

TÖBBVÁLTOZÓS DISZKRÉT MOMENTUM PROBLÉMÁK ÉS ALKALMAZÁSAIK

MÁDI-NAGY GERGELY

A diszkrét momentum problémák témakörét a 80-as évek végétől Prékopa András kezdte el vizsgálni: megmutatta, hogy a probléma (egy rosszul kondicionált) lineáris programozási feladattal modellezhető. A célfüggvényre tett bizonyos feltételek mellett sikerült a duál megengedett bázisok teljes halmazát az oszlopindexek segítségével leírnia és ez alapján egy numerikusan stabil duál megoldó algoritmust kifejlesztenie. A módszertan lehetőséget nyújtott éles valószínűségi korlátok algoritmikus, illetve képletszerű megadására: ezek jól alkalmazhatóak például eloszlásfüggvény értékeinek becslésére, hálózat megbízhatóságának becslésére, Boole–Bonferroni-típusú korlátok felírására.

A doktori dolgozatomat András témavezetése alatt a diszkrét momentum probléma többváltozós általánosításából írtam. Közös munkánk során, mely a doktori fokozat megszerzése után is folytatódott, a többváltozós eset duál megengedett bázisstruktúráit vizsgáltuk különféle momentumfeltételek mellett, újabb alkalmazásokkal (pl. várható hasznosság becslése) kiegészítve. A többváltozós modellezés segítségével számos alkalmazási területen sikerült az egyváltozós modell eredményeinél erősebb korlátokat adni, illetve lehetőség nyílt egyes momentumokat használó Boole–Bonferroni-típusú korlátok kidolgozására is.

A cikk közös munkánk eredményeit, és azok továbbfejlesztéseit foglalja össze. A dolgozatot Prékopa András emlékének ajánlom.

1. Bevezetés

1.1. Diszkrét momentum probléma (DMP)

Legyen X egy I tartójú valószínűségi változó, melynek eloszlása nem ismert. Tegyük fel, hogy az X^k hatványok várható értékei viszont ismertek, $k = 1, \dots, m$. Dolgozatunkban az alábbi *korlátozási momentum probléma* diszkrét, véges tartójú eloszlásokra megszorított változatait vizsgáljuk:

$$\inf(\sup) E[f(X)] = \int_I f(z) dP$$

feltéve, hogy

$$E[X^k] = \int_I z^k dP = \mu_k, \quad k = 0, 1, \dots, m,$$

ahol P az ismeretlen, az I , f , μ_k , $k = 0, 1, \dots, m$ pedig adott.

Momentumokkal kapcsolatos korlátozási feladatok először Bienaymé [3], Chebyshev [12], [13] és Markov [42] dolgozataiban szerepeltek. Korlátozási momentum problémák gyakran merülnek fel a Csebisev-típusú egyenlőtlenségek témakörében: a területen született eredményeknek jó összefoglalását adja Krein és Nudelman [30]. Történeti áttekintést nyújtanak Kjeldsen [29], ill. Prékopa és Alexe [55] dolgozatai.

A 80-as évek végén Prékopa [48], [49], [50], ill. Samuels és Studden [59] egymástól függetlenül vezették be és kezdék el vizsgálni a *diszkrét momentum problémát*, amikor is $I = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ véges diszkrét halmaz.

Samuels és Studden a klasszikus megközelítés alapján adtak megoldásokat zárt formulák segítségével, ennek megfelelően módszereik csak kis méretű feladatokra voltak alkalmazhatóak. Ezzel szemben Prékopa egy új lineáris programozási (LP) keretrendszerbe ültette a problémát. Az LP megközelítés segítségével sikerült a DMP-k több fontos esetére általános (és egyszerű) megoldási algoritmust adni, mely segítségével lehetőség nyílt nagy méretű feladatokat is hatékonyan kezelni, másrészt képlettel megadott éles korlátokat kapni.

A DMP tulajdonságai közül az alábbi hármat mindenképp érdemes kiemelni. Egyrészt a véges, diszkrét tartó ismerete a momentum értékeken túl további információt jelent az ismeretlen eloszlásra vonatkozóan. Ennek megfelelően a DMP esetében adott korlátok a klasszikus korlátoknál jóval szorosabbak.

A második fontos tulajdonság, hogy a DMP felírható LP-feladatként. Jelöljük az X valószínűségi változó (ismeretlen) eloszlását az alábbi módon:

$$p_i = P(X = z_i), \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

és legyen $f(z_i) = f_i$. A DMP-hez tartozó LP-feladat:

$$\begin{aligned} \min(\max) E[f(X)] &= f_0 p_0 + f_1 p_1 + \dots + f_n p_n, && \text{feltéve, hogy} \\ p_0 + p_1 + \dots + p_n &= \mu_0 (= 1), \\ z_0 p_0 + z_1 p_1 + \dots + z_n p_n &= \mu_1, \\ z_0^2 p_0 + z_1^2 p_1 + \dots + z_n^2 p_n &= \mu_2, \\ &\vdots \\ z_0^m p_0 + z_1^m p_1 + \dots + z_n^m p_n &= \mu_m, \\ p_0, p_1, \dots, p_n &\geq 0, \end{aligned} \tag{1}$$

ahol p_i , $i = 0, 1, \dots, n$ lesznek a változók. Az $I = \{z_0, z_1, \dots, z_n\}$ tartó, az $f(z)$, $z \in I$ függvényértékei, ill. a μ_k , $k = 0, 1, \dots, m$ momentumok pedig paraméterként adóttak.

Mivel az (1) lineáris egyenletrendszer együttthatómátrixa egy rosszul kondicionált Vandermonde-mátrix, ezért a fenti feladat nagyobb méret esetén nem oldható meg általános solverok segítségével. Azonban, az f függvényre tett bizonyos feltételek mellett, Prékopa [50] kifejlesztett egy numerikusan stabil duál szimplex algoritmust. A módszer olyan tételeken alapul, melyek kombinatorikusan megadják az összes duál megengedett bázis oszloprendszerét. Az algoritmus lényege vázlatosan: a duálváltozók előjelének elegáns, numerikusan stabil kiszámítása segítségével megadja a bázisból kimenő oszlopot, majd utána a duál megengedett bázisstruktúra ismerete alapján meghatározza a következő bázisba bejövő oszlopot. A duál megengedett bázisstruktúra ismerete lehetőséget nyújt képletszerű korlátok megadására is, lásd Boros és Prékopa [5].

A harmadik hasznos tulajdonság, hogy a DMP optimális megoldása segítségével lehetőség van Bonferroni-típusú, ill. egyéb képletszerű valószínűségi korlátok megadására. Ebben az esetben a hatvány momentum probléma helyett a binomiális momentum problémát érdemes tekinteni.

Az $I \subset \mathbb{N}$ tartójú X valószínűségi változó k -edik binomiális momentumának definíciója:

$$E \left[\binom{X}{k} \right].$$

Tekintsük az A_1, A_2, \dots, A_n tetszőleges eseményeket. Legyen a $\{0, 1, \dots, n\}$ tartójú X valószínűségi változó a bekövetkezett események száma. Ekkor X binomiális momentumaira igaz az alábbi egyenlőség (lásd pl. Prékopa [52, 182. old.]):

$$E \left[\binom{X}{k} \right] = S_k = \sum_{0 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}),$$

$k = 1, 2, \dots$ A binomiális momentum probléma az alábbi módon írható fel:

$$\begin{aligned} \min(\max) f_0 p_0 + f_1 p_1 + \dots + f_n p_n, \quad & \text{feltéve, hogy} \\ p_0 + p_1 + \dots + p_n = S_0 (= 1), \\ \binom{0}{1} p_0 + \binom{1}{1} p_1 + \dots + \binom{n}{1} p_n = S_1, \\ \binom{0}{2} p_0 + \binom{1}{2} p_1 + \dots + \binom{n}{2} p_n = S_2, \\ & \vdots \\ \binom{0}{m} p_0 + \binom{1}{m} p_1 + \dots + \binom{n}{m} p_n = S_m, \\ p_0, p_1, \dots, p_n \geq 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Ha az n esemény uniójára, ill. metszetére szeretnénk korlátokat adni, akkor ehhez

az alábbi függvényeket kell tekinteni:

$$f(z) = \begin{cases} 0, & \text{ha } z = 0, \\ 1, & \text{különben,} \end{cases} \quad \text{ill. } f(z) = \begin{cases} 1, & \text{ha } z = s, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases} \quad (3)$$

Abban az esetben, ha az (1) feladatban $\{z_0, z_1, \dots, z_n\} = \{0, 1, \dots, n\}$, az (1) és (2) probléma egymásba átképezhető egyszerű nonszinguláris lineáris transzformációk segítségével (lásd Prékopa [48]). Pontosabban, az együtthatómátrixok és a jobb-oldal vektorai átvihetők egymásba egy nonszinguláris négyzetes mátrixszal, illetve annak inverzével történő szorzás által. Ez egyúttal azt jelenti, hogy egy oszlop-rendszer pontosan akkor alkot duál megengedett bázist az (1) feladatban, ha ennek bázisváltóíhoz tartozó oszlop-rendszer a (2) feladatban is duál megengedett bázis. Emiatt Prékopa [50] duál szimplex megoldó módszere közvetlenül alkalmazható a binomiális momentum feladatra is. Ennek segítségével pedig itt is lehetőség nyílik képletszerű korlátok megadására: (3) első függvényének alkalmazásával például korlátok adhatóak az események uniójára az S_0, S_1, \dots, S_m binomiális momentumok lineáris kombinációinak segítségével. Az így kapott éles Bonferroni-típusú korlátokba nyújt betekintést Prékopa [49], [51], [52], ill. Boros és Prékopa [5].

1.2. Többváltozós diszkrét momentum probléma (TDMP)

A többváltozós diszkrét momentum problémát Prékopa [51] vezette be, majd vizsgálta az [53], [54] dolgozatokban. A TDMP az egyváltozós eset természetes általánosítása az alábbi módon. Legyen $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_s)$ véletlen vektorváltozó. Tegyük fel, hogy X_j tartója egy ismert véges $Z_j = \{z_{j0}, \dots, z_{jn_j}\}$ halmaz, $j = 1, \dots, s$. A következőkben az alábbi momentumok bizonyos halmazainak értékei szolgáltatnak majd információt az ismeretlen eloszlásról.

1.1. Definíció. Az (X_1, \dots, X_s) véletlen vektor $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ *rendű hatványmomentuma* az alábbi várható érték:

$$\mu_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = E[X_1^{\alpha_1} \dots X_s^{\alpha_s}],$$

ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ természetes számok. Az $\alpha_1 + \dots + \alpha_s$ összeget a *momentum (teljes) rendjének* hívjuk.

\mathbf{X} (ismeretlen) eloszlására az alábbi jelölést használjuk:

$$p_{i_1 \dots i_s} = P(X_1 = z_{1i_1}, \dots, X_s = z_{si_s}), \quad 0 \leq i_j \leq n_j, \quad j = 1, \dots, s.$$

Tekintsük a $Z = Z_1 \times \dots \times Z_s$ halmazt és ezen az $f(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in Z$ függvényt.

Legyen $f_{i_1 \dots i_s} = f(z_{1i_1}, \dots, z_{si_s})$. A TDMP felírható az alábbi LP-feladatként:

$$\begin{aligned} \min(\max) E[f(\mathbf{X})] &= \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_s=0}^{n_s} f_{i_1 \dots i_s} p_{i_1 \dots i_s}, & \text{feltéve, hogy} \\ \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_s=0}^{n_s} z_{1i_1}^{\alpha_1} \cdots z_{si_s}^{\alpha_s} p_{i_1 \dots i_s} &= \mu_{\alpha_1 \dots \alpha_s} & (\alpha_1 \dots \alpha_s) \in H, \\ p_{i_1 \dots i_s} &\geq 0 & \text{minden } i_1, \dots, i_s \text{ esetén.} \end{aligned} \tag{4}$$

A (4) feladatban $p_{i_1 \dots i_s}$, $0 \leq i_j \leq n_j$, $j = 1, \dots, s$, ismeretlen változó, míg a többi paraméter (az f függvény és a momentumok) adottak. A fogalom bevezetésekor (Prékopa [53], [54]) H a legfeljebb m -ed rendű momentumok halmaza volt (ahol m egy adott természetes szám), tehát

$$H = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \mid 0 \leq \alpha_j, \alpha_j \text{ egész, } \alpha_1 + \dots + \alpha_s \leq m, j = 1, \dots, s\}, \tag{5}$$

később ennél általánosabb eseteket is vizsgálunk.

A TDMP egyik legnépszerűbb alkalmazási területe az események Boole-függvényeinek korlátozása. Ezekben esetben a binomiális TDMP-feladatot érdemes tekinteni. Ehhez vezetünk be a kereszt-binomiális momentum fogalmát.

1.2. Definíció. A $Z \subset \mathbb{N}^s$ tartójú (X_1, \dots, X_s) véletlen vektor $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ rendű kereszt-binomiális momentuma az alábbi várható érték:

$$S_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = E \left[\binom{X_1}{\alpha_1} \cdots \binom{X_s}{\alpha_s} \right], \tag{6}$$

ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_s$ természetes számok. Az $\alpha_1 + \dots + \alpha_s$ összeg ebben az esetben is *a momentum (teljes) rendje*.

Tekintsünk ismét n tetszőleges eseményt. Particionáljuk az események halmazát s darab esemény részsorozatba. A j -edik részsorozatot jelölje A_{j1}, \dots, A_{jn_j} , $j = 1, \dots, s$. Természetesen $n_1 + \dots + n_s = n$. Legyen a $Z_j = \{0, 1, \dots, n_j\}$ tartójú X_j valószínűségi változó a j -edik sorozatban bekövetkezett események száma, $j = 1, \dots, s$. Ekkor

$$E \left[\binom{X_1}{\alpha_1} \cdots \binom{X_s}{\alpha_s} \right] = \sum_{\substack{1 \leq i_{j1} < \dots < i_{j\alpha_j} \leq n_j, \\ j=1, \dots, s}} P[A_{1i_{11}} \cap \dots \cap A_{1i_{1\alpha_1}} \cap \dots \cap A_{si_{s1}} \cap \dots \cap A_{si_{s\alpha_s}}], \tag{7}$$

összhangban $S_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ (6) definíciójával. A binomiális TDMP az alábbi LP-feladat-

ként formalizálható:

$$\min(\max) \sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_s=0}^{n_s} f_{i_1 \dots i_s} p_{i_1 \dots i_s}, \quad \text{feltéve, hogy}$$

$$\sum_{i_1=0}^{n_1} \cdots \sum_{i_s=0}^{n_s} \binom{i_1}{\alpha_1} \cdots \binom{i_s}{\alpha_s} p_{i_1 \dots i_s} = S_{\alpha_1 \dots \alpha_s} \quad (\alpha_1 \dots \alpha_s) \in H, \quad (8)$$

$$p_{i_1 \dots i_s} \geq 0 \quad \text{minden } i_1, \dots, i_s \text{ esetén.}$$

Ebben az esetben is adható korlát az n esemény uniójára, ill. metszetére az alábbi függvények segítségével:

$$f(z_1, \dots, z_s) = \begin{cases} 0, & \text{ha } (z_1, \dots, z_s) = (0, \dots, 0), \\ 1, & \text{különben,} \end{cases} \quad (9)$$

ill.

$$f(z_1, \dots, z_s) = \begin{cases} 1, & \text{ha } (z_1, \dots, z_s) = (n_1, \dots, n_j), \\ 0, & \text{különben.} \end{cases}$$

Itt is igaz, hogy $Z_j = \{0, 1, \dots, n_j\}$, $j = 1, \dots, s$ esetén a hatvány és binomiális TDMP egymásba nemszinguláris négyzetes mátrix szorzással áttranszformálható, és ennek megfelelően az *ekvivalens hatvány és binomiális TDMP-feladatok duál megengedett bázisstruktúrája megegyezik*. Így a binomiális TDMP duál megengedett bázisainak segítségével is lehetőség nyílik valószínűségek becslésére, illetve Bonferroni-típusú egyenlőtlenségek konstrukciójára. Tekintve, hogy az esemény részsorozatok segítségével kapott kereszt-binomiális momentumok több információt nyújtanak az eseményekről, mintha csak az egyváltozós binomiális momentumokat tekintenénk, ezért az itt kapott korlátok a binomiális DMP korlátainál erősebbek lesznek.

A TDMP esetében sajnos eddig semmilyen nemtriviális momentumhalmaz, ill. f függvényre tett feltétel mellett sem sikerült a teljes duál megengedett bázisstruktúra felderítése, így az egyváltozós, numerikusan stabil duál szimplex módszer sem sikerült általánosítani. A megoldásra, ill. korlátozásra eddig kétféle megközelítéssel sikerült eredményeket elérni.

Az első megközelítés lényege, hogy bár az összes duál megengedett bázis nem ismert, de az f függvényre tett megfelelő konvexitási feltételek mellett számos duál megengedett bázis kombinatorikusan megtalálható. A duál megengedett bázismegoldások pedig alsó és felső korlátokat szolgáltatnak a célfüggvény értékére (ha nem is az egzakt minimumot, maximumot). Ez egyrészt lehetőséget nyújt képletszerű korlátok megadására, másrészt, ha az ismert bázisok halmaza elég bő, a korlátok is elég szorosak lesznek a gyakorlati alkalmazásokhoz. A területen elért eredményeket tárgyalják többek közt Prékopa [51, 53, 54], Mádi-Nagy és Prékopa [39, 40, 41], Mádi-Nagy [34, 35, 36] dolgozatai.

A másik megközelítés, hogy valahogy jobban kondicionálttá tesszük az együtthatómátrixot. A későbbiekben bemutatunk erre egy olyan megoldást, mely a Vandermonde-típusú mátrix mögötti hatványok helyett ortogonális polinombázisokat használ. A módszer előnye, hogy nem szükséges feltételeket tenni a célfüggvényre, lényegében bármilyen TDMP esetén megtalálhatjuk vele az optimális megoldást. Másrészt viszont, mivel itt nem kombinatorikusan kapott duál megengedett bázisokkal dolgozunk, a módszer nem alkalmas képletszerű korlátok megadására. A módszer leírása Mádi-Nagy [37] dolgozatában található.

A dolgozat további részében bemutatjuk, hogy a fentebb vázolt problémákra milyen megoldásokat, eredményeket találtunk, illetve bemutatjuk a TDMP-pár hasznos alkalmazási területét is, numerikus eredményekkel illusztrálva. A második fejezetben megmutatjuk, hogy a H momentum indexhalmaz általánosításaival milyen módon bővíthető a duál megengedett bázisstruktúrák halmaza, illetve hogy ezek segítségével milyen szoros korlátok adhatóak bizonyos feladatokra. A harmadik fejezet a polinom bázis transzformáción alapuló megoldási algoritmust és annak eredményeit mutatja be. A negyedik fejezetben különféle alkalmazásokat mutatunk be számolási eredményekkel. Az utolsó fejezetben a konklúzió túl megemlítünk pár nyitott kérdést, lehetséges kutatási irányt.

2. Duál megengedett bázisstruktúrák

A fejezetben azokat az eredményeket foglaljuk össze, melyek az (5) indexhalmaz különböző általánosításain mutatnak duál megengedett bázisstruktúrákat. Először röviden bemutatjuk a többváltozós Lagrange-interpoláció elméletét, illetve definiáljuk a Newton-féle alakban szereplő többváltozós osztott differenciákat. Ezek segítségével definiáljuk a diszkrét f függvényekre vonatkozó konvexitási feltételeket, illetve látni fogjuk, hogy a duál megengedett bázis struktúra tételek egyúttal diszkrét Lagrange-interpolációs eredményekként is értelmezhetőek. Utána bemutatjuk az (5) indexhalmaz két általánosítását és az ezekhez tartozó struktúra tételeket. Illusztrációként bemutatunk pár numerikus eredményt is. Végezetül megmutatjuk, hogy hogyan lehetséges a struktúrák alapján többváltozós képletszerű korlátokat megadni.

2.1. A TDMP és a Lagrange-interpoláció kapcsolata

A többváltozós Lagrange-interpoláció jóval bonyolultabb az egyváltozós eseténél, ahol bármely $z_0, \dots, z_n \in \mathbb{R}$ különböző alappontokra könnyen adható (egyértelmű) n -ed fokú Lagrange-polinom. Egyrészt a többváltozós esetben nehezen megválaszolható az a kérdés, hogy az alappontok milyen geometriai elhelyezkedése esetén létezik az előírt fokszámú tagokkal rendelkező (egyértelmű) Lagrange-

polinom. Másrészt, ugyancsak nehézségekbe ütközik a maradéktag áttekinthető struktúrával rendelkező képletének megtalálása.

A többváltozós Lagrange-polinom fokszámaára vonatkozóan írjuk fel a következő definíciót.

2.1. Definíció. Legyen $H = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)\}$ természetes szám s -esek egy véges halmaza. Legyen $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_s) \in \mathbb{R}^s$. Akkor mondjuk, hogy $p(\mathbf{z})$ egy H -típusú polinom, ha változói fokszámai a H halmaz elemei, tehát

$$p(\mathbf{z}) = \sum_{(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in H} c_{\alpha_1 \dots \alpha_s} z_1^{\alpha_1} \dots z_s^{\alpha_s},$$

ahol minden $c_{\alpha_1 \dots \alpha_s}$ valós szám.

Az alappontok geometriai elhelyezkedésével kapcsolatos az alábbi definíció.

2.2. Definíció. Legyen $U = \{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_M\}$ egy \mathbb{R}^s -beli pontokból álló halmaz, $H = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_s)\}$ pedig az $(\alpha_1, \dots, \alpha_s)$ természetes szám s -esek egy véges halmaza. Azt mondjuk, hogy U megenged egy H -típusú Lagrange-interpolációt, ha bármilyen $f(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in U$ valós függvény esetén létezik $p(\mathbf{z})$, H -típusú polinom, melyre

$$p(\mathbf{u}_i) = f(\mathbf{u}_i), \quad i = 1, \dots, M.$$

A H -típusú Lagrange-interpolációról, többek közt az (5)-beli H esetére is, jó áttekintést nyújt Gasca és Sauer [18], történeti áttekintésért pedig lásd Gasca és Sauer [19] dolgozatát.

A következőkben kapcsolatot teremtünk a TDMP és a többváltozós Lagrange-interpoláció között. Ehhez írjuk fel a (4) hatvány TDMP-feladatot az alábbi kompaktabb formában (bármilyen adott H indexhalmaz mellett)

$$\begin{aligned} \min(\max) \quad & \mathbf{f}^T \mathbf{p}, && \text{feltéve, hogy} \\ & A\mathbf{p} = \mathbf{b}, \\ & \mathbf{p} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{10}$$

Használjuk még az alábbi jelöléseket.

2.3. Definíció. $\mathbf{b}(z_1, \dots, z_s)$ jelentse azt a vektort, melyet a \mathbf{b} vektorból kapunk úgy, hogy eltekintünk a várható értéktől, az X_j argumentumokat pedig z_j -re cseréljük, $j = 1, \dots, s$. Tehát, ha \mathbf{b} egy komponense $\mu_{\alpha_1 \dots \alpha_s} = E[X_1^{\alpha_1} \dots X_s^{\alpha_s}]$ ($(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in H$) volt, akkor neki a $z_1^{\alpha_1} \dots z_s^{\alpha_s}$ komponens felel meg a $\mathbf{b}(z_1, \dots, z_s)$ vektorban.

2.1. TÉTEL. Tekintsük a (10) feladat egy B bázismátrixát és legyen I a bázis-oszlopok indexhalmaza, tehát

$$I = \{(i_1, \dots, i_s) \mid a_{i_1 \dots i_s} \in B\}, \tag{11}$$

ahol $a_{i_1 \dots i_s}$ jelöli az A mátrix $(z_{1i_1}, \dots, z_{si_s})$ ponthoz tartozó oszlopát. Tekintsük az alábbi (különböző) \mathbb{R}^s -beli pontok halmazát

$$U = \{(z_{1i_1}, \dots, z_{si_s}) \mid (i_1, \dots, i_s) \in I\}, \quad (12)$$

akkor

$$L_I(z_1, \dots, z_s) = \mathbf{f}_B^T B^{-1} \mathbf{b}(z_1, \dots, z_s)$$

az U alapponthalmaz egy egyértelmű H -típusú Lagrange-polinomja.

Bizonyítás. Lásd pl. Mádi-Nagy [35] Theorem 2.1. \square

Nem nehéz belátni, hogy a (10) minimum (maximum) feladat duál megengedett bázisa esetén a fenti konstrukció olyan Lagrange-polinomot ad meg, mely a $Z = Z_1 \times \dots \times Z_s$ tartó pontjain az $f(z_1, \dots, z_s)$ függvényértéket alulról (felülről) becüli. Ennek következménye az alábbi

2.2. TÉTEL. *Ha B a minimum (maximum) feladat duál megengedett bázisa, és az I index (11) szerinti, akkor*

$$\begin{aligned} f(z_1, \dots, z_s) &\geq L_I(z_1, \dots, z_s) \quad (z_1, \dots, z_s) \in Z, \\ (f(z_1, \dots, z_s) &\leq L_I(z_1, \dots, z_s) \quad (z_1, \dots, z_s) \in Z), \end{aligned}$$

amely, a (12) szerinti, $(z_1, \dots, z_s) \in U$ esetén egyenlőséggel teljesül. $f(X_1, \dots, X_s)$ várható értékére pedig az alábbi korlátok adhatók:

$$\begin{aligned} E[f(X_1, \dots, X_s)] &\geq E[L_I(X_1, \dots, X_s)], \\ (E[f(X_1, \dots, X_s)] &\leq E[L_I(X_1, \dots, X_s)]). \end{aligned}$$

Ha a bázis primál megengedett is (tehát optimális), akkor a kapott korlátok élesek.

Bizonyítás. Lásd pl. Mádi-Nagy [35] Theorem 2.3. \square

A következő bázisstruktúra tételekben a Lagrange-polinom Newton-féle alakban lesz megadva, tehát az együtthatók az f függvény ún. többváltozós osztott differenciái lesznek. A teljesség kedvéért közöljük az alábbi definíciókat.

2.4. Definíció. Legyen $f(z)$, $z \in \{z_0, \dots, z_n\}$ egy egyváltozós valós függvény, ahol z_0, \dots, z_n különböző valós számok, ekkor az elsőrendű osztott differenciák:

$$[z_i; f] := f(z_i), \quad \text{ahol } z_i \in \{z_0, \dots, z_n\}.$$

A k -ad rendű (egyváltozós) osztott differenciák ($k \geq 1$) az alábbi rekurzióval definiáltak:

$$[z_i, \dots, z_{i+k}; f] = \frac{[z_{i+1}, \dots, z_{i+k}; f] - [z_i, \dots, z_{i+k-1}; f]}{z_{i+k} - z_i}, \quad \text{ahol } z_i \in \{z_0, \dots, z_n\}.$$

2.5. *Definíció.* Legyen $f(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in Z = Z_1 \times \cdots \times Z_s$, többváltozós valós diszkrét függvény, és tekintsük az alábbi részhalmazt:

$$\begin{aligned} Z_{I_1 \dots I_s} &= \{z_{1i}, i \in I_1\} \times \cdots \times \{z_{si}, i \in I_s\} \\ &= Z_{1I_1} \times \cdots \times Z_{sI_s}, \end{aligned} \quad (13)$$

ahol $|I_j| = k_j + 1$, $j = 1, \dots, s$. Ekkor definiálhatjuk f (13) pontokhoz tartozó (k_1, \dots, k_s) rendű (többváltozós) osztott differenciáját. Először tekintsük az első változó szerinti k_1 rendű osztott differenciát, majd ennek a második változóhoz tartozó k_2 rendű osztott differenciáját, és így tovább. Megjegyezzük, hogy a fenti műveleteket bármilyen más (akár vegyes) sorrendben elvégezve a végeredmény ugyanaz lesz. Jelölje

$$[z_{1i}, i \in I_1; \cdots; z_{si}, i \in I_s; f]$$

a megfelelő $I = I_1 \times \cdots \times I_s$ halmazhoz tartozó (k_1, \dots, k_s) rendű osztott differenciát. A $k_1 + \cdots + k_s$ összeget pedig hívjuk az osztott differencia (teljes) rendjének.

Az fenti definíciót illusztrálja az alábbi példa.

2.1. Példa.

$$\begin{aligned} [z_{10}, z_{11}; z_{20}, z_{21}; f] &= \left[z_{20}, z_{21}; \frac{f(z_{11}, z_2) - f(z_{10}, z_2)}{z_{11} - z_{10}} \right] \\ &= \frac{\frac{f(z_{11}, z_{21}) - f(z_{10}, z_{21})}{z_{11} - z_{10}} - \frac{f(z_{11}, z_{20}) - f(z_{10}, z_{20})}{z_{11} - z_{10}}}{z_{21} - z_{20}}. \end{aligned}$$

Megjegyezzük, hogy folytonos, megfelelően deriválható függvények esetén a függvény deriváltjai, ill. diszkrét megszorításának osztott differenciái közt hasonló (előjel) összefüggések állnak a többváltozós esetben, mint az egyváltozósban.

2.2. Vegyes momentumok határeloszlások magasabb rendű momentumaival kiegészítve

A (4) hatvány TDMP esetén az (5) képlettel definiált H halmaz esetét Prékopa [53] vizsgálta. Isaacson és Keller [27] többváltozós Lagrange-interpolációs tételét, ill. a TDMP duál megengedett bázisa és a féloldalas interpoláció közti összefüggést felhasználva sikerült találnia a kétváltozós esetben lényegében két különböző, míg magasabb dimenziók esetén lényegében egy duál megengedett bázisstruktúrát. Az eredmény elméleti jelentőségén túl, alkalmas egy megoldó (nagy pontosságú aritmetikát használó) duál szimplex algoritmus kezdeti megengedett bázisának megtalálására (ezzel nagyjából megfelevezve a futási időt), illetve képletszerű korlátok konstruálására is.

Mivel a gyakorlatban az egydimenziós határeloszlásoknak általában a magasabb rendű momentumai is rendelkezésre állnak, ill. kiszámíthatóak, ezért követ-

kező lépésben Mádi-Nagy és Prékopa [39] a momentumok rendjét mutató H indexhalmazt az alábbi módon bővítette:

$$H = \{(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \mid 0 \leq \alpha_j, \alpha_j \text{ egész, } \alpha_1 + \dots + \alpha_s \leq m, j = 1, \dots, s; \\ \text{vagy} \\ \alpha_j = 0, j = 1, \dots, k-1, k+1, \dots, s, m \leq \alpha_k \leq m_k, k = 1, \dots, s\} \quad (14)$$

Ebben az esetben a duál megengedett bázisstruktúrák megtalálásához az alábbi jelölésekre és fogalmakra lesz szükség. Tekintsük az alábbi indexhalmazt:

$$I = I_0 \cup \left(\cup_{j=1}^s I_j\right), \quad (15)$$

ahol

$$I_0 = \{(i_1, \dots, i_s) \mid 0 \leq i_j \leq m-1, \text{ egészek, } j = 1, \dots, s, i_1 + \dots + i_s \leq m\}$$

és

$$I_j = \{(i_1, \dots, i_s) \mid i_j \in K_j, i_l = 0 \ l \neq j\} \\ K_j = \{k_j^{(1)}, \dots, k_j^{(|K_j|)}\} \subset \{m, m+1, \dots, n_j\}, j = 1, \dots, s. \quad (16)$$

A változó halmazokra az alábbi jelölésrendszert vezetjük be:

$$Z_{ji} = \{z_{j0}, \dots, z_{ji}\}, \\ Z'_{ji} = \{z_{j0}, \dots, z_{ji}, z_j\}, \quad i = 0, \dots, n_j, j = 1, \dots, s, \\ K_{ji} = \{k_j^{(1)}, \dots, k_j^{(i)}\}, \\ Z_{jK_{ji}} = \{z_{jk_j^{(1)}}, \dots, z_{jk_j^{(i)}}\}, \quad i = 1, \dots, |K_j|, j = 1, \dots, s, \\ Z_{jK_j} = Z_{jK_{|K_j|}}, j = 1, \dots, s.$$

A $Z_I = \{(z_{1i_1}, \dots, z_{si_s}) \mid (i_1, \dots, i_s) \in I\}$ alappont rendszerhez rendeljük az alábbi Newton-féle alakban felírt Lagrange-polinomot:

$$L_I(z_1, \dots, z_s) = \\ = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_s \leq m \\ 0 \leq i_j \leq m-1, j=1, \dots, s}} [Z_{1i_1}; \dots; Z_{si_s}; f] \prod_{j=1}^s \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) + \\ + \sum_{j=1}^s \sum_{i=1}^{|K_j|} [Z_{10}; \dots; Z_{(j-1)0}; Z_{j(m-1)} \cup Z_{jK_{ji}}; Z_{(j+1)0}; \dots; Z_{s0}; f] \times \\ \times \prod_{k \in \{0, \dots, m-1\} \cup K_{j(i-1)}} (z_j - z_{jk}), \\ \text{ahol, definíció szerint, } \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) = 1, \text{ ha } i_j = 0, \text{ és } K_{j0} = \emptyset. \quad (17)$$

Megjegyezzük, hogy a (17) esetben nem feltétlenül szükséges, hogy az f függvény értelmezési tartománya pontosan Z legyen, elég ha \mathbb{R}^s -beli, és tartalmazza a Z halmazt.

A maradéktagot az alábbi módon konstruáljuk:

$$R_I(z_1, \dots, z_s) = R_{1I}(z_1, \dots, z_s) + R_{2I}(z_1, \dots, z_s),$$

ahol

$$\begin{aligned} R_{1I}(z_1, \dots, z_s) &= \\ &= \sum_{j=1}^s [z_{10}; \dots; z_{(j-1)0}; Z_{j(m-1)} \cup Z_{jK_j} \cup \{z_j\}; z_{(j+1)0}; \dots; z_{s0}; f] \times \\ &\times \prod_{k \in \{0, \dots, m-1\} \cup K_j} (z_j - z_{jk}), \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} R_{2I}(z_1, \dots, z_s) &= \\ &= \sum_{h=1}^{s-1} \sum_{\substack{i_h + \dots + i_s = m \\ 0 \leq i_j \leq m-1, j=h, \dots, s}} [z_1; \dots; z_{h-1}; Z'_{hi_h}; Z_{(h+1)i_{h+1}}; \dots; Z_{si_s}; f] \times \\ &\times \prod_{l=0}^{i_h} (z_h - z_{hl}) \prod_{h+1}^s \prod_{k=0}^{i_j-1} (z_j - z_{jk}) + \\ &+ \sum_{j=h+1}^s [z_1; \dots; z_{h-1}; Z'_{h0}; Z_{(h+1)0}; \dots; Z_{(j-1)0}; Z'_{j(m-1)}; Z_{(j+1)0}; \dots; Z_{s0}] \times \\ &\times (z_h - z_{h0}) \prod_{k=0}^{m-1} (z_j - z_{jk}). \end{aligned}$$

2.3. TÉTEL. (Mádi-Nagy és Prékopa [39] Th. 3.1) *A fenti jelölések mellett a (17) szerinti polinom valóban a $Z_I = \{(z_{1i_1}, \dots, z_{si_s}) \mid (i_1, \dots, i_s) \in I\}$ alappont rendszerhez tartozó (14) szerinti H -típusú Lagrange-polinom és az f értelmezési tartományának bármely $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_s)$ pontjára igaz, hogy*

$$L_I(z_1, \dots, z_s) + R_I(z_1, \dots, z_s) = f(z_1, \dots, z_s).$$

A fenti interpoláció maradéktagjában az együtthatók $m + 1$ -edrendű, illetve $m + |K_j|$ rendű osztott differenciák. Ha ezekre előjelfeltételekkel élünk, akkor az alappontok megfelelő megválasztásával biztosítható, hogy a maradéktag előjele minden Z halmazbeli pontra pozitív (negatív) legyen, és ennek megfelelően (4) TDMP-alappontokhoz tartozó oszlopai a minimum (maximum) feladat duál megengedett bázisai legyenek.

Továbbra is tegyük fel, hogy $K_j \subset \{m, m+1, \dots, n_j\}$, és vezessük be az alábbi négy index struktúráját:

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{l} |K_j| \text{ páros} \\ \min \quad u^{(j)}, u^{(j)} + 1, \dots, v^{(j)}, v^{(j)} + 1 \\ \max \quad m, u^{(j)}, u^{(j)} + 1, \dots, v^{(j)}, v^{(j)} + 1, n_j \end{array} & \begin{array}{l} |K_j| \text{ páratlan} \\ m, u^{(j)}, u^{(j)} + 1, \dots, v^{(j)}, v^{(j)} + 1 \\ u^{(j)}, u^{(j)} + 1, \dots, v^{(j)}, v^{(j)} + 1, n_j \end{array} \end{array} \quad (18)$$

Ezt felhasználva az alábbi struktúratételt fogalmazzuk meg.

2.4. TÉTEL. (Mádi-Nagy és Prékopa [39] Th. 4.1) *Legyen $z_{j0} < z_{j1} < \dots < z_{jn_j}$, $j = 1, \dots, s$. Tegyük fel, hogy az $f(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in Z$ függvény $m+1$ -ed rendű és minden egyes z_j változó szerinti $m + |K_j|$ rendű osztott differenciája nemnegatív, és K_j (18) valamelyik min struktúráját követi.*

Ezen feltételek mellett a (17) szerinti $L_I(z_1, \dots, z_s)$ egy egyértelmű H -típusú Lagrange-polinom lesz a Z_I alaphalmazon. Ráadásul teljesíti az alábbi egyenlőtlenségeket:

$$f(z_1, \dots, z_s) \geq L_I(z_1, \dots, z_s), \quad (z_1, \dots, z_s) \in Z, \quad (19)$$

tehát a (10) feladatban az A mátrix I indexeihez tartozó oszlopaiból álló B mátrix a minimum feladat duál megengedett bázisa. Ennek megfelelően:

$$E[f(X_1, \dots, X_s)] \geq E[L_I(X_1, \dots, X_s)]. \quad (20)$$

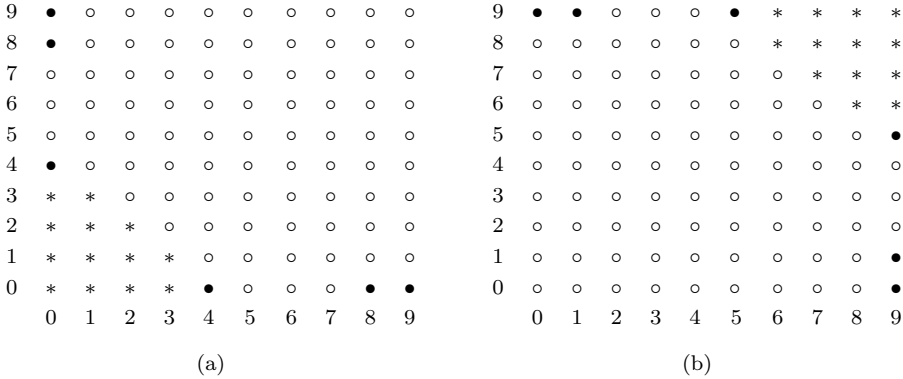
Ha B egyúttal primál megengedett is, akkor a fenti (20) egyenlőtlenség éles korlátot ad.

Ha a fenti osztott differenciák nempozitívak, akkor (19) és (20) ellentétes relációs jellel érvényesek.

A fenti gondolatmenetet követve Mádi-Nagy és Prékopa [39] további struktúratételeket is megfogalmaz, egyrészt arra az esetre, mikor a tartók komponenseinek elemei monoton csökkenő sorrendben szerepelnek, másrészt arra az esetre, amikor a (15) és (18) indexstruktúrák az $n_j - i_j$, $j = 1, \dots, s$ indexekre vannak átfogalmazva. Az így kapott duál megengedett bázisstruktúrákat szemlélteti az 1. ábra.

A kétváltozós esetre Mádi-Nagy és Prékopa [39] a duál megengedett bázisoknak ennél bővebb halmazát tudta megadni, a $Z_j = \{z_{j0}, \dots, z_{jn_j}\}$, $j = 1, \dots, s$ halmazok elemei sorrendjeinek megfelelő megválasztásával. A továbbiakban is tegyük fel, hogy az $f(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in Z$ függvény $m+1$ -ed rendű és minden egyes z_j változó szerinti $m + |K_j|$ rendű osztott differenciája nemnegatív.

Tekintsük először azt az esetet, amikor minimum feladathoz keresünk duál megengedett bázist. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $Z_1 = \{0, 1, \dots, n_1\}$, $Z_2 = \{0, 1, \dots, n_2\}$.



1. ábra. Az (a) ábra a (10) minimum feladat 2.4. tétel által megadott egyik duál megengedett bázisát, míg a (b) ábra a (10) maximum feladat Mádi-Nagy és Prékopa [39] Th. 4.3 egyik duál megengedett bázisát mutatja. Az I_0 halmaz elemeit *, míg az I_1 és I_2 halmaz elemeit ● jelöli. Mindkét esetben: $Z_1 = Z_2 = \{0, \dots, 9\}$. $m = 4$, $m_1 = m_2 = 6$. $K_1 = K_2 = \{4, 8, 9\}$.

Min algoritmus (Mádi-Nagy és Prékopa [39])

A $z_{10}, \dots, z_{1(m-1)}; z_{20}, \dots, z_{2(m-1)}$ **sorozatok konstrukciója.**

0. lépés: Legyen $t = 0$, $-1 \leq q_1 \leq m - 1$, $L = (0, 1, \dots, q_1)$, $U = (n_1, n_1 - 1, \dots, n_1 - (m - q_1 - 2))$, és legyen $(z_{10}, \dots, z_{1(m-1)}) = (\text{az } L, U \text{ rendezett halmazok tetszőleges összefűlése})$. Ha $|U|$ páros, akkor legyen $z_{20} = 0$, $l^0 = 1$, $u^0 = n_2$, ha $|U|$ páratlan, akkor pedig legyen $z_{20} = n_2$, $l^0 = 0$, $u^0 = n_2 - 1$. Ha $t = m - 1$, menjünk a 2. lépésre, különben pedig az 1. lépésre.

1. lépés: Ha $z_{1(m-1-t)} \in L$, akkor legyen $z_{2(t+1)} = l^t$, $l^{t+1} = l^t + 1$, $u^{t+1} = u^t$, ha $z_{1(m-1-t)} \in U$, akkor pedig legyen $z_{2(t+1)} = u^t$, $u^{t+1} = u^t - 1$, $l^{t+1} = l^t$. $t \leftarrow t + 1$. Ha $t = m - 1$, menjünk a 2. lépésre, különben ismételjük meg az 1. lépést.

2. lépés: Stop, megkonstruáltuk a $z_{10}, \dots, z_{1(m-1)}; z_{20}, \dots, z_{2(m-1)}$ sorozatokat.

Legyen $0, 1, \dots, q_2, n_2, \dots, n_2 - (m - q_2 - 2)$ a konstrukcióban eddig szereplő változók halmaza. Eszerint $(z_{jm}, z_{j(m+1)}, \dots, z_{jn_j}) = (q_j + 1, q_j + 2, \dots, n_j - (m - q_j - 1))$, $j = 1, 2$. Ha $m - 1 - q_j$ páros, akkor K_j kövesse (18) min struktúráját, ha pedig $m - 1 - q_j$ páratlan, akkor pedig max struktúráját, $j = 1, 2$. Ezzel befejeztük az I indexhez tartozó duálmegengedett bázis konstrukcióját.

Ha a maximum feladathoz szeretnénk duál megengedett bázisokat találni, akkor a $z_{10}, \dots, z_{1(m-1)}; z_{20}, \dots, z_{2(m-1)}$ sorozatok megadásához a Min algoritmusnak csak a 0. lépését kell megváltoztatni, a többi lépés ugyanaz marad. A K_j halmaz megválasztása pedig pont ellenkező módon történik.

Max algoritmus (Mádi-Nagy és Prékopa [39])**A** $z_{10}, \dots, z_{1(m-1)}; z_{20}, \dots, z_{2(m-1)}$ **sorozatok konstrukciója.**

0. lépés: Legyen $t = 0$, $-1 \leq q_1 \leq m - 1$, $L = (0, 1, \dots, q_1)$, $U = (n_1, n_1 - 1, \dots, n_1 - (m - q_1 - 2))$, és legyen $(z_{10}, \dots, z_{1(m-1)}) = (\text{az } L, U \text{ rendezett halmazok tetszőleges összefésülése})$. Ha $|U|$ páratlan, akkor legyen $z_{20} = 0$, $l^0 = 1$, $u^0 = n_2$, ha $|U|$ páros, akkor pedig legyen $z_{20} = n_2$, $l^0 = 0$, $u^0 = n_2 - 1$. Ha $t = m - 1$, menjünk a 2. lépésre, különben pedig az 1. lépésre. Stb.

Maximum feladat esetén, ha $m - 1 - q_j$ páros, akkor K_j kövesse a max struktúrát, különben pedig a min struktúrát.

Általános esetben (ha $Z_j \neq \{0, 1, \dots, n_j\}$) rendezzük Z_j elemeit növekvő sorrendbe, rendeljük hozzá bijektíven ebben a sorrendben a $(0, 1, \dots, n_j)$ halmaz elemeit, és ennek megfelelően hajtsuk végre az algoritmust.

A fenti tételekkel és algoritmusokkal a (14) által definiált momentum indexhalmaz esetén általában már sikerült akkora számosságú duál megengedett bázis halmazt találni, mely segítségével sok esetben lehetőség nyílik elég szoros közvetlen korlátok megadására. Első lehetőség, hogy kiszámoljuk az összes talált bázisra a célfüggvény értékét, majd tekintjük minimum (maximum) feladat esetén ezek közül a legnagyobbat (legkisebbet). Szerencsére, a feladat triviális transzformációja segítségével kiderül, hogy a legszorosabb korlátok keresésekor a K_j halmazok egymástól függetlenül optimalizálhatóak (Mádi-Nagy [34]), ill. még egy észrevétel segítségével látható, hogy ez az optimalizáció elvégezhető Prékopa [50] DMP-feladatot megoldó duál módszerének analógiájára (Mádi-Nagy [36]).

Tekintsük a (10) TDMP-feladatot. Célunk a (15) szerint definiált indexhalmazokhoz tartozó megoldások közül a legjobb megtalálása. Nevezzük a TDMP ezen megoldásait a továbbiakban Z_I -típusú megoldásoknak. A továbbiakban feltesszük, hogy

$$z_{j0} = 0, \quad j = 1, \dots, s \quad (21)$$

és

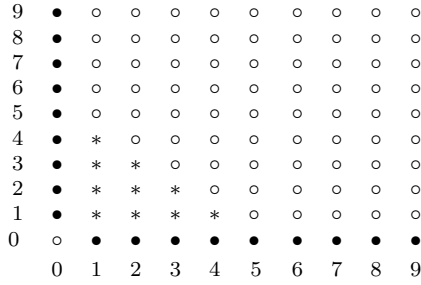
$$f(z_{10}, \dots, z_{s0}) = 0. \quad (22)$$

A fenti feltételek nem jelentik az általánosság megszorítását, mivel a tartó, ill. célfüggvény alábbi eltolásával (és a jobboldal vektorának komponenseiből z_{10}, \dots, z_{s0} megfelelő hatványainak levonásával) az eredetivel ekvivalens, (21), (22) feltételeket teljesítő TDMP-feladatot kapunk:

$$\begin{aligned} Z^{\text{converted}} &= Z - (z_{10}, \dots, z_{s0}), \\ f^{\text{converted}}(\mathbf{z}) &= f(z_1 + z_{10}, \dots, z_s + z_{s0}) - f(z_{10}, \dots, z_{s0}). \end{aligned}$$

Az indexhalmazok tekintetében egy másik felosztást alkalmazunk, legyen

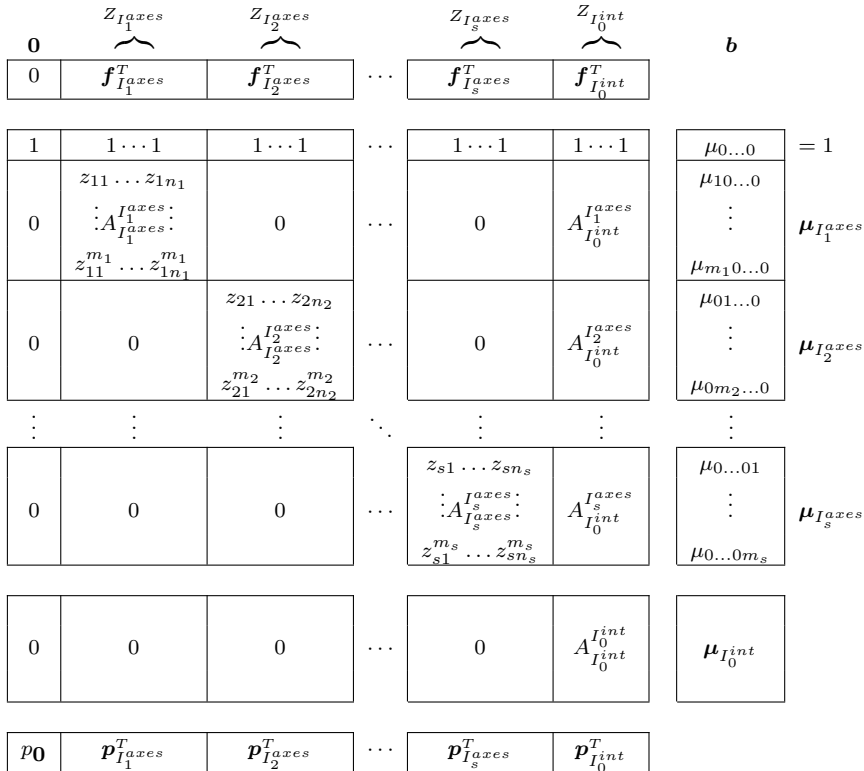
$$\begin{aligned} I_0^{\text{int}} &= \{(i_1, \dots, i_s) \mid 1 \leq i_j \leq m - 1, \text{ egész}, j = 1, \dots, s, i_1 + \dots + i_s \leq m\}, \\ I_j^{\text{axes}} &= \{(i_1, \dots, i_s) \mid 1 \leq i_j \leq n_j, \text{ egész}; i_l = 0 \ l \neq j \text{ esetén}\}. \end{aligned} \quad (23)$$



2. ábra. A (23) indexhalmazok elhelyezkedése, ha $n_1 = n_2 = 9, m = 5$, a (14) H halmaz esetén. Az I_0^{int} halmaz elemeit *, az I_1^{axes} és I_2^{axes} elemeit pedig ● jelöli.

Ezt a struktúrát mutatja a 2. ábra.

Ha a (10) TDMP együtthatómátrixának oszlopaiból elhagyjuk azokat, melyek indexei nem lehetnek tagjai egyetlen (15) szerint definiált indexhalmaznak sem, majd a maradék oszloprendszer (23) szerint rendezzük az alábbi blokk struktúrát kapjuk:



A fenti struktúra mutatja, hogy az I_0 indexhalmazhoz tartozó valószínűségek az alábbi képlettel egyértelműen adóttak:

$$\mathbf{p}_{I_0^{int}} = \left(A_{I_0^{int}}^{I_0^{int}} \right)^{-1} \boldsymbol{\mu}_{I_0^{int}}.$$

Innen pedig az is látszik, hogy a feladat az alábbi részfeladatokra esik szét:

$$\begin{aligned} \max(\min) \quad & \mathbf{f}_{I_j^{axes}}^T \mathbf{p}_{I_j^{axes}}, \quad \text{feltéve, hogy} \\ & A_{I_j^{axes}}^{I_j^{axes}} \mathbf{p}_{I_j^{axes}} = \mathbf{b}_1^{I_j^{axes}} \end{aligned} \tag{24}$$

$$\mathbf{p}_{I_j^{axes}} = \text{egy } Z_I\text{-típusú bázismegoldás része,}$$

ahol

$$\mathbf{b}_1^{I_j^{axes}} = \boldsymbol{\mu}_{I_j^{axes}} - A_{I_0^{int}}^{I_j^{axes}} \mathbf{p}_{I_0^{int}},$$

$j = 1, \dots, s$. Ez pedig pont azt jelenti, hogy a fentiekben alapulva a (16)-beli K_j struktúrák a (24) feladat segítségével $j = 1, \dots, s$ koordinátánként egymástól függetlenül tesztelhetőek. Részletekért lásd Mádi-Nagy [34].

Tekintsük a (24) szerinti együtthatómátrixszal és jobboldallal felírt feladatot:

$$\begin{aligned} \min(\max) \quad & \mathbf{f}_{I_j^{axes}}^T \mathbf{p}_{I_j^{axes}}, \quad \text{feltéve, hogy} \\ & A_{I_j^{axes}}^{I_j^{axes}} \mathbf{p}_{I_j^{axes}} = \mathbf{b}_1^{I_j^{axes}}, \\ & \mathbf{p}_{I_j^{axes}} \geq \mathbf{0}. \end{aligned} \tag{25}$$

Belátható, hogy a (24) feladatbeli Z_I -típusú bázismegoldás részek a (25) feladat duál megengedett bázisai. Ha az is igaz, hogy a *duál megengedett bázisok nem duál degeneráltak*, akkor a (24) feladat duál megengedett megoldásainak teljes struktúrája megengedi, hogy használjuk Prékopa [50] algoritmusának az alábbi átalakítását:

1. lépés: Tekintsünk egy kezdeti (24) feladatbeli Z_I -típusú bázismegoldás részt, jelölje ennek indexeit $I_B = \{1, \dots, m - 1, i_0, i_1, \dots, i_{m_j - m}\}$, ahol $m \leq i_0, i_1, \dots, i_{m_j - m} \leq n_j$. Legyen $K = 0, \dots, m_j - m$. (A K halmaz különbözik a K_j halmaztól!)

2. lépés: Kimenő oszlop meghatározása: Tekintsünk egy $i_k, k \in K$ indexet. Prékopa [50] szerint a hozzá tartozó p_{i_k} bázisváltozó előjele megegyezik

$$\begin{aligned} & (-1)^{m_j - (q_j + k + 1)} \times \\ & \times \left[\mathbf{b}_{m_j}^{I_j^{axes}} - \left(\sum_{J \in I_j^{axes} \setminus \{i_k\}} z_j i_j \right) \mathbf{b}_{m_j - 1}^{I_j^{axes}} + \dots \right. \\ & \left. \dots + (-1)^{m_j - 1} \left(\prod_{J \in I_j^{axes} \setminus \{i_k\}} z_j i_j \right) \mathbf{b}_1^{I_j^{axes}} \right], \end{aligned} \tag{26}$$

előjelével, ahol q_j a Min, ill. Max algoritmus paramétere (pl. a 2.4. tétel esetén $q_j = m - 1$). Tehát ha (26)

- negatív, akkor az i_k -adik vektor lesz a kimenő oszlop;
- ha nemnegatív, akkor választani kell egy új $i_k, k \in K$ indexet, és megnézni rá (26) előjelét.
- Ha (26) minden $i_k, k \in K$ esetén nemnegatív, akkor menjünk a 4. lépésre.

3. lépés: Ha a kimenő oszlop megvan, akkor válasszuk azt az egyértelmű (kimenőtől különböző) bemenő oszlopot, melyre a Z_I -típusú bázismegoldás rész struktúra visszaállítódik. Menjünk a 2. lépésre.

4. lépés: Stop, megtaláltuk (24) optimális megoldását.

Megjegyezzük, hogy a duál nemdegeneráltságra elégséges feltétel, hogy a z_j változó szerinti $m + |K_j|$ rendű osztott differenciák szigorúan pozitívak.

Végezetül a különböző módszerek futási idejére tekintsünk egy numerikus példát. Mindegyik algoritmust a szimbolikusan is számolni képes Wolfram Mathematica [62] alatt implementáltuk, ennek oka az alábbi. Szerettük volna a kapott korlátokat az optimumokkal összehasonlítani, viszont a hagyományos solverek a rossz numerikus tulajdonságok miatt nem használhatóak, ezért írtunk ezen a nyelven egy olyan duál szimplex algoritmust, amely szimbolikusan, végig törtalakkal számol. A következőkben az alsó és felső korlátok esetén az összes generált bázist végigpróbáló módszer futási idejét CPU_f , a koordinátáinként a K_j halmazokat függetlenül próbálgató módszerét CPU_n , míg a duál módszert is használó algoritmusét pedig CPU_u jelöli. A pontos optimum megtalálásának idejét pedig CPU .

2.2. Példa. A feladat Mádi-Nagy és Prékopa [39] Example 6.6 egyik vizsgált esete. Legyen $Z_1 = Z_2 = \{0, \dots, 14\}$, $m = 6$, $m_1 = m_2 = 4$, és generáljuk a hatványmomentumokat a Z tartón vett egyenletes eloszlás segítségével. Tekintsük az alábbi függvényt:

$$f(z_1, z_2) = e^{z_1/25+z_1z_2/400+z_2/15}.$$

Eredményeink az alábbiak:

| | Érték | CPU_f | CPU_n | CPU_u |
|---------------|----------|---------|---------|---------|
| Alsó korlát: | 2, 61202 | 253 | 1, 76 | 0, 83 |
| Felső korlát: | 2, 67123 | 254 | 1, 59 | 0, 69 |
| | Érték | CPU | | |
| Dual Min: | 2, 63549 | 4596 | | |
| Dual Max: | 2, 64247 | 3156 | | |

Látható, egyrészt hogy a duál megengedett struktúrákból származó alsó és felső korlátok viszonylag gyorsan adnak használható korlátokat, másrészt pedig, hogy a legjobb korlátok megtalálására valóban hatékonyan használható a fent leírt módszer.

2.3. Új típusú általánosítás magasabb dimenziójú esetekre

Az előző szakaszban láthattuk, hogy a kétváltozós esetre bemutatott Min és Max algoritmus segítségével a 2.4. tétel, és a többi Mádi-Nagy és Prékopa [39] cikkben szereplő struktúratétel bázisainál jóval nagyobb számosságú duál megengedett bázist generálhatunk. Sajnos magasabb dimenziókra, a (14) indexhalmaz esetén, nem sikerült a módszert általánosítani.

Mádi-Nagy [35] mutatta meg, hogy a módszer, nemnegatív osztott differenciák és minimum feladat esetén, az alábbi indexhalmazra továbbvihető:

$$\begin{aligned} H = \{ & (\alpha_1, 0, \dots, 0, \alpha_j, 0, \dots, 0) \mid 0 \leq \alpha_1, \alpha_j, \alpha_1, \\ & \alpha_j \text{ egész, } \alpha_1 + \alpha_j \leq m, j = 2, \dots, s; \} \\ & \cup \{ (0, \dots, 0, \alpha_j, 0, \dots, 0) \mid m + 1 \leq \alpha_j \leq m_j, \\ & \alpha_j \text{ egész, } j = 1, \dots, s \}. \end{aligned} \quad (27)$$

Könnyen látható, hogy (14) és (27) a kétváltozós esetben ugyanazt az indexhalmazt adja.

Ebben az esetben az I indexhalmazt és a későbbiekben használt jelöléseket az alábbi módon definiáljuk.

$$I = \left(\bigcup_{j=1}^s I_j \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^s J_j \right), \quad (28)$$

ahol

$$\begin{aligned} I_1 &= \{(i_1, 0, \dots, 0) \mid 0 \leq i_1 \leq m - 1, \text{ egészek}\}, \\ I_j &= \{(i_1, 0, \dots, 0, i_j, 0, \dots, 0) \mid 0 \leq i_1, 1 \leq i_j \leq m - 1, \text{ egészek, } i_1 + i_j \leq m\}, \\ & \quad j = 2, \dots, s, \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} J_j &= \{(0, \dots, 0, i_j, 0, \dots, 0) \mid i_j \in K_j\}, \\ K_j &= \{k_j^{(1)}, \dots, k_j^{(|K_j|)}\} \subset \{m, m + 1, \dots, n_j\}, \\ |K_j| &= mj + 1 - m, j = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

A fenti jelölésekkel megfogalmazhatjuk, a 2.3. tételhez hasonlóan, a (27) indexhalmazhoz tartozó H -típusú Lagrange-interpolációs tételt: lásd Mádi-Nagy [35]

Th. 3.1. Bizonyos feltételek, és a (28) szerinti I halmazhoz tartozó Z_I változóhalmaz megfelelő megválasztásával, ebben az esetben is számos duálmegengedett bázis található.

A következőkben az alábbiakat tesszük fel a célfüggvényről.

2.1. *Feltételek.* Az $f(\mathbf{z})$, $\mathbf{z} \in Z$ függvény

- (a) z_j szerinti $m_j + 1$ rendű osztott differenciái nemnegatívak, $j = 1, \dots, s$,
- (b) a kétváltozós $m + 1$ rendű osztott differenciái is nemnegatívak,
- (c) minden másodrendű osztott differenciája nemnegatív.

A fenti feltételek mellett az alábbi algoritmussal a minimum feladathoz számos duál megengedett bázis generálható. Természetesen, ha a fenti osztott differenciák nempozitívak, akkor az alábbi módszerrel a maximum feladathoz kapunk duál megengedett bázisokat.

Min algoritmus

Először, az általánosság megszorítása nélkül, tegyük fel, hogy $Z_j = \{0, 1, \dots, n_j\}$, $j = 1, \dots, s$.

0. lépés: Legyen

$$z_{20} = z_{30} = \dots = z_{s0} = 0, \quad (29)$$

vagy

$$z_{20} = n_2, z_{30} = n_3, \dots, z_{s0} = n_s. \quad (30)$$

(29) esetén legyen $0 \leq q_1 \leq m$ páros egész, (30) esetén pedig páratlan egész. $L := (0, 1, \dots, (m-1)-q_1)$, $U := (n_1, n_1-1, \dots, n_1-(q_1-1))$, $V^0 := \{L, U$ tetszőleges összefésülése $\} = (v^0, v^1, \dots, v^{m-1})$.

$$(z_{10}, \dots, z_{1(m-1)}) := V^0.$$

Legyen $j = 2$. Menjünk az 1. lépésre!

1. lépés: Legyen $t = 0$. (29) esetén legyen $l_0 = 1$ és $u_0 = n_j$, különben legyen $l_0 = 0$ és $u_0 = n_j - 1$. Menjünk a 2. lépésre.

2. lépés: Legyen $V^t = \{v^0, v^1, \dots, v^{m-1-t}\}$, $H^t = \{h^1, \dots, h^t\}$. Ha $v^{m-1-t} \in L$, legyen $h^{t+1} = l^t$, $l^{t+1} = l^t + 1$, $u^{t+1} = u^t$, ha pedig $v^{m-1-t} \in U$, akkor legyen $h^{t+1} = u^t$, $u^{t+1} = u^t - 1$, $l^{t+1} = l^t$. $t \leftarrow t + 1$. Ha $t = m$, akkor menjünk a 3. lépésre, különben ismételjünk a 2. lépést.

3. lépés: Legyen

$$(z_{j1}, \dots, z_{j(m-1)}) = H^{m-1}.$$

$j \leftarrow j + 1$. Ha $j = s + 1$, menjünk a 4. lépésre, különben pedig az 1. lépésre.

4. lépés: Jelöljük a $z_{j0}, z_{j1}, \dots, z_{j(m-1)}$ sorozat elemeit a következő módon: $0, 1, \dots$,

$r_j, n_j, \dots, n_j - (m - r_j - 2)$. Ekkor a maradék j -edik koordinátákat rendezett halmazként tekintve legyen

$$(z_{jm}, z_{j(m+1)}, \dots, z_{jn_j}) = (r_j + 1, r_j + 2, \dots, n_j - (m - r_j - 1)),$$

$j = 1, \dots, s$. Ha $m - r_j - 1$ páros, akkor K_j kövesse (18) min struktúráját, ha pedig $m - r_j - 1$ páratlan, akkor K_j kövessen max struktúrát. Vége: legeneráltuk az I indexhalmazhoz tartozó duál megengedett bázisstruktúrát.

Általános esetben (ha $Z_j \neq \{0, 1, \dots, n_j\}$) rendezzük Z_j elemeit növekvő sorrendbe, rendeljük hozzá bijektíven ebben a sorrendben a $(0, 1, \dots, n_j)$ halmaz elemeit és ennek megfelelően hajtsuk végre az algoritmust.

2.5. TÉTEL. (Mádi-Nagy [35] Theorem 4.2) *Legyen a $(z_{j0}, \dots, z_{jn_j})$, $j = 1, \dots, s$, sorozat a fenti Min algoritmus szerinti sorrendben, és kövessen K_j min (max) struktúrát, ha $m - r_j - 1$ páros (páratlan), $j = 1, \dots, s$.*

Ekkor a 2.1. feltételek teljesülése esetén az A mátrix I indexhalmazhoz tartozó B oszloprendszer a minimum feladat duál megengedett bázisa lesz. Ha B egyúttal primál megengedett, akkor a kapott korlát éles lesz.

A kapott bázisokat szemlélteti a 3. ábra. A fent vázolt módszerrel kapott numerikus eredmények az alkalmazásokat tartalmazó szakaszban találhatóak.

2.4. Képletszerű korlátok

A duál megengedett bázisstruktúrák, a belőlük származtatott féloldalasan közelítő Lagrange-polinomok segítségével, lehetőséget nyújtanak többváltozós Bonferroni-típusú korlátok felírására. A kétváltozós eredményeket foglalja össze Mádi-Nagy és Prékopa [41].

Legyen A_1, \dots, A_N és B_1, \dots, B_M két eseménysorozat ugyanabban a valószínűségi mezőben. Az $\nu_N(A)$, ill. $\nu_M(B)$ valószínűségi változók legyenek a bekövetkezések számai a A_i , ill. B_j események körében.

A cél Bonferroni-típusú korlátok megadása a kétváltozós esetre, amely alatt az alábbi séma szerinti egyenlőtlenségeket értjük:

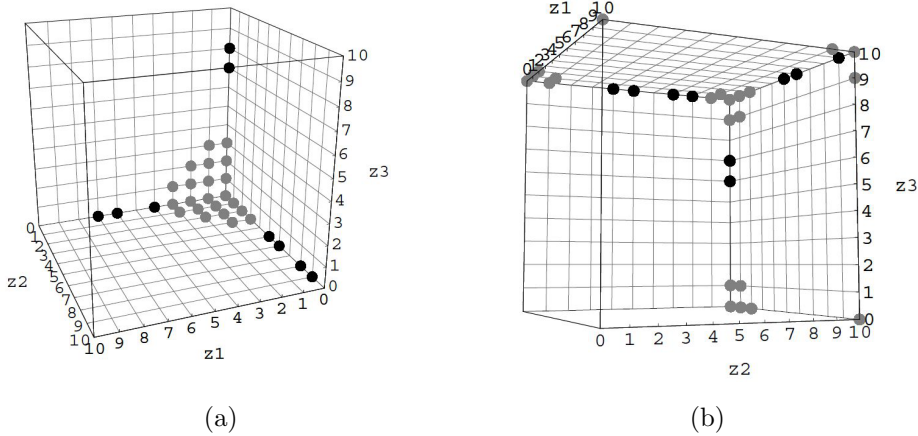
$$\sum_{k \in K} \sum_{t \in T} c_{kt} S_{kt} \leq r(u, v; N, M) \leq \sum_{k \in K} \sum_{t \in T} d_{kt} S_{kt}, \quad (31)$$

ahol

$$K \subseteq \{0, \dots, N\}, \text{ és } T \subseteq \{0, \dots, M\},$$

és $r(u, v; N, M)$ az alábbi valószínűségek valamelyikre

$$\begin{aligned} p(u, v; N, M) &= P(\nu_N(A) = u, \nu_M(B) = v), \\ q(u, v; N, M) &= P(\nu_N(A) \geq u, \nu_M(B) \geq v), \end{aligned}$$



3. ábra. Legyen $Z_j = \{0, \dots, 10\}$, $j = 1, 2, 3$, $m = 4$, $m_1 = 7$, $m_2 = 8$, $m_3 = 6$. A fentiek a Min algoritmus duál megengedett bázisai, (a): ahol $(z_{j0}, z_{j1}, z_{j2}, z_{j3}) = (0, 1, 2, 3)$, $j = 1, 2, 3$, $K_1 = \{4, 6, 7\}$, $K_2 = \{5, 6, 8, 9\}$, $K_3 = \{7, 8\}$, illetve (b): ahol $(z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{13}) = (0, 1, 10, 2)$, $(z_{j0}, z_{j1}, z_{j2}, z_{j3}) = (10, 0, 9, 1)$, $j = 2, 3$, $K_1 = \{6, 7, 10\}$ ($Z_{1K_1} = \{5, 6, 9\}$), $K_2 = \{6, 7, 9, 10\}$ ($Z_{2K_2} = \{4, 5, 7, 8\}$), $K_3 = \{8, 9\}$ ($Z_{3K_3} = \{6, 7\}$). Az $\bigcup_{j=1}^s I_j$ halmaz elemei szürke, míg az $\bigcup_{j=1}^s J_j$ halmaz elemei fekete gömbökkel jelöltek.

míg az S_{kt} értékek pedig az eseménysorozatokhoz tartozó, (7) szerinti, binomiális momentumok. Az egyenlőtlenségek c_{kt} , ill. d_{kt} együtthatói pedig olyan valós számok, melyekre (31) teljesül, függetlenül az A_i , ill B_j eseményrendszerek valószínűségi eloszlásától.

A korlátozandó valószínűsések várható értéként is felírhatóak $r(u, v; N, M) = E [I_{r(u,v;N,M)}(\nu_N(A), \nu_M(B))]$ alakban, ahol

$$I_{p(u,v;N,M)}(z_1, z_2) = \begin{cases} 1, & \text{ha } z_1 = u, z_2 = v, \\ 0, & \text{különben,} \end{cases} \tag{32}$$

és

$$I_{q(u,v;N,M)}(z_1, z_2) = \begin{cases} 1, & \text{ha } z_1 \geq u, z_2 \geq v, \\ 0, & \text{különben.} \end{cases} \tag{33}$$

Mádi-Nagy és Prékopa [41] az (5) indexhalmaznak megfelelő eseteket vizsgálja, tehát ahol az ismert binomiális momentumok rendje legfeljebb m . A $p(0, 0; N, M)$, $q(1, 1; N, M)$ valószínűségekhöz tartozó (32), (33) indikátorfüggvények $m + 1$ rendű osztott differenciáinak előjele kiszámolható. Ebből kiindulva a duál megengedett bázisstruktúrákat a megfelelő Min és Max algoritmusokkal előállíthatjuk, és

így az I indexhalmazhoz tartozó alapponton definiált alulról, ill. felülről közelítő Lagrange-polinomok képletszerűen felírhatóak: lásd Mádi-Nagy és Prékopa [41] Theorem 2.2.

Az így kapott Lagrange-polinomok várható értékeként közvetlenül adódnak az irodalomban ismert, más módszerekkel megkapott egyenlőtlenségek, mint például Galambos és Xu [21] (I) egyenlőtlensége vagy Lee [31] Th. 2 egyenlőtlensége. Az előtte ismert eredményeknél erősebb korlátokat mutat az alábbi példa.

2.3. *Példa.* (Mádi-Nagy és Prékopa [41] Ex. 3.3) Legyen $m = 4$, és tekintsük a $q(1, 1; N, M)$ valószínűséget. Alkalmazva a Min és Max algoritmusokat legyen:

1. $(z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{14}) = (0, 1, N, 2, 3)$
 $\implies (z_{20}, z_{21}, z_{22}, z_{23}, z_{24}) = (0, 1, M, 2, 3),$
2. $(z_{10}, z_{11}, z_{12}, z_{13}, z_{14}) = (0, N, 1, N - 1, 2)$
 $\implies (z_{20}, z_{21}, z_{22}, z_{23}, z_{24}) = (0, M, 1, M - 1, 2).$

A fenti változósorrendeknek megfelelő alsó és felső korlátok az alábbiak lesznek:

1.
$$q(1, 1; N, M) \geq S_{11} - S_{12} - S_{21} + \frac{3}{M}S_{13} + \frac{3}{N}S_{31} + \frac{4}{NM}S_{22}, \quad (34)$$

2.
$$q(1, 1; N, M) \leq S_{11} - \frac{2(NM - N + M - 2)}{NM(M - 1)}S_{12} - \frac{2(NM - M + N - 2)}{NM(N - 1)}S_{21} + \frac{6}{NM(M - 1)}S_{13} + \frac{6}{NM(N - 1)}S_{31} + \frac{4}{NM}S_{22}. \quad (35)$$

Látható, hogy (34) a klasszikus $S_{11} - S_{12} - S_{21}$ alsó korlátnál erősebb:

$$q(1, 1; N, M) \geq S_{11} - S_{12} - S_{21} + \frac{3}{M}S_{13} + \frac{3}{N}S_{31} + \frac{4}{NM}S_{22} \geq S_{11} - S_{12} - S_{21},$$

míg (35) pedig Galambos és Xu [20] felső korlátjánál ad jobb eredményt:

$$\begin{aligned} & S_{11} - \frac{2(NM - N + M - 2)}{NM(M - 1)}S_{12} - \frac{2(NM - M + N - 2)}{NM(N - 1)}S_{21} + \\ & + \frac{6}{NM(M - 1)}S_{13} + \frac{6}{NM(N - 1)}S_{31} + \frac{4}{NM}S_{22} = \\ & = \left(S_{11} - \frac{2}{M}S_{12} - \frac{2}{N}S_{21} + \frac{4}{NM}S_{22} \right) - \\ & - \frac{6}{NM(M - 1)} \left[\left(\frac{M - 2}{3}S_{12} - S_{13} \right) + \left(\frac{N - 2}{3}S_{21} - S_{31} \right) \right] \leq \\ & \leq S_{11} - \frac{2}{M}S_{12} - \frac{2}{N}S_{21} + \frac{4}{NM}S_{22}. \end{aligned}$$

3. Polinombázis-transzformáció

A (4) TDMP együtthatómátrixa is rosszul kondicionált, hasonlóan az egyváltozós eset Vandermonde-mátrixához, így a feladat nagyon érzékeny numerikusan: emiatt gyakran nem oldható meg hagyományos LP-megoldó solverek segítségével. Sajnos, mivel ebben az esetben nem ismert a duál megengedett bázisstruktúrák teljes halmaza, a feladat megoldására nem tudunk Prékopa [50] egyváltozós kombinatorikus duál módszeréhez hasonló algoritmust kidolgozni. Szóba jöhet még nagy pontosságú megoldók használata, de ezek óriási hátránya a hosszú futási idő. Ebben a szakaszban bemutatunk egy másik megközelítést, mely segítségével belátható időn belül megoldható a TDMP, ráadásul a célfüggvényre tett bármilyen feltétel nélkül.

Tekintsük az alábbi vektort:

$$\mathbf{b}(\mathbf{z}) = \mathbf{b}(z_1, \dots, z_s) = \begin{pmatrix} 1 \\ z_1 \\ z_1^2 \\ \vdots \\ z_1^{\alpha_1} z_2^{\alpha_2} \dots z_s^{\alpha_s} \\ \vdots \\ z_s^m \end{pmatrix}, \text{ ahol } (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in H. \quad (36)$$

Ezek után a (4) TDMP A együtthatómátrixának oszlopai az alábbi módon formalizálhatóak:

$$\mathbf{a}_{i_1 \dots i_s} = \mathbf{b}(z_{1i_1}, \dots, z_{si_s}),$$

míg a jobboldal vektora az alábbi módon írható

$$\mathbf{b} = E(\mathbf{b}(X_1, \dots, X_s)).$$

Az ötletet az (5) H indexhalmazra mutatjuk be, tehát amikor a legfeljebb m -ed rendű momentumok adottak. Ekkor (36) $\mathbf{b}(\mathbf{z})$ vektorának komponensei a legfeljebb m -ed fokú, s változós polinomok monomiál (legfeljebb m -ed fokú \mathbf{z} hatványok) polinombázisai. Tekintsük a fenti polinomok terének egy másik bázisát, jelölje ezt

$$p_{0\dots 0}(\mathbf{z}), p_{1\dots 0}(\mathbf{z}), \dots, p_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(\mathbf{z}), \dots, p_{0\dots m}(\mathbf{z}). \quad (37)$$

Legyen

$$\bar{\mathbf{b}}(\mathbf{z}) = \bar{\mathbf{b}}(z_1, \dots, z_s) = \begin{pmatrix} p_{0\dots 0}(\mathbf{z}) \\ p_{1\dots 0}(\mathbf{z}) \\ \vdots \\ p_{\alpha_1\dots \alpha_s}(\mathbf{z}) \\ \vdots \\ p_{0\dots m}(\mathbf{z}) \end{pmatrix}, \text{ ahol } (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in H, \quad (38)$$

$$\bar{\mathbf{a}}_{i_1\dots i_s} = \bar{\mathbf{b}}(z_{1i_1}, \dots, z_{si_s}).$$

és

$$\bar{\mathbf{b}} = E(\bar{\mathbf{b}}(X_1, \dots, X_s)).$$

Az $\bar{A}\mathbf{p} = \bar{\mathbf{b}}$ egyenletrendszer ekvivalens a (4) $A\mathbf{p} = \mathbf{b}$ egyenletrendszerével, abban az értelemben, hogy létezik egy T invertálható mátrix, melyre

$$\bar{A} = TA \text{ és } \bar{\mathbf{b}} = T\mathbf{b}.$$

Célunk olyan (37) bázis megtalálása, melyre az \bar{A} mátrix már jobban kondicionált. Ha ilyen találunk, akkor (4) helyett a numerikusan stabilabb

$$\begin{aligned} \min \quad & (\max) \mathbf{f}^T \mathbf{p}, \quad \text{feltéve, hogy} \\ & \bar{A}\mathbf{p} = \bar{\mathbf{b}}, \\ & \mathbf{p} \geq \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (39)$$

feladatot már reguláris solvekkel is megoldhatjuk. Először felsoroljuk, hogy mely polinombázisok esetén várható javulás az együtthatómátrix kondíciójában, majd teszteljük a jelölteket, végül ezek alapján bemutatunk egy numerikusan stabil és emellett hatékony algoritmust, mely egyúttal azt is megmutatja, hogy a kapott megoldás valóban megengedett és optimális megoldása-e az TDMP-feladatnak.

3.1. Kondíciósám, polinombázisok

Ahhoz, hogy a különböző polinombázisokkal felírt együtthatómátrixok tulajdonságait tesztelhesük, szükség van a kondíciósám fogalmára. Tekintsük az alábbi lineáris egyenletrendszert

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

ahol A invertálható, négyzetes mátrix. Tegyük fel, hogy a \mathbf{b} jobboldali vektor pontatlanul, \mathbf{e} hibavektorral adott, ekkor a megoldás hibás lesz, ennek hibája legyen \mathbf{d} . Tehát

$$A(\mathbf{x} + \mathbf{d}) = \mathbf{b} + \mathbf{e}.$$

Az A mátrix kondíciószáma az \mathbf{x} megoldás relatív hibája és a \mathbf{b} jobboldal relatív hibája hányadosának maximuma. Tehát az A kondíciószáma az alábbi hányados maximuma:

$$\frac{\|\mathbf{d}\|/\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{e}\|/\|\mathbf{b}\|} = \frac{\|A^{-1}\mathbf{e}\|/\|\mathbf{x}\|}{\|\mathbf{e}\|/\|A\mathbf{x}\|} = (\|A^{-1}\mathbf{e}\|/\|\mathbf{e}\|) (\|A\mathbf{x}\|/\|\mathbf{x}\|).$$

Vegyük észre, hogy a tényezők maximumai rendre az $\|A^{-1}\|$, ill. $\|A\|$ mátrixnormák. Ebből következik az alábbi definíció.

3.1. Definíció. Az invertálható, kvadratikus A mátrix kondíciószáma

$$\kappa(A) = \|A^{-1}\| \cdot \|A\|.$$

Polinombázisok esetére, függvények közelítésével kapcsolatban, más típusú kondíciós számok is értelmezhetőek, lásd pl. Lyche és Peña [33], Skeel [60].

A vizsgálandó polinombázisok első csoportja az ortogonális polinomok családjából származik. Ennek oka, hogy számos tétel szól ortogonális bázisok alkalmazásáról Vandermonde-típusú mátrixok kondíciós számával kapcsolatban, lásd pl. Gautschi [22], Blyth, Luo és Pozrikidis [4], Li [32]. Ezen tételek fókuszában általában az interpolációs pontok optimális helyzetének megadása áll, annak érdekében, hogy a Vandermonde-típusú mátrix kondíciós száma minél jobb legyen. Sajnos a TDMP megoldása során *a bázis folyton változik, ennek megfelelően az oszlopokhoz tartozó pontrendszer sem marad állandó.* Éppen ezért szükséges, hogy az alkalmazott polinombázisok kondíciós számra gyakorolt hatását legalább numerikusan leteszteljünk.

Az egyváltozós ortogonális polinomokat vezeti be az alábbi definíció.

3.2. Definíció. A $p = \{p_0, \dots, p_n\}$ polinomrendszert – ahol p_i foka i , $i = 0, \dots, n$ – *ortogonális polinomnak* nevezzük az $[a, b]$ intervallumon (ahol $a = -\infty$, ill. $b = +\infty$ is megengedett), ha létezik egy $w(z)$ ($w(z) \geq 0$, $z \in [a, b]$) súlyfüggvény, melyre $\langle p_i, p_j \rangle = 0$, $i \neq j$, ahol

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(z)g(z)w(z)dz.$$

Legyen

$$c_i = \langle p_i, p_i \rangle, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Ha $c_i = 1$ minden i esetén, akkor p *ortonormális* polinomrendszer.

Az egyváltozós ortogonális polinomok többváltozós megfelelőit az alábbi módon konstruálhatjuk:

$$p_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(z_1, \dots, z_s) = p_{\alpha_1}(z_1) \times \dots \times p_{\alpha_s}(z_s) \quad (40)$$

ahol $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in H$, ahol H (5) szerint definiált. Belátható, hogy a fenti polinomok is ortogonálisak az I^s kockára történő integrálás és $w(z_1) \times \dots \times w(z_s)$

súlyfüggvény esetén, ahol I az egyváltozós polinom ortogonalitási intervalluma. Ez egyúttal biztosítja, hogy (40) bázisa a legfeljebb m -ed fokú s változós polinomoknak.

A következőkben a Legendre-, első- és másodfajú Csebisev-polinomok többváltozós általánosításait vizsgáljuk. Mivel ezen polinomok esetén az ortogonalitási tartomány $[-1, 1]^s$, ezért szükséges a Z halmazt is ennek megfelelően skalázni.

A fentieknek megfelelően a Legendre-polinom képlete

$$P_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(z_1, \dots, z_s) = P_{\alpha_1} \left(\frac{2z_1 - (z_{10} + z_{1n_1})}{z_{1n_1} - z_{10}} \right) \times \dots \times P_{\alpha_s} \left(\frac{2z_s - (z_{s0} + z_{sn_s})}{z_{sn_s} - z_{s0}} \right),$$

ahol $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in H$, ahol H (5) szerint definiált, és $P_\alpha(z)$ az α -adik egyváltozós Legendre-polinom.

Az elsőfajú Csebisev-polinom alakja

$$T_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(z_1, \dots, z_s) = T_{\alpha_1} \left(\frac{2z_1 - (z_{10} + z_{1n_1})}{z_{1n_1} - z_{10}} \right) \times \dots \times T_{\alpha_s} \left(\frac{2z_s - (z_{s0} + z_{sn_s})}{z_{sn_s} - z_{s0}} \right),$$

ahol $T_\alpha(z)$ az α -adik egyváltozós elsőfajú Csebisev-polinom.

Az másodfajú Csebisev-polinom

$$U_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(z_1, \dots, z_s) = U_{\alpha_1} \left(\frac{2z_1 - (z_{10} + z_{1n_1})}{z_{1n_1} - z_{10}} \right) \times \dots \times U_{\alpha_s} \left(\frac{2z_s - (z_{s0} + z_{sn_s})}{z_{sn_s} - z_{s0}} \right),$$

ahol $U_\alpha(z)$ az α -adik egyváltozós másodfajú Csebisev-polinom.

Lyche és Peña, [33] Theorem 5.1 szerint, [33] Theorem 5.1 szerint, polinomokra értelmezett kondíciószám tekintetében a Bernstein-polinomokon alapuló bázisrendszer, bizonyos tartományokon optimális. Ezért, az ortogonális polinomokon túl, ennek az alábbi többváltozós, megfelelően skalázott változatát is figyelembe vesszük:

$$B_{\alpha_1 \dots \alpha_s}(z_1, \dots, z_s) = \frac{m!}{\alpha_1! \dots \alpha_s! (m - \alpha_1 - \dots - \alpha_s)!} \left(\frac{z_1 - z_{10}}{z_{1n_1} - z_{10}} \right)^{\alpha_1} \times \dots \times \left(\frac{z_s - z_{s0}}{z_{sn_s} - z_{s0}} \right)^{\alpha_s} \times \left(1 - \frac{z_1 - z_{10}}{z_{1n_1} - z_{10}} - \dots - \frac{z_s - z_{s0}}{z_{sn_s} - z_{s0}} \right)^{m - \alpha_1 - \dots - \alpha_s},$$

ahol $(\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in H$, ahol H (5) szerint definiált.

3.2. Megoldó algoritmus, numerikus tesztek

Mivel a (4) és (39) feladatok közti polinombázis-transzformáció ugyancsak rosszul kondicionált feladat (lásd Farouki [17]), ezért a (4) megoldására az alábbi algoritmust használjuk.

Megoldó algoritmus

1. lépés: Hajtsuk végre a (4) és (39) feladatok közti polinombázis-transzformációt nagy pontosságú aritmetika segítségével.

2. lépés: Oldjuk meg a (39) feladatot valamely reguláris LP-megoldó duál szimplex módszerével.

3. lépés: Tekintsük a bázisoszlopok indexeinek rendszerét. Ezen oszlopokat kiválasztva ellenőrizzük a bázis duál, ill. primál megengedettységét nagy pontosságú aritmetika segítségével, majd számoljuk ki a célfüggvény értéket.

Bár a fenti algoritmus is használ nagy pontosságú aritmetikát, de mindössze csak két lépésben. Ennek köszönhetően a futási idő lényegesen rövidebb lesz, mint ha egy (duál) szimplex módszer összes lépését számoltuk volna nagy pontossággal.

A következőkben empirikus tesztek segítségével szeretnénk megtalálni azt a polinombázist, melyre a (39) feladatbeli \bar{A} mátrix kondíciószáma a lehető legkisebb. ∞ -normájú kondíciószámokat használunk, mivel ez jellemzi legjobban a (duál) szimplex módszer numerikus érzékenységét (tekintve a primál/duál változók előjeleit).

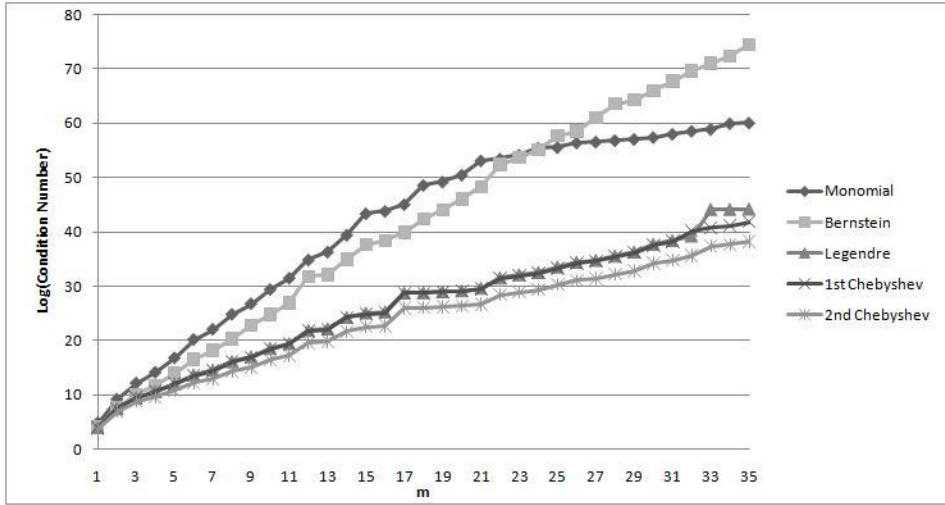
Mivel nem tudjuk előre, hogy a szimplex algoritmus az \bar{A} mátrix mely bázisain halad végig (nyilván ez függ többek közt a célfüggvénytől is), ezért a 3.1. példában véletlenszerűen választunk bázismátrixokat, és számoljuk ki ezek kondíciószámát. Azt várjuk, hogy az alacsonyabb átlagos kondíciószám esetén majd a szimplex módszer is megbízhatóbban fut le.

3.1. Példa. Válasszunk ki a $[0, 1]^s$ kocka pontjai közül $\binom{m+s}{s}$ darabot véletlenszerűen, egyenletes eloszlással. Konstruáljuk meg a (38) szerinti \bar{b} oszlopokból álló mátrixot. Ha a mátrix nemsinguláris, akkor rakjuk be a vizsgálandó mintába. 100 elemű mintát generáltunk, kiszámoltuk a végtelen normájú kondíciószámokat, és vettük ezek átlagát, minden egyes polinombázisra. Az $s = 2$ esetén kapott eredményeket mutatja a 4. ábra.

Megjegyezzük, hogy $s = 3$ esetén is hasonló eredményeket kaptunk. Látható, hogy bár mindegyik kondíciószám exponenciálisan növekszik, de az ortogonális polinomok a monomiál-, ill. Bernstein-bázisok kondíciószámait körülbelül azok gyökére csökkentették. Tehát a teszt tanulsága szerint az *ortogonális polinombázisok segítségével lényegesen csökkenthető a kondíciószám*. Megjegyezzük, hogy mind az $s = 2$, mind az $s = 3$ esetben a másodfajú Csebisev-polinom teljesített a legjobban.

A következő példában egy konkrét feladatra mutatjuk meg a különböző polinombázisok esetén kapott megoldások minőségét. Megjegyezzük, hogy Mádi-Nagy [37] több feladatot is vizsgál, hasonló eredményekkel.

3.2. Példa. Legyen $Z = \{0, 1, \dots, 10\} \times \{0, 1, \dots, 20\} \times \{0, 1, \dots, 30\}$. Legyen X , Y_1 , Y_2 és Y_3 Poisson-eloszlású valószínűségi változó rendre $\lambda = 0, 1, 0, 2, 0, 3$,



4. ábra. Átlagos kondíciószámok a maximális m momentumrend függvényében ($s = 2$).

0,05 paraméterekkel. Definiáljuk a momentumokat generáló vektort az alábbi módon

$$(\min(X + Y_1, 10), \min(X + Y_2, 20), \min(X + Y_3, 30)).$$

A célfüggvény legyen

$$f(z_1, z_2, z_3) = \sin(z_1 + z_2 + z_3).$$

A minimum feladat eredményei az alábbiak,

| m | Monomiál | Bernstein | Legendre | 1. Csebisev | 2. Csebisev |
|-----|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|-------------------|
| 1 | -0,16301713 | -0,16301713 | -0,16301713 | -0,16301713 | -0,16301713 |
| 2 | 0,20039622 | 0,20039622 | 0,20039622 | 0,20039622 | 0,20039622 |
| 3 | 0,25350547 | 0,25350547 | 0,25350547 | 0,25350547 | 0,25350547 |
| 4 | <u>0,27167527</u> | <u>0,26575235</u> | <u>0,27316847</u> | <i>0,27315366</i> | <i>0,27206079</i> |
| 5 | <u>0,26469815</u> | <u>0,28452612</u> | <u>0,28228435</u> | <i>0,28214106</i> | <i>0,28526692</i> |
| 6 | <u>0,28393933</u> | <u>0,28696505</u> | <u>0,28816140</u> | <i>0,28789129</i> | <i>0,28822397</i> |

a maximum feladaté pedig ezek:

| m | Monomiál | Bernstein | Legendre | 1. Csebisev | 2. Csebisev |
|-----|------------|------------|------------|-------------|-------------|
| 1 | 0,71525034 | 0,71525034 | 0,71525034 | 0,71525034 | 0,71525034 |
| 2 | 0,47997864 | 0,47997864 | 0,47997864 | 0,47997864 | 0,47997864 |
| 3 | 0,31651723 | 0,31651723 | 0,31651723 | 0,31651723 | 0,31651723 |
| 4 | 0,31049303 | 0,31108264 | 0,31197905 | 0,31242441 | 0,31244058 |
| 5 | 0,30509224 | 0,30263923 | 0,30359098 | 0,30272386 | 0,30352714 |
| 6 | 0,29666626 | 0,29609722 | 0,29760208 | 0,29873506 | 0,29855087 |

- Az aláhúzott eredmények már a (39) feladat $\bar{A}\mathbf{p} = \bar{\mathbf{b}}$ egyenletrendszerének sem megoldásai. Legendre-polinomok esetén az infizibilis segédváltozó nagyságrendje 10^{-7} , monomiálbázisok esetén viszont 10^2 , amely már nagyon távol esik a megengedett megoldástól.
- A ferdén szedett eredmények nem primál, de duál megengedettek, tehát nem éles alsó, illetve felső korlátokat adnak a célfüggvényre.

Látható, hogy a *minimum feladatra csak a Csebisev-polinomok adtak használható eredményt.*

Az algoritmus utolsó lépései bázisainak kondíciószámai az alábbiak:

| m | Monomiál | Bernstein | Legendre | 1. Csebisev | 2. Csebisev |
|-----|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
| 1 | $8.E + 00/2.E + 01$ | $1.E + 02/7.E + 02$ | $4.E + 01/2.E + 02$ | $4.E + 01/2.E + 02$ | $6.E + 01/3.E + 02$ |
| 2 | $3.E + 02/4.E + 02$ | $2.E + 05/3.E + 05$ | $3.E + 04/3.E + 04$ | $3.E + 04/3.E + 04$ | $6.E + 04/5.E + 04$ |
| 3 | $3.E + 05/6.E + 03$ | $4.E + 07/1.E + 07$ | $2.E + 06/7.E + 05$ | $2.E + 06/7.E + 05$ | $1.E + 06/2.E + 06$ |
| 4 | $9.E + 07/3.E + 07$ | $3.E + 08/2.E + 08$ | $1.E + 07/1.E + 06$ | $4.E + 06/7.E + 05$ | $4.E + 06/2.E + 06$ |
| 5 | $2.E + 11/1.E + 12$ | $3.E + 09/2.E + 09$ | $7.E + 06/7.E + 06$ | $3.E + 06/7.E + 06$ | $2.E + 07/2.E + 07$ |
| 6 | $1.E + 16/2.E + 12$ | $1.E + 10/4.E + 10$ | $3.E + 07/2.E + 08$ | $2.E + 07/2.E + 07$ | $6.E + 07/4.E + 07$ |

A fentiek is azt mutatják, hogy nagyobb m értékek esetén az ortogonális polinomokhoz tartozó kondíciószámok lényegesen kisebbek.

A példák jól illusztrálják, hogy

- ortogonális polinombázis használatával a bázismátrixok kondíciószáma drasztikus mértékben csökkenthető,
- így lehetőség nyílik olyan TDMP-feladatok megoldására, melyek eddig reguláris solverok segítségével nem voltak megoldhatóak.
- A Megoldó algoritmus, túl azon, hogy hatékony keretrendszert biztosít más polinombázisok használatára, lehetőséget nyújt a megoldás primál, ill. duál megengedettségeinek tetszőleges pontosságú vizsgálatára is.

A tesztekhez az ILOG CPLEX 9 [25] solverét használtuk, míg a nagy pontosságú számolásokhoz a Wolfram Mathematica [62] programnyelvet. Azóta a fenti algoritmus Java nyelven megírt, Mosek [43] solvert és Apfloat [1] tetszőleges pontosságú aritmetikai csomagot használó, implementációjának forráskódja is megtalálható a Numerical MDMP [46] github projektben.

4. Alkalmazások

4.1. A hatványmomentum problémához köthető alkalmazások

4.1.1. Várható hasznosság

Egy (bármennyiszer differenciálható) $u(z)$, $z \geq 0$ hasznossági függvénytől a legtöbb esetben minimum azt megköveteljük, hogy legyen szigorú monoton növekvő, tehát legyen $u'(z) > 0$. A hasznossági függvényt kockázatkerülőnek hívjuk, ha $u''(z) < 0$ is teljesül, tehát ha a függvény szigorúan konkáv.

Pratt [47] és Arrow [2] közgazdasági szempontból indokolták a csökkenő kockázatkerülés fontosságát. Az abszolút kockázatkerülés Arrow–Pratt-mértéke:

$$-\frac{u''(z)}{u'(z)}.$$

A csökkenés szükséges feltétele, hogy $u'''(z) > 0$. Általánosabban megkövetelhetjük, hogy

$$(-1)^{n-1}u^{(n)}(z) > 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (41)$$

A (41) feltételrendszert teljesítő hasznossági függvényeket Caballe és Pomansky [10] dolgozata *kevert hasznossági függvényeknek* nevezi. Hasznossági függvényekre hasonló, de szigorúbb feltételeket vezetett be Chander [11], a közgazdasági indokokról lásd Ingersoll [26] dolgozatát.

A többváltozós hasznossági függvények területe is széles körben kutatott, bevezető irodalomként lásd pl. Keeney és Raiffa [28], Dyer és Sarin [16], Dyer, Fishburn, Steuer, Wallenius és Zionts [15]. A legtöbb esetben a többváltozós hasznossági függvény egyváltozós hasznossági függvények szorzatai egyszerű összegeként áll elő. Azonban az irodalomban nem nagyon található olyan kellően tág, analitikusan felírható függvénycsalád, mely a gyakorlatban is jól illeszthető. A következőkben definiált, többváltozós függvénycsalád lényegében bármilyen egyváltozós, megfelelő konvexitási tulajdonságokkal bíró hasznossági függvényekből megkonstruálható, ráadásul rendelkezik mind a többváltozós hasznossági függvények általánosságban megkövetelt tulajdonságaival, mind a kevert tulajdonság többváltozós általánosításával.

A többváltozós hasznossági függvénycsaládot írja le az alábbi definíció.

4.1. Definíció. Legyen $k \geq 1$ és $D = \{(z_1, \dots, z_s) | e^{g_j(z_j)} > 2, j = 1, \dots, s\}$. Az u hasznossági függvényt a következő módon definiáljuk:

$$u(z_1, \dots, z_s) := \log \left[k(e^{g_1(z_1)} - 1) \dots (e^{g_s(z_s)} - 1) - 1 \right], \quad (42)$$

ahol $(z_1, \dots, z_n) \in D$, és az alábbi feltételek teljesülnek:

$$\begin{aligned} g'_j(z_j) &> 0, \\ g_j^{(i)}(z_j) &\geq 0, \text{ ha } i > 1 \text{ és páratlan,} \\ g_j^{(i)}(z_j) &\leq 0, \text{ ha } i \text{ páros,} \quad j = 1, \dots, s. \end{aligned}$$

A $g_j(z_j)$ függvények választhatóak például az alábbiak közül:

$$\begin{aligned} a \log\left(1 + \frac{z}{b}\right), & \text{ ahol } a > 0, b > 0, \\ ae^{-bz}, & \text{ ahol } a > 0, b > 0, \\ a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0, & \text{ megfelelően választott együtthatókkal.} \end{aligned}$$

4.1. TÉTEL. (Prékopa és Mádi-Nagy [56], Th. 2.1) *A (42) függvény konkáv a D halmazon.*

4.2. TÉTEL. (Prékopa és Mádi-Nagy [56], Th. 2.2) *Minden $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_s) \in D$ esetén igaz, hogy*

$$\frac{\partial^{i_1 + \dots + i_s} u(z_1, \dots, z_s)}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial z_s^{i_s}} > 0, \text{ ha } i_1 + \dots + i_s \text{ páratlan,}$$

és

$$\frac{\partial^{i_1 + \dots + i_s} u(z_1, \dots, z_s)}{\partial z_1^{i_1} \dots \partial z_s^{i_s}} < 0, \text{ ha } i_1 + \dots + i_s \text{ páros.}$$

4.1. Példa. (Prékopa és Mádi-Nagy [56], Ex. 3.2) Tekintsük az alábbi függvényt,

$$u(z_1, z_2, z_3) = \log [(e^{1.75z_1+3} - 1)(e^{1.25z_2+2} - 1)(e^{0.75z_3+1} - 1) - 1] \quad (z_1, z_2, z_3) \in Z,$$

ahol

$$Z = (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \times (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) \times (0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9).$$

A momentumokat az alábbi valószínűségi változók segítségével generáljuk:

$$X_1 = \min(X + Y_1, 9), \quad X_2 = \min(X + Y_2, 9), \quad X_3 = \min(X + Y_3, 9),$$

ahol X, Y_1, Y_2, Y_3 Poisson-eloszlású valószínűségi változó rendre 1; 2; 2, 5; 3 paraméterekkel. Megjegyezzük, hogy így X_1, X_2, X_3 nem függetlenek.

A maximum másodrendű vegyes momentumokon és ezenfelül magasabb rendű marginális momentumokon alapuló eredményeket foglalja össze az alábbi táblázat:

| m | m_1 | m_2 | m_3 | Minimum | Maximum |
|-----|-------|-------|-------|--------------|--------------|
| 2 | 2 | 2 | 2 | 18,466954935 | 18,572924791 |
| 2 | 4 | 4 | 4 | 18,532630264 | 18,550298509 |
| 2 | 6 | 6 | 6 | 18,541879509 | 18,544391959 |
| 2 | 8 | 8 | 8 | 18,543136443 | 18,543344110 |

Ha a vegyes momentumok maximális rendjét $m = 4$ -re emeljük, a kapott eredmények így változnak:

| m | m_1 | m_2 | m_3 | Minimum | Maximum |
|-----|-------|-------|-------|--------------|--------------|
| 4 | 4 | 4 | 4 | 18,532852070 | 18,550297658 |
| 4 | 6 | 6 | 6 | 18,541926465 | 18,544391052 |
| 4 | 8 | 8 | 8 | 18,543148260 | 18,543343503 |

A fenti táblázatok jól illusztrálják a (14) momentumrendhalmaz létjogosultságát: kellően szoros korlátok gyakran elérhetőek csak a figyelembe vett marginális momentumok rendjének növelésével, és így kevésbé van szükség az (általában nehezebben kiszámolható) vegyes momentumok maximális rendjének növelésére.

4.1.2. Többváltozós momentumgeneráló függvények korlátozása

Az X valószínűségi változó momentumgeneráló függvénye:

$$M(t) = E[e^{tX}], \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ha $M(t)$ véges a nulla egy nyílt J környezetében, akkor a momentumgeneráló függvény egyértelműen determinálja X eloszlását. Könnyen látható, hogy ez esetben $M^{(n)}(t) = E[X^n e^{tX}]$, $t \in J$, ebből pedig következik, hogy $M^{(n)}(0) = E[X^n]$, $n = 1, 2, \dots$

Az X_1, \dots, X_s valószínűségi változók együttes momentumgeneráló függvénye:

$$M(t_1, \dots, t_s) = E[e^{t_1 X_1 + \dots + t_s X_s}].$$

Hasonlóan az egyváltozós esethez, ha M véges az origó egy nyílt környezetében, akkor egyértelműen meghatározza az $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_s)$ véletlen vektor eloszlását. További tulajdonságai, hogy $M(0, \dots, 0, t_i, 0, \dots, 0) = M_i(t_i)$, $i = 1, \dots, s$, és

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_s} M}{\partial t_1^{\alpha_1} \dots \partial t_s^{\alpha_s}}(0, \dots, 0) = \mu_{\alpha_1 \dots \alpha_s}.$$

A témakörrel bővebben lásd pl. Ross [58].

Tegyük fel, hogy \mathbf{X} diszkrét, véges tartójú, ismertek az (5) szerinti hatványmomentumai, és szeretnénk becslést adni a momentumgeneráló függvény értékére egy

adott (t_1, \dots, t_s) helyen. Egyváltozós esetben Ibrahim és Mugdadi [24] készített hasonló, momentumon alapuló becsléseket.

Rögzített $(t_1, \dots, t_s) \geq \mathbf{0}$ esetén az $e^{t_1 z_1 + \dots + t_s z_s}$ összes osztott differenciája nemnegatív. Hasonlóan, ha $(t_1, \dots, t_s) \leq \mathbf{0}$, akkor páros (páratlan) $m + 1$ esetén az $m + 1$ -edik osztott differenciák nemnegatív (nempozitív) lesznek. Ennek megfelelően $M(t_1, \dots, t_s) = E[e^{t_1 X_1 + \dots + t_s X_s}]$ becslésére az eddig ismertetett TDMP-korlátozási módszereinket használhatjuk. Ezt illusztrálja az alábbi példa.

4.2. Példa. (Mádi-Nagy és Prékopa [40]) A Min és Max algoritmusok segítségével adunk korlátokat az alábbi $M(t_1, t_2)$ kétváltozós momentumgeneráló függvényre, a $(t_1, t_2) = (0, 04; 0, 05)$ helyen. A momentumokat az X_1, X_2 független egyenletes eloszlású, $Z_1 = Z_2 = \{0, \dots, 14\}$ tartójú valószínűségi változók segítségével állítottuk elő. A számolásokat Wolfram Mathematica [62] segítségével végeztük, a nagy pontosságú duál szimplex módszert a struktúratételek által adott kezdőbázissal indítva. A momentumok maximális rendjétől függően az alábbi eredményeket kaptuk:

| m | Lower | CPU | Upper | CPU |
|-----|---------|------|---------|------|
| 2 | 1,91194 | 0,28 | 1,98564 | 0,28 |
| 3 | 1,94560 | 0,58 | 1,95640 | 0,56 |
| 4 | 1,95009 | 1,18 | 1,95108 | 1,19 |
| 5 | 1,95051 | 2,59 | 1,95060 | 2,59 |
| 6 | 1,95053 | 6,11 | 1,95056 | 6,13 |

Megjegyezzük, hogy az ILOG CPLEX [25] a magasabb rendű esetekben már itt is infizibilitást adott, dacára annak, hogy a példa konstrukciója miatt létezik megengedett megoldás.

4.2. Valószínűségi korlátok

4.2.1. Eloszlásfüggvények becslése

A többváltozós eloszlásfüggvényre (CDF) az alábbi módon is tekinthetünk

$$F(x_1, \dots, x_n) = P(\xi_1 < x_1, \dots, \xi_n < x_n) = 1 - P(A_1 \cup \dots \cup A_n), \tag{43}$$

ahol

$$A_i = \{\xi_i \geq x_i\}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Tegyük fel, hogy a CDF értékei m dimenzióig könnyen számolhatóak (általában $n \gg m$), tehát az alábbi valószínűségek adottak:

$$P(A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}), \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n, \quad k \leq m.$$

Ezek alapján már számolhatóak alsó és felső korlátok a (43) eloszlásfüggvényre, a (9) szerinti célfüggvénnyel rendelkező (8) binomiális TDMP segítségével. A módszer olyan esetekben tud hasznos lenni, amikor magasabb dimenziókra már nehezen, vagy egyáltalán nem számolható ki CDF értéke integrálással.

Az alábbi példában összehasonlítjuk a különböző módszerekkel kapott alsó és felső korlátokat egy adott Dirichlet-eloszlás esetére. További eloszlásfüggvény-korlátozási példák találhatóak Bukszár, Mádi-Nagy és Szántai [7] dolgozatában.

A következőkben, a momentum feladatokon túl, az összehasonlításba bevesszük Bukszár és Prékopa [8], Bukszár és Szántai [9] és Bukszár [6] gráfelméleti alapokon nyugvó ún. *multifa* (*Multitree*) korlátaiból számított eredményeket is. A fenti cikkekben tárgyalt módszerek hatékony és emiatt népszerű eszközrendszernek bizonyultak a CDF-korlátozás területén.

Mivel az A_i eseményeket többféleképpen oszthatjuk rész-esemény-sorozatokra, ezért a momentum alapú korlátok közt külön vizsgáljuk az egyváltozós DMP alapján kapott *egyváltozós* (*Univariate*) korlátokat, a kétváltozós DMP Min és Max algoritmusaiából kapott *kétváltozós* (*Bivariate*) korlátokat, a többváltozós Min algoritmusból adódó *többváltozós* (*Multivariate*) korlátokat, illetve a többváltozós DMP egzakt optimumait szolgáltató másodfajú Csebisev-polinombázist használó *polinom* (*Polynomial*) korlátokat.

Mivel ebben az esetben a binomiális momentumok úgy számolódnak, hogy minden egyes metszetvalószínűséget kiszámolunk, majd ezeket összeadjuk, így nagyobb m esetén már ez a számítás is tekintélyes futási idővel, ill. egyre nagyobb numerikus pontatlansággal jár. A multifa korlátok nagy előnye, hogy a korlátozás során nincs szükség mindegyik metszetvalószínűség ismeretére, így magasabb rendű momentumok során is jól használhatóak.

A következő példa Bukszár, Mádi-Nagy és Szántai [7] dolgozatából származik, kiegészítve a polinom korlátok eredményeivel. További hasonló példák találhatóak Mádi-Nagy és Nagy [38] dolgozatában. Nem túl magas dimenziókra a Dirichlet-eloszlás CDF-értékei jól számolhatóak Gouda és Szántai [23] implicit rekurzív algoritmusával. Ezt alkalmazzuk a következő példában is, a futási időknél külön jelezve a binomiális momentumok kiszámolásainak idejét (multifa korlátok esetén a valószínűségek kiszámolása az algoritmus futása alatt történik).

4.3. Példa. A Dirichlet-eloszlás paraméterei és argumentumai az alábbiak:

| index | ϑ értékek | x értékek | index | ϑ értékek | x értékek |
|-------|---------------------|-------------|-------|---------------------|-------------|
| 1 | 1,5 | 0,1 | 11 | 1,5 | 0,1 |
| 2 | 1,4 | 0,2 | 12 | 1,4 | 0,2 |
| 3 | 1,3 | 0,2 | 13 | 1,3 | 0,2 |
| 4 | 1,2 | 0,2 | 14 | 1,2 | 0,2 |
| 5 | 1,1 | 0,2 | 15 | 1,1 | 0,2 |
| 6 | 1,2 | 0,3 | 16 | 1,2 | 0,1 |
| 7 | 1,3 | 0,2 | 17 | 1,3 | 0,2 |
| 8 | 1,4 | 0,1 | 18 | 1,4 | 0,1 |
| 9 | 1,2 | 0,2 | 19 | 1,2 | 0,2 |
| 10 | 1,3 | 0,1 | 20 | 1,3 | 0,1 |
| | | | 21 | 2,1 | |

$m = 3$ esetre a Dirichlet-CDF-korlátai:

| | Korlát értéke | CPU (s) |
|-------------------|---------------|-----------|
| Multifa alsó | 0,290188 | 0,02 |
| Multifa felső | 0,377891 | 1,41 |
| Egyváltozós alsó | 0,366196 | 1,22+0,00 |
| Egyváltozós felső | 0,385005 | 1,22+0,00 |
| Kétváltozós alsó | 0,366196 | 1,22+0,01 |
| Kétváltozós felső | 0,382324 | 1,22+0,02 |
| Többváltozós alsó | 0,366196 | 1,22+0,02 |
| Polinom alsó | 0,366196 | 1,18+9,23 |
| Polinom felső | 0,378233 | 1,18+8,99 |

Látható, hogy a legjobb felső korlátot a multifa módszer adta, míg alsó korlát tekintetében a momentum feladatok működtek hatékonyabban. Felső korlátok esetében jól követhetőek a különböző módszerek, elméleti szinten is elvárt, hatékonyság különbségei. Látható, hogy a polinom felső korlát már nagyon közel esik a multifa módszer eredményéhez. Mivel más esetekben is hasonló nagyságrendű eltérést tapasztaltunk, ezért ha nem akarunk több különböző algoritmust használni, a polinom módszer egyszerre lehet alkalmas megfelelő alsó és felső korlátok megadására. Ráadásul ehhez rendelkezésre áll a githubon megtalálható Numerical MDMP [46] implementáció.

Magasabb rendű esetekben viszont már gondot jelenthet, hogy a momentumok kiszámításához rengeteg metszetvalószínűsége van szükség. Ezt is illusztrálják az $m = 5$ eset Dirichlet-CDF-korlátai:

| | Korlát értéke | CPU (s) |
|-------------------|---------------|----------------|
| Multifa alsó | 0,345615 | 14,15 |
| Multifa felső | 0,368858 | 119,46 |
| Egyváltozós alsó | 0,367014 | 27116,96+0,00 |
| Egyváltozós felső | 0,367021 | 27116,96+0,00 |
| Kétváltozós alsó | 0,367014 | 27116,96+0,13 |
| Kétváltozós felső | 0,367019 | 27116,96+0,60 |
| Többváltozós alsó | 0,367014 | 27116,96+0,06 |
| Polinom alsó | 0,367014 | 27116,96+21,26 |
| Polinom felső | 0,367019 | 27116,96+28,56 |

A legszorosabb korlátokat ebben az esetben a momentum módszerek segítségével kapjuk, viszont a feladathoz szükséges momentumok kiszámítási ideje drasztikusan megnőtt. A multifa korlátok nagy előnye, hogy csak az algoritmus során felmerült viszonylag kevés számú metszetvalószínűség kiszámítására van szükség, és emiatt magasabb rendű feladatok esetén is belátható időn belül eredményt kapunk.

Összefoglalva: nagyobb m értékek esetén csak a multifa módszerek segítségével kaphatunk korlátokat, amik m növekedésével várhatóan egyre szorosabbak lesznek. A polinom alsó és felső korlátok eredményei azon esetekben lehetnek hasznosak, ha a valószínűségek eleve csak kevés esemény metszetére számolhatóak, vagy ha már az általuk adott korlátok alacsony m érték mellett is elég szorosak.

4.2.2. Hálózatok megbízhatósága

Tekintsük az alábbi aciklikus $(\mathcal{N}, \mathcal{A})$ digráfot. Legyen $\mathcal{N} = \{c_1, \dots, c_n\}$ a pontok és $\mathcal{A} \subset \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ az élek halmaza. Legyen c_1 a forrás, c_n a nyelő. A hálózat megbízhatósága alatt azt értjük, hogy mekkora valószínűséggel vezet hibátlan élekből álló út a forrástól a nyelőig.

A korlátozási feladat az alábbi módon fogalmazható meg. Legyen a forrástól a nyelőig vezető utak halmaza P_1, \dots, P_N , és jelentse A_i azt az eseményt, hogy a P_i utak összes éle hibátlan, $i = 1, \dots, N$. Ekkor a hálózat megbízhatósága:

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_N).$$

Annak a valószínűségét, hogy pár út mindegyike hibátlan élekből áll (tehát pár A_i esemény metszetének valószínűségét) ki lehet belátható időn belül számolni.

4.4. Példa. Tekintsük az alábbi 8 pontú, 16 élű hálózatot: $\mathcal{N} = \{c_1, \dots, c_8\}$ és $\mathcal{A} = \{(c_1, c_2), (c_1, c_3), (c_1, c_4), (c_1, c_5), (c_2, c_3), (c_2, c_5), (c_2, c_6), (c_3, c_4), (c_3, c_5), (c_4, c_6), (c_4, c_7), (c_5, c_6), (c_5, c_8), (c_6, c_7), (c_6, c_8), (c_7, c_8)\}$.

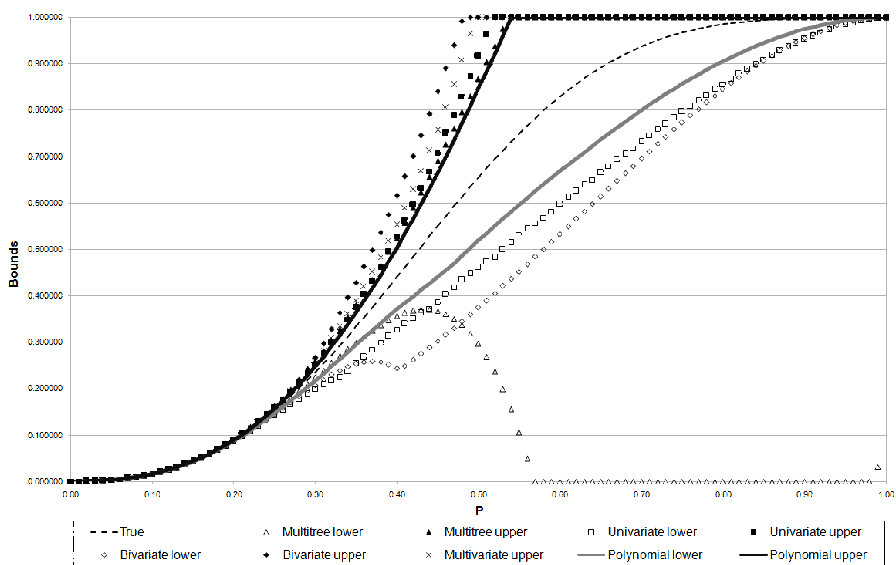
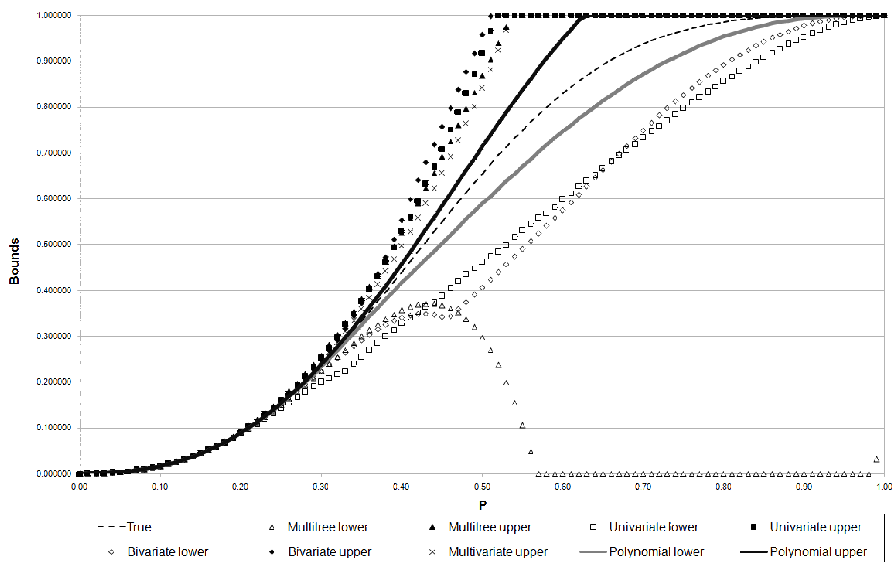
Tegyük fel, hogy az élek egymástól függetlenül, p valószínűséggel hibátlanok. Ebben az esetben csak 23 út létezik a forrásból a nyelőbe, és az összehasonlítás kedvéért a pontos megbízhatóság is kiszámolható az alábbi képlettel:

$$p^2 + 6p^3 + 5p^4 - 18p^5 - 33p^6 + 26p^7 + 129p^8 - 108p^9 \\ - 273p^{10} + 605p^{11} - 547p^{12} + 279p^{13} - 84p^{14} + 14p^{15} - p^{16}$$

Az előző szakasz módszereit hasonlítjuk össze ebben az esetben is, az eredmények grafikus illusztrációja látható az 5. és 6. ábrákon. Az eredmények azt mutatják, hogy az $m = 3$ esetben általában a legjobb korlátot a polinom módszer adja, kivéve ha $0 \leq p \leq 0,36$, amikor a multifa korlát erősebb. Az $m = 5$ esetben végig a polinom korlát a legszorosabb.

Részletekért lásd Bukszár, Mádi-Nagy és Szántai [7], ill. Mádi-Nagy és Nagy [38].

A fenti két példában a számolások multifa korlátok esetén Fortran nyelven, az egyváltozós, kétváltozós és többváltozós korlátok esetén C++ nyelven (lásd [45]), polinom korlátok esetén pedig Java nyelven Mosek solverrel (lásd [46]) történtek.

5. ábra. A hálózat megbízhatósága $m = 3$ esetén.6. ábra. A hálózat megbízhatósága $m = 5$ esetén.

5. Összefoglalás, további kutatási irányok

A dolgozat összefoglalta a többváltozós diszkrét momentum probléma fogalmait, megoldási módszereit, alkalmazási területeit. Sok esetben ismerjük a duál megengedett bázisok kellően nagy számosságú halmazát, ezek segítségével pedig közvetlen, akár képletszerű korlátokat adhatunk, illetve kezdőbázisként is használhatjuk őket duál szimplex megoldó algoritmusokhoz. Ismertettünk egy módszert, mellyel lényegében bármilyen TDMP-feladat numerikusan stabilan megoldható. Bemutattuk, hogy a TDMP közvetlenül alkalmas speciális függvények várható értékének becslésére, illetve a binomiális momentumokon keresztül valószínűségek korlátozására.

Az egyik legfontosabb módszertani nyitott kérdés, hogy

- létezik-e olyan (gyakorlatban is használható) TDMP-feladat, mely esetén a duál megengedett bázisstruktúrák teljes halmaza leírható.

Érdekes, még nem vizsgált területek lehetnek például:

- hogyan lenne használható a TDMP 'k-out-of-r' típusú hálózati megbízhatóságok becslésére, ill. esetleg más sztochasztikus hálózati feladatok (pl. PERT) esetén,
- a TDMP és a többváltozós Lagrange-interpoláció kapcsolatának vizsgálata,
- nem egzakt momentum információkkal rendelkező TDMP-feladatok vizsgálata.

Mások által folytatott diszkrét momentum problémával kapcsolatos kutatások közül érdekes irány például a nem feltétlenül egész kitevőjű hatványmomentumok használata, lásd Ninh és Prékopa [44]. A másik intezíven kutatott irány, hogy unimodalitást feltételezve az eloszlásról, hogyan javíthatóak a korlátok, lásd pl. Subasi et al. [61]. Prékopa András egyik utolsó publikációjában (Prékopa, Ninh és Alexe [57]) két társszerzőjével közösen nagyon szép kapcsolatot tárt fel a diszkrét és a folytonos korlátozó momentum problémák között.

Hivatkozások

- [1] APFLOAT: http://www.apfloat.org/apfloat_java/
- [2] ARROW, K.: *Essays in the Theory of Risk Bearing*, Chap. 3, Amsterdam: North-Holland (1970)
- [3] BIENAYMÉ, I.: *Considérations a l'appui de la découverte de Laplace sur la loi de probabilité dans la méthode des moindres carré*, C. R. Acad. Sci. Paris, **37** (1853), 309–326.

- [4] BLYTH, M. G., H. LUO AND C. POZRIKIDIS: *A comparison of interpolation grids over the triangle or the tetrahedron*, J Eng Math **56** (2006), 263–272.
- [5] BOROS, E. AND A. PRÉKOPA: *Closed form two-sided bounds for probabilities that at least r and exactly r out of n events occur*, Math. Oper. Res. **14** (1989), 317–342.
- [6] BUKSZÁR, J.: *Hypermultitrees and sharp Bonferroni inequalities*, Mathematical Inequalities & Applications **6(4)** (2003), 727–743.
- [7] BUKSZÁR, J., G. MÁDI-NAGY AND T. SZÁNTAI: *Computing Bounds for the Probability of Union of Events by Different Methods*, Annals of Operations Research **201(1)** (2012), 63–81.
- [8] BUKSZÁR, J. AND A. PRÉKOPA: *Probability Bounds with Cherry Trees*, Mathematics of Operations Research **26(1)** (2001), 174–192.
- [9] BUKSZÁR, J. AND T. SZÁNTAI: *Probability bounds given by hypercherry trees* Optimization Methods and Software **17** (2002), 409–422.
- [10] CABALLE, J. AND A. POMANSKY: *Mixed Risk Aversion*, Journal of Economic Theory **71** (1996), 485–513.
- [11] CHANDER, P.: *Repetitive Risk Aversion*, Economic Theory **29** (2006), 701–711.
- [12] CHEBYSHEV, P.: *Sur les valeurs limites des intégrales*, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées **19** (1874), 157–160.
- [13] CHEBYSHEV, P.: *Sur deux théorèmes relatifs aux probabilités*, Acta Math. **14** (1890), 305–315.
- [14] CHEN, T. AND E. SENETA: *A Refinement of Multivariate Bonferroni-Type Inequalities*, J. Appl. Probab. **37(1)** (2000), 276–282.
- [15] DYER, J. S., P. C. FISHBURN, R. E. STEUER, J. WALLENIUS AND S. ZIONTS: *Multiple Criteria Decision Making, Multiattribute Utility Theory: The Next Ten Years*, Management Science **38** No. **5** (1992), 645–654.
- [16] DYER, J. S., R. K. SARIN: *Measurable Multiattribute Value Functions*, Operations Research **27** (1979), 810–822.
- [17] FAROUKI, R. T.: *Legendre-Bernstein basis transformations*, Journal of Computational and Applied Mathematics **119** (2000), 145–160.
- [18] GASCA, M. AND T. SAUER: *Polynomial interpolation in several variables*, Adv. Comput. Math. **12** (2000), 377–410.
- [19] GASCA, M. AND T. SAUER: *On the history of multivariate polynomial interpolation*, J. Comput. Appl. Math. **122** (2000), 23–35.
- [20] GALAMBOS, J. AND Y. XU: *Some Optimal Bivariate Bonferroni-Type Bounds*, Proc. of the American Mathematical Society **117(2)** (1993), 523–528.
- [21] GALAMBOS, J. AND Y. XU: *Bivariate Extension of the Method of Polynomials for Bonferroni-type Inequalities*, J. Multivariate Analysis **52** (1995), 131–139.
- [22] GAUTSCHI, W.: *The Condition of Vandermonde-like Matrices Involving Orthogonal Polynomials*, Linear Algebra and its Applications **52/53** (1983), 293–300.

- [23] GOUDA, A. A. AND T. SZÁNTAI: *On numerical calculation of probabilities according to Dirichlet distribution*, Annals of Operations Research **177(1)** (2010), 185–200.
- [24] IBRAHIM A., A., A. R. MUGDADI: *Bounds of moment generating functions of some life distributions*, Statist. Papers **46** No. **4** (2005), 575–585.
- [25] ILOG CPLEX: <http://www-01.ibm.com/software/integration/optimization/cplex/>
- [26] INGERSOLL JR., J. E.: *Theory of Financial Decision Making*. Totowa: Rowman and Littlefield (1987)
- [27] ISAACSON, E. AND H. B. KELLER: *Analysis of Numerical Methods*. Wiley, New York (1966)
- [28] KEENEY, R. L. AND H. RAIFFA: *Decisions with Multiple Objectives: Preferences and Value Tradeoffs*, New York: Wiley (1976)
- [29] KJELDSSEN, T. H.: *The early history of the moment problem*, Historia Math. **20** (1993), 19–44.
- [30] KREIN, M. G. AND A. A. NUDELMAN: *The Markov Moment Problem and Extremal Problems*. Translations of Mathematical Monographs **50**, AMS, Providence, RI, (1977)
- [31] LEE, M.-Y.: *Improved bivariate Bonferroni-type inequalities*, Statistics and Probability Letters **31** (1997), 359–364.
- [32] LI, R.-C.: *Asymptotically Optimal Lower Bounds For the Condition Number of a Real Vandermonde Matrix*, SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications **28(3)** (2006), 829–844.
- [33] LYCHE, T. AND J. M. PEÑA: *Optimally stable multivariate bases*, Advances in Computational Mathematics **20** (2004), 149–159.
- [34] MÁDI-NAGY, G.: *A method to find the best bounds in a multivariate discrete moment problem if the basis structure is given*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **42(2)** (2005), 207–226.
- [35] MÁDI-NAGY, G.: *On Multivariate Discrete Moment Problems: Generalization of the Bivariate Min Algorithm for Higher Dimensions*, SIAM Journal on Optimization **19(4)** (2009), 1781–1806.
- [36] MÁDI-NAGY, G.: *Application of the Solution of the Univariate Discrete Moment Problem for the Multivariate Case*, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica **47(4)** (2010), 485–504.
- [37] MÁDI-NAGY, G.: *Polynomial bases on the numerical solution of the multivariate discrete moment problem*, Annals of Operations Research **200(1)** (2012), 75–92.
- [38] MÁDI-NAGY, G. AND Z.-CS. NAGY: *Sharp Bounds of the Multivariate Discrete Moment Problem: Approximations of CDF Values and Reliability Levels*, RUTCOR Research Report 6-2013 (2013)
- [39] MÁDI-NAGY, G. AND A. PRÉKOPA: *On Multivariate Discrete Moment Problems and their Applications to Bounding Expectations and Probabilities*, Mathematics of Operations Research **29(2)** (2004), 229–258.

- [40] MÁDI-NAGY, G. AND A. PRÉKOPA: *Bounding Expectations of Functions of Random Vectors with Given Marginals and Some Moments: Applications of the Multivariate Discrete Moment Problem*, *Mathematical Inequalities and Applications* **14**(1) (2007), 101–122.
- [41] MÁDI-NAGY, G. AND A. PRÉKOPA: *Bivariate Bonferroni-type inequalities based on multivariate Lagrange interpolation*, *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica* **52**(1) (2015), 21–39.
- [42] MARKOV, A.: *On Certain Applications of Algebraic Continued Fractions*, Ph.D. thesis, St. Petersburg, Russia (1884)
- [43] MOSEK: <https://mosek.com/>
- [44] NINH, A. AND ANDRÁS PRÉKOPA: *The discrete moment problem with fractional moments*, *Operations Research Letters* **41**(6) (2013), 715–718.
- [45] NUMERICAL APPLICATIONS: <http://math.bme.hu/~gnagy/appl/applications.htm>
- [46] NUMERICAL MDMP: <https://github.com/gmnagy/numerical-mdmp>
- [47] PRATT, J. W.: *Risk aversion in the small and in the large*, *Econometrica* **32** (1964), 122–136.
- [48] PRÉKOPA, A.: *Boole-Bonferroni inequalities and linear programming*, *Oper. Res.* **36** (1988), 145–162.
- [49] PRÉKOPA, A.: *Sharp bounds on probabilities using linear programming*, *Oper. Res.* **38** (1990), 227–239.
- [50] PRÉKOPA, A.: *The discrete moment problem and linear programming*, *Discrete Appl. Math.* **27** (1990), 235–254.
- [51] PRÉKOPA, A.: *Inequalities on expectations based on the knowledge of multivariate moments*, in *Stochastic Inequalities*, M. Shaked and Y. L. Tong, eds., *Lecture Notes Monogr. Ser.* **22**, Inst. Math. Statist., Hayward, CA, (1992), 309–331.
- [52] PRÉKOPA, A.: *Stochastic Programming*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands (1995).
- [53] PRÉKOPA, A.: *Bounds on probabilities and expectations using multivariate moments of discrete distributions*, *Studia Sci. Math. Hungar.* **34** (1998), 349–378.
- [54] PRÉKOPA, A.: *On Multivariate Discrete Higher Order Convex Functions and Their Applications*, RUTCOR Research Report, 39-2000, Piscataway, NJ, (2000).
- [55] PRÉKOPA, A. AND G. ALEXE: *Dual Methods for the Numerical Solution of the Univariate Power Moment Problem*, RUTCOR Research Report, 14–2003, Piscataway, NJ, (2003).
- [56] PRÉKOPA, A. AND G. MÁDI-NAGY: *A class of multiattribute utility functions*, *Econom. Theory* **34** (2008), 591–602.
- [57] PRÉKOPA, A., A. NINH AND G. ALEXE: *On the relationship between the discrete and continuous bounding moment problems and their numerical solutions*, *Annals of Operations Research* **238**(1–2) (2016), 521–575.
- [58] ROSS, S. M.: *Introduction to Probability Models*, Wiley, New York (2002).

- [59] SAMUELS, S. M. AND W. J. STUDDEN: *Bonferroni-type probability bounds as an application of the theory of Tchebycheff system*, in Probability, Statistics and Mathematics, Papers in Honor of Samuel Karlin, Academic Press, Boston, (1989), 271–289.
- [60] SKEEL, R. D.: *Scaling for Numerical Stability in Gaussian Elimination*, Journal of the Association for Computing Machinery **26(3)** (1979), 494–526.
- [61] SUBASI, M. M., E. SUBASI, A. BINMAHFOUDH, A. PRÉKOPA: *New bounds for the probability that at least k -out-of- n events occur with unimodal distributions*, Discrete Applied Mathematics, to appear. (2017)
- [62] WOLFRAM MATHEMATICA: <http://www.wolfram.com/>



Mádi-Nagy Gergely 1997-ben végzett az ELTE matematikus szakán, majd itt is doktorált alkalmazott matematikából, Prékopa András témavezetése alatt.

A szerző tudományos pályafutása során több ösztöndíjat is elnyert, melyek segítségével egy évet Londonban (TEMPUS-ösztöndíj), egy évet pedig Tübingenben (DAAD-ösztöndíj) töltött, illetve ifjúsági OTKA-pályázata segítségével a Rutgers Egyetemen volt látogató. Fiatal kutatóként Farkas Gyula-díjban részesült.

A szerző az ELTE Operációkutatási Tanszékének, illetve a BME Matematikai Intézetének adjunktusa, 2018 májusától pedig a Morgan Stanley kockázati modellező munkatársa.

MÁDI-NAGY GERGELY
 ELTE Operációkutatási Tanszék
 e-mail: gmnagy@gmail.com

MULTIVARIATE DISCRETE MOMENT PROBLEMS AND THEIR APPLICATIONS

GERGELY MÁDI-NAGY

The multivariate discrete moment problem was introduced by András Prékopa in the late 80's. He showed that the problem can be modeled as a (poorly conditioned) linear programming problem. Under certain conditions of the objective function, it was possible to describe the complete set of the dual feasible bases, and on this basis, to develop a numerically stable dual solving algorithm. The methodology provides us with numerical as well as closed-form sharp probability bounds. They can be used e.g. for estimating cumulative distribution function values, bounding network reliability, and constructing Boole-Bonferroni type inequalities.

I wrote my Ph.D. thesis under the supervision of András Prékopa on the topic of multivariate generalization of the discrete moment problem. During our joint work, which continued after the PhD degree, we studied the feasible basis structures of the multivariate case with different moment conditions, supplemented by new applications (e.g. expected utility estimation). With multivariate modeling, it has been possible to give better bounds than the results of the univariate model in many applications, and to develop Boole-Bonferroni-type inequalities using mixed moments.

This article summarizes the results of our joint work and their further developments. I recommend the paper to memory of András Prékopa.