-19 March 1999.
- [64] V. Parisi Baradad, "Analysis of Mesoscale Structure through Digital Image Processing Techniques". Barcelona, Tesi Doctoral, Biblioteca Gabriel Ferraté, 1999.
- [65] V. Parisi, E. García-Ladona, J. Cabestany, J. Font, J. Salas, "A Hopfield neural network to track drifting buoys in the ocean", *Proceedings of the IEEE Oceans'98 Conference*, pp. 1010-1016, Nice, 1998.
- [66] V. Parisi, H. Yahia, J. Font, I. Herlin, E. García-Ladona, "Image motion analysis using scale space approximation and simulated annealing", *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Verlag, 1999.
- [67] A. Pascual, Y. Faugere, G. Larnicol and P.Y. Le-Traon, "Improved description of the ocean mesoscale variability by combining four satellite altimeters." *Geophys. Research Letters*, Vol.33, no.2, 2006.
- [68] A. Pizurica and W. Philips, "Estimating the probability of the presence of a signal of interest in multiresolution single- and multiband image denoising," *IEEE Trans. Image Process.*, Vol. 15, no. 3, pp. 645–665, Mar. 2006.
- [69] J. Portilla, V. Strela, M. J. Wainwright, and E. P. Simoncelli, "Image denoising using scale mixtures of gaussians in the wavelet domain," *IEEE Trans. Image Process.*, Vol. 12, no. 11, pp. 1338–1351, Nov. 2003.
- [70] W.K. Pratt, *Digital Image Processing (2nd ed.)*: pp. 662-671. John Wiley&Sons, 1991.
- [71] J.G. Proakis, D. Manolakis "Digital Signal Processing: Principles, Algorithms and Applications" (3rd ed). Prentice-Hall. 1996.
- [72] V. Rasche, R. Proska, R. Sinkus, P. Boernert, and H. Eggers. "Resampling of Data Between Arbitrary Grids Using Convolution Interpolation," *IEEE Trans. Med. Imag.*, Vol. 18, no.5, pp 385–392, 1999.
- [73] L. R. Rabiner, R. W. Schafer, "Digital Processing of Speech Signals", *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 67, no. 4, pp. 1406-1407, Apr. 1980.
- [74] L. R. Rabiner, B.H. Juang. "Fundamentals of speech recognition", pp. 221-241. Prentice Hall, 1993.
- [75] R. Reig, J. Juvanteny, V. Parisi, P. Martí, "Alineamiento de mamografías mediante descriptores de contornos". *Actas URSI 2007*, Tenerife, 19-21 de Set. 2007.
- [76] R. Reig, V. Parisi, E. García-Ladona, "Image registration techniques with multiresolution analysis in satellite oceanography". *Vic. Document de Recerca de la Universitat de Vic*, 2002
- [77] R. Reig, V. Parisi, E. García-Ladona, "Image registration techniques with multiresolution analysis in satellite oceanography". *Actas URSI 2002*, Alcalá de Henares, 11-13 de Set. 2002.
- [78] R. Reig, V. Parisi, E. García-Ladona, P. Martí, "Enregistrament d'Imatges amb Descriptors de Contorns", *I Jorn. de Codisseny Hardware-Software*, Vic, 26-27 Juny 2003.
- [79] R. Reig, V. Parisi, E. García-Ladona, P. Martí, "Georeferenciación de imágenes oceanográficas mediante descriptores de contornos". *Actas URSI 2007*, Tenerife, 19-21 Set. 2007.
- [80] R. Reig, V. Parisi, E. García-Ladona, P. Martí, "Satellite Image Geo-registration from Cosatline codification". *Acts MARTECH 2007*, Vilanova i la Geltrú, 15-16 Nov. 2007.
- [81] R. Reig, V. Parisi, E. García-Ladona, P. Martí, "A Model-Based Expansion on Interpolation for Multiresolution Sparse Data". *Acts MARTECH 2007*, Vilanova i la Geltrú, 15-16 Nov. 2007.

- [82] R. Reig, E. García-Ladona, V. Parisi, P. Martí, "A recursive approach to Multiscalar Data Interpolation of sparsely sampled sea surface measurements at different spatial resolutions". OCEANS 2008, Kobe, 8-11 Apr. 2008.
- [83] I.S. Robinson, "Satellite oceanography: an introduction for oceanographers and remote sensing scientists". Chichester; West Sussex; England. Ellis Horwood Limited, 1985.
- [84] H. Sakoe, S. Chiba, "Dynamic programming optimization for spoken word recognition," IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing, Vol. ASSP-26, pp. 43-49, Feb. 1978.
- [85] R.W. Schafer and L.R. Rabiner "A Digital Signal Processing Approach to Interpolation". Proc. IEEE, Vol. 61, p. 692-702, Jun. 1973.
- [86] R. A. Schowengerdt, Remote Sensing: Models and Methods for Image Processing, 2nd ed. New York: Academic, 1997.
- [87] L. Sendur and I. W. Selesnick, "Bivariate shrinkage functions for wavelet-based denoising exploiting interscale dependency," IEEE Trans. Signal Process., vol. 50, no. 11, pp. 2744–2756, Nov. 2002.
- [88] ———, "Bivariate shrinkage with local variance estimation," IEEE Signal Process. Lett., vol. 9, no. 12, pp. 438–441, Dec. 2002.
- [89] J. Serra, "Image Analysis and Mathematical Morphology". New York, Academic Press, 1982.
- [90] C.E. Shannon, "Communication in the Presence of Noise", Proc. IRE, Vol. 37, pp. 10-21, 1949.
- [91] M. J. Shensa, "The discrete wavelet transform: Wedding the à trous and Mallat algorithms", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 40, n.10, pp. 2464-2482, 1992
- [92] J. Shi, SE Reichenbach. "Image interpolation by two-dimensional parametric cubic convolution". IEEE Trans Image Process, Vol. 15, no.7, pp. 1857-70, Jul. 2006.
- [93] M.J. Smith and T.P. Barnwell, "Exact reconstruction for tree structured sub-band coders", IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Proc., Vol. 34, no.3, pp. 431-441, 1986.
- [94] Special Issue on Data Fusion, IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, Vol. 37, no. 3, May 1999.
- [95] J.L. Starck, E. J. Candes, and D. L. Donoho, "The curvelet transform for image denoising," IEEE Trans. Image Process., Vol. 11, no. 6, pp. 670–684, Jun. 2002.
- [96] J.L. Stark, J. Fadili, F.Murtagh, "The undecimated wavelet decomposition and its reconstruction", IEEE Trans. Image Processing, Vol. 16, no. 2, pp. 297-309, Feb. 2007.
- [97] J.K. Starck, F.Murtagh, A.Bijaoui, Image Processing and Data Analysis: the Multiscale Approach. Cambridge University Press, 1998.
- [98] G. Strang and T. Nguyen, Wavelet and Filter Banks. Cambridge,U.K.:Wellesley-Cambridge, 1996.
- [99] R.N. Strickland, H.I. Hahn, "Wavelet transform methods for object detection and recovery", IEEE Trans. Image Processing, Vol.6, no.5, pp. 724-734, 1997.
- [100] P. Thévenaz, U. E. Ruttimann, and M. Unser, "A pyramid approach to subpixel registration based on intensity", IEEE Trans. Image Processing, Vol. 7, pp. 27–41, Jan. 1998.
- [101] M. Unser, "Approximation power of biorthogonal wavelet expansion," IEEE Trans. Signal Process., Vol. 44, no. 3, pp. 519–527, Mar. 1996.
- [102] M. Unser, "Sampling-50 Years after Shannon", Proceedings of IEEE, Vol. 88, no. 4, pp. 569-587, 2000.
- [103] M. Unser and T. Blu, "Mathematical properties of the JPEG2000 wavelet filters," IEEE Trans. Image Process., Vol. 12, pp. 1080–1090, Sep. 2003.

- [104] P.P. Vaidyanathan, "Quadrature mirror filter banks, M-bands extensions and perfect reconstruction", IEEE Trans. Acoust., Speech, and Signal Proc., Vol. 36, no. 1, pp. 81-94, Jan. 1988.
- [105] P.P. Vaidyanathan, "Multirate Digital Filters, Filter Banks, Polyphase Networks, and Applications: A Tutorial", Proceedings of the IEEE, Vol. 78, no. 1, Jan. 1990.
- [106] M. Vetterli. "Splitting a signal into subsampled channels allowing perfect reconstruction", In Proc. IASTED Conf. on Appl. Sig Proc. and Dig. Filt., Paris, June 1985.
- [107] M.Vetterli, "Filter Banks allowing perfect reconstruction". Signal Processing, Vol. 10, no.3, pp. 219-244, April 1986.
- [108] M.Vetterli and C. Herley, "Wavelets and filter banks:Theory and design.", IEEE Transactions on Signal Processing, Vol. 40, no.9, pp. 2207-2232, September 1992.
- [109] A. Viudez and D.G. Dritschel, " Vertical velocity in mesoscale geophysical flows". Journal of Fluid Mechanics, Vol 483, pp. 199-223, 2003.
- [110] L. Wald, "Some terms of reference in Data Fusion", IEEE Transactions on geoscience and remote sensing, Vol. 37, no. 3, May 1999.
- [111] Wei Siong Lee, Ashraf A. Kassim, "Signal and Image Approximation Using Interval Wavelet Transform". IEEE Transactions on image processing, Vol.16, no.1, pp.46-56 , Jan. 2007.
- [112] Chun Zhao, Ping Zhao. "Sampling Theorem and Irregular Sampling Theorem for Multiwavelet Subspaces", IEEE Trans. on Signal Processing, Vol. 53, no. 2, February 2005.
- [113] B. Zitová and J. Flusser. "Image registration methods: a survey", Image and Vision Computing, Vol. 21, pp. 977–1000, 2003.