SKEMA BERANGKA UNTUK MASALAH GOURSAT

MOHD AGOS SALIM BIN NASIR

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

2010

SKEMA BERANGKA UNTUK MASALAH GOURSAT

oleh

MOHD AGOS SALIM BIN NASIR

Tesis yang diserahkan untuk memenuhi keperluan bagi
Ijazah Doktor Falsafah

Jun 2010

PENGHARGAAN

Segala puji bagi Allah tuhan seru sekalian alam, selawat dan salam ke atas Rasul junjungan. Selamat sejahtera ke atas ke dua orang tuaku.

Alhamdulillah, bersyukur kehadrat Allah s.w.t tesis Doktor Falsafah ini dapat disempurnakan dengan jayanya. Pada kesempatan ini, saya ingin mengucapkan jutaan terima kasih kepada penyelia saya Prof. Madya Dr. Ahmad Izani Md Ismail atas bantuan, bimbingan, panduan, nasihat dan tunjuk ajar yang beliau berikan. Beliau merupakan penyelia saya di peringkat sarjana dan seterusnya di peringkat Doktor Falsafah. Tunjuk ajar beliau bukan sahaja berkaitan kajian Doktor Falsafah malahan meliputi penghasilan kerja bermutu. Pada amnya Dr. Izani merupakan penyelia yang amat berdedikasi dan berdisplin tinggi. Setiap perkembangan berkaitan dengan tugas yang diberikan ke pada saya dipantau setiap masa sehinggalah tesis Doktor Falsafah ini disempurnakan. Jasa-jasa beliau tidak mampu saya membalasnya, semoga Allah merahmati beliau sekeluarga.

Saya juga ingin mengucapkan ribuan terima kasih kepada majikan saya Universiti Teknologi MARA Pulau Pinang kerana memberi ruang kepada saya melanjutkan pelajaran di peringkat Doktor Falsafah. Ucapan terima kasih kepada beberapa penyelidik luar yang telah memberi bantuan dalam bentuk nasihat atau pun artikel berkaitan masalah yang saya kaji antaranya: Ron Buckmire, James B. Cole, Rita Meyer-Spasche dan Ronald E. Mickens.

Sejambak bunga juga saya berikan kepada ahli keluarga, isteri serta rakan-rakan yang telah memberi semangat, bantuan dan dorongan kepada saya.

Mohd Agos Salim bin Nasir

JADUAL KANDUNGAN

SENARAI JADUAL

SENARAI RAJAH

SENARAI SINGKATAN

MA - Min Aritmetik

MG - Min Geometrik

MH - Min Harmonik

MR - Min Heron

MS - Min Sentroid

MP - Min Punca Kuasa Dua

MK - Min Kontraharmonik

SENARAI PENERBITAN

SKEMA BERANGKA UNTUK MASALAH GOURSAT

ABSTRAK

Masalah Goursat merupakan masalah matematik yang melibatkan persamaan pembezaan separa yang mempunyai terbitan bercampur. Ia ditemui di dalam banyak bidang sains dan teknologi. Beberapa kajian berangka khususnya kaedah beza terhingga telah dilakukan dari pelbagai sudut oleh penyelidik terdahulu berkaitan dengan masalah ini. Di antara skema yang telah dibangunkan terdapat skema yang mengimplimentasi pengiraan menggunakan min harmonik nilai fungsi untuk menyelesaikan masalah Goursat dan keputusan daripada suatu kajian perbandingan yang telah dijalankan mendapati peningkatan tahap kejituan apabila pengiraan menggunakan min harmonik berbanding min geometrik dan min aritmetik. Justeru itu kajian tersebut menegaskan bahawa tahap kejituan sesuatu skema dipengaruhi sesuatu min yang dipilih. Walaubagaimanapun kajian lain telah menunjukkan secara berangka penggunaan min aritmetik memberikan penyelesaian lebih jitu berbanding min harmonik. Percanggahan ini merupakan titik tolak kajian Doktor Falsafah saya. Justeru kajian Doktor Falsafah ini meninjau perkara penggunaan min yang berbeza bagi masalah Goursat. Turut dikaji dengan mendalam adalah penggunaan rumus beza pusat sebagai alternatif kepada rumus beza ke hadapan yang lazimnya digunapakai, aspek teoritis seperti kestabilan dan kekonsistenan, penggunaan skema tak piawai serta skema padat. Pelbagai skema baru beza terhingga sebagai alternatif kepada skema yang lazimnya digunakan (beza ke hadapan, min aritmetik) dibangunkan dan kajian perbandingan berangka dijalankan. Kajian yang dijalankan menunjukkan skema-skema baru ini mampu menyelesaikan masalah Goursat dengan berkesan dan jitu.

NUMERICAL SCHEMES FOR THE GOURSAT PROBLEM

ABSTRACT

The Goursat problem is a mathematical problem involving partial differential equations with mixed partial derivatives. This problem arises in many areas of science and technology. Several numerical studies, in particular finite difference studies, involving several aspects have been carried out by previous researchers to solve this problem. Amongst the schemes developed is a scheme which utilize harmonic mean averaging of functional values to solve the Goursat problem and the results from a comparative study which has been carried out show improved accuracy levels when harmonic mean averaging is used compared to geometric and arithmetic mean averaging. Hence, this study concluded that the accuracy level of the schemes is affected by the chosen mean. However, another numerical study showed that, the use of arithmetic mean presented better results than harmonic mean. This contradiction is the take-off point of my Doctor of Philosophy research. This study will consider the implementation of various means for the Goursat problems. The implementation of central difference approximation as an alternative to forward difference which is traditionally used, theoretical aspects such as stability and consistency, the implementation of non standard schemes and compact scheme are also considered in detail. Several numerical scheme as an alternative to the standard (forward difference, arithmetic mean) scheme have been developed and the numerical comparative study is carried out. The studies indicate that these new schemes are capable of solving the Goursat problem effectively and accurately.

BAB 1
PENGENALAN

1.0 Pengenalan

Pelbagai masalah fizikal boleh dimodel secara matematik oleh persamaan pembezaan separa dengan syarat-syarat awal dan sempadan. Contoh-contoh termasuk aliran sungai, masalah pencemaran tasik dan tsunami. Bagaimanapun sebelum sesuatu model matematik boleh digunakan untuk tujuan kajian yang lebih mendalam, untuk tujuan penelahan atau untuk tujuan rekabentuk, model perlu diselesaikan. Iaitu suatu ungkapan atau hampiran untuk anu dalam persamaan pembezaan separa perlu diperoleh. Kerumitan persamaan pembezaan separa dan syarat-syarat tambahan dalam model matematik adalah sedemikian kaedah berangka dengan bantuan komputer terpaksa digunakan untuk menyelesaikan.

Terdapat tiga kaedah berangka yang lazim digunakan untuk menyelesaikan persamaan pembezaan separa: kaedah beza terhingga, kaedah unsur terhingga dan kaedah isipadu terhingga. Kaedah beza terhingga lebih mudah difahami, mempunyai prosedur pengiraan yang lebih mudah dan kajian-kajian terlebih awal yang berkaitan dengan skop tesis ini banyak menggunakan kaedah ini. Justeru kaedah beza terhingga akan diberi tumpuan dalam tesis ini.

Terdapat beberapa fenomena fizikal yang boleh diungkapkan sebagai masalah Goursat. Masalah Goursat terdiri daripada suatu persamaan pembezaan separa hiperbolik yang melibatkan terbitan separa bercampur dengan syarat-syarat tertentu. Tesis Doktor Falsafah ini bertujuan mengkaji penyelesaian persamaan pembezaan separa Goursat (iaitu persamaan pembezaan separa dalam masalah Goursat) secara berangka menggunakan kaedah beza terhingga dengan tumpuan kepada penghasilan skema baru sebagai alternatif kepada skema sedia ada.

1.1 Persamaan Pembezaan Separa

Menurut Farlow (1982), persamaan pembezaan separa ialah persamaan yang mengandungi terbitan separa. Di dalam persamaan pembezaan separa, fungsi yang tidak diketahui bergantung kepada beberapa pembolehubah. Pertimbangkan persamaan pembezaan separa dalam dua pembolehubah tak bersandar x, y berikut:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g = 0 \tag{1.1}$$

a, b, c, d, e, f dan g merupakan fungsi-fungsi kepada pembolehubah tak bersandar x, y manakala u merupakan pembolehubah bersandar persamaan (1.1).

Persamaan pembezaan separa berbentuk (1.1) kerap kali timbul kerana persamaan tersebut merupakan bentuk matematik beberapa hukum keabadian fizik yang penting. Persamaan (1.1) berpekali malar dikatakan hiperbolik jika $b^2 - 4ac > 0$, parabolik jika $b^2 - 4ac = 0$ dan eliptik jika $b^2 - 4ac < 0$ (Smith, 1978). Peringkat suatu persamaan pembezaan separa merupakan peringkat terbitan separa yang mempunyai peringkat tertinggi. Sesuatu persamaan pembezaan separa dikatakan linear jika mempunyai syarat-syarat berikut:

i) tidak mengandungi fungsi u kecuali $f(u) = u$ dan tidak mempunyai sebarang fungsi terbitan u. Contohnya $u_{xy} + u = 0$

ii) tidak mengandungi hasil darab di antara terbitan-terbitan u atau hasil darab u dengan terbitan-terbitannya. Contohnya $u_{xy} - u_x - y + 1 = 0$.

Sesuatu persamaan pembezaan separa yang tidak mempunyai syarat-syarat di atas disebut persamaan pembezaan separa tak linear.

1.2 Penyelesaian Analisis Dan Berangka

Penyelesaian analisis akan memberikan jawapan terbaik kepada setiap masalah. Penyelesaian analisis merupakan fungsi pembolehubah tak bersandar yang memenuhi persamaan pembezaan separa pada setiap titik di dalam domain masalah serta syarat-syarat tambahan. Penyelesaian analisis akan memberikan maklumat penting berkaitan sifat penyelesaian sesuatu masalah terutama ke atas nilai-nilai kritikal pembolehubah bersandar dan tak bersandar. Di samping itu kaedah ini akan memberikan penyelesaian dalam bentuk tertutup. Sebagai contoh, pertimbangkan penggunaan kaedah pemisah pembolehubah untuk menyelesaikan masalah nilai awal-sempadan berikut (Smith, 1978):

$$u_t = u_{xx}, \quad 0 < x < 1 \text{ , } t > 0 \tag{1.2}$$

dengan syarat awal,

$$u = 1 \text{ bila } t = 0 \text{, } 0 < x < 1 \tag{1.3}$$

dan syarat sempadan berikut,

$$u = 0 \quad \text{pada } x = 0 \text{ dan } x = 1 \text{, } t \geq 0 \tag{1.4}$$

Penyelesaian analisis bagi masalah di atas ialah

$$u = \frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}e^{-(2n+1)^2\pi^2 t}\sin(2n+1)\pi x \tag{1.5}$$

Untuk mencari nilai u bagi suatu pembolehubah x dan t tertentu, apa yang diperlukan hanyalah menggantikan nilai x dan t tersebut ke dalam rumus di atas. Walau bagaimanapun, hanya sebahagian kecil sahaja persamaan pembezaan separa yang boleh diselesaikan secara analisis (Smith, 1978). Lazimnya bagi masalah-masalah yang mempunyai geometri sempadan dan syarat sempadan yang mudah. Bagi masalah-masalah yang sempadannya tidak tertakrif, kaedah analisis tidak boleh digunakan. Wujudnya sebutan tak terhingga menyebabkan halangan kepada penyelesaian tepat berbentuk angka kerana pengiraan bermula dari $n = 1$ sehingga n yang tak terhingga adalah mustahil untuk dilakukan. Sebutan π juga tidak boleh diwakilkan ke dalam bentuk angka terhingga. Kedua-dua masalah ini menyebabkan pemangkasan terpaksa dilakukan untuk membolehkan pengiraan dibuat. Tindakan ini menyebabkan ralat turut akan mempengaruhi keputusan akhir walaupun penyelesaian adalah penyelesaian analisis.

Walaupun kaedah berangka merupakan kaedah mencari penyelesaian secara penghampiran, namun ia mempunyai kelebihan kerana ia boleh digunakan dengan lebih meluas berbanding kaedah analisis. Di dalam kebanyakkan kes aplikasi, penyelesaian yang didapati dengan menggunakan kaedah ini sudah cukup memuaskan bagi kehendak pengguna. Bagi mendapatkan gambaran ringkas tentang kaedah beza terhingga, pertimbangkan masalah Laplace dengan syarat sempadan Dirichlet di bawah (Edwards & Penney, 2004):

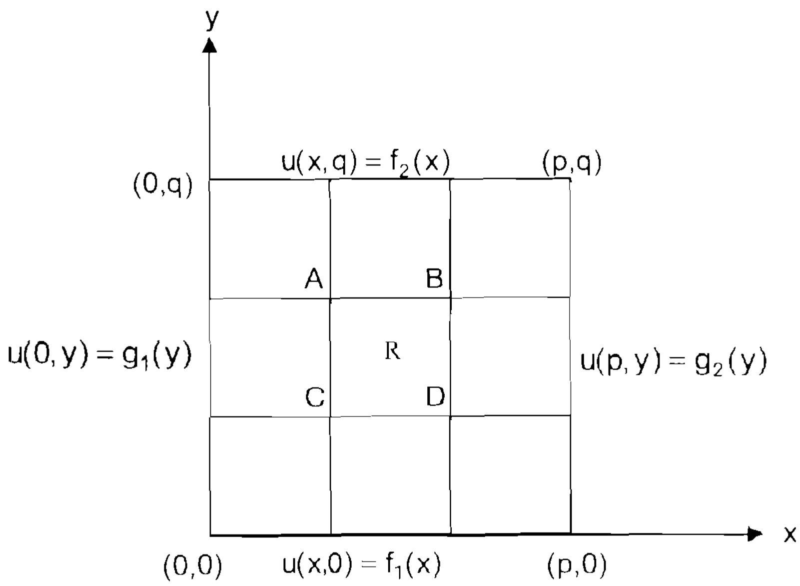
$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \tag{1.6}$$

$$0 < x < p, \ 0 < y < q \tag{1.7}$$

$$u(x,0) = f_1(x), \ u(x,q) = f_2(x) \tag{1.8}$$

$$u(0,y) = g_1(y), \ u(p,y) = g_2(y) \tag{1.9}$$

Kaedah beza terhingga akan melibatkan penutupan domain masalah dengan suatu grid segiempat tepat (umumnya seragam).



Rajah 1.1 : Penutupan segi empat tepat dengan titik-titik grid A, B, C, dan D.

Pendiskritan dilakukan ke atas persamaan pembezaan separa dengan menggantikan terbitan-terbitan separa yang ada dengan hampiran beza-beza nilai pembolehubah bersandar u pada titik-titik grid. Pendiskritan ini akan menghasilkan sistem persamaan aljabar dan penyelesaian kepada sistem ini merupakan hampiran kepada nilai-nilai u pada titik-titik grid. Dengan menggunakan suatu prosedur interpolasi pengiraan, hampiran kepada nilai u pada suatu titik bukan titik grid boleh dilakukan.

1.3 Masalah Goursat

Masalah Goursat merupakan masalah yang melibatkan persamaan pembezaan separa yang mempunyai terbitan bercampur. Bentuk am masalah Goursat ialah (Wazwaz, 1993):

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y) \tag{1.10}$$

dengan syarat berikut:

$$u(x,0) = \phi(x), \quad u(0,y) = \psi(y), \quad \phi(0) = \psi(0) \tag{1.11}$$

dan

$$0 \leq x \leq r, \quad 0 \leq y \leq s \tag{1.12}$$

Bagi masalah Goursat di atas, nilai pembolehubah adalah $a = 0$, $b = 1$ dan $c = 0$. Oleh yang demikian $b^2 - 4ac = 1 > 0$. Maka kita mengkelaskan masalah Goursat sebagai masalah persamaan pembezaan separa hiperbolik dan pada masa yang sama masalah ini merupakan masalah nilai awal. Suatu masalah nilai awal atau sempadan dikatakan tertakrif rapi jika dan hanya jika penyelesaian wujud, unik dan bergantung secara selanjar atas data. Garabedian (1964) telah menunjukkan dengan menggunakan kaedah penghampiran berulang-ulang (technique of successive approximations) bahawa masalah Goursat seperti di atas adalah tertakrif rapi secara Hadamard.

Masalah Goursat dikelaskan sebagai masalah nilai awal (initial value problem) kerana hanya syarat-syarat awal perlu dipenuhi oleh penyelesaian masalah.

1.4 Analisis Berasaskan Keputusan Aplikasi Nilai Purata Min Aritmetik, Harmonik Dan Geometrik Oleh Wazwaz (1993)

Wazwaz (1993) telah membuat kajian berkaitan masalah Goursat dan telah membangunkan satu skema baru berasaskan min harmonik (untuk penilaian fungsi f di sebelah kanan persamaan (1.10)) tidak seperti kajian oleh penyelidik terdahulu yang mana penilaian berasaskan min aritmetik atau geometrik. Bagi pendiskritan sebelah kiri persamaan (1.10), Wazwaz (1993) telah menggunakan kaedah beza terhingga berasaskan beza ke depan. Keputusan ujikaji berangka beliau adalah seperti berikut:

Jadual 1.1 : Ralat skema disekutu min aritmetik menggunakan saiz langkah, h = 0.05

Ralat relatif pada titik-titik grid				
	Koordinat – x			
Koordinat – y	1.0	2.0	3.0	4.0
1.0	-0.7472646E-04	-0.9952898E-04	-0.6928755E-04	-0.4110699E-04
2.0	-0.9952898E-04	-0.2989918E-03	-0.3498172E-03	-0.2633985E-03
3.0	-0.6928755E-04	-0.3498172E-03	-0.8258607E-03	-0.9727895E-03
4.0	-0.4110699E-04	-0.2633985E-03	-0.9727895E-03	-0.2156318E-02

Jadual 1.2 : Ralat skema disekutu min harmonik menggunakan saiz langkah, h = 0.05

Ralat relatif pada titik-titik grid				
	Koordinat – x			
Koordinat – y	1.0	2.0	3.0	4.0
1.0	-0.9046288E-04	-0.1803688E-03	-0.1990827E-03	-0.1742043E-03
2.0	-0.1803688E-03	-0.5331462E-03	-0.7914680E-03	-0.7583550E-03
3.0	-0.1990827E-03	-0.7914680E-03	-0.1910985E-02	-0.2543413E-02
4.0	-0.1742043E-03	-0.7583550E-03	-0.2543413E-02	-0.5755399E-02

Jadual 1.3 : Ralat skema disekutu min geometrik menggunakan saiz langkah, h = 0.05

Ralat relatif pada titik-titik grid				
	Koordinat – x			
Koordinat – y	1.0	2.0	3.0	4.0
1.0	-0.8169176E-04	-0.1396191E-03	-0.1336033E-03	-0.4110699E-04
2.0	-0.1396191E-03	-0.4170579E-03	-0.5706426E-03	-0.2633985E-03
3.0	-0.1336033E-03	-0.5706126E-03	-0.1367434E-02	-0.9727895E-03
4.0	-0.1102345E-03	-0.5149493E-03	-0.1764770E-02	-0.2156318E-02

Wazwaz (1993) menyatakan bahawa kaedah berasaskan min harmonik memberikan penyelesaian yang lebih jitu dan beliau seterusnya memberikan justifikasi tentang hal ini, iaitu nilai min yang paling kecil akan menghasilkan keputusan yang paling jitu. Bagaimanapun adalah jelas dari keputusan yang dipapar bahawa min aritmetik dan bukannya min harmonik memberi keputusan yang terbaik. Perkara ini telah turut dibangkitkan oleh penilai makalah Wazwaz yang disorot di dalam MathScienceNet. Ini merupakan titik tolak kajian Doktor Falsafah di dalam masalah Goursat.

1.5 Pernyataan Masalah Dan Objektif Kajian

Nasir (2003) menunjukkan dengan menggunakan contoh yang bersesuaian bahawa penggunaan min aritmetik lebih jitu berbanding min harmonik bagi masalah Goursat linear dan tak linear. Di samping itu penggunaan min aritmetik juga dibuktikan mempunyai kelebihan kerana mengekalkan kelinearan masalah Goursat linear dan oleh itu proses penyelesaian tidak menjadi rumit. Beberapa persoalan timbul dalam penggunaan kaedah berangka (khususnya kaedah beza terhingga) dalam penyelesaian masalah Goursat. Antaranya adalah sama ada terdapat min-min yang boleh menjanakan skema yang lebih baik. Di samping itu dapatkah formulasi yang menggunakan beza pusat bagi sebutan bercampur u_{xy} mampu memberi skema yang lebih jitu berbanding skema beza ke depan yang lazimnya digunakan. Terdapat juga skema-skema beza terhingga baru dalam literatur kaedah beza terhingga seperti skema tak piawai dan skema padat. Bagaimanapun belum ada lagi kajian penggunaan skema-skema ini untuk masalah Goursat. Hal-hal ini akan dikaji dalam tesis ini. Aspek-aspek teoritis juga telah kurang mendapat perhatian penyelidik-penyelidik terdahulu yang lebih menumpu kepada aplikasi apabila mengkaji masalah Goursat. Keyakinan tentang perkara-perkara teoritis seperti kestabilan, kekonsistenan dan penumpuan amat penting bagi penggunaan kaedah berangka bagi menyelesaikan persamaan Goursat. Aspek-aspek teoritis akan turut dikaji dalam tesis ini.

Objektif utama kajian ini adalah seperti berikut:

- Membangunkan skema-skema baru menggunakan pelbagai min dan hampiran beza pusat serta menguji keberkesanan. Ini dilakukan melalui formulasi matematik dan simulasi komputer.
- Membangunkan skema-skema baru menggunakan hampiran beza tak piawai dan hampiran beza padat serta menguji keberkesanan. Ini dilakukan melalui formulasi matematik dan simulasi komputer.
- Menganalisis kestabilan beberapa skema yang dibangunkan. Ini dilakukan menggunakan kaedah Fourier atau Von Neumann.
- Menganalisis penumpuan beberapa skema yang dibangunkan. Ini dilakukan menggunakan Teorem Kesetaraan Lax.

1.6 Tesis Sepintas Lalu

Tesis Doktor Falsafah ini memperihalkan hasil kajian ke atas masalah Goursat. Di dalam Bab 2 akan dibincangkan tiga kaedah utama berasaskan pendiskritan iaitu kaedah beza terhingga, kaedah unsur terhingga dan kaedah isipadu terhingga. Sebagaimana yang telah disebutkan kaedah beza terhingga akan diberi tumpuan di dalam kajian ini. Penghampiran terbitan bercampur akan dibincangkan di samping aspek-aspek kestabilan, kekonsistenan dan juga penumpuan skema beza terhingga.

Di dalam Bab 3, kajian literatur ke atas masalah Goursat akan dilakukan. Kertas kerja oleh Wazwaz (1993) akan diberi tumpuan mendalam memandangkan ia merupakan titik tolak kajian ini. Skema disekutu min aritmetik oleh Jain & Sharma (1968), Day (1966), Stetter & Torning (1963), skema disekutu min geometrik oleh Evans & Sanugi (1988) dan skema disekutu min harmonik oleh Wazwaz (1993) akan dibincangkan dengan terperinci. Selain itu, juga diterangkan bagaimana para pengkaji di atas menentukan tatacara bagi mengendali masalah syarat awal masalah Goursat yang dikaji. Kekurangan dalam kajian semasa akan dinyatakan dan dikaitkan dengan fokus tesis ini.

Di dalam Bab 4, purata nilai fungsi yang memainkan peranan penting dalam kajian ini akan dibincangkan. Apakah takrif min dan bagaimanakah min klasik ditakrifkan akan disentuh. Selain itu bagaimana min dibangunkan juga akan diterangkan. Min yang terlibat ialah min aritmetik, harmonik, geometrik, heron, sentroid, punca kuasa dua dan kontraharmonik. Pembuktian bahawa setiap min merupakan nilai di antara dua nombor nyata juga ditunjukkan. Ketaksamaan di antara min bagi menentukan urutan meningkat telah dikaji, dibuktikan dan dihuraikan dengan mendalam.

Di dalam Bab 5, skema beza ke depan disekutu min heron, sentroid, punca kuasa dua dan kontraharmonik akan dibangunkan. Skema-skema ini belum pernah dikaji oleh mana-mana penyelidik sebelum ini. Setiap langkah pembangunan skema ini akan ditunjukkan dengan jelas dan teratur. Juga ditunjukkan bagaimana tatacara bagi mengatasi masalah syarat awal masalah Goursat yang dikaji dibangunkan.

Di dalam Bab 6, pembangunan skema beza pusat dilakukan dan seterusnya ujikaji ke atas skema-skema ini dan ujikaji ke atas skema-skema beza ke depan di dalam Bab 5 dilakukan. Pengubahsuaian akan dilakukan berdasarkan pelbagai min yang akan digunakan dan seterusnya penterjemahan ke dalam bahasa pengaturcaraan dibuat. Skema-skema ini akan diuji ke atas masalah Goursat linear dan tak linear yang dipilih. Ralat relatif akan dihitung bagi setiap masalah dengan menggunakan saiz langkah h yang berbeza-beza. Kajian perbandingan akan dilakukan ke atas skema-skema tadi. Daripada perbandingan ini keputusan akan dibuat berkaitan kelebihan dan kekurangan skema-skema yang dikaji.

Di dalam Bab 7 akan diperkenalkan dan dibincangkan skema tak piawai. Kajian literatur skema tak piawai dilaksanakan dalam bab ini. Seterusnya skema tak piawai akan diuji ke atas masalah Goursat linear dan tak linear yang dipilih. Ralat relatif akan dihitung bagi setiap masalah dengan menggunakan saiz langkah h yang berbeza-beza. Kajian perbandingan akan dilakukan ke atas skema-skema tadi. Mengikut Mickens (2008a), skema tak piawai belum pernah dibangunkan untuk persamaan pembezaan separa yang melibatkan masalah Goursat.

Di dalam Bab 8, pengenalan akan diberikan kepada skema beza padat. Berdasarkan contoh oleh kajian penyelidik sebelum ini (Spotz, 1995), akan ditunjukkan dalam bab ini bagaimana skema beza padat dapat mengurangkan ralat pangkasan bagi masalah yang dikaji. Selain itu kajian literatur skema beza padat ke atas pelbagai bidang juga akan dibincangkan. Di dalam Bab ini juga skema beza padat bagi menyelesaikan masalah Goursat akan dibangunkan dengan terperinci dan ujikaji berangka dilakukan.

Di dalam Bab 9, kesimpulan keseluruhan tesis Doktor Falsafah ini akan diberikan. Di dalam Bab ini juga akan dicadangkan beberapa kajian lanjut kepada para penyelidik yang berminat untuk meneruskan kajian ini.

BAB 2
PENYELESAIAN BERANGKA

2.0 Pengenalan

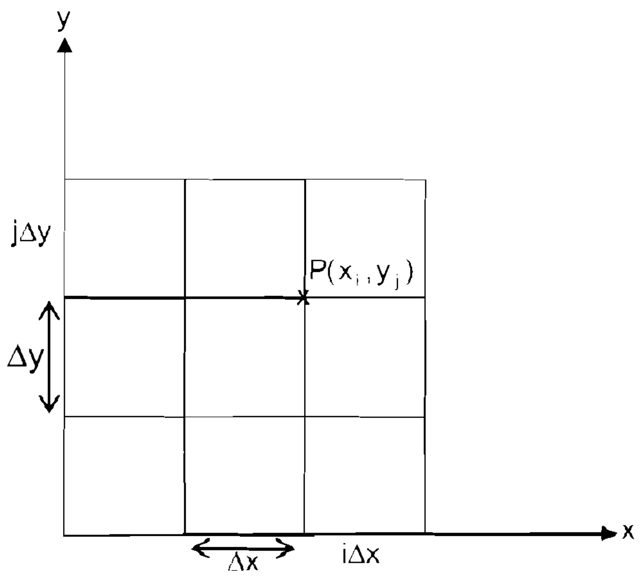
Sebagaimana yang telah disebutkan, model matematik yang melibatkan persamaan pembezaan separa lazimnya perlu diselesaikan menggunakan kaedah berangka dengan bantuan komputer. Di dalam bab ini akan bincangkan dengan ringkas beberapa prinsip asas kaedah beza terhingga (iaitu suatu jenis kaedah berangka) yang akan digunapakai dalam kajian ini.

2.1 Kaedah Berangka

Kaedah berangka merupakan kaedah untuk menyelesaikan masalah saintifik dengan menggunakan menggunakan pengaturcaraan komputer (Hasan & Idrus, 2007). Antara sifat umum kaedah berangka ialah ia memberikan penyelesaian secara penghampiran disamping melakukan pengiraan yang berangkai atau secara berlelaran. Di sebabkan ini penggunaan komputer adalah wajar dan perlu untuk merealisasikan kaedah berangka. Sejak beberapa dekad lalu, teknologi dan pengetahuan berkaitan komputer berkembang dengan amat pesat. Situasi ini memberi kelebihan kepada kaedah berangka (dan kaedah-kaedah bersekutu) untuk membolehkannya digunakan secara meluas di dalam kejuruteraan, permodelan matematik, fizik, biologi, kimia, perubatan, ekonomi, perniagaan dan pelbagai bidang lain. Perbincangan yang lebih mendalam tentang kelebihan dan kelemahan proses penyelesaian dan analisis model matematik menggunakan kaedah berangka dengan bantuan komputer diberi dalam Kumar & Durst (1999).

2.1.1 Kaedah Beza Terhingga

Di dalam proses penyelesaian persamaan pembezaan (biasa dan separa) yang menggunakan kaedah beza terhingga, terbitan-terbitan yang terdapat dalam persamaan pembezaan digantikan oleh hampiran-hampiran beza terhingga. Andaikan u merupakan fungsi pembolehubah bersandar manakala x dan y sebagai pembolehubah tak bersandar kepada fungsi u. Sukuan pertama satah kartesan dibahagikan kepada kepada set-set sigiempat tepat seragam oleh garisan grid yang selari dengan paksi – x (dengan jarak Δx) dan juga selari dengan paksi – y (dengan jarak Δy) seperti di bawah:



Rajah 2.1 : Pembahagian sukuan pertama satah kartesan oleh garis-garis grid

Pertimbangkan titik $P(x_i, y_j)$ dengan $x_i = i\Delta x,\ i = 1,2,...m$ dan $y_j = j\Delta y,\ j = 1,2,...n.$ Pengembangan siri Taylor untuk $u(x_i + \Delta x, y_i)$ di sekitar (x_i, y_j) ialah:

$$u(x_i + \Delta x, y_j) = u(x_i, y_j) + \frac{\Delta x \partial u}{1! \partial x}(x_i, y_j) + \frac{\Delta x^2 \partial^2 u}{2! \partial x^2}(x_i, y_j) + \frac{\Delta x^3 \partial^3 u}{3! \partial x^3}(x_i, y_i) + ... \qquad (2.1)$$

2.1.2 Penghampiran Beza Ke Depan

Andaikan pemangkasan dibuat bermula dari sebutan ketiga di sebelah kanan persamaan (2.1). Sekiranya Δx kecil secukupnya, sebutan-sebutan seterusnya akan menjadi lebih kecil dari sebutan ketiga. Persamaan (2.1) boleh ditulis:

$$u(x_i+\Delta x, y_j)=u(x_i,y_j)+\frac{\Delta x\partial u}{1!\partial x}(x_i,y_j)+O(\Delta x^2) \qquad (2.2)$$

Sebutan $O(\Delta x^2)$ bermaksud hasil tambah sebutan-sebutan terpangkas dan disebut ralat pangkasan. Ralat ini, paling besar hanyalah suatu gandaan malar Δx^2. Persamaan (2.2) boleh diolah seperti berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i,y_j)=\frac{u(x_i+\Delta x, y_j)-u(x_i,y_j)}{\Delta x}-O(\Delta x) \qquad (2.3)$$

Di sini sebutan sebelah kanan persamaan (2.3) iaitu $\frac{u(x_i+\Delta x, y_j)-u(x_i,y_j)}{\Delta x}$ disebut sebagai hampiran beza ke depan kepada $\frac{\partial u}{\partial x}$ di (x_i,y_j). Hampiran ini dikatakan jitu peringkat pertama atau $O(\Delta x)$.

Pengembangan siri Taylor untuk $u(x_i-\Delta x, y_j)$ di sekitar (x_i,y_j) ialah:

$$u(x_i-\Delta x, y_j)=u(x_i,y_j)-\frac{\Delta x\partial u}{1!\partial x}(x_i,y_j)+\frac{\Delta x^2\partial^2 u}{2!\partial x^2}(x_i,y_j)-\frac{\Delta x^3\partial^3 u}{3!\partial x^3}(x_i,y_j)+\ldots \qquad (2.4)$$

Andaikan pemangkasan bermula pada sebutan ketiga di kanan persamaan (2.4) dengan Δx kecil secukupnya, maka sebutan-sebutan yang bermula dengan sebutan keempat adalah lebih kecil dari sebutan ketiga. Persamaan (2.4) boleh ditulis:

$$u(x_i - \Delta x, y_j) = u(x_i, y_j) - \frac{\Delta x \partial u}{1! \partial x}(x_i, y_j) + O(\Delta x^2) \qquad (2.5)$$

Persamaan (2.5) boleh diolah seperti berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta x} + O(\Delta x) \qquad (2.6)$$

Di sini sebutan sebelah kanan persamaan (2.6) iaitu $\frac{u(x_i, y_j) - u(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta x}$ disebut sebagai hampiran beza ke belakang kepada $\frac{\partial u}{\partial x}$ di (x_i, y_j). Hampiran ini dikatakan jitu peringkat pertama atau $O(\Delta x)$. Ralat pangkasan akan dikurangkan sebanyak 50% jika Δx dikurangkan sebanyak 50%.

Persamaan (2.1) ditolak dengan persamaan (2.4) akan menghasilkan hubungan seperti berikut:

$$u(x_i + \Delta x, y_j) - u(x_i - \Delta x, y_j) = 2\Delta x \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) + O(\Delta x^3) \qquad (2.7)$$

Persamaan (2.7) boleh diolah seperti berikut:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + \Delta x, y_j) - u(x_i - \Delta x, y_j)}{2\Delta x} - O(\Delta x^2) \qquad (2.8)$$

Di sini sebutan sebelah kanan persamaan (2.8) iaitu $\dfrac{u(x_i + \Delta x, y_j) - u(x_i - \Delta x, y_j)}{2\Delta x}$ disebut sebagai hampiran beza ke pusat kepada $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ di (x_i, y_j). Hampiran ini dikatakan jitu peringkat kedua atau $O(\Delta x^2)$. Hampiran ini dikatakan jitu peringkat kedua atau $O(\Delta x^2)$. Ralat pangkasan akan dikurangkan sebanyak 75% jika Δx dikurangkan sebanyak 50% (Lam, 1994).

Hampiran beza pusat $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ di (x_i, y_j) boleh diperolehi dengan menambahkan persamaan (2.1) dengan persamaan (2.4) yang akan menghasilkan persamaan berikut:

$$u(x_i + \Delta x, y_j) + u(x_i - \Delta x, y_j) = 2u(x_i, y_j) + \Delta x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) + O(\Delta x^4) \tag{2.9}$$

Persamaan (2.9) boleh diolah menjadi:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_j) = \frac{u(x_i + \Delta x, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta x^2} - O(\Delta x^2) \tag{2.10}$$

Di sini sebutan sebelah kanan persamaan (2.10) iaitu $\dfrac{u(x_i + \Delta x, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - \Delta x, y_j)}{\Delta x^2}$ disebut sebagai hampiran beza ke pusat kepada $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ di (x_i, y_j). Hampiran ini dikatakan jitu peringkat kedua atau $O(\Delta x^2)$.

Dengan menggunakan cara yang sama hampiran-hampiran berikut boleh diterbitkan:

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i, y_j + \Delta y) - u(x_i, y_j)}{\Delta y} \qquad \text{(hampiran beza ke depan)} \qquad (2.11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i, y_j) - u(x_i, y_j - \Delta y)}{\Delta y} \qquad \text{(hampiran beza ke belakang)} \qquad (2.12)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i, y_j + \Delta y) - u(x_i, y_j - \Delta y)}{2\Delta y} \qquad \text{(hampiran beza ke pusat)} \qquad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_j) \approx \frac{u(x_i, y_j + \Delta y) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_j - \Delta y)}{\Delta y^2} \qquad \text{(hampiran beza ke pusat)} \qquad (2.14)$$

Langkah pertama dalam penggunaan kaedah beza terhingga untuk menyelesaikan persamaan pembezaan separa ialah untuk menggantikan terbitan separa yang wujud dengan hampiran beza terhingga di atas.

2.2 Penghampiran Beza Terhingga Ke Depan Bagi Terbitan Bercampur

Di dalam masalah Goursat yang menjadi tumpuan tesis ini terdapat sebutan berbentuk u_{xy}. Hampiran beza terhingga terbitan bercampur ini boleh diperoleh seperti berikut:

Pertimbangkan,

$$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) \qquad (2.15)$$

Dengan menggunakan hampiran beza ke depan (2.3), kita akan dapati:

$$u_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{u(x+\Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x}\right)$$

$$= \frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial y}\left(u(x+\Delta x, y) - u(x, y)\right) \qquad (2.16)$$

di mana $h = \Delta x$.

Jika hampiran beza ke depan digunakan untuk:

$$\frac{\partial}{\partial y}u(x+\Delta x, y) \text{ dan } \frac{\partial}{\partial y}u(x, y) \qquad (2.17)$$

diperoleh,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u(x+\Delta x, y) - u(x, y)\right) =$$
$$\left(\frac{u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x+\Delta x, y)}{k}\right) - \left(\frac{u(x, y+\Delta y) - u(x, y)}{k}\right) \qquad (2.18)$$

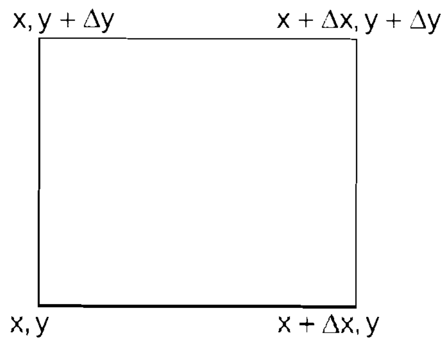
di mana $k = \Delta y$.

Oleh yang demikian,

$$u_{xy} = \frac{1}{h}\left[\frac{\left(u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x+\Delta x, y)\right)}{k} - \frac{\left(u(x, y+\Delta y) - u(x, y)\right)}{k}\right] \qquad (2.19)$$

Jika dipilih $h = k$ (saiz langkah yang seragam dipilih untuk memudahkan pengkomputeran dan penganalisian skema), maka diperoleh:

$$u_{xy} = \frac{1}{h^2}\left[\left(u(x+\Delta x, y+\Delta y) - u(x+\Delta x, y)\right) - \left(u(x, y+\Delta y) - u(x,y)\right)\right] \tag{2.20}$$



Rajah 2.2 : Lokasi koordinat di atas grid.

Hampiran ini digunakan oleh ramai penyelidik sebelum ini. Salah satu perkara yang akan dikaji dalam tesis ini ialah penggunaan beza pusat (2.20) dan bukannya beza ke depan untuk memperoleh hampiran terbitan bercampur u_{xy}.

2.3 Kekonsistenan, Kestabilan, Penumpuan

Beberapa aspek teori akan disentuh kerana ia terlibat secara langsung dengan kajian tesis ini, antara lain:

Kekonsistenan suatu sistem persamaan beza terhingga:

Suatu sistem persamaan beza terhingga yang dihasilkan melalui proses pendiskritan terhadap suatu persamaan pembezaan dikatakan *konsisten* dengan persamaan pembezaan tersebut jika persamaan-persamaan beza terhingga menjadi persamaan pembezaan yang asal di setiap titik grid apabila saiz-saiz grid menghampiri sifar. Oleh yang demikian kekonsistenan bagi suatu skema beza terhingga adalah sangat penting untuk mempastikan bahawa skema tersebut benar-benar mewakili fenomena fizikal yang hendak dihuraikan.

Kaedah yang digunakan untuk menguji kekonsistenan suatu skema beza terhingga ialah dengan menggantikan penyelesaian tepat suatu persamaan pembezaan ke dalam skema beza terhingga dan seterusnya setiap sebutan dalam skema beza terhingga dikembangkan dengan menggunakan siri Taylor. Mengikut Twizell (1984), jika melibatkan persamaan parabolik ungkapan yang terhasil lazimnya dibahagikan dengan langkah masa Δt, manakala bagi persamaan hiperbolik, ungkapan yang terhasil lazimnya dibahagikan dengan Δt^2. Masalah Goursat yang dikaji tidak melibatkan langkah masa Δt, pembahagian sedemikian diabaikan. Ungkapan selepas pembahagian dikatakan konsisten jika menumpu ke persamaan yang asal apabila saiz-saiz grid menghampiri sifar. Seandainya ungkapan tersebut mengandungi nisbah saiz-saiz grid, nisbah-nisbah ini diandaikan menumpu ke sifar apabila saiz-saiz grid menghampiri sifar (Twizell, 1984).

Kestabilan suatu sistem persamaan beza terhingga:

Umum diketahui sesebuah komputer hanya mampu menyimpan data bagi sesuatu pengiraan yang melibatkan nombor nyata tepat kepada sejumlah digit bererti yang terhingga sahaja. Oleh yang demikian akan terjadi ralat bulatan dan ralat-ralat ini akan merambat. Bagi masalah parabolik dan masalah hiperbolik, pengiraan berangka melibatkan apa yang dipanggil prosedur kawat iaitu pengiraan dilakukan untuk tahap masa pertama diikuti oleh tahap masa kedua dan seterusnya sehingga ke suatu tahap masa yang umumnya agak besar. Keadaan ini boleh membawa kesan lebih buruk kepada ralat bulatan. Masalah ketidakstabilan akan mengakibatkan nilai-nilai berayun, secara mutlak membesar dan lama-kelamaan menyebabkan larian komputer terhenti kerana tidak mampu menyimpan data yang terlalu besar.

Andaikan u_i^n melambangkan hampiran beza terhingga kepada u dititik grid $(i\Delta x, n\Delta t)$. Disebabkan ralat pembulatan yang berlaku, komputer bukan mengira u_i^n tetapi $u_i^{n^*}$ dengan:

$$u_i^{n^*} = u_i^n + \text{ralat-ralat bulatan terhimpun.} \qquad (2.21)$$

Kestabilan akan dicapai jika ralat-ralat bulatan terhimpun adalah terbatas apabila $n \to \infty$ untuk $\Delta t, \Delta x$ yang tetap atau apabila $\Delta t, \Delta x \to 0$ (sedemikian nisbah $\Delta t / \Delta x$ adalah tetap) untuk suatu nilai masa yang ditetapkan. Lazimnya, takrifan pertama digunakan (Smith, 1978). Terdapat dua kaedah yang seringkali digunakan untuk menentukan kestabilan suatu skema beza terhingga iaitu kaedah *Matriks* dan kaedah *Von Neumann*. Kaedah Von Neumann lebih kerap digunakan kerana mudah diaplikasi. Kaedah ini hanya boleh diaplikasi kepada masalah nilai awal linear dengan pekali malar. Sekiranya masalah yang dipertimbang tidak menepati syarat-syarat ini, masalah tersebut perlu diubahsuai supaya menjadi masalah nilai awal linear dengan pekali malar. Ini boleh dilakukan melalui penglinearan, mengabaikan syarat-syarat sempadan serta menggunakan nilai purata untuk pekali pembolehubah. Daripada pengalaman, analisis stabiliti ke atas masalah yang telah diubahsuai akan menghasilkan keputusan yang merupakan hampiran yang baik kepada masalah asal.

Penumpuan suatu sistem persamaan beza terhingga:

Suatu skema beza terhingga dikatakan *menumpu* jika, pada suatu titik tertentu pada suatu satah, penyelesaian beza terhingga menumpu secara seragam kepada penyelesaian tepat persamaan pembezaan apabila saiz-saiz grid menghampiri sifar dengan tidak melanggar sebarang syarat kestabilan. Penumpuan sesuatu skema beza terhingga agak sukar dibuktikan terus dari takrif. Untuk tujuan ini biasanya *teorem kesetaraan Lax* digunakan. Menurut teorem kesetaraan Lax: Suatu skema beza terhingga akan menumpu jika dan hanya jika skema konsisten dan stabil. Walaubagaimanapun, teorem ini hanya boleh digunakan untuk masalah nilai awal linear sahaja. Bagi masalah-masalah tak linear, teorem ini dapat memberi gambaran yang baik untuk menentukan penumpuan skema beza terhingga.

BAB 3
KAJIAN LITERATUR

3.0 Pengenalan

Kajian teori tentang masalah Goursat telah pun dilakukan, antaranya oleh Tutschke (2007), Liu & Zou (2006), Danilov (2006), Tarama (2002), Midodashvili (2002), Aziz & Hubbard (1964), Garabedian (1964) dan Lees (1960). Masalah Goursat boleh ditemui di dalam beberapa aplikasi dan aplikasi-aplikasi ini telah dikaji oleh ramai penyelidik seperti Steudel & Kaup (2000), Fatkullin (1999), Mclaughlin et. al. (1994), Hillion (1992), Kaup & Newell (1978), Frisch & Cheo (1972) dan Garabedian (1964). Beberapa kajian berangka telah dicadangkan untuk menyelesaikan masalah tersebut. Antaranya Driollet et. al. (2007), Bobenko et. al. (2006), Kaup & Steudel (2000), Kharibegashvili (2000), Wazwaz (1993), Cheung (1977), Gourlay (1970), Jain & Sharma (1968), Day (1966) serta Stetter & Torning (1963).

Di dalam bab ini akan ditinjau dan diulas tentang literatur berkaitan teori, aplikasi dan penyelesaian masalah Goursat.

3.1 Kajian Teori Masalah Goursat

Kajian teori berkaitan masalah Goursat telah bermula sekitar 80 tahun yang lepas dengan tumpuan awal kepada aspek kewujudan dan keunikan penyelesaian. Ini berkait rapat dengan fungsi f dalam masalah Goursat.

Fungsi f ini bergantung, pada amnya, atas x, y, u, u_x dan u_y. Kamke (1930) telah membuktikan kewujudan dan keunikan penyelesaian masalah Goursat dengan andaian f memenuhi syarat Lipschitz terhadap u, u_x dan u_y. Schauder (1925) pula membuktikan perkara yang sama dengan andaian f memenuhi syarat Lipschitz terhadap u_x dan u_y.

Alexiewicz & Orlicz (1956) serta Hartman & Wintner (1952) membuktikan kewujudan dengan andaian f terbatas, selanjar dan memenuhi syarat Lipschitz terhadap u_x dan u_y. Lees (1960) telah mengkaji kewujudan dan keunikan bagi masalah Goursat linear dan kuasi-linear.

Pada zaman 1960an fokus telah beralih kepada aspek kejituan. Ini berikutan dengan wujudnya komputer yang mampu menyelesaikan persamaan pembezaan secara berangka. Ralat pangkasan ialah beza antara penyelesaian sebenar dan penyelesaian anggaran. Aziz & Hubbard (1964) telah mengkaji batasan ralat pangkasan bagi masalah Goursat sekiranya kaedah beza terhingga digunakan. Aziz & Hubbard (1964) juga telah menunjukkan ralat pangkasan menuju sifar jika saiz grid mengecil. Selain itu kemampuan sesuatu kaedah beza terhingga boleh dikaitkan dengan kebermungkinannya untuk memperoleh batasan ralat lebih awal (a priori error bound) dengan jelas bagi sesuatu penyelesaian serta memperoleh gambaran berkaitan kestabilan. Aziz & Hubbard (1964) telah menyumbang terhadap perkara ini dengan memperoleh batasan ralat awal (a priori) bagi masalah Goursat linear dan tak linear. Pendekatan yang digunakan adalah berasaskan kaedah "majorants". Aziz dan Hubbard telah menunjukkan dengan menggunakan kriteria Dames (suatu kriteria untuk menentukan kestabilan) bahawa kaedah beza terhingga yang telah digunakan stabil tanpa syarat. Kriteria Dames memerlukan beberapa andaian dibuat untuk pekali-pekali dalam persamaan Goursat. Di samping itu, kaedah Dames bukanlah suatu kaedah yang boleh dianggap piawai untuk menguji kestabilan. Penggunaan kaedah yang lebih piawai – kaedah Fourier atau juga dikenali sebagai kaedah Von Neumann – akan dikaji dalam tesis ini. Kaedah Fourier tidak memerlukan andaian dibuat untuk pekali-pekali seperti untuk kaedah Dames. Harus diambil maklum bahawa aspek teoritis lain yang