

APORTACIÓN AL MODELADO DEL MOTOR TRIFÁSICO
DE INDUCCIÓN CON CONSIDERACIÓN DE LA
SATURACIÓN Y EL EFECTO DE DOBLE JAULA

Doctorando: M^a Elena Martín Cañadas

Tutores: Joan Llaverías Sanmartí
Joaquim Pedra Duran

A mis tutores, por su paciencia
A mi familia, por su tiempo

RESUMEN

El gran atractivo del modelo estándar del motor de inducción en ejes dq con parámetros constantes reside en su relativa simplicidad, por lo que generalmente se toma como base para la predicción de su conducta dinámica.

No obstante, durante transitorios exigentes y en determinadas condiciones de operación, este modelo se revela claramente inadecuado para representar el comportamiento de la máquina.

Para paliar este hecho, numerosos esfuerzos se han efectuado para incluir en el modelo del motor efectos tales como el de ranura profunda o la saturación magnética, así como otros fenómenos de segundo orden. No obstante, el enorme incremento en complejidad experimentado por el modelo desincentiva su utilización.

En la presente tesis se explora la bondad de determinados modelos simplificados con inclusión del efecto de ranura profunda y la saturación magnética del flujo principal, evaluando bajo qué condiciones su utilización ofrece garantías.

Concretamente, se muestra la necesidad del empleo de modelos con inclusión del efecto de ranura profunda para la determinación del tiempo de operación estable del motor trifásico de inducción ante huecos de tensión, evidenciando cómo aun los modelos de orden reducido, mas de doble jaula, predicen resultados acordes con los datos de catálogo suministrados por el fabricante, cometido en el que falla el modelo estándar de jaula sencilla.

En lo tocante al modelado de la saturación magnética, se justifica la divergencia en los resultados obtenidos a partir de los modelos con y sin intersaturación cuando estos son formulados en función de determinados conjuntos de variables de estado, a partir de la evaluación de los pesos relativos de los distintos términos que marcan la diferencia entre ambos tipos de modelos, contribuyendo así a clarificar un punto que ha sido objeto de controversia en la literatura especializada. Se efectúa, así mismo, un estudio detallado sobre las implicaciones del uso de parámetros y magnitudes referidos en los modelos con y sin intersaturación, evaluando para qué conjuntos de variables de estado su utilización resulta ventajosa.

En suma, queda puesto de manifiesto que haciendo uso de determinados recursos simplificativos, es posible modelar con garantías efectos que en muchas ocasiones son obviados en los modelos para evitar la excesiva complejidad que su inclusión aporta, pero que en aplicaciones concretas resultan esenciales para representar adecuadamente el comportamiento real del motor.

SUMMARY

The main attractive of the constant parameter standard model of the induction motor in dq axis is its relative simplicity, so it is generally taken a basis for the prediction of its dynamical behavior.

However, during demanding transitory regimes or at determined operation conditions, this model is clearly inadequate to represent the machine conduct.

In order to palliate this fact, numerous efforts have been made so as to include in the motor model deep-bar effect, magnetic saturation and other second order phenomena. Nevertheless, the enormous increase in complexity experienced by the model discourages its utilization.

The suitability of determined simplified models that include deep-bar effect and main flux magnetic saturation is explored in the present thesis, evaluating under which conditions its use offers enough guaranties.

Specifically, it is shown the need of the use of models that include deep-bar effect for the determination of the stable time of operation of the induction motor under voltage sags, making plain how even reduced-order models but with double-cage are able to predict results that agree with manufacturer catalogue data whereas the standard single-cage model fails to do this.

As far as concerns magnetic saturation modeling, the divergent results obtained from the models that do and do not take into account the cross-saturation phenomenon are justified depending on which combination of state variables has been selected for their formulation. This is accomplished evaluating the relative weight of the missing terms in the models without cross-saturation, contributing in this way to clarify a point that has been an object of controversy at the specialized publications. A detailed study is also made on the implications of the use of referred parameters and magnitudes at the models with and without cross-saturation, determining for which sets of states variables its utilization may be advantageous.

As a conclusion, it is made clear that using determined simplifying resorts it is still possible to correctly model effects such as deep-bar and magnetic saturation that in may occasions are obviated so as to avoid the excessive complexity that brings its inclusion at the models, but which are essential to adequately represent the real machine behavior at certain applications.

INDICE

APORTACIÓN AL MODELADO DEL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN CON CONSIDERACIÓN DE LA SATURACIÓN Y EL EFECTO DE DOBLE JAULA

1. INCLUSIÓN DEL EFECTO DE RANURA PROFUNDA EN EL MODELADO DEL MOTOR DE INDUCCIÓN.	1
1.1. JUSTIFICACIÓN.	1
1.2. MODIFICACIÓN DE LAS CURVAS CARACTERÍSTICAS DEL MOTOR DE INDUCCIÓN MEDIANTE EL DISEÑO DE LA CONFIGURACIÓN ROTÓRICA.	4
1.3. MODELADO DEL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN CON INCLUSIÓN DEL EFECTO DE RANURA PROFUNDA: DIFERENTES ENFOQUES.	10
1.4. MODELO DE DOBLE JAULA DEL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN.	18
1.5. SIMPLIFICACIONES EN EL MODELO DE DOBLE JAULA DEL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN.	25
1.5.1. Reducción del número de parámetros del modelo de doble jaula para el motor trifásico de inducción.	26
1.5.2. Reducción del orden del modelo de doble jaula para el motor trifásico de inducción.	33
2. ESTUDIO COMPARATIVO ENTRE MODELOS DE JAULA DOBLE Y SENCILLA, DE ORDEN COMPLETO Y ORDEN REDUCIDO, PARA APLICACIONES DE DETERMINACIÓN DEL TIEMPO DE OPERACIÓN ESTABLE DEL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN.	41
2.1. JUSTIFICACIÓN.	41
2.2. ALCANCE DEL ESTUDIO Y RESULTADOS OBTENIDOS.	47
2.3. CONCLUSIONES.	136
3. CONSIDERACIÓN DE LA SATURACIÓN MAGNÉTICA EN EL MODELO DEL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN.	137
3.1. JUSTIFICACIÓN.	137
3.2. MODELADO DE LA SATURACIÓN MAGNÉTICA EN EL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN: DIFERENTES ENFOQUES.	140
3.3. MODELOS CON INTERSATURACIÓN DEL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN.	148
3.3.1. Consideraciones previas.	148
3.3.2. Modelo con intersaturación del motor trifásico de inducción con las corrientes de estator y rotor como variables de estado.	148
3.3.2.1. Modelo con una jaula rotórica.	148
3.3.2.2. Modelo con dos jaulas rotóricas.	162

3.4.	COMPARACIÓN DE LOS MODELOS DEL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN CON Y SIN INTERSATURACIÓN.	166
3.4.1.	Modelo con una jaula rotórica.	167
3.4.2.	Modelo con dos jaula rotóricas.	176
3.5.	SOBRE LA ELIMINACIÓN DE PARÁMETROS EN LOS MODELOS DEL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN CON SATURACIÓN.	187
4.	CONCLUSIONES Y APORTACIONES DEL TRABAJO.	227
	NOTACIÓN.	I
	BIBLIOGRAFÍA.	III
	APÉNDICE A.	A.1
	APÉNDICE B.	B.1
	APÉNDICE C.	C.1
	APÉNDICE D.	D.1
	APÉNDICE E.	E.1
	APÉNDICE F.	F.1

1. INCLUSIÓN DEL EFECTO DE RANURA PROFUNDA EN EL MODELADO DEL MOTOR DE INDUCCIÓN.

1.1. JUSTIFICACIÓN.

Usualmente, a la hora de modelar el comportamiento del motor de inducción para régimen dinámico, se asume la hipótesis de parámetros constantes, en particular, resistencia rotórica constante, lo que implica que la distribución de corriente en las barras rotóricas debe ser uniforme.

No obstante, la no uniformidad en la distribución de la corriente en las barras rotóricas ha sido conocida y sus efectos estudiados desde hace largo tiempo.

Una revisión de la literatura especializada permite apuntar a aquellas aplicaciones o modos de operación en que la hipótesis simplificativa de resistencia rotórica constante habitualmente adoptada conduce a un mayor error. Básicamente, pueden destacarse dos situaciones:

- 1) motores de inducción para aplicaciones de mediana y gran potencia, en las que para mejorar el transitorio de arranque se recurre bien al rotor de doble jaula o bien al rotor de ranura profunda [1], [2]
- 2) alimentación desde inversor, donde la forma de onda no sinusoidal presenta un amplio espectro de componentes armónicos, por lo que el empleo de valores únicos para la resistencia e inductancia rotóricas, definidos para una sola frecuencia (generalmente la fundamental del deslizamiento), supone la utilización de un valor incorrecto para la impedancia rotórica frente a estos armónicos [3]-[5]

Así, ampliando lo anterior y limitándonos a reseñar las referencias más interesantes, en [6] ya se informa de errores significativos en el cálculo del par desarrollado a determinadas velocidades, concluyéndose que el modelo con resistencia rotórica constante no puede representar adecuadamente al motor en todas las condiciones de operación.

Analizando la reconexión a la red del motor de inducción tras una caída total de la tensión de alimentación, en [7] se muestra cómo la no inclusión del efecto de ranura profunda en el modelo predice un par transitorio inferior al real, subestimándose de este modo el posible daño que el propio motor o su carga podrían experimentar.

En [14],[8], para predecir adecuadamente los valores de corriente y par en el arranque, máximos y nominales suministrados por el fabricante, se recurre en los motores de ranura profunda a su modelado mediante el esquema equivalente correspondiente al motor de doble jaula, dado que el modelo estándar de una sola jaula falla en este cometido.

En relación a la alimentación del motor de inducción mediante inversor, en [4] se muestra la conveniencia de incluir en su modelo el efecto de ranura profunda o pelicular, que puede volverse altamente significativo dado el amplio espectro de frecuencias presentes en la tensión aplicada a la máquina. Mientras que con alimentación sinusoidal la frecuencia de la corriente rotórica es única e igual al deslizamiento, en la alimentación a través de inversor la frecuencia fundamental de la corriente puede alcanzar los 100 Hz y la de los armónicos de mayor orden puede superar los 2500 Hz (representa el armónico 25 para una frecuencia fundamental de 100 Hz).

Ilustrando la variación en la resistencia rotórica efectiva experimentada por el motor debido a la alimentación mediante inversor, en [13] se informa de que la razón de las resistencias en corriente alterna y corriente continua presentadas por una barra rotórica de cobre de forma rectangular y media pulgada de profundidad es de 2,7 para el sexto armónico de la corriente rotórica y 3,9 para el armónico decimosegundo, considerando una onda fundamental de 60 Hz.

La necesidad de disponer de modelos que reflejen el efecto de ranura profunda se justifica de forma práctica en [9] cuando se informa de casos en los que al acoplar para su trabajo conjunto motores y convertidores de características nominales análogas, sin verificar previamente la idoneidad del diseño rotórico de la máquina para este menester, se observa la aparición de problemas tales como la resonancia del sistema o un excesivo calentamiento que llega a limitar la operación efectiva del accionamiento hasta tan solo un 25% de su capacidad teórica.

En [10] se muestra cómo el modelo estándar en ejes dq, válido para estimar la componente fundamental de la corriente y el valor medio del par en las inmediaciones del punto nominal de trabajo, deteriora la precisión de sus predicciones en otras zonas de operación. En particular, cuando el motor es alimentado por inversor, se predicen amplitudes para las componentes armónicas presentes en los espectros de corriente y par entre 1,5 y 5 veces

inferiores a los valores medidos, diferencia que se reduce significativamente cuando el efecto de ranura profunda se incorpora al modelo.

Relacionado con el asunto de la alimentación mediante convertidor, y más concretamente en lo que tiene que ver con el control de accionamientos a velocidad variable, son numerosas las referencias que señalan la necesidad de conocer la variación dinámica de los parámetros rotóricos para posibilitar un control de altas prestaciones.

Así, en [10] y [11], se indica que la constante de tiempo rotórica, afectada por el efecto de ranura profunda, constituye un parámetro clave en el control vectorial, que en caso de tener asignado un valor distinto al real, conduce a un cálculo incorrecto del desacoplo, resultando en la desintonización del controlador y por tanto, en una degradación global de prestaciones tanto estáticas como dinámicas del accionamiento, quedando además limitada su región de estabilidad.

En vista de lo expuesto, existe abundante evidencia en la literatura especializada de las limitaciones del modelo estándar en ejes dq para representar adecuadamente el comportamiento dinámico del motor de inducción cuando el efecto de ranura profunda cobra protagonismo, bien sea por un diseño rotórico caracterizado por ranuras estrechas y de relativa profundidad, o bien sea por la alimentación mediante convertidor de frecuencia, que con su espectro de componentes armónicos potencia el efecto pelicular.

Conviene pues, una vez justificada la necesidad de la inclusión de este fenómeno en el modelo del motor para determinadas aplicaciones, incidir en los fundamentos físicos de este efecto con miras a mejor comprender las diferentes aproximaciones con que históricamente se ha abordado su modelado.

1.2. MODIFICACIÓN DE LAS CURVAS CARACTERÍSTICAS DEL MOTOR DE INDUCCIÓN MEDIANTE EL DISEÑO DE LA CONFIGURACIÓN ROTÓRICA.

Las modificaciones en el diseño rotórico del motor de inducción permiten obtener una amplia gama de curvas características posibles, adaptables a las exigencias de cada aplicación en particular. Con miras a sistematizar este hecho, los organismos de normalización IEC en Europa y NEMA en Estados Unidos han definido una serie de “clases de diseño”, representadas cada una de ellas por una característica mecánica típica (Fig. 1).

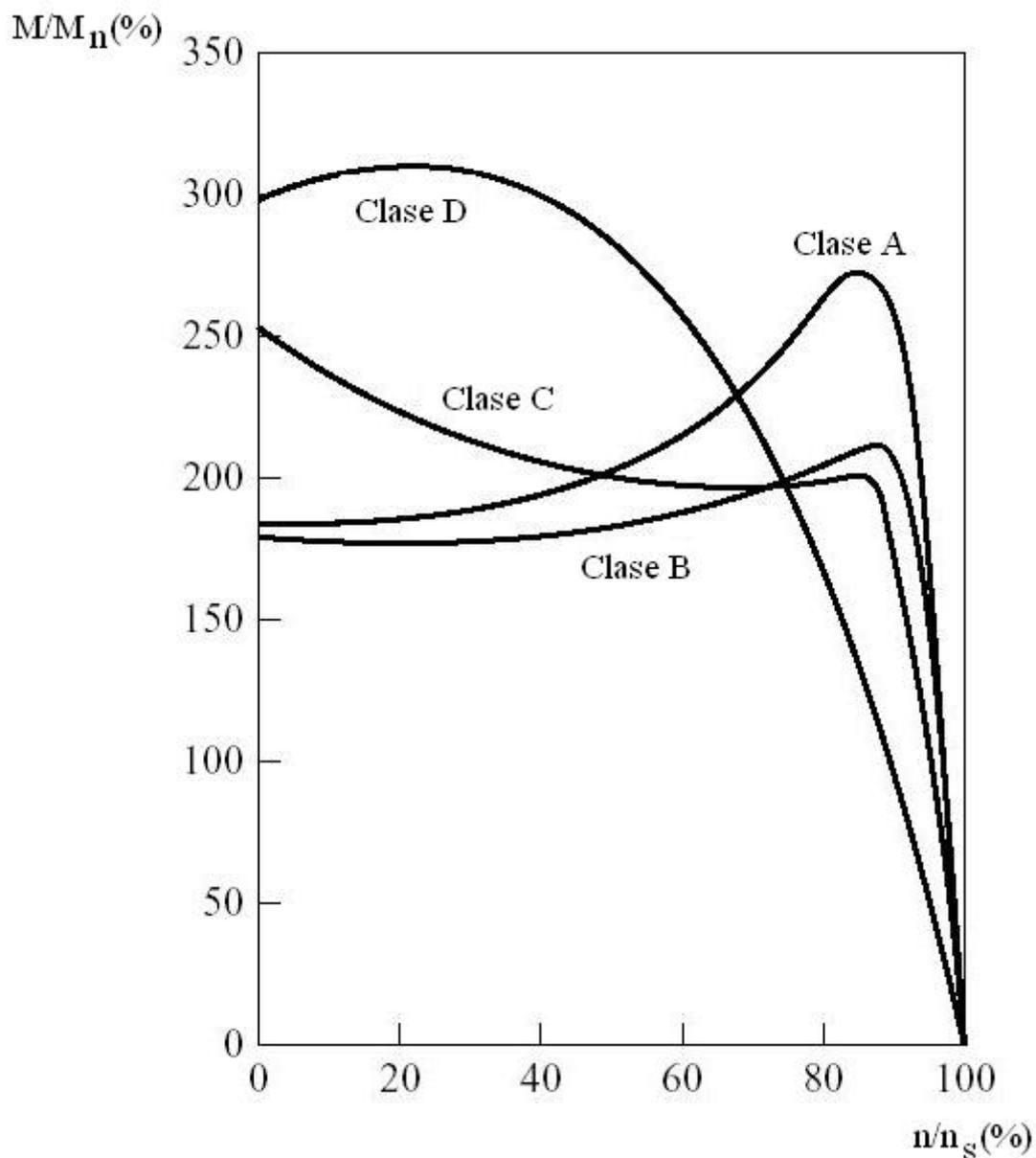


Fig. 1.1. Características mecánicas típicas de las diferentes clases de diseño rotórico.

La clase de diseño A corresponde al motor de inducción estándar y se caracteriza por un deslizamiento de plena carga inferior al 5%, un par máximo entre el 200% y el 300% del nominal, que se produce a un bajo deslizamiento (inferior al 20%) y un par de arranque igual o mayor al nominal, así como un buen rendimiento. El principal inconveniente asociado a esta clase de diseño es su elevada corriente de arranque, que oscila entre el 500% y el 800% del valor nominal.

Por otra parte, la clase de diseño D se caracteriza por un alto par de arranque (del orden del 300% del nominal), que se tienen a un elevado deslizamiento (que puede llegar hasta el 100%) y una baja corriente de arranque; no obstante, su deslizamiento de plena carga es considerable, situándose típicamente entre el 7% y el 11%.

Con un adecuado diseño de la configuración rotórica, puede lograrse combinar las características más deseables de las clases de diseño A y D comentadas anteriormente, esto es: un par elevado y una baja corriente en el arranque, típicos de la clase D de diseño, y por otra parte, el bajo deslizamiento en la zona de trabajo y el buen rendimiento de la clase A.

La figura 1.2, en sus apartados a) y d), muestra secciones transversales de rotores correspondientes a las clases de diseño A y D, respectivamente.

En lo que respecta a la chapa rotórica correspondiente a la clase de diseño A, se observa que la forma de sus ranura determina que las barras que estas alojarán serán relativamente anchas – por lo que la resistencia rotórica será baja- y también que estas quedarán dispuestas cerca de la superficie rotórica, y por tanto, cerca del estator. Esto último repercutirá en que un mayor número de líneas de flujo rotórico puedan enlazar a los devanados estatóricos, dando lugar a una baja reactancia de dispersión.

Por otra parte, la chapa rotórica correspondiente a la clase de diseño D, revela ranuras que alojarán barras más estrechas, aunque también de disposición cercana a la superficie rotórica. Ello determinará una resistencia rotórica elevada, por la menor sección transversal de las barras, y baja reactancia de dispersión.

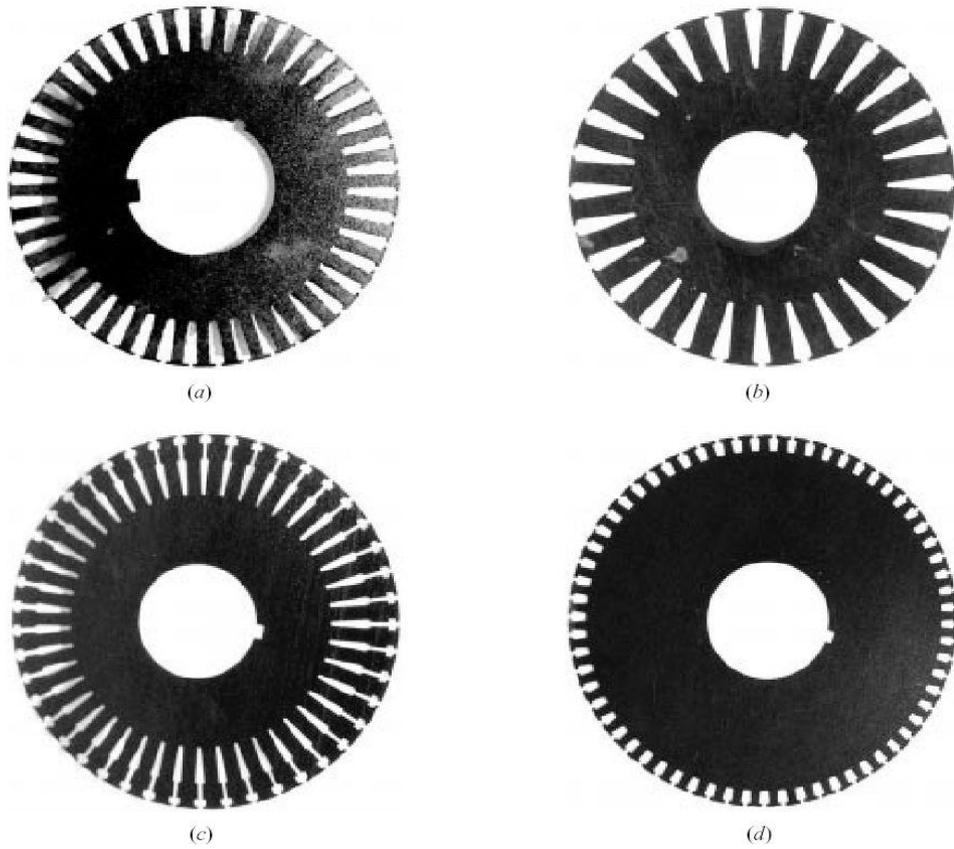


Figura 1.2. Chapas rotóricas típicas de las clases de diseño a) A, b) B, c) C, d) D.

El examen de las expresiones del par máximo y su deslizamiento correspondiente, para el motor trifásico de inducción con una sola jaula en régimen permanente, justifica las particulares características de las clases de diseño A y D. Así, para el deslizamiento de par máximo, se tiene:

$$s_{Mmax} = \frac{R_2'}{\sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_2')^2}} \quad (1.1)$$

esto es, a igualdad del resto de parámetros, un motor con mayor resistencia rotórica desarrollará su par máximo a un deslizamiento proporcionalmente mayor, como sucede en la clase D de diseño.

Por otro lado, el valor del par máximo es:

$$M_{\max} = \frac{m_1 U_1^2}{2\pi \frac{n_1}{60} 2 \left(R_1 + \sqrt{R_1^2 + (X_1 + X_2')^2} \right)} \quad (1.2)$$

con lo que el par máximo no variará con la resistencia rotórica, sino que únicamente se modificará el deslizamiento al que este se produce.

También, por su mayor impedancia equivalente, la corriente en el arranque se verá reducida, pero disminuirá su rendimiento, dadas las mayores pérdidas rotóricas en el cobre, proporcionales al deslizamiento, que será mayor en la zona de trabajo del motor.

La obtención de curvas características que mostrasen un par elevado y/o una corriente reducida en el arranque, pero a la vez bajo deslizamiento en la zona de trabajo y buen rendimiento, requeriría de una resistencia rotórica variable, elevada en el arranque y reducida en la zona de trabajo. Dichos efectos pueden lograrse con perfiles de ranura como los mostrados en los apartados b) y c) de la figura 2.

La chapa rotórica del apartado b), correspondiente a la clase B de diseño, exhibe ranuras de relativa anchura, que darán lugar a una baja resistencia rotórica, pero son de mayor profundidad que las propias de la clase A, lo cual da pie a que el efecto pelicular cobre importancia en esta configuración rotórica.

Las corrientes circulantes por las porciones superiores de las barras rotóricas, por su proximidad al estator, darán lugar a líneas de flujo que en mayor proporción conseguirán concatenar los devanados estáticos, siendo reducida, por tanto, la inductancia de dispersión rotórica en esta zona. Por contra, en las regiones profundas de la ranura, un mayor número de líneas de flujo no llegará a enlazar al estator, dando aquí lugar a una mayor inductancia rotórica de dispersión.

En la zona de trabajo del motor, la baja frecuencia de la corriente rotórica minimizará el peso –frente a la resistencia de la barra- de esta reactancia de dispersión creciente con la profundidad de ranura. En consecuencia, la impedancia equivalente de las distintas porciones de la barra puede considerarse prácticamente idéntica, dando lugar a una densidad de corriente uniforme a lo largo del conductor.

Por otra parte, en el arranque, la mayor frecuencia de la corriente rotórica potencia el efecto de la inductancia de dispersión creciente con la profundidad de la ranura, por lo que las porciones inferiores de la barra presentan una mayor impedancia al paso de la corriente, que circulará en mayor medida por las regiones superiores del conductor, provocando así una reducción en el área efectiva de la barra por la que hay circulación de corriente, y en consecuencia, un aumento de la resistencia rotórica.

Así, para la clase B de diseño, la resistencia rotórica reducida en la zona de trabajo -dada la relativa anchura de la ranura- dará lugar a un pequeño deslizamiento (menor al 5%) a plena carga, así como a un buen rendimiento, mientras que la elevación de la impedancia rotórica en el arranque debida al efecto de la ranura profunda proporcionará un par en el arranque similar al de la clase A pero con una corriente del orden de un 25% inferior. Típicamente, el par máximo se sitúa en torno al 200% del de plena carga, siendo por tanto inferior al de la clase A de diseño debido a la progresiva elevación de la impedancia rotórica con la frecuencia.

Debido a su menor corriente en el arranque, el motor con diseño rotórico de clase B, esto es, con ranura profunda, se va imponiendo progresivamente en todas las aplicaciones típicas de la clase A de diseño.

Por otra parte, la chapa rotórica mostrada en el apartado c) de la figura 1.2. a una configuración en doble jaula. La jaula más externa tiene menor sección que la interna, luego su resistencia será mayor, efecto que puede potenciarse si además se construye con un metal de mayor resistividad. También, al estar situada más cerca de la superficie rotórica presentará menor inductancia de dispersión que la jaula interna. Entre las dos jaulas existe una delgada rendija de separación que aumenta aun más el flujo de dispersión de la jaula interior.

La distribución de la corriente rotórica entre las dos jaulas en función de las impedancias que, según la frecuencia, presenten las mismas, es de este modo similar a la que se tiene en el motor de ranura profunda, con el añadido de que la diferencia de comportamientos en las zonas de alto y bajo deslizamiento puede aun remarcarse más con un adecuado diseño.

Así, durante el arranque, prácticamente solo la jaula exterior – por su menor reactancia- es efectiva, obteniéndose un elevado par de arranque y una baja corriente debido a la alta resistencia rotórica. En cambio, en la zona de trabajo, con reactancias de dispersión despreciables debido a la baja frecuencia, la corriente circulará preponderantemente por la

jaula interna -de menor resistencia- consiguiéndose un bajo deslizamiento y un buen rendimiento.

La estructura de doble jaula permite obtener curvas características típicas tanto de la clase B de diseño como de la clase C, caracterizada esta última por su elevado par de arranque (típicamente hasta del 250% del par nominal) y su bajo deslizamiento a plena carga.

Esta forma constructiva resulta de ejecución más cara que las restantes clases de diseño, pero con todo es aun más económica que el motor de rotor bobinado (válido también para suministrar un elevado par de arranque), y con la ventaja añadida de no requerir el mantenimiento extra de anillos rozantes ni escobillas.

Las características mecánicas presentadas en la figura 1.1 son representativas de sus correspondientes clases de diseño, pero evidentemente la amplia variedad de configuraciones posibles para las ranuras dará lugar a toda una gama de curvas distintas.

Partiendo de la base de que el motor de inducción con ranura profunda hoy en día se ha impuesto al motor estándar de clase A de diseño dada su menor corriente y/o par de arranque, para obtener una adecuada representación de su funcionamiento este efecto ha de ser tenido en cuenta en su modelado, especialmente en aplicaciones donde el régimen dinámico cobra importancia o cuando la alimentación es a través de convertidor estático.

A continuación se recogen sucintamente los diversos enfoques con que la cuestión del modelado del motor de inducción con ranura profunda ha sido abordada.

1.3. MODELADO DEL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN CON INCLUSIÓN DEL EFECTO DE RANURA PROFUNDA: DIFERENTES ENFOQUES.

La aproximación clásica para tomar en consideración el efecto de la ranura profunda sobre la corriente y el par del motor de inducción tradicionalmente ha consistido en recurrir a curvas correctoras para la resistencia y reactancia rotóricas [1]. Sin embargo, estas son de aplicación únicamente si la frecuencia rotórica es constante, lo que invalida su uso para el análisis transitorio o para la alimentación desde inversor.

Excluyendo de este estudio el modelado del efecto pelicular basado en técnicas de elementos finitos, los diferentes enfoques con que esta tarea es abordada pueden agruparse en dos grandes categorías:

- 1) métodos basados en la caracterización de la impedancia de una barra rotórica, con posterior extensión al total de barras del rotor;
- 2) modelado del motor con ranura profunda como si se tratase de un motor de jaula doble (o múltiple).

A continuación se pasa a reseñar las referencias más significativas correspondientes a la clasificación anterior.

Pertenciente al primer grupo, en [6] se parte del cálculo de la inductancia de dispersión y la resistencia de una barra rotórica rectangular alojada en una ranura abierta, para lo cual la divide transversalmente en “n” secciones idénticas, tales que en cada una de ellas pueda considerarse aproximadamente uniforme la densidad de corriente. A continuación, utiliza un circuito en “T” para modelar a cada una de las secciones transversales, de manera que la resistencia de la sección quede ubicada en la rama central y la mitad de su correspondiente inductancia de dispersión quede a cada lado del travesaño, como se muestra en la figura 1.3.

Los valores de resistencia e inductancia de dispersión de cada sección transversal son entonces convenientemente modificados para tomar en consideración al total de barras rotóricas, y seguidamente referidos al estator.

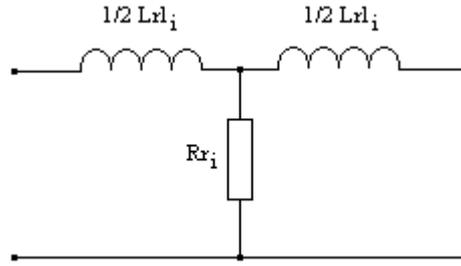


Figura 1.3. Modelo de una sección transversal de barra rotórica mediante un circuito en “T”.

Tras ello, el ensamblaje consecutivo de determinado número de estos circuitos elementales proporciona el modelo rotórico para el motor, que combinado con la porción correspondiente al estator del esquema clásico en ejes dq completa el modelo de régimen dinámico. Se sugiere el uso de la referencia rotórica para los ejes coordenados, evitándose así la aparición de tensiones rotacionales en la formulación de las ecuaciones del circuito rotórico, ya de por sí complicado.

En definitiva, el esquema completo para régimen dinámico propuesto se muestra en la figura 1.4.:

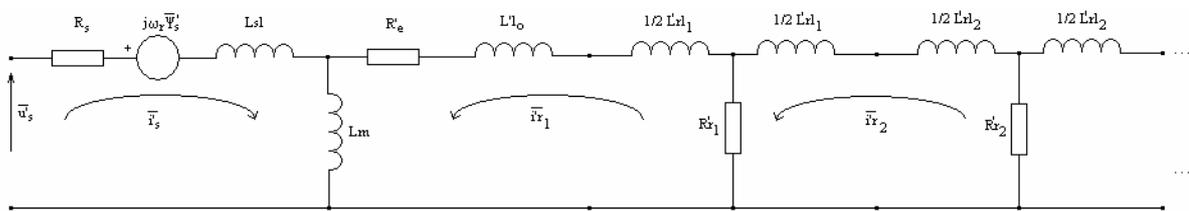


Figura 1.4. Esquema para régimen dinámico del motor de inducción con ranura profunda con circuitos “T” en cascada.

donde el uso del apóstrofe en la notación de parámetros y variables rotóricas indica que están referidos al estator, mientras que en las variables estáticas significa que no están expresadas en su referencia natural ligada al estator, sino en referencia rotórica.

La concatenación de circuitos en “T” está precedida, para mayor precisión, por la resistencia R'_e de los anillos de cortocircuito y la inductancia L'_l0 asociada al flujo de dispersión que se da por encima de las barras rotóricas.

El conjunto de ecuaciones que corresponden a este modelo, formuladas en términos de fasores

espaciales:¹

$$\begin{aligned}
 \overline{u}'_s &= R'_s \overline{i}'_s + \frac{d}{dt} \overline{\Psi}'_s + j\omega_r \overline{\Psi}'_s \\
 0 &= (R'_e + R'_{r1}) \overline{i}'_{r1} - R'_{r1} \overline{i}'_{r2} + \frac{d}{dt} \overline{\Psi}'_{r1} \\
 0 &= -R'_{r1} \overline{i}'_{r1} + (R'_{r1} + R'_{r2}) \overline{i}'_{r2} + \frac{d}{dt} \overline{\Psi}'_{r2} \\
 &\quad \vdots \\
 0 &= -R'_{rn-1} \overline{i}'_{rn-1} + (R'_{rn-1} + R'_{rn}) \overline{i}'_{rn} + \frac{d}{dt} \overline{\Psi}'_{rn}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

donde:

$$\begin{aligned}
 \overline{\Psi}'_s &= L_{sl} \overline{i}'_s + L_m (\overline{i}'_s + \overline{i}'_{r1}) \\
 \overline{\Psi}'_{r1} &= \left(L'_{l0} + \frac{L'_{rl1}}{2} \right) \overline{i}'_{r1} + L_m (\overline{i}'_s + \overline{i}'_{r1}) \\
 \overline{\Psi}'_{r2} &= \left(\frac{L'_{rl1}}{2} + \frac{L'_{rl2}}{2} \right) \overline{i}'_{r2} \\
 &\quad \vdots \\
 \overline{\Psi}'_{rn} &= \left(\frac{L'_{rln-1}}{2} + \frac{L'_{rln}}{2} \right) \overline{i}'_{rn}
 \end{aligned} \tag{1.4}$$

que complementado con la ecuación para el par electromagnético y la ecuación mecánica completa el sistema:

$$t_e = \frac{3}{2} PL_m (\overline{i}'_s \wedge \overline{i}'_{r1}) \tag{1.5}$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega_r}{dt} + \frac{\rho}{P} \omega_r \tag{1.6}$$

Como observaciones al método propuesto, cabe decir que se precisa del conocimiento de la geometría de la barra rotórica para el cálculo de los parámetros de las secciones transversales, datos que no siempre estarán disponibles.

¹ Véase página I. Notación.

Por otra parte, el número de secciones transversales a emplear, y con ello el número de ecuaciones rotóricas del modelo para obtener resultados razonablemente precisos se incrementa tanto con la profundidad de la ranura considerada, como con el nivel de exigencia del transitorio a estudiar, así como con la frecuencia.

Partiendo de la base anterior, en [9] se comparan los resultados procedentes del empleo del circuito en “T” para el modelado de las secciones transversales con los obtenidos con la utilización de otros esquemas alternativos, según la figura 1.5:

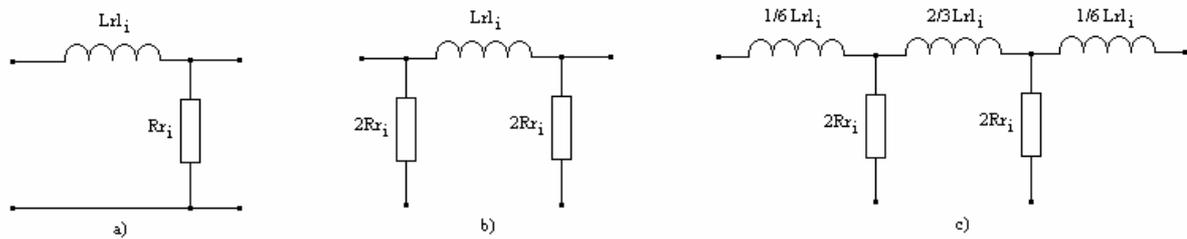


Figura 1.5. Circuitos alternativos propuestos para el modelado de las secciones transversales: a) en “L” invertida, b) en “II”, c) en “II” mejorado.

La comparación, en un rango de frecuencias típico de la alimentación mediante inversor, revela al circuito en “II” mejorado como el que proporciona mejores resultados con un menor número de secciones en paralelo, seguido de cerca por los circuitos en “II” y en “T”, siendo las prestaciones del circuito en “L” invertida netamente inferiores.

Para todos los circuitos se observa, no obstante una disminución en la precisión de los resultados a medida que aumenta la frecuencia de estudio, hecho derivado de la hipótesis de igual densidad de corriente en todas las secciones transversales.

Para reducir este efecto, se propone un refinamiento consistente en dividir las barras rotóricas en secciones de anchura creciente con la profundidad según determinada serie geométrica, esto es, se toma un número mayor de secciones de menor grosor en la parte superior de la barra, para así dar mejor cuenta de la mayor densidad de corriente presente en la porción superior de esta debido al efecto pelicular.

En lo que toca al segundo enfoque mencionado para el modelado del efecto de ranura profunda, consistente en aplicar el modelo típico del motor de doble jaula, este halla su

justificación en el hecho de que siempre será posible encontrar una doble jaula equivalente cuyo lugar de la impedancia se ajuste con bastante precisión al del rotor con ranura profunda [18].

Mencionando sólo alguna de las aportaciones más novedosas a esta propuesta, en [12] se proponen esquemas con doble y triple jaula en los que, como particularidad, en el flujo rotórico de dispersión se segregan los efectos de saturación –introduciendo la inductancia saturable L_{sat} , invariable con la frecuencia- y de ranura profunda, como se muestra en la figura 1.6:

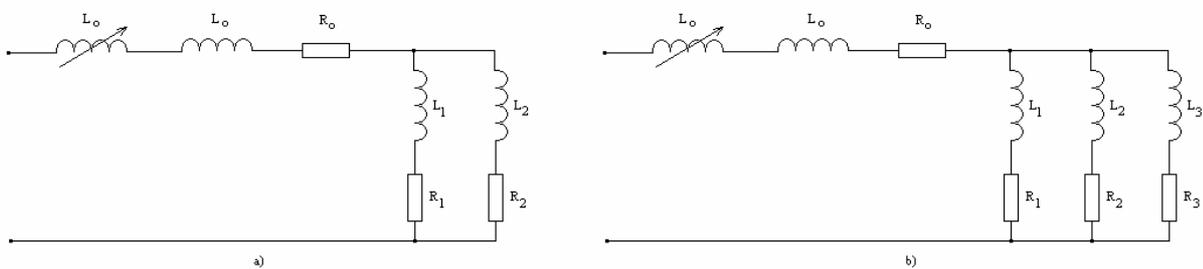


Figura 1.6. Modelos rotóricos (en referencia rotórica) a) de doble jaula y b) de triple jaula, con segregación de los efectos de saturación de la inductancia de dispersión y de ranura profunda.

Más que tratar de identificar los elementos de los esquemas de doble o triple jaula con entidades físicamente existentes en la máquina con ranura profunda, se persigue asignarles valores que produzcan el máximo acuerdo entre la impedancia rotórica de la máquina real y la impedancia de entrada de los modelos rotóricos propuestos, para el rango de frecuencias de interés, lo que en este caso se consigue mediante un proceso de optimización que minimiza una variable de coste.

Respecto al esquema de triple jaula, en [12] se concluye que resulta más indicado para máquinas de potencias elevadas, en las que el efecto de ranura profunda es más acusado.

En [5] se propone un modelo como el mostrado en la figura 1.7:

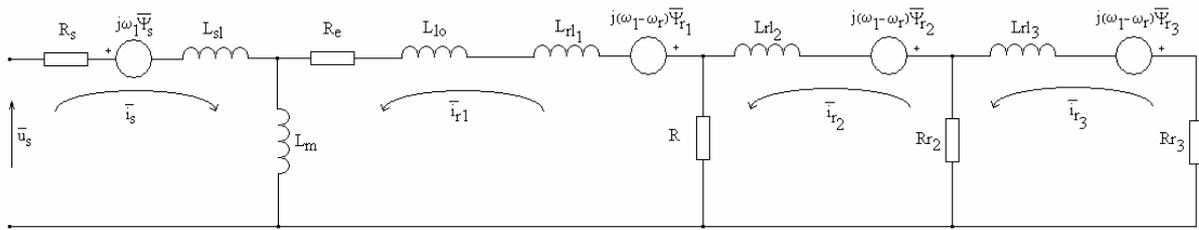


Figura 1.7. Esquema equivalente para régimen dinámico del motor trifásico de inducción con ranura profunda.

Aquí, al igual que en [12], para obtener la máxima semejanza entre la impedancia rotórica real y la del modelo propuesto se recurre a la minimización de una función de coste, imponiéndose restricciones adicionales sobre los parámetros para reducir la tarea de optimización.

En [16] se sugieren un esquema alternativo, mostrado en la figura 1.8 (es el esquema para régimen permanente):

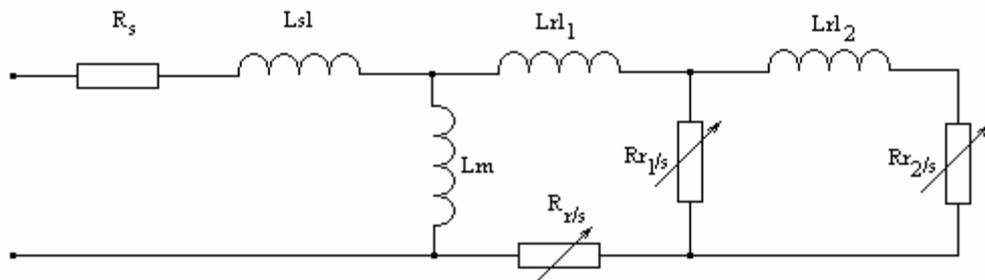


Figura 1.8. Esquema equivalente para el régimen permanente del motor trifásico de inducción con ranura profunda.

En [15], en cambio, se opta por la utilización del esquema equivalente convencional correspondiente al motor de una sola jaula, pero con resistencia e inductancia de dispersión variables con el deslizamiento, cuya ley de variación determina a partir de un ensayo de aceleración de la máquina.

Por último, cabe citar el enfoque dado en [17], que puede considerarse como un “híbrido” entre las dos categorías de métodos para el modelado del efecto de ranura profunda mencionadas al principio de la presente sección.

Inicialmente, se divide conceptualmente la barra rotórica en dos partes, a semejanza de las jaulas externa e interna, asignando a cada una de las dos partes una fracción de la resistencia e inductancia de dispersión rotóricas totales. A partir de aquí, en la línea expuesta anteriormente en [4], subdivide cada una de las dos porciones de la barra en determinado número de secciones transversales de grosor creciente con la profundidad que les corresponde dentro de la porción de barra a que pertenecen, según una serie geométrica y modelando cada sección según el circuito en “II” mejorado.

Como en [4], se usa la referencia rotórica para evitar la aparición de las tensiones rotacionales en las ecuaciones del rotor, y los parámetros del modelo se determinan mediante un método de ajuste de mínimos cuadrados. En definitiva, se obtiene un esquema como el mostrado en la figura 1.4, pero con restricciones adicionales sobre los parámetros rotóricos, según estos pertenezcan a capas de las porciones superior o inferior en que conceptualmente se ha fraccionado la barra.

Aunque no se justifica con claridad la razón para adoptar este enfoque, cabe destacar como aspecto positivo que, hasta donde ha podido acceder quien suscribe, constituye la única referencia en la que el modelo construido por conexión en cascada de los circuitos representativos de las secciones transversales se compara con el modelo de doble jaula y también con resultados experimentales.

Pese a la ausencia de estudios comparativos rigurosos entre ambas técnicas de modelado, parece existir consenso en que el uso del modelo de doble jaula conducirá a resultados menos exactos que los teóricamente alcanzables mediante la subdivisión de la barra rotórica en secciones transversales.

De hecho, la misma justificación ofrecida en la literatura [18] para la aplicación del modelo de doble jaula lleva implícito este reconocimiento: “siempre se podrá hallar una doble jaula equivalente cuyo lugar de la impedancia se aproxime al lugar de la impedancia del rotor con ranura profunda”.

Por otra parte, es obvio que cuantos más parámetros tenga el modelo, esto es, de cuantos más grados de libertad disponga, mejor podrá reproducir el comportamiento complejo de las diferentes magnitudes a estudiar.

Pese a la mayor precisión teóricamente alcanzable a base de subdividir la ranura en un número suficiente de secciones transversales, cabe recordar los inconvenientes de esta técnica, ya mencionados anteriormente. Por una parte, se precisa tanto del conocimiento de la geometría de la barra rotórica como del número total de barras para poder determinar la resistencia e inductancia de dispersión de cada sección, cálculo que puede no ser trivial, o de hecho imposible si se carece de estos datos. Por otro lado, el número de secciones transversales a emplear aumenta con la exigencia del régimen transitorio, con la profundidad de la ranura y con la frecuencia, con lo que el número de ecuaciones rotóricas del modelo es, en principio, indeterminado.

Como ventajas de la aplicación del modelo de doble (o múltiple) jaula puede reseñarse la determinación de sus parámetros a través de ensayo o el número predeterminado (y pequeño) de ecuaciones rotóricas (una ecuación fasorial por cada jaula adicional).

Recordando que los modelos son únicamente aproximaciones a una realidad compleja, serán en definitiva las exigencias de cada aplicación particular las que decidirán la idoneidad de cada enfoque.

Para los casos objeto de estudio en la presente tesis, en los que prima la velocidad de cálculo, se ha optado por la utilización del modelo de doble jaula convencional para la caracterización del efecto de ranura profunda en el motor trifásico de inducción, habiéndose valorado la facilidad de determinación de sus parámetros y el número menor de ecuaciones que lo componen.

1.4. MODELO DE DOBLE JAULA DEL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN.

En la figura 1.9. se representa el esquema equivalente por fase para régimen dinámico del motor trifásico de inducción con doble jaula, en términos de fasores espaciales y expresado en el sistema genérico de referencia:

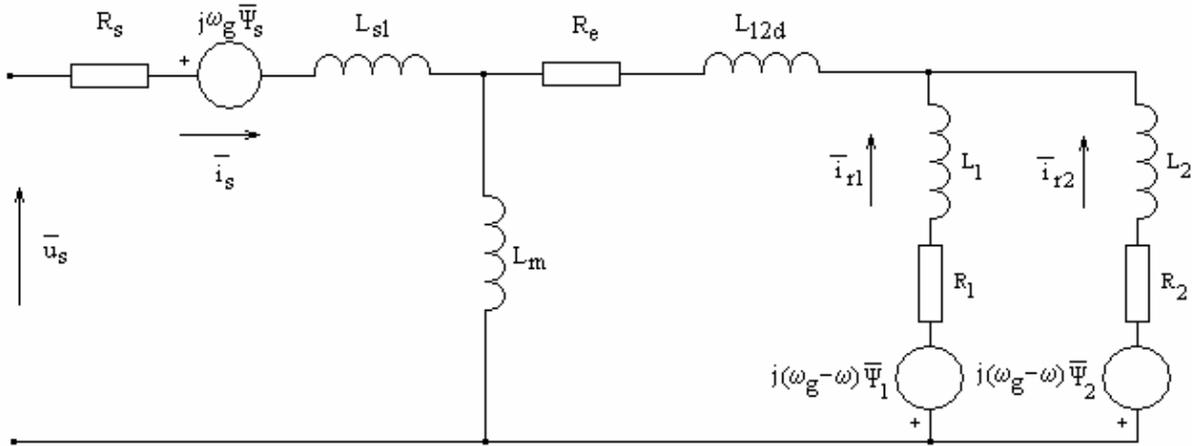


Figura 1.9. Esquema equivalente para régimen dinámico del motor de inducción con doble jaula, en término de fasores espaciales y en el sistema genérico de referencia.

En lo que toca a los parámetros R_s y L_{sl} , representan la resistencia e inductancia de dispersión del devanado estatórico, L_m es la inductancia magnetizante, supuesta constante y correspondiente al codo de la característica magnética, R_e es la resistencia de los anillos comunes de cortocircuito (este elemento no existe en el caso del motor de ranura profunda, por lo que en lo sucesivo se eliminará del esquema), L_{12d} representa la inductancia mutua de dispersión entre las dos jaulas, y L_{1d} , R_1 y L_{2d} , R_2 son las inductancias de dispersión y resistencias de las jaulas interna y externa, respectivamente.

Pese a que –con miras a una mayor simplicidad- no se denota de ningún modo especial en la nomenclatura utilizada, los parámetros rotóricos se entienden referidos al estator, al igual que las variables rotóricas.

Por otra parte, \bar{u}_s, \bar{i}_s son los fasores espaciales de tensión y corriente estatórica, e \bar{i}_1, \bar{i}_2 representan los fasores espaciales de corriente rotórica por las jaulas interna y externa, respectivamente, expresados en el sistema genérico de referencia.

Por lo demás, las hipótesis simplificativas asumidas de partida son las habituales, esto es: longitud de entrehierro constante, comportamiento magnético lineal, permeabilidad magnética del hierro infinita, densidad de flujo radial en el entrehierro, no se consideran las pérdidas en el hierro, devanados trifásicos simétricos y sinusoidalmente distribuidos, que originan una onda de f.m.m. sinusoidal en el entrehierro y no existen componentes homopolares.

Las ecuaciones que conforman el modelo son:

$$\bar{u}_s = R_s \bar{i}_s + \frac{d}{dt} \bar{\Psi}_s + j\omega_g \bar{\Psi}_s \quad (1.7)$$

$$0 = R_1 \bar{i}_1 + \frac{d}{dt} \bar{\Psi}_1 + j(\omega_g - \omega) \bar{\Psi}_1 \quad (1.8)$$

$$0 = R_2 \bar{i}_2 + \frac{d}{dt} \bar{\Psi}_2 + j(\omega_g - \omega) \bar{\Psi}_2 \quad (1.9)$$

donde $\bar{\Psi}_s$ representa al fasor espacial de flujo estático y $\bar{\Psi}_1$, $\bar{\Psi}_2$ son los fasores espaciales de flujo rotórico de las jaulas interna y externa respectivamente, ω es la velocidad eléctrica del rotor y ω_g es la velocidad del sistema genérico de referencia.

La vinculación entre los fasores espaciales de flujo y corriente es:

$$\bar{\Psi}_s = L_{s1} \bar{i}_s + L_m (\bar{i}_s + \bar{i}_1 + \bar{i}_2) = L_s \bar{i}_s + L_m (\bar{i}_1 + \bar{i}_2) \quad (1.10)$$

$$\bar{\Psi}_1 = L_{11} \bar{i}_1 + L_{121} (\bar{i}_1 + \bar{i}_2) + L_m (\bar{i}_s + \bar{i}_1 + \bar{i}_2) = L_1 \bar{i}_1 + L_{12} \bar{i}_2 + L_m \bar{i}_s \quad (1.11)$$

$$\bar{\Psi}_2 = L_{21} \bar{i}_2 + L_{121} (\bar{i}_1 + \bar{i}_2) + L_m (\bar{i}_s + \bar{i}_1 + \bar{i}_2) = L_2 \bar{i}_2 + L_{12} \bar{i}_2 + L_m \bar{i}_s \quad (1.12)$$

donde rigen las relaciones:

$$L_s = L_{s1} + L_m \quad (1.13)$$

$$L_{12} = L_{121} + L_m \quad (1.14)$$

$$L_1 = L_{11} + L_{121} + L_m = L_{11} + L_{12} \quad (1.15)$$

$$L_2 = L_{21} + L_{121} + L_m = L_{21} + L_{12} \quad (1.16)$$

Opcionalmente, puede hacerse uso del concepto de fasor espacial de flujo magnetizante, definido como:

$$\bar{\Psi}_m = L_m \bar{i}_m = L_m (\bar{i}_s + \bar{i}_1 + \bar{i}_2) \quad (1.17)$$

con lo que las relaciones algebraicas entre los fasores espaciales de flujos y corrientes quedan reformuladas como sigue:

$$\bar{\Psi}_s = L_{sl} \bar{i}_s + \bar{\Psi}_m \quad (1.18)$$

$$\bar{\Psi}_1 = L_{11} \bar{i}_1 + L_{12l} (\bar{i}_1 + \bar{i}_2)_s + \bar{\Psi}_m \quad (1.19)$$

$$\bar{\Psi}_2 = L_{21} \bar{i}_2 + L_{12l} (\bar{i}_1 + \bar{i}_2)_s + \bar{\Psi}_m \quad (1.20)$$

El conjunto descrito, complementado con la expresión para el par electromagnético ² y la ecuación mecánica, completa el modelo:

$$t_e = -\frac{3}{2} P \frac{L_m}{L_s} \bar{\Psi}_s \wedge (\bar{i}_1 + \bar{i}_2) \quad (1.21)$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\rho}{P} \omega \quad (1.22)$$

siendo t_e y t_l los pares electromagnético y de carga, P el número de pares de polos del motor, J el momento de inercia del conjunto motor-carga y ρ el coeficiente de rozamiento viscoso.

Para su resolución, las ecuaciones expresadas en términos de fasores espaciales deberán separarse en sus partes real e imaginaria, con lo que el conjunto final conformará un sistema de 7º orden:

$$u_{sx} = R_s i_{sx} + \frac{d}{dt} \Psi_{sx} - \omega_g \Psi_{sy} \quad (1.23)$$

$$u_{sy} = R_s i_{sy} + \frac{d}{dt} \Psi_{sy} + \omega_g \Psi_{sx} \quad (1.24)$$

$$0 = R_1 i_{1x} + \frac{d}{dt} \Psi_{1x} - (\omega_g - \omega) \Psi_{1y} \quad (1.25)$$

$$0 = R_1 i_{1y} + \frac{d}{dt} \Psi_{1y} + (\omega_g - \omega) \Psi_{1x} \quad (1.26)$$

² Se ha tomado la llamada definición asimétrica de fasor espacial, esto es: $\bar{z} = \frac{2}{3} \left(\frac{-}{z_a} + e^{j\frac{2\pi}{3}} \frac{-}{z_b} + e^{j\frac{4\pi}{3}} \frac{-}{z_c} \right)$,

también denominada transformación de potencia no invariante.

$$0 = R_2 i_{2x} + \frac{d}{dt} \Psi_{2x} - (\omega_g - \omega) \Psi_{2y} \quad (1.27)$$

$$0 = R_2 i_{2y} + \frac{d}{dt} \Psi_{2y} + (\omega_g - \omega) \Psi_{2x} \quad (1.28)$$

$$t_e - t_l = \frac{J}{P} \frac{d\omega}{dt} + \frac{\rho}{P} \omega \quad (1.29)$$

complementado con las relaciones algebraicas:

$$\Psi_{sx} = L_{sl} i_{sx} + L_m (i_{sx} + i_{1x} + i_{2x}) = L_s i_{sx} + L_m (i_{1x} + i_{2x}) \quad (1.30)$$

$$\Psi_{sy} = L_{sl} i_{sy} + L_m (i_{sy} + i_{1y} + i_{2y}) = L_s i_{sy} + L_m (i_{1y} + i_{2y}) \quad (1.31)$$

$$\Psi_{1x} = L_{1l} i_{1x} + L_{12l} (i_{1x} + i_{2x}) + L_m (i_{sx} + i_{1x} + i_{2x}) = L_1 i_{1x} + L_{12} i_{2x} + L_m i_{sx} \quad (1.32)$$

$$\Psi_{1y} = L_{1l} i_{1y} + L_{12l} (i_{1y} + i_{2y}) + L_m (i_{sy} + i_{1y} + i_{2y}) = L_1 i_{1y} + L_{12} i_{2y} + L_m i_{sy} \quad (1.33)$$

$$\Psi_{2x} = L_{2l} i_{2x} + L_{12l} (i_{1x} + i_{2x}) + L_m (i_{sx} + i_{1x} + i_{2x}) = L_2 i_{2x} + L_{12} i_{1x} + L_m i_{sx} \quad (1.34)$$

$$\Psi_{2y} = L_{2l} i_{2y} + L_{12l} (i_{1y} + i_{2y}) + L_m (i_{sy} + i_{1y} + i_{2y}) = L_2 i_{2y} + L_{12} i_{1y} + L_m i_{sy} \quad (1.35)$$

o bien, si se incluye al fasor de flujo magnetizante:

$$\Psi_{sx} = L_{sl} i_{sx} + \Psi_{mx} \quad (1.36)$$

$$\Psi_{sy} = L_{sl} i_{sy} + \Psi_{my} \quad (1.37)$$

$$\Psi_{1x} = L_{1l} i_{1x} + L_{12l} (i_{1x} + i_{2x}) + \Psi_{mx} \quad (1.38)$$

$$\Psi_{1y} = L_{1l} i_{1y} + L_{12l} (i_{1y} + i_{2y}) + \Psi_{my} \quad (1.39)$$

$$\Psi_{2x} = L_{2l} i_{2x} + L_{12l} (i_{1x} + i_{2x}) + \Psi_{mx} \quad (1.40)$$

$$\Psi_{2y} = L_{2l} i_{2y} + L_{12l} (i_{1y} + i_{2y}) + \Psi_{my} \quad (1.41)$$

además de:

$$t_e = \frac{3}{2} P \frac{L_m}{L_s} (\Psi_{sy} (i_{1x} + i_{2x}) - \Psi_{sx} (i_{1y} + i_{2y})) \quad (1.42)$$

donde los subíndices x e y denotan al eje directo “x” y al eje en cuadratura “y” del sistema genérico de referencia.

En el presente trabajo, se ha optado por la formulación en espacio de estado del sistema, para su integración mediante el programa de cálculo Matlab/Simulink[®].

En consecuencia, se plantea el problema de seleccionar un conjunto de variables de estado que conduzca a una formulación práctica del sistema, en lo que tiene que ver con la complejidad de las expresiones resultantes.

En vista de las ecuaciones mostradas anteriormente, para las expresiones fasoriales de la parte eléctrica del sistema debe seleccionarse como variables de estado tres de los ocho fasores espaciales existentes, a saber: \bar{i}_s , \bar{i}_1 , \bar{i}_2 , \bar{i}_m , $\bar{\Psi}_s$, $\bar{\Psi}_1$, $\bar{\Psi}_2$, $\bar{\Psi}_m$. Para la ecuación mecánica se tomará la velocidad eléctrica rotórica ω (la velocidad angular mecánica multiplicada por el número de pares polos) como variable de estado.

La selección de tres variables de estado de entre un conjunto de ocho posibles conduce, en principio, a un total de 56 combinaciones diferentes. De estas, deberá eliminarse no obstante, aquellas combinaciones en las que exista dependencia lineal entre variables.

Así, las 6 combinaciones de las que forma parte la pareja $\bar{\Psi}_m$, \bar{i}_m deberán ser desechadas, pues $\bar{\Psi}_m = L_m \bar{i}_m$; lo mismo sucede con las combinaciones $(\bar{\Psi}_s, \bar{i}_s, \bar{\Psi}_m)$ y $(\bar{\Psi}_s, \bar{i}_s, \bar{i}_m)$, dado que $\bar{\Psi}_s = L_{sl} \bar{i}_s + \bar{\Psi}_m = L_{sl} \bar{i}_s + L_m \bar{i}_m$.

En definitiva, se dispondrá de un total de 48 formulaciones posibles en espacio de estado para el modelo del motor trifásico de inducción con doble jaula.

En lo que tiene que ver con la complejidad de la formulación resultante, el conjunto más sencillo y el más complicado se obtiene con las selecciones $(\bar{\Psi}_s, \bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2)$ y $(\bar{i}_s, \bar{i}_1, \bar{i}_2)$, respectivamente, esto es, con fasores espaciales de flujos de estator y rotor por una parte, o bien, con fasores espaciales de corrientes estatóricas y rotóricas, por otra.

Así, considerando la notación de espacio de estado para sistemas no lineales, donde x es el vector de estado y u es el vector de entrada:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u \quad (1.43)$$

Para el caso de la selección de los flujos $\bar{\Psi}_s, \bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2$ como variables de estado se tendrá el sistema mostrado en (1.44).

$$\begin{bmatrix} \dot{\Psi}_{sx} \\ \dot{\Psi}_{sy} \\ \dot{\Psi}_{1x} \\ \dot{\Psi}_{1y} \\ \dot{\Psi}_{2x} \\ \dot{\Psi}_{2y} \\ \dot{\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_s(L_1L_2 - L_{12}^2)D\Psi_{sx} + \omega_g\Psi_{sy} - R_sL_m(L_{12} - L_2)/D\Psi_{1x} - R_sL_m(L_{12} - L_1)/D\Psi_{2x} \\ -\omega_g\Psi_{sx} - R_s(L_1L_2 - L_{12}^2)D\Psi_{sy} - R_sL_m(L_{12} - L_2)/D\Psi_{1y} - R_sL_m(L_{12} - L_1)/D\Psi_{2y} \\ -R_1L_m(L_{12} - L_2)/D\Psi_{sx} - R_1(L_sL_2 - L_m^2)D\Psi_{1x} + (\omega_g - \omega)\Psi_{1y} - R_1(L_m^2 - L_sL_{12})D\Psi_{2x} \\ -R_1L_m(L_{12} - L_2)/D\Psi_{sy} - R_1(L_sL_2 - L_m^2)D\Psi_{1y} - (\omega_g - \omega)\Psi_{1x} - R_1(L_m^2 - L_sL_{12})D\Psi_{2y} \\ -R_2L_m(L_{12} - L_1)/D\Psi_{sx} - R_2(L_m^2 - L_sL_{12})D\Psi_{1x} - R_2(L_sL_1 - L_m^2)D\Psi_{2x} + (\omega_g - \omega)\Psi_{2y} \\ -R_2L_m(L_{12} - L_1)/D\Psi_{sy} - R_2(L_m^2 - L_sL_{12})D\Psi_{1y} - R_2(L_sL_1 - L_m^2)D\Psi_{2y} - (\omega_g - \omega)\Psi_{2x} \\ \frac{3P^2L_m}{2J} \left((\Psi_{sx}\Psi_{1y} - \Psi_{sy}\Psi_{1x})(L_{12} - L_2) + (\Psi_{sx}\Psi_{2y} - \Psi_{sy}\Psi_{2x})(L_{12} - L_1) \right) - \frac{P}{J}t_1 - \frac{\rho}{J}\omega \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \end{bmatrix}$$

$$\text{donde : } D = L_s(L_1L_2 - L_{12}^2) + L_m^2(2L_{12} - L_1 - L_2) \quad (1.44)$$

Por otra parte, la ecuación (1.45) corresponde a la formulación que toma los fasores de corriente $\bar{i}_s, \bar{i}_1, \bar{i}_2$ como variables de estado. La comparación entre ambas formulaciones evidencia la mayor complejidad de esta última.

Pese a la mayor sencillez de las expresiones correspondientes al empleo de los fasores de flujo $\bar{\Psi}_s, \bar{\Psi}_1, \bar{\Psi}_2$, en la práctica no es muy utilizada, dado que la corriente estática suele requerirse como variable de salida y por tanto deben emplearse expresiones algebraicas adicionales para su determinación.

Entre las dos formulaciones mostradas, situadas en polos opuestos en lo que a complejidad se refiere, existen 46 posibilidades adicionales, en función del conjunto de variables de estado seleccionadas.

Comúnmente, suelen ser prácticas las formulaciones que incluyen la corriente estática y los flujos rotóricos, o bien la corriente estática, el flujo magnetizante y uno de los flujos rotóricos, cuya extensión se sitúa en un nivel intermedio entre los dos expuestos. En los casos de aplicación estudiados con posterioridad se referirá la selección concreta de variables de estado efectuada, con su correspondiente justificación.

$$\begin{bmatrix} \vdots \\ i_{sx} \\ \vdots \\ i_{sy} \\ \vdots \\ i_{1x} \\ \vdots \\ i_{1y} \\ \vdots \\ i_{2x} \\ \vdots \\ i_{2y} \\ \vdots \\ \omega \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(-R_s(L_1L_2 - L_{12}^2)i_{sx} + (\omega_g L_s(L_1L_2 - L_{12}^2) + (\omega_g - \omega)L_m^2(2L_{12} - L_1 - L_2))i_{sy} - R_1L_m(L_{12} - L_2)i_{1x} + \omega L_m(L_1L_2 - L_{12}^2)i_{1y} - R_2L_m(L_{12} - L_1)i_{2x} + \omega L_m(L_1L_2 - L_{12}^2)i_{2y}\right)/D \\ \left(-(\omega_g L_s(L_1L_2 - L_{12}^2) + (\omega_g - \omega)L_m^2(2L_{12} - L_1 - L_2))i_{sx} - R_s(L_1L_2 - L_{12}^2)i_{sy} - \omega L_m(L_1L_2 - L_{12}^2)i_{1x} - R_1L_m(L_{12} - L_2)i_{1y} - \omega L_m(L_1L_2 - L_{12}^2)i_{2x} - R_2L_m(L_{12} - L_1)i_{2y}\right)/D \\ \left(-R_sL_m(L_{12} - L_2)i_{sx} + \omega L_sL_m(L_{12} - L_2)i_{sy} - R_1(L_sL_2 - L_m^2)i_{1x} + ((\omega_g - \omega)(L_s(L_1L_2 - L_{12}^2) + L_m^2(L_{12} - L_1)) + \omega_g L_m^2(L_{12} - L_2))i_{1y} - R_2(L_m^2 - L_sL_{12})i_{2x} + \omega L_m^2(L_{12} - L_2)i_{2y}\right)/D \\ \left(-\omega L_sL_m(L_{12} - L_2)i_{sx} - R_sL_m(L_{12} - L_2)i_{sy} - ((\omega_g - \omega)(L_s(L_1L_2 - L_{12}^2) + L_m^2(L_{12} - L_1)) + \omega_g L_m^2(L_{12} - L_2))i_{1x} - R_1(L_sL_2 - L_m^2)i_{1y} - \omega L_m^2(L_{12} - L_2)i_{2x} - R_2(L_m^2 - L_sL_{12})i_{2y}\right)/D \\ \left(-R_sL_m(L_{12} - L_1)i_{sx} + \omega L_sL_m(L_{12} - L_1)i_{sy} - R_1(L_m^2 - L_sL_{12})i_{1x} + \omega L_m^2(L_{12} - L_1)i_{1y} - R_2(L_sL_1 - L_m^2)i_{2x} + ((\omega_g - \omega)(L_s(L_1L_2 - L_{12}^2) + L_m^2(L_{12} - L_2)) + \omega_g L_m^2(L_{12} - L_1))i_{2y}\right)/D \\ \left(-\omega L_sL_m(L_{12} - L_1)i_{sx} - R_sL_m(L_{12} - L_1)i_{sy} - \omega L_m^2(L_{12} - L_1)i_{1x} - R_1(L_m^2 - L_sL_{12})i_{1y} - ((\omega_g - \omega)(L_s(L_1L_2 - L_{12}^2) + L_m^2(L_{12} - L_1)) + \omega_g L_m^2(L_{12} - L_1))i_{2x} - R_2(L_sL_1 - L_m^2)i_{2y}\right)/D \\ \frac{3}{2} \frac{P^2}{J} L_m (i_{sy}(i_{1x} + i_{2x}) - i_{sx}(i_{1y} + i_{2y})) - \frac{P}{J} t_1 - \frac{\rho}{J} \omega \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} (L_1L_2 - L_{12}^2) & 0 \\ 0 & (L_1L_2 - L_{12}^2) \\ L_m(L_{12} - L_2) & 0 \\ 0 & L_m(L_{12} - L_2) \\ L_m(L_{12} - L_1) & 0 \\ 0 & L_m(L_{12} - L_1) \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{sx} \\ u_{sy} \end{bmatrix} \quad (1.45)$$

donde : $D = L_s(L_1L_2 - L_{12}^2) + L_m^2(2L_{12} - L_1 - L_2)$

1.5. SIMPLIFICACIONES EN EL MODELO DE DOBLE JAULA DEL MOTOR TRIFÁSICO DE INDUCCIÓN.

El examen de las dos formulaciones expuestas en espacio de estado, bien en términos de flujos o bien en términos de corrientes de estator y rotor, mostradas en (1.44) y (1.45), respectivamente, pone de manifiesto la complejidad añadida al modelo del motor con la inclusión de una jaula adicional para dar cuenta del efecto de ranura profunda: el orden del sistema se ha incrementado en dos unidades, respecto al caso del modelo convencional de una sola jaula.

Por ello, con miras a aligerar la carga de cálculo asociada, resulta conveniente considerar la posibilidad de aplicar algún tipo de simplificación que permita obtener formulaciones más sencillas.

Como se comentó en la sección anterior, entre la selección de flujos o bien de corrientes de estator y rotor como variables de estado, que conducen respectivamente a las formulaciones de menor y mayor extensión posibles, existen otras combinaciones de variables que resultan en expresiones de una extensión intermedia.

También debe notarse que, con miras a una mayor generalidad, las formulaciones del modelo se han efectuado en un sistema arbitrario de referencia. No obstante, selección del sistema estacionario, o bien del sistema ligado al rotor, eliminará de las expresiones las tensiones rotacionales asociadas, reduciendo su extensión.

Por otra parte, en función del tipo de aplicación (algoritmos de control), puede recurrirse a la orientación del sistema de referencia de modo que uno de sus ejes quede alineado con un fasor espacial de flujo, con lo cual dicho fasor tendrá un único componente, bien directo o bien en cuadratura, desapareciendo el otro componente de las ecuaciones del modelo.

Hechas estas consideraciones sobre la ventaja tanto de una adecuada selección de variables de estado como del sistema de referencia, se abordarán en detalle otros recursos simplificativos hallados en la literatura especializada.

Se considerarán dos enfoques bien diferenciados, a saber:

- reducción del número de parámetros del modelo
- reducción del orden del modelo

1.5.1. Reducción del número de parámetros del modelo de doble jaula para el motor trifásico de inducción.

El esquema equivalente para el modelo de doble jaula del motor trifásico de inducción en régimen permanente, mostrado en la figura 1.10, consta de un total de ocho parámetros. No obstante, a partir de medidas externas únicamente es posible determinar seis funciones dependientes de estos parámetros [22].

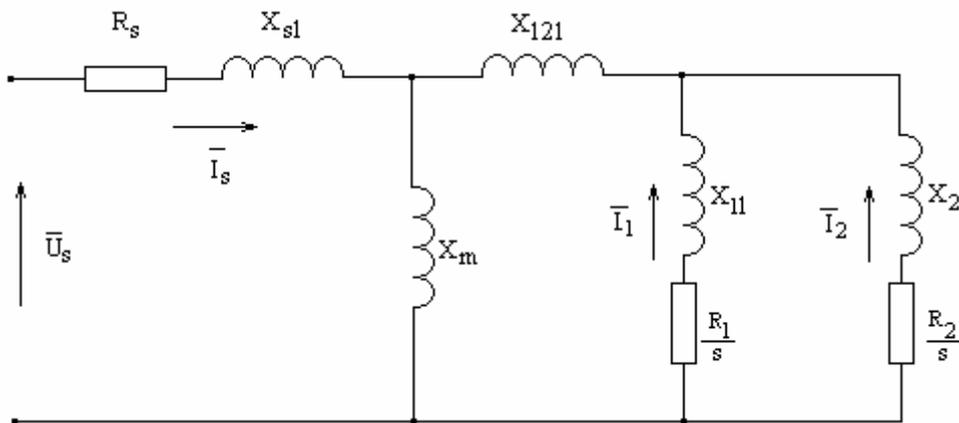


Figura 1.10. Esquema equivalente para régimen permanente sinusoidal del modelo de doble jaula para el motor trifásico de inducción.

En consecuencia, para calcular los ocho parámetros del esquema deberán imponerse dos relaciones adicionales entre estos, generalmente planteadas a partir del conocimiento de pautas constructivas habituales para esta máquina.

El tratar de estimar simultáneamente los ocho parámetros del modelo no conduce a una solución unívoca, pues no se trata de un problema numérico bien definido; la solución obtenida depende del algoritmo empleado y de su inicialización [8].

En prueba de lo expuesto, considérese la impedancia de entrada del esquema para régimen permanente mostrado en la figura 1.10:

$$\begin{aligned}
\underline{Z}_i &= R_s + jX_{sl} + \frac{1}{\frac{1}{jX_m} + \frac{1}{jX_{12l} + \frac{1}{\frac{1}{\frac{R_1}{s} + jX_{1l}} + \frac{1}{\frac{R_2}{s} + jX_{2l}}}}} \\
&= \frac{1}{-s^2 \left(\frac{(X_{1l} + X_{2l})(X_{12l} + X_m) + X_{1l}X_{2l}}{R_1 R_2} \right) + 1 + js \left(\frac{(R_1 + R_2)(X_{12l} + X_m) + R_1 X_{2l} + R_2 X_{1l}}{R_1 R_2} \right)} \\
&\left\{ -s^2 R_s \left(\frac{(X_{1l} + X_{2l})(X_{12l} + X_m) + X_{1l}X_{2l}}{R_1 R_2} \right) - s \left(\frac{(R_1 + R_2)(X_{sl}(X_{12l} + X_m) + X_m X_{12l}) + (R_1 X_{2l} + R_2 X_{1l})(X_{sl} + X_m)}{R_1 R_2} \right) + R_s \right. \\
&\left. + j \left(-s^2 \left(\frac{(X_{1l} + X_{2l})(X_{sl}(X_{12l} + X_m) + X_m X_{12l}) + X_{1l}X_{2l}(X_{sl} + X_m)}{R_1 R_2} \right) + s \left(\frac{(R_1 + R_2)(X_{12l} + X_m) + R_1 X_{2l} + R_2 X_{1l}}{R_1 R_2} \right) + (X_{sl} + X_m) \right) \right\} \\
&= \frac{-s^2 \alpha \beta - s\gamma + \alpha + j(-s^2 \delta + s\varepsilon + \varphi)}{-s^2 \beta + 1 + js\varepsilon} \tag{1.46}
\end{aligned}$$

donde:

$$\alpha = R_s$$

$$\beta = \left(\frac{(X_{1l} + X_{2l})(X_{12l} + X_m) + X_{1l}X_{2l}}{R_1 R_2} \right)$$

$$\begin{aligned}
\gamma &= \left(\frac{(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2)(\mathbf{X}_{sl}(\mathbf{X}_{12l} + \mathbf{X}_m) + \mathbf{X}_m \mathbf{X}_{12l}) + (\mathbf{R}_1 \mathbf{X}_{2l} + \mathbf{R}_2 \mathbf{X}_{1l})(\mathbf{X}_{sl} + \mathbf{X}_m)}{\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2} \right) \\
\delta &= \left(\frac{(\mathbf{X}_{1l} + \mathbf{X}_{2l})(\mathbf{X}_{sl}(\mathbf{X}_{12l} + \mathbf{X}_m) + \mathbf{X}_m \mathbf{X}_{12l}) + \mathbf{X}_{1l} \mathbf{X}_{2l}(\mathbf{X}_{sl} + \mathbf{X}_m)}{\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2} \right) \\
\varepsilon &= \left(\frac{(\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2)(\mathbf{X}_{12l} + \mathbf{X}_m) + \mathbf{R}_1 \mathbf{X}_{2l} + \mathbf{R}_2 \mathbf{X}_{1l}}{\mathbf{R}_1 \mathbf{R}_2} \right) \\
\varphi &= (\mathbf{X}_{sl} + \mathbf{X}_m)
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Obsérvese que, en última instancia, la impedancia de entrada del esquema equivalente con ocho parámetros depende de seis funciones (α , β , γ , δ , ε , φ) de estos. En consecuencia, anulando uno o dos parámetros de las funciones α a φ en (1.47) se obtendrán esquemas equivalentes con siete o bien con seis elementos respectivamente, que exhibirán una impedancia de entrada formalmente idéntica a la última expresión mostrada en (1.46).

El examen de las funciones α a φ revela que los parámetros susceptibles de ser eliminados únicamente pueden ser reactancias de dispersión (\mathbf{X}_{sl} , \mathbf{X}_{12l} , \mathbf{X}_{1l} , \mathbf{X}_{2l}), pero nunca las reactancias de dispersión \mathbf{X}_{1l} y \mathbf{X}_{2l} simultáneamente. Fuera de estos supuestos, no se conservaría el valor de la impedancia de entrada.

En definitiva, a partir de tres medidas externas -por ejemplo tensión, corriente y factor de potencia para deslizamientos unidad, de par máximo, y de plena carga- separando la impedancia de entrada en su parte real e imaginaria se obtendrá un conjunto de seis ecuaciones con:

- 1) ocho incógnitas, si se pretende obtener un esquema equivalente con ocho parámetros
- 2) siete incógnitas, si se desea un esquema con siete parámetros, para lo cual se eliminará una de las inductancias de dispersión en (1.46)
- 3) seis incógnitas, para un esquema equivalente con seis parámetros, debiendo anularse dos de las reactancias de dispersión presentes en (1.46), pero nunca \mathbf{X}_{1l} y \mathbf{X}_{2l} simultáneamente

El sistema planteado deberá completarse con una o dos relaciones adicionales entre parámetros, según se busque un esquema equivalente con siete u ocho elementos,

respectivamente. La resolución del sistema proporcionará el valor de los parámetros del esquema equivalente con bien ocho, siete o seis parámetros.

Así, será posible generar un total de cuatro esquemas equivalentes con siete elementos, según que la reactancia de dispersión eliminada de la expresión de la impedancia de entrada en (1.46) haya sido X_{s1} , X_{121} , X_{11} o X_{21} (figura 1.11):

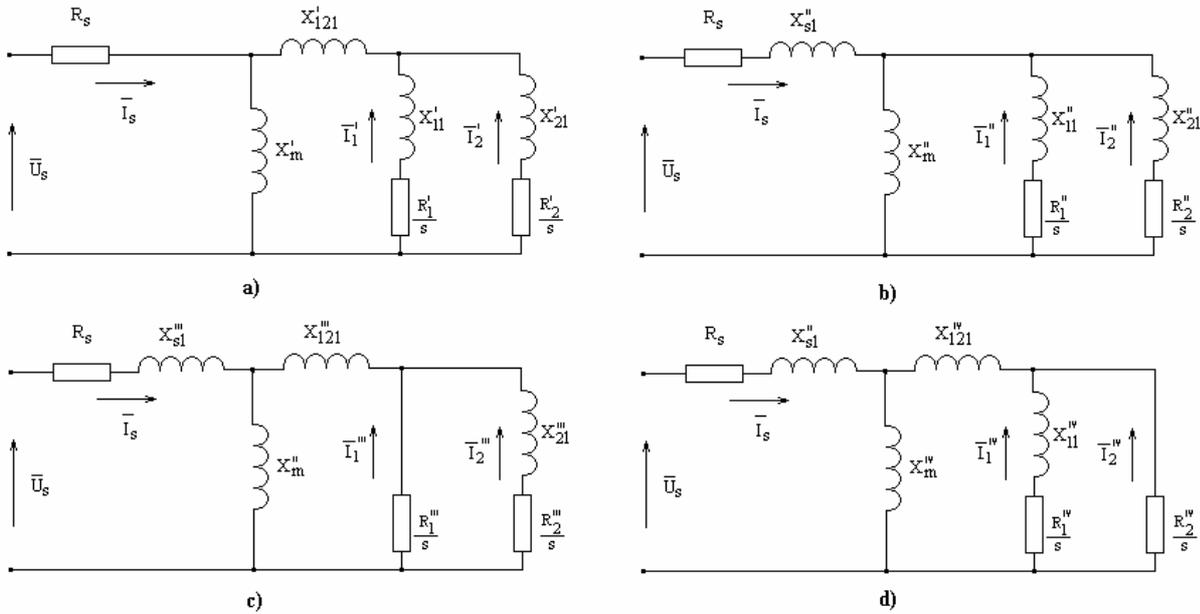


Figura 1.11. Esquemas equivalentes con siete elementos, en los que se ha eliminado la reactancia de dispersión a) X_{s1} , b) X_{121} , c) X_{11} , d) X_{21} .

Por otra parte, podrán obtenerse un total de cinco esquemas equivalentes con seis elementos, según que las parejas de reactancias de dispersión eliminadas sean (X_{s1}, X_{121}) , (X_{s1}, X_{11}) , (X_{s1}, X_{21}) , (X_{121}, X_{11}) o (X_{121}, X_{21}) , mostrados en la figura 1.12.

El efecto de optar por la eliminación de unos parámetros determinados, tanto en las ecuaciones formuladas en términos de fasores espaciales de flujo (1.44) como en fasores espaciales de corriente (1.45), se recoge en la Tabla I. Aquí se muestra qué factores multiplicativos de las diferentes variables de estado resultan eliminados al anular uno o bien dos parámetros del modelo. La anulación de estos factores conllevará la consiguiente desaparición del término del que forman parte en las ecuaciones del motor, eliminando en una ecuación dada la dependencia de una o varias variables de estado.

Según queda reflejado en la tabla I, la anulación sólo de la inductancia de dispersión de estator L_{s1} no lleva aparejada la eliminación de ningún término de las ecuaciones de la máquina, tal como aparecen formuladas en (1.44) o en (1.45).

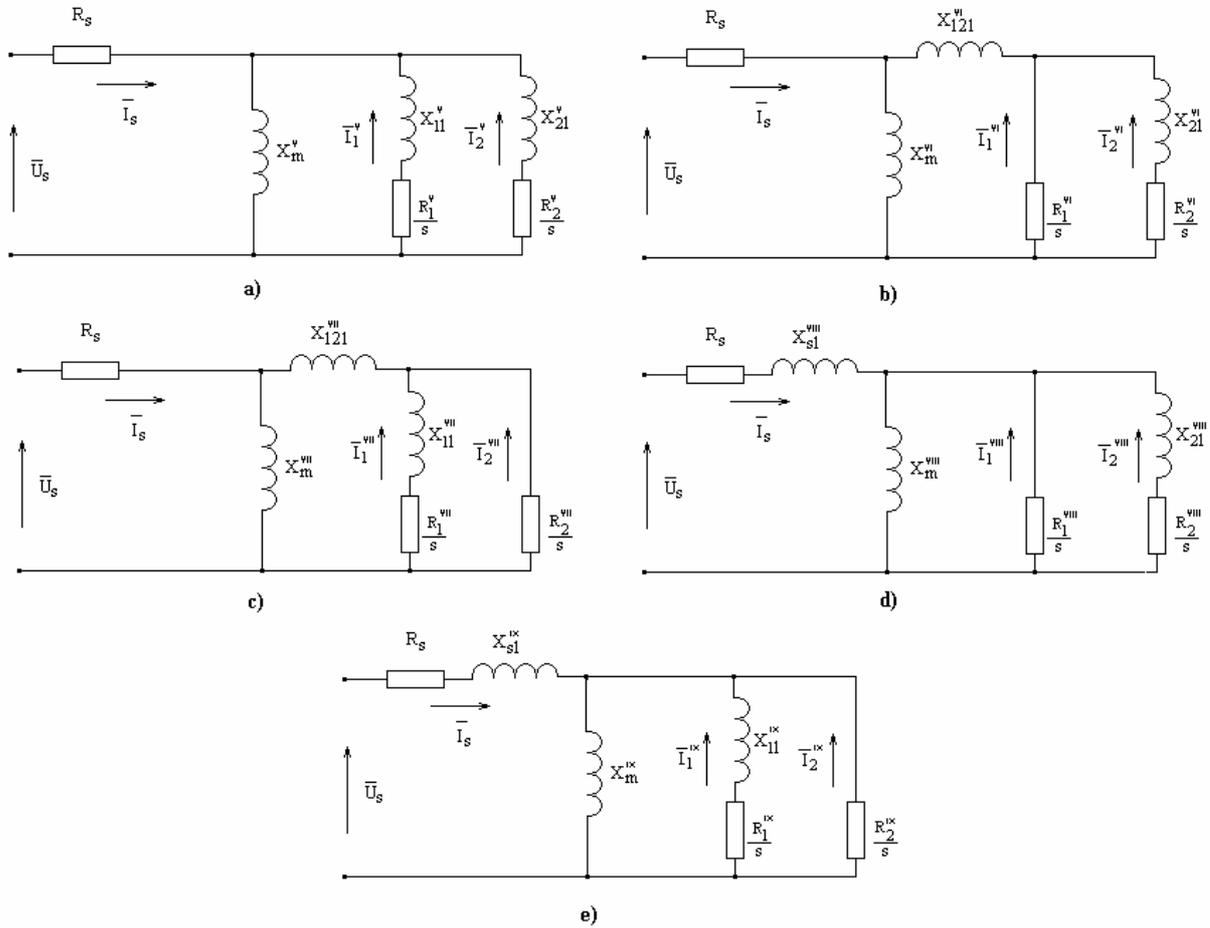


Figura 1.12. Esquemas equivalentes con seis elementos, en los que se ha eliminado las reactancias de dispersión a) X_{sl} , X_{12l1} b) X_{sl} , X_{11} c) X_{sl} , X_{21} d) X_{12l1} , X_{11} , e) X_{12l1} , X_{21} .

Cualquier otra combinación de uno o dos parámetros anulados conlleva la desaparición de 4 términos en las ecuaciones formuladas en fasores espaciales de flujo (1.44) o bien de 10 términos en las ecuaciones expresadas en fasores espaciales de corriente (1.45).

Nótese que el recurso a modelos con tan solo 6 parámetros no simplifica en los casos presentados las ecuaciones de la máquina en mayor grado al que lo logran los modelos con siete parámetros con las inductancias de dispersión de las jaulas interna y externa L_{11} y L_{21} nulas, pero cuanto menos, sí elimina la necesidad de establecer hipotéticas relaciones entre parámetros a la hora de su determinación.

Tabla I. Factores y términos eliminados en las ecuaciones en fasores espaciales de flujo y en fasores espaciales de corriente, según los parámetros anulados.

	PARÁMETROS ELIMINADOS	FACTORES ELIMINADOS	N° TÉRMINOS ELIMINADOS	
			Flujos como variables de estado (1.44)	Corrientes como variables de estado (1.45)
ESQUEMAS EQUIVALENTES CON 7 ELEMENTOS	$L_{sl}=0$ ($L_s=L_m$)	0	0	0
	$L_{12l}=0$ ($L_{12}=L_m$)	0	0	0
	$L_{1l}=0$ ($L_1=L_{12}$)	(L_1-L_{12})	4	10
	$L_{2l}=0$ ($L_2=L_{12}$)	(L_2-L_{12})	4	10
ESQUEMAS EQUIVALENTES CON 6 ELEMENTOS	$L_{sl}=L_{12l}=0$ ($L_s=L_{12}=L_m$)	$(L_s L_{12}-L_m^2)$	4	4
	$L_{sl}=L_{1l}=0$ ($L_s=L_m, L_1=L_{12}$)	(L_1-L_{12})	4	10
	$L_{sl}=L_{2l}=0$ ($L_s=L_m, L_2=L_{12}$)	(L_1-L_{12})	4	10
	$L_{12l}=L_{1l}=0$ ($L_{12}=L_1=L_m$)	(L_1-L_{12})	4	10
	$L_{12l}=L_{2l}=0$ ($L_{12}=L_2=L_m$)	(L_2-L_{12})	4	10

Hechas estas consideraciones sobre la obtención de esquemas equivalentes con seis o siete parámetros, cabe comentar el tipo de esquema equivalente con siete parámetros del que mayoritariamente se hace mención en la literatura especializada [23], [24], obtenido además partiendo de unas consideraciones distintas a las expuestas anteriormente.

Extendiendo al modelo de doble jaula la práctica habitual en el caso del motor con una sola jaula de utilizar factores de referencia o relaciones efectivas de número de espiras para las cantidades rotóricas, siendo estos adecuadamente elegidos puede eliminarse bien la inductancia de dispersión de estator L_{sl} o bien la inductancia de dispersión entre jaulas L_{12l} .

Así, tomando un factor de referencia genérico “ α ” para las cantidades rotóricas, se obtendrá la siguiente colección de magnitudes referidas:

$$\begin{aligned}
\underline{I}_{1\text{ref}} &= \frac{\underline{I}_1}{\alpha}; & \underline{I}_{2\text{ref}} &= \frac{\underline{I}_2}{\alpha} \\
\underline{\Psi}_{1\text{ref}} &= \alpha \underline{\Psi}_1; & \underline{\Psi}_{2\text{ref}} &= \alpha \underline{\Psi}_2 \\
R_{1\text{ref}} &= \alpha^2 R_1; & R_{2\text{ref}} &= \alpha^2 R_2 \\
L_{11\text{ref}} &= \alpha^2 L_{11}; & L_{21\text{ref}} &= \alpha^2 L_{21}
\end{aligned}
\tag{1.48}$$

que necesariamente conduce a un esquema equivalente para régimen permanente como el mostrado en la figura 1.13:

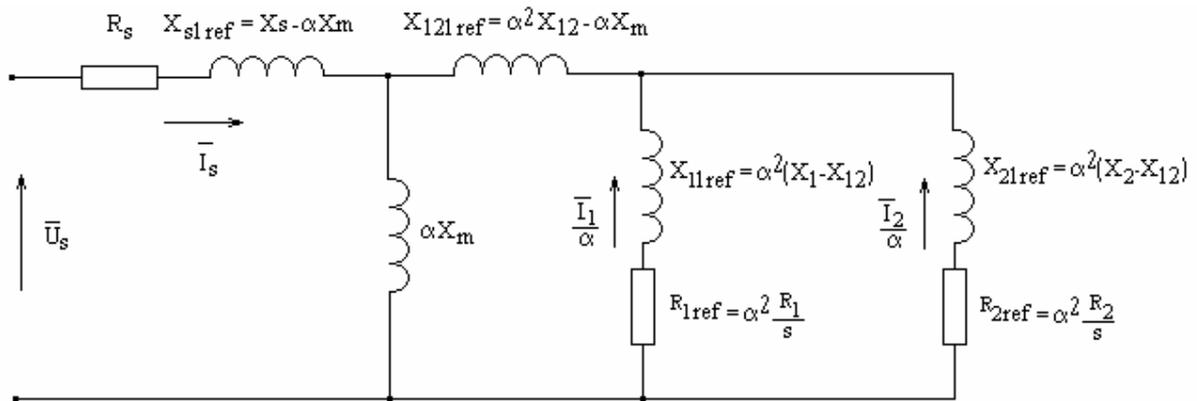


Figura 1.13. Esquema equivalente del motor de inducción con doble jaula utilizando un factor de referencia genérico “ α ”.

Tomando un factor de referencia $\alpha = \frac{X_s}{X_m} = \frac{L_s}{L_m}$ se eliminará del esquema la inductancia de dispersión estática L_{s1} , mientras que con $\alpha = \frac{X_m}{X_{12}} = \frac{L_m}{L_{12}}$ se anulará la inductancia de dispersión entre jaulas L_{121} .

Nótese que la obtención del esquema ahora propuesto requiere de un conjunto previo de ocho parámetros que finalmente es reducido a siete utilizando factores de referencia adecuados. También, los únicos parámetros susceptibles de ser eliminados son las inductancias de dispersión de estator L_{s1} y de dispersión entre jaulas L_{121} , pero no las inductancias de dispersión de las jaulas interna L_{11} o externa L_{21} . Las magnitudes rotóricas referidas, no obstante, siguen el sencillo patrón de dividir las corrientes entre el factor de referencia y

multiplicar flujos e impedancias por el factor de referencia y por el cuadrado de este, respectivamente.

1.5.2. Reducción del orden del modelo de doble jaula para el motor trifásico de inducción.

Tradicionalmente, la conducta dinámica del motor de inducción se aproximaba estudiando el esquema para régimen permanente en combinación con la ecuación mecánica. En la actualidad, la facilidad de acceso a los ordenadores posibilita la utilización de modelos precisos del motor para su estudio.

En los estudios de estabilidad transitoria de los sistemas eléctricos de potencia comúnmente se desprecian los transitorios de red, por lo que para el enlace del motor con esta red considerada en régimen permanente también se desprecian los transitorios estatóricos, utilizándose modelos de orden reducido.

Clásicamente, los modelos de orden reducido se obtienen anulando las derivadas de los diferentes flujos presentes en el modelo de orden completo.

Así, partiendo del modelo de doble jaula de 7º orden, la anulación de las derivadas de las componentes del flujo estatórico conduce a un modelo de orden 5º, quedando las ecuaciones diferenciales del estator convertidas en meras ecuaciones algebraicas.

La supresión de los transitorios estatóricos equivale a despreciar el nivel de continua (componente forzada) presente en las corrientes de estator, causante de una oscilación decreciente y de frecuencia aproximadamente igual a la de la red en las potencias absorbidas activa y reactiva y en el par electromagnético [25].

En las figuras 1.14 a 1.21 se muestra la evolución de diferentes magnitudes de un motor de 500 kW durante un transitorio de arranque a plena carga. En cada figura, el comportamiento de una misma magnitud es simulado mediante el modelo de orden completo y también utilizando diversos modelos de orden reducido, a saber, de 5º, 3º y 1º orden, según se hayan despreciado acumulativamente las derivadas de las componentes de flujo estatórico, de la jaula externa y de la jaula interna, en este orden.

En el apéndice A se recoge la formulación en términos de corriente de estator y flujos rotóricos de los modelos de jaula doble y sencilla del motor trifásico de inducción, tanto de orden completo como de sus diversos órdenes reducidos.

Así, respecto a lo mencionado previamente en relación al nivel de continua presente en la corriente estática (figura 1.14, apartado a)), obsérvese en las figuras 1.15 a 1.17 en sus apartados a), las oscilaciones de amplitud decreciente presentes en los desarrollos del par electromagnético y las potencias activa y reactivas absorbidas.

Volviendo a la figura 1.14, en su apartado b) se presenta la corriente estática simulada a partir del modelo de 5º orden, en el que se han anulado las derivadas de las componentes del flujo estático, donde puede observarse la ausencia del nivel de continua presente en el apartado a). Correspondientemente, en los apartados b) de las figuras 1.15 a 1.17 se refleja la práctica supresión de las oscilaciones en las curvas de par electromagnético y potencias, que quedan substituidas aproximadamente por los valores medios de estas magnitudes.

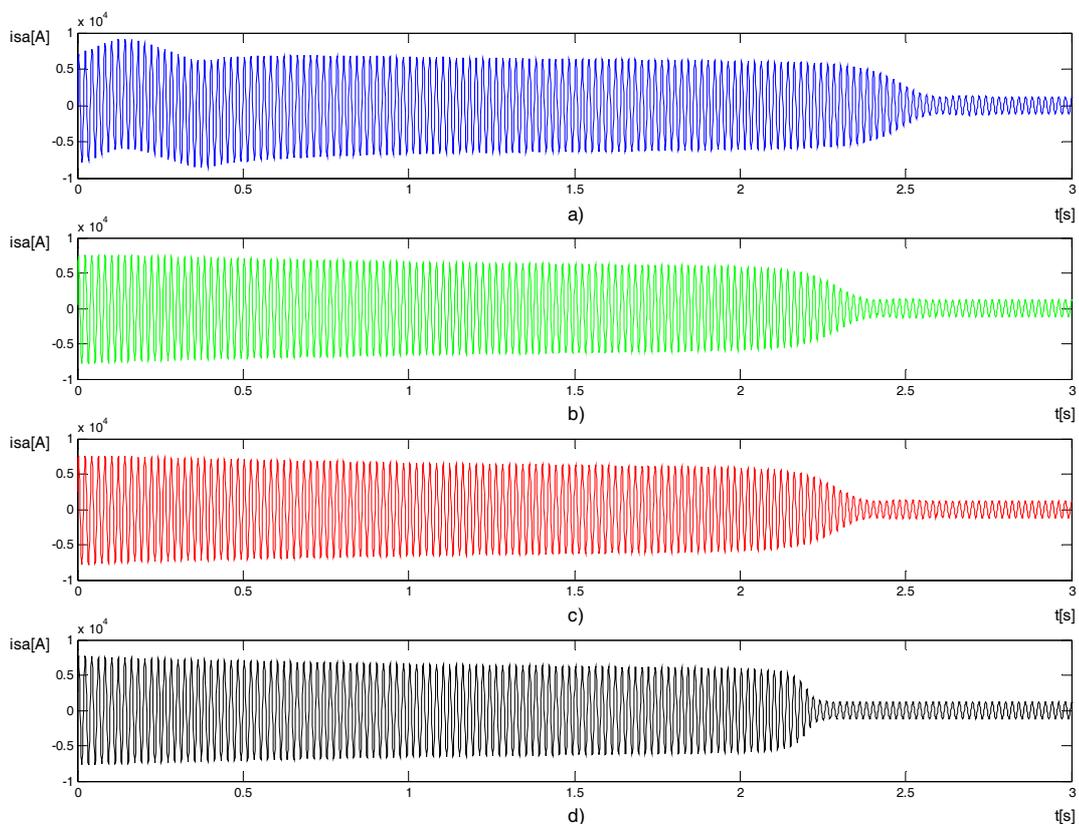


Figura 1.14. Evolución de la corriente estática de la fase a durante el arranque a plena carga de un motor de 500 kW, simulada con los modelos a) de 7º, b) de 5º, c) de 3º, d) de 1º orden.

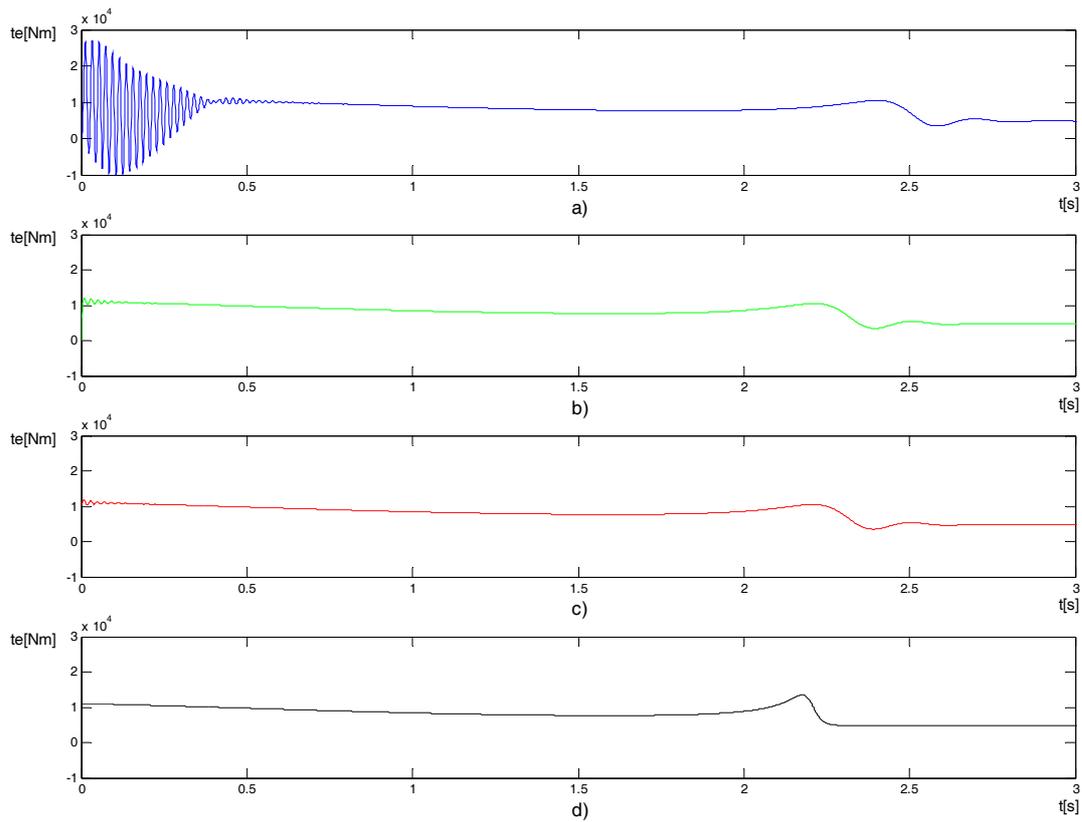


Figura 1.15. Evolución del par durante el arranque a plena carga de un motor de 500 kW, simulado con los modelos a) de 7^o, b) de 5^o, c) de 3^{er}, d) de 1^{er} orden.

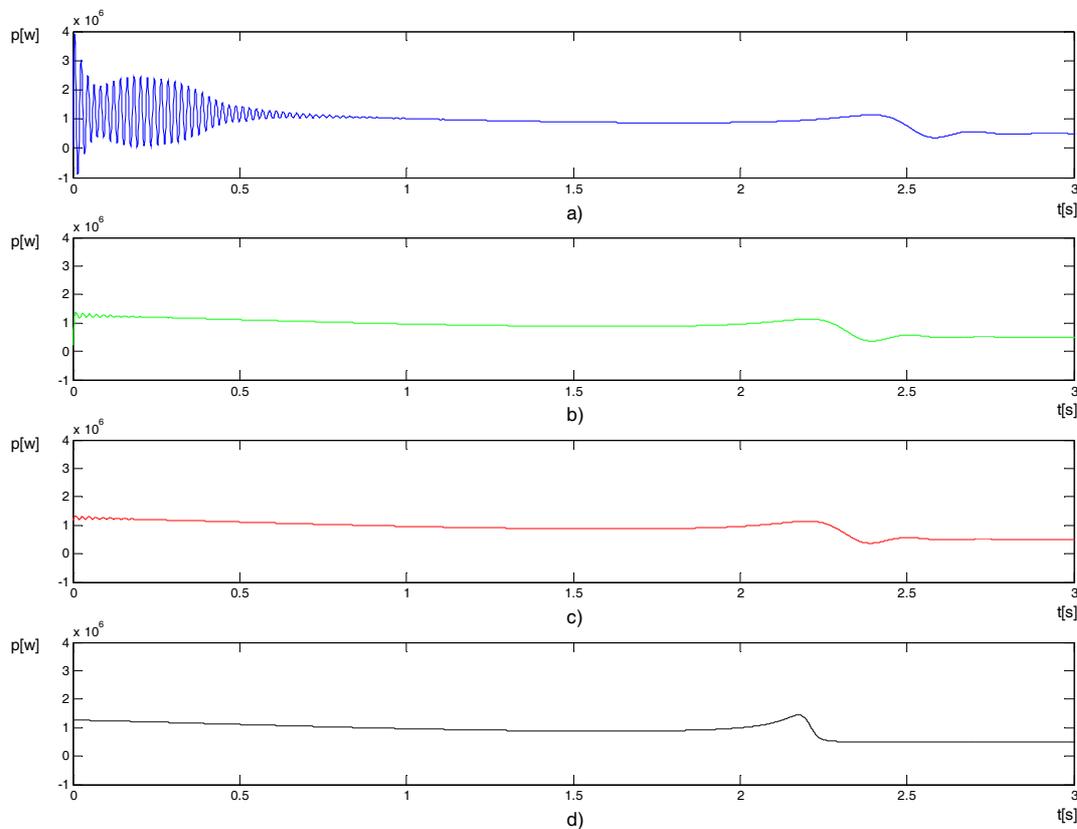


Figura 1.16. Potencia activa absorbida durante el arranque a plena carga de un motor de 500 kW, simulada con los modelos a) de 7^o, b) de 5^o, c) de 3^{er}, d) de 1^{er} orden.

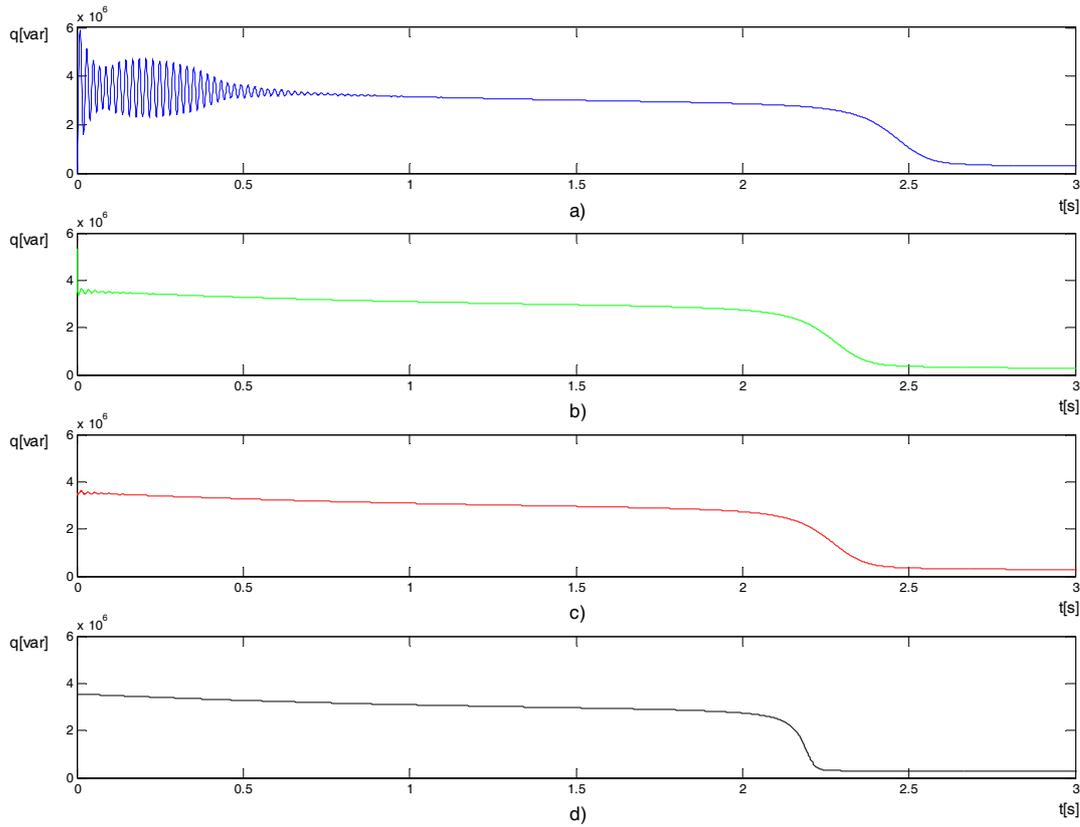


Figura 1.17. Potencia reactiva absorbida durante el arranque a plena carga de un motor de 500 kW, simulada con los modelos a) de 7^o, b) de 5^o, c) de 3^{er}, d) de 1^{er} orden

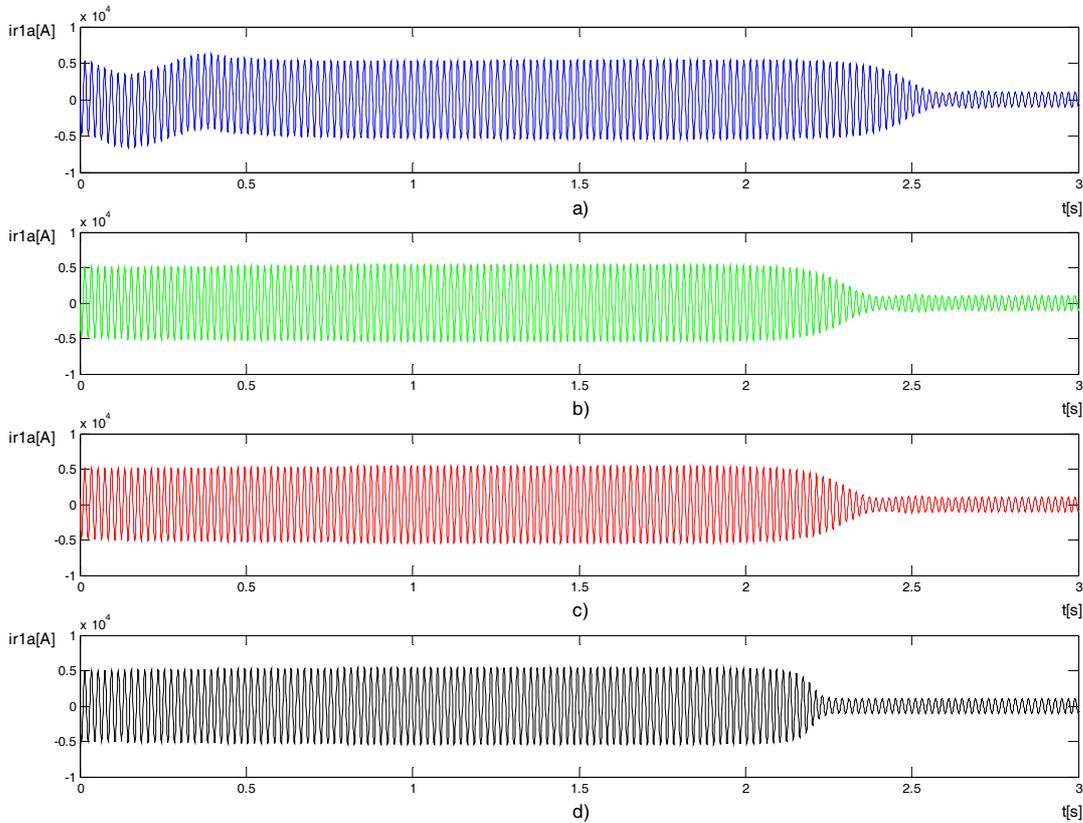


Figura 1.18. Corriente rotórica de la jaula interna en el arranque a plena carga de un motor de 500 kW, con los modelos a) de 7^o, b) de 5^o, c) de 3^{er}, d) de 1^{er} orden. (Ref. estática).

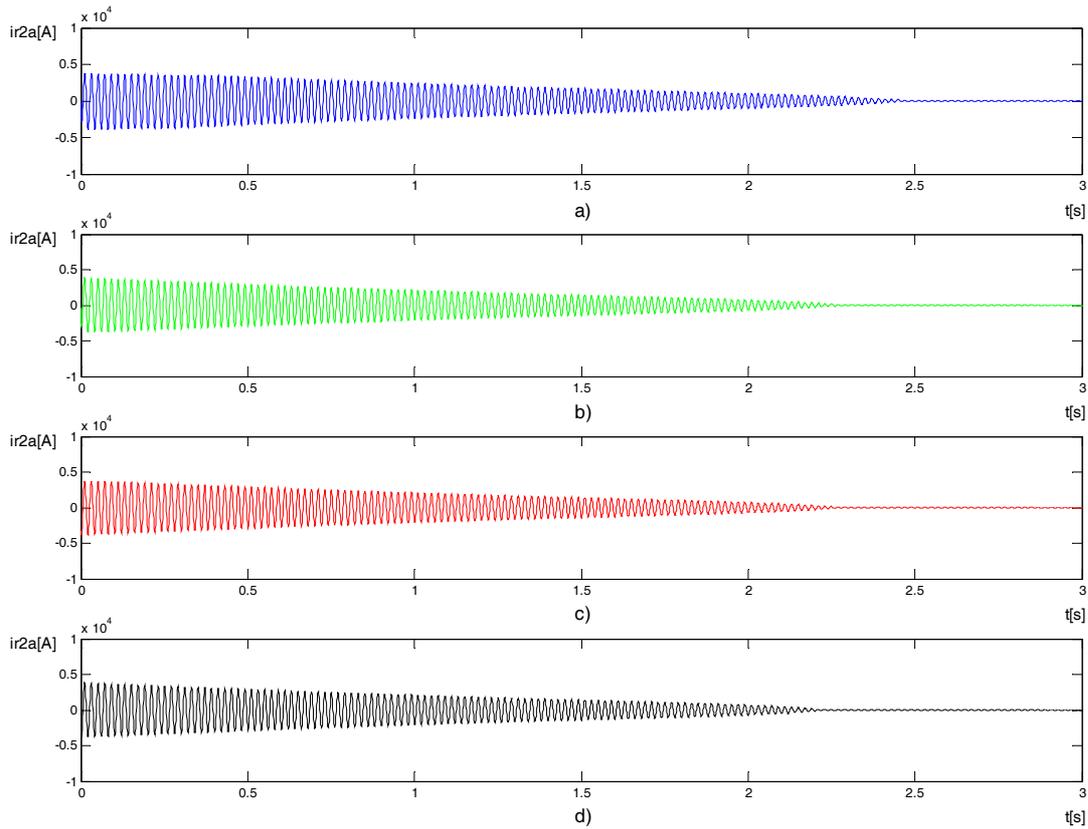
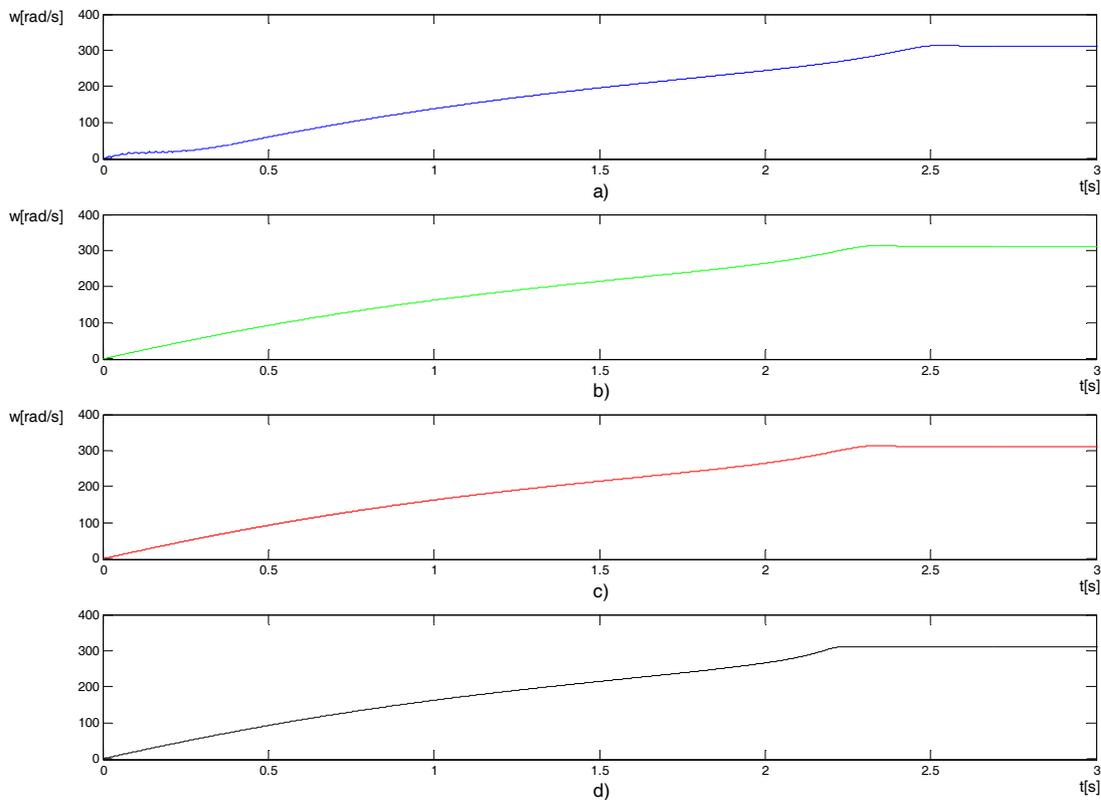
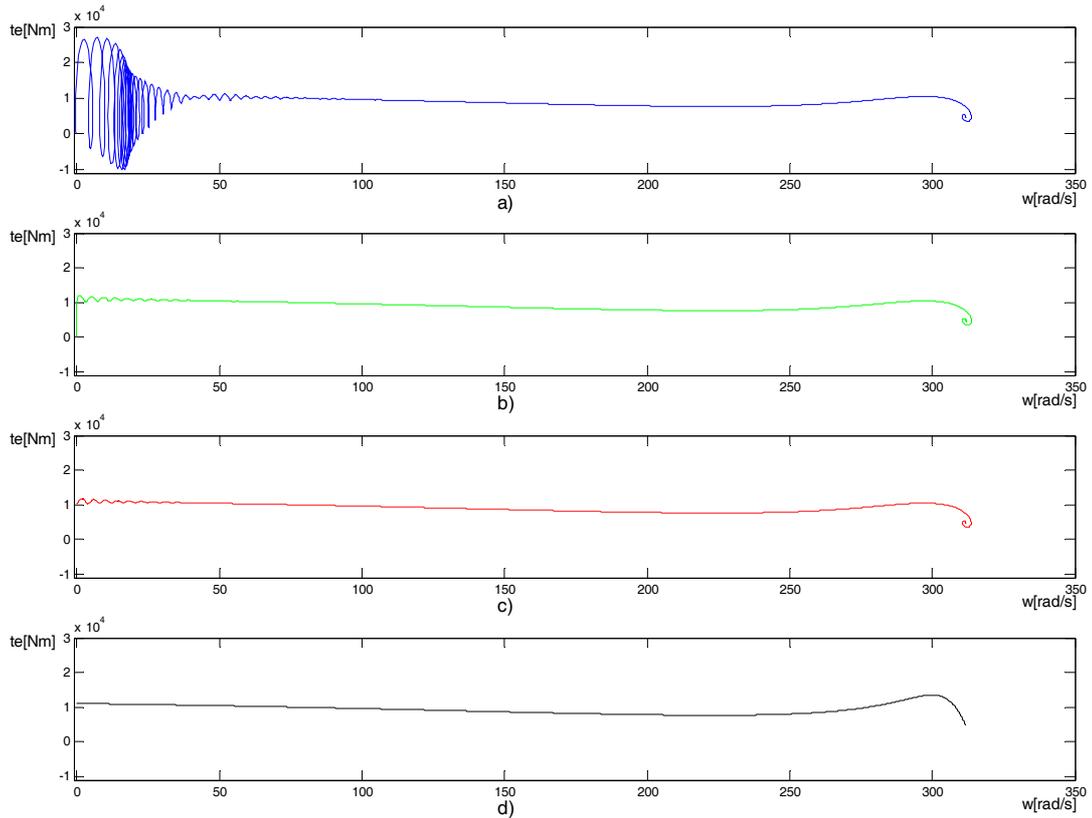


Figura 1.19. Corriente rotórica de la jaula externa en el arranque a plena carga de un motor de 500 kW, con los modelos a) de 7^o, b) de 5^o, c) de 3^{er}, d) de 1^{er} orden. (Ref. estática).



1.20. Evolución de la velocidad (eléctrica) rotórica durante el arranque a plena carga de un motor de 500 kW, simulada con los modelos a) de 7^o, b) de 5^o, c) de 3^{er}, d) de 1^{er} orden.



1.21. Evolución del par electromagnético con la velocidad eléctrica rotórica durante el arranque a plena carga de un motor de 500 kW, simulado con los modelos a) de 7^o, b) de 5^o, c) de 3^{er}, d) de 1^{er} orden.

En consecuencia, esta simplificación aún conduce a valores razonablemente precisos para el estudio de flujos de potencia y velocidad (véase figura 1.20 en sus apartados a) y b)). De hecho, el despreciar los transitorios estáticos ha llegado a ser una práctica estandarizada en los estudios de estabilidad transitoria, que conduce a una representación aproximada del comportamiento dinámico real de la máquina tanto más correcta cuanto más cierto sea que los transitorios estáticos se amortiguan antes de que las variables rotóricas comiencen a experimentar cambios.

En general, las mayores discrepancias en los resultados se obtienen para el caso de máquinas de pequeña potencia o para rangos amplios de frecuencias aplicadas (accionamientos de frecuencia variable) [21].

El modelo de 5^o orden resultante presenta una estructura menos lineal que la del de orden completo; sin embargo, la carga extra de cómputo que ello pueda suponer queda sobradamente compensada con el ahorro en tiempo de cálculo que conlleva la reducción de

orden. Nótese además que el tiempo de cálculo no sólo está ligado al cuadrado del orden del modelo, sino también al paso de integración, que debe ser menor en transitorios con oscilaciones de frecuencia alta, como los presentes en determinadas variables del modelo de orden completo y ausentes en los de órdenes reducidos.

En los apartados c) de las figuras 1.14 a 1.21 se exhibe el transitorio de arranque del motor simulado a partir de un modelo de 3^{er} orden, en el que además de anularse las derivadas de las componentes del flujo estático también se procede de igual modo con las del flujo asociado a la jaula externa.

La constante de tiempo de la jaula externa es considerablemente menor que la propia de la jaula interna, dadas la mayor resistencia y menor inductancia de dispersión con que es diseñada a fin de garantizar un par elevado y una corriente limitada en el arranque. En consecuencia, los transitorios vinculados a esta jaula son mucho más rápidos que los de la jaula interna, afirmación que resulta válida para todo el rango de deslizamientos posibles, como se constata en [25], a partir del examen de los valores propios asociados a los circuitos estático y rotóricos externo e interno para máquinas de diferentes potencias, donde se observa que la parte real de los autovalores correspondientes a la jaula externa es, al menos, superior en un orden de magnitud tanto a la de la jaula interna como a la del circuito estático.

Obsérvese, en consecuencia, que esta nueva reducción de orden se basa sobre una asunción distinta a la adoptada al obtener el modelo de 5^o orden por eliminación del transitorio estático: el transitorio vinculado a la jaula externa se amortigua muy rápidamente y se desprecia por comparación con el de la jaula interna, que es más lento; en cambio, como ya se ha expuesto, la base para despreciar los transitorios asociados al circuito estático reside en que la supresión del nivel de continua presente en la corriente de estator que ello implica, elimina la componente oscilatoria de las curvas de potencia y par, que por su frecuencia de oscilación alta en comparación con su bajo amortiguamiento y dado el elevado valor de la constante de tiempo de la velocidad rotórica, tiene un valor medio nulo, por lo que aún pueden obtenerse valores razonablemente adecuados para el valor medio de los flujos de potencia y la velocidad.

Como variante, y en línea con lo expuesto, también se hallan en la literatura modelos de 5° orden en los que la derivada del flujo que se suprime es la de la jaula externa, conservándose la del flujo asociado al circuito estático [25].

Finalmente, los apartados d) de las figuras 1.14 a 1.21 muestran los resultados procedentes de la simulación del comportamiento dinámico del motor mediante el modelo de 1^{er} orden, esto es, la combinación del esquema para régimen permanente (se suprime la única derivada de flujo restante, el asociado a la jaula interna) con la ecuación mecánica, que como es de esperar, exhibe los resultados más alejados de los ofrecidos por el modelo de orden completo, pero que todavía pueden resultar perfectamente satisfactorios para aplicaciones muy determinadas.