Alkalmazott Matematikai Lapok **35** (2018), 43–55

A KVÁZI-HESSE-MÁTRIX

KOMLÓSI SÁNDOR[1]

Optimumszámítással foglalkozók körében jól ismertek minimum feladatok esetén a konvex modellek előnyös tulajdonságai. A többváltozós függvények klasszikus elméletéből jól ismert, hogy kétszer differenciálható függvények konvexitása egyenértékű a második deriváltjuk, a Hesse-mátrixuk pozitív szemidefinitásával. A múlt század második felében komoly érdeklődés mutatkozott a konvexitás függvénytulajdonság lehetséges és célszerű általánosításait illetően. Ezek közül ebben a tanulmányban a pszeudokonvex függvények másodrendű jellemzését ismertetem a kvázi-Hesse-mátrix segítségével, nevezetesen azt, hogy a pszeudokonvexitást a kvázi-Hesse-mátrix pozitív szemidefinitása jellemzi. Alkalmazásként megmutatom, hogyan lehet a kapott eredményeket törtfüggvények pszeudolinearitásának vizsgálatára felhasználni.

1. Bevezetés

A XXXII. Magyar Operációkutatási Konferencián vált publikussá a Magyar Operációkutatási Társaság (MOT) Elnökségének 2016-os döntése, hogy az Egerváry Jenő emlékplakettel abban az évben az én szakmai-közéleti tevékenységemet jutalmazzák. Mint a MOT egyik alapító tagjának, egykori vezetőségi tagjának, elnökének jól esett az elismerés.

Az elismerés az embert önvizsgálatra is készteti. Vajon mivel érdemeltem ki ezt a megtiszteltetést, és kik segítettek abban, hogy sikeres legyek? Annak ellenére, hogy sokat tanultam szegedi professzoraimtól, a segítség Martos Bélától jött, akit sokáig nem is ismertem személyesen. A nemlineáris programozásról írt könyve [17],

[1] *Komlósi Sándor tudományos eredményei kiemelkedőek, szakmai közéleti hatása jelentős, tevékenysége jelentősen hozzájárult az operációkutatás fejlődéséhez mind hazai, mind nemzetközi szinten. (Életrajza a cikke végén olvasható - a szerk. megj.) A fent ismertetettek miatt úgy döntöttünk, hogy az Egerváry Jenő emlékplakett 2016-os díjazottja Komlósi Sándor.*

A Magyar Operációkutatási Társaság Elnöksége
Esztergom, 2016. december 14.

amely a maga korában világszerte az egyik alapműnek számított, adott számomra útmutatást, hogy merre érdemes tájékozódnom.

Ez a dolgozat az Alkalmazott Matematikai Lapok Szerkesztőbizottságának felkérésére készült, hagyományteremtés céljából. Nem tartalmaz új eredményeket, munkásságom egy szeletét próbálja bemutatni. Azt a szeletet, melyet alapvetően Martos Béla gondolatai inspirálták.

2. Egy elnagyolt pályakép

Programtervező matematikusként diplomáztam Szegeden 1972-ben, de mivel érdeklődésem már hallgató koromban a funkcionálanalízis felé fordult, ezért felmentést kaptam a „program-tervezés" alól. 1972 és 1976 között a JATE Bolyai Intézetében Szőkefalvi-Nagy Béla tanársegédeként kezdtem oktatói és tudományos pályafutásomat. Egyetemi doktori disszertációmat a Von-Neumann-algebrák elméletéből írtam, melyet 1978-ban summa cum laude minősítéssel meg is védtem. Disszertációm írása közben azonban egyre erősödött bennem a kétely, hogy a Szőkefalvi-Nagy Béla által vezetett világhírű Funkcionálanalízis Iskola szakmai színvonalának meg tudok-e majd hosszútávon is felelni. Végül is a távozás mellett döntöttem. Ebben az is segített, hogy komoly hívást kaptam a Pécsi Tudományegyetem éppen azokban az években formálódó Közgazdaságtudományi Karára. 1976 óta – ma már csak emeritusként – ennek a karnak a munkatársa vagyok.

A megváltozott körülmények és a megváltozott feladatok határozott szakmai irányváltást is eredményeztek. A nemlineáris programozás felé fordult az érdeklődésem. Az optimalizálás elmélettel foglalkozók számára jól ismert, hogy a nemlineáris programozás alapproblémája a következő:

$$\begin{gathered} f(\mathbf{x}) \to \min \\ \text{feltéve, hogy} \\ g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, m \end{gathered} \tag{NLP}$$

ahol $f(\mathbf{x})$ és $g_i(\mathbf{x})$ n-változós differenciálható függvények. A klasszikus analízisből ismert, hogy amennyiben a feltételi függvények konvexek, akkor a feltételi halmaz zárt és konvex halmaz, ha ráadásul a célfüggvény is konvex, akkor a *lokális optimalitás* szükséges feltételei a *globális optimalitás* elégséges feltételei.

A II. világháború után erősödtek fel azok a kutatások, melyek azt igyekeztek kideríteni, hogy vannak-e olyan, a konvex függvényeknél általánosabb függvényosztályok, melyekkel az (NLP) feladat a konvex esettel megegyező jó tulajdonságokkal rendelkezik. A kezdetekről részletes történeti áttekintést ad Angelo Guerraggio és Elena Molhó cikke [1], melyben külön fejezetben elemzik Neumann János hozzájárulását az adott témakörhöz. A cikkből megtudható, hogy a matematikai irodalomban a kvázikonvexitás/kvázikonkavitás függvénytulajdonság Neumann Jánosnál jelenik meg először [18]. Nem, mint definíció, hanem a mátrixjátékok egzisztencia tételének bizonyításánál, mint egy technikai feltétel. Ezekbe a kutatásokba

– melyeket alapvetően közgazdasági alkalmazások inspiráltak – kapcsolódott be Martos Béla is és vívott ki eredményeivel nemzetközi elismerést.

Szerencsémre az ismerkedést a nemlineáris programozással Martos Béla kiváló könyve alapján kezdtem, és ami azonnal komoly érdeklődést ébresztett bennem, azok az általánosított konvexitással foglalkozó fejezetek voltak. Ezen a területen sikerült szakmai sikereket elérnem. Érdeklődésem két részterület köré összpontosult.

Az egyik azt a kérdéskört vizsgálta, hogyan lehet nemdifferenciálható függvényekre célszerűen kiterjeszteni a differenciálható függvényekre értelmezett pszeudokonvexitás fogalmát. Komoly ösztönzést jelentett számomra, hogy a Mathematical Programming folyóirat leközölte első próbálkozásomat [7]. Ebben a cikkemben a gradiens vektor és az iránymenti derivált szerepét a Dini-deriváltak vették át. A Dini-deriváltak optimalizáláselméletben való alkalmazásáról Giorgio Giorgi olasz professzorral több cikket is írtunk [3,4,5]. Később további általánosított deriváltak szerepét is vizsgáltam a nemdifferenciálható optimalizálás különböző témaköreiben, mely eredményeket a Handbook on Generalized Convexity and Generalized Monotonicity [6] 10. fejezetében össze is foglaltam [13].

A másik, számomra érdekesnek ígérkező terület, a differenciálható pszeudokonvex függvények lokális analízisének kimunkálása volt. Ebben a cikkben az ezen a területen elért eredményeimről adok egy rövid áttekintést. Érdeklődésemet a téma iránt Martos Béla könyve [17] keltette fel, de megerősítést kaptam Rapcsák Tamástól is [19], aki más módszerekkel ugyan, de hasonló problémákat is vizsgált.

Tudományos pályám alakulását számos külső tényező is támogatta. Már a kezdetektől fogva rendszeres résztvevője voltam az MTA SZTAKI-ban Rapcsák Tamás által vezetett operációkutatási és döntéstudományi szemináriumnak, mely abban az időben az operációkutatással foglalkozó kollégák egyik jelentős szakmai „gyűjtőhelye” is volt. Ennek a szemináriumnak egyik fontos mellékterméke lett a Magyar Operációkutatási Társaság megalapítása 1991-ben. Egy cikluson át (2000–2002) a társaság elnökeként is tevékenykedtem.

Számomra meghatározó jelentőségű volt az OTKA megjelenése a tudománytámogatási palettán. Már az első alkalommal, 1986-ban – annak dacára, hogy egyéni pályázó voltam – kaptam annyi támogatást, melynek segítségével lehetővé vált számomra jelentős nemzetközi konferenciákon való részvétel. Az OTKA támogatása további 3 támogatott pályázat révén biztosította számomra később is a nemzetközi jelenlétet.

Pályám alakulása szempontjából különös jelentősége volt az 1990 augusztusában, Bécsben rendezett Nemzetközi Operációkutatási Konferenciának, ahol személyesen is megismerkedhettem Siegfried Schaible akkor éppen Kanadában élő német professzorral. Vele korábban már intenzív levelezésben voltam, nagy tisztelője volt Martos Bélának, és hihetetlen energiával próbálta létrehozni az általánosított konvexitással valamilyen szinten foglalkozó kollégák szakmai közösségét. Oroszlánrésze volt három nemzetközi konferencia létrejöttében és megszervezésében (1980.

Vancouver/Kanada, 1986. Canton/USA, 1988. Pisa). Bécsi találkozásunk alkalmával szóba hozta, hogy jó lenne folytatni, és 3–4 éves gyakorisággal rendszeressé tenni a már megkezdett nemzetközi konferenciákat. Az egyetlen gond, „panaszkodott”, hogy nincs jelentkező a következő találkozó megszervezésére. Gondoltam egy merészet és nagyot, és elvállaltam a *IVth International Symposium on Generalized Convexity* konferencia megszervezését, mely 1992 augusztusában Vörös József kollégám, barátom, a kar akkori dékánja hathatós támogatásával több mint 70 fő részvételével meg is valósult Pécsett, a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Karán. Ezen a konferencián Martos Béla is jelen volt, mint a konferencia díszvendége. A konferencia kötetét a Springer Verlag adta ki 1994-ben [11]. A pécsi konferencia sikere nagyban hozzájárult ahhoz, hogy 1994-ben a 15th International Symposium on Mathematical Programming konferencián (Ann Arbor/USA) a jelenlevő kollégákkal megalakítottuk a *Working Group on Generalized Convexity* szakmai közösséget, melynek 1997 és 2000 között elnöke is voltam. Ennek az időszaknak talán a legjelentősebb eredménye az volt, hogy sikerült egy színvonalas kézikönyvet [6] összeállítanunk és egy rangos kiadóval megjelentetni. A társaságnak jelenleg 52 országból 455 regisztrált tagja van. A konferenciák rendszeressé váltak, és külön öröm, hogy 2011-ben Kolozsvár, az idén pedig (2017-ben) Debrecen/Hajdúszoboszló adott otthont az éppen esedékes szakmai találkozóknak.

Visszatekintve pályámon, szívesen emlékezem meg a XXIII. Magyar Operációkutatási Konferenciáról, melynek megrendezését a BJMT felkérésére magamra vállaltam és melyre 1997 októberében került sor a Pécsi Tudományegyetem Természettudományi Karán. A konferencián megemlékeztünk a 150 évvel korábban született Farkas Gyuláról. A konferencia kiadványkötete „*Új utak a magyar operációkutatásban, In memoriam Farkas Gyula*” címmel 1999-ben jelent meg a Dialóg Campus Kiadó gondozásában [12].

3. Többváltozós differenciálható függvények általános konvexitásának lokális jellemzése a kvázi-Hesse-mátrix segítségével

A konvexitás számos általánosítása közül, csak kettőt említek.

3.1. Definíció.

(i) A $g(\mathbf{x})$ (nem feltétlenül differenciálható) függvényt kvázikonvexnek nevezzük a $K \subseteq R^n$ konvex halmazon, ha bármely $c \in R$ esetén az $\{\mathbf{x} \in K : g(\mathbf{x}) \leq c\}$ alsó nívóhalmaz konvex.

(ii) A differenciálható $f(\mathbf{x})$ függvényt *pszeudokonvexnek* nevezzük a K konvex halmazon, ha bármely $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ esetén teljesül az alábbi implikáció

$$f(\mathbf{x}_1) < f(\mathbf{x}_2) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}_2)^T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) < 0. \qquad \text{(PCX)}$$

Megjegyzés. A differenciálható függvények esetén a kvázikonvexitás definíciója ekvivalens a következővel: bármely $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ esetén teljesül az alábbi implikáció

$$f(\mathbf{x}_1) \leq f(\mathbf{x}_2) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{x}_2)^T(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \leq 0. \tag{QCX}$$

Ráadásul bármely $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in K$ esetén a (PCX) $\Rightarrow$ (QCX) implikáció is teljesül.

Martos Béla [16, 17] több érdekes eredményt e fogalmak pontbeli változataival bizonyított.

3.2. Definíció. (Martos): A differenciálható $f(\mathbf{x})$ függvényt *lokálisan kvázikonvexnek / lokálisan pszeudokonvexnek* nevezzük az $\mathbf{a} \in K$ pontban a K konvex halmazra nézve, ha bármely $\mathbf{x} \in K$ esetén teljesül a (QCXa)/(PCXa) implikáció:

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \leq 0. \tag{QCXa}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) &\Rightarrow \nabla f(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \leq 0. \\ f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) &\Rightarrow \nabla f(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) < 0. \end{aligned} \tag{PCXa}$$

Martos Béla a „lokális" jelzőt nem a matematikai analízisben megszokott értelemben használja. Az általa is használt fogalmak (a lokális jelző ellenére) az adott függvénynek nem csupán lokális (az adott pont közelében való) viselkedését fejezik ki. A matematikai analízisben nem csak egy pontot rögzítünk, hanem annak egy környezetét is. Első próbálkozásaim egyike volt a matematikai analízis megközelítésmódját alkalmazni kvázikonvex, pszeudokonvex függvények jellemzésére [8].

3.3. Definíció. (Komlósi): A differenciálható $f(\mathbf{x})$ függvényt *lokálisan kvázikonvexnek/ lokálisan pszeudokonvexnek* nevezzük az $\mathbf{a} \in K$ pontban a K konvex halmazra nézve, ha van az $\mathbf{a}$ pontnak olyan G környezete, hogy bármely $\mathbf{x} \in K \cap G$ esetén teljesül az (LQCXa)/ (LPCXa) implikáció:

$$f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \leq 0. \tag{LQCXa}$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{a}) &\Rightarrow \nabla f(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \leq 0. \\ f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) &\Rightarrow \nabla f(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) < 0. \end{aligned} \tag{LPCXa}$$

A definíciókból látszik, hogy lokálisan pszeudokonvex függvény lokálisan kvázikonvex is. Bizonyítható, hogy amennyiben $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$, akkor az $\mathbf{a}$ pontbeli lokális kvázikonvexitás ekvivalens a lokális pszeudokonvexitással.

Amint az várható, igaz a következő tétel.

3.1. Tétel. (8, 2.4. tétel) *A $K \subseteq R^n$ konvex, nyílt halmazon differenciálható $f(\mathbf{x})$ függvény akkor és csak akkor pszeudokonvex K-n, ha a K halmaz bármely pontjában lokálisan pszeudokonvex K-ra nézve.*

Érdekes módon lokális kvázikonvexitás és kvázikonvexitás között nem áll fenn hasonló kapcsolat. Az $f(x) = -x^2$ függvény R minden pontjában lokálisan kvázikonvex, de $f(x)$ nem kvázikonvex R-en. Ezért a továbbiakban csak a pszeudokonvex esettel fogok foglalkozni.

Először is az (LPCXa) tulajdonságot egy egyszerűbbel helyettesítjük.

3.2. Tétel. *Ha $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$, akkor az (LPCXa) feltétel ekvivalens az alábbi „szintvonal-feltétellel”. Bármely $x \in K \cap G$ esetén*

$$f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a}) \Rightarrow \nabla f(\mathbf{a})^T(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \leq 0. \tag{LSCa}$$

3.1. Következmény. *A differenciálható $f(\mathbf{x})$ függvény akkor és csak akkor lokálisan pszeudokonvex az $\mathbf{a} \in K$ pontban a K konvex halmazra nézve, ahol $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$, ha van az $\mathbf{a}$ pontnak olyan G környezete, hogy bármely $\mathbf{x} \in K \cap G$ esetén teljesül az (LSCa) implikáció.*

A továbbiakban $f(\mathbf{x})$ lokális pszeudokonvexitását olyan $\mathbf{a} \in K$ pontban vizsgáljuk, ahol $\nabla f(\mathbf{a}) \neq 0$. Az $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ szintvonalat az implicitfüggvény tétel ([23], 6. fejezet, 3. tétel) segítségével vizsgáljuk. Hogy ezt megtehessük, feltesszük, hogy $f(\mathbf{x})$ folytonosan differenciálható.

Legyen $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{d}\}$ egy olyan ortonormált bázis R^n-ben, melyre $\nabla f(\mathbf{a})^T\mathbf{d} \neq 0$. Jelölje B a $\mathbf{b}_i$ oszlopvektorok mátrixát, azaz legyen

$$B = [\mathbf{b}_1 \;\; \mathbf{b}_2 \;\; \ldots \;\; \mathbf{b}_{n-1}].$$

Legyenek $\mathbf{u} \in R^{n-1}$ és $v \in R$ az $\mathbf{x} \in R^n$ vektor koordinátái a $\{B, \mathbf{d}\}$ bázisban, azaz legyen

$$\mathbf{x} = B\mathbf{u} + v\mathbf{d}.$$

A továbbiakban $\mathbf{x}$-et $(\mathbf{u}, v)$-vel azonosítjuk. Tekintsük most az $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ egyenletet az $f(\mathbf{u}, v) = f(\mathbf{a})$ alakban, ahol $\mathbf{a} = (\mathbf{u}_0, v_0)$. Az implicitfüggvény tétel szerint van $\mathbf{a}$-nak olyan G és van $\mathbf{u}_0$-nak olyan N környezete és van egyetlen olyan N-en értelmezett és ott folytonosan differenciálható $h(\mathbf{u})$ függvény, hogy

(i) minden $\mathbf{u} \in N$-re $(\mathbf{u}, h(\mathbf{u})) \in G$, és $f(\mathbf{u}, h(\mathbf{u})) = f(\mathbf{a})$,

(ii) minden $\mathbf{x} \in G$-re $\nabla f(\mathbf{x})^T\mathbf{d} \neq 0$, és ha $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$, akkor van olyan $\mathbf{u} \in N$, hogy $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, h(\mathbf{u}))$.

Ha $f(\mathbf{x})$ kétszer folytonosan differenciálható, akkor $h(\mathbf{u})$ is kétszer folytonosan differenciálható.

3.4. Definíció.

(i) A $H(\mathbf{u}) = \left(-\nabla f(\mathbf{a})^T \mathbf{d}\right) h(\mathbf{u})$, $\mathbf{u} \in N$ függvényt az $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$ szintvonal $\mathbf{a}$ pontbeli *korrigált implicitfüggvényének* nevezzük.

(ii) A $H(\mathbf{u})$ függvényt *lokálisan konvexnek* nevezzük az $\mathbf{u}_0$ pontban, ha bármely $\mathbf{u} \in N$ esetén

$$H(\mathbf{u}) \geq H(\mathbf{u}_0) + \nabla H(\mathbf{u}_0)^T (\mathbf{u} - \mathbf{u}_0). \tag{LCX}$$

A korrigált implicitfüggvény szerepe és haszna a következő tételből derül ki ([8], 3.2., 3.6. és 3.8. tételek).

3.3. Tétel.

(i) A folytonosan differenciálható $f(\mathbf{x})$ függvény akkor és csak akkor lokálisan pszeudokonvex az $\mathbf{a} = (\mathbf{u}_0, v_0)$ pontban, ha a $H(\mathbf{u})$ korrigált implicitfüggvény lokálisan konvex az $\mathbf{u}_0$ pontban.

(ii) Ha $f(\mathbf{x})$ kétszer folytonosan differenciálható és lokálisan pszeudokonvex az $\mathbf{a} = (\mathbf{u}_0, v_0)$ pontban, akkor a $\nabla^2 H(\mathbf{u}_0)$ Hesse-mátrix pozitív szemidefinit.

(iii) Ha $f(\mathbf{x})$ kétszer folytonosan differenciálható az $\mathbf{a} = (\mathbf{u}_0, v_0)$ pontban, és a $\nabla^2 H(\mathbf{u}_0)$ Hesse-mátrix pozitív definit, akkor $f(\mathbf{x})$ lokálisan pszeudokonvex $\mathbf{a}$-ban.

Az $f(\mathbf{u}, h(\mathbf{u})) = f(\mathbf{a})$, $\mathbf{u} \in N$ függvényegyenletből nyerhetjük a következő összefüggéseket:

$$\begin{aligned}
\nabla H(\mathbf{u}) &= B^T \nabla f(\mathbf{x}), \\
\nabla^2 H(\mathbf{u}) &= B^T \Bigg[\nabla^2 f(\mathbf{x}) - \frac{1}{\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d}} \left(\nabla f(\mathbf{x}) \mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) + \nabla^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{d} \nabla f(\mathbf{x})^T \right) + \\
&\qquad + \frac{\mathbf{d}^T \nabla^2 f(\mathbf{x}) \mathbf{d}}{\left(\nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{d}\right)^2} \nabla f(\mathbf{x}) \nabla f(\mathbf{x})^T \Bigg] B,
\end{aligned}$$

ahol $\mathbf{u} \in N$, és $\mathbf{x} = (\mathbf{u}, h(\mathbf{u}))$.

3.5. Definíció. A $\nabla^2 H(\mathbf{u}_0)$ Hesse-mátrixot a kétszer folytonosan differenciálható $f(\mathbf{x})$ függvény $\mathbf{a}$ pontbeli *kvázi-Hesse-mátrixának* nevezzük. Jelölje a továbbiakban $Q_{B,\mathbf{d}} f(\mathbf{a})$ a $\nabla^2 H(\mathbf{u}_0)$ mátrixot.

Az elmondottakból nyilvánvaló, hogy $f(\mathbf{x})$ $\mathbf{a}$ pontbeli kvázi-Hesse-mátrixa nem egyértelmű. Különböző bázisokhoz és azon belül is azok különböző $\{B, \mathbf{d}\}$ particionálásukhoz különböző kvázi-Hesse-mátrixok tartoznak. Bizonyítható, hogy ezek a kvázi-Hesse-mátrixok hasonlóak. Mindegyiknek ugyanaz a sajátérték rendszere, következésképpen valamennyi $Q_{B,\mathbf{d}}f(\mathbf{a})$ kvázi-Hesse-mátrix ugyanabba a definitási osztályba tartozik.

A kvázi-Hesse-mátrixok között vannak egyszerűbb szerkezetűek is. Ha a $\mathbf{d}$ vektor történetesen sajátvektora a $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ Hesse-mátrixnak, akkor $B^T\mathbf{d} = \mathbf{0}$, és emiatt

$$Q_{B,\mathbf{d}}f(\mathbf{a}) = B^T\left[\nabla^2 f(\mathbf{a}) + \frac{\mathbf{d}^T\nabla^2 f(\mathbf{a})\mathbf{d}}{(\nabla f(\mathbf{a})^T\mathbf{d})^2}\nabla f(\mathbf{a})\nabla f(\mathbf{a})^T\right]B.$$

Alkalmasan választott $Q_{B,\mathbf{d}}f(\mathbf{a})$ kvázi-Hesse-mátrix segítségével sikerült egységes tárgyalását adnom a pszeudokonvexitás (az irodalomból már ismert) számos másodrendű jellemzésének [8, 9].

Egy további lehetséges alkalmazási terület a törtfüggvények vizsgálata. Ismert, hogy törtlineáris függvények, amennyiben gradiens vektoruk egy konvex halmaz minden pontjában különbözik $\mathbf{0}$-tól, az adott halmazon pszeudolineárisak, vagyis egyidejűleg pszeudokonvexek és pszeudokonkávak. Rapcsák Tamásnak [20] a pszeudolineáris függvényekre vonatkozó vizsgálatai is inspiráltak arra, hogy ennek a függvényosztálynak az elemzését is végezzem el a kvázi-Hesse-mátrixok segítségével.

A továbbiakban kétszer folytonosan differenciálható pszeudolineáris függvényt vizsgálunk az $\mathbf{a}$ pontban olyan $\{B, \mathbf{d}\}$ ortonormált bázis segítségével, ahol $\nabla^T f(\mathbf{a})\mathbf{d} \neq 0$, és $\mathbf{d}$ sajátvektora $\nabla^2 f(\mathbf{a})$-nak $\lambda(\mathbf{d})$ sajátértékkel. Mivel $Q_{B,\mathbf{d}}f(\mathbf{a}) = 0$, ezért

$$B^T\nabla^2 f(\mathbf{a})B = c(\mathbf{d})\mathbf{r}\mathbf{r}^T,$$

ahol $c(\mathbf{d}) = -\dfrac{\lambda(\mathbf{d})}{(\nabla f(\mathbf{a})^T\mathbf{d})^2}$ és $\mathbf{r} = B^T\nabla f(\mathbf{a})$.

Vezessük be a $P = [B \quad \mathbf{d}]$ bázismátrixot. Ekkor, tekintettel a $B^T\mathbf{d} = \mathbf{0}$ összefüggésre,

$$P^T\nabla^2 f(\mathbf{a})P = \begin{bmatrix} B^T\nabla^2 f(\mathbf{a})B & B^T\nabla^2 f(\mathbf{a})\mathbf{d} \\ \mathbf{d}^T\nabla^2 f(\mathbf{a})B & \mathbf{d}^T\nabla^2 f(\mathbf{a})\mathbf{d}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c(\mathbf{d})\mathbf{r}\mathbf{r}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \lambda(\mathbf{d})\end{bmatrix}.$$

Ha $\lambda(\mathbf{d}) = 0$, akkor $P^T\nabla^2 f(\mathbf{a})P = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0\end{bmatrix}$. Ebben az esetben $\nabla^2 f(\mathbf{a}) = 0$.

Ha $\lambda(\mathbf{d}) \neq 0$, és $\mathbf{r} = B^T\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, akkor $P^T\nabla^2 f(\mathbf{a})P = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & \lambda(\mathbf{d})\end{bmatrix}$. Ebben az esetben $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ rangja egy, és pozitív, vagy negatív szemidefinit attól függően, hogy $\lambda(\mathbf{d}) > 0$, vagy $\lambda(\mathbf{d}) < 0$. Vegyük észre, hogy ebben az esetben $\nabla f(\mathbf{a}) = \delta\mathbf{d}$, vagyis $\nabla f(\mathbf{a})$ sajátvektora $\nabla^2 f(\mathbf{a})$-nak.

Ha $\lambda(\mathbf{d}) \neq 0$, és $\mathbf{r} = B^T\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, akkor $P^T\nabla^2 f(\mathbf{a})P$ rangja kettő, $c(\mathbf{d})$ és $\lambda(\mathbf{d})$ különböző előjelű egyszeres sajátértékek. Sylvester inerciatétele szerint $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ rangja ugyancsak kettő, egy negatív és egy pozitív sajátértékkel rendelkezik.

3.4. Tétel. *Legyen a kétszer folytonosan differenciálható $f(\mathbf{x})$ függvény lokálisan pszeudolineáris az $\mathbf{a}$ pontban, ahol $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Ekkor a $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ Hesse-mátrixot az alábbi tulajdonságok egyike jellemzi:*

(i) *rang* $\left(\nabla^2 f(\mathbf{a})\right) = 0$, *azaz* $\nabla^2 f(\mathbf{a}) = 0$,

(ii) *rang* $\left(\nabla^2 f(\mathbf{a})\right) = 1$, $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ *(pozitív vagy negatív) szemidefinit,* $\nabla f(\mathbf{a})$ *sajátvektora* $\nabla^2 f(\mathbf{a})$*-nak,*

(iii) *rang* $\left(\nabla^2 f(\mathbf{a})\right) = 2$, $\nabla^2 f(\mathbf{a})$ *indefinit.*

Riccardo Cambini és Laura Carosi [2], majd Rapcsák Tamás [21,22] a

$$q(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^T C\mathbf{x} + \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \gamma}{\mathbf{b}^T\mathbf{x} + \beta}$$

kvadratikus törtfüggvény pszeudolinearitását vizsgálták a $K = \left\{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{b}^T\mathbf{x} + \beta > 0\right\}$ nyílt konvex halmazon, ahol $C \neq 0$ szimmetrikus mátrix. Megmutatták, hogy amennyiben $q(\mathbf{x})$ pszeudolineáris a K nyílt, konvex halmazon, akkor két eset lehetséges:

(i) $\mathrm{rang}(C) = 1$, és $q(\mathbf{x}) = \rho\left(\mathbf{b}^T\mathbf{x} + \beta\right) + \dfrac{\sigma}{\mathbf{b}^T\mathbf{x} + \beta} + \tau$, $\rho, \sigma, \tau \in R$ és $\rho\sigma < 0$,

(ii) $\mathrm{rang}(C) = 2$, és $f(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T\mathbf{x} + \pi$.

Ezt a karakterizációt a 3.4. tétel segítségével egyszerűbben és gyengébb feltételek mellett is el lehet érni. Törtfüggvények vizsgálatánál azonban komoly technikai nehézséget okoz a Hesse-mátrix kiszámítása. Az alábbi „redukciós tétel" némileg enyhít ezen a problémán.

3.5. Tétel. (15) *Legyenek $g(\mathbf{x})$ és $h(\mathbf{x})$ folytonosan differenciálható függvények az $\mathbf{a} \in R^n$ pontban, ahol $h(\mathbf{a}) > 0$ is teljesül. Az*

$$f(\mathbf{x}) = \frac{g(\mathbf{x})}{h(\mathbf{x})}$$

törtfüggvény akkor és csak akkor lokálisan pszeudolineáris az $\mathbf{a}$ pontban, ha a

$$\phi(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})h(\mathbf{x})$$

segédfüggvény lokálisan pszeudolineáris $\mathbf{a}$-ban.

A $q(x)$ törtlineáris függvény pszeudolinearitása ezzel a módszerrel könnyebben vizsgálható. A redukciós tétel szerint ez a vizsgálat „átjátszható" a

$$\phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T Cx + \mathbf{c}^T\mathbf{x} + \gamma - f(\mathbf{a})\left(\mathbf{b}^T\mathbf{x} + \beta\right)$$

kvadratikus függvény vizsgálatára, melynek Hesse-mátrixa könnyen számítható:

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{x}) = 2C.$$

Ezek szerint, ha $q(\mathbf{x})$ lokálisan pszeudolineáris az $\mathbf{a} \in K$ pontban, ahol $\nabla q(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$, akkor a 3.4. tétel szerint a C mátrix rangja vagy 1, vagy 2. Egyszerű lineáris algebrai megfontolások segítségével a Cambini-Carosi-tétel állítása gyengébb feltételek mellett is érvényes.

3.6. Tétel. [*14, 15*] *Legyen $q(\mathbf{x})$ lokálisan pszeudolineáris az $\mathbf{a} \in K$ pontban, ahol $\nabla q(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$. Ekkor a C mátrix ragja vagy 1, vagy 2.*

(i) *Legyen $\mathrm{rang}(C) = 1$. Ha $q(\mathbf{x})$ lokálisan pszeudolineáris egy $\mathbf{a}$-tól különböző $\hat{\mathbf{a}}$ pontban is, ahol $\nabla q(\hat{\mathbf{a}}) \neq \mathbf{0}$, és $q(\hat{\mathbf{a}}) \neq q(\mathbf{a})$, akkor*

$$q(\mathbf{x}) = \rho\left(\mathbf{b}^T\mathbf{x} + \beta\right) + \frac{\sigma}{\mathbf{b}^T\mathbf{x} + \beta} + \tau, \quad \rho,\, \sigma,\, \tau \in R, \text{ és } \rho\sigma < 0,$$

amiből az is következik, hogy $q(\mathbf{x})$ pszeudolineáris a $K = \{\mathbf{x} \in R^n : \mathbf{b}^T\mathbf{x} + \beta > 0\}$ nyílt, konvex halmazon.

(ii) *Ha $\mathrm{rang}(C) = 2$, akkor C indefinit, és amennyiben $q(\mathbf{x})$ a K halmaz legalább 3 különböző pontjában – ahol a gradiensek nem tűnnek el, és a függvényértékek különbözőek – lokálisan pszeudolineáris, akkor $q(\mathbf{x})$ lineáris függvény K-n, $q(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T\mathbf{x} + \pi$.*

4. Köszönetnyilvánítás

Köszönettel tartozom anonim lektoraimnak jobbító javaslataikért és a gépelési pontatlanságaimra történő figyelmeztetéseikért.

Hivatkozások

[1] Gueraggio, A., Molho, E.: *The origins of quasiconcavity: a development between mathematics and economics*, Historia Mathematica **31** (2004), 62–75.

[2] Cambini, R., Carosi, L.: *On generalized linearity of quadratic functions*, Journal of Global Optimization **30** (2004), 235–251.

[3] Giorgi, G., Komlósi, S.: *Dini Derivatives in Optimization-Part I*, Rivista A.M.A.S.E.S. **15/1** (1992), 3–30.

[4] Giorgi, G., Komlósi, S.: *Dini Derivatives in Optimization-Part II*, Rivista A.M.A.S.E.S. **15/2** (1992), 3–24.

[5] Giorgi, G., Komlósi, S.: *Dini Derivatives in Optimization-Part III*, Rivista A.M.A.S.E.S. **18/1** (1995), 47–63.

[6] Hadjisavvas, N., Komlósi, S., Schaible, S., (Eds.): *Handbook on Generalized Convexity and Generalized Monotonicity*, Springer, New York, 2005.

[7] Komlósi, S.: *Some properties of nondifferentiable pseudoconvex functions*, Mathematical Programming **26** (1983), 232–237.

[8] Komlósi, S.: *Néhány adalék a kvázikonvex függvények elméletéhez*, Alkalmazott Matematikai Lapok **10** (1984), 107–113.

[9] Komlósi, S.: *On pseudoconvex functions*, Acta. Sci. Math. (Szeged) **57** (1993), 569–586.

[10] Komlósi, S.: *First and second order characterization of pseudolinear functions*, European Journal of Operational Research **67** (1993), 278–286.

[11] Komlósi, S., Rapcsák, T., Schaible, S., (Eds.): *Generalized Convexity*, Proceedings of the IVth International Workshop on Generalized Convexity Held at Janus Pannonius University Pécs, Hungary, August 31 – September 2, 1992, Springer Verlag, Berlin – New York, 1994.

[12] Komlósi, S., Szántai, T., (szerk.): *Új utak a magyar operációkutatásban: in memoriam Farkas Gyula*, Dialóg Campus Kiadó, Budapest-Pécs, 1999.

[13] Komlósi, S.: *Generalized Convexity and Generalized Derivatives in: N. Hadjisavvas, S. Komlósi and S. Schaible (eds.)*, Handbook on Genaralized Convexity and Generalized Monotonicity, Springer, New York (2009), 421–463.

[14] Komlósi, S.: *Pszeudolineáris törtfüggvényekről*, SZIGMA 40 (2009), 11–24.

[15] Komlósi, S.: *On pseudolinear fractional functions – the implicit function approach*, Mathematica Pannonica **20** (2009), 257–274.

[16] Martos, B.: *Hiperbolikus programozás*, MTA Matematikai Kutató Intézet Közleményei **5** (1960), 383–406.

[17] Martos, B.: *Nonlinear Programming: Theory and Methods*, North Holland, Amsterdam, 1975.

[18] von Neumann: *Zur Theorie der Gesellschaftsspiele*, Mathematische Annalen **100** (1928), 295–320.

[19] Rapcsák, T.: *Az optimalitás másodrendű feltételeiről*, Alkalmazott Matematikai Lapok **4** (1978), 109–116.

[20] Rapcsák, T.: *On pseudolinear functions*, European Journal of Operational Research **50** (1991), 353–360.

[21] Rapcsák, T.: *On pseudolinearity of quadratic fractional functions*, Optimization Letters **1** (2007), 193–200.

[22] Rapcsák, T., Újvári, M.: *Some results on pseudolinear quadratic fractional functions*, CEJOR **16** (2008), 415–424.

[23] *Szőkefalvy-Nagy, Gy., Gehér, L., Nagy, P.*: *Differenciálgeometria*, Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1979.

1947. december 18-án született, 1967 és 1972 között a JATE programtervező matematikus szakán folytatott tanulmányokat és diplomázott. 1978-ban doktori címet, 1984-ben kandidátusa tudományos fokozatot szerzett. 1995-ben habilitált. 1972-től 1976-ig a JATE Bolyai Intézetében tanársegéd. 1976-tól a Pécsi Tudományegyetem Közgazdaságtudományi Karának oktatója, 1996-tól egyetemi tanári minőségben, 2012-től pedig professzor emerituszként.

Szakmai érdeklődése az optimalizáláselmélet, nemlineáris programozás, operációkutatás, ezen belül is a nemdifferenciálható optimalizálás, általánosított konvexitás és monotonitás, variációs egyenlőtlenségek. Jelentős eredményeket ért el az optimalizáláselméletben különös fontosságú függvényosztályok (pl. kvázikonvex, pszeudokonvex stb. függvények), illetve azok általánosított deriváltjai vizsgálata terén. Szakmai-tudományos publikációinak száma több mint 60, ezekre – jelen állapot szerint – több mint 400 hivatkozást kapott.

Alapító tagja és elnöke (1997–2000) a Working Group on Generalized Convexity nemzetközi tudományos társaságnak. Alapító tagja, több cikluson át elnökségi tagja, elnöke (2000–2002) a Magyar Operációkutatási Társaságnak, mely 2016-ban Egervári Jenő Emlékplakettel ismerte el szakmai-közéleti tevékenységét. Alapító tagja, elnökségi tagja (2003–2006) a Gazdaságmodellezési Társaságnak, mely 2007-ben Krekó Béla-díjjal tüntette ki. 1986-tól tagja az MTA Operációkutatási Bizottságának, melynek 1999–2002 között alelnöke, 2001–2004-ig közgyűlési doktor képviselője volt. Tagja a Bolyai János Matematikai Társulatnak, 2009-től egy cikluson keresztül alelnöke az Alkalmazott Matematikai Bizottságnak.

DR. KOMLÓSI SÁNDOR ÁKOS
Pécsi Tudományegyetem
Közgazdaságtudományi Kar
e-mail: komlosi@ktk.pte.hu

ON QUASI-HESSE MATRICES

Sándor Komlósi

It is well known that for optimization problems, the convexity/concavity of the problem functions plays crucial role in characterizing and finding optimal solutions. Moreover the convexity/concavity of a given twice differentiable function can be tested by the positive/negative semi-definiteness of its second derivative (which, in the several variable cases, is called the Hessian matrix). Since the second half of the last century there have been devoted many ef-forts to find suitable generalizations for the convexity/concavity property. The present paper reviews some former results obtained by the author on the second order characterization of pseudoconvex and pseudolinear functions by the help of the quasi-Hessian matrix.