



Departament de Matemàtica  
Aplicada IV

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

# ESTUDI I DISSENY DE GRANS XARXES D'INTERCONNEXIÓ: MODULARITAT I COMUNICACIÓ

Cristina Dalfó Simó

DIRECTORS DE LA TESI

Francesc de P. Comellas Padró  
Miquel Àngel Fiol Mora

PROGRAMA DE DOCTORAT  
Matemàtica Aplicada

Barcelona, desembre del 2007



Facultat de Matemàtiques  
i Estadística

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA



*A la memòria del meu germà, Xavier Dalfo Simó.*



# Agraïments

Aquest treball es presenta com a tesi doctoral després de cinc anys de feina al Departament de Matemàtica Aplicada 4. Vull agrair l'ajuda que he rebut de molta gent d'aquest departament. En primer lloc, el meu agraïment als meus directors de tesi, Francesc Comellas i Miquel Àngel Fiol. Sense ells aquesta tesi no hauria estat possible. A Francesc Comellas vull agrair-li que em fes confiança i em proposés per a la beca FPI que va fer possible iniciar aquesta aventura. A Miquel Àngel Fiol li agraeixo que hagi confiat prou en mi i m'hagi donat la força i les eines per fer aquesta tesi. Espero que, algun dia, podré passar fidelment el mestratge que he rebut a algú que comenci a treballar en recerca matemàtica. També vull donar les gràcies a Lali Barrière, amb qui he treballat intensament (caps de setmana inclosos), pel seu suport i la seva ajuda. Sento un agraïment especial cap a Oriol Serra i Anna Lladó, que, malgrat no estar involucrats en aquest treball, m'han ajudat en tots els entrebancs que comporta una tesi. També vull donar les gràcies a Josep Fàbrega per la seva tàcita ajuda. Voldria agrair l'ajuda de Pep Burillo, el meu tutor i la primera persona d'aquest departament amb la qual em vaig posar en contacte. Un agraïment també per a tota la gent que en un moment o un altre m'han donat ànims, especialment, a Anna de Mier i Sònia P. Mansilla. Una salutació especial als meus companys de despatx: Javier Barajas, Amanda Montejano, Jordi Moragas i Marc Cámara.

A més a més, voldria agrair a la meva família tot el seu suport: als meus pares, Isabel-Clara Simó i Xavier Dalfó, i a la meva germana, Diana Dalfó. Un agraïment a les meves nebodes, Júlia i Clara Dalfó, per la seva alegria i simpatia.

Per acabar, dono les gràcies a Carlo Lucchetti, perquè personalment m'ha donat tant, i a les meves amigues Neus Jaumot, Emma Sallent, Raquel Simó i Karen Smyth per la seva intel·ligent companyia.

Barcelona, 19 de desembre de 2007



# Índex

<b>Resum/Abstract</b>	<b>1</b>
<b>1 Introducció</b>	<b>3</b>
1.1 Definicions sobre grafs i digrafs i resultats coneguts . . . . .	3
1.2 Resum de continguts . . . . .	6
<b>2 Xarxes Manhattan multidimensionals</b>	<b>9</b>
2.1 Propietats estructurals . . . . .	9
2.1.1 Introducció . . . . .	9
2.1.2 Definició i estructura . . . . .	11
2.1.3 L'estructura dels digrafs línia . . . . .	14
2.1.4 El grup d'automorfismes acolorits . . . . .	17
2.1.5 Una definició alternativa . . . . .	19
2.1.6 Els paràmetres mètrics . . . . .	20
2.1.7 Cicles hamiltonians . . . . .	27
2.2 Esquemes de comunicació . . . . .	30
2.2.1 Enrutament . . . . .	30
2.2.2 Difusió . . . . .	32
2.3 Espectre de les xarxes Manhattan . . . . .	35
2.3.1 Introducció . . . . .	35
2.3.2 Valors i vectors propis . . . . .	37
<b>3 El producte Manhattan de digrafs</b>	<b>49</b>
3.1 Definició i propietats bàsiques . . . . .	49
3.2 Producte Manhattan vs. xarxes Manhattan . . . . .	51
3.3 Simetries . . . . .	53
3.4 Cicles de Hamilton . . . . .	54
<b>4 Xarxes jeràrquiques</b>	<b>57</b>
4.1 Models deterministes . . . . .	57
4.1.1 Introducció . . . . .	57
4.1.2 El graf jeràrquic $H_{n,k}$ . . . . .	59

4.1.3	Encaminament i diàmetre . . . . .	62
4.1.4	Distribucions de graus i de clusterings . . . . .	69
4.1.5	Conclusions . . . . .	76
4.2	El producte jeràrquic de grafs . . . . .	76
4.2.1	Definició i propietats bàsiques . . . . .	77
4.2.2	Propietats mètriques . . . . .	80
4.2.3	Propietats espectrals . . . . .	84
4.2.4	El producte jeràrquic generalitzat . . . . .	91
<b>5</b>	<b>Hiperarbres i hiperarbres <math>r</math>-àdics</b>	<b>95</b>
5.1	Hiperarbres . . . . .	95
5.1.1	Introducció . . . . .	95
5.1.2	Definició i propietats bàsiques . . . . .	96
5.1.3	Propietats espectrals . . . . .	100
5.2	Hiperarbres $r$ -àdics . . . . .	110
5.2.1	Introducció . . . . .	110
5.2.2	Algunes propietats espectrals . . . . .	111
5.2.3	Definició i propietats bàsiques de l'hiperarbre $r$ -àdic . . . . .	116
5.2.4	Propietats espectrals de l'hiperarbre $r$ -àdic . . . . .	122
<b>6</b>	<b>Xarxes Sierpinski</b>	<b>129</b>
6.1	Introducció . . . . .	129
6.2	Grafs Sierpinski . . . . .	132
6.2.1	Sierpinski Gasket . . . . .	133
6.2.2	Sierpinski Carpet . . . . .	135
6.2.3	Sierpinski Tetra . . . . .	136
6.3	Grafs Sierpinski petit món . . . . .	138
6.3.1	Sierpinski Gasket petit món . . . . .	138
6.3.2	Sierpinski Carpet petit món . . . . .	140
6.3.3	Sierpinski Tetra petit món . . . . .	142
6.4	Grafs Sierpinski respecte a grafs Sierpinski petit món . . . . .	144
6.5	Conclusions . . . . .	146
<b>7</b>	<b>Conclusions/Conclusions</b>	<b>147</b>
7.1	Conclusions . . . . .	147
7.1.1	Xarxes Manhattan multidimensionals . . . . .	147
7.1.2	Esquemes de comunicació de les xarxes Manhattan . . . . .	148
7.1.3	Espectre de les xarxes Manhattan . . . . .	148
7.1.4	El producte Manhattan de digrafs . . . . .	148
7.1.5	Xarxes jeràrquiques deterministes . . . . .	149
7.1.6	El producte jeràrquic de grafs . . . . .	149



---

7.1.7	Hiperarbres binaris . . . . .	149
7.1.8	Hiperarbres $r$ -àdics . . . . .	150
7.1.9	Xarxes Sierpinski . . . . .	150
7.2	Conclusions (English) . . . . .	151
7.2.1	Multidimensional Manhattan street networks . . . . .	151
7.2.2	Comunication protocols of Manhattan street networks . . . . .	152
7.2.3	The spectra of Manhattan street networks . . . . .	152
7.2.4	The Manhattan product of digraphs . . . . .	152
7.2.5	Deterministic hierarchical networks . . . . .	153
7.2.6	The hierarchical product of graphs . . . . .	153
7.2.7	Binary hypertrees . . . . .	153
7.2.8	$r$ -adic hypertrees . . . . .	154
7.2.9	Sierpinski graphs . . . . .	154
	<b>Índex de figures</b>	<b>159</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>161</b>



# Resum/Abstract

## Resum

Normalment les grans xarxes d'interconnexió o de comunicacions estan dissenyades utilitzant tècniques de la teoria de grafs. Aquest treball presenta algunes contribucions a aquest tema. Concretament, presentem dues noves operacions: el “producte jeràrquic” de grafs i el “producte Manhattan” de digrafs. El primer és una generalització del producte cartesià de grafs i ens permet construir algunes famílies amb un alt grau de jerarquia, com l'*arbre binomial*, que és una estructura de dades molt utilitzada en algorísmica. El segon dóna lloc a les conegudes *Manhattan street networks*, les quals han estat extensament estudiades i utilitzades per modelitzar alguns tipus de xarxes òptiques. En el nostre treball, definim formalment i analitzem el cas multidimensional d'aquestes xarxes. Estudiem algunes propietats dels grafs o digrafs obtinguts mitjançant les dues operacions esmentades, especialment: els paràmetres estructurals (les propietats de l'operació, els subdigrafs induïts, la distribució de graus i l'estructura de digraf línia), els paràmetres mètrics (el diàmetre, el radi i la distància mitjana), la simetria (els grups d'automorfismes i els digrafs de Cayley), l'estructura de cicles (els cicles hamiltonians i la descomposició en cicles hamiltonians arc-disjunts) i les propietats espectrals (els valors i vectors propis). En el darrer cas, hem trobat, per exemple, que la família dels arbres binomials tenen tots els seus valors propis diferents i “omplen” tota la recta real. A més a més, mostrem la relació del seu conjunt de vectors propis amb els polinomis de Txebixev de segona espècie. També hem estudiat alguns protocols de comunicació, com els enrutaments locals i els algorismes de difusió. Finalment, presentem alguns models deterministes (com les *xarxes Sierpinski* i d'altres), els quals presenten algunes propietats pròpies de les xarxes complexes de la vida real (com, per exemple, Internet).

## Abstract (English)

Large interconnection or communication networks are usually designed and studied by using techniques from graph theory. This work presents some contributions

to this subject. With this aim, two new operations are proposed: the “hierarchical product” of graphs and the “Manhattan product” of digraphs. The former can be seen as a generalization of the Cartesian product of graphs and allows us to construct some interesting families with a high degree of hierarchy, such as the well-know *binomial tree*, which is a data structure very useful in the context of Algorithmic Theory. The latter yields, in particular, the known topologies of *Manhattan street networks*, which has been widely studied and used for modeling some classes of light-wave networks. In this thesis, a multidimensional approach is analyzed. Several properties of the graphs or digraphs obtained by both operations are dealt with, but special attention is paid to the study of their structural parameters (operation properties, induced subdigraphs, degree distribution and line digraph structure), metric parameters (diameter, radius and mean distance), symmetry (automorphism groups and Cayley digraphs), cycle structure (Hamilton cycles and arc-disjoint Hamiltonian decomposition) and spectral properties (eigenvalues and eigenvectors). For instance, with respect to the last issue, it is shown that some families of hypertrees have spectra with all different eigenvalues “filling up” all the real line. Moreover, we show the relationship between its eigenvectors set and Chebyshev polynomials of the second kind. Also some protocols of communication, such as local routing and broadcasting algorithms, are addressed. Finally, some deterministic models (*Sierpinsky Networks* and others) having similar properties as some complex networks of the real-life world, such as the Internet, are presented.

# Capítol 1

## Introducció

Un graf dirigit (o digraf) és una estructura combinatòria que permet representar qualsevol sistema discret amb una relació binària. Aquesta propietat tan general explica que la teoria de grafs tingui moltes aplicacions en camps molt diferents i es relacioni amb altres branques de la matemàtica (especialment, amb la teoria de matrius). Una d'aquestes aplicacions és el disseny de xarxes d'interconnexió i de comunicacions, amb el qual es tracta de construir topologies per a aquestes xarxes que resultin òptimes donades unes certes condicions. Per modelitzar aquestes topologies utilitzem un digraf o un graf (segons que les connexions siguin unidireccionals o bidireccionals, respectivament). Contribuir a aquest estudi, des d'un punt de vista matemàtic, ha estat l'objectiu principal d'aquesta tesi.

### 1.1 Definicions sobre grafs i digrafs i resultats coneguts

Modelitzem xarxes utilitzant grafs o digrafs. Com que un graf es pot veure com un cas particular de digraf, donem les següents definicions bàsiques per a digrafs. Un graf dirigit o *digraf*  $G = (V, A)$  consisteix en un conjunt de *vèrtexs*  $V$  de cardinalitat  $|G| = |V|$  (ordre de  $G$ ), juntament amb un conjunt d'*arcs*  $A$  de cardinalitat  $||G|| = |A|$  (mida de  $G$ ), els quals poden ser entesos com a parells ordenats de vèrtexs diferents,  $A \subset V \times V = \{(u, v) : u, v \in V\}$ . Normalment representem un arc  $(u, v)$  com una fletxa amb un *vèrtex inicial*  $u$  i un *vèrtex final*  $v$ , és a dir,  $u \rightarrow v$ . Aleshores, es diu que  $u$  és *adjacent cap a*  $v$  o que  $v$  és *adjacent des de*  $u$ . Com dèiem, un graf es pot veure com un digraf simètric, en el qual l'arc  $u \rightarrow v$  implica l'existència de l'arc  $v \rightarrow u$ , que dona lloc a l'aresta (o parell no ordenat de vèrtexs)  $\{u, v\}$ . El *veïnatge de sortida*  $\Gamma^+(u)$  (respectivament, *veïnatge d'entrada*  $\Gamma^-(u)$ ) d'un vèrtex  $u$  és el conjunt de vèrtexs adjacents des de (respectivament, cap a)  $u$ . El *grau de sortida* d'un vèrtex  $u$  és  $\delta^+(u) = |\Gamma^+(u)|$

i el seu grau d'entrada és  $\delta^-(u) = |\Gamma^-(u)|$ . Equivalentment,  $\delta^+(u)$  i  $\delta^-(u)$  són els nombres d'arcs amb vèrtex inicial i final  $u$ , respectivament. Aleshores,  $G$  és  $\delta$ -regular quan  $\delta^-(u) = \delta^+(u) = \delta$  per a tot vèrtex  $u \in V$ .

El dígraf complet simètric és el dígraf en el qual cada vèrtex és adjacent a tots els altres. S'anomena simètric perquè per a cada arc  $(u, v)$  hi ha l'arc  $(v, u)$ .

Donat un dígraf  $G = (V, A)$ , el seu dígraf *convers*  $\overline{G} = (V, \overline{A})$  s'obté a partir de  $G$ , canviant totes les orientacions dels arcs de  $A$ , és a dir,  $(u, v) \in \overline{A}$  si i només si  $(v, u) \in A$ .

Donat un subdígraf  $G' = (V', A') \subset G$ , denotem per  $|G'| = |V'|$  i  $\|G'\| = |A'|$  el seu ordre i la seva mida, respectivament. Si  $G'$  té el mateix nombre de vèrtexs que  $G$ ,  $|V'| = |V|$ , aleshores  $G'$  és un subdígraf *generator*.

Un *camí* (dirigit)  $\mathbf{p}$  és un subdígraf de la forma  $u_0 \rightarrow u_1 \rightarrow u_2 \rightarrow \dots \rightarrow u_\ell$ , amb vèrtex *inicial*  $u_0$ , vèrtex *final*  $u_\ell$  i vèrtexs *interiors*  $u_1, u_2, \dots, u_{\ell-1}$ . La *longitud* de  $\mathbf{p}$  es defineix com el nombre d'arcs:  $\|\mathbf{p}\| = \ell$ . Si  $\mathbf{p}$  té el mínim nombre d'arcs, la seva longitud és la *distància*  $\text{dist}(u_0, u_\ell)$  del vèrtex inicial  $u_0$  al vèrtex final  $u_\ell$ .

Un dígraf és *fortament connex* quan, per a cada parell de vèrtexs  $u, v$ , hi ha un camí dirigit de  $u$  a  $v$ . Observem que  $G$  és fortament connex si i només si el seu dígraf convers  $\overline{G}$  ho és.

L'*excentricitat* d'un vèrtex  $u$  d'un dígraf  $G = (V, A)$  és la màxima distància des del vèrtex  $u$  fins a tots els altres vèrtexs  $v \in V$ , és a dir,

$$\text{exc}(u) = \max\{\text{dist}(u, v) \mid v \in V\}.$$

Aleshores, el *diàmetre*, denotat per  $D = D(G)$ , és la màxima excentricitat de tots els vèrtexs, i el *radi*, denotat per  $r = r(G)$ , la mínima. Si  $G$  és fortament connex, aleshores  $D(G) = D(\overline{G})$  i  $r(G) = r(\overline{G})$ . La *distància mitjana* és la mitjana de les distàncies entre tots els vèrtexs del dígraf  $G$ , és a dir,

$$d = \frac{1}{|V|^2} \sum_{u, v \in V} \text{dist}(u, v),$$

encara que alguns autors en el càlcul anterior no consideren les distàncies nul·les d'un vèrtex a ell mateix i defineixen la distància mitjana com:

$$d = \frac{1}{|V|(|V|-1)} \sum_{u, v \in V} \text{dist}(u, v).$$

Un *cicle* és un camí en el qual el vèrtex inicial i final coincideixen:  $u_0 = u_\ell$ . Un cicle en el qual altres vèrtexs coincideixen s'anomena *circuit*. Un subdígraf és *acíclic* quan no conté cap cicle. A més, si el graf subjacent (obtingut traient totes les direccions dels arcs) també és acíclic, aleshores el subdígraf s'anomena *arbre*.

Un *graf orientat*  $G$  és un dígraf sense "dígons", és a dir, la presència d'un arc  $(u, v)$  exclou l'existència de l'arc  $(v, u)$ . En aquest cas,  $G$  també s'anomena *dígraf*

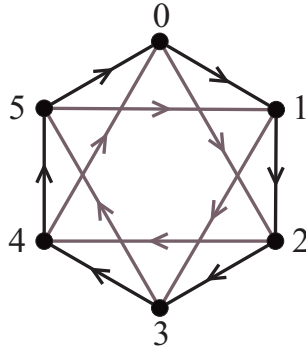


Figura 1.1: El digraf de Cayley  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_6, \{1, 2\})$ .

*antisimètric*. En particular, una *orientació forta* d'un graf és una orientació que dóna lloc a un digraf fortament connex.

Un graf  $G$  amb un conjunt de vèrtexs  $V$  i diàmetre  $D$  és *antipodal* quan, per a cada vèrtex  $u$ , existeix un vèrtex  $u'$  a distància  $\text{dist}(u, u') = D$  (el seu vèrtex *antipodal*) tal que

$$\text{dist}(u, v) + \text{dist}(v, u') = D \quad \text{per a tot } v \in V. \quad (1.1)$$

Aleshores, els conjunts de vèrtexs a distància  $0, 1, 2, \dots, D$  de  $u$  (respectivament, els conjunts de vèrtexs a distància  $D, D-1, D-2, \dots, 0$  de  $u'$ ) constitueixen una partició de  $V$ . Dos exemples ben coneguts de grafs antipodals són els cicles amb un nombre parell de vèrtexs i l'hipercub (o  $n$ -cub).

Una partició  $\pi = (C_1, C_2, \dots, C_k)$  d'un conjunt de vèrtexs  $V$  és *regular* si, per a tot  $i$  i  $j$ , el nombre de veïns (d'entrada o de sortida) que un vèrtex de  $C_i$  té en  $C_j$  només depèn de  $i$  i  $j$  (vegeu Godsil [58]).

Donat un grup  $\Gamma$  amb un conjunt generador (finit)  $\Delta$ , el *digraf de Cayley*  $\text{Cay}(\Gamma, \Delta)$  té vèrtexs que representen els elements de  $\Gamma$  i arcs de la forma  $(g, h\delta)$ , on  $g, h \in \Gamma$  i  $\delta \in \Delta$ . El digraf de Cayley  $\text{Cay}(\Gamma, \Delta)$  és un digraf regular fortament connex i vèrtex-transitiu. Com a exemple, la figura 1.1 mostra el digraf de Cayley del grup cíclic  $\Gamma = \mathbb{Z}_6$  amb el conjunt de generadors  $\Delta = \{1, 2\}$ .

La coneguda caracterització de Sabidussi [83] afirma que un digraf és de Cayley (per a algun parell  $\Gamma, \Delta$ ) si i només si el seu grup d'automorfismes conté un subgrup regular (és a dir, un subgrup en el qual per a cada parell de vèrtexs  $u, v$  existeix exactament un automorfisme que aplica  $u$  a  $v$ ).

El digraf *circulant* d'ordre  $n$  i grau  $d$  amb passos  $A = \{a_1, a_2, \dots, a_d\} \subset \mathbb{Z}_n$ ,  $G(n, A)$ , és el digraf amb conjunt de vèrtexs  $\mathbb{Z}_n$  i adjacències donades pels passos, de manera que  $i$  és adjacent a  $i + a_j$  per a tot  $i \in \mathbb{Z}_n$  i  $a_j \in A$ , és a dir,  $G(n, A)$  és el digraf de Cayley sobre  $\mathbb{Z}_n$  amb subconjunt generador  $A$ .

Un *homomorfisme*  $\varphi$  d'un dígraf  $G = (V, A)$  a un dígraf  $H = (V', A')$  és una aplicació de  $V$  a  $V'$  que conserva les adjacències, és a dir, si  $(u, v)$  és un arc de  $G$ , aleshores  $(\varphi(u), \varphi(v))$  és un arc de  $H$ . A més, si els dos dígrafs són arc-acolorits (tots els arcs amb el mateix vèrtex inicial o final tenen colors diferents) i  $\varphi$  conserva els colors, diem que  $\varphi$  és un *homomorfisme acolorit* o simplement que és un homomorfisme que conserva el color. Un *automorfisme (acolorit)* d'un dígraf  $G$  és simplement un homomorfisme (acolorit) de  $G$  a ell mateix (en aquest cas, l'aplicació correspon a una permutació dels vèrtexs de  $G$ ). El conjunt d'automorfismes (acolorits) de  $G$  forma un grup anomenat *grup d'automorfismes (acolorits)* del dígraf.

Altres definicions estàndard i alguns resultats bàsics sobre grafs i dígrafs es poden trobar en els llibres de Bang-Jensen i Gutin [6], Chartrand i Lesniak [23] i Matoušek i Nešetřil [69].

## 1.2 Resum de continguts

Normalment les grans xarxes d'interconnexió o de comunicacions estan dissenyades utilitzant tècniques de la teoria de grafs, que, en el cas d'enllaços unidireccionals, corresponen a grafs dirigits o dígrafs. Aquest treball presenta algunes contribucions a aquest tema. Concretament, presentem dues noves operacions: el “producte Manhattan” de dígrafs i el “producte jeràrquic” de grafs. Aquestes dues operacions marquen els dos grans blocs d'aquesta tesi.

El producte Manhattan de dígrafs dona lloc, en particular, a les conegudes *Manhattan street networks*, que denotem genèricament per  $M_n$ , les quals han estat extensament estudiades i utilitzades per modelitzar algunes classes de xarxes òptiques. En aquest treball, les definim formalment i analitzem el cas multidimensional. Concretament, demostrem que  $M_n$  és un dígraf de Cayley, que, en el cas bidimensional, correspon a un subgrup normal del grup cristal·logràfic pla  $pgg$ . Aquest resultat indueix una nova definició de  $M_n$ , la qual és útil per dissenyar algorismes d'enrutament local (mitjançant camins geodèsics) i per estudiar algunes propietats mètriques, com el diàmetre i la distància mitjana. A més a més, demostrem que les xarxes Manhattan  $n$ -dimensionals són hamiltonianes i, en el cas bidimensional, donem condicions suficients per descompondre-les en dos cicles hamiltonians arc-disjunts.

El coneixement de l'espectre d'un (di)graf és important per trobar alguns paràmetres rellevants, els quals en general són molt difícils de trobar per altres mètodes. En particular, l'espectre de la matriu d'adjacència d'un graf conté informació sobre les seves propietats d'expansió, el nombre cromàtic i d'independència, la connectivitat i el diàmetre, entre altres paràmetres. Nosaltres hem calculat l'espectre de les xarxes Manhattan a partir de les seves propietats es-



structurals i mostrem que aquest espectre conté el dels hipercubs. En l'estudi d'aquestes xarxes, caracteritzem el seu espectre per al cas bidimensional, amb el càlcul dels seus valors i vectors propis. En particular, en aquest cas mostrem que l'estructura de digraf línia de la xarxa Manhattan imposa la presència del valor propi 0 amb una elevada multiplicitat. Per al cas  $n$ -dimensional, reduïm dràsticament la complexitat dels càlculs per trobar l'espectre.

Acabem el tema de les xarxes Manhattan amb un algorisme de difusió òptim per al cas bidimensional.

Algunes xarxes de la vida real presenten una estructura modular o jeràrquica. Aquest és el cas, per exemple, de xarxes amb nodes amb un grau elevat, coneguts com a *hubs*. En aquest context, proposem una família determinista de xarxes jeràrquiques. D'aquest model destaca la modularitat i l'autosimilitud, característiques que permeten la determinació del diàmetre i la distribució de graus i de clustering.

El producte jeràrquic de grafs és una generalització del producte cartesià i ens permet construir algunes famílies amb un alt grau de jerarquia, com l'*arbre binomial*, que és una estructura de dades molt utilitzada en algorísmica. El producte jeràrquic hereta algunes de les ben conegudes propietats del producte cartesià, com un diàmetre petit i algorismes d'enrutament simples. De fet, els grafs obtinguts en fer el producte jeràrquic són subgrafs dels obtinguts en fer el producte cartesià. El nom que hem escollit per a aquesta nova operació està inspirat en la forta jerarquia dels vèrtexs del graf resultant. En el nostre estudi, definim formalment el producte jeràrquic i trobem algunes de les seves propietats principals, com ara la jerarquia dels vèrtexs i els principals paràmetres mètrics: l'excentricitat dels vèrtexs, el radi, el diàmetre i la distància mitjana. A més a més, mostrem que els esquemes de comunicació vàlids per al producte cartesià també es poden utilitzar en el producte jeràrquic. En l'estudi d'aquestes construccions, un tema que té una importància especial és el càlcul de l'espectre pels motius ja esmentats. En particular, demostrarem un resultat sobre el graf obtingut amb el producte jeràrquic de dos grafs qualssevol i de la potència jeràrquica (com a producte jeràrquic repetit) d'un graf donat. Concretament, estudiem l'espectre de l'hiperarbre (o arbre binomial)  $T_m$ , que és el producte jeràrquic de diverses còpies del graf complet de dos vèrtexs. L'hiperarbre resulta ser un bon exemple de graf amb tots els seus valors propis diferents. A més a més, mostrem la relació del seu conjunt de vectors propis amb els polinomis de Txebixev de segona espècie. Per acabar aquest tema, definim el producte jeràrquic generalitzat i estudiem algunes de les seves propietats bàsiques.

Finalment, presentem alguns models deterministes, com les *xarxes Sierpinski*, els quals tenen algunes propietats típiques de les xarxes complexes reals, com és el cas d'Internet. Aquestes propietats són: l'efecte petit món (diàmetre petit, de l'ordre del logaritme del nombre de vèrtexs, i clustering prou gran), l'efecte scale-

free (distribució potencial de graus) i la modularitat jeràrquica o autosimilitud. Per a la família dels grafs Sierpinski, hem calculat una mesura de la fractalitat, la dimensió *box counting*. A més a més, hem construït uns grafs Sierpinski petit món, els quals conservant la dimensió *box counting* dels grafs Sierpinski, presenten l'efecte petit món, com el seu nom indica.

# Capítol 2

## Xarxes Manhattan multidimensionals

Aquest capítol està dividit en tres seccions. A la primera secció, definim formalment la xarxa Manhattan  $n$ -dimensional  $M_n$ , un cas especial de dígraf  $n$ -regular, i n'estudiem les propietats estructurals. Concretament, demostrem que  $M_n$  és un dígraf de Cayley que, en el cas bidimensional, correspon a un subgrup del grup cristal·logràfic pla  $pgg$ . Aquests resultats indueixen una nova presentació de  $M_n$ , la qual és útil per dissenyar algorismes d'enrutament local (camins geodèsics) i per estudiar algunes propietats mètriques, com el diàmetre i la distància mitjana. A més a més, demostrem que les xarxes Manhattan  $n$ -dimensionals són hamiltonianes i, en el cas bidimensional, donem condicions suficients per descompondre-les en dos cicles hamiltonians arc-disjunts.

A la segona secció, trobem un algorisme de difusió òptim per a les xarxes Manhattan bidimensionals.

Finalment, a la tercera secció, calculem l'espectre d'una xarxa Manhattan a partir de les propietats estructurals, el qual conté l'espectre dels hipercubs. En particular, en el cas bidimensional mostrem que l'estructura de dígraf línia de la xarxa Manhattan imposa la presència del valor propi zero amb una elevada multiplicitat.

Els nostres articles relacionats amb aquest capítol són [30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37].

### 2.1 Propietats estructurals

#### 2.1.1 Introducció

L'estudi d'un tipus de xarxes dirigides toroïdals, conegudes en la literatura com a *Manhattan street networks*, ha rebut força atenció des que van ser introduïdes

independentment (en contextos diferents) per Morillo *et al.* [73] i Maxemchuk [70] com una estructura en forma de malla regular unidireccional localment similar a la topologia dels carrers i les avingudes de Manhattan (o de l'Eixample de Barcelona), com es mostra en la figura 2.1. Més concretament, donats dos enters parells  $N_i$ ,  $i = 1, 2$ , la xarxa Manhattan bidimensional  $M_2 = M(N_1, N_2)$  és un digraf 2-regular amb vèrtexs  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ ,  $u_i \in \mathbb{Z}_{N_i}$ , de manera que cada vèrtex  $\mathbf{u}$  té dos arcs de sortida: un d'horitzontal  $(u_1 + (-1)^{u_2}, u_2)$  i l'altre vertical  $(u_1, u_2 + (-1)^{u_1})$ .

No s'ha de confondre la xarxa coneguda amb el nom de *Manhattan street network* (o xarxes Manhattan en aquest treball) amb la construcció anomenada també *xarxa Manhattan*, que consisteix a, donat un conjunt de punts del pla, donar un conjunt de segments paral·lels als eixos de coordenades, la unió dels quals conté un camí  $x$ - i  $y$ -monòton per a cada parell de punts (vegeu, per exemple, l'article de Benkert *et al.* [18]).

Tornant a les nostres xarxes Manhattan, Morillo *et al.* [73] han relacionat aquestes xarxes amb tesellacions del pla, cosa que facilita l'estudi d'algunes propietats mètriques. La major part de la recerca feta sobre xarxes Manhattan s'ha dedicat al cas bidimensional, amb el càlcul de la distància mitjana fet per Khasnabish [65] i Chung i Agrawal [27] i la generació d'esquemes d'enrutament feta per Maxemchuk [70]. La distància mitjana de  $M(N_1, N_2)$ , quan  $N_1, N_2 = 0 \pmod{4}$ , és

$$d = \frac{N_1 + N_2}{4} + 1 - \frac{4}{N_1 N_2}. \quad (2.1)$$

Aquests resultats normalment han estat inspirats per conjectures basades en simulacions per ordinador. A més a més, l'estudi dels arbres generadors (fet per Chung i Agrawal [27]) en la xarxa Manhattan  $M(N_1, N_2)$  ha permès el càlcul del seu diàmetre

$$D = \begin{cases} \frac{N_1}{2} + \frac{N_2}{2} + 1, & \text{si } N_1 \equiv N_2 \equiv 0 \pmod{4}, \\ \frac{N_1}{2} + \frac{N_2}{2}, & \text{altrament,} \end{cases} \quad (2.2)$$

i el disseny d'algorismes de difusió multiport. Més recentment, Varvarigos [94] ha calculat de nou la distància mitjana entre els nodes d'una xarxa Manhattan, ha donat un algorisme d'enrutament de camins geodèsics i ha descompost la xarxa Manhattan bidimensional en dos cicles hamiltonians arc-disjunts quan  $N_1 = N_2 = N$ .

La generalització al cas multidimensional de les xarxes Manhattan ha estat estudiada per Banerjee *et al.* [4, 5], amb el càlcul de la distància mitjana d'una xarxa Manhattan tridimensional  $M(N_1, N_2, N_3)$ , la qual en el cas  $N_i \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $i = 1, 2, 3$ , és

$$d = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{4} + 1 - \frac{4}{N_1 N_2 N_3}, \quad (2.3)$$

resultat que s'ha de comparar amb (2.1). Banerjee *et al.* també donen una conjectura per a dimensions més grans, malgrat que ni en el cas tridimensional

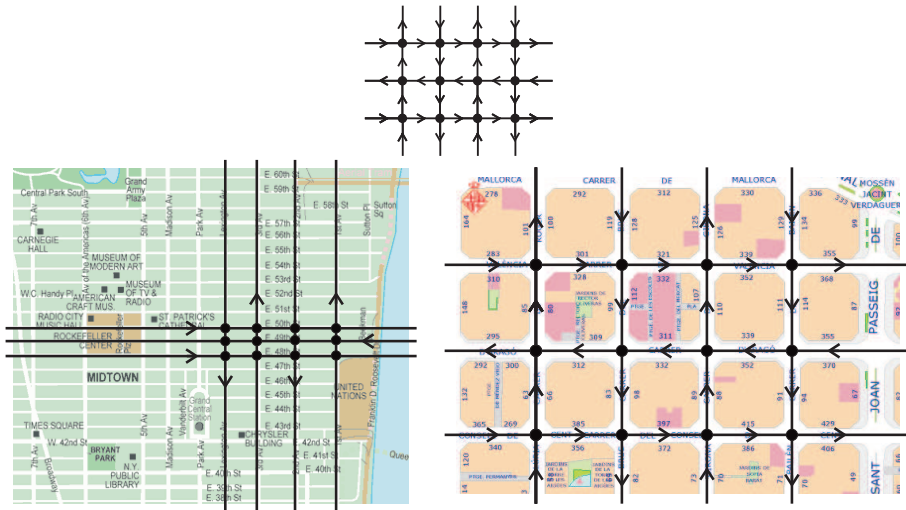


Figura 2.1: L'estructura local d'una xarxa Manhattan i dos exemples de la vida real: els carrers de Manhattan i els de l'Eixample de Barcelona.

ni en el multidimensional no aporten cap definició algebraica, només una idea de com haurien de ser les adjacències.

Finalment, Chung i Agrawal [28] han estudiat el diàmetre i han donat esquemes d'enrutament per a construccions basades en una generalització de les xarxes Manhattan bidimensionals, malgrat que la xarxa resultant no és estrictament una xarxa Manhattan tridimensional.

En aquest capítol donem una definició formal d'una xarxa Manhattan multidimensional  $M_n$ , juntament amb les seves propietats principals i alguns càlculs analítics dels seus paràmetres relacionats amb la distància, com el diàmetre. A més a més, demostrem que  $M_n$  és un dígraf de Cayley. Aquest resultat és útil per obtenir una nova definició de  $M_n$ , la qual es pot aplicar per demostrar alguns resultats, com el disseny d'un algorisme d'enrutament local de camins geodèsics. També presentem una demostració que les xarxes Manhattan són hamiltonianes. Per acabar la primera part del capítol, donem condicions suficients per descompondre una xarxa Manhattan bidimensional en dos cicles hamiltonians arc-disjunts.

### 2.1.2 Definició i estructura

La xarxa *Manhattan* (*Street*) *Network*  $M(N_1, N_2)$  es defineix com un dígraf 2-regular de la manera següent: cada vèrtex està representat per dos enters  $(u_1, u_2) = \mathbf{u}$ , amb  $0 \leq u_i \leq N_i - 1$ , on  $N_i$  són enters parells, per a  $i = 1, 2$ . Cada vèrtex té dos arcs de sortida: un d'horitzontal  $(u_1 \pm 1, u_2)$  i un de vertical

$(u_1, u_2 \pm 1)$ , on el signe depèn de la paritat de l'altra component i l'aritmètica ha de ser sempre entesa mòdul  $N_i$ . Concretament, un arc horitzontal apunta cap a l'*est* (respectivament, *oest*) quan està en una fila *parell* (respectivament, *senar*). De manera similar, un arc vertical apunta al *nord* (respectivament, *sud*) si està en una columna *parell* (respectivament, *senar*).

Localment, l'estructura és la de la figura 2.1 i correspon al patró estàndard de les direccions permeses al trànsit en alguns barris de les ciutats actuals, com Manhattan o Barcelona, amb un sistema de carrers rectes i ortogonals. En la majoria d'articles (com el de Maxemchuck [70], el de Chung i Agrawal [27] i el de Comellas i Dalfó [32]) es considera la versió toroïdal de  $M_2$ , mentre que en el treball de Morillo *et al.* [73] l'objectiu era construir una xarxa localment Manhattan amb el màxim nombre de vèrtexs per a un diàmetre donat.

Una definició formal de la versió toroïdal per al cas general  $n$ -dimensional és la següent:

**Definició 2.1.1.** *Donats  $n$  enters positius parells  $N_1, N_2, \dots, N_n$ , la xarxa Manhattan  $n$ -dimensional  $M_n = M(N_1, N_2, \dots, N_n)$  és un digraf amb un conjunt de vèrtexs  $V(M_n) = \mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2} \times \dots \times \mathbb{Z}_{N_n}$ . Cada vèrtex està representat per un  $n$ -vector  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ , amb  $0 \leq u_i \leq N_i - 1$ , per a  $i = 1, 2, \dots, n$ . El conjunt d'arcs  $A(M_n)$  està definit per les següents adjacències (aquí anomenades  $i$ -arcs, per a  $1 \leq i \leq n$ ):*

$$(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) \rightarrow (u_1, \dots, u_i + (-1)^{\sum_{j \neq i} u_j}, \dots, u_n). \quad (2.4)$$

Aleshores,  $M_n$  és un digraf  $n$ -regular amb  $N = \prod_{i=1}^n N_i$  vèrtexs.

En el cas que  $N_i = 2$ , per a  $1 \leq i \leq n$ , sempre tenim que  $(-1)^{\sum_{j \neq i} u_j} = 1$  i, aleshores, les adjacències són

$$(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) \rightarrow (u_1, \dots, u_i + 1, \dots, u_n) \quad (1 \leq i \leq n). \quad (2.5)$$

En aquest cas, la xarxa Manhattan  $n$ -dimensional és isomorfa al digraf simètric  $Q_n^*$ , on  $Q_n$  és l'hipercub de dimensió  $n$  o  $n$ -cub.

Algunes altres conseqüències de la definició de  $M_n$  es donen en el lema següent:

**Lema 2.1.2.** *La xarxa Manhattan  $n$ -dimensional  $M_n = M(N_1, N_2, \dots, N_n)$  satisfà les propietats següents:*

(a) *Donada qualsevol permutació  $\sigma$  dels nombres  $N_1, N_2, \dots, N_n$ , diguem per exemple  $P_1, P_2, \dots, P_n$ , les xarxes  $M_n$  i  $M_n^\sigma = M(P_1, P_2, \dots, P_n)$  són digrafs isomorfs.*

(b)  *$M_n$  és isomorf al seu convers  $\overline{M}_n$ .*

- (c) Per a qualssevol  $n - k$  enters fixats  $x_i \in \mathbb{Z}_{N_i}$ ,  $i = k + 1, k + 2, \dots, n$ , el subdigraf de  $M_n$  induït pels vèrtexs de la forma  $(u_1, u_2, \dots, u_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$  és o una xarxa Manhattan  $k$ -dimensional  $M_k = M(N_1, N_2, \dots, N_k)$  o el seu convers  $\overline{M}_k$ , segons que  $\alpha := \sum_{i=k+1}^n x_i$  sigui parell o senar, respectivament.
- (d)  $M_n$  és un digraf bipartit i  $2^n$ -partit.
- (e) Existeix un homomorfisme de  $M_n$  al digraf simètric de l'hipercub  $Q_n^*$ .

**Demostració.** El resultat de l'apartat (a) és clar ja que  $\sigma$  actua sobre les components dels vèrtexs de  $M_n$ . Per demostrar (b), cal observar que les adjacències del digraf convers  $\overline{M}_n$  són, per a  $1 \leq i \leq n$ ,

$$(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) \rightarrow (u_1, \dots, u_i - (-1)^{\sum_{j \neq i} u_j}, \dots, u_n). \quad (2.6)$$

Aleshores, es pot comprovar que l'aplicació  $\varphi : V(M_n) \rightarrow V(\overline{M}_n)$  definida per  $\varphi(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$  és l'isomorfisme demanat. El resultat de l'apartat (c) ve de les "adjacències converses" en (2.6) i del fet que  $(-1)^{\sum_{j=1, j \neq i}^k u_i + \alpha} = \pm (-1)^{\sum_{j=1, j \neq i}^k u_i}$  depenent de la paritat de  $\alpha$ . L'apartat (d) es verifica a partir del fet que  $M_n$  és un digraf  $2^n$ -partit amb conjunts independents  $V_{\mathbf{b}}$ , on  $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$  denota una cadena  $n$ -binària. Un vèrtex  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  pertany a  $V_{\mathbf{b}}$  quan les paritats de  $u_i$  i  $b_i$  coincideixen per a tot  $1 \leq i \leq n$ . En particular,  $M_n$  és bipartit amb conjunts independents de vèrtexs  $V_0$  i  $V_1$  constituïts pels vèrtexs, la cadena binària dels quals representa un nombre parell o senar, respectivament. Finalment, l'homomorfisme de l'apartat (e) és simplement

$$(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) \mapsto (\pi(u_1), \dots, \pi(u_i), \dots, \pi(u_n)) \quad (1 \leq i \leq n), \quad (2.7)$$

on la funció paritat  $\pi$  pren els valors en  $\{0, 1\}$ .  $\square$

Respecte a la propietat (d), cal tenir en compte que, en el treball de Morillo *et al.* [73] l'estructura local d'una xarxa Manhattan bidimensional va ser introduïda com un tipus de digraf 4-partit de la manera següent: sigui  $G = (V, A)$  un digraf amb ordre  $N = |V|$  un múltiple de 4,  $V = V_0 \cup V_1 \cup V_2 \cup V_3$ , on

$$V_j = \{i : 0 \leq i \leq N - 1, i \equiv j \pmod{4}\} \quad (0 \leq j \leq 3), \quad (2.8)$$

de manera que cada vèrtex  $i$  és adjacent als vèrtexs  $i + a_j$ ,  $i + b_j \pmod{N}$ , per a alguns enters donats  $a_j \equiv 3$  i  $b_j \equiv 1 \pmod{4}$  tals que satisfan

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &\equiv 0 \pmod{N}, \\ b_0 + b_1 + b_2 + b_3 &\equiv 0 \pmod{N}, \\ a_0 + a_2 &\equiv b_0 + b_2 \pmod{N}, \end{aligned}$$

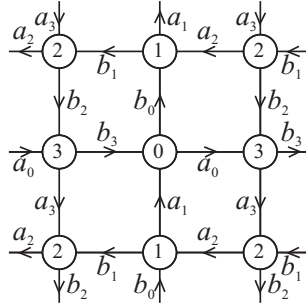


Figura 2.2: Una definició alternativa a l'estructura local d'una xarxa Manhattan bidimensional vista com un digraf 4-partit (tots els vèrtexs en  $V_j$  estan denotats per  $j$ ).

condicions que es poden expressar alternativament com a

$$a_0 + a_2 \equiv -a_1 - a_3 \equiv b_0 + b_2 \equiv -b_1 - b_3 \pmod{N}.$$

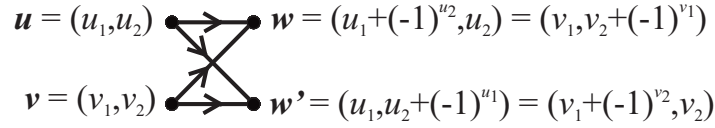
Vegeu la figura 2.2 per comprovar que aquestes condicions imposen una estructura local Manhattan.

### 2.1.3 L'estructura dels digrafs línia

En aquesta secció mostrem que la xarxa Manhattan bidimensional  $M_2$  té l'estructura d'un digraf línia. Pel que sabem, aquest fet prou rellevant no ha estat mai publicat, tot i que s'esmenta en la tesi doctoral de J. Villar [96]. Per tant, doncs,  $M_2$  es pot veure com el digraf línia d'un digraf  $M'_2$ , l'ordre del qual és la meitat de l'ordre de  $M_2$ , i, cosa que és més important, algunes propietats de  $M_2$  es poden derivar de les de  $M'_2$ .

Recordem que, donat un digraf  $G = (V, A)$  amb  $n$  vèrtexs i  $m$  arcs, el seu digraf línia  $LG = (V_L, A_L)$  té vèrtexs en lloc dels arcs de  $G$ . Per tant, identifiquem cada vèrtex  $ij \in V_L$  amb l'arc  $(i, j) \in A$ . Les seves adjacències estan naturalment induïdes per les arc-adjacències en  $G$ . Concretament, el vèrtex  $ij \in V_L$  és adjacent al vèrtex  $jk$ , ja que l'arc  $(i, j) \in A$  té el mateix vèrtex final que el vèrtex inicial de  $(j, k)$ . Aleshores, l'ordre de  $LG$  és igual a la mida  $m$  de  $G$  i, si  $G$  és  $\delta$ -regular, aleshores  $LG$  també ho és i té  $\delta n$  vèrtexs. A més a més, és prou conegut que si  $G$  és un digraf (diferent del cicle dirigit) i té diàmetre  $D$ , aleshores el seu digraf línia  $LG$  té diàmetre  $D + 1$  (vegeu Fiol *et al.* [54]). Respecte a la distància mitjana, si  $G$  té distància mitjana  $d$ , aleshores  $LG$  té, com a màxim, distància mitjana  $d + 1$ . Algunes altres propietats dels digrafs línia es poden trobar en els treballs de Fiol *et al.* [54] i de Comellas *et al.* [39]. Entre aquestes propietats, destacaríem que l'espectre del digraf línia  $LG$  té els mateixos valors propis (diferents de zero) que l'espectre de  $G$ , incloses les multiplicitats (algebraiques). De



Figura 2.3: Vèrtexs amb el mateix veïnatge en  $M_2$ .

fet, els conjunts de valors propis només difereixen en el nombre de zeros, ja que els seus polinomis característics corresponents,  $p_{LG}$  i  $p_G$ , satisfan (vegeu Balbuena *et al.* [3] i Montserrat [72]):

$$p_{LG}(x) = x^{m-n} p_G(x).$$

El següent resultat mostra que l'estructura de digraf línia és inherent al cas bidimensional:

**Lema 2.1.3.** *Per a tot  $N_1, N_2$ , la xarxa Manhattan 2-dimensional  $M_2$  és un digraf línia.*

**Demostració.** Només cal comprovar la *condició d'Heuchenne* [61], la qual diu que un digraf és un digraf línia si i només si no té arcs múltiples i els conjunts de veïns de sortida (o d'entrada) de cada dos dels seus vèrtexs són idèntics o disjunts. Suposem, doncs, que dos vèrtexs diferents  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  i  $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$  tenen un veí de sortida comú  $\mathbf{w}$ . Aleshores, els arcs  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{w}$  i  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{w}$  han de ser de tipus diferents, és a dir, un ha de ser un 1-arc i l'altre un 2-arc. Si tots dos fossin, per exemple, 1-arcs, tindriem

$$\mathbf{w} = (u_1 + (-1)^{u_2}, u_2) = (v_1 + (-1)^{v_2}, v_2),$$

cosa que portaria a  $u_2 = v_2$  i  $u_1 = v_1$  i, per tant,  $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ , en contra de la hipòtesi. Arribem a la mateixa contradicció si suposem que les dues adjacències són 2-arcs. Suposem, doncs, sense perdre generalitat, que  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{w}$  és un 1-arc i  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{w}$  és un 2-arc. Aleshores,

$$\mathbf{w} = (u_1 + (-1)^{u_2}, u_2) = (v_1, v_2 + (-1)^{v_1}),$$

d'on

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 - (-1)^{u_2} = v_1 - (-1)^{v_2 + (-1)^{v_1}} = v_1 + (-1)^{v_2}, \\ v_2 &= u_2 - (-1)^{v_1} = u_2 - (-1)^{u_1 + (-1)^{u_2}} = u_2 + (-1)^{u_1}, \end{aligned}$$

cosa que implica l'existència d'un altre veí de sortida comú  $\mathbf{w}'$  de  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{v}$ , tal que  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{w}'$  és un 2-arc i  $\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{w}'$  és un 1-arc:

$$\mathbf{w}' = (u_1, u_2 + (-1)^{u_1}) = (v_1 + (-1)^{v_2}, v_2),$$

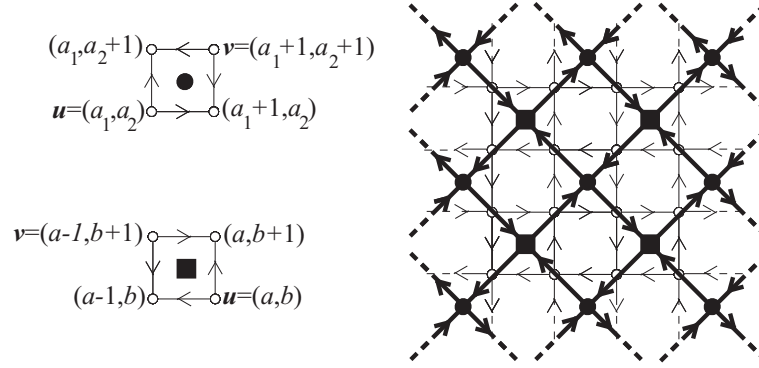


Figura 2.4: Una xarxa Manhattan (amb les arestes fines i els vèrtexs blancs), el digraf línia del qual prové (amb les arestes gruixudes i els vèrtexs negres) i dos detalls de la xarxa Manhattan amb les etiquetes dels vèrtexs indicades.

amb la qual cosa arribem al resultat esperat (vegeu la figura 2.3).  $\square$

Resumint, hem vist que dos vèrtexs diferents  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  tenen el mateix veïnatge de sortida si i només si són de la forma

$$\mathbf{u} = (a, b), \quad \mathbf{v} = (a + (-1)^b, b + (-1)^a),$$

per a alguns enters  $a \in \mathbb{Z}_{N_1}$  i  $b \in \mathbb{Z}_{N_2}$ . Aleshores, d'acord amb la paritat de  $a$  i  $b$  (igual “●” o diferent “■” a la figura 2.4), tenim les dues possibles situacions que es mostren a l'esquerra de la figura. Observem que el digraf  $M'_2$  d'on prové  $M_2$  (és a dir,  $M_2 = LM'_2$ ) també és bipartit, amb conjunts independents {“●”} i {“■”}. De fet, la xarxa infinita en l'estructura local de  $M'_2$  correspon al grup cristal·logràfic pla anomenat  $p4$  (vegeu Coxeter i Moser [42] i Shutov [86]).

En general, les xarxes Manhattan amb dimensió més gran que 2 no compleixen la propietat de ser digrafs línia. Per exemple, la xarxa tridimensional  $M(8, 6, 10)$  no compleix la condició d'Heuchenne ja que els veïnatges de sortida

$$\begin{aligned} \Gamma^+((1, 1, 5)) &= \{(2, 1, 5), (1, 2, 5), (1, 1, 6)\} \text{ i} \\ \Gamma^+((6, 1, 4)) &= \{(1, 1, 6), (2, 2, 6), (2, 1, 5)\} \end{aligned}$$

no són ni iguals ni disjunts.

Hi ha dues conseqüències directes del lema 2.1.3. La primera és que  $M_2$  és hamiltonià, ja que és el digraf línia d'un digraf 2-regular i, per tant, eulerià (vegeu, per exemple, Chartrand i Lesniak [23]). De fet, en la secció 2.1.7 mostrem que les xarxes Manhattan  $n$ -dimensionals també són hamiltonianes. La segona conseqüència és que, com hem dit, dels treballs de Balbuena *et al.* [3] i de Fiol i Mitjana [52], sabem que l'espectre de  $M_2(N_1, N_2)$  té el valor propi 0 amb multiplicitat (geomètrica) almenys  $\frac{N_1 N_2}{2}$ , cosa que veurem amb més detall en la segona part d'aquest capítol dedicada a l'espectre de les xarxes Manhattan.

### 2.1.4 El grup d'automorfismes acolorits

Aquí investiguem les simetries de les xarxes Manhattan.

**Teorema 2.1.4.** *La xarxa Manhattan  $n$ -dimensional  $M_n$  és el graf de Cayley del grup següent (amb el conjunt de generadors indicat):*

$$\Gamma = \langle a_1, a_2, \dots, a_n \mid a_i^{N_i} = (a_i a_j)^2 = (a_i a_j^{-1})^2 = 1, i, j = 1, \dots, n \rangle. \quad (2.9)$$

**Demostració.** Demostrem que les aplicacions  $\phi_j$ , per a  $1 \leq j \leq n$ , definides per

$$\phi_j(u_1, \dots, u_j, \dots, u_n) = (-u_1, \dots, -u_{j-1}, u_j + 1, -u_{j+1}, \dots, -u_n) \quad (2.10)$$

són totes isomorfismes de  $M_n$  de  $i$ -arcs a  $i$ -arcs. Amb aquest objectiu, denotem com a  $\gamma_i^+ \mathbf{u}$  el vèrtex adjacent al vèrtex  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_n)$  a través de l'arc  $i$ . Aleshores, suposem primer que  $j \neq i$ , diguem  $j < i$ ,

$$\begin{aligned} \phi_j(\gamma_i^+ \mathbf{u}) &= \phi_j(u_1, \dots, u_j, \dots, u_i + (-1)^{\sum_{k \neq i} u_k}, \dots, u_n) \\ &= (-u_1, \dots, u_j + 1, \dots, -u_i + (-1)^{1 + \sum_{k \neq i} u_k}, \dots, -u_n) \\ &= \gamma_i^+(-u_1, \dots, u_j + 1, \dots, -u_i, \dots, -u_n) \\ &= \gamma_i^+ \phi_j(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

D'altra banda, si  $j = i$ , tenim:

$$\begin{aligned} \phi_i(\gamma_i^+ \mathbf{u}) &= \phi_i(u_1, \dots, u_i + (-1)^{\sum_{k \neq i} u_k}, \dots, u_n) \\ &= (-u_1, \dots, u_i + 1 + (-1)^{\sum_{k \neq i} u_k}, \dots, -u_n) \\ &= \gamma_i^+(-u_1, \dots, u_i + 1, \dots, -u_n) \\ &= \gamma_i^+ \phi_i(\mathbf{u}). \end{aligned}$$

Aleshores, les aplicacions  $\phi_j$ , per a  $1 \leq j \leq n$ , són automorfismes acolorits de  $M_n$ . Ara demostrem que el grup de permutacions  $\langle \phi_i \mid 1 \leq i \leq n \rangle$  actua transitivament sobre el conjunt  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$  (i, per tant, també sobre el conjunt de vèrtexs de  $M_n = M(N_1, N_2, \dots, N_n)$ ). Per tant, només cal veure que qualsevol vèrtex  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  pot tenir com a imatge el vèrtex  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$ . Comencem distingint els dos casos de  $u_n$  dependent del seu signe (els superíndexs dels isomorfismes indiquen el nombre de vegades que s'apliquen):

- $u_n < 0$ :

$$(u_1, u_2, \dots, u_n) \xrightarrow{\phi_n^{|u_n|}} (\pm u_1, \pm u_2, \dots, 0);$$

- $u_n > 0$ :

$$\begin{aligned} (u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) &\xrightarrow{\phi_i} (-u_1, \dots, u_i + 1, \dots, -u_n) \\ &\xrightarrow{\phi_n^{u_n}} (\pm u_1, \dots, \pm(u_i + 1), \dots, 0), \end{aligned}$$

on  $i < n$  i, en tots dos casos, el signe  $\pm$  depèn de la paritat de  $u_n$ .

Aleshores, aplicant el mateix procediment  $n - 1$  vegades, obtenim un vèrtex de la forma  $(v_1, 0, \dots, 0)$ . Des d'aquest vèrtex, el camí desitjat s'obté considerant els casos següents. Sigui  $k$  un enter no negatiu:

- $v_1 = -k$ :

$$(-k, 0, \dots) \xrightarrow{\phi_1^k} (0, 0, \dots).$$

- $v_1 = 2k + 1$ :

$$(2k + 1, 0, \dots) \xrightarrow{\phi_2} (-2k - 1, 1, \dots) \xrightarrow{\phi_1^{2k+1}} (0, -1, \dots) \xrightarrow{\phi_2} (0, 0, \dots).$$

- $v_1 = 2k$ :

$$\begin{aligned} (2k, 0, \dots) &\xrightarrow{\phi_2} (-2k, 1, \dots) \xrightarrow{\phi_1^{2k}} (0, 1, \dots) \xrightarrow{\phi_1} (1, -1, \dots) \\ &\xrightarrow{\phi_2} (-1, 0, \dots) \xrightarrow{\phi_1} (0, 0, \dots). \end{aligned}$$

Aleshores, el grup  $\Gamma = \langle \phi_1, \dots, \phi_n \rangle$  és un subgrup regular del grup d'automorfismes  $\mathcal{A}utM_n$  i  $M_n$  és un digraf de Cayley. Respecte a l'estructura de  $\Gamma$ , només cal veure que compleix la segona relació definidora en (2.9), ja que les altres es demostren de manera similar.

$$\begin{aligned} (\phi_i \phi_j)^2(\mathbf{u}) &= \phi_i \phi_j \phi_i \phi_j(u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) \\ &= \phi_i \phi_j \phi_i(-u_1, \dots, -u_i, \dots, u_j + 1, \dots, -u_n) \\ &= \phi_i \phi_j(u_1, \dots, -u_i + 1, \dots, -u_j - 1, \dots, u_n) \\ &= \phi_i(-u_1, \dots, u_i - 1, \dots, -u_j, \dots, -u_n) \\ &= (u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_n) = \mathbf{u}. \end{aligned}$$

□

Aquest resultat estructural té algunes conseqüències remarcables, la més immediata de les quals és el següent corollari:

**Corollari 2.1.5.** *La xarxa Manhattan  $n$ -dimensional  $M_n$  és un digraf vèrtex-simètric.*

En canvi, es pot veure que  $M_n$  no és arc-simètric, excepte en el cas  $N_1 = N_2 = \dots = N_n$ .

En el cas bidimensional, la presentació en (2.9) sense la primera relació generadora  $a_1^{N_1} = a_2^{N_2} = 1$  correspon al grup cristal·logràfic pla  $pgg$  (vegeu, per exemple, Coxeter i Moser [42] i Shutov [86]). En conseqüència, tenim el resultat següent:

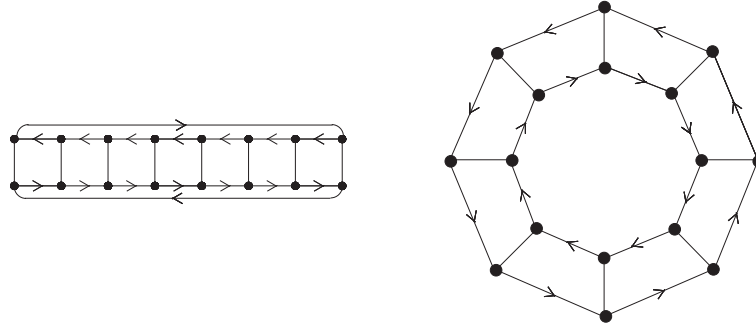


Figura 2.5: La xarxa Manhattan  $M(8,2)$  i una representació del seu grup dièdric (les línies sense fletxa representen els dos arcs de sentits oposats).

**Corol·lari 2.1.6.** La xarxa Manhattan bidimensional  $M_2$ , respecte a l'arc-coloració definida en (2.4), és un digraf de Cayley d'un subgrup (normal) del grup cristal·logràfic pla  $pgg$ , que denotem per  $\Gamma(pgg)$ .

D'altra banda, hem vist que  $M_2 = LM'_2$ , on  $M'_2$  és un digraf de Cayley d'un subgrup del grup  $p4$ , que denotem per  $\Gamma(p4)$ . Aleshores, a partir del resultat de Fiol *et al.* [49], es pot afirmar que

$$\Gamma(pgg) \cong \Gamma(p4) \rtimes S_2,$$

on “ $\rtimes$ ” indica el producte semidirecte (vegeu Brunat *et al.* [22]). De fet, aquest isomorfisme és cert per als corresponents grups infinits  $pgg$  i  $p4$ .

En particular, per a  $N_1 = n$  i  $N_2 = 2$ , obtenim el grup dièdric  $D_n \cong \mathbb{Z}_n \rtimes S_2$  (el grup de simetria en dues dimensions d'un polígon regular de  $n$  costats). A la figura 2.5 es mostra el dibuix estàndard de  $M(8,2)$  i el digraf de Cayley de  $D_8$ .

### 2.1.5 Una definició alternativa

Els darrers resultats porten a una definició alternativa de les xarxes Manhattan.

**Definició 2.1.7.** El conjunt de vèrtexs de  $M_n = M(N_1, N_2, \dots, N_n)$  és, com abans,  $\mathbb{Z}_{N_1} \times \dots \times \mathbb{Z}_{N_n}$  i els ( $i$ -)arcs són ara (per a  $1 \leq i \leq n$ ):

$$(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) \rightarrow (-u_1, \dots, -u_{i-1}, u_i + 1, -u_{i+1}, \dots, -u_n). \quad (2.11)$$

**Lema 2.1.8.** Els grafos definits per (2.4) i (2.11) són isomorfs.

**Demostració.** Introduïm l'isomorfisme de la definició estàndard a la nova definició ( $1 \leq i, j \leq n$ ):

$$\Psi(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) = ((-1)^{\sum_{j \neq 1} u_j} u_1, \dots, (-1)^{\sum_{j \neq i} u_j} u_i, \dots, (-1)^{\sum_{j \neq n} u_j} u_n). \quad (2.12)$$

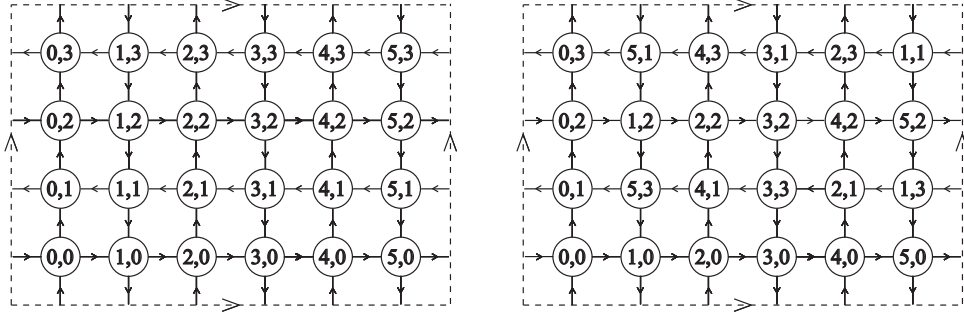


Figura 2.6: Els vèrtexs amb les etiquetes estàndard i amb les induïdes per les aplicacions  $\phi_j$  en la xarxa Manhattan  $M(6, 4)$ .

Aquesta aplicació conserva les adjacències i els seus “colors”. De fet,

$$\begin{aligned} \Psi(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n) &= ((-1)^{\sum_{j \neq 1} u_j} u_1, \dots, (-1)^{\sum_{j \neq i} u_j} u_i, \dots, (-1)^{\sum_{j \neq n} u_j} u_n) \rightarrow \\ &(-(-1)^{\sum_{j \neq 1} u_j} u_1, \dots, (-1)^{\sum_{j \neq i} u_j} u_i + 1, \dots, -(-1)^{\sum_{j \neq n} u_j} u_n) = \\ &((-1)^{\sum_{j \neq 1} u_j + (-1)^{\sum_{j \neq i} u_j}} u_1, \dots, (-1)^{\sum_{j \neq i} u_j} (u_i + (-1)^{\sum_{j \neq i} u_j}), \dots, \\ &(-1)^{\sum_{j \neq n} u_j + (-1)^{\sum_{j \neq i} u_j}} u_n) = \Psi(u_1, \dots, u_i + (-1)^{\sum_{j \neq i} u_j}, \dots, u_n). \end{aligned}$$

□

Com a exemple, la figura 2.6 mostra les dues definicions, l'estàndard i la nova, de la xarxa Manhattan  $M(6, 4)$ . Com és usual, la superfície del tor està dibuixada de manera que les línies discontinües representen la identificació dels costats paral·lels del rectangle.

Tal com suggereix aquest exemple, es pot comprovar fàcilment que  $\Psi$  és involutiva i, per tant, l'aplicació de la definició alternativa a l'estàndard és simplement  $\Psi^{-1} = \Psi$ .

### 2.1.6 Els paràmetres mètrics

En el cas bidimensional, van ser Chung i Agrawal [27] els qui van donar, per primer cop, el diàmetre d'una xarxa Manhattan  $M_2$ . En el seu article, van calcular el diàmetre utilitzant arbres generadors. Aquest resultat també es podria trobar a partir dels resultats de Varvarigos [94], on es calcula la distància mitjana. Comellas i Dalfó [32] demostren aquest resultat a partir de la comparació de la distribució de les distàncies en  $M_2$  i en la corresponent malla toroïdal no dirigida. A més a més, com Varvarigos [94], donen la distribució de vèrtexs per a cada valor de la distància, cosa que permet trobar una fórmula tancada per a la distància mitjana  $d$ , que és la següent:

- (a)  $d = \frac{N_1+N_2}{4} + 1 - \frac{4}{N_1N_2}$ , si  $N_1 \equiv N_2 \equiv 0 \pmod{4}$ ,
- (b)  $d = \frac{N_1+N_2}{4} + 1 - \frac{4}{N_1N_2} - \frac{1}{N_2}$ , si  $N_1 \equiv 0 \pmod{4}$  i  $N_2 \equiv 2 \pmod{4}$ ,
- (c)  $d = \frac{N_1+N_2}{4} + 1 - \frac{4}{N_1N_2} - \frac{1}{N_1}$ , si  $N_1 \equiv 0 \pmod{4}$  i  $N_2 \equiv 2 \pmod{4}$ ,
- (d)  $d = \frac{N_1+N_2}{4} + 1 - \frac{2}{N_1N_2} - \frac{1}{N_1} - \frac{1}{N_2}$ , si  $N_1 \equiv N_2 \equiv 2 \pmod{4}$ .

En particular, en  $M_2(N_1, N_2)$  per a valors grans de  $N_1$  i  $N_2$ , el nombre de vèrtexs a distància  $k \geq 4$  des d'un vèrtex donat, diguem  $\mathbf{0}$ , és  $4k - 4$  (vegeu la figura 2.7 per als casos  $k = 7$  i  $8$ ). Morillo *et al.* [73] també donen el nombre de vèrtexs a distància  $k \geq 4$  per a la xarxa Manhattan bidimensional (no necessàriament toroïdal) amb el conjunt de vèrtexs donats com en (2.8). A més a més, en el mateix article, es mostra que considerant que el dígraf Manhattan és bipartit, si té diàmetre  $D (> 4)$ , aleshores el seu ordre està fitat superiorment per la fita següent, la qual és similar a la fita de Moore (vegeu Miller i Širai [71]):

$$N(2, D) = \begin{cases} 2(D-1)^2, & \text{per a } D \text{ senar,} \\ 2[(D-1)^2 + 1], & \text{per a } D \text{ parell.} \end{cases}$$

Per exemple, per als casos  $D = 7$  i  $D = 8$ , il·lustrats a la figura 2.7, les fites són  $N(2, 7) = 72$  i  $N(2, 8) = 100$ , que corresponen al nombre de vèrtexs que hi ha dintre de les regions representades. Aquestes regions defineixen unes tesselles, les quals són conjunts de quadrats unitat associats als vèrtexs els quals són a distància menor que  $D$  (des del  $\mathbf{0}$ ) i alguns a distància  $D$  (també des del  $\mathbf{0}$ ), de manera que cada conjunt independent del dígraf bipartit tingui el mateix nombre de vèrtexs. Aleshores, si no impossem el tancament toroïdal de la xarxa Manhattan, els valors de les fites es poden assolir, ja que les corresponents tesselles recobreixen el pla periòdicament (vegeu de nou la figura 2.7). Concretament, quan  $D$  és senar, els “passos” (vegeu la figura 2.2) per assolir el màxim ordre són, per exemple,

$$\begin{aligned} a_0 &= 3, & a_1 &= 2D - 3, & a_2 &= -2D + 1, & a_3 &= -1; \\ b_0 &= 1, & b_1 &= -3, & b_2 &= -2D + 3, & b_3 &= 2D - 1; \end{aligned}$$

mentre que, per a  $D$  parell, tenim:

$$\begin{aligned} a_0 &= -3, & a_1 &= 2D + 1, & a_2 &= -2D + 1, & a_3 &= 1; \\ b_0 &= -1, & b_1 &= 3, & b_2 &= -2D - 1, & b_3 &= 2D - 1. \end{aligned}$$

En el cas toroïdal que estudiem aquí, i per a un nombre donat de vèrtexs  $N = N_1N_2$ , el diàmetre és molt més gran que l'obtingut més amunt. En aquest cas, tenim el següent resultat (ja conegut en la literatura), que utilitzarem més endavant en l'estudi del cas  $n$ -dimensional. Com hem dit abans, pel que sabem,

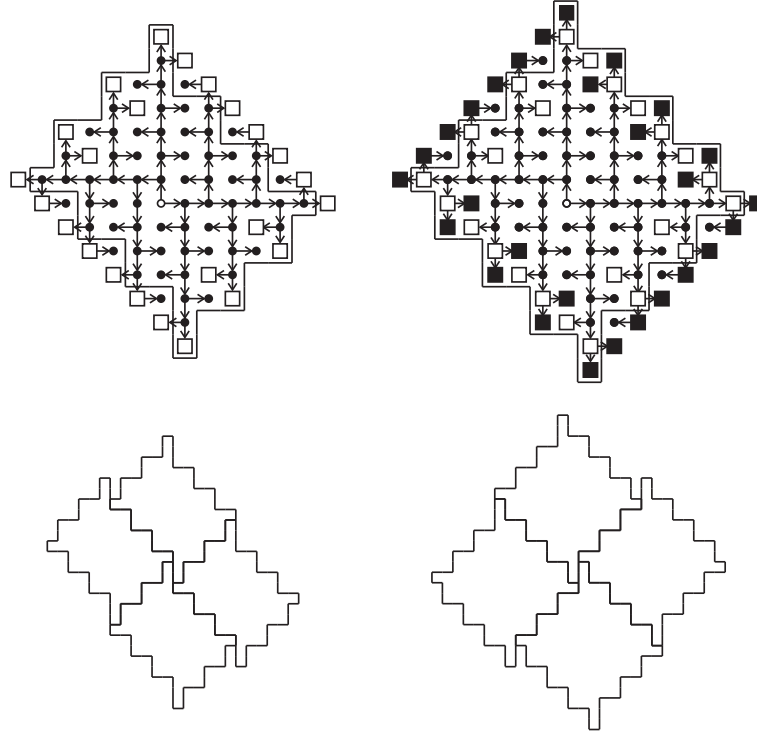


Figura 2.7: Els vèrtexs a distància 7 (quadrats blancs) i a distància 8 (quadrats negres) des del vèrtex origen (cercle blanc) i les tessellacions corresponents.

van ser Chung i Agrawal [27] els primers de demostrar aquest resultat i ho van fer utilitzant arbres generadors. Aquí fem una demostració constructiva mostrant el camí més curt de qualsevol vèrtex al vèrtex  $(0, 0)$ , cosa que ens proporciona un esquema d'enrutament local de camins geodèsics.

**Teorema 2.1.9.** *El diàmetre de la xarxa Manhattan  $M(N_1, N_2)$  és*

(a)  $D = \frac{N_1}{2} + \frac{N_2}{2} + 1$ , si  $N_1 \equiv N_2 \equiv 0 \pmod{4}$ ;

(b)  $D = \frac{N_1}{2} + \frac{N_2}{2}$ , altrament.

**Demostració.** La demostració es basa en la definició 2.1.7 (la definició alternativa) de les xarxes Manhattan. Siguin  $\alpha, \beta$  un nombre parell i un senar, respectivament, de l'interval  $[0, \frac{N_i}{2} - 1]$ , per a  $i = 1, 2$ , i sigui  $\gamma$  un nombre enter de l'interval  $[0, \frac{N_i}{2} - 1]$ . A causa de la simetria del digraf, només cal considerar un camí des d'un vèrtex genèric  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  fins al vèrtex  $\mathbf{0} = (0, 0)$ , la longitud del qual mai no serà superior als valors de  $D$  del teorema. Primer considerem els casos amb alguna component  $u_i$  igual a  $\pm \frac{N_i}{2}$  (el signe és irrellevant ja que estem



en  $\mathbb{Z}_{N_i}$  amb  $N_i$  parell). Aquí les fletxes i els nombres que hi ha a sobre representen els camins seguits i les seves longituds.

$$(i) \quad u_1 = \frac{N_1}{2}, u_2 = \frac{N_2}{2}:$$

$$\left(\frac{N_1}{2}, \frac{N_2}{2}\right) \xrightarrow{+\frac{N_1}{2}} (0, \frac{N_2}{2}) \xrightarrow{+\frac{N_2}{2}} (0, 0).$$

$$(ii) \quad u_1 = \frac{N_1}{2} \text{ (parell)}, u_2 = -\gamma:$$

$$\left(\frac{N_1}{2}, -\gamma\right) \xrightarrow{+\frac{N_1}{2}} (0, -\gamma) \xrightarrow{+\gamma} (0, 0).$$

$$(iii) \quad u_1 = \frac{N_1}{2} \text{ (parell)}, u_2 = \alpha:$$

$$\left(\frac{N_1}{2}, \alpha\right) \xrightarrow{+1} \left(\frac{N_1}{2} + 1, -\alpha\right) \xrightarrow{+\alpha} \left(\frac{N_1}{2} + 1, 0\right) \xrightarrow{+\frac{N_1}{2}-1} (0, 0).$$

$$(iv) \quad u_1 = \frac{N_1}{2} \text{ (parell)}, u_2 = \beta:$$

$$\left(\frac{N_1}{2}, \beta\right) \xrightarrow{+\frac{N_1}{2}} (0, \beta) \xrightarrow{+1} (1, -\beta) \xrightarrow{+\beta} (-1, 0) \xrightarrow{+1} (0, 0).$$

$$(v) \quad u_1 = \frac{N_1}{2} \text{ (senar)}, u_2 = \gamma:$$

$$\left(\frac{N_1}{2}, \gamma\right) \xrightarrow{+\frac{N_1}{2}} (0, -\gamma) \xrightarrow{+\gamma} (0, 0).$$

$$(vi) \quad u_1 = \frac{N_1}{2} \text{ (senar)}, u_2 = -\gamma:$$

$$\left(\frac{N_1}{2}, -\gamma\right) \xrightarrow{+\gamma} \left(\frac{N_1}{2}, 0\right) \xrightarrow{+\frac{N_1}{2}} (0, 0).$$

Observem que tots aquests camins tenen longitud  $\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{0}) \leq \frac{N_1}{2} + \frac{N_2}{2}$ , excepte en el cas (iv), on tenim

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = \frac{N_1}{2} + \beta + 2 \leq \frac{N_1}{2} + \frac{N_2}{2} + 1. \quad (2.13)$$

La igualtat s'assoleix quan  $\beta = \frac{N_2}{2} - 1$  o en el cas simètric (iv'), obtingut a partir de (iv) intercanviant els papers de  $u_1$  i  $u_2$ , quan  $u_1 = \beta = \frac{N_1}{2} - 1$  i  $u_2 = \frac{N_2}{2}$  (parell). Observem que, en els dos casos,  $\frac{N_1}{2}$  i  $\frac{N_2}{2}$  han de ser parells, ja que estem en el cas (a) del teorema. Quan  $\beta = \frac{N_2}{2} - 2$ , l'equació (2.13) dona  $\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = \frac{N_1}{2} + \frac{N_2}{2}$  (per a  $\frac{N_1}{2}$  parell i  $\frac{N_2}{2}$  senar) i el mateix passa en el cas simètric  $u_1 = \beta = \frac{N_1}{2} - 2$  i  $u_2 = \frac{N_2}{2}$  (per a  $\frac{N_1}{2}$  senar i  $\frac{N_2}{2}$  parell). Aquests casos corresponen al cas (b) del teorema.

A més a més, si cap dels  $u_i$  és igual a  $\frac{N_i}{2}$ , hem de considerar els casos següents (com abans,  $\alpha_i$  i  $\beta_i$  representen un enter parell i un de senar, respectivament, en l'interval  $[0, N_i - 1]$ ,  $i = 1, 2$ ):

$$(1) \quad u_1 = -\alpha_1, u_2 = -\alpha_2:$$

$$(-\alpha_1, -\alpha_2) \xrightarrow{+\alpha_1} (0, -\alpha_2) \xrightarrow{+\alpha_2} (0, 0).$$

$$(2) \quad u_1 = -\alpha, u_2 = -\beta:$$

$$(-\alpha, -\beta) \xrightarrow{+\alpha} (0, -\beta) \xrightarrow{+\beta} (0, 0).$$

$$(3) \quad u_1 = -\beta_1, u_2 = -\beta_2:$$

$$(-\beta_1, -\beta_2) \xrightarrow{+\beta_1} (0, \beta_2) \xrightarrow{+1} (1, -\beta_2) \xrightarrow{+\beta_2} (-1, 0) \xrightarrow{+1} (0, 0).$$

$$(4) \quad u_1 = -\alpha, u_2 = \beta:$$

$$(-\alpha, \beta) \xrightarrow{+\alpha} (0, \beta) \xrightarrow{+1} (1, -\beta) \xrightarrow{+\beta} (-1, 0) \xrightarrow{+1} (0, 0).$$

$$(5) \quad u_1 = -\beta, u_2 = \alpha:$$

$$(-\beta, \alpha) \xrightarrow{+\beta} (0, -\alpha) \xrightarrow{+\alpha} (0, 0).$$

$$(6) \quad u_1 = -\alpha_1, u_2 = \alpha_2:$$

$$(-\alpha_1, \alpha_2) \xrightarrow{+1} (-\alpha_1 + 1, -\alpha_2) \xrightarrow{+\alpha_2} (-\alpha_1 + 1, 0) \xrightarrow{+\alpha_1 - 1} (0, 0).$$

$$(7) \quad u_1 = -\beta_1, u_2 = \beta_2:$$

$$(-\beta_1, \beta_2) \xrightarrow{+\beta_1} (0, -\beta_2) \xrightarrow{+\beta_2} (0, 0).$$

$$(8a) \quad u_1 = \alpha_1 < \frac{N_1}{2} - 1, u_2 = \alpha_2:$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) \xrightarrow{+1} (\alpha_1 + 1, -\alpha_2) \xrightarrow{+\alpha_2} (\alpha_1 + 1, 0) \xrightarrow{+1}$$

$$(-\alpha_1 - 1, 1) \xrightarrow{+\alpha_1 + 1} (0, -1) \xrightarrow{+1} (0, 0).$$

$$(8b) \quad u_1 = \alpha_1 = \frac{N_1}{2} - 1, u_2 = \alpha_2:$$

$$(\alpha_1, \alpha_2) \xrightarrow{+1} (\alpha_1 + 1, -\alpha_2) = \left(\frac{N_1}{2}, -\alpha_2\right) \xrightarrow{+\alpha_2} \left(\frac{N_1}{2}, 0\right) \xrightarrow{+\frac{N_1}{2}} (0, 0).$$

$$(9) \quad u_1 = \alpha, u_2 = \beta:$$

$$(\alpha, \beta) \xrightarrow{+1} (\alpha + 1, -\beta) \xrightarrow{+\beta} (-\alpha - 1, 0) \xrightarrow{\alpha + 1} (0, 0).$$

(10)  $u_1 = \beta_1, u_2 = \beta_2$ :

$$(\beta_1, \beta_2) \xrightarrow{+1} (\beta_1 + 1, -\beta_2) \xrightarrow{+\beta_2} (-\beta_1 - 1, 0) \xrightarrow{+\beta_1+1} (0, 0).$$

Observem de nou que tots aquests camins tenen longitud  $\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{0}) < \frac{N_1}{2} + \frac{N_2}{2}$ , excepte en els casos (4), (8b) i (9), on tenim

$$\text{dist}(\mathbf{u}, \mathbf{0}) = \frac{N_1}{2} + \frac{N_2}{2},$$

per a les diferents paritats de  $\frac{N_1}{2}$  i  $\frac{N_2}{2}$ . Per exemple, en el cas (8b) el màxim s'assoleix quan  $\alpha_2 = \frac{N_1}{2} - 1$ , és a dir, per al vèrtex  $(\frac{N_1}{2} - 1, \frac{N_2}{2} - 1)$ , on  $N_1 \equiv N_2 \equiv 2 \pmod{4}$ . Això completa la demostració.  $\square$

D'aquesta demostració, obtenim que els vèrtexs a distància màxima des del  $\mathbf{0}$  són, depenent del cas (recordem que estem utilitzant la definició alternativa):

(a)  $N_1 \equiv N_2 \equiv 0 \pmod{4}$ :

$$(iv): (\frac{N_1}{2}, \frac{N_2}{2} - 1), (\frac{N_1}{2} - 1, \frac{N_2}{2});$$

(b1)  $N_1 \equiv 0, N_2 \equiv 2 \pmod{4}$ :

$$(i): (\frac{N_1}{2}, \frac{N_2}{2}),$$

$$(iv): (\frac{N_1}{2}, \frac{N_2}{2} - 2),$$

$$(4): (\frac{N_1}{2} - 1, \frac{N_2}{2} + 1),$$

$$(9): (\frac{N_1}{2} - 1, \frac{N_2}{2} - 1);$$

(b2)  $N_1 \equiv 2, N_2 \equiv 0 \pmod{4}$ :

$$(i): (\frac{N_1}{2}, \frac{N_2}{2}),$$

$$(iv): (\frac{N_1}{2} - 2, \frac{N_2}{2}),$$

$$(4): (\frac{N_1}{2} + 1, \frac{N_2}{2} - 1),$$

$$(9): (\frac{N_1}{2} - 1, \frac{N_2}{2} - 1);$$

(b3)  $N_1 \equiv N_2 \equiv 2 \pmod{4}$ :

$$(i): (\frac{N_1}{2}, \frac{N_2}{2}),$$

$$(8b): (\frac{N_1}{2} - 1, \frac{N_2}{2} - 1).$$

Per trobar el diàmetre de la xarxa Manhattan  $n$ -dimensional introduïm la notació següent: donat  $N$  (parell) i  $0 \leq u \leq N$ , sigui  $\|u\|_N$  la distància entre 0 i  $u$  en el cicle no dirigit  $C_N$ , és a dir,  $\|u\|_N = \min\{u \pmod{N}, -u \pmod{N}\}$ , per tant,  $0 \leq \|u\|_N \leq \frac{N}{2}$ .

**Lema 2.1.10.** *Per a  $n > 2$ , considerem els vèrtexs  $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$  i  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_{n-1}, u_n)$  en  $M_n = (N_1, \dots, N_{n-1}, N_n)$  i els vèrtexs  $\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$  i  $\mathbf{u}' = (u_1, \dots, u_{n-1})$  en  $M_{n-1} = (N_1, \dots, N_{n-1})$ . Sigui  $\alpha = (-1)^{u_n}$ . Aleshores,*

$$(a) \text{dist}_{M_n}(\mathbf{u}, \mathbf{0}) \geq \sum_{i=1}^n \|u_i\|_{N_i};$$

$$(b) \text{ dist}_{M_n}(\mathbf{u}, \mathbf{0}) \leq \text{dist}_{M_{n-1}}(\alpha \mathbf{u}', \mathbf{0}) + \|u_n\|_{N_n}, \quad \text{si } u_n \in [\frac{N_n}{2}, N_n];$$

$$(c) \text{ dist}_{M_n}(\mathbf{u}, \mathbf{0}) \leq \text{dist}_{M_{n-1}}(\alpha(\mathbf{u}' + \mathbf{e}_1), \mathbf{0}) + \|u_n\|_{N_n} + 1, \quad \text{si } u_n \in [0, \frac{N_n}{2} - 1].$$

**Demostració.** La desigualtat de l'apartat (a) és una conseqüència directa del fet que el graf subjacent de  $M_n$  és el producte cartesià dels cicles  $C_{N_i}$ , per a  $1 \leq i \leq n$ .

Si  $\frac{N_n}{2} \leq u_n \leq N_n$ , hi ha un camí de longitud  $N_n - u_n = \|u_n\|_{N_n}$  des de  $\mathbf{u}$  a  $(\alpha u_1, \dots, \alpha u_{n-1}, 0)$  en  $M_n$ . Des d'aquest vèrtex, caldran com a màxim  $\text{dist}_{M_{n-1}}(\alpha \mathbf{u}', \mathbf{0})$  passos per arribar a  $\mathbf{0}$ . Això demostra l'apartat (b).

D'altra banda, quan  $0 \leq u_n \leq \frac{N_n}{2} - 1$ , primer anem amb un sol pas des de  $\mathbf{u}$  a  $(u_1 + 1, -u_2, \dots, -u_{n-1}, -u_n)$ . Aleshores, des d'aquest vèrtex tenim un camí de longitud  $u_n = \|u_n\|_{N_n}$  fins a  $(\alpha(u_1 + 1), -\alpha u_2, \dots, -\alpha u_{n-1}, 0)$ . Això, amb un raonament similar a l'anterior, demostra l'apartat (c).  $\square$

Com a conseqüència, a causa de la simetria dels vèrtexs de  $M_n$ , tenim:

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{2} \leq \text{exc}_{M_n}(\mathbf{0}) \leq \text{exc}_{M_{n-1}}(\mathbf{0}) + \frac{N_n}{2},$$

ja que, en el cas (c),  $\|u_n\|_{N_n} \leq \frac{N_n}{2} - 1$ , i la mateixa fórmula és vàlida per als diàmetres respectius:

$$\sum_{i=1}^n \frac{N_i}{2} \leq D(M_n) \leq D(M_{n-1}) + \frac{N_n}{2}. \quad (2.14)$$

**Teorema 2.1.11.** *El diàmetre d'una xarxa Manhattan  $M_n = M(N_1, \dots, N_n)$ , per a  $N_i > 4$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , és*

$$(a) \ D(M_n) = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{2} + 1, \quad \text{si } N_i \equiv 0 \pmod{4};$$

$$(b) \ D(M_n) = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{2}, \quad \text{altrament.}$$

**Demostració.** Com que el lema 2.1.10 és vàlid per a dues components qualssevol del vèrtex  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$ , el podem aplicar recursivament per tenir

$$D(M_n) \leq D(M(N_j, N_k)) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j, k} N_i \quad (\text{per a } 1 \leq j < k \leq n). \quad (2.15)$$

Aleshores, sota la hipòtesi de l'apartat (b), hi ha alguns  $1 \leq j \leq n$  tals que  $N_j \not\equiv 0 \pmod{4}$  i  $D(M(N_j, N_k)) = \frac{N_j}{2} + \frac{N_k}{2}$  a causa del teorema 2.1.9. Això, juntament amb la fita inferior en (2.14), demostra la igualtat de l'apartat (b).

D'altra banda, si  $N_i \equiv 0 \pmod{4}$  per a  $1 \leq i \leq n$ , el teorema 2.1.9 i l'equació (2.15) donen

$$D(M_n) \leq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n N_i + 1. \quad (2.16)$$

Aleshores, per demostrar l'apartat (a) només ens cal mostrar que la igualtat s'assoleix per a algun vèrtex. De fet, en aquest cas, els vèrtexs a distància màxima del  $\mathbf{0}$  són:

$$\mathbf{u}_i = (\frac{N_1}{2}, \frac{N_2}{2}, \dots, \frac{N_i}{2} - 1, \dots, \frac{N_n}{2}), \quad (\text{per a } 1 \leq i \leq n)$$

(compareu-ho amb l'apartat (a) del cas bidimensional en la llista dels vèrtexs a distància màxima, després de la demostració del teorema 2.1.9). Per exemple, comprovem que  $\text{dist}(\mathbf{u}_1, \mathbf{0})$  assoleix la fita superior en (2.16). Observem que la primera component de  $\mathbf{u}_1$ ,  $\frac{N_1}{2} - 1$ , és senar, mentre que les altres,  $\frac{N_i}{2}$ , per a  $2 \leq i \leq n$ , són parells. A més a més, per a tot  $1 \leq i \leq n$ , calen almenys  $\frac{N_i}{2}$  passos per portar la  $i$ -èsima component al 0, cosa que dóna  $\text{dist}(\mathbf{u}_1, \mathbf{0}) \geq \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{2}$ . En particular, això requereix canviar, en algun pas, la primera component de  $\frac{N_1}{2} - 1$  a  $-\frac{N_1}{2} + 1 = \frac{N_1}{2} + 1$ , cosa que s'acompleix quan el nombre, diguem-ne  $r$ , de passos previs que van a través de  $j$ -arcs,

$$(u_1, \dots, u_j, \dots, u_n) \rightarrow (-u_1, \dots, u_j + 1, \dots, -u_n) \quad (\text{per a } 2 \leq j \leq n)$$

és senar. Aleshores, malgrat que haguem fet  $r$  passos en la direcció “correcta” cap al  $\mathbf{0}$ , hi ha algun  $j$  tal que la primera i la  $j$ -èsima components del vèrtex assolit  $\mathbf{u}'$ ,  $u'_1 = \frac{N_1}{2} + 1$  i  $u'_j \in [\frac{N_j}{2} + 1, N_j - 1]$ , són senars. Però ara, com en el cas (3) de la demostració del teorema 2.1.9, és impossible portar aquestes components a 0 sense fer almenys  $\|u'_1\| + \|u'_j\| + 2$  passos (no importa com siguin les altres components). Per tant, tenim que  $\text{dist}(\mathbf{u}_1, \mathbf{0}) = \sum_{i=1}^n \frac{N_i}{2} + 1$  i això completa la demostració.  $\square$

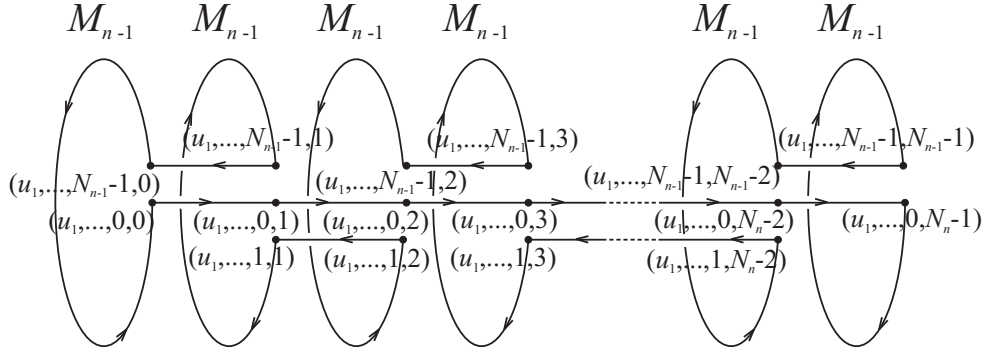
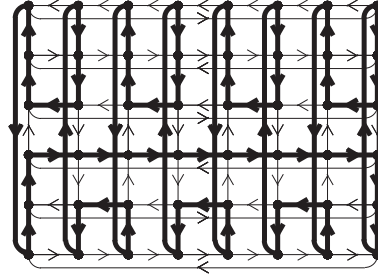
Dels resultats i les demostracions dels teoremes 2.1.9 i 2.1.11 i del lema 2.1.10, veiem que es pot enviar un missatge (globalment o localment) a través del camí, la longitud del qual està fitada pel diàmetre de  $M_n$ . De fet, per anar des del vèrtex  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  fins al  $\mathbf{0}$ , primer anem al vèrtex  $(0, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, 0)$  per a alguns  $i, j$  apropiadament escollits (demostració del lema 2.1.10) i seguim l'enrutament de la demostració del teorema 2.1.9, com si estiguéssim en  $M(N_i, N_j)$ , per arribar al vèrtex destinació  $\mathbf{0}$ .

### 2.1.7 Cicles hamiltonians

En aquesta secció demostrem que les xarxes Manhattan  $M_n$  són digrafs hamiltonians i, en el cas bidimensional, donem condicions suficients per descompondre  $M_2$  en dos cicles hamiltonians arc-disjunts.

**Teorema 2.1.12.** *La xarxa Manhattan  $M_n$  és hamiltoniana.*

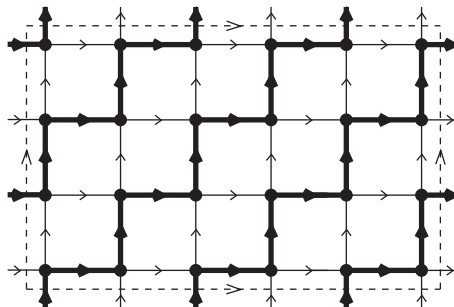
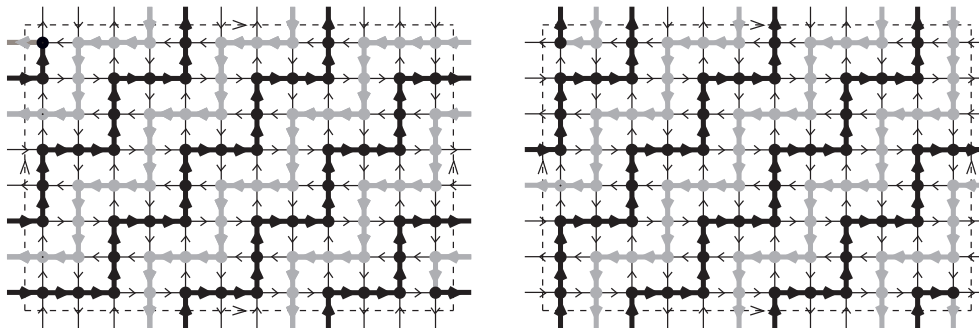
**Demostració.** Utilitzant la definició estàndard de la xarxa Manhattan, anomenem *camí horari* (respectivament, *camí antihorari*) un camí de  $i$ -arcs, en el qual la suma  $\sum_{j \neq i} u_j$  en (2.4) és parell (respectivament, senar). Procedim per inducció sobre  $n$ . Per a  $n = 1$ ,  $M_1$  és un cicle dirigit i és trivialment hamiltonià (també podríem començar des de  $n = 2$  perquè ja sabem que  $M_2$  és hamiltonià pel lema 2.1.3). Ara suposem que existeix un cicle hamiltonià per a  $M_{n-1}$ . Aleshores, construïm un cicle hamiltonià per a  $M_n$  unint adequadament  $N_n$  cicles hamiltonians (sense alguns arcs) dels seus  $N_n$  subdigrafs isomorfs a  $M_{n-1}$  (recordem el

Figura 2.8: Cicle hamiltonià en  $M_n$ .Figura 2.9: Cicle hamiltonià en  $M(8,6)$ .

lema 2.1.2(c)). Concretament, el cicle comença a, diguem,  $(u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, 0, 0)$  i va des d'aquest vèrtex fins a  $(u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, 0, 1), \dots, (u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, 0, N_n - 1)$ . En aquest darrer vèrtex, fem un cicle hamiltonià horari en un subdígraf  $M_{n-1}$  (sense l'últim pas) fins a  $(u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, N_{n-1} - 1, N_n - 1)$ . Des d'aquí, anem a  $(u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, N_{n-1} - 1, N_n - 2)$ . Aleshores, fem un cicle antihorari fins a  $(u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, 1, N_n - 2)$ . Des d'aquí, anem a  $(u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, 1, N_n - 3)$ . Ara repetim aquest procés algunes vegades fins a arribar al cicle hamiltonià antihorari (sense l'últim pas) del  $M_{n-1}$  que acaba en  $(u_1, u_2, \dots, u_{n-2}, 0, 0)$  i això tanca el cicle hamiltonià de  $M_n$  (vegeu la figura 2.8).  $\square$

Com a exemple d'un cicle hamiltonià, vegeu la il·lustració de  $M(8,6)$  en la figura 2.9.

A més de la propietat hamiltoniana de les xarxes Manhattan, en algunes aplicacions és útil tenir una descomposició de la xarxa en dos (o més) cicles hamiltonians arc-disjunts. En aquest context, Varvarigos [94] va mostrar la presència de dos cicles hamiltonians arc-disjunts en les xarxes Manhattan bidimensionals "quadrades"  $M(N, N)$ . Generalitzant el seu resultat, a continuació donem les condicions suficients perquè una xarxa Manhattan  $M(N_1, N_2)$  sigui descom-

Figura 2.10: Cicle hamiltonià en  $C_6 \times C_4$ .Figura 2.11: Una descomposició de  $M(12,8)$  en dos cicles hamiltonians arc-disjunts.

ponible en dos cicles hamiltonians arc-disjunts.

**Proposició 2.1.13.** *Sigui  $M_2 = M(N_1, N_2)$  una xarxa Manhattan bidimensional. Si es compleixen les següents condicions:*

- (a)  $\text{mcd}\{\frac{N_1}{2}, \frac{N_2}{2}\} = s \geq 2$ ;
- (b) *Existeixen  $s_1, s_2 > 0$ ,  $s_1 + s_2 = d$ , tals que*

$$\text{mcd}\{s_1, \frac{N_1}{2}\} = \text{mcd}\{s_2, \frac{N_2}{2}\} = 1;$$

*aleshores  $M_2$  conté dos cicles hamiltonians arc-disjunts.*

**Demostració.** La demostració es basa en un resultat de Trotter i Erdős [93] (vegeu també Fiol i Yebra [53]), els quals van demostrar que les condicions (a) i (b) són suficients perquè el producte cartesià de dos cicles dirigits  $C_{N_1/2} \times C_{N_2/2}$  sigui hamiltonià. Per exemple, aquestes condicions es compleixen amb  $\frac{N_1}{2} = 6$  i  $\frac{N_2}{2} = 4$ , ja que  $s = 2$  i podem agafar  $s_1 = s_2 = 1$ , cosa que dóna el cicle hamiltonià de la figura 2.10. En general, per obtenir aquest cicle es repeteix periòdicament

un subcamí de  $s_1$  passos horitzontals i  $s_2$  passos verticals. A la figura 2.11, es mostra que aquest cicle hamiltonià en  $C_6 \times C_4$  (amb arcs que van cap a l'est i cap al nord) dóna el patró per construir un cicle hamiltonià en  $M(12, 8)$ , de manera que cada arc del primer dóna lloc a un camí de longitud 2 (amb les components dels vèrtexs inicial i final parells) que segueix la mateixa direcció que l'arc. La idea clau és que, abans de tancar el quasicicle (cicle sense algunes arestes) est-nord—en negre a la figura—canvia el seu últim pas de vertical a horitzontal i fa un quasicicle oest-sud—en gris en la figura (ara amb camins de longitud 2 amb les components dels vèrtexs inicial i final senars). Aleshores, al final, canvia de nou (el darrer pas de vertical a horitzontal) per connectar amb el primer quasicicle i completar el cicle hamiltonià en  $M_2$ . Respecte a l'altre cicle arc-disjunt de  $M(N_1, N_2)$ , és el complement del primer. Alternativament, es podria veure com un cicle hamiltonià construït de la mateixa manera que el primer, però sobre el digraf de la xarxa Manhattan  $M(N_2, N_1)$  (vegeu de nou la figura 2.11 per als detalls).  $\square$

## 2.2 Esquemes de comunicació

En els esquemes de comunicació s'estudien els enrutaments (globals o locals) de camins geodèsics, la difusió (o *broadcasting*) i el *gossiping*. La difusió és el procés de disseminar un missatge des d'un node d'una xarxa de comunicacions fins a tots els altres nodes tan ràpidament com sigui possible, mentre que en el *gossiping* la informació s'envia des de tots els nodes fins a tots els nodes. Aquí estudiem els enrutaments de camins geodèsics i la difusió en les xarxes Manhattan bidimensionals.

### 2.2.1 Enrutament

L'interès principal de la demostració del teorema 2.1.9 és que proporciona un enrutament (global o local) de camins geodèsics. De fet, per la simetria de la xarxa, només cal mostrar un camí des de cada vèrtex fins al vèrtex  $(0, 0)$ . En efecte, un camí entre dos vèrtexs genèrics  $(v_1, v_2) \rightarrow \dots \rightarrow (w_1, w_2)$ , sota l'isomorfisme  $\phi_1^{N_1 - (-1)^{w_2 w_1}} \circ \phi_2^{N_2 - w_2}$ , es transforma en el camí de la mateixa longitud

$$\mathbf{u} = ((-1)^{w_2} [v_1 - w_1], (-1)^{w_1} [v_2 - w_2]) \rightarrow \dots \rightarrow (0, 0).$$

Aleshores, per a cada node  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$  i segons els casos  $(i)-(vi)$  i  $(1)-(10)$  de la demostració del teorema 2.1.9, podem determinar quin és el camí més curt des de  $\mathbf{u}$  fins al  $(0, 0)$ . Com a exemple, a la figura 2.12 es mostra la xarxa Manhattan  $M(10, 8)$ , on els números petits sobre cada vèrtex indiquen el cas corresponent a la demostració. Quan una de les components  $u_i$  és zero, pot haver-hi dos casos



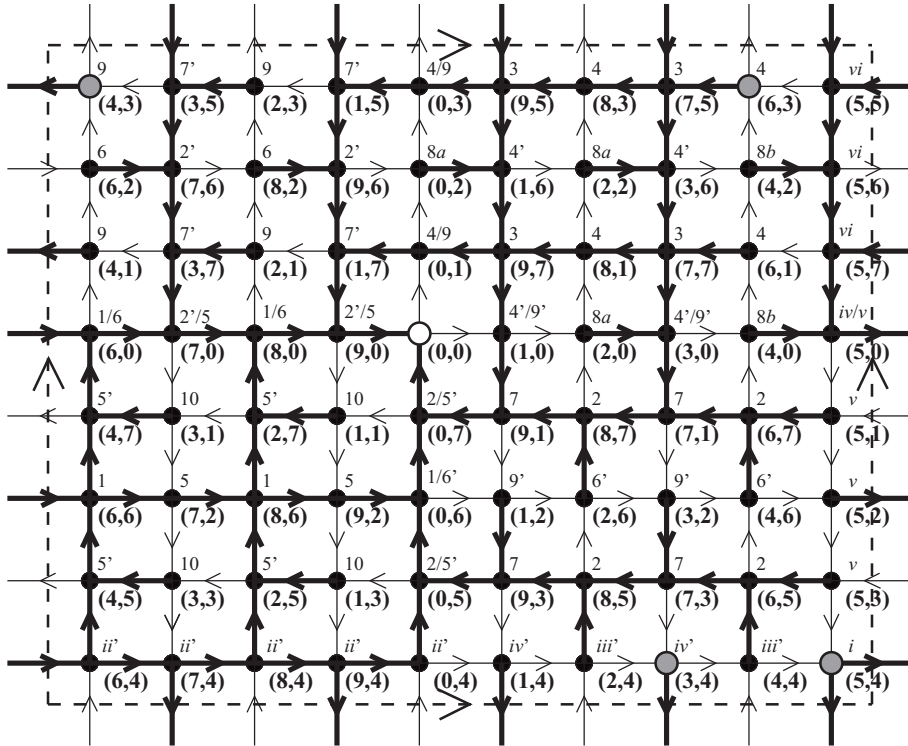


Figura 2.12: Els camins més curts cap al vèrtex  $(0,0)$  en  $M(10,8)$ , d'acord amb la demostració del teorema 2.1.9.

equivalents. Quan una d'aquestes etiquetes porta un apòstrof es refereix al cas simètric (obtingut intercanviant els papers de  $u_1$  i  $u_2$ ). Tant la figura com la demostració donen els enrutaments *global* i *local*. En un enrutament global, tot el camí de  $\mathbf{u}$  a  $(0,0)$  s'obté a partir del cas al qual  $\mathbf{u}$  pertany. Per exemple, el vèrtex  $(6,1)$  pertany al cas  $(4)$ , que ens dona el següent camí (amb línia gruixuda a la figura 2.12):

$$(6,1) \rightarrow (7,7) \rightarrow (8,1) \rightarrow (9,7) \rightarrow (0,1) \rightarrow (1,7) \rightarrow (9,0) \rightarrow (0,0).$$

Si en algun pas hi ha més d'una opció, sempre agafem l'aresta horitzontal. Aquest camí és conseqüent amb un enrutament local, on cada node  $\mathbf{u}$  ha d'escollir quin arc de sortida utilitza en el camí més curt cap al vèrtex  $(0,0)$ . En l'exemple anterior, el node  $(6,1)$  pertany al cas  $(4)$ , el qual ens diu que el següent pas ha de ser horitzontal i ens porta al vèrtex  $(7,7)$ , que pertany al cas  $(3)$ , que ens diu que el següent pas ha de ser de nou horitzontal per assolir el vèrtex  $(8,1)$ , que pertany als cas  $(4)$ . Procedim així fins a arribar al vèrtex  $(0,0)$ .

En la figura 2.12, els quatre vèrtexs  $(5,4)$ ,  $(3,4)$ ,  $(6,3)$  i  $(4,3)$  que estan a la distància màxima 9 des del  $(0,0)$ —cas  $(b2)$  després de la demostració—estan

indicats en gris.

### 2.2.2 Difusió

Donat un dígraf  $G = (V, A)$  i un vèrtex  $u \in V$ , la difusió és el procés de disseminar una informació des del vèrtex  $u$  (anomenat *origen*) fins a tots els vèrtexs de  $G$  en unes determinades condicions. En el model de difusió que hem seguit, les regles que s'han de complir són les següents:

- La transmissió de la informació des d'un vèrtex fins a un altre es fa en una unitat de temps.
- Un vèrtex pot informar només els seus vèrtexs adjacents.
- En una unitat de temps, un vèrtex pot informar com a màxim un vèrtex adjacent.
- Totes les transmissions que tenen lloc en una unitat de temps donada es produeixen simultàniament.

El conjunt de transmissions utilitzades per enviar la informació s'anomena *protocol de difusió*. L'*algorisme de difusió* és el conjunt de regles que generen el protocol.

Donat un dígraf (connex)  $G$  i un vèrtex  $u$ , el *temps de difusió de  $u$* , denotat per  $b(u)$ , és el mínim nombre d'unitats de temps necessàries per enviar un missatge originat a  $u$ . El *temps de difusió del (di)graf  $G$*  es defineix com a  $b(G) = \max\{b(u) | u \in G\}$ . Per a qualsevol vèrtex  $u$  en un (di)graf connex amb  $|V|$  vèrtexs,  $b(u) \geq \lceil \log_2 |V| \rceil$ , ja que per cada unitat de temps el nombre de vèrtexs informats pot ser com a màxim el doble. Per a un (di)graf vèrtex-simètric, el seu temps de difusió és igual al temps de difusió de qualsevol dels seus vèrtexs.

En el cas de la malla bidimensional no dirigida  $N_1, N_2$ , se sap que el seu temps de difusió és

$$b(N_1, N_2) = N_1 + N_2 - 2 = D,$$

on  $D$  és el diàmetre de la malla. En el cas del tor bidimensional no dirigit  $N_1, N_2$ , si  $N_1$  i  $N_2$  són parells, aquest graf és antipodal i el seu temps de difusió és

$$b(N_1, N_2) = \frac{N_1}{2} + \frac{N_2}{2} = D,$$

on  $D$  és el diàmetre del tor. En els altres casos, el seu temps de difusió és

$$b(N_1, N_2) = \lfloor \frac{N_1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{N_2}{2} \rfloor + 1 = D + 1.$$

Vegeu Fraigniaud i Lazard [56] per tenir més detalls sobre aquests resultats.

El següent lema serà necessari per demostrar el nostre resultat sobre la difusió en les xarxes Manhattan multidimensionals.

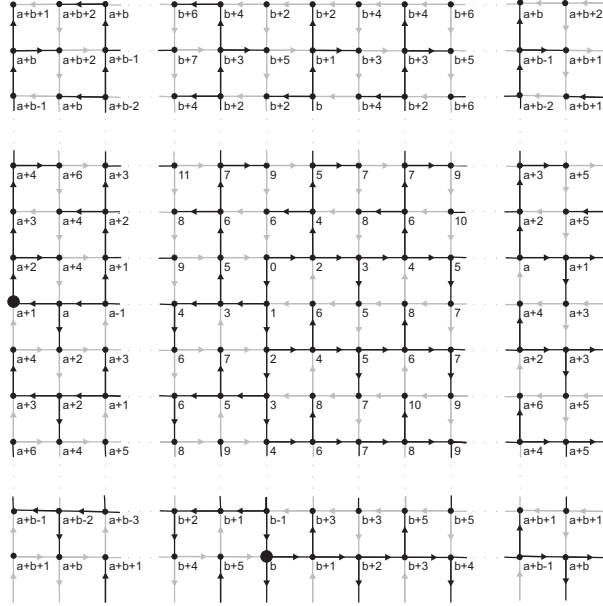


Figura 2.13: Arbre de difusió per a  $N_1 \equiv N_2 \equiv 0 \pmod{4}$ .

**Lema 2.2.1.** Per a un (di)graf  $G$  amb diàmetre  $D$  el temps de difusió satisfà  $b(G) \geq D$ . A més a més, si existeix un vèrtex  $u$  tal que el nombre de vèrtexs a distància  $D$  des de  $u$  és  $N_D(u) > \binom{D+k}{k}$ , per a algun enter  $k \geq 0$ , aleshores  $b(G) > D + k$ .

**Demostració.** Denotem per  $n_r^t$  el nombre màxim de vèrtexs a distància  $r$  del vèrtex origen,  $0 \leq r \leq D$ , que poden ser informats a l'instant  $t \geq r$ . Com que aquests vèrtexs només poden ser informats pels vèrtexs a distància  $r - 1$  o  $r$ , es compleix  $n_r^t \leq n_{r-1}^{t-1} + n_r^{t-1}$ . A més, per recurrència sobre  $t$  sabem que  $n_0^t = n_t^t = 1$ , per a tot  $t$ . Per tant,  $n_r^t \leq \binom{t}{r}$ . Aleshores, agafant  $t = D + k$  i  $r = D$ , obtenim que el nombre màxim de vèrtexs a distància  $D$  que poden ser informats a l'instant  $D + k$  és  $n_D^{D+k} \leq \binom{D+k}{k}$ , cosa que implica el resultat del lema.  $\square$

En particular, observem que per a  $k = 0$ , el resultat anterior ens diu que, si a distància  $D$  d'un vèrtex donat hi ha almenys dos vèrtexs, aleshores  $b(G) \geq D + 1$ .

**Teorema 2.2.2.** El temps de difusió per a una xarxa Manhattan bidimensional  $M_2 = M(N_1, N_2)$ , per a  $N_1, N_2 > 4$ , és  $D + 1$ . Aquest temps de difusió és òptim.

**Demostració.** El temps de difusió no pot ser  $D$ , ja que en les xarxes Manhattan bidimensional hi ha almenys 2 vèrtexs a distància  $D$  de l'origen (després de la demostració del teorema 2.1.9 hi ha la llista dels vèrtexs a distància màxima).

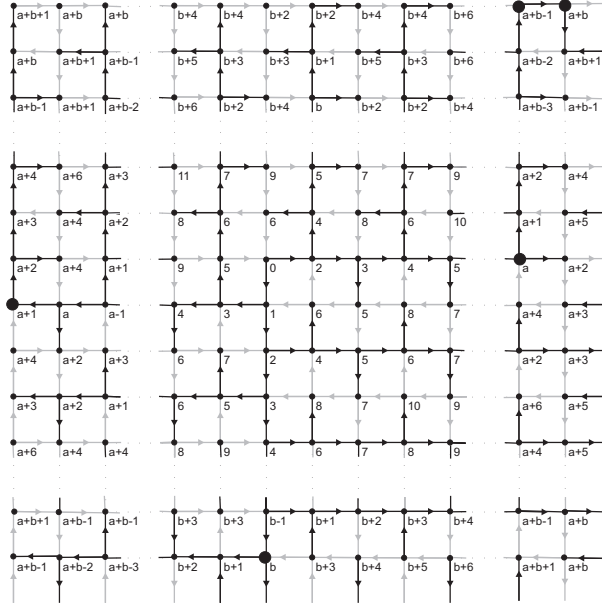


Figura 2.14: Arbre de difusió per a  $N_1 \equiv 0$ ,  $N_2 \equiv 2 \pmod{4}$ .

Aquest temps de difusió és òptim perquè s'assoleix en aplicar un algorisme de difusió, que hem denominat *cíclic*. Aquest algorisme l'hem obtingut mitjançant algorismes genètics (vegeu Koza [67] i Comellas i Dalfo [31]).

### Algorisme cíclic:

1. A la primera ronda, el vèrtex origen envia el missatge a través de l'arc de sortida horitzontal i a la segona ronda a través de l'arc de sortida vertical.
2. Els vèrtexs que reben el missatge a través d'un arc d'entrada horitzontal (respectivament, vertical), l'envien primer a través d'un arc de sortida horitzontal (respectivament, vertical) i després, a la ronda següent, a través d'un arc de sortida vertical (respectivament, horitzontal).

Com que la nostra xarxa Manhattan és toroidal, cal intercanviar l'ordre de l'algorisme en els vèrtexs següents (en la notació de la definició estàndard i partint del vèrtex origen):

- $N_1 \equiv N_2 \equiv 0 \pmod{4}$ :  
 $(\frac{N_1}{2} + 1, 1)$ ,  $(0, \frac{N_2}{2})$ ;
- $N_1 \equiv 0$ ,  $N_2 \equiv 2 \pmod{4}$ :  
 $(\frac{N_1}{2} + 1, 1)$ ,  $(0, \frac{N_2}{2})$ ,  $(\frac{N_1}{2} - 1, 0)$ ,  $(\frac{N_1}{2}, \frac{N_2}{2} + 1)$ ,  $(\frac{N_1}{2} - 1, \frac{N_2}{2} + 1)$ ;

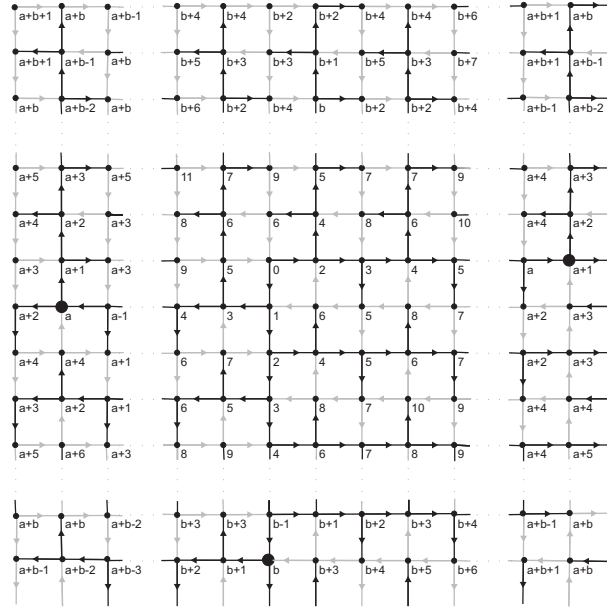


Figura 2.15: Arbre de difusió per a  $N_1 \equiv N_2 \equiv 2 \pmod{4}$ .

- $N_1 \equiv 2, N_2 \equiv 0 \pmod{4}$ :  
 $(0, \frac{N_2}{2} - 1), (\frac{N_1}{2} + 1, \frac{N_2}{2}), (\frac{N_1}{2} + 1, \frac{N_2}{2} - 1), (\frac{N_1}{2}, 0), (1, \frac{N_2}{2} + 1)$ ;
- $N_1 \equiv N_2 \equiv 2 \pmod{4}$ :  
 $(\frac{N_1}{2} + 2, 1), (0, \frac{N_2}{2}), (\frac{N_1}{2}, 0)$ .

Observem que, en els casos segon i tercer, els punts obtinguts són simètrics intercanviant els papers de  $N_1$  i  $N_2$ . Aquest algorisme ens dona el temps de difusió òptim  $D + 1$ . A les figures 2.13, 2.14 i 2.15 s'il·lustren els arbres de difusió per als casos  $N_1 \equiv N_2 \equiv 0 \pmod{4}$ ,  $N_1 \equiv 0, N_2 \equiv 2 \pmod{4}$  i  $N_1 \equiv N_2 \equiv 2 \pmod{4}$  (el cas  $N_1 \equiv 2, N_2 \equiv 0 \pmod{4}$  és simètric al segon cas).  $\square$

## 2.3 Espectre de les xarxes Manhattan

### 2.3.1 Introducció

En aquesta secció, calculem l'espectre de la xarxa Manhattan  $n$ -dimensional i mostrem, entre altres coses, que contenen l'espectre de l'hipercub. El coneixement de l'espectre d'un (di)graf és important per trobar alguns paràmetres rellevants, els quals en general són molt difícils de trobar per altres mètodes. En particular, l'espectre de la matriu d'adjacència d'un digraf conté informació sobre les seves

propietats d'expansió. Tanner [92] va ser el primer de remarcar aquest fet. En els articles de Sarnak [84] i en els de Chung *et al.* [24, 25, 26] s'han establert relacions similars per a altres paràmetres com, per exemple, el diàmetre.

En l'estudi de l'espectre de les xarxes Manhattan, caracteritzem l'espectre per al cas bidimensional, és a dir, calculem els seus valors i vectors propis. Per al cas  $n$ -dimensional, reduïm dràsticament la complexitat dels càlculs per trobar l'espectre.

Recordem alguns resultats sobre l'espectre de cicles dirigits  $C_N$ , el producte cartesià de dos cicles  $C_{N_1} \square C_{N_2}$  i el  $n$ -cub  $Q_n$ .

Els valors propis del cicle  $C_N$  són les  $N$  arrels de la unitat,  $\omega^k = e^{i\frac{2\pi}{N}k}$ , per a  $0 \leq k \leq N-1$ , i  $\phi^k = (1, \omega^k, \omega^{2k}, \dots, \omega^{(N-1)k})$  és un vector propi de  $\omega^k$ . De forma similar, els valors propis de  $C_{N_1} \square C_{N_2}$  són  $\omega^k + \tau^l = e^{i\frac{2\pi}{N_1}k} + e^{i\frac{2\pi}{N_2}l}$ , per a  $0 \leq k \leq N_1-1$  i  $0 \leq l \leq N_2-1$ . Els seus respectius vectors propis  $\phi = \phi^{(k,l)}$  tenen components  $\phi_{(i,j)} = \omega^{ik}\tau^{jl}$ . És important notar que els conjunts de vectors propis  $\{\phi^k\}_k$  i  $\{\phi^{(k,l)}\}_{k,l}$  són les bases ortogonals involucrades en el càlcul de la transformada discreta de Fourier (DFT) de dimensions 1 i 2, respectivament (vegeu Briggs i Henson [21]).

A més a més, l'espectre del  $n$ -cub  $Q_n$  és

$$\text{sp } Q_n = \{(n-2k) \binom{n}{k} : k = 0, 1, \dots, n\},$$

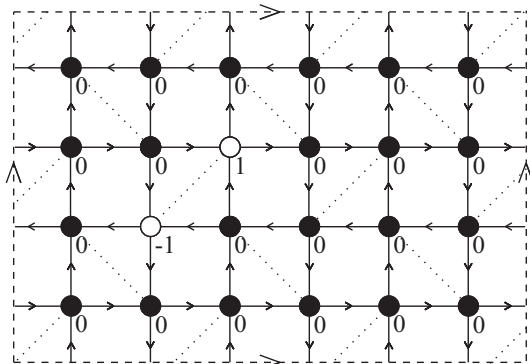
on els superíndexs denoten multiplicitats. En aquest cas, els vectors propis corresponents tenen components  $\pm 1$  i estan definits més endavant (ja que  $M_n(2, 2, \dots, 2) \cong Q_n$ ), vegeu, per exemple, Biggs [20].

Recordem també un resultat molt útil en la teoria espectral de (di)grafs. Per a un digraf, se sap que les components dels seus vectors propis es poden veure com a càrregues en els vèrtexs (vegeu Godsil [58] i Fiol i Mitjana [52]). Més concretament, suposem que  $G = (V, A)$  és un digraf amb matriu d'adjacència  $\mathbf{A}$  i  $\lambda$ -vector propi  $\mathbf{v}$ . Aleshores, la càrrega d'un vèrtex  $i \in V$  és la corresponent component  $v_i$  de  $\mathbf{v}$ . L'equació  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  ens dóna

$$\sum_{i \rightarrow j} v_j = \lambda v_i \quad \text{per a tot } i \in V. \quad (2.17)$$

És a dir, cada vèrtex “absorbeix” les càrregues del seus veïns de sortida per tenir una càrrega final  $\lambda$  vegades la que tenia originalment.

Una conseqüència directa del lema 2.1.3 i dels resultats de Fiol i Mitjana [52], que són rellevants en el nostre estudi, és que l'espectre en el cas bidimensional  $M(N_1, N_2)$  té el valor propi 0 amb multiplicitat almenys  $\frac{N_1 N_2}{2}$ . Com a exemple, la figura 2.16 il·lustra un 0-vector propi de  $M_2(6, 4)$  com una distribució de càrregues  $\pm 1$  i 0 en els seus vèrtexs. De fet, utilitzant (2.17), podem veure que cada vèrtex

Figura 2.16: Un 0-vector propi de  $M_2(6, 4)$ .

té veïns de sortida la càrrega total dels quals suma 0. Anàlogament, cadascun dels altres  $\frac{N_1 N_2}{2} - 1 = 11$  (linealment independents) 0-vectors propis s'obtidria posant càrrega 1 en un dels dos vèrtexs d'una diagonal puntejada,  $-1$  en l'altre i càrrega nul·la en la resta de vèrtexs.

### 2.3.2 Valors i vectors propis

La següent proposició mostra que l'espectre d'una xarxa Manhattan  $n$ -dimensional conté l'espectre del  $n$ -cub  $Q_n$ .

**Proposició 2.3.1.** *L'espectre d'una xarxa Manhattan  $n$ -dimensional  $M_n = M(N_1, N_2, \dots, N_n)$  conté tots els valors propis (incloent-hi les multiplicitats) del  $n$ -cub  $Q_n$ :*

$$\text{sp } Q_n \subseteq \text{sp } M_n,$$

on la igualtat és vàlida quan  $N_i = 2$ , per a  $1 \leq i \leq n$ .

A més a més, per a tot subconjunt  $I_k \subset \{1, 2, \dots, n\}$  de cardinalitat  $k$ ,  $0 \leq k \leq n$ , el vector  $\mathbf{w}$  amb components  $w_{\mathbf{u}} = \prod_{i \in I_k} (-1)^{u_i}$ , on  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  és un vector propi associat al valor propi  $\lambda = n - 2k$ .

**Demostració.** Els conjunts independents  $V_{\mathbf{b}}$ , definits després del lema 2.1.2, constitueixen una partició regular  $\pi$  del conjunt de vèrtexs de  $M_n$ . El corresponent digraf quocient  $M_n/\pi$  és clarament isomorf al  $n$ -cub  $Q_n$ . Aleshores, el polinomi característic de  $Q_n$  divideix el de  $M_n$  (vegeu Godsil [58, pàg. 78]). A més, quan  $N_i = 2$  per a  $1 \leq i \leq n$ , tenim la igualtat, ja que  $M_n(2, 2, \dots, 2) \cong Q_n$ .

Per trobar els vectors propis associats als valors propis, pensem en cada component d'un  $\lambda$ -vector propi  $\mathbf{w}$  com una "càrrega" en el corresponent vèrtex. Aleshores, la suma de les càrregues dels veïns de sortida d'un vèrtex  $\mathbf{u}$  és  $\lambda$  vegades la càrrega del vèrtex  $\mathbf{u}$  (vegeu Fiol i Mitjana [52]). Si la càrrega del

vèrtex  $\mathbf{u}$  és  $w_{\mathbf{u}} = \prod_{i \in I_k} (-1)^{u_i}$ , aleshores entre els seus  $n$  veïns de sortida, hi ha  $(n - k)$  vèrtexs amb càrrega  $w_{\mathbf{u}}$  (és a dir, aquells adjacents des de  $\mathbf{u}$  a través de  $i$ -arcs,  $i \notin I_k$ ) i  $k$  vèrtexs amb càrrega  $-w_{\mathbf{u}}$  (aquells adjacents des de  $\mathbf{u}$  a través de  $i$ -arcs,  $i \in I_k$ ). Aleshores,

$$\lambda w_{\mathbf{u}} = (n - k)w_{\mathbf{u}} - kw_{\mathbf{u}} = (n - 2k)w_{\mathbf{u}}.$$

Per completar la demostració, observem que, per a tot valor de  $k$ , les  $\binom{n}{k}$  eleccions possibles de  $I_k$  donen el mateix nombre de vectors propis linealment independents  $\mathbf{w}$ . De fet, el pes  $w_{\mathbf{u}}$  del vèrtex  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$  només depèn de la paritat de les components de  $I_k$ . Aleshores, els vectors  $\mathbf{w}$  són també vectors propis del  $n$ -cub  $Q_n \cong M_n(2, 2, \dots, 2)$ . Per tant, la multiplicitat geomètrica del valor propi  $\lambda = n - 2k$  és  $\binom{n}{k}$ , com esperàvem, ja que per a cada valor propi aquest és el nombre de vectors propis linealment independents.  $\square$

### El cas bidimensional

L'espectre d'una xarxa Manhattan bidimensional  $M(N_1, N_2)$  es pot calcular a partir dels valors propis dels cicles dirigits  $C_{N_i}$ ,  $i = 1, 2$ .

**Teorema 2.3.2.** *Els valors propis d'una xarxa Manhattan bidimensional  $M_2 = M(N_1, N_2)$  són*

$$0, \pm \sqrt{2 \cos\left(\frac{4\pi k}{N_1}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi l}{N_2}\right)} \quad \text{per a } 0 \leq k \leq \frac{N_1}{2} - 1, 0 \leq l \leq \frac{N_2}{2} - 1. \quad (2.18)$$

A més a més, la multiplicitat geomètrica de cada valor propi no nul coincideix amb el nombre de vegades que apareix en (2.18), mentre que la multiplicitat geomètrica del valor propi zero satisfà  $m(0) \geq \frac{N_1 N_2}{2}$ . La igualtat es dona quan  $N_i \not\equiv 0 \pmod{4}$ ,  $i = 1, 2$ .

**Demostració.** Sigui  $\mathbf{A}$  la matriu d'adjacència de la xarxa Manhattan bidimensional  $M_2 = M(N_1, N_2)$ . Siguin  $\lambda_1 = e^{i\frac{2\pi}{N_1}k}$  i  $\lambda_2 = e^{i\frac{2\pi}{N_2}l}$  els valors propis dels cicles  $C_{N_1}$  i  $C_{N_2}$ , per a  $0 \leq k \leq N_1 - 1$  i  $0 \leq l \leq N_2 - 1$ , respectivament. Aleshores, a partir dels seus corresponents vectors propis

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= (x_0, x_1, \dots, x_{N_1-1}) = (1, \lambda_1, \lambda_1^2, \dots, \lambda_1^{N_1-1}), \\ \mathbf{y} &= (y_0, y_1, \dots, y_{N_2-1}) = (1, \lambda_2, \lambda_2^2, \dots, \lambda_2^{N_2-1}). \end{aligned}$$

definim un  $\lambda$ -vector propi  $\mathbf{w}$  de  $M_2$ , les components del qual són de la forma:

$$w_{(i,j)} = \alpha x_i y_j + \beta x_{-i} y_{-j} + \gamma x_i y_{-j} + \delta x_{-i} y_j, \quad (2.19)$$



per a algunes constants  $\alpha, \beta, \gamma$  i  $\delta$  a determinar. En termes dels vectors propis del producte cartesià  $C_{N_1} \square C_{N_2}$ , això correspon a agafar el vector

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}^{(k,l)} = \alpha \boldsymbol{\phi}^{(k,l)} + \beta \boldsymbol{\phi}^{(-k,-l)} + \gamma \boldsymbol{\phi}^{(k,-l)} + \delta \boldsymbol{\phi}^{(-k,l)}. \quad (2.20)$$

Aleshores, per construir  $\mathbf{w}$ , utilitzem no només  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$ , sinó també els seus vectors conjugats  $\overline{\mathbf{x}} = (\overline{x_0}, \overline{x_1}, \dots, \overline{x_{N_1-1}})$  i  $\overline{\mathbf{y}} = (\overline{y_0}, \overline{y_1}, \dots, \overline{y_{N_2-1}})$ , els quals corresponen als valors propis  $\overline{\lambda_1} = e^{-i\frac{2\pi}{N_1}k}$  i  $\overline{\lambda_2} = e^{-i\frac{2\pi}{N_2}l}$ , respectivament. Per tant, sense pèrdua de generalitat, podem restringir-nos als rangs  $0 \leq k \leq \frac{N_1}{2}$  i  $0 \leq l \leq \frac{N_2}{2}$ .

Ara, interpretant de nou les components d'un vector propi com a càrregues en els vèrtexs, vegeu (2.17), es compleixen les equacions següents:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= \lambda_1 x_i, & x_{-i} &= \lambda_1 x_{-i-1}, & i &\in \mathbb{Z}_{N_1}; \\ y_{j+1} &= \lambda_2 y_j, & y_{-j} &= \lambda_2 y_{-j-1}, & j &\in \mathbb{Z}_{N_2}. \end{aligned}$$

A més, com que  $\lambda_i^{-1} = \overline{\lambda_i}$ , les dues igualtats de la dreta es poden escriure com a:

$$\begin{aligned} x_{-i-1} &= \overline{\lambda_1} x_{-i}, & i &\in \mathbb{Z}_{N_1}; \\ y_{-j-1} &= \overline{\lambda_2} y_{-j}, & j &\in \mathbb{Z}_{N_2}. \end{aligned}$$

A causa de l'equació (2.17), tenim que, per a tot vèrtex  $(i, j)$  de  $M_2$ ,

$$(\mathbf{A}\mathbf{w})_{(i,j)} = \sum_{(i',j') \leftarrow (i,j)} w_{(i',j')} = \lambda w_{(i,j)}.$$

Aleshores, tenint en compte que el vèrtex  $(i, j)$  és adjacent als vèrtexs  $(i+1, -j)$  i  $(-i, j+1)$  i utilitzant l'expressió de  $w_{(i,j)}$  en (2.19), l'equació anterior s'escriu:

$$\begin{aligned} w_{(i+1,-j)} + w_{(-i,j+1)} &= \alpha x_{i+1} y_{-j} + \beta x_{-i-1} y_j + \gamma x_{i+1} y_j + \delta x_{-i-1} y_{-j} \\ &+ \alpha x_{-i} y_{j+1} + \beta x_i y_{-j-1} + \gamma x_{-i} y_{-j-1} + \delta x_i y_{j+1} \\ &= \lambda (\alpha x_i y_j + \beta x_{-i} y_{-j} + \gamma x_i y_{-j} + \delta x_{-i} y_j), \end{aligned}$$

d'on, per a tot  $i, j$ ,

$$\begin{aligned} &\alpha \lambda_1 x_i y_{-j} + \frac{\beta}{\lambda_1} x_{-i} y_j + \gamma \lambda_1 x_i y_j + \frac{\delta}{\lambda_1} x_{-i} y_{-j} \\ &+ \alpha \lambda_2 x_{-i} y_j + \frac{\beta}{\lambda_2} x_i y_{-j} + \frac{\gamma}{\lambda_2} x_{-i} y_{-j} + \delta \lambda_2 x_i y_j \\ &= (\gamma \lambda_1 + \delta \lambda_2) x_i y_j + \left( \frac{\delta}{\lambda_1} + \frac{\gamma}{\lambda_2} \right) x_{-i} y_{-j} + \left( \alpha \lambda_1 + \frac{\beta}{\lambda_2} \right) x_i y_{-j} \\ &+ \left( \frac{\beta}{\lambda_1} + \alpha \lambda_2 \right) x_{-i} y_j = \lambda (\alpha x_i y_j + \beta x_{-i} y_{-j} + \gamma x_i y_{-j} + \delta x_{-i} y_j) \end{aligned}$$

o, en termes dels corresponents vectors propis,

$$\begin{aligned} &(\gamma \lambda_1 + \delta \lambda_2) \boldsymbol{\phi}^{(k,l)} + \left( \frac{\delta}{\lambda_1} + \frac{\gamma}{\lambda_2} \right) \boldsymbol{\phi}^{(-k,-l)} + \left( \alpha \lambda_1 + \frac{\beta}{\lambda_2} \right) \boldsymbol{\phi}^{(k,-l)} \\ &+ \left( \frac{\beta}{\lambda_1} + \alpha \lambda_2 \right) \boldsymbol{\phi}^{(-k,l)} \end{aligned} \quad (2.21)$$

$$= \lambda \alpha \boldsymbol{\phi}^{(k,l)} + \lambda \beta \boldsymbol{\phi}^{(-k,-l)} + \lambda \gamma \boldsymbol{\phi}^{(k,-l)} + \lambda \delta \boldsymbol{\phi}^{(-k,l)}. \quad (2.22)$$

Ara hem de distingir quatre casos, depenent dels valors de  $k$  i  $l$ :

- (a) Suposem que  $0 < k < \frac{N_1}{2}$  i  $0 < l < \frac{N_2}{2}$ . Aleshores, com que  $k \neq -k$  i  $l \neq -l$ , els quatre vectors  $\phi^{(\pm k, \pm l)}$  són linealment independents i els seus respectius coeficients han de ser iguals. Aleshores, (2.22) dóna l'equació matricial:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_1} \\ \lambda_1 & \frac{1}{\lambda_2} & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}. \quad (2.23)$$

Per tant,  $\lambda$  és un valor propi d'aquesta matriu, el polinomi característic de la qual és

$$p(x) = x^4 - x^2(\lambda_1^2 + \lambda_1^{-2} + \lambda_2^2 + \lambda_2^{-2}), \quad (2.24)$$

amb les arrels  $x = 0$  (doble) i  $x = \pm \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_1^{-2} + \lambda_2^2 + \lambda_2^{-2}}$ . Els corresponents vectors propis són les files de la matriu

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & -\lambda_1 \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\overline{\lambda_1} \lambda_2 & 1 \\ \frac{\lambda \lambda_1^2 \lambda_2}{1 + \lambda_1^2 \lambda_2^2} & \frac{\lambda \lambda_1}{1 + \lambda_1^2 \lambda_2^2} & \lambda_1 \overline{\lambda_2} & 1 \\ -\frac{\lambda \lambda_1^2 \lambda_2}{1 + \lambda_1^2 \lambda_2^2} & -\frac{\lambda \lambda_1}{1 + \lambda_1^2 \lambda_2^2} & \lambda_1 \overline{\lambda_2} & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.25)$$

on

$$\lambda = \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_1^{-2} + \lambda_2^2 + \lambda_2^{-2}} = \sqrt{2 \cos\left(\frac{4\pi k}{N_1}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi l}{N_2}\right)}. \quad (2.26)$$

Aleshores, per a cada parell de valors propis  $\lambda_1$  i  $\lambda_2$  dels cicles  $C_{N_1}$  i  $C_{N_2}$ , els vectors propis del valor propi 0 (amb multiplicitat dos) i  $\pm \lambda$  de  $M_2(N_1, N_2)$  són, respectivament,

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1^{(k,l)} &= \phi^{(k,l)} - \lambda_1 \lambda_2 \phi^{(-k,-l)}, \\ \mathbf{w}_2^{(k,l)} &= -\overline{\lambda_1} \lambda_2 \phi^{(k,-l)} + \phi^{(-k,l)}, \\ \mathbf{w}_3^{(k,l)} &= \frac{\lambda \lambda_1^2 \lambda_2}{1 + \lambda_1^2 \lambda_2^2} \phi^{(k,l)} + \frac{\lambda \lambda_1}{1 + \lambda_1^2 \lambda_2^2} \phi^{(-k,-l)} + \lambda_1 \overline{\lambda_2} \phi^{(k,-l)} + \phi^{(-k,l)}, \\ \mathbf{w}_4^{(k,l)} &= -\frac{\lambda \lambda_1^2 \lambda_2}{1 + \lambda_1^2 \lambda_2^2} \phi^{(k,l)} - \frac{\lambda \lambda_1}{1 + \lambda_1^2 \lambda_2^2} \phi^{(-k,-l)} + \lambda_1 \overline{\lambda_2} \phi^{(k,-l)} + \phi^{(-k,l)}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Com que els quatre vectors  $\phi^{(\pm k, \pm l)}$  són linealment independents (de fet, són ortogonals), els dos vectors propis  $\mathbf{w}_1^{(k,l)}$  i  $\mathbf{w}_2^{(k,l)}$ , corresponents al valor propi 0, també ho són. Aleshores, el valor propi zero té com a multiplicitat el valor  $2\left(\frac{N_1}{2} - 1\right)\left(\frac{N_2}{2} - 1\right)$ .

A més a més, quan el valor de  $\lambda$  en (2.26) no és nul, tots els vectors propis  $\mathbf{w}_i^{(k,l)}$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , són també linealment independents. Això és degut a la

independència lineal dels vectors  $\phi^{(\pm k, \pm l)}$  i al fet que el determinant de la matriu en (2.25) és

$$\det \mathbf{B} = \frac{2\lambda(\lambda_1^2 + \lambda_2^2)}{\lambda_2}.$$

Així, quan  $\lambda \neq 0$ , les files de la matriu són linealment independents.

Vegem ara que  $\lambda = 0$  quan  $N_i \equiv 0 \pmod{4}$ , per a algun  $i = 1, 2$ . De fet, de l'equació (2.26),  $\lambda = 0$  si i només si  $\cos(\frac{4\pi k}{N_1}) + \cos(\frac{4\pi l}{N_2}) = 0$ , és a dir, o els dos angles són iguals a un múltiple senar de  $\frac{\pi}{2}$  o ho són la seva suma o diferència.

En el primer cas, tenim  $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 = 0$  i  $N_1 \equiv N_2 \equiv 0 \pmod{4}$ . En el segon cas,  $\lambda_i^4 + 1 = 0$  i  $N_i \equiv 0 \pmod{4}$  per a almenys un valor de  $i \in \{1, 2\}$ .

Finalment, si  $(k', l') \neq (k, l)$ , tot vector  $\mathbf{w}_i^{(k', l')}$  és ortogonal a  $\mathbf{w}_i^{(k, l)}$ , per a  $1 \leq i \leq 4$ .

Resumint, en el cas (a) tenim:

- El valor propi zero amb multiplicitat geomètrica  $2(\frac{N_1}{2} - 1)(\frac{N_2}{2} - 1)$ .
- Si  $N_i \not\equiv 0 \pmod{4}$ ,  $i = 1, 2$ , hi ha  $2(\frac{N_1}{2} - 1)(\frac{N_2}{2} - 1)$  valors propis no nuls, la suma de les multiplicitats geomètriques dels quals també és  $2(\frac{N_1}{2} - 1)(\frac{N_2}{2} - 1)$ .

(b)  $0 < k < \frac{N_1}{2}$ ,  $l \in \{0, \frac{N_2}{2}\}$ , és a dir,  $k \neq -k$ ,  $\lambda_2 = \pm 1$ . L'expressió del vector en (2.20) és ara

$$\mathbf{w} = \alpha \phi^{(k, l)} + \delta \phi^{(-k, l)},$$

que correspon a agafar  $\beta = \gamma = 0$  en l'equació (2.22). En forma matricial, obtenim dues equacions:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \pm 1 \\ \pm 1 & \frac{1}{\lambda_1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \delta \end{pmatrix}, \quad (2.28)$$

agafant el signe positiu o el negatiu. Les dues matrius tenen el mateix polinomi característic

$$p(x) = x(x - \lambda_1 - \frac{1}{\lambda_1}). \quad (2.29)$$

Aleshores, obtenim els valors propis 0 i

$$\lambda = \lambda_1 + \bar{\lambda}_1 = 2 \cos\left(\frac{2\pi k}{N_1}\right) = \sqrt{2 \cos\left(\frac{4\pi k}{N_1}\right) + 2}. \quad (2.30)$$

Aquest darrer valor propi correspon a agafar  $l = 0$  en (2.26).

Per tant, en aquest cas tenim el valor propi 0 amb multiplicitat geomètrica  $2(\frac{N_1}{2} - 1)$  i un nombre igual de diferents  $\lambda$  a partir de (2.30).

(c)  $k \in \{0, \frac{N_1}{2}\}$ ,  $0 < l < \frac{N_2}{2}$ , és a dir,  $\lambda_1 = \pm 1$ ,  $l \neq -l$ . Aquest cas és similar a l'anterior amb els valors propis 0 i

$$\lambda = \lambda_2 + \overline{\lambda_2} = 2 \cos\left(\frac{2\pi l}{N_2}\right) = \sqrt{2 \cos\left(\frac{4\pi l}{N_2}\right) + 2}. \quad (2.31)$$

De nou, la multiplicitat geomètrica de 0 és  $2\left(\frac{N_2}{2} - 1\right)$  i hi ha també  $2\left(\frac{N_2}{2} - 1\right)$  valors propis a partir de (2.31).

(d)  $k \in \{0, \frac{N_1}{2}\}$ ,  $l \in \{0, \frac{N_2}{2}\}$ , és a dir,  $\lambda_1 = \pm 1$ ,  $\lambda_2 = \pm 1$ . Com que  $k = -k$  i  $l = -l$ , l'expressió del vector (2.20) és ara  $\mathbf{w} = \alpha \boldsymbol{\phi}^{(k,l)}$ . Això correspon a agafar  $\beta = \gamma = \delta = 0$  en (2.20). Aleshores, l'equació (2.22) es pot escriure com

$$\begin{aligned} 2\alpha \boldsymbol{\phi}^{(0,0)} &= \lambda \alpha \boldsymbol{\phi}^{(0,0)} && \text{per a } \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \\ 0 &= \lambda \alpha \boldsymbol{\phi}^{(0, \frac{N_2}{2})} && \text{per a } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \\ 0 &= \lambda \alpha \boldsymbol{\phi}^{(\frac{N_1}{2}, 0)} && \text{per a } \lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \\ -2\alpha \boldsymbol{\phi}^{(\frac{N_1}{2}, \frac{N_2}{2})} &= \lambda \alpha \boldsymbol{\phi}^{(\frac{N_1}{2}, \frac{N_2}{2})} && \text{per a } \lambda_1 = \lambda_2 = -1, \end{aligned}$$

d'on s'obtenen, respectivament, els valors propis  $\lambda = 2$ ,  $\lambda = 0$  (doble) i  $\lambda = -2$ .

Finalment, la suma de tots els valors propis no nuls diferents és  $\frac{N_1}{2} + \frac{N_2}{2} + 2$  i la mateixa quantitat per a  $\lambda = 0$ . Aleshores, juntament amb els valors propis obtinguts quan  $k \neq -k, l \neq -l$ , arribem a la conclusió que la multiplicitat del valor propi zero és almenys  $\frac{N_1 N_2}{2}$ , com volíem demostrar.  $\square$

**Corol·lari 2.3.3.** *Si  $N_1, N_2 \not\equiv 0 \pmod{4}$ , aleshores l'espectre de la xarxa Manhattan bidimensional  $M_2 = M(N_1, N_2)$  és*

$$\text{sp } M_2 = \left\{ 0^{\frac{N_1 N_2}{2}}, \pm \sqrt{2 \cos\left(\frac{4\pi k}{N_1}\right) + 2 \cos\left(\frac{4\pi l}{N_2}\right)} \mid 0 \leq k < \frac{N_1}{2}, 0 \leq l < \frac{N_2}{2} \right\},$$

on el superíndex denota multiplicitat. A més, les multiplicitats algebraica i geomètrica coincideixen.

En els resultats anteriors, haguéssim pogut utilitzar que un  $\lambda$ -vector propi del cicle  $C_N$  és  $\boldsymbol{\omega} = (1, \lambda, \lambda^2, \dots, \lambda^{N-1})$ , però això no hagués simplificat els càlculs.

Alguns exemples dels espectres obtinguts a partir del resultat anterior són els

següents:

$$\begin{aligned}
\text{sp } M(2, 2) &= \{0^2, \pm 2\}, \\
\text{sp } M(4, 2) &= \{0^6, \pm 2\}, \\
\text{sp } M(4, 4) &= \{0^{12}, \pm 2, \pm 2i\}, \\
\text{sp } M(4, 6) &= \{0^{14}, \pm 2, (\pm 1)^2, (\pm\sqrt{3}i)^2\}, \\
\text{sp } M(8, 4) &= \{0^{20}, \pm 2, (\pm\sqrt{2})^2, (\pm\sqrt{2}i)^2, \pm 2i\}, \\
\text{sp } M(6, 6) &= \{0^{18}, \pm 2, (\pm 1)^4, (\pm\sqrt{2}i)^4\}, \\
\text{sp } M(8, 6) &= \{0^{26}, (\pm 1)^2, \pm 2, (\pm i)^4, (\pm\sqrt{3}i)^2, (\pm\sqrt{2})^2\}, \\
\text{sp } M(8, 8) &= \{0^{46}, \pm 2, (\pm\sqrt{2})^4, (\pm\sqrt{2}i)^4, \pm 2i\}, \\
\text{sp } M(6, 10) &= \{0^{30}, \pm 2, (\pm 1)^2, (\pm 2 \cos(\frac{\pi}{5}))^2, (\pm 2 \cos(\frac{2\pi}{5}))^2, \\
&\quad (\pm i \sqrt{3 - 4 \cos^2(\frac{\pi}{5})})^4, (\pm i \sqrt{3 - 4 \cos^2(\frac{2\pi}{5})})^4\}.
\end{aligned}$$

### El cas tridimensional

Fent un raonament similar al fet pel cas bidimensional per a la xarxa Manhattan tridimensional  $M_3 = M(N_1, N_2, N_3)$ , el qual es generalitzarà en el cas  $n$ -dimensional, obtenim

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} & \frac{1}{\lambda_2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_2 & \frac{1}{\lambda_3} & 0 & \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_3 & \frac{1}{\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} & \frac{1}{\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} & 0 & \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_2} & \lambda_1 & 0 & \lambda_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\lambda_1} & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \\ \zeta \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \\ \epsilon \\ \zeta \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

on  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  són els valors propis dels cicles dirigits  $C_{N_1}, C_{N_2}, C_{N_3}$ , respectivament. Aleshores, podem simplificar l'estudi dels valors propis de l'expressió (2.32) al càlcul dels zeros del polinomi característic de la matriu

$$\begin{pmatrix} 0 & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \lambda_1 & 0 & \frac{1}{\lambda_3} & \frac{1}{\lambda_2} \\ \lambda_2 & \frac{1}{\lambda_3} & 0 & \frac{1}{\lambda_1} \\ \lambda_3 & \frac{1}{\lambda_2} & \frac{1}{\lambda_1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.33)$$

el qual és

$$p_3(x) = -x^4 + Ax^2 + 2Bx + 3,$$

on

$$\begin{aligned} A &:= \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 + \frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2} + \frac{1}{\lambda_3^2}, \\ B &:= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 \lambda_3} + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \lambda_3} + \frac{\lambda_3}{\lambda_1 \lambda_2}. \end{aligned}$$

Aleshores, com que 1 i  $-1$  són sempre valors propis del  $N$ -cicle  $C_N$ , hi ha dos conjunts fixats de valors possibles dels coeficients  $A, B$ , que són  $A = 6, B = 4$  i  $A = 6, B = -4$ . En el primer cas, els valors propis de la xarxa Manhattan són  $\lambda = 3, -1$ . Els seus oposats  $\lambda = -3, 1$  corresponen al segon cas.

Altres possibles situacions que poden ajudar en el coneixement de l'espectre són els següents:

- $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ :  $p(x) = (x + \lambda_3)(x + \frac{1}{\lambda_3})(x^2 - (\frac{1}{\lambda_3^2} + 1)x - 3)$ .
- $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$ :  $p(x) = (x - \lambda_3)(x - \frac{1}{\lambda_3})(x^2 + (\frac{1}{\lambda_3^2} + 1)x - 3)$ .
- Si  $N_1 \equiv 0 \pmod{4}$ , aleshores  $\lambda_1 = \pm i$ :
  - $\lambda_1 = \pm i, \lambda_2 = \lambda_3 = \pm 1$ :  $p(x) = -(x^2 + 1)(x^2 - 3)$ .
  - $\lambda_1 = \pm i, \lambda_2 = \pm 1$ :  $p(x) = -x^4 + (\lambda_3^2 + \lambda_3^{-2})x^2 + 3$ .
- Si  $N_1 \equiv N_2 \equiv 0 \pmod{4}$ , aleshores  $\lambda_1 = \pm i, \lambda_2 = \pm i$ :
  - $\lambda_1 = \pm i, \lambda_2 = \pm i, \lambda_3 = \pm 1$ :  $p(x) = -(x + 1)(x - 1)(x^2 + 3)$ .

### El cas $n$ -dimensional

Per trobar l'espectre d'una xarxa Manhattan  $n$ -dimensional amb  $n > 3$ , hem de tenir en compte l'espectre dels hipercubs i dels hipercubs plegats. Recordem la definició del darrer.

El  $(n + 1)$ -*cub plegat*, normalment denotat per  $\tilde{Q}_n$ , s'obté de l'hipercub  $Q_n$  afegint una aresta entre cada parell de vèrtexs antipodals, és a dir,  $x_1 x_2 \dots x_n \sim \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_n$ . Aleshores,  $\tilde{Q}_n$  és un graf  $(n + 1)$ -regular amb  $2^n$  vèrtexs, diàmetre  $D = \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$  i valors propis diferents

$$\text{ev } \tilde{Q}_n = \{n + 1 > n - 3 > n - 7 > \dots\}$$

(vegeu, per exemple, Biggs [20]). Una manera alternativa d'obtenir  $\tilde{Q}_n$  és identificant els vèrtexs antipodals de l'hipercub  $Q_{n+1}$ .

El graf que anomenem  $n$ -*cub conjugat*, representat per  $\bar{Q}_n$ , té el mateix conjunt de vèrtexs que l'hipercub,  $\mathbb{Z}_2^n$ , i dos vèrtexs són adjacents quan les corresponents etiquetes dels vèrtexs difereixen en totes les components excepte una:

$$x_1 x_2 \dots x_{i-1} x_i x_{i+1} \dots x_n \sim \bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_{i-1} x_i \bar{x}_{i+1} \dots \bar{x}_n \quad \text{per a } 1 \leq i \leq n.$$

Aleshores,  $\overline{Q}_n$  és un graf  $n$ -regular, el qual, de fet, coincideix o amb l'hipercub o amb l'hipercub plegat, depenent de la dimensió, com mostra el resultat següent:

**Lema 2.3.4.** *Sigui  $\overline{Q}_n$  l'hipercub conjugat de dimensió  $n$ . Aleshores,*

- (a)  $\overline{Q}_n \cong Q_n$  si  $n$  és parell.
- (b)  $\overline{Q}_n \cong \tilde{Q}_{n-1} \cup \tilde{Q}_{n-1}$  si  $n$  és senar.

**Demostració.** (a) Si  $n$  és parell, podem obtenir  $\overline{Q}_n$  a partir de l'hipercub  $Q_n$  simplement conjugant tots els vèrtexs el pes de Hamming dels quals sigui senar. Aquests vèrtexs constitueixen un conjunt independent en  $Q_n$  (vist com a graf bipartit). Aleshores, el graf obtingut té les mateixes adjacències que  $\overline{Q}_n$ .

(b) Si  $n$  és senar, primer considerem el  $n$ -cub plegat  $\tilde{Q}_{n-1}$  obtingut identificant els vèrtexs antipodals de l'hipercub  $Q_n$  (com hem comentat abans). Aleshores, els vèrtexs de  $\tilde{Q}_{n-1}$  es poden identificar amb els 2-conjunts  $\{x_1x_2 \dots x_n, \overline{x_1}\overline{x_2} \dots \overline{x_n}\}$  i les adjacències són:

$$\begin{aligned} & \{x_1x_2 \dots x_{i-1}x_ix_{i+1} \dots x_n, \overline{x_1}\overline{x_2} \dots \overline{x_{i-1}}\overline{x_i}\overline{x_{i+1}} \dots \overline{x_n}\} \\ & \sim \{x_1x_2 \dots x_{i-1}\overline{x_i}\overline{x_{i+1}} \dots x_n, \overline{x_1}\overline{x_2} \dots \overline{x_{i-1}}x_ix_{i+1} \dots x_n\}. \end{aligned}$$

Però això correspon a les següents adjacències en  $\overline{Q}_n$  (una en cada còpia de  $\tilde{Q}_{n-1}$ )

$$\begin{aligned} x_1x_2 \dots x_{i-1}x_ix_{i+1} \dots x_n & \sim \overline{x_1}\overline{x_2} \dots \overline{x_{i-1}}x_ix_{i+1} \dots \overline{x_n}, \\ \overline{x_1}\overline{x_2} \dots \overline{x_{i-1}}\overline{x_i}\overline{x_{i+1}} \dots \overline{x_n} & \sim x_1x_2 \dots x_{i-1}\overline{x_i}\overline{x_{i+1}} \dots x_n. \end{aligned}$$

Observem que, en aquest cas, els  $2^n$  vèrtexs de  $\overline{Q}_n$  es troben en dos conjunts sense arestes entre ells, que són els conjunts de vèrtexs de les dues còpies de  $\tilde{Q}_{n-1}$ . Com que  $n$  és senar, els dos conjunts tenen la mateixa mida i contenen totes les seqüències tals que el nombre de "1" tenen la mateixa paritat (parell o senar). Això completa la demostració.  $\square$

Com a exemple, les figures 2.17 i 2.18 mostren  $\overline{Q}_3$  i  $\overline{Q}_4$  que corresponen als casos (b) i (a), respectivament, del lema anterior.

El resultat següent redueix el càlcul dels valors propis de la xarxa Manhattan  $n$ -dimensional  $M_n = M(N_1, N_2, \dots, N_n)$  a l'estudi de l'espectre de la matriu  $n \times n$   $\mathbf{W}$ , corresponent a la matriu d'adjacència d'un  $n$ -cub conjugat amb pesos, definit de la manera següent: siguin  $i_0i_1 \dots i_{n-1}$  i  $j_0j_1 \dots j_{n-1}$  les expressions binàries dels vèrtexs  $i, j$  (fila i columna de  $\mathbf{W}$ ). Aleshores, les components de  $\mathbf{W} = (w_{ij})$  són

$$w_{ij} = \begin{cases} \lambda_k, & \text{si } i_m \neq j_m \text{ per a tot } m \neq k \text{ i } i_k = j_k = 0, \\ \lambda_k^{-1} = \overline{\lambda_k}, & \text{si } i_m \neq j_m \text{ per a tot } m \neq k \text{ i } i_k = j_k = 1, \\ 0, & \text{altrament,} \end{cases} \quad (2.34)$$

on  $i, j \in \{0, 1, \dots, n-1\}$  i  $\lambda_k$  és un valor propi del cicle  $C_{N_k}$ , per a  $k = 1, 2, \dots, n$ .

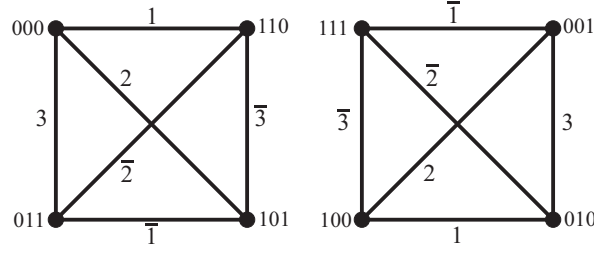


Figura 2.17: L'hipercub conjugat  $\bar{Q}_3 \cong \tilde{Q}_2 \cup \tilde{Q}_2$ .

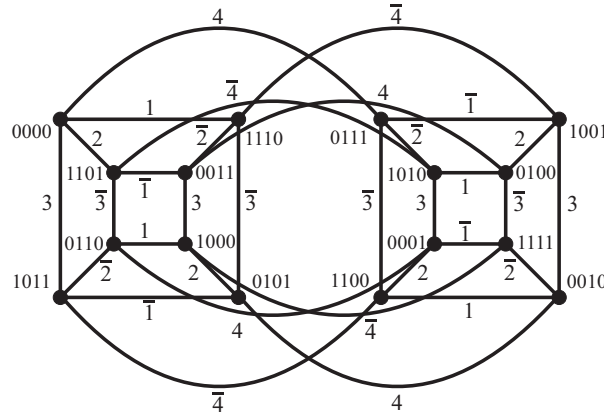


Figura 2.18: L'hipercub conjugat  $\bar{Q}_4 \cong Q_4$ .

**Teorema 2.3.5.** Per a qualssevol  $n$  enters  $N_1, N_2, \dots, N_n$ , els valors propis diferents de la xarxa Manhattan  $n$ -dimensional  $M_n = M(N_1, N_2, \dots, N_n)$  coincideixen amb els valors propis diferents del  $n$ -cub conjugat amb pesos  $\bar{Q}_n^*$ :

$$\text{ev } M_n = \text{ev } \bar{Q}_n^*. \quad (2.35)$$

**Demostració.** Sigui  $\mathbf{u}^j = (u_0^j, u_1^j, \dots, u_{N_j-1}^j)$  un vector propi del cicle  $C_{N_j}$ , amb el corresponent valor propi  $\lambda_j$ . Aleshores, com s'ha dit abans, les seves components satisfan  $u_{k+1}^j = \lambda_j u_k^j$  i  $u_{-k-1}^j = \frac{1}{\lambda_j} u_{-k}^j$ . Suposem que un vector propi  $\mathbf{w}$  de  $M_n$ , amb valor propi desconegut  $\lambda$ , té components (càrregues)

$$\begin{aligned} w_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} &= \alpha_{00\dots 0} u_{i_1}^1 u_{i_2}^2 \dots u_{i_n}^n + \dots + \alpha_{11\dots 1} u_{-i_1}^1 u_{-i_2}^2 \dots u_{-i_n}^n \\ &= \sum_{x \in \mathbb{Z}_2^n} \alpha_{x_1 x_2 \dots x_n} u_{(-1)^{x_1} i_1}^1 u_{(-1)^{x_2} i_2}^2 \dots u_{(-1)^{x_n} i_n}^n, \end{aligned} \quad (2.36)$$

on  $x = x_1 x_2 \dots x_n \in \mathbb{Z}_2^n$ . Aleshores, com que el vèrtex  $(i_1, i_2, \dots, i_j, \dots, i_n)$  en  $M_n$  és adjacent als vèrtexs  $(-i_1, -i_2, \dots, i_j + 1, \dots, -i_n)$ , per a  $j = 1, 2, \dots, n$ , i



utilitzant un raonament equivalent al del teorema 2.3.2, obtenim el següent:

$$\begin{aligned}
\lambda w_{(i_1, i_2, \dots, i_n)} &= \sum_{x \in \mathbb{Z}_2^n} \lambda \alpha_x u_{(-1)^{x_1} i_1}^1 u_{(-1)^{x_2} i_2}^2 \cdots u_{(-1)^{x_n} i_n}^n \\
&= \sum_{j=1}^n \sum_{y \in \mathbb{Z}_2^n} \alpha_y u_{(-1)^{y_1+1} i_1}^1 u_{(-1)^{y_2+1} i_2}^2 \cdots u_{(-1)^{y_j} (i_j+1)}^j \cdots u_{(-1)^{y_n+1} i_n}^n \\
&= \sum_{y \in \mathbb{Z}_2^n} \sum_{j=1}^n \alpha_y u_{(-1)^{y_1+1} i_1}^1 u_{(-1)^{y_2+1} i_2}^2 \cdots \lambda_j^{(-1)^{y_j}} u_{(-1)^{y_j} i_j}^j \cdots u_{(-1)^{y_n+1} i_n}^n \\
&= \sum_{x \in \mathbb{Z}_2^n} \sum_{j=1}^n \alpha_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_j \dots \bar{x}_n} u_{(-1)^{\bar{x}_1+1} i_1}^1 u_{(-1)^{\bar{x}_2+1} i_2}^2 \cdots \lambda_j^{(-1)^{x_j}} u_{(-1)^{x_j} i_j}^j \cdots u_{(-1)^{\bar{x}_n+1} i_n}^n \\
&= \sum_{x \in \mathbb{Z}_2^n} \sum_{j=1}^n \lambda_j^{(-1)^{x_j}} \alpha_{\bar{x}_1 \bar{x}_2 \dots \bar{x}_j \dots \bar{x}_n} u_{(-1)^{x_1} i_1}^1 u_{(-1)^{x_2} i_2}^2 \cdots u_{(-1)^{x_j} i_j}^j \cdots u_{(-1)^{x_n} i_n}^n.
\end{aligned}$$

Aleshores, com que aquestes igualtats se satisfan per a qualsevol  $u_{i_1}^1, u_{i_2}^2, \dots, u_{i_n}^n$ , s'ha de complir la següent equació matricial:

$$\mathbf{W} \begin{pmatrix} \alpha_{00\dots 0} \\ \alpha_{0\dots 01} \\ \vdots \\ \alpha_{11\dots 1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \alpha_{00\dots 0} \\ \alpha_{0\dots 01} \\ \vdots \\ \alpha_{11\dots 1} \end{pmatrix}. \quad (2.37)$$

En conseqüència,  $\lambda$  és un valor propi del  $n$ -cub conjugat amb pesos  $\overline{Q}_n^*$ , com diu el teorema. Observem que, en particular, quan  $\lambda_i = 1$ , per a  $i = 1, \dots, n$ , la matriu  $\mathbf{W}$  és la matriu d'adjacència de  $Q_n$  i retrobem els valors propis del  $n$ -cub.

□



# Capítol 3

## El producte Manhattan de digrafs

En aquest capítol donem una definició formal d'un nou producte de grafs bipartits, el producte Manhattan, i estudiem algunes de les seves propietats principals. A més a més, demostrem que, si tots els factors d'aquest producte són cicles (dirigits), el graf obtingut és una xarxa Manhattan. També mostrem que el producte Manhattan d'alguns digrafs comparteixen moltes propietats amb aquestes xarxes, com les simetries i la presència de cicles hamiltonians.

### 3.1 Definició i propietats bàsiques

En aquesta secció presentem una nova operació de digrafs (bipartits), la qual, com un cas particular, dóna una xarxa Manhattan. Siguin  $G_i = (V_i, A_i)$ , per a  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  digrafs bipartits amb conjunts independents  $V_i = V_{i0} \cup V_{i1}$ ,  $N_i = |V_i|$ . Sigui  $\pi$  la funció característica de  $V_{i1}$  per a tot  $i$ , és a dir,

$$\pi(u) = \begin{cases} 0 & \text{si } u \in V_{i0}, \\ 1 & \text{si } u \in V_{i1}. \end{cases}$$

Aleshores, el *producte Manhattan*  $H = G_1 \# G_2 \# \dots \# G_n$  és el digraf amb el conjunt de vèrtexs  $V(M_n) = V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n$  i cada vèrtex  $(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$  és adjacent al vèrtex  $(u_1, \dots, v_i, \dots, u_n)$ , per a  $1 \leq i \leq n$ , quan

- $v_i \in \Gamma^+(u_i)$  si  $\sum_{j \neq i} \pi(u_j)$  és parell,
- $v_i \in \Gamma^-(u_i)$  si  $\sum_{j \neq i} \pi(u_j)$  és senar.

La figura 3.1 mostra un exemple del producte Manhattan d'un digraf circulant de 6 vèrtexs i passos 1 i 3,  $\text{Cay}(\mathbb{Z}_6, \{1, 3\})$ , pel digraf simètric complet de 2 vèrtexs,  $K_2^*$ .

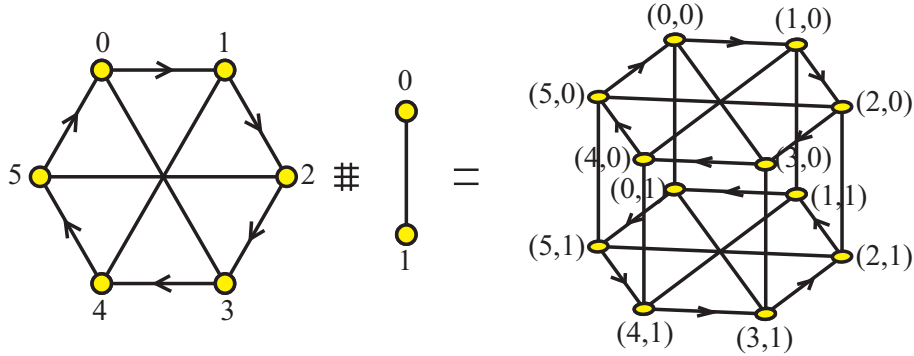


Figura 3.1: El producte Manhattan  $H = \text{Cay}(\mathbb{Z}_6, \{1, 3\}) \# K_2^*$  (les línies dibuixades sense direcció representen dos arcs en direccions oposades).

Observem que l'ordre de  $H$  és  $N = \prod_{i=1}^n N_i$  i, si tots els  $G_i$  són  $\delta_i$ -regulars, aleshores  $H$  és un digraf  $\delta$ -regular, amb grau  $\delta = \sum \delta_i$ .

Algunes propietats bàsiques del producte Manhattan que generalitzen les propietats de les xarxes Manhattan donades en el lema 2.1.2 es presenten en la proposició següent:

**Proposició 3.1.1.** *El producte Manhattan  $H = G_1 \# G_2 \# \dots \# G_n$  satisfà les propietats següents:*

- (a) *Les propietats associativa i commutativa.*
- (b)  *$H$  és un digraf bipartit i  $2^n$ -partit.*
- (c) *Per a qualssevol  $n - k$  vèrtexs fixats  $x_i \in V_i$ ,  $i = k + 1, k + 2, \dots, n$ , el subdigraf de  $H$  induït pels vèrtexs de la forma  $(u_1, u_2, \dots, u_k, x_{k+1}, \dots, x_n)$  és o el producte Manhattan  $H_k = G_1 \# G_2 \# \dots \# G_k$  o el seu convers  $\overline{H}_k$ , segons que  $\alpha := \sum_{i=k+1}^n \pi(x_i)$  sigui parell o senar, respectivament.*
- (d) *Existeix un homomorfisme de  $H$  al digraf simètric de l'hipercub  $Q_n^*$ .*
- (e) *Si  $G_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , són digrafs isomorfs als seus respectius conversos, aleshores  $H$  també ho és.*

**Demostració.** Només demostrem l'última propietat, ja que les altres es demostren de manera similar a les del lema 2.1.2. Com que el producte Manhattan és associatiu, n'hi ha prou de fer la demostració per al cas  $H = G_1 \# G_2$ . Com que, per hipòtesi,  $G_i \cong \overline{G}_i$ , aleshores existeixen isomorfismes  $\psi_i$  tals que  $\Gamma_{G_i}^\pm(\psi_i(u_i)) = \psi_i(\Gamma_{G_i}^\mp(u_i))$ , per a tot  $u_i \in V_i$ . Com que  $\psi_i$  és una aplicació entre

conjunts independents, la paritat  $\pi$  en  $\overline{G}_i$  es pot definir de manera que  $\pi(u_i)$  és parell si i només si  $\pi(\psi_i(u_i))$  ho és. Aleshores, l'aplicació  $\Psi$  definida en  $H$  com a

$$\Psi(u_1, u_2) := (\psi_1(u_1), \psi_2(u_2))$$

és l'automorfisme entre  $H$  i el seu convers  $\overline{H}$ . En efecte, suposant que, per exemple,  $\pi(u_1), \pi(u_2)$  són parells, tenim

$$\begin{aligned} \Psi(\Gamma_H^+(u_1, u_2)) &= \Psi(\Gamma_{G_1}^+(u_1), u_2) \cup \Psi(u_1, \Gamma_{G_2}^+(u_2)) \\ &= (\psi_1(\Gamma_{G_1}^+(u_1)), \psi_2(u_2)) \cup (\psi_1(u_1), \psi_2(\Gamma_{G_2}^+(u_2))) \\ &= (\Gamma_{G_1}^-(\psi_1(u_1)), \psi_2(u_2)) \cup (\psi_1(u_1), \Gamma_{G_2}^-(\psi_2(u_2))) \\ &= \Gamma_H^-(\psi_1(u_1), \psi_2(u_2)) \\ &= \Gamma_H^-(\Psi(u_1, u_2)). \end{aligned}$$

Els altres casos, que depenen de la paritat de  $\pi(u_1), \pi(u_2)$ , es demostren de manera similar.  $\square$

Com un exemple de l'apartat (e) d'aquesta proposició vegeu, de nou, la figura 3.1, on  $H \cong \overline{H}$ .

## 3.2 Producte Manhattan vs. xarxes Manhattan

En aquesta secció mostrem la relació entre els digrafs obtinguts pel producte Manhattan i les xarxes Manhattan.

**Proposició 3.2.1.** *El producte Manhattan de cicles dirigits amb un nombre parell  $N_i$  de vèrtexs és una xarxa Manhattan, és a dir, si  $G_i = C_{N_i}$ , aleshores*

$$C_{N_1} \# C_{N_2} \# \cdots \# C_{N_n} \cong M(N_1, N_2, \dots, N_n).$$

**Demostració.** Cada cicle  $C_{N_i}$  té com a conjunt de vèrtexs  $V_i = \mathbb{Z}_{N_i}$  amb les adjacències  $\Gamma^+(u_i) = \{u_i + 1 \pmod{N_i}\}$  i  $\Gamma^-(u_i) = \{u_i - 1 \pmod{N_i}\}$ , de manera que  $V_{i0}$  i  $V_{i1}$  són els conjunts de vèrtexs parells i senars, respectivament. Per tant, el conjunt de vèrtexs en el producte Manhattan de cicles dirigits és  $\mathbb{Z}_{N_1} \times \mathbb{Z}_{N_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{N_n}$ , i cada vèrtex  $(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$  és adjacent als vèrtexs  $(u_1, \dots, v_i, \dots, u_n)$ , per a  $1 \leq i \leq n$ , quan

- $v_i = u_i + 1$  si i només si  $\sum_{j \neq i} \pi(u_j)$  és parell i, per tant,  $\sum_{j \neq i} u_j$  també ho és,
- $v_i = u_i - 1$  si i només si  $\sum_{j \neq i} \pi(u_j)$  és senar i, per tant,  $\sum_{j \neq i} u_j$  també ho és,

cosa que correspon a la definició de la xarxa Manhattan.  $\square$

Un altre resultat esperat del producte Manhattan és el següent:

**Proposició 3.2.2.** *El producte Manhattan de dues xarxes Manhattan és una xarxa Manhattan. És a dir, si  $M^1 = M(N_1^1, N_2^1, \dots, N_{n_1}^1)$  i  $M^2 = M(N_1^2, N_2^2, \dots, N_{n_2}^2)$ , aleshores*

$$M^1 \# M^2 = M,$$

on  $M = M(N_1^1, N_2^1, \dots, N_{n_1}^1, N_1^2, N_2^2, \dots, N_{n_2}^2)$ .

**Demostració.**  $M^1$  i  $M^2$  són digrafs bipartits amb conjunts de vèrtexs  $V^\alpha = \mathbb{Z}_{N_1^\alpha} \times \mathbb{Z}_{N_2^\alpha} \times \dots \times \mathbb{Z}_{N_{n_\alpha}^\alpha}$ , per a  $\alpha = 1, 2$ , i  $M^1 \# M^2$  té el conjunt de vèrtexs  $V = V^1 \times V^2$ . Sigui  $V(M)$  el conjunt de vèrtexs de  $M$ . Aleshores, l'aplicació  $\Psi : V \rightarrow V(M)$ , definida per  $\Psi(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) = (u_1^1, \dots, u_{n_1}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2}^2)$ , és un isomorfisme entre els corresponents digrafs. Per demostrar això, siguin  $V_0^\alpha$  i  $V_1^\alpha$  els conjunts independents de  $M^\alpha$ , constituïts, respectivament, pels vèrtexs  $\mathbf{u}^\alpha = (u_1^\alpha, \dots, u_{n_\alpha}^\alpha)$ , la suma de les components dels quals  $\sum_{k=1}^{n_\alpha} u_k^\alpha$  és parell o senar. Amb aquesta convenció, cada vèrtex  $(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2)$  del producte Manhattan  $M^1 \# M^2$  és adjacent als vèrtexs  $(\mathbf{v}^1, \mathbf{u}^2)$  i  $(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^2)$ , on

- $\mathbf{v}^1 \in \Gamma^+(\mathbf{u}^1)$  (en  $M^1$ ) si  $\pi(\mathbf{u}^2)$ , i per tant  $\sum_{k=1}^{n_2} u_k^2$  és parell;
- $\mathbf{v}^1 \in \Gamma^-(\mathbf{u}^1)$  (en  $M^1$ ) si  $\pi(\mathbf{u}^2)$ , i per tant  $\sum_{k=1}^{n_2} u_k^2$  és senar.

En el primer cas,

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}^1, \mathbf{u}^2) &\xrightarrow{\Psi} (u_1^1, \dots, u_i^1 + (-1)^{\sum_{j \neq i} u_j^1}, \dots, u_{n_1}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2}^2) \\ &= (u_1^1, \dots, u_i^1 + (-1)^{\sum_{j \neq i} u_j^1 + \sum_{k=1}^{n_2} u_k^2}, \dots, u_{n_1}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2}^2) \quad (1 \leq i \leq n_1). \end{aligned}$$

Anàlogament, en el segon cas,

$$\begin{aligned} (\mathbf{v}^1, \mathbf{u}^2) &\xrightarrow{\Psi} (u_1^1, \dots, u_i^1 - (-1)^{\sum_{j \neq i} u_j^1}, \dots, u_{n_1}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2}^2) \\ &= (u_1^1, \dots, u_i^1 + (-1)^{\sum_{j \neq i} u_j^1 + \sum_{k=1}^{n_2} u_k^2}, \dots, u_{n_1}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2}^2) \quad (1 \leq i \leq n_1). \end{aligned}$$

Amb això obtenim els vèrtexs adjacents a  $\Psi(\mathbf{u}^1, \mathbf{u}^2) = (u_1^1, \dots, u_{n_1}^1, u_1^2, \dots, u_{n_2}^2)$  en  $M$  (a través de tots els  $i$ -arcs,  $1 \leq i \leq n_1$ ). Les adjacències a través dels altres  $i$ -arcs,  $n_1 + 1 \leq i \leq n_1 + n_2$ , vénen dels vèrtexs  $(\mathbf{u}^1, \mathbf{v}^2)$ .  $\square$

Observem que el resultat d'aquesta darrera proposició es pot veure com un corollari de la proposició 3.2.1 i la propietat associativa. En efecte,

$$\begin{aligned} M^1 \# M^2 &= M(N_1^1, N_2^1, \dots, N_{n_1}^1) \# M(N_1^2, N_2^2, \dots, N_{n_2}^2) \\ &= (C_{N_1}^1 \# C_{N_2}^1 \# \dots \# C_{N_{n_1}}^1) \# (C_{N_1}^2 \# C_{N_2}^2 \# \dots \# C_{N_{n_2}}^2) \\ &= C_{N_1}^1 \# C_{N_2}^1 \# \dots \# C_{N_{n_1}}^1 \# C_{N_1}^2 \# C_{N_2}^2 \# \dots \# C_{N_{n_2}}^2 \\ &= M(N_1^1, N_2^1, \dots, N_{n_1}^1, N_1^2, N_2^2, \dots, N_{n_2}^2) = M. \end{aligned}$$

### 3.3 Simetries

En aquesta secció estudiem les simetries dels digrafs obtinguts amb el producte Manhattan.

**Proposició 3.3.1.** *Siguin  $G_i$ , per a  $i = 1, 2, \dots, n$ , digrafs vèrtex-simètrics i isomorfs als seus conversos. Aleshores, el producte Manhattan  $H = G_1 \# G_2 \# \dots \# G_n$  és vèrtex-simètric.*

**Demostració.** Com abans, siguin  $G_i = (V_i, A_i)$ , per a  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $n$  digrafs amb  $V_i = V_{i0} \cup V_{i1}$ . Primer veiem que existeix un automorfisme  $\Phi$  en  $H$ , que transforma un vèrtex  $(u_1, u_2, \dots, u_n)$  en un vèrtex  $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ , tals que  $u_i, v_i \in V_{ij}$ , per a cada  $i \in \{1, 2, \dots, n\}$  i alguns  $j \in \{0, 1\}$  (és a dir, les dues components  $u_i, v_i$  estan en el mateix conjunt independent). Per hipòtesi, existeixen automorfismes  $\phi_i$  en  $G_i$ ,  $\Gamma_{G_i}^+(\phi_i(w_i)) = \phi_i(\Gamma_{G_i}^+(w_i))$ , per a tot  $w_i \in V_i$ , tals que  $\phi_i(u_i) = v_i$ . Aleshores, definim

$$\Phi(w_1, w_2, \dots, w_n) := (\phi_1(w_1), \phi_2(w_2), \dots, \phi_n(w_n)).$$

Aleshores, suposant que  $\sum_{j \neq i} \pi(w_j)$  és parell i que, per tant,  $\sum_{j \neq i} \pi(\phi_j(w_j))$  també ho és, tenim

$$\begin{aligned} \Phi(\Gamma_H^+(w_1, \dots, w_i, \dots, w_n)) &= \Phi(w_1, \dots, \Gamma_{G_i}^+(w_i), \dots, w_n) \\ &= (\phi_1(w_1), \dots, \phi_i(\Gamma_{G_i}^+(w_i)), \dots, \phi_n(w_n)) \\ &= (\phi_1(w_1), \dots, \Gamma_{G_i}^+(\phi_i(w_i)), \dots, \phi_n(w_n)) \\ &= \Gamma_H^+(\phi_1(w_1), \dots, \phi_i(w_i), \dots, \phi_n(w_n)) \\ &= \Gamma_H^+(\Phi(w_1, \dots, w_i, \dots, w_n)), \end{aligned}$$

cosa que demostra que  $\Phi$  és un automorfisme. El cas  $\sum_{j \neq i} \pi(w_j)$  senar es demostra de manera similar, utilitzant  $\Gamma_{G_i}^-(\phi_i(w_i)) = \phi_i(\Gamma_{G_i}^-(w_i))$ .

Ara cal trobar un automorfisme  $\Psi$  que transformi un vèrtex  $(u_1, \dots, u_i, \dots, u_n)$  en un vèrtex  $(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$ , tals que, per a  $k \neq i$ ,  $u_k, v_k \in V_{ij_k}$  com abans, mentre que  $u_i$  i  $v_i$  pertanyen a conjunts independents diferents, per exemple,  $u_i \in V_{i0}$  i  $v_i \in V_{i1}$ . En aquest cas, l'automorfisme  $\Psi$  es construeix de la manera següent: com que cada  $G_k$  és isomorf al seu convers, existeixen automorfismes  $\psi_k$ , amb  $k \neq i$ , de  $G_k$  a  $\overline{G}_k$ ,  $\Gamma_{G_k}^+(\psi_k(w_k)) = \psi_k(\Gamma_{G_k}^-(w_k))$ , per a tot  $w_k \in V_k$ , tal que  $\psi_k(u_k) = v_k$  i  $\psi_i = \phi_i$  (com en el primer cas). Aleshores definim  $\Psi$  com a

$$\Psi(w_1, \dots, w_i, \dots, w_n) := (\psi_1(w_1), \dots, \psi_i(w_i), \dots, \psi_n(w_n)).$$

Suposem que  $k \neq i$ , per exemple  $k = 1$ , i que  $\sum_{j \neq 1} \pi(w_j)$  és parell, per tant,

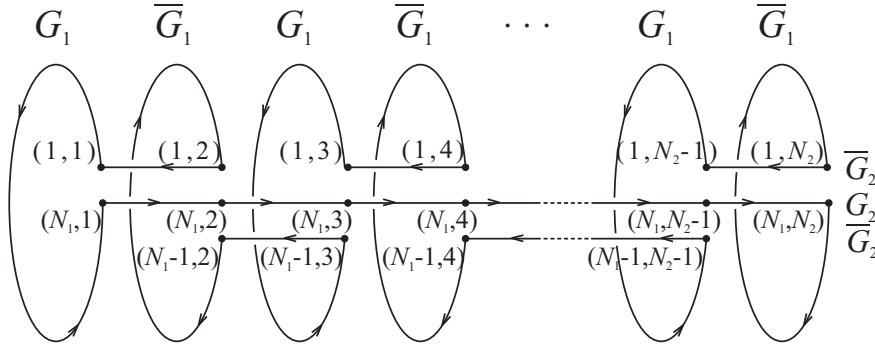


Figura 3.2: Cicle Hamiltonià en el producte Manhattan de  $G_1 \# G_2$ .

$\pi(\phi_i(w_i)) + \sum_{j \neq 1, i} \pi(\psi_j(w_j))$  és senar. Aleshores, tenim

$$\begin{aligned}
 \Psi(\Gamma_H^+(w_1, \dots, w_i, \dots, w_n)) &= \Psi(\Gamma_{G_1}^+(w_1), \dots, w_i, \dots, w_n) \\
 &= (\psi_1(\Gamma_{G_1}^+(w_1)), \dots, \phi_i(w_i), \dots, \psi_n(w_n)) \\
 &= (\Gamma_{G_1}^-(\psi_1(w_1)), \dots, \phi_i(w_i), \dots, \psi_n(w_n)) \\
 &= \Gamma_H^+(\psi_1(w_1), \dots, \phi_i(w_i), \dots, \psi_n(w_n)) \\
 &= \Gamma_H^+(\Psi(w_1, \dots, w_i, \dots, w_n)).
 \end{aligned}$$

Per tant,  $\Psi$  és un automorfisme. Per al cas  $\sum_{j \neq 1} \pi(w_j)$  senar, la demostració és similar, utilitzant  $\Gamma_{G_k}^-(\psi_k(w_k)) = \psi_k(\Gamma_{G_k}^+(w_k))$ . D'altra banda, el cas  $k = i$  és com abans, perquè, suposant que  $\sum_{j \neq i} \pi(w_j)$  és parell, aleshores  $\sum_{j \neq i} \pi(\psi_j(w_j))$  també ho és. Això completa la demostració.  $\square$

### 3.4 Cicles de Hamilton

A continuació, donem un resultat sobre l'existència d'un cicle hamiltonià en el producte Manhattan de dos digrafs amb camins hamiltonians, com a generalització del teorema 2.1.12, que ens diu que la xarxa Manhattan és hamiltoniana.

**Teorema 3.4.1.** *Si  $G_1$  i  $G_2$  tenen tots dos un camí hamiltonià, aleshores el seu producte Manhattan  $H = G_1 \# G_2$  és hamiltonià.*

**Demostració.** Seguim la idea de la demostració del teorema 2.1.12, el qual permet construir un cicle de Hamilton en  $H$ , a partir dels camins hamiltonians en  $G_1$  i  $G_2$ , diguem-ne  $1 \rightarrow 2 \rightarrow \dots \rightarrow N_1$  i  $1' \rightarrow 2' \rightarrow \dots \rightarrow N_2$ , respectivament. Aleshores, unim adequadament  $N_2$  camins hamiltonians (alguns amb un arc menys) de  $N_2$  subdigrafs isomorfs a  $G_1$  o  $\overline{G_1}$  (vegeu la proposició 3.1.1(c)).



Aquests camins s'uneixen utilitzant tres còpies del camí hamiltonià (dos dels quals amb un arc menys) de subdígrafs isomorfs a  $G_2$  o  $\overline{G_2}$  (vegeu la figura autoexplicativa 3.2).  $\square$



# Capítol 4

## Xarxes jeràrquiques

Recentment s'ha pogut comprovar que la majoria de les xarxes complexes són petit món (és a dir, tenen un diàmetre petit i un clustering local gran), scale-free (la distribució dels graus és potencial) i presenten autosimilitud i sovint també modularitat (és a dir, són jeràrquiques). La majoria de la recerca feta en xarxes complexes s'ha basat en mètodes estocàstics. Tanmateix, s'ha comprovat que els mètodes deterministes, amb la determinació exacta dels principals paràmetres de les xarxes, són molt útils. De fet, aquests mètodes complementen els mètodes probabilístics i les tècniques de simulació i, per tant, aporten una millor comprensió dels sistemes modelitzats.

En aquest capítol estudiem primer una família de grafs jeràrquics, construïda a partir del graf complet  $K_n$ , que presenta els efectes petit món i scale-free i que poden modelitzar algunes sistemes complexos de la vida real. En concret, per a aquestes xarxes trobem el radi, el diàmetre, les distribucions de graus i de clusterings i un algorisme d'encaminament. A més a més, introduïm una nova operació de grafs, a la qual anomenem *producte jeràrquic*, que és una generalització del producte cartesià i que permet la construcció de famílies de grafs jeràrquics. Com a conseqüència, el producte jeràrquic hereta algunes de les ben conegudes propietats del producte cartesià, com presentar un diàmetre petit i algorismes d'encaminament simples. Trobem les propietats espectrals dels grafs obtinguts mitjançant el producte jeràrquic. Finalment, proposem una operació que generalitza tant el producte jeràrquic com el producte cartesià.

### 4.1 Models deterministes

#### 4.1.1 Introducció

Amb la publicació de l'article de Watts i Strogatz [97] sobre xarxes petit món i el de Barabási i Albert [7] sobre xarxes scale-free, hi ha hagut un interès renovat

en l'estudi de les xarxes associades a sistemes complexos, els quals han rebut una gran atenció com a tema interdisciplinari.

Moltes xarxes de la vida real, com les xarxes de transport i de comunicacions (incloent-hi la xarxa elèctrica i la xarxa telefònica), Internet (estudiada pels germans Faloutsos [47]), la *world wide web* (estudiada per Albert *et al.* [2]) i algunes xarxes socials i biològiques (estudiades per Jeong *et al.* [62, 63] i per Newman [77]), pertanyen a una classe de xarxes conegudes com a xarxes petit món scale-free. Per ser petit món, aquestes xarxes tenen dues característiques principals: un clustering local gran (els vèrtexs tenen molts veïns mutus) i una distància mitjana i un diàmetre petits. Una altra característica important és que el nombre de connexions dels nodes segueix una distribució potencial, és a dir, són xarxes scale-free. Alguns autors han observat que en les xarxes jeràrquiques es pot identificar l'estructura modular del sistema amb una distribució específica de clustering, la qual depèn del grau (vegeu l'article de Ravasz *et al.* [82], el de Barabási *et al.* [8], el de Wuchty *et al.* [98] i el de Solé i Valverde [88]). A més a més, amb la introducció de noves tècniques de mesura per a grafs, s'ha descobert que moltes xarxes reals es poden considerar autosimilars (vegeu l'estudi de Song *et al.* [89]).

En aquests estudis, els investigadors han desenvolupat diferents models (com el d'Albert i Barabási [1], el de Dorogovtsev *et al.* [44, 45] i d'altres, citats per Newman [78]) la majoria estocàstics, els quals ajuden a comprendre i a predir el comportament i les característiques de les xarxes reals. També s'han introduït nous models deterministes construïts amb mètodes recursius, basats en l'existència de *clics* (vegeu l'article de Barabási *et al.* [10], el de Dorogovtsev *et al.* [44], el de Jung *et al.* [64], el de Comellas *et al.* [38] i el de Zhang *et al.* [99]). Aquests models deterministes tenen l'avantatge que permeten calcular analíticament algunes propietats rellevants i alguns paràmetres, els quals es poden comparar amb dades extretes de les xarxes reals. Barabási *et al.* [10] van introduir una família de xarxes jeràrquiques molt simples i van demostrar que eren petit món i scale-free. Tanmateix, tenen clustering nul, en contrast amb moltes xarxes reals que tenen un clustering gran. Una altra família de xarxes va ser proposada per Ravasz *et al.* [82], els quals combinen una estructura modular amb una topologia scale-free per modelitzar xarxes metabòliques de diferents animals i xarxes associades a organitzacions cel·lulars. Una petita variació d'aquesta xarxa jeràrquica es troba en un article de Ravasz i Barabási [81], on estudien altres xarxes modulares, com la WWW, la xarxa d'actors de Hollywood, Internet en l'àmbit dels dominis, etc. Noh [80] ha fet una generalització d'aquest model.

En aquesta secció introduïm una família de xarxes jeràrquiques deterministes  $H_{n,k}$  caracteritzades pels paràmetres  $n$  (*ordre* del graf complet inicial) i  $k$  (*dimensió* o nombre d'iteracions), unint adequadament  $n^k$  grafs isomorfs al graf complet  $K_n$ , com es defineix formalment més endavant. De les propietats del nostre mod-

el, destaquem la modularitat i l'autosimilitud, característiques que permeten la determinació del radi, el diàmetre i la distribució de graus i de clusterings. A més a més, donem un algorisme d'encaminament.

La nostra família de xarxes jeràrquiques generalitza la xarxa jeràrquica determinista introduïda per Ravasz *et al.* [82] i també per Barabási i Oltvai [9] (que correspon al particular  $H_{4,k}$  de les nostres xarxes). Les xarxes jeràrquiques deterministes introduïdes en un altre article de Ravasz i Barabási [81] i generalitzades per Noh [80] constitueixen un subgraf de  $H_{5,k}$  (malgrat que algunes arestes no hi són).

### 4.1.2 El graf jeràrquic $H_{n,k}$

A continuació donem una definició formal recursiva de la família de grafs proposada, la qual està caracteritzada pels paràmetres  $n \geq 2$  (ordre del graf complet inicial) i  $k \geq 1$  (nombre d'iteracions o dimensió). També donem una definició directa i trobem el nombre d'arestes (el radi i el diàmetre s'estudiaran en la propera secció).

**Definició 4.1.1.** *Siguin  $n, k$  enters positius,  $n \geq 2$ . El graf jeràrquic  $H_{n,k}$  té el conjunt de vèrtexs  $V_{n,k}$ , amb  $n^k$  vèrtexs denotats per les  $k$ -seqüències  $x_1x_2x_3 \dots x_k$ ,  $x_i \in \mathbb{Z}_n, 0 \leq i \leq k-1$ , i el conjunt d'arestes  $E_{n,k}$  definit recursivament com segueix:*

- $H_{n,1}$  és el graf complet  $K_n$ .
- Per a  $k > 1$ ,  $H_{n,k}$  s'obté de la unió de  $n$  còpies de  $H_{n,k-1}$ , denotades per  $H_{n,k-1}^\alpha, 0 \leq \alpha \leq n-1$ , i amb vèrtexs  $x_2^\alpha x_3^\alpha \dots x_k^\alpha \equiv \alpha x_2 x_3 \dots x_k$ , afegint les arestes següents:

$$000 \dots 00 \sim x_1 x_2 x_3 \dots x_{k-1} x_k, \quad x_j \neq 0, \quad 1 \leq j \leq k; \quad (4.1)$$

$$x_1 00 \dots 00 \sim y_1 00 \dots 00, \quad x_1, y_1 \neq 0, \quad x_1 \neq y_1. \quad (4.2)$$

Alternativament, tenim una definició directa del conjunt d'arestes  $E_{n,k}$  amb les regles d'adjacència següents:

$$x_1 x_2 \dots x_k \sim x_1 x_2 \dots x_{k-1} y_k, \quad y_k \neq x_k; \quad (4.3)$$

$$x_1 x_2 \dots x_i 00 \dots 0 \sim x_1 x_2 \dots x_i x_{i+1} x_{i+2} \dots x_k, \quad x_j \neq 0, \quad i+1 \leq j \leq k, \quad 0 \leq i \leq k-2; \quad (4.4)$$

$$x_1 x_2 \dots x_i 00 \dots 0 \sim x_1 x_2 \dots x_{i-1} y_i 00 \dots 0, \quad x_i, y_i \neq 0, \quad y_i \neq x_i, \quad 1 \leq i \leq k-1. \quad (4.5)$$

Les condicions (4.1) i (4.2) de la definició recursiva corresponen a (4.4) amb  $i = 0$  i (4.5) amb  $i = 1$ , respectivament.

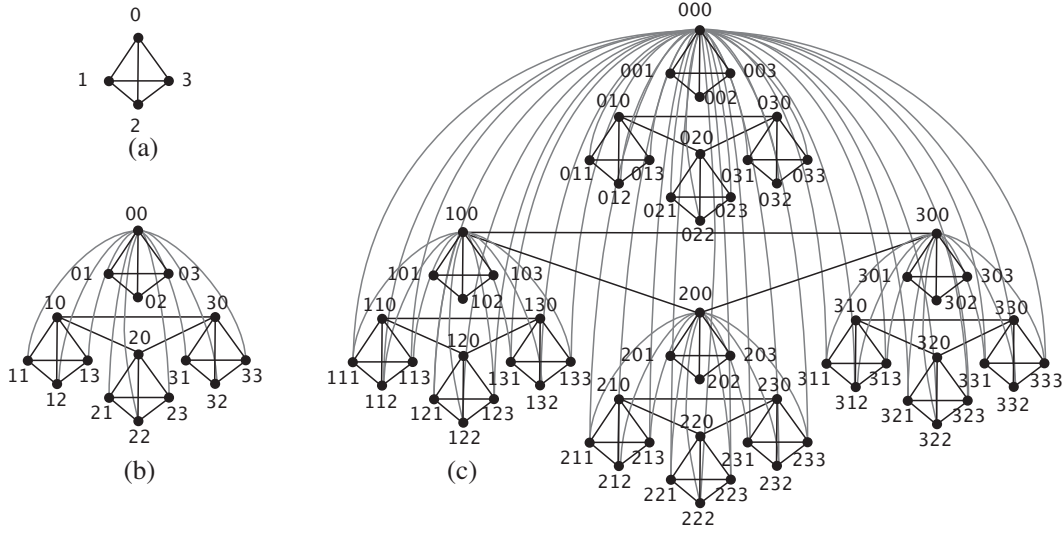


Figura 4.1: Gracs jeràrquics amb ordre inicial 4: (a)  $H_{4,1}$ , (b)  $H_{4,2}$ , (c)  $H_{4,3}$

Per il·lustrar la nostra construcció, la figura 4.1 mostra els gracs jeràrquics  $H_{4,k}$ , per a  $k = 1, 2, 3$ .

El resultat següent dona el nombre d'arestes de  $H_{n,k}$ , el qual es pot calcular fàcilment a partir de la definició recursiva.

**Proposició 4.1.2.** *La mida de  $H_{n,k}$  és*

$$|E_{n,k}| = \frac{3}{2}n^{k+1} - (n-1)^{k+1} - 2n^k - \frac{n}{2} + 1. \quad (4.6)$$

**Demostració.** Quan construïm  $H_{n,k}$  a partir de  $n$  còpies de  $H_{n-1,k}$ , les adjacències (4.1) i (4.2) introdueixen  $(n-1)^k$  i  $\binom{n-1}{2}$  arestes noves, respectivament. Aleshores,

$$|E_{n,k}| = n|E_{n-1,k}| + (n-1)^k + \binom{n-1}{2}.$$

Si apliquem recursivament aquesta fórmula i tenim en compte que  $|E_{n,1}| = \binom{n}{2}$ , obtenim

$$|E_{n,k}| = n^{k-1} \binom{n}{2} + \sum_{i=2}^k n^{k-i} (n-1)^i + \binom{n-1}{2} \sum_{i=0}^{k-2} n^i, \quad (4.7)$$

cosa que dona el resultat.  $\square$

De fet, els tres sumands en (4.7) corresponen al nombre d'arestes definits per les adjacències (4.3), (4.4) i (4.5), respectivament. En efecte,

- Segons (4.3) tenim  $n^{k-1}$  subgrafs complets  $K_n$ , el nombre d'arestes dels quals és

$$n^{k-1} \binom{n}{2} = n^k \frac{n-1}{2}. \quad (4.8)$$

- El nombre d'arestes introduïdes a partir de (4.4) és

$$\sum_{i=0}^{k-2} n^i (n-1)^{k-i} = \frac{n^{k-2} (n-1)^2 \frac{n}{n-1} - (n-1)^k}{\frac{n}{n-1} - 1} = (n-1)^2 n^{k-1} - (n-1)^{k+1}. \quad (4.9)$$

- A partir de (4.5), per a  $i = 1, 2, \dots, k-1$ , tenim  $n^{i-1}$  subgrafs isomorfs a  $K_{n-1}$  amb el nombre d'arestes següent:

$$\binom{n-1}{2} \sum_{i=1}^{k-1} n^{i-1} = \frac{1}{2} (n-2) (n^{k-1} - 1). \quad (4.10)$$

### Propietats jeràrquiques

Les propietats jeràrquiques dels grafs  $H_{n,k}$  estan resumides en els punts següents i són conseqüència directa de la definició:

- D'acord amb (4.3), per a cada seqüència de valors fixats  $\alpha_i \in \mathbb{Z}_n$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ , el conjunt de vèrtexs  $\{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_{k-1} x_k : x_k \in \mathbb{Z}_n\}$  indueix un subgraf isomorf a  $K_n$ .
- El vèrtex  $\mathbf{r} := 00 \dots 0$ , el qual distingim i anomenem *arrel*, segons (4.4) és adjacent als vèrtexs  $x_1 x_2 \dots x_k$ ,  $x_i \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq k$ , els quals anomenem *perifèrics*.
- Per a tot  $i$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ ,  $H_{n,k}$  es pot descomposar en  $n^i$  subgrafs vèrtex-disjunts isomorfs a  $H_{n,k-i}$ . Cadascun d'aquests subgrafs es denota per  $H_{n,k-i}^\alpha$  i les etiquetes dels seus vèrtexs són  $\alpha x_{i+1} x_{i+2} \dots x_k$ , on  $\alpha = \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_i \in \mathbb{Z}_n^i$  és una seqüència fixada. En particular, per a  $i = 1$ ,  $H_{n,k}$  té  $n$  subgrafs  $H_{n,k-1}^\alpha$ ,  $\alpha = 0, 1, \dots, n-1$ , com s'afirma en la definició recursiva.
- L'arrel del subgraf  $H_{n,k-i}^\alpha$  és  $\alpha 00 \dots 0$ . Aleshores, el nombre total de vèrtexs arrel, l'arrel de  $H_{n,k}$  inclosa, és

$$1 + (n-1) \sum_{i=1}^{k-1} n^{i-1} = n^{k-1}, \quad (4.11)$$

com s'esperava, ja que un vèrtex donat  $x_1 x_2 \dots x_k$  és una arrel (d'algun subgraf) si i només si  $x_k = 0$ .

- (e) Els vèrtexs perifèrics del subgraf  $H_{n,k-i}^\alpha$  són de la forma  $\alpha x_{i+1}x_{i+2}\dots x_k$ , on  $x_j \neq 0$ ,  $i+1 \leq j \leq k$ . Aleshores, el nombre total de vèrtexs perifèrics, inclosos els de  $H_{n,k}$  (vegeu (b)) és

$$(n-1)^k + (n-1) \sum_{i=1}^{k-1} n^{i-1} (n-1)^{k-i} = n^{k-1} (n-1), \quad (4.12)$$

com esperàvem, ja que  $x_1x_2\dots x_k$  és un vèrtex perifèric (d'algun subgraf) si i només si  $x_k \neq 0$ . Observem que si sumem (4.11) i (4.12), obtenim  $n^k = |V_{n,k}|$ , de manera que cada vèrtex de  $H_{n,k}$  és o una arrel o un vèrtex perifèric d'algun subgraf isomorf a  $H_{n,k'}$ , amb  $1 \leq k' \leq k$ .

- (f) Si col·lapsem en  $H_{n,k}$  cadascun dels  $n^i$  subgrafs  $H_{n,k-i}^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_n^i$ , en un vèrtex i totes les arestes múltiples en una, obtenim un graf isomorf a  $H_{n,i}$ .
- (g) D'acord amb (4.5), per a cada  $i$  fixada,  $1 \leq i \leq k$ , i cada seqüència donada  $\alpha \in \mathbb{Z}_n^{i-1}$ , existeixen totes les arestes possibles entre els  $n-1$  vèrtexs d'etiquetes  $\alpha x_i 00\dots 0$ , amb  $x_i \in \mathbb{Z}_n^* = \{1, 2, \dots, n-1\}$ , és a dir, les arrels de  $H_{n,k-i}^{\alpha x_i}$ . Aleshores, aquestes arestes indueixen un graf complet isomorf a  $K_{n-1}$ .

### 4.1.3 Encaminament i diàmetre

#### Encaminament

Considerem dos vèrtexs de  $H_{n,k}$ , diguem  $\mathbf{x} = x_1x_2\dots x_k$  i  $\mathbf{y} = y_1y_2\dots y_k$ . Un encaminament de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$  consisteix en els següents passos, on els símbols amb un asterisc com a superíndex estan en  $\mathbb{Z}_n^* := \mathbb{Z}_n - 0 = \{1, 2, \dots, n-1\}$ . La idea clau és anar primer de  $\mathbf{x}$  a l'arrel  $\mathbf{r}$  i després de  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{y}$ .

- Pas 1:

- (a) Si  $x_{k-1} \neq 0$  i  $x_k = 0$ , aleshores anem de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{x}_1^* = x_1x_2\dots x_{k-2}x_{k-1}^*x_k^*$ ; si  $x_{k-1}, x_k \neq 0$ , aleshores simplement prenem  $\mathbf{x}_1^* = \mathbf{x}$ .
- (b) Si  $x_{k-1} = 0$  i  $x_k \neq 0$ , aleshores anem de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{x}_1^0 = x_1x_2\dots x_{k-2}00$ ; si  $x_{k-1} = x_k = 0$ , aleshores simplement prenem  $\mathbf{x}_1^0 = \mathbf{x}$ .

- Pas 2:

- (a) Havent fet el pas 1(a), si  $x_{k-2} = 0$ , aleshores anem de  $\mathbf{x}_1^*$  to  $\mathbf{x}_2^0 = x_1x_2\dots x_{k-3}000$ . Altrament, si  $x_{k-2} \neq 0$ , aleshores prenem  $\mathbf{x}_2^* = \mathbf{x}_1^*$ .



- (b) Havent fet el pas 1(b), si  $x_{k-2} \neq 0$ , aleshores anem de  $\mathbf{x}_1^0$  a  $\mathbf{x}_2^* = x_1 x_2 \dots x_{k-3} x_{k-2}^* x_{k-1}^* x_k^*$ . Altrament, si  $x_{k-2} = 0$ , aleshores prenem  $\mathbf{x}_2^* = \mathbf{x}_1^*$ .

⋮

- Pas  $k - 1$  (amb  $k$  senar, el cas  $k$  parell és similar):

- (a) Havent fet el pas  $(k - 2)(a)$ , si o  $x_1 = 0$  o  $x_1, y_1 \neq 0$ , aleshores anem de  $\mathbf{x}_{k-2}^* = x_1 x_2^* x_3^* \dots x_k^*$  a  $\mathbf{x}_{k-1}^0 = 000 \dots 0 = \mathbf{r}$ . Altrament, si  $x_1 \neq 0, y_1 = 0$ , aleshores prenem  $\mathbf{x}_{k-1}^* = \mathbf{x}_{k-2}^* = x_1^* x_2^* \dots x_k^*$ .
- (b) Havent fet el pas  $(k - 2)(b)$ ,
- (b1) si  $x_1 \neq 0$  i  $y_1 = 0$ , aleshores anem de  $\mathbf{x}_{k-2}^0 = x_1 00 \dots 0$  a  $\mathbf{x}_{k-1}^* = x_1^* x_2^* \dots x_k^*$ ,
- (b2) si  $x_1, y_1 \neq 0$  i  $y_1 \neq x_1$ , aleshores anem de  $\mathbf{x}_{k-2}^0$  a  $\mathbf{y}_{k-2}^* := y_1 00 \dots 0$ . Altrament, si  $y_1 = x_1$ , aleshores prenem  $\mathbf{y}_{k-2}^* = \mathbf{x}_{k-2}^*$ ,
- (b3) si  $x_1 = 0$ , aleshores prenem  $\mathbf{x}_{k-1}^0 = \mathbf{x}_{k-2}^0 = \mathbf{r}$ .

- Pas  $k$ :

- (a) Havent fet el pas  $(k - 1)(a)$ , si  $y_1 \neq 0$ , aleshores anem de  $\mathbf{x}_{k-1}^0 = \mathbf{r}$  a  $\mathbf{y}_{k-1}^* = y_1 y_2^* y_3^* \dots y_k^*$ , on  $y_i^* = y_i$  per a tot  $2 \leq i \leq k$  tal que  $y_i \neq 0$ . Altrament, si  $y_1 = 0$ , aleshores prenem  $\mathbf{y}_{k-1}^0 = \mathbf{x}_{k-1}^0 = \mathbf{r}$ .
- (b) Havent fet el pas  $(k - 1)(b)$ ,
- (b1) si hem fet el pas (b1), on  $x_1 \neq 0, y_1 = 0$ , aleshores anem de  $\mathbf{x}_{k-1}^* = x_1^* x_2^* \dots x_k^*$  a  $\mathbf{y}_{k-1}^0 = 00 \dots 0 = \mathbf{r}$ ,
- (b2) si hem fet el pas (b2), on  $x_1, y_1 \neq 0$ , aleshores continuem a partir de  $\mathbf{y}_{k-2}^* := y_1 00 \dots 0$ ,
- (b3) si hem fet el pas (b3), on  $x_1 = 0$ , aleshores fem com en el cas (a).

- Passos  $k + 1, k + 2, \dots, 2k - 1$ :

Anem de  $\mathbf{r} = 00 \dots 0, \mathbf{y}_{k-2}^* := y_1 00 \dots 0$  o  $\mathbf{y}_{k-1}^* = y_1 y_2^* y_3^* \dots y_k^*$ , seguint els  $k$  passos anteriors en ordre invers, fins assolir el vèrtex  $\mathbf{y} = y_1 y_2 \dots y_k$ .

Per comprendre millor el procediment anterior, la figura 4.2 mostra un diagrama d'aquest algorisme per al cas  $k = 5$ . Les línies contínues corresponen a anar a través d'una aresta (és a dir, entre vèrtexs adjacents), mentre que les línies discontinúes indiquen que ja som en el vèrtex (és a dir, vèrtexs idèntics). Observem

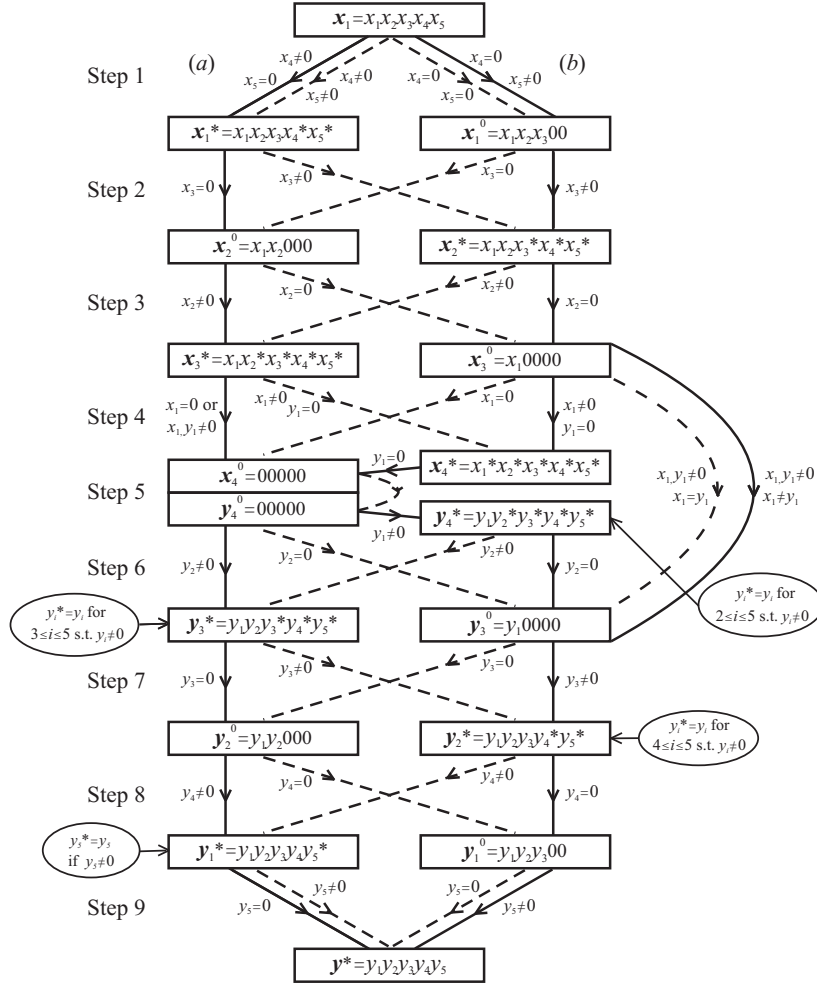


Figura 4.2: L'algorisme d'encaminament en  $H_{n,5}$ .

que, com hem dit abans, tots els camins passen a través de l'arrel  $\mathbf{r}$ , excepte en el cas del pas  $k - 1$  (b2). Observem també que, de fet, podem assumir que  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$  no tenen cap prefix comú, és a dir,  $x_1 \neq y_1$ . Altrament, si  $\mathbf{x} = \alpha x_{i+1} x_{i+2} \dots x_k$  i  $\mathbf{y} = \alpha y_{i+1} y_{i+2} \dots y_k$ , on  $\alpha = \mathbf{x} \cap \mathbf{y}$  i  $i = |\alpha| > 0$ , som en el subgraf  $H_{n,k-i}^\alpha$  (per la propietat (c) de la subsecció 4.1.2) i, aleshores, podem aplicar l'algorisme d'encaminament als vèrtexs  $\mathbf{x}' = x_{i+1} x_{i+2} \dots x_k$  i  $\mathbf{y}' = y_{i+1} y_{i+2} \dots y_k$  de  $H_{n,k-i}$ .

Mostrem exemples dels encaminaments obtinguts en els tres casos principals a la figura 4.3 ((i)  $x_1, y_1 \neq 0$ ) i a la figura 4.4 ((ii)  $x_1 = 0, y_1 \neq 0$  i (iii)  $x_1 \neq 0, y_1 = 0$ ). En cada cas hem suposat que els vèrtexs  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$  estan units per un camí de longitud màxima o de màxim nombre d'arestes (línies contínues). Observem que, segons l'etiqueta de  $\mathbf{x}$ , la primera part del camí va cap a l'esquerra (comença en

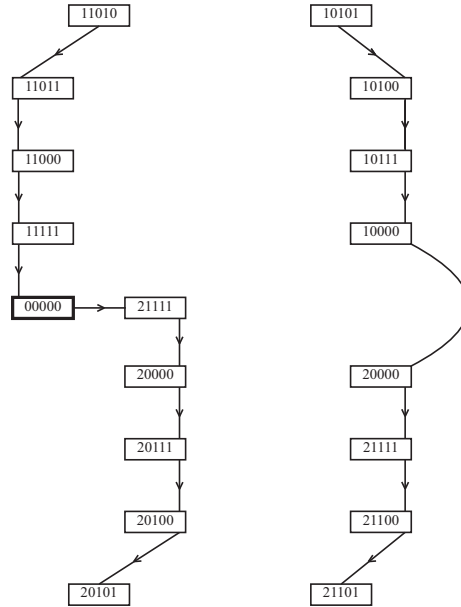


Figura 4.3: Cas (i): Algorisme d'encaminament en  $H_{n,5}$  quan  $x_1, y_1 \neq 0$ .

el pas 1(a)) o cap a la dreta (començant en el pas 1(b)). És important remarcar que els vèrtexs i camins dels casos (ii) i (iii) són conjugats i simètrics l'un de l'altre.

### Radi i diàmetre

Primer introduïm la notació que serà útil per trobar els paràmetres mètrics de  $H_{n,k}$ :

- $\text{dist}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ : distància entre els vèrtexs  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_{n,k}$  en  $H_{n,k}$ .
- $\text{dist}_k(\mathbf{x}, U) := \min_{\mathbf{u} \in U} \{\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{u})\}$ .
- $\mathbf{r}$ : vèrtex arrel de  $H_{n,k}$ .
- $\mathbf{r}^\alpha = 00 \dots 0$ : el vèrtex arrel de  $H_{n,k-1}^\alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_n$ .
- $P$ : conjunt de vèrtexs perifèrics de  $H_{n,k}$ .
- $P^\alpha$  ( $\alpha \in \mathbb{Z}_n$ ): conjunt de vèrtexs perifèrics de  $H_{n,k-1}^\alpha$ .

Els resultats següents sobre els paràmetres mètrics de  $H_{n,k}$  són conseqüència directa de l'algorisme d'encaminament proposat en la secció anterior.

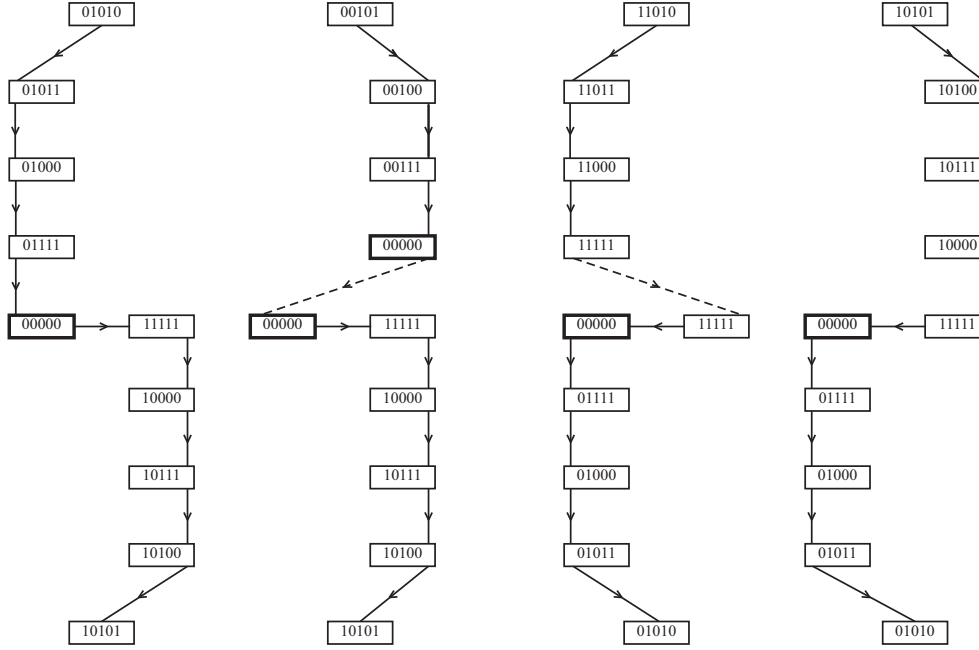


Figura 4.4: Casos (ii) i (iii): Algorismes d'encaminament en  $H_{n,5}$  quan  $x_1 = 0, y_1 \neq 0$  i  $x_1 \neq 0, y_1 = 0$ .

**Proposició 4.1.3.** *Siguin  $r_k, \text{exc}_k(\mathbf{r})$  i  $D_k$ , respectivament, el radi, l'excentricitat de l'arrel  $\mathbf{r}$  i el diàmetre de  $H_{n,k}$ . Aleshores,*

- (a)  $r_k = \text{exc}(\mathbf{r}) = k$ .
- (b)  $D_k = 2k - 1$ .

A partir del resultat del diàmetre i de la propietat (c) de la secció 4.1.2, tenim que la distància entre dos vèrtexs  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  de  $H_{n,k}$ , amb prefix comú màxim  $|\mathbf{x} \cap \mathbf{y}|$ , satisfà

$$\text{dist}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 2|\mathbf{x} \cap \mathbf{y}| - 1.$$

Alternativament, aquests resultats es poden demostrar recursivament. Per demostrar el resultat del diàmetre, primer donem el resultat següent que s'obté de la definició recursiva de  $H_{n,k}$ :

**Lema 4.1.4.** *Siguin  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  dos vèrtexs de  $H_{n,k}$ ,  $k > 1$ . Aleshores, segons a quin dels subgrafs  $H_{n,k-1}$  pertanyin aquests vèrtexs, tindrem un dels tres casos següents:*

- (a) *Si  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \alpha V_{n,k-1}$  per a algun  $\alpha \in \mathbb{Z}_n$ , és a dir,  $\mathbf{x} = \alpha \mathbf{x}'$  i  $\mathbf{y} = \alpha \mathbf{y}'$ , aleshores,*

$$\text{dist}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{dist}_{k-1}(\mathbf{x}', \mathbf{y}').$$

(b) Si  $\mathbf{x} \in 0V_{n,k-1}$  i  $\mathbf{y} \in \alpha V_{n,k-1}$  per a algun  $\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$ , és a dir,  $\mathbf{x} = 0\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{y} = \alpha\mathbf{y}'$ , aleshores,

$$\text{dist}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{dist}_{k-1}(\mathbf{x}', \mathbf{r}^0) + 1 + \text{dist}_{k-1}(\mathbf{y}', P^\alpha).$$

(c) Si  $\mathbf{x} \in \alpha V_{n,k-1}$  i  $\mathbf{y} \in \beta V_{n,k-1}$  per a alguns  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_n^*$ ,  $\alpha \neq \beta$ , és a dir,  $\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}'$ ,  $\mathbf{y} = \beta\mathbf{y}'$ , aleshores,

$$\text{dist}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \min\{\text{dist}_{k-1}(\mathbf{x}', P^\alpha) + 2 + \text{dist}_{k-1}(\mathbf{y}', P^\beta), \\ \text{dist}_{k-1}(\mathbf{x}', \mathbf{r}^\alpha) + 1 + \text{dist}_{k-1}(\mathbf{r}^\beta, \mathbf{y}')\}.$$

**Lema 4.1.5.** Per a tot vèrtex  $\mathbf{x}$  de  $H_{n,k}$  tenim:

$$\text{dist}_k(\mathbf{x}, \mathbf{r}) \leq \begin{cases} k-1 & \text{si } \mathbf{x} = 0\mathbf{x}', \\ k & \text{altrament,} \end{cases} \quad i \quad \text{dist}_k(\mathbf{x}, P) \leq \begin{cases} k & \text{si } \mathbf{x} = 0\mathbf{x}', \\ k-1 & \text{altrament.} \end{cases}$$

**Demostració.** Per inducció sobre  $k$ .

Cas  $k = 1$ : Si  $\mathbf{x} = \mathbf{0} = \mathbf{r}$ , aleshores  $\text{dist}_1(\mathbf{x}, \mathbf{r}^0) = 0$  i  $\text{dist}_1(\mathbf{x}, P) = 1$ . Altrament,  $\mathbf{x} \in P = \mathbb{Z}_n^*$ , i aleshores  $\text{dist}_1(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = 1$  i  $\text{dist}_1(\mathbf{x}, P) = 0$ .

Cas  $k > 1$ : Observem que, de la definició recursiva de  $H_{n,k}$ , tenim que

$$\text{dist}_k(\mathbf{x}, \mathbf{r}) = \begin{cases} \text{dist}_{k-1}(\mathbf{x}', \mathbf{r}^0) & \text{si } \mathbf{x} = 0\mathbf{x}', \\ \text{dist}_{k-1}(\mathbf{x}', P^\alpha) + 1 & \text{si } \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}', \alpha \neq 0, \end{cases}$$

i

$$\text{dist}_k(\mathbf{x}, P) = \begin{cases} \text{dist}_{k-1}(\mathbf{x}', \mathbf{r}^0) + 1 & \text{si } \mathbf{x} = 0\mathbf{x}', \\ \text{dist}_{k-1}(\mathbf{x}', P^\alpha) & \text{si } \mathbf{x} = \alpha\mathbf{x}', \alpha \neq 0. \end{cases}$$

Aleshores, per la hipòtesi d'inducció, es compleix el lema.  $\square$

En el resultat següent,  $\mathbf{z}^{01} = 0101\dots$  i  $\mathbf{z}^{10} = 1010\dots$  denoten els vèrtexs  $x_1x_2\dots x_i\dots$  de  $H_{n,k}$  o  $H_{n,k-1}$ , on  $x_i \equiv i+1 \pmod{2}$  i  $x_i \equiv i \pmod{2}$ , respectivament.

**Lema 4.1.6.** En  $H_{n,k}$  tenim les distàncies següents:

$$(a) \text{dist}_k(\mathbf{z}^{01}, \mathbf{r}) = \text{dist}_k(\mathbf{z}^{10}, P) = k-1,$$

$$(b) \text{dist}_k(\mathbf{z}^{10}, \mathbf{r}) = \text{dist}_k(\mathbf{z}^{01}, P) = k.$$

**Demostració.** Per inducció sobre  $k$ .

Cas  $k = 1$ :  $H_{n,k}$  és el graf complet  $K_n$  i el resultat clarament es compleix.

Cas  $k > 1$ : Del lema 4.1.4 tenim:

$$(a) \text{dist}_k(\mathbf{z}^{01}, \mathbf{r}) = \text{dist}_{k-1}(\mathbf{z}^{10}, \mathbf{r}^0) = k-1,$$

$$\text{dist}_k(\mathbf{z}^{10}, P) = \text{dist}_{k-1}(\mathbf{z}^{01}, P^0) = k - 1;$$

$$(b) \text{dist}_k(\mathbf{z}^{10}, \mathbf{r}) = \text{dist}_{k-1}(\mathbf{z}^{01}, P^1) + 1 = k,$$

$$\text{dist}_k(\mathbf{z}^{01}, P) = \text{dist}_{k-1}(\mathbf{z}^{10}, \mathbf{r}^0) + 1 = k - 1 + 1 = k.$$

□

Ara podem donar el resultat sobre el diàmetre de  $H_{n,k}$ :

**Proposició 4.1.7.** *El diàmetre de  $H_{n,k}$  és  $D_k = 2k - 1$ .*

**Demostració.** Primer provem per inducció sobre  $k$  que, per a qualsevol parell de vèrtexs de  $H_{n,k}$ ,  $\mathbf{x}$  i  $\mathbf{y}$ , tenim que  $\text{dist}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq 2k - 1$ .

Cas  $k = 1$ : El resultat es compleix trivialment ja que  $H_{n,1} = K_n$  i  $D_1 = 1$ .

Cas  $k > 1$ : Si considerem els tres casos del lema 4.1.4 i utilitzem la hipòtesi d'inducció, tenim:

(a) Si  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \alpha V_{n,k-1}$  per a algun  $\alpha \in \mathbb{Z}_n$ , aleshores,

$$\text{dist}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{dist}_{k-1}(\mathbf{x}', \mathbf{y}') \leq 2(k-1) - 1 = 2k - 3 < 2k - 1.$$

(b) Si  $\mathbf{x} \in 0V_{n,k}$  i  $\mathbf{y} \in \alpha V_{n,k-1}$  per a algun  $\alpha \in \mathbb{Z}_n^*$ , aleshores,

$$\text{dist}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{dist}_{k-1}(\mathbf{x}', \mathbf{r}^0) + 1 + \text{dist}_{k-1}(\mathbf{y}', P^\alpha) \leq 2(k-1) + 1 = 2k - 1$$

ja que, pel lema 4.1.5,  $\text{dist}_{k-1}(\mathbf{x}', \mathbf{r}^0) \leq k - 1$  i  $\text{dist}_{k-1}(\mathbf{y}', P^\alpha) \leq k - 1$ .

(c) Si  $\mathbf{x} \in \alpha V_{n,k}$  i  $\mathbf{y} \in \beta V_{n,k-1}$  per a alguns  $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_n^*$ ,  $\alpha \neq \beta$ , aleshores,

$$\begin{aligned} \text{dist}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \min\{\text{dist}_{k-1}(\mathbf{x}', P^\alpha) + 2 + \text{dist}_{k-1}(\mathbf{y}', P^\beta), \\ &\quad \text{dist}_{k-1}(\mathbf{x}', \mathbf{r}^\alpha) + 1 + \text{dist}_{k-1}(\mathbf{r}^\beta, \mathbf{y}')\} \\ &\leq 2(k-1) + 1 = 2k - 1 \end{aligned}$$

ja que, pel lema 4.1.6,  $\text{dist}_{k-1}(\mathbf{x}', \mathbf{r}^\alpha) \leq k - 1$  i  $\text{dist}_{k-1}(\mathbf{r}^\beta, \mathbf{y}') \leq k - 1$ .

Ara hem de demostrar que existeixen dos vèrtexs en  $H_{n,k}$  a distància exactament  $2k - 1$ . Sigui  $\mathbf{x} = \mathbf{z}^{01}$  i  $\mathbf{y} = \mathbf{z}^{10}$ . Dels lemes 4.1.4 i 4.1.6 s'obté que  $\text{dist}_k(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 2k - 1$  (vegeu la figura 4, cas (ii) esquerra). Això completa la demostració. □

Observem que el diàmetre és proporcional al logaritme de l'ordre  $N = |V_{n,k}| = n^k$ :  $D_k = \frac{2}{\log n} \log N - 1$ . Aquesta propietat, juntament amb l'alt valor del clustering (vegeu la secció següent), mostra que  $H_{n,k}$  és una xarxa petit món.

#### 4.1.4 Distribucions de graus i de clusterings

En aquesta secció estudiem les distribucions de graus i de clusterings del graf  $H_{n,k}$ . Obtenim la distribució de graus directament de la definició del graf.

**Proposició 4.1.8.** *La distribució de graus en  $H_{n,k}$  és la següent:*

(a) *El vèrtex arrel  $\mathbf{r}$  de  $H_{n,k}$  té grau*

$$\delta(\mathbf{r}) = \frac{(n-1)^{k+1} - (n-1)}{n-2}.$$

(b) *El grau de les arrels  $\mathbf{r}_{k-i}^\alpha$  de cadascun dels  $(n-1)n^{i-1}$  subgrafs  $H_{n,k-i}^\alpha$ , amb  $i = 1, 2, \dots, k-1$ ,  $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_i \in \mathbb{Z}_n^i$  i  $\alpha_i \neq 0$ , és*

$$\delta(\mathbf{r}_{k-i}^\alpha) = \frac{(n-1)^{k-i+1} - (n-1)}{n-2} + (n-2).$$

(c) *El grau dels  $(n-1)^k$  vèrtexs perifèrics  $\mathbf{p}$  de  $H_{n,k}$  és*

$$\delta(\mathbf{p}) = n + k - 2.$$

(d) *El grau dels  $(n-1)^{k-i}n^{i-1}$  vèrtexs perifèrics  $\mathbf{p}_{k-i}^\alpha$  dels subgrafs  $H_{n,k-i}^\alpha$ , amb  $i = 1, 2, \dots, k-1$ ,  $\alpha = \alpha_1\alpha_2 \dots \alpha_i \in \mathbb{Z}_n^i$  i  $\alpha_i \neq 0$ , és*

$$\delta(\mathbf{p}_{k-i}^\alpha) = n + k - i - 2.$$

**Demostració.** (a) De les condicions d'adjacència (4.3) i (4.4), l'arrel de  $H_{n,k}$  té grau

$$\delta(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^k (n-1)^i = \frac{(n-1)^{k+1} - (n-1)}{n-2}.$$

(b) L'arrel del subgraf  $H_{n,k-i}^\alpha$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ ,  $\alpha_i \neq 0$ , és adjacent, segons (a), a  $\frac{(n-1)^{k-i+1} - n + 1}{n-2}$  vèrtexs que pertanyen al mateix subgraf i també, segons (4.5), a  $n-2$  vèrtexs els quals són les altres arrels “del mateix nivell”.

(c) Cada vèrtex perifèric de  $H_{n,k}$  és adjacent, segons (4.3), a  $n-1$  vèrtexs i, segons (4.4), a  $k-1$  vèrtexs (els quals són arrels d'altres subgrafs).

(d) Cada vèrtex perifèric de  $H_{n,k-i}^\alpha$ ,  $1 \leq i \leq k-1$ ,  $\alpha_i \neq 0$ , és adjacent, segons (4.3), a  $n-1$  vèrtexs (del subgraf isomorf a  $K_n$ ) i, segons (4.4), a  $k-i$  vèrtexs (arrels d'altres subgrafs).  $\square$

Els resultats anteriors sobre la distribució de graus de  $H_{n,k}$  estan resumits a la taula 4.1. Observem que, d'aquesta distribució, podem obtenir, de nou, la proposició 4.1.2, ja que el nombre d'arestes es pot calcular a partir de

$$2|E_{n,k}| = \delta(\mathbf{r}) + \sum_{i=1}^{k-1} (n-1)n^{i-1}\delta(\mathbf{r}_{k-i}^\alpha) + (n-1)^k\delta(\mathbf{p}) + \sum_{i=1}^{k-1} (n-1)^{k-i}n^{i-1}\delta(\mathbf{p}_{k-i}^\alpha),$$

cosa que dona (4.6). A més, utilitzant aquest resultat, el grau mitjà i el seu comportament asimptòtic, quan  $k \rightarrow \infty$ , és

$$\bar{\delta} = \frac{2|E_{n,k}|}{|V_{n,k}|} = \frac{3n^{k+1} - 4n^k - 2(n-1)^{k+1} - n + 2}{n^k} \sim 3n - 4.$$

De la distribució de graus i per a  $k$  gran, veiem que el nombre de vèrtexs  $N_{n,k}(z)$  (amb un grau donat  $z$ ) decreix com una potència del grau  $z$  i, per tant, el graf és scale-free [7, 38, 45]. Com que la distribució de graus és discreta, per relacionar l'exponent d'aquesta distribució discreta amb l'exponent estàndard  $\gamma$  d'una distribució contínua per a xarxes scale-free aleatòries, utilitzem una distribució acumulativa

$$P_{cum}(z) \equiv \sum_{z' \geq z} |N_{n,k}(z')| / |N_{n,k}(z)| \sim z^{1-\gamma},$$

on  $z$  i  $z'$  són punts de l'espectre discret de graus. Quan  $z = \frac{(n-1)^{k-i+1} - n + 2}{n-2}$ , hi ha exactament  $(n-1)n^{i-1}$  vèrtexs amb grau  $z$ . El nombre de vèrtexs amb aquest grau o superior és

$$(n-1)n^{i-1} + \dots + (n-1)n + (n-1) + 1 = 1 + (n-1) \sum_{j=0}^{i-1} n^j = n^i.$$

Aleshores, tenim  $z^{1-\gamma} = n^i/n^k = n^{i-k}$ . Per tant, per a  $k$  gran,  $((n-1)^{k-i})^{1-\gamma} \sim n^{i-k}$  i

$$\gamma \sim 1 + \frac{\log n}{\log(n-1)}.$$

Per a  $n = 5$ , això dona el mateix valor de  $\gamma$  que en el cas de les xarxes jeràrquiques introduïdes per Ravasz i Barabási [81]. Es pot obtenir la seva xarxa a partir de  $H_{5,k}^j$  esborrant les arestes que uneixen les arrels de  $H_{5,k-i}^j$ ,  $j \neq 0$ ,  $1 \leq i \leq k-2$ .

A continuació trobem la distribució de clusterings dels vèrtexs de  $H_{n,k}$ . El coeficient de clustering d'un graf  $G$  mesura la seva "connectivitat". Aquest paràmetre s'utilitza per caracteritzar les xarxes petit món i scale-free. El coeficient de clustering d'un vèrtex va ser introduït per Watts i Strogatz [97] per quantificar el concepte següent: per a tot vèrtex  $v \in V = V(G)$  amb grau  $\delta_v = |\Gamma(v)|$ , el seu *clustering*  $c(v)$  es defineix com la fracció de les  $\binom{\delta_v}{2}$  arestes possibles entre els veïns de  $v$  que estan presents en  $G$ . Més precisament, si  $\epsilon_v = \|\langle \Gamma(v) \rangle\|$  és el nombre d'arestes entre els  $\delta_v$  vèrtexs adjacents a  $v$ , el seu coeficient de clustering és

$$c(v) = \frac{2\epsilon_v}{\delta_v(\delta_v - 1)}, \quad (4.13)$$



Taula 4.1: Distribucions de graus i de clusterings de  $H_{n,k}$ 

Tipus de vèrtex	Núm. vèrtexs	Grau	Clustering
$H_{n,k}$ arrel	1	$\frac{(n-1)^{k+1}-(n-1)}{n-2}$	$\frac{(n-2)^2}{(n-1)^{k+1}-2(n-1)+1}$
$H_{n,k-i}^\alpha$ arrels $i = 1, 2, \dots, k-1,$ $\alpha \in \mathbb{Z}_n^i, \alpha_i \neq 0$	$(n-1)n^{i-1}$	$\frac{(n-1)^{k-i+1}-(n-1)}{n-2}$ $+n-2$	$\frac{(n-2)^2}{(n-1)^{k-i+1}+(n-1)^2-3(n-1)+1}$
$H_{n,k}$ perifèrics	$(n-1)^k$	$n+k-2$	$\frac{(n-1)^2+(2k-3)(n-1)+2-2k}{(n+k-2)(n+k-3)}$
$H_{n,k-i}^\alpha$ perifèrics $i = 1, 2, \dots, k-1,$ $\alpha \in \mathbb{Z}_n^i, \alpha_i \neq 0$	$(n-1)^{k-i}n^{i-1}$	$n+k-i-2$	$\frac{(n-1)^2+(2k-2i-3)(n-1)+2+2i-2k}{(n+k-i-2)(n+k-i-3)}$

mentre que el *coeficient de clustering* de  $G$ , denotat per  $c(G)$ , és la mitjana de  $c(v)$  sobre tots els vèrtexs  $v$  de  $G$ :

$$c(G) = \frac{1}{|V|} \sum_{v \in V} c(v). \quad (4.14)$$

Newman *et al.* [79] van donar una altra definició de *coeficient de clustering* de  $G$ :

$$c'(G) = \frac{3T(G)}{\tau(G)} \quad (4.15)$$

on  $\tau(G)$  i  $T(G)$  són, respectivament, el nombre de *triangles* (subgrafs isomorfs a  $K_3$ ) i el nombre de *triples* (subgrafs isomorfs al camí de 3 vèrtexs) de  $G$ . Un triple en un vèrtex  $v$  és un 3-camí amb vèrtex central  $v$ . Aleshores, el nombre de triples a  $v$  és

$$\tau(v) = \binom{\delta_v}{2} = \frac{\delta_v(\delta_v - 1)}{2}. \quad (4.16)$$

El nombre total de triples de  $G$  es denota per  $\tau(G) = \sum_{v \in V} \tau(v)$ . Si utilitzem aquests paràmetres, el coeficient de clustering d'un vèrtex  $v$  també es pot escriure com  $c(v) = \frac{T(v)}{\tau(v)}$ , on  $T(v) = \binom{\delta_v}{2}$  és el nombre de triangles de  $G$  que contenen el vèrtex  $v$ . D'aquí obtenim que  $c(G) = c'(G)$  si i només si

$$|V| = \frac{\sum_{v \in V} \tau(v)}{\sum_{v \in V} T(v)} \sum_{v \in V} \frac{T(v)}{\tau(v)}.$$

Això es compleix per a grafs regulars o en grafs en els quals tots els vèrtexs tenen el mateix coeficient de clustering. De fet,  $c'(G)$  ja era conegut en el context de xarxes socials com *coeficient de transitivitat*.

Primer calculem el coeficient de clustering i després el de transitivitat.

**Proposició 4.1.9.** *La distribució de clusterings de  $H_{n,k}$  és la següent:*

(a) *L'arrel  $\mathbf{r}$  de  $H_{n,k}$  té clustering*

$$c(\mathbf{r}) = \frac{(n-2)^2}{(n-1)^{k+1} - 2n + 3}.$$

(b) *El clustering de les arrels  $\mathbf{r}_{k-i}^\alpha$  de cadascun dels  $(n-1)n^{i-1}$  subgrafs  $H_{n,k-i}^\alpha$ , amb  $i = 1, 2, \dots, k-1$ ,  $\alpha = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_i \in \mathbb{Z}_n^i$  i  $\alpha_i \neq 0$ , és*

$$c(\mathbf{r}_{k-i}^\alpha) = \frac{(n-2)^2}{(n-1)n^{k-i+1} + (n-1)^2 - 3n + 4}.$$

(c) *El clustering dels  $(n-1)^k$  vèrtexs perifèrics  $\mathbf{p}$  de  $H_{n,k}$  és*

$$c(\mathbf{p}) = \frac{(n-1)^2 + (2k-3)(n-1) + 2 - 2k}{(n+k-2)(n+k-3)}.$$

(d) *El clustering dels  $(n-1)^{k-i}n^{i-1}$  vèrtexs perifèrics  $\mathbf{p}_{k-i}^\alpha$  dels subgrafs  $H_{n,k-i}^\alpha$ , amb  $i = 1, 2, \dots, k-1$ ,  $\alpha = \alpha_1\alpha_2\dots\alpha_i \in \mathbb{Z}_n^i$  i  $\alpha_i \neq 0$ , és*

$$c(\mathbf{p}_{k-i}^\alpha) = \frac{(n-1)^2 + (2k-2i-3)(n-1) + 2 + 2i - 2k}{(n+k-i-2)(n+k-i-3)}.$$

**Demostració.** Demostrem només tres dels casos, ja que la demostració de l'altre cas és similar.

(a) Com que l'arrel de  $H_{n,k}$  és adjacent a  $\sum_{i=1}^k (n-1)^i$  vèrtexs amb grau  $n-2$ , el seu clustering és

$$c(\mathbf{r}) = \frac{\frac{n-2}{2} \frac{(n-1)^{k+1} - n + 1}{n-2}}{\frac{1}{2} \frac{(n-1)^{k+1} - n + 1}{n-2} \left( \frac{(n-1)^{k+1} - n + 1}{n-2} - 1 \right)} = \frac{(n-2)^2}{(n-1)^{k+1} - 2n + 3}.$$

(b) Les arrels de  $H_{n,k-i}^\alpha$  ( $i = 1, 2, \dots, k-1$ ,  $\alpha_i \neq 0$ ) tenen clustering

$$\begin{aligned} c(\mathbf{r}_{k-i}^\alpha) &= \frac{\frac{n-2}{2} \frac{(n-1)^{k-i+1} - n + 1}{n-2} + \frac{(n-2)(n-3)}{2}}{\frac{1}{2} \left( \frac{(n-1)^{k-i+1} - n + 1}{n-2} + n - 2 \right) \left( \frac{(n-1)^{k-i+1} - n + 1}{n-2} + n - 3 \right)} \\ &= \frac{(n-2)^2}{(n-1)^{k-i+1} + (n-1)^2 - 3n + 4}. \end{aligned}$$

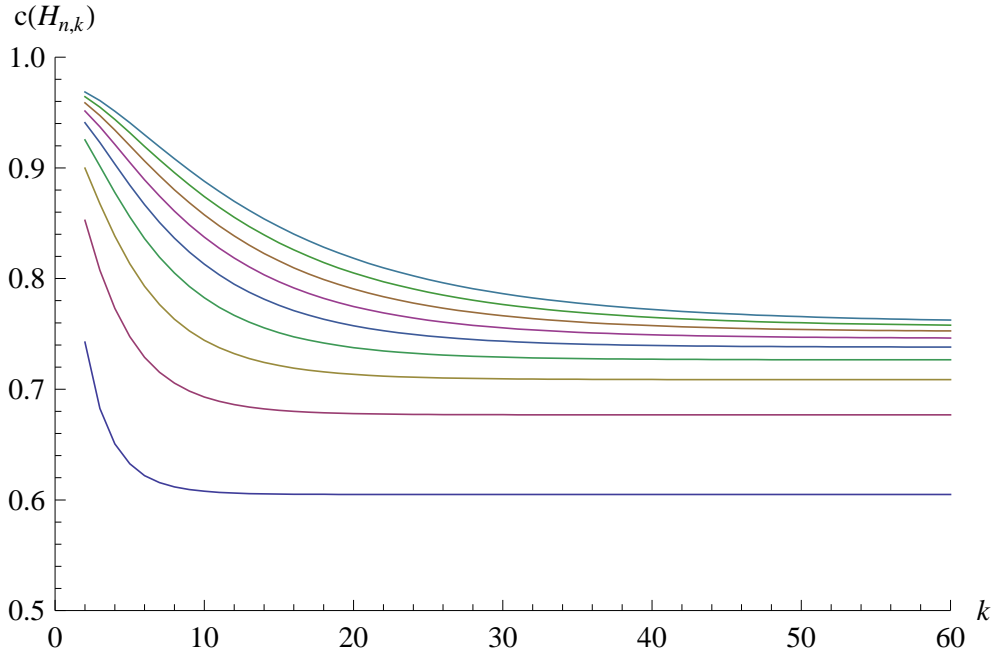


Figura 4.5: El coeficient de clustering de  $H_{n,k}$  per a  $n = 4, 6, \dots, 20$ .

- (d) El clustering dels vèrtexs perifèrics de  $H_{n,k-i}^\alpha$  ( $i = 1, 2, \dots, k-1$ ,  $\alpha_i \neq 0$ ), és

$$\begin{aligned} c(\mathbf{p}_{k-i}^\alpha) &= \frac{\frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-2)(k-i-1)}{\frac{1}{2}(n+k-i-2)(n+k-i-3)} \\ &= \frac{(n-1)^2 + (2k-2i-3)(n-1) + 2 + 2i - 2k}{(n+k-i-2)(n+k-i-3)}. \end{aligned}$$

En particular, observem que, per a  $i = k-1$ , els vèrtexs perifèrics de  $H_{n,1}^\alpha$ , amb  $\alpha \neq 0$ , tenen clustering  $\frac{(n-1)^2 - n + 1}{(n-1)n} = 1$ .

□

Els resultats anteriors sobre la distribució de clusterings estan resumits a la taula 4.1. A partir d'aquests resultats podem calcular el coeficient de clustering de  $H_{n,k}$ , el qual està representat a la figura 4.5.

Per a tots els graus, el clustering dels vèrtexs corresponents és inversament proporcional al grau. Aleshores, la distribució de clusterings verifica  $c(z) \sim z^{-1}$ . Segons Barabási i Oltvai [9], això es considera la signatura de la modularitat jeràrquica. Una altra característica rellevant del clustering de  $H_{n,k}$  és que, per a  $k$  prou gran, tendeix a un valor constant amb  $k$ . Més concretament, per a  $n$

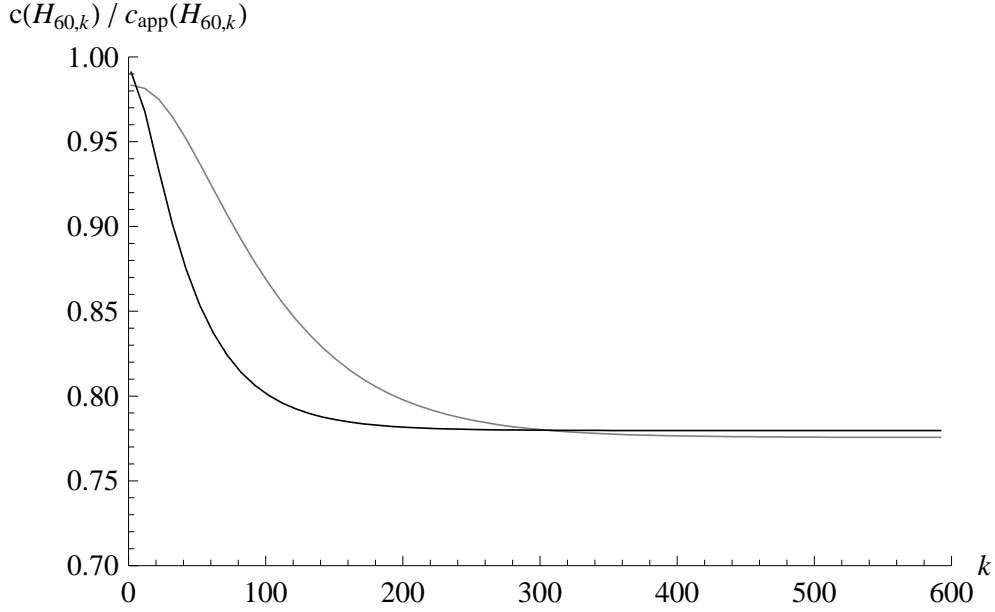


Figura 4.6: Comparació entre el valor exacte del clustering de  $H_{60,k}$  (línia negra) i l'aproximació asimptòtica (línia gris).

gran, tendeix molt ràpidament a un valor constant quan  $k \rightarrow \infty$ :

$$c(H_{n,k}) \sim c_{app}(H_{n,k}) = 1 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^i \left(\frac{i}{n+i}\right)^2.$$

Vegeu la figura 4.6. Aquest valor correspon a la contribució dels vèrtexs perifèrics de  $H_{n,k-i}^{\alpha}$  ( $i = 1, 2, \dots, k-1$ ,  $\alpha \in \mathbb{Z}_n^i$ ,  $\alpha_i \neq 0$ ), ja que la contribució al clustering de  $H_{n,k}$  dels altres vèrtexs tendeix a zero quan  $n, k \rightarrow \infty$ .

Aquest valor constant del clustering (el qual és independent de l'ordre del graf), juntament amb el valor de  $\gamma$  de la distribució potencial de graus, és una bona caracterització de les xarxes jeràrquiques *modulars*. Algunes observacions en xarxes metabòliques de diferents organismes mostren que són altament modulars i que tenen aquestes propietats (vegeu [9, 82]).

Per trobar el coeficient de transitivitat necessitem calcular el nombre de triangles i el nombre de triples del graf.

**Proposició 4.1.10.** *El nombre de triangles  $T_{n,k}$  de  $H_{n,k}$  és:*

$$T_{n,k} = \frac{1}{2}(n-2) \left(1 - \frac{n}{3} - (n-1)^{k+1} + \frac{2}{3}n^k(2n-3)\right).$$

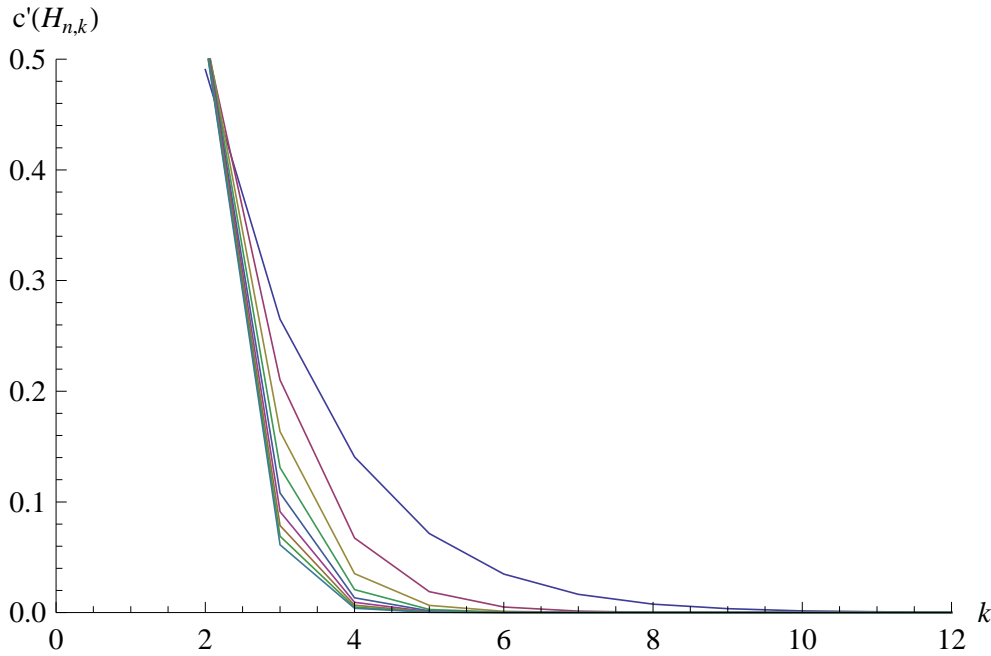


Figura 4.7: Coeficient de transitivitat de  $H_{n,k}$  per a  $n = 4, 6, \dots, 20$

**Demostració.** Quan construïm  $H_{n,k}$  a partir de  $n$  còpies de  $H_{n-1,k}$ , les adjacències (4.1) i (4.2) introdueixen  $(n-1)^{k-1} \binom{n-1}{2}$  i  $\binom{n-1}{3}$  nous triangles, respectivament. Aleshores,

$$T_{n,k} = nT_{n,k-1} + (n-1)^{k-1} \binom{n-1}{2} + \binom{n-1}{3}.$$

Si apliquem recursivament aquesta fórmula i tenim en compte que  $T_{n,1} = \binom{n}{3}$ , obtenim el resultat.  $\square$

A més a més, a partir dels resultats de la proposició 4.1.8 (o la taula 1) sobre el nombre de vèrtexs de cada grau, tenim el resultat següent per al nombre de triples (ometem explicitar la fórmula degut a la seva llargària):

**Proposició 4.1.11.** *El nombre de triples  $\tau_{n,k}$  de  $H_{n,k}$  és:*

$$\tau_{n,k} = \binom{\delta(\mathbf{r})}{2} + (n-1) \sum_{i=1}^{k-1} n^{i-1} \binom{\delta(\mathbf{r}_{k-i}^\alpha)}{2} + (n-1)^k \binom{\delta(\mathbf{p})}{2} + \sum_{i=1}^{k-1} (n-1)^{k-i} n^{i-1} \binom{\delta(\mathbf{p}_{k-i}^\alpha)}{2}.$$

El coeficient de transitivitat s'obté dels dos resultats anteriors i, com mostra la figura 4.7, tendeix ràpidament a zero quan  $k \rightarrow \infty$ .

### 4.1.5 Conclusions

En aquesta secció hem presentat una família de grafs, la qual generalitza les xarxes jeràrquiques introduïdes per Ravasz *et al.* [82]. La nostra família de grafs combina una estructura modular amb una topologia scale-free per tal de modelitzar les estructures modulares associades a organismes vius, xarxes socials i xarxes tècniques (com, per exemple, Internet). Per als grafs proposats, donem un algorisme d'encaminament. A més a més, hem calculat el radi, el diàmetre i les distribucions de graus i de clusterings. Hem vist que aquests grafs són scale-free amb un exponent de la llei potencial que depèn del graf complet inicial, que la distribució de clusterings  $c(z)$  és inversament proporcional al grau i que el coeficient de clustering no depèn de l'ordre del graf, com passa en moltes xarxes associades a sistemes reals [9, 81, 82]. Finalment, és important esmentar que la nostra definició de xarxa jeràrquica es pot generalitzar si agafem el conjunt de vèrtexs  $\mathbb{Z}_{n_1} \times \mathbb{Z}_{n_2} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{n_k}$  (en lloc de  $\mathbb{Z}_n^k$ ). En aquest cas, tots els resultats sobre l'algorisme d'encaminament i els paràmetres mètrics són vàlids sense canvis.

## 4.2 El producte jeràrquic de grafs

En aquesta secció introduïm una nova operació de grafs, que anomenem *producte jeràrquic*, que és una generalització del producte cartesià i que permet la construcció de famílies de grafs que presenten jerarquia. Com a conseqüència, el producte jeràrquic hereta algunes de les ben conegudes propietats del producte cartesià, com presentar un diàmetre reduït i algorismes d'enrutament simples. El nom que hem escollit per a aquesta nova operació està inspirat en la forta jerarquia en el grau dels vèrtexs del graf resultant (vegeu la figura 4.9). Un exemple de producte jeràrquic és l'arbre determinístic de Jung *et al.* [64], el qual correspon al cas en què tots els factors són grafs estrella (vegeu la figura 4.8). Els grafs jeràrquics proposats per Noh [80] i per Ravasz *et al.* [81, 82] també es poden relacionar amb el producte jeràrquic de grafs complets.

En l'estudi d'aquestes construccions, un tema que té una importància especial és el càlcul de l'espectre. El motiu és que el coneixement dels valors propis d'un graf ens dona informació molt rellevant sobre alguns paràmetres estructurals. Una tècnica molt utilitzada en aquest sentit és l'estudi de l'entrellaçat dels valors propis, problema que ha estat estudiat per Haemers [59] i Fiol [48], entre altres.

Aquesta secció es divideix en tres parts. A la primera definim el producte jeràrquic i n'estudiem les propietats principals, com ara la jerarquia dels vèrtexs i els principals paràmetres mètrics (excentricitat, radi, diàmetre i distància mitjana). A la segona part estudiem algunes propietats algebraiques del producte jeràrquic. En particular, demostrem un resultat sobre l'espectre del graf obtingut amb el producte jeràrquic de dos grafs qualssevol i de la potència jeràrquica (com

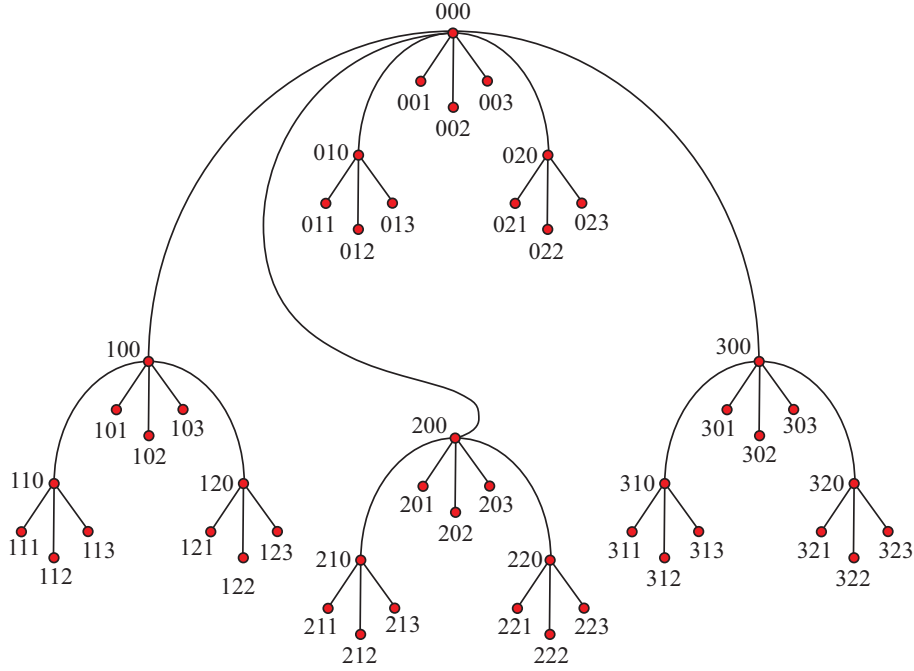


Figura 4.8: El producte jeràrquic  $S_3 \square S_2 \square S_3$ .

a producte jeràrquic repetit) d'un graf donat. Concretament, estudiem l'espectre de l'hiperarbre  $T_m$  (que és el producte jeràrquic de diverses còpies del graf complet de dos vèrtexs), el qual és un bon exemple de graf amb tots els seus valors propis diferents. A la darrera part definim el producte jeràrquic generalitzat i trobem algunes de les seves propietats.

La nostra publicació relacionada amb aquest tema és [13].

### 4.2.1 Definició i propietats bàsiques

Siguin  $G_i = (V_i, E_i)$ , per a  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  grafs amb conjunts de vèrtexs  $V_i$ , amb un vèrtex distingit o *arrel* amb l'etiqueta 0. El *producte jeràrquic*  $H = G_N \square \dots \square G_2 \square G_1$  és el graf amb vèrtexs  $x_N \dots x_3 x_2 x_1$ , per a  $x_i \in V_i$ , i arestes definides per les adjacències següents:

$$x_N \dots x_3 x_2 x_1 \sim \begin{cases} x_N \dots x_3 x_2 y_1 & \text{si } y_1 \sim x_1 \text{ en } G_1, \\ x_N \dots x_3 y_2 x_1 & \text{si } y_2 \sim x_2 \text{ en } G_2 \text{ i } x_1 = 0, \\ x_N \dots y_3 x_2 x_1 & \text{si } y_3 \sim x_3 \text{ en } G_3 \text{ i } x_1 = x_2 = 0, \\ \vdots & \vdots \\ y_N \dots x_3 x_2 x_1 & \text{si } y_N \sim x_N \text{ en } G_N \text{ i } x_1 = \dots = x_{N-1} = 0. \end{cases} \quad (4.17)$$

L'estructura del graf obtingut  $H$  depèn fortament dels vèrtexs arrel dels factors  $G_i$ . Com a exemple, la figura 4.9 mostra els productes jeràrquics de dues i quatre còpies del graf complet  $K_2$ . L'ordre escollit dels factors, amb els subíndexs en ordre decreixent, és degut al fet que, quan  $V_i = \{0, 1, \dots, b-1\}$ , els vèrtexs  $x_N \dots x_3 x_2 x_1$  de  $H$  representen els primers  $b^N$  nombres en base  $b$ . Observem que, amb  $n_i = |V_i|$  i  $m_i = |E_i|$ , el nombre de vèrtexs de  $H$  és  $n_H = n_N \dots n_3 n_2 n_1$ . A més a més, el nombre d'arestes de  $G_2 \sqcap G_1$  és  $m_2 + n_2 m_1$  i el de  $G_3 \sqcap G_2 \sqcap G_1$  és  $m_3 + n_3(m_2 + n_2 m_1) = m_3 + n_3 m_2 + n_3 n_2 m_1$ . En general, el nombre d'arestes de  $H$  és

$$m_H = m_N + \sum_{k=1}^{N-1} m_k n_{k+1} \cdots n_N.$$

El producte jeràrquic  $G_N \sqcap \cdots \sqcap G_2 \sqcap G_1$  és un subgraf del producte cartesià  $G_N \square \cdots \square G_2 \square G_1$ . Aquest fet ens ha suggerit fer servir la notació “ $\sqcap$ ” per al producte jeràrquic. Malgrat que el producte cartesià és commutatiu i associatiu, el producte jeràrquic compleix la propietat associativa (amb els vèrtexs arrel convenientment escollits), però no la propietat commutativa. A més a més, el producte jeràrquic és distributiu per la dreta respecte a la unió de grafs.

**Lema 4.2.1.** *El producte jeràrquic de grafs satisfà les propietats següents:*

(a) Associativa: si el vèrtex arrel de  $G_2 \sqcap G_1$  es defineix com a 00, aleshores

$$G_3 \sqcap G_2 \sqcap G_1 = G_3 \sqcap (G_2 \sqcap G_1) = (G_3 \sqcap G_2) \sqcap G_1. \quad (4.18)$$

(b) Distributiva per la dreta:

$$(G_3 \cup G_2) \sqcap G_1 = (G_3 \sqcap G_1) \cup (G_2 \sqcap G_1). \quad (4.19)$$

(c) Semi-distributiva per l'esquerra: si escollim el vèrtex arrel de  $G_2 \cup G_1$  en  $G_2$ , aleshores

$$G_3 \sqcap (G_2 \cup G_1) = (G_3 \sqcap G_2) \cup n_3 G_1, \quad (4.20)$$

on  $n_3 G_1 = \overline{K}_{n_3} \sqcap G_1$  és el graf constituït per  $n_3$  còpies de  $G_1$ .

**Demostració.** Per demostrar la primera igualtat en (4.18) (l'altra es demostra de manera similar), només cal mostrar que el vèrtex  $x_3(x_2 x_1)$  té els mateixos vèrtexs adjacents en  $G_3 \sqcap (G_2 \sqcap G_1)$  que el vèrtex  $x_3 x_2 x_1$  té en  $G_3 \sqcap G_2 \sqcap G_1$ . De fet,

$$x_3(x_2 x_1) \sim \begin{cases} x_3(y_2 y_1) & \text{si } (y_2 y_1) \sim (x_2 x_1) \text{ en } G_2 \sqcap G_1, \text{ és a dir,} \\ & \text{si } \begin{cases} y_1 \sim x_1 \text{ en } G_1 \text{ i } y_2 = x_2, \\ y_2 \sim x_2 \text{ en } G_2 \text{ i } y_1 = x_1 = 0, \end{cases} \\ y_3(x_2 x_1) & \text{si } y_3 \sim x_3 \text{ en } G_3 \text{ i } (x_2 x_1) = 0, \text{ és a dir, } x_2 = x_1 = 0. \end{cases}$$



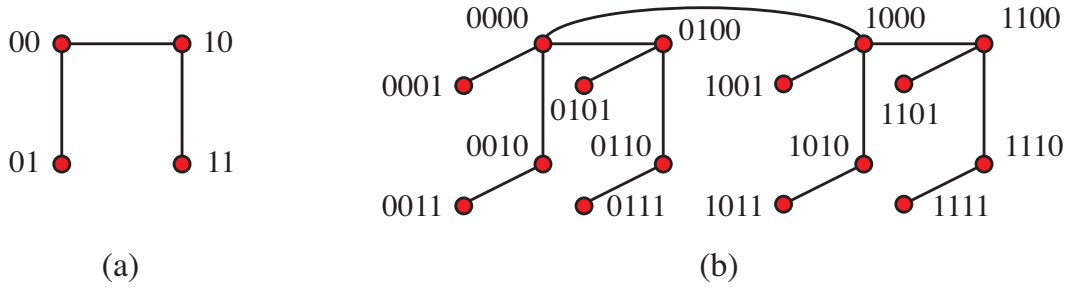


Figura 4.9: Les potències jeràrquiques  $K_2^2$  i  $K_2^4$ .

Aleshores, l'isomorfisme és simplement  $x_3(x_2x_1) \mapsto x_3x_2x_1$ .  $\square$

Com a conseqüència, i com que clarament  $K_1 \sqcap G = G \sqcap K_1 = G$ , el conjunt de grafs amb l'operació binària  $\sqcap$  és un *semigrup* amb element identitat  $K_1$  (és a dir, un *monoide*). Una conseqüència directa de les condicions d'adjacència (4.17) i del paper que fa  $K_1$  és el lema següent:

**Lema 4.2.2.** *Si sigui  $H = G_N \sqcap \dots \sqcap G_2 \sqcap G_1$ . Per a una cadena donada  $\mathbf{z}$  de longitud apropiada (per exemple,  $\mathbf{z} = \mathbf{0} = 0\dots 0$ ), denotem per  $H\langle \mathbf{z}x_k\dots x_1 \rangle$  el subgraf de  $H$  induït pel conjunt de vèrtexs  $\{\mathbf{z}x_k\dots x_1 \mid x_i \in V_i, 1 \leq i \leq k\}$ . Definim  $H\langle x_N\dots x_k\mathbf{z} \rangle$  anàlogament. Aleshores,*

- (a)  $H\langle \mathbf{z}x_k\dots x_1 \rangle = G_k \sqcap \dots \sqcap G_1$  per a qualsevol  $\mathbf{z}$  donat.
- (b)  $H\langle x_N\dots x_k\mathbf{0} \rangle = G_N \sqcap \dots \sqcap G_k$ .
- (c)  $H\langle x_N\dots x_k\mathbf{z} \rangle = (n_N\dots n_k)K_1$  per a  $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$ .

Algunes altres propietats bàsiques que són heretades pel producte jeràrquic de grafs són l'estructura d'arbre, el fet de ser bipartits i la planaritat (les demostracions són conseqüència directa de la definició).

### La jerarquia dels vèrtexs

Amb el producte jeràrquic obtenim grafs amb una forta jerarquia entre els seus vèrtexs. Concretament, com més zeros consecutius hi hagi a la dreta en l'etiqueta d'un vèrtex, més veïns (és a dir, més vèrtexs adjacents) tindrà aquest vèrtex. En el llenguatge de la teoria de xarxes diem que els vèrtexs amb un grau alt actuen com a *hubs*.

Siuguin  $G_i$ , per a  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $N$  grafs els vèrtexs arrel dels quals tenen graus  $\delta_i = \delta_{G_i}(0)$ . Aleshores, un vèrtex genèric del graf resultant del producte jeràrquic  $H = G_N \sqcap \dots \sqcap G_1$ , que anomenem  $\mathbf{x} = x_N x_{N-1} \dots x_k 00 \dots 0$ , amb  $x_k \neq 0$ , té grau

$$\delta_H(\mathbf{x}) = \delta_{G_k}(x_k) + \sum_{i=1}^{k-1} \delta_i, \quad (4.21)$$

i hi ha  $(n_k - 1) \prod_{i=k+1}^N n_i$  vèrtexs d'aquest tipus. A més a més, el grau del vèrtex arrel  $\mathbf{0} = 00 \dots 0$  en  $H$  és

$$\delta_H(\mathbf{0}) = \sum_{i=1}^N \delta_i. \quad (4.22)$$

En particular, si  $G_i = G$  i  $\delta_i = \delta$  per a tot  $i = 1, 2, \dots, N$ , aleshores  $H$  és el graf *potència jeràrquica*  $G^N = G \sqcap G \sqcap \dots \sqcap G$ , un graf de  $n^N$  vèrtexs els graus del qual segueixen una llei de distribució exponencial (vegeu la figura 4.10 com un exemple amb  $G = K_3$  i  $N = 3$ ). És a dir, la probabilitat que un vèrtex escollit aleatòriament tingui grau  $k$  és  $P(k) = \gamma^{-k}$ , on  $\gamma$  és una constant. De fet, si  $G$  té ordre  $n$ , per a  $k = 1, \dots, N - 1$ , el graf potència  $G^N$  té  $(n - 1)n^{N-k}$  vèrtexs amb grau  $k\delta$  i  $n$  vèrtexs amb grau  $N\delta$ .

Per exemple, si  $G = K_2$ , el producte jeràrquic  $T_m = K_2^m$ , que anomenem *hiperarbre* o *m-arbre* (i que en algorísmica es coneix amb el nom d'*arbre binomial*) té  $2^{m-k}$  vèrtexs de grau  $k = 1, \dots, m - 1$  i dos vèrtexs de grau  $m$  (vegeu de nou la figura 4.9(b) per al cas  $m = 4$ ).

Ara demostrem que, si eliminem el vèrtex arrel, el graf esdevé un graf no connex, el nombre de components del qual creix amb el nombre de zeros.

**Lema 4.2.3.** *Donat un producte jeràrquic de grafs,  $H = G_N \sqcap \dots \sqcap G_1$ , amb  $N \geq 2$ , denotem per  $H^* = H - \mathbf{0}$  el graf  $H$  que s'obté després d'eliminar el vèrtex arrel  $\mathbf{0} = 00 \dots 0$ . Aleshores,*

$$(G_N \sqcap \dots \sqcap G_2 \sqcap G_1)^* = \bigcup_{k=1}^N (G_k^* \sqcap G_{k-1} \sqcap \dots \sqcap G_1).$$

En particular, si  $G_i = K_2$ , per a  $1 \leq i \leq N$ , tenim

$$(K_2^N)^* = \bigcup_{k=0}^{N-1} K_2^k$$

on, per conveni,  $K_2^0 = K_1$ .

**Demostració.** Per demostrar la primera igualtat, simplement apliquem recursivament la fórmula  $(H_2 \sqcap H_1)^* = (H_2^* \sqcap H_1) \cup H_1^*$  utilitzant la propietat associativa del producte, segons el lema 4.2.2(a). Aleshores, la fórmula del graf potència  $K_2^N$  ve del paper que fa  $K_2^* = K_1$  com a element identitat.  $\square$

## 4.2.2 Propietats mètriques

En aquesta secció estudiem els paràmetres mètrics més rellevants del producte jeràrquic de grafs, és a dir, el radi, el diàmetre i la distància mitjana. Siguin

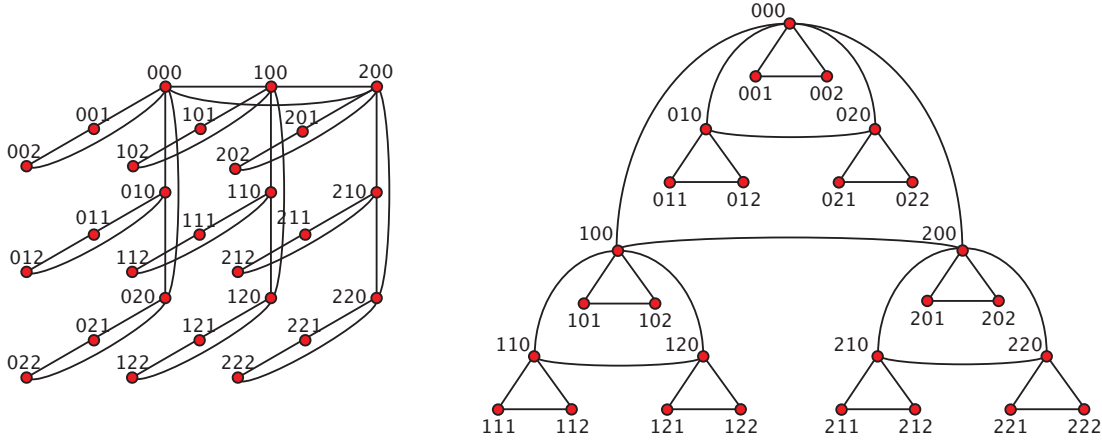


Figura 4.10: Dues perspectives de la potència jeràrquica  $K_3^3$ .

$G_i = (V_i, E_i)$ , per a  $1 \leq i \leq N$ ,  $N$  grafs i siguin  $\varepsilon_i := \text{exc}_{G_i}(\mathbf{0})$  les excentricitats dels seus vèrtexs arrel. Aleshores, l'excentricitat del vèrtex arrel  $\mathbf{0} = 00\dots 0$  de  $H$  és

$$\text{exc}_H(\mathbf{0}) = \sum_{i=1}^N \varepsilon_i. \quad (4.23)$$

Respecte al diàmetre i el radi del producte jeràrquic  $H$ , tenim els resultats següents:

**Proposició 4.2.4.** *Donat qualsevol conjunt de camins geodèsics  $\rho_i$  en  $G_i$ , per a  $i = 1, \dots, N$ , existeix un camí geodèsic induït  $\rho$  en  $H = G_N \square \dots \square G_1$ . A més a més, si el graf  $G_N$  té radi  $r_N$  i diàmetre  $D_N$ , aleshores el radi i el diàmetre de  $H$  són, respectivament,*

$$r_H = r_N + \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_i, \quad (4.24)$$

$$D_H = D_N + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \varepsilon_i. \quad (4.25)$$

**Demostració.** Suposem que tenim els camins geodèsics  $\rho_i$  de  $G_i$ , per a  $i = 1, \dots, N$ . Aleshores, per als vèrtexs  $v_N, v_{N-1}, \dots, v_{i+1}$ , podem estendre  $\rho_i$  al subgraf de  $H$  induït pel subconjunt de vèrtexs  $\{v_N v_{N-1} \dots v_{i+1} x_i 0 \dots 0 \mid x_i \in V_i\} \subset V_H$ . Per simplicitat, també anomenem  $\rho_i$  aquestes extensions.

Donats dos vèrtexs arbitraris  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  de  $H$ , sigui  $\mathbf{z} = x_N \dots x_{k+1}$  el seu màxim prefix comú (si  $k = N$ , aleshores  $\mathbf{z}$  és la cadena buida). Aleshores, tenim  $\mathbf{x} = \mathbf{z}x_k \dots x_1$  i  $\mathbf{y} = \mathbf{z}y_k \dots y_1$  amb  $x_k \neq y_k$ .

Això ens permet definir el següent camí geodèsic de  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{y}$ , on el símbol  $\circ$  denota concatenació de camins:

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) &= \rho_1(\mathbf{z}x_k \dots x_2 x_1, \mathbf{z}x_k \dots x_2 0) \circ \rho_2(\mathbf{z}x_k \dots x_2 0, \mathbf{z}x_k \dots 00) \circ \dots \\ &\quad \dots \circ \rho_k(\mathbf{z}x_k 0 \dots 0, \mathbf{z}y_k 0 \dots 0) \circ \rho_{k-1}(\mathbf{z}y_k 0 \dots 0, \mathbf{z}y_k y_{k-1} \dots 0) \circ \dots \\ &\quad \dots \circ \rho_1(\mathbf{z}y_k \dots y_2 0, \mathbf{z}y_k \dots y_2 y_1). \end{aligned}$$

Observem que alguns d'aquests subcamins podrien ser buits. Aquesta darrera expressió en termes de distàncies dona lloc a

$$\text{dist}_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{dist}_{G_k}(x_k, y_k) + \sum_{i=1}^{k-1} (\text{dist}_{G_i}(x_i, 0) + \text{dist}_{G_i}(0, y_i)). \quad (4.26)$$

Per tant, aquest algorisme dona el camí geodèsic  $\rho$  i una demostració constructiva dels resultats del radi i del diàmetre. De fet, per a un vèrtex fixat  $\mathbf{x}$ , és clar degut a (4.26) que existeix un vèrtex  $\mathbf{y}$  amb  $y_N \neq x_N$  ( $k = N$ ) tal que

$$\text{exc}_H(\mathbf{x}) = \text{dist}_H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \text{exc}_{G_N}(x_N) + \sum_{i=1}^{N-1} (\text{dist}_{G_i}(x_i, 0) + \varepsilon_i). \quad (4.27)$$

Aleshores, l'excentricitat mínima (el radi) s'assoleix quan  $\mathbf{x} = x_N 00 \dots 0$  i  $\text{exc}_{G_N}(x_N) = r_N$  (aquests vèrtexs constitueixen el *centre* de  $H$ ), cosa que demostra (4.24). L'excentricitat màxima (el diàmetre) s'assoleix per a qualsevol vèrtex  $x_N x_{N-1} \dots x_1$  que satisfaci  $\text{exc}_{G_N}(x_N) = D_N$  i  $\text{dist}_{G_i}(x_i, 0) = \varepsilon_i$ , per a  $1 \leq i \leq N-1$ , cosa que demostra (4.25).  $\square$

Respecte a la distància mitjana del producte jeràrquic, per simplicitat donem un resultat per al cas de dos factors. El cas de més factors es pot resoldre aplicant recursivament aquest resultat a causa de la propietat associativa (4.18). Primer introduïm la notació següent: per a un graf donat  $G = (V, E)$  amb ordre  $n$  i un vèrtex arrel, diguem-ne 0,  $d_G^0$  denota la distància mitjana entre 0 i tots els altres vèrtexs de  $G$  (incloent-hi el mateix 0), és a dir,  $d_G^0 = \frac{1}{n} \sum_{v \in V} \text{dist}_G(0, v)$ .

**Proposició 4.2.5.** *Siguin  $G_1, G_2$  dos grafs amb ordres  $n_i = |V_i|$ , vèrtex arrel 0, distància mitjana local (des del 0)  $d_i^0 = d_{G_i}^0$  i distància mitjana (estàndard global)  $d_i$ , per a  $i = 1, 2$ . Aleshores, el seu producte jeràrquic  $H = G_2 \square G_1$ , amb ordre  $n = n_1 n_2$  i vèrtex arrel 00, té els paràmetres següents:*

$$d_H^{00} = d_1^0 + d_2^0, \quad (4.28)$$

$$d_H = \frac{1}{n-1} [(n_1-1)d_1 + n_1(n_2-1)(d_2 + 2d_1^0)]. \quad (4.29)$$

**Demostració.** En el càlcul de les distàncies en  $H$ , distingim dos casos, segons que els dos vèrtexs estiguin o no en la mateixa còpia de  $G_k$ , per a  $k = 1, 2$ . Aleshores, utilitzant (4.26) tenim:

$$\begin{aligned}
d_H &= \frac{1}{\binom{n}{2}} \left( \sum_{x_2} \sum_{x_1, y_1} \text{dist}_H(x_2x_1, x_2y_1) + \sum_{x_2 \neq y_2} \sum_{x_1, y_1} \text{dist}_H(x_2x_1, y_2y_1) \right) \\
&= \frac{1}{\binom{n}{2}} n_2 \sum_{x_1 \neq y_1} \text{dist}_{G_1}(x_1, y_1) \\
&+ \frac{1}{\binom{n}{2}} \sum_{x_2 \neq y_2} \sum_{x_1, y_1} [\text{dist}_{G_2}(x_2, y_2) + \text{dist}_{G_1}(x_1, 0) + \text{dist}_{G_1}(0, y_1)] \\
&= \frac{1}{\binom{n}{2}} \left( n_2 \binom{n_1}{2} d_1 + \sum_{x_2 \neq y_2} n_1^2 \text{dist}_{G_2}(x_2, y_2) + \sum_{x_1, y_1} [\text{dist}_{G_1}(x_1, 0) + \text{dist}_{G_1}(0, y_1)] \right) \\
&= \frac{1}{\binom{n}{2}} \left( n_2 \binom{n_1}{2} d_1 + n_1^2 \binom{n_2}{2} d_2 + \binom{n_2}{2} \sum_{x_1} [n_1 \text{dist}_{G_1}(x_1, 0) + \sum_{y_1} \text{dist}_{G_1}(0, y_1)] \right) \\
&= \frac{1}{\binom{n}{2}} \left( n_2 \binom{n_1}{2} d_1 + n_1^2 \binom{n_2}{2} d_2 + \binom{n_2}{2} n_1^2 d_1^0 + \binom{n_2}{2} \sum_{x_1} n_1 \text{dist}_{G_1}(0, y_1) \right) \\
&= \frac{1}{\binom{n}{2}} \left( n_2 \binom{n_1}{2} d_1 + n_1^2 \binom{n_2}{2} d_2 + 2 \binom{n_2}{2} n_1^2 d_1^0 \right),
\end{aligned}$$

cosa que dona (4.29).  $\square$

Com a corollari, donem el següent resultat respecte a la  $N$ -èsima potència jeràrquica  $G^N = G \square G \square \dots \square G$ .

**Corol·lari 4.2.6.** *Sigui  $G$  un graf amb  $n$  vèrtexs, vèrtex arrel  $0$  amb excentricitat  $\varepsilon$  i distància mitjana local  $d^0$ . Siguin  $r$ ,  $D$  i  $d$ , el radi, el diàmetre i la distància mitjana de  $G$ , respectivament. Aleshores, la  $N$ -èsima potència jeràrquica  $G^N$ , per a  $N \geq 2$ , amb vèrtex arrel  $\mathbf{0}$ , té els paràmetres següents:*

(a) *Excentricitat i distància mitjana local:*

$$\text{exc}_N(\mathbf{0}) = N\varepsilon; \quad d_N^{\mathbf{0}} = Nd^0;$$

(b) *Radi i diàmetre:*

$$r_N = r + (N - 1)\varepsilon; \quad D_N = D + 2(N - 1)\varepsilon;$$

(c) *Distància mitjana:*

$$d_N = d + 2 \left( \frac{(N - 1)n^N + 1}{n^N - 1} - \frac{1}{n - 1} \right) d^0.$$

**Demostració.** La primera igualtat de l'apartat (a) i els resultats de l'apartat (b) són conseqüències directes de l'equació (4.23) i de la proposició 4.2.4. La segona igualtat de l'apartat (a) s'obté fàcilment aplicant (4.28) recursivament i utilitzant la llei associativa. Finalment, la mateixa tècnica es pot utilitzar per demostrar l'apartat (c) a partir de l'equació (4.29). De fet, ja que  $G^N = G^{N-1} \square G$ , l'equació (4.29) dóna la següent fórmula recursiva (on  $d_1 = d$  i  $d_1^0 = d^0$ ):

$$\begin{aligned}
d_N &= \frac{n(n^{N-1} - 1)}{n^N - 1} d_{N-1} + \frac{n-1}{n^N - 1} d_1 + \frac{n(n^{N-1} - 1)}{n^N - 1} 2d_1^0 \\
&= \frac{n(n^{N-1} - 1)}{n^N - 1} \left( \frac{n(n^{N-2} - 1)}{n^{N-1} - 1} d_{N-2} + \frac{n-1}{n^{N-1} - 1} d_1 + \frac{n(n^{N-2} - 1)}{n^{N-1} - 1} 2d_1^0 \right) \\
&+ \frac{n-1}{n^N - 1} d_1 + \frac{n(n^{N-1} - 1)}{n^N - 1} 2d_1^0 = \dots \\
&= \frac{n^{N-1}(n-1)}{n^N - 1} d_1 + \frac{n^{N-1} - 1}{n^N - 1} d_1 \\
&+ \frac{1}{n^N - 1} ((N-1)n^N - n^{N-1} - n^{N-2} - \dots - n) 2d_1^0 \\
&= d_1 + \left( \frac{(N-1)n^N + 1}{n^N - 1} - \frac{1}{n-1} \right) 2d_1^0.
\end{aligned}$$

□

En particular, observem que, quan  $N$  augmenta, la distància mitjana del graf potència  $N$ -èsima és

$$d_N \sim d + 2d^0 \left( N - \frac{n}{n-1} \right)$$

cosa que, per a valors grans de  $n$ , dóna una distància mitjana de l'ordre de

$$d_N \sim d + 2Nd^0.$$

**Exemple 4.2.7.** *El graf complet  $K_2$  té radi i diàmetre  $r = D = 1$ , distància mitjana local  $d^0 = \frac{1}{2}$  i distància mitjana  $d = 1$ . Aleshores, l'hiperarbre  $T_m = K_2^m$ , amb ordre  $2^m$  i vèrtex arrel  $\mathbf{0}$ , té els paràmetres següents:*

- (a)  $\text{exc}_m(\mathbf{0}) = m$ ;  $d_m^{\mathbf{0}} = \frac{m}{2}$ ;
- (b)  $r_m = m$ ;  $D_m = 2m - 1$ ;
- (c)  $d_m = \frac{m2^m}{2^m - 1} - 1 \sim m - 1$ .

### 4.2.3 Propietats espectrals

En aquesta secció estudiem algunes propietats algebraiques del producte jeràrquic en termes de les propietats dels grafs que formen el producte. En particular,

trobem alguns resultats sobre l'espectre d'alguns productes jeràrquics de dos grafs diferents i sobre la potència jeràrquica (com a producte repetit) d'un graf donat.

Comencem recordant que el *producte de Kronecker* de dues matrius  $\mathbf{A} = (a_{ij})$  i  $\mathbf{B}$ , normalment denotat per  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$ , és la matriu obtinguda reemplaçant cada entrada  $a_{ij}$  per la matriu  $a_{ij}\mathbf{B}$  per a tot  $i$  i  $j$ . Recordem també que el producte de Kronecker, en general, no és commutatiu. Tanmateix, si  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  són matrius “quadrades”,  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$  i  $\mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$  són *permutació similar*, cosa que s'escriu  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \cong \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$ ; és a dir, que existeix una matriu permutació  $\mathbf{P}$  tal que  $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathbf{P}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{A})\mathbf{P}^\top$ . En el llenguatge de grafs, si les dues matrius són matrius d'adjacència, diem que els grafs corresponents són isomorfs. El producte de Kronecker ens permet donar la matriu d'adjacència del producte jeràrquic de dos grafs en el lema següent:

**Lema 4.2.8.** *Siguin  $G_1, G_2$  dos grafs amb  $n_i$  vèrtexs i amb matrius d'adjacència  $\mathbf{A}_i$ , per a  $i = 1, 2$ . Aleshores, la matriu d'adjacència del producte jeràrquic  $H = G_2 \square G_1$ , amb un etiquetatge apropiat dels seus vèrtexs, es pot escriure com a*

$$\mathbf{A}_H = \mathbf{A}_2 \otimes \mathbf{D}_1 + \mathbf{I}_2 \otimes \mathbf{A}_1 \quad (4.30)$$

$$\cong \mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{I}_2 \quad (4.31)$$

on  $\mathbf{D}_1 = \text{diag}(1, 0, \dots, 0)$  i  $\mathbf{I}_2$  (la matriu identitat) tenen mida  $n_1 \times n_1$  i  $n_2 \times n_2$ , respectivament.

Per exemple, sigui  $G$  un graf d'ordre  $N$  i considerem el producte  $H = G \square K_n$ . Aleshores,

$$\mathbf{A}_H = \mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{A}_G + \mathbf{A}_{K_n} \otimes \mathbf{I}_N = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_G & \mathbf{I}_N & \cdots & \mathbf{I}_N \\ \mathbf{I}_N & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_N \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{I}_N & \mathbf{I}_N & \cdots & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (4.32)$$

on  $\mathbf{A}_H$  és una matriu  $n \times n$  de  $N \times N$  blocs.

En el nostre estudi utilitzem el següent resultat de Sylvester [87]:

**Teorema 4.2.9.** *Sigui  $R$  un subanell commutatiu de  $F^{n \times n}$ , el conjunt de totes les matrius  $n \times n$  sobre un cos  $F$  (o anell commutatiu), i sigui  $\mathbf{M} \in R^{m \times m}$ . Aleshores,*

$$\det_F \mathbf{M} = \det_F(\det_R \mathbf{M}),$$

(el subíndex indica on es calcula el determinant).

Això ens permet calcular el determinant d'una matriu de  $2 \times 2$  blocs:

**Corollari 4.2.10.** *Sigui  $M = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{pmatrix}$  una matriu en blocs, on  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$  són matrius  $n \times n$  en un cos en el qual commuten dos a dos. Aleshores,*

$$\det M = \det(\mathbf{AD} - \mathbf{BC}).$$

### Propietats espectrals de $G \sqcap K_2^\ell$

Aquí estudiem el polinomi característic i l'espectre de  $G \sqcap K_2^\ell$ . Comencem amb  $H = G \sqcap K_2$ . Si  $G$  té ordre  $n$  i matriu d'adjacència  $\mathbf{A}$ , la matriu d'adjacència de  $H$  és

$$\mathbf{A}_H = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I}_n \\ \mathbf{I}_n & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (4.33)$$

amb polinomi característic

$$\phi_H(x) = \det(x\mathbf{I}_{2n} - \mathbf{A}_H) = \det \begin{pmatrix} x\mathbf{I}_n - \mathbf{A} & -\mathbf{I}_n \\ -\mathbf{I}_n & x\mathbf{I}_n \end{pmatrix}.$$

Aleshores, utilitzant el corollari 4.2.10, tenim

$$\begin{aligned} \phi_H(x) &= \det((x^2 - 1)\mathbf{I}_n - x\mathbf{A}) \\ &= \det(x[(x - \frac{1}{x})\mathbf{I}_n - \mathbf{A}]) \\ &= x^n \phi_G(x - \frac{1}{x}), \end{aligned} \quad (4.34)$$

on  $\phi_G$  és el polinomi característic de  $G$ . De fet, aquest resultat correspon al cas particular ( $r = 2$ ) d'un teorema de Cvetkovic *et al.* [43], que dona el polinomi característic del graf corresponent al nostre producte jeràrquic  $G \sqcap S_r$ , amb  $S_r = K_{1,r-1}$  (el graf *estrella* de  $r$  vèrtexs).

Tornant al nostre cas, com que  $\phi_G$  és un polinomi mònic de grau  $n$ , el coeficient de  $\frac{1}{x^n}$  en  $\phi_G(x - \frac{1}{x})$  és 1 i, per tant, el terme constant de  $\phi_H(x)$  també és 1. En conseqüència, 0 mai no serà un valor propi de  $H$ . A més a més, obtenim el resultat següent:

**Proposició 4.2.11.** *Sigui  $G$  un graf amb  $n$  vèrtexs, amb espectre*

$$\text{sp } G = \{\lambda_0^{m_0}, \lambda_1^{m_1}, \dots, \lambda_d^{m_d}\}$$

*on els superíndexs denoten les multiplicitats ( $m_0 = 1$  si  $G$  és connex) i  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_d$ . Aleshores, l'espectre del producte jeràrquic  $H = G \sqcap K_2$  és*

$$\text{sp } H = \{\lambda_{00}^{m_0}, \lambda_{10}^{m_1}, \dots, \lambda_{d0}^{m_d}, \lambda_{01}^{m_0}, \lambda_{11}^{m_1}, \dots, \lambda_{d1}^{m_d}\},$$



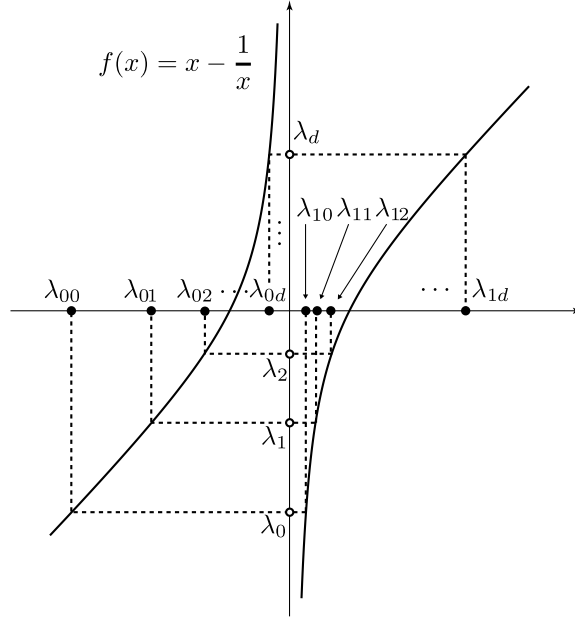


Figura 4.11: Valors propis de  $G$  en funció dels valors propis de  $H = G \square K_2$ .

on

$$\lambda_{0i} = f_0(\lambda_i) = \frac{\lambda_i - \sqrt{\lambda_i^2 + 4}}{2}, \quad \lambda_{1i} = f_1(\lambda_i) = \frac{\lambda_i + \sqrt{\lambda_i^2 + 4}}{2} \quad (0 \leq i \leq d), \quad (4.35)$$

i

$$\lambda_{00} < \lambda_{01} < \cdots < \lambda_{0d} < 0 < \lambda_{10} < \lambda_{11} < \cdots < \lambda_{1d}. \quad (4.36)$$

**Demostració.** A partir de (4.34) i dels comentaris posteriors, tenim les implicacions següents:

$$\lambda \in \text{sp } H \Leftrightarrow \phi_H(\lambda) = \lambda^n \phi_G(\lambda - \frac{1}{\lambda}) = 0 \Leftrightarrow \lambda - \frac{1}{\lambda} \in \text{sp } G.$$

Aleshores, per a cada  $\lambda_i \in \text{sp } G$  obtenim dos valors propis de  $H$ , els quals són les solucions  $\lambda_{i0} = f_0(\lambda_i)$  i  $\lambda_{i1} = f_1(\lambda_i)$  de l'equació de segon grau  $\lambda^2 - \lambda_i \lambda - 1 = 0$  (que prové de  $\lambda_i = \lambda - \frac{1}{\lambda}$ ), que satisfan

$$\lambda_{0i} = \frac{\lambda_i - \sqrt{\lambda_i^2 + 4}}{2} < 0 < \frac{\lambda_i + \sqrt{\lambda_i^2 + 4}}{2} = \lambda_{1i}. \quad (4.37)$$

A més a més, observem que  $\lambda_i < \lambda_{i+1}$  implica que  $\lambda_{0i} < \lambda_{0,i+1}$  i  $\lambda_{1i} < \lambda_{1,i+1}$  (vegeu la figura 4.11 per a una “demostració sense paraules” a l'estil del llibre de Nelsen [75]).  $\square$

En particular, si  $G$  és bipartit, el seu espectre és simètric respecte al 0:  $\lambda_i = -\lambda_{d-i}$ ,  $i = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{d}{2} \rfloor$  (vegeu, per exemple, Biggs [20]), com passa amb  $H = G \sqcap K_2$  que té els valors propis

$$\lambda_{0i} = \frac{\lambda_i - \sqrt{\lambda_i^2 + 4}}{2} = \frac{-\lambda_{d-i} - \sqrt{\lambda_{d-i}^2 + 4}}{2} = -\lambda_{1,d-i} \quad (0 \leq i \leq \lfloor \frac{d}{2} \rfloor). \quad (4.38)$$

Considerem ara el cas del producte múltiple  $H_m = G \sqcap K_2^m$ , amb  $m \geq 0$ , on, per conveni,  $H_0 = G$ . Pel lema 4.2.1,  $H_m = H_{m-1} \sqcap K_2$  i podem tractar aquest cas recursivament, aplicant  $m$  vegades (4.34) o la proposició 4.2.11.

Tanmateix, a partir d'una conseqüència del teorema 4.2.9 (vegeu el lema següent) podem obtenir alternativament la recurrència per trobar el polinomi característic  $\phi_m$  de  $H_m$ .

**Lema 4.2.12.** *Si  $p$  i  $q$  són polinomis arbitraris, aleshores*

$$\det \begin{pmatrix} p\mathbf{I}_n - q\mathbf{A} & -q\mathbf{I}_n \\ -q\mathbf{I}_n & p\mathbf{I}_n \end{pmatrix} = \det((p^2 - q^2)\mathbf{I}_n - pq\mathbf{A}).$$

Això ens dóna una doble relació de recurrència per a  $\phi_m(x)$ , obtinguda aplicant recursivament el lema 4.2.12. La matriu d'adjacència de  $H_m$  és

$$\mathbf{A}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{m-1} & \mathbf{I}_{m-1} \\ \mathbf{I}_{m-1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad (4.39)$$

per a  $m \geq 1$ , on  $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}$  és la matriu d'adjacència de  $H_0 = G$  i on  $\mathbf{I}_m$  denota la matriu identitat de mida  $n2^m \times n2^m$  (la mateixa mida que  $\mathbf{A}_m$ ).

**Proposició 4.2.13.** *Sigui  $\{p_i, q_i\}_{i \geq 0}$  la família de polinomis que satisfan les relacions de recurrència*

$$p_i = p_{i-1}^2 - q_{i-1}^2, \quad (4.40)$$

$$q_i = p_{i-1} q_{i-1}, \quad (4.41)$$

amb condicions inicials  $p_0 = x$  i  $q_0 = 1$ . Aleshores, per a  $m \geq 0$ , el polinomi característic de  $H_m = G \sqcap K_2^m$  és

$$\phi_m(x) = (q_m(x))^n \phi_0 \left( \frac{p_m(x)}{q_m(x)} \right),$$

on  $\phi_0$  és el polinomi característic de  $G$ .

**Demostració.** Com que  $q_0(x) = 1$  i  $p_0(x) = x$ , el resultat es compleix òbviament per a  $m = 0$ . Sigui  $m \geq 1$ . Primer provem que, per a tot  $i$ ,  $0 \leq i \leq m$ ,

$$\phi_m = \det(p_i \mathbf{I}_{m-i} - q_i \mathbf{A}_{m-i}). \quad (4.42)$$

La demostració és per inducció sobre  $i$ . Per definició del polinomi característic,

$$\phi_m = \det(x\mathbf{I}_m - \mathbf{A}_m) = \det(p_0\mathbf{I}_{m-1} - q_0\mathbf{A}_{m-1})$$

i podem veure que (4.42) es compleix per a  $i = 0$ . Aleshores, suposem que es compleix per a  $i - 1$ . Considerant l'estructura de  $\mathbf{A}_m$  en (4.39), tenim

$$\begin{aligned} \phi_m &= \det(p_{i-1}\mathbf{I}_{m-i+1} - q_{i-1}\mathbf{A}_{m-i+1}) \\ &= \det\left(p_{i-1}\mathbf{I}_{m-i+1} - q_{i-1}\begin{pmatrix} \mathbf{A}_{m-i} & \mathbf{I}_{m-i} \\ \mathbf{I}_{m-i} & \mathbf{0} \end{pmatrix}\right) \\ &= \det\begin{pmatrix} p_{i-1}\mathbf{I}_{m-i} - q_{i-1}\mathbf{A}_{m-i} & -q_{i-1}\mathbf{I}_{m-i} \\ -q_{i-1}\mathbf{I}_{m-i} & p_{i-1}\mathbf{I}_{m-i} \end{pmatrix} \\ &= \det((p_{i-1}^2 - q_{i-1}^2)\mathbf{I}_{m-i} - p_{i-1}q_{i-1}\mathbf{A}_{m-i}) \\ &= \det(p_i\mathbf{I}_{m-i} - q_i\mathbf{A}_{m-i}), \end{aligned}$$

on hem utilitzat el lema 4.2.12 i les relacions de recurrència de  $p_i$  i  $q_i$ .

En particular, el cas  $i = m$  dóna

$$\begin{aligned} \phi_m(x) &= \det(p_m(x)\mathbf{I}_0 - q_m(x)\mathbf{A}_0) \\ &= \det\left(q_m(x)\begin{pmatrix} p_m(x) \\ q_m(x) \end{pmatrix}\mathbf{I}_0 - \mathbf{A}_0\right) \\ &= (q_m(x))^n \phi_0\left(\frac{p_m(x)}{q_m(x)}\right). \end{aligned}$$

Això completa la demostració.  $\square$

### L'espectre del producte genèric de dos termes

**Teorema 4.2.14.** *Siguin  $G_1$  i  $G_2$  dos grafs amb  $n_i$  vèrtexs, matrius d'adjacència  $\mathbf{A}_i$  i polinomis característics  $\phi_i(x)$ ,  $i = 1, 2$ . Suposem que  $G_1$  té el vèrtex arrel 0 i considerem el graf  $G_1^* = G_1 - 0$ , amb matriu d'adjacència  $\mathbf{A}_1^*$  i polinomi característic  $\phi_1^*$ . Aleshores, el polinomi característic  $\phi_H(x)$  del producte jeràrquic  $H = G_2 \square G_1$  és:*

$$\phi_H(x) = (\phi_1^*(x))^{n_2} \phi_2\left(\frac{\phi_1(x)}{\phi_1^*(x)}\right). \quad (4.43)$$

**Demostració.** Sense perdre generalitat, podem indexar les files (i columnes) de  $\mathbf{A}_i$  com a  $0, 1, 2, \dots$  i suposar que els vèrtexs adjacents al vèrtex arrel 0 en  $G_1$ , amb grau  $\delta$ , són  $1, 2, \dots, \delta$ . Aleshores, utilitzant (4.31), la matriu d'adjacència de  $H$  es pot escriure com una matriu  $n_1 \times n_1$  en blocs, on cada bloc té mida  $n_2 \times n_2$  (compareu la següent matriu d'adjacència amb (4.33)):

$$\mathbf{A}_H = \mathbf{D}_1 \otimes \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_1 \otimes \mathbf{I}_2 = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_2 & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^\top & \mathbf{A}_1^* \otimes \mathbf{I}_2 \end{pmatrix},$$

on

$$\mathbf{B} = \left( \mathbf{I}_2 \mid \dots^{(\delta)} \dots \mid \mathbf{I}_2 \mid \mathbf{0} \mid \mathbf{0} \mid \dots \mid \mathbf{0} \right).$$

Aleshores, el polinomi característic de  $H$  és

$$\phi_H(x) = \det(x\mathbf{I} - \mathbf{A}_H) = \det \begin{pmatrix} x\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_2 & -\mathbf{B} \\ -\mathbf{B}^\top & (x\mathbf{I}_1^* - \mathbf{A}_1^*) \otimes \mathbf{I}_2 \end{pmatrix},$$

on els  $n_1^2$  blocs són de tres tipus: un és del tipus  $x\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_2$ ,  $n_1 - 1$  són del tipus  $x\mathbf{I}_2$  i  $m_1$  són del tipus  $-\mathbf{I}_2$ , on  $m_1$  és el nombre d'arestes de  $G_1$ . Per tant, podem aplicar el teorema 4.2.9 (ja que tots els blocs commuten dos a dos) i obtenim  $\phi_H$  calculant el determinant en  $\mathbb{R}^{n_2 \times n_2}$  expandint per la primera fila els blocs de  $\mathbf{B}$ :

$$\begin{aligned} \phi_H(x) &= \det([x\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_2]\phi_1^*(x)\mathbf{I}_2 + \phi_1(x)\mathbf{I}_2 - x\mathbf{I}_2\phi_1^*(x)) \\ &= \det(\phi_1(x)\mathbf{I}_2 - \phi_1^*(x)\mathbf{A}_2) \\ &= \det \left( \phi_1^*(x) \left[ \frac{\phi_1(x)}{\phi_1^*(x)}\mathbf{I}_2 - \mathbf{A}_2 \right] \right) \\ &= (\phi_1^*(x))^{n_2} \phi_2 \left( \frac{\phi_1(x)}{\phi_1^*(x)} \right), \end{aligned}$$

com volíem demostrar.  $\square$

De fet, Schwenk [85] va donar una demostració molt més llarga d'aquest resultat en un altre context, sense esmentar l'operació subjacent de grafs.

Tenim un cas particular interessant quan  $G_1$  és un graf *camí-regular* (vegeu Godsil [58]), perquè l'anomenada *funció característica local* (vegeu l'article de Fiol i Mitjana [51]) és la mateixa per a cada vèrtex i

$$\phi_1^*(x) = \frac{1}{n_1} \phi_1'(x),$$

on, com és usual, la prima indica derivació.

**Corol·lari 4.2.15.** *Amb la mateixa notació, si  $G_1$  és un graf camí-regular, tenim*

$$\phi_H(x) = \left( \frac{\phi_1'(x)}{n_1} \right)^{n_2} \phi_2 \left( \frac{n_1 \phi_1(x)}{\phi_1'(x)} \right). \quad (4.44)$$

Alguns exemples ben coneguts de grafs camí-regular són els grafs vèrtex-transitius i els grafs distància-regulars. Un cas particular interessant el trobem quan  $G_2$  és el graf complet  $K_n$ .

**Corol·lari 4.2.16.** *Sigui  $G$  un graf d'ordre  $n_2 = N$  i polinomi característic  $\phi_G$ . Aleshores el polinomi característic de  $H = G \square K_n$  és:*

$$\phi_H(x) = (x+1)^{N(n-2)}(x-n+2)^N \phi_G \left( \frac{(x+1)(x-n+1)}{(x-n+2)} \right).$$

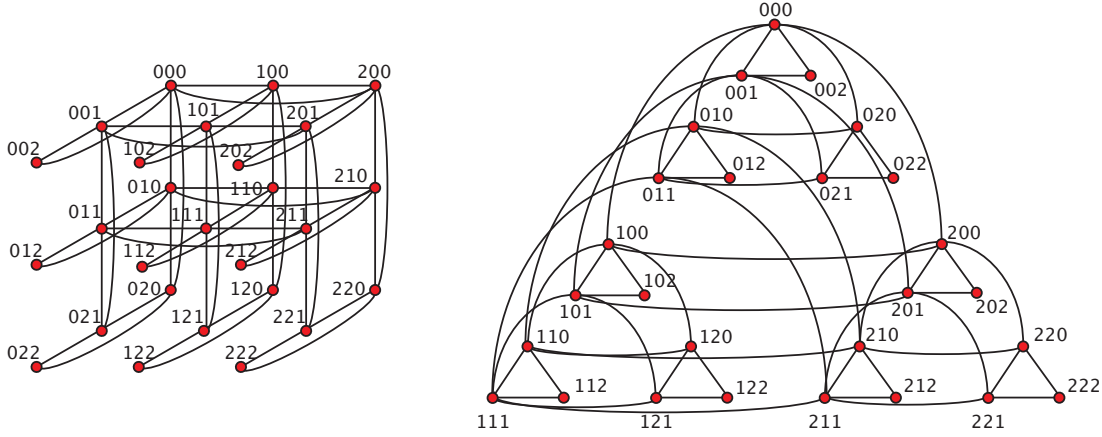


Figura 4.12: Dues perspectives del producte jeràrquic generalitzat  $K_3^3$  amb  $U_1 = U_2 = \{0, 1\}$ .

**Demostració.** Apliquem l'equació (4.44) amb  $n_1 = n$ , el polinomi característic de  $K_n$

$$\phi_1 = (x - n + 1)(x + 1)^{n-1}$$

amb

$$\phi_1' = (x + 1)^{n-1} + (n - 1)(x - n + 1)(x + 1)^{n-2}.$$

□

#### 4.2.4 El producte jeràrquic generalitzat

Una generalització natural del producte jeràrquic és la següent: donats  $N$  grafs  $G_i = (V_i, E_i)$  i uns subconjunts (no buits) de vèrtexs  $U_i \subseteq V_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N - 1$ , el *producte jeràrquic generalitzat*  $H = G_N \square \dots \square G_2(U_2) \square G_1(U_1)$  és el graf amb conjunt de vèrtexs  $V_N \times \dots \times V_2 \times V_1$ , com abans, i adjacències (vegeu la figura 4.12):

$$x_N \dots x_3 x_2 x_1 \sim \begin{cases} x_N \dots x_3 x_2 y_1 & \text{si } y_1 \sim x_1 \text{ en } G_1, \\ x_N \dots x_3 y_2 x_1 & \text{si } y_2 \sim x_2 \text{ en } G_2 \text{ i } x_1 \in U_1 \\ x_N \dots y_3 x_2 x_1 & \text{si } y_3 \sim x_3 \text{ en } G_3 \text{ i } x_i \in U_i, i = 1, 2 \\ \vdots & \vdots \\ y_N \dots x_3 x_2 x_1 & \text{si } y_N \sim x_N \text{ en } G_N \text{ i } x_i \in U_i, i = 1, 2, \dots, N - 1 \end{cases}$$

En particular, els dos casos extrems són els següents:

- Si tots els  $U_i$  són *singletons* (grafs d'un sol vèrtex), per a tot  $1 \leq i \leq N - 1$ , aleshores el graf resultant és el producte jeràrquic (estàndard), en el qual els *singletons* corresponen a les arrels dels diferents factors.

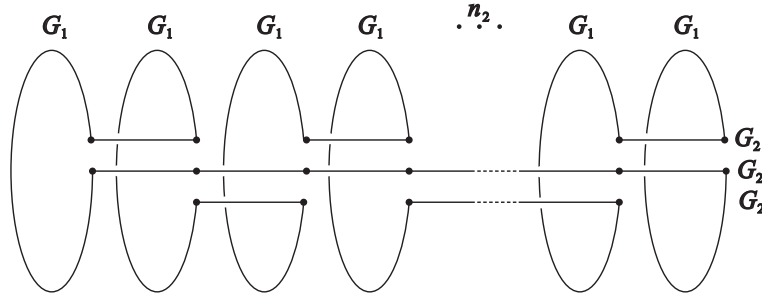


Figura 4.13: Cicle hamiltonià en  $H = G_2 \square G_1(U_1)$  a través de tres còpies de  $G_2$  i  $n_2$  còpies de  $G_1$ .

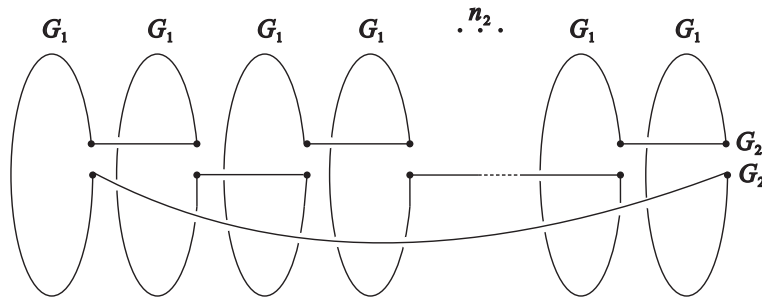


Figura 4.14: Cicle hamiltonià en  $H = G_2 \square G_1(U_1)$  a través de dues còpies de  $G_2$  i  $n_2$  còpies de  $G_1$  quan  $n_2$  és parell.

- Si  $U_i = V_i$  per a tot  $1 \leq i \leq N-1$ , aleshores, el graf resultant és el producte cartesià de  $G_i$ .

Altres possibles generalitzacions del producte jeràrquic s'obtenen utilitzant una factorització apropiada dels grafs  $G_i$ . D'aquesta manera, es poden obtenir productes jeràrquics amb algunes propietats determinades, com una alta connectivitat o una distribució de graus específica (per exemple, scale-free).

Observem que el producte jeràrquic pot definir-se també per a grafs infinits i per a digrafs.

### Cicles hamiltonians

És ben conegut que el producte cartesià de grafs hamiltonians  $G = G_1 \square G_2$  és també hamiltonià (vegeu, per exemple, Bermond [19]). Com hem dit abans, aquest producte correspon al nostre producte jeràrquic  $G_2 \square G_1(U_1)$  quan  $U_1 = V_1$ . Aquí demostrem que un resultat similar val en condicions molt menys restrictives relatives als subconjunts  $U_i$ .

**Proposició 4.2.17.** *Si els grafs  $G_i = (V_i, E_i)$ ,  $i = 1, 2$ , són hamiltonians i el graf induït pels vèrtexs en  $U_1 \subset V_1$  té un camí  $P_3$  contingut en el cicle hamiltonià de  $G_1$ , aleshores el producte jeràrquic generalitzat  $H = G_2 \sqcap G_1(U_1)$  és hamiltonià.*

**Demostració.** La construcció d'un cicle hamiltonià en  $H$  a partir de cicles hamiltonians en  $G_1$  i  $G_2$  no és res més que la versió per a grafs de la utilitzada en la demostració dels teoremes 2.1.12 i 3.4.1. Concretament, un cicle hamiltonià en  $H$  es construeix unint adequadament  $n_2$  quasicicles hamiltonians de subgrafs isomorfs a  $G_1$  amb 3 quasicicles hamiltonians de subgrafs isomorfs a  $G_2$  (anomenem quasicicle un cicle menys algunes arestes), segons es mostra a la figura 4.13.  $\square$

De fet, si  $n_2$  és parell també es compleix el següent resultat, la demostració del qual ometem perquè és molt semblant a l'anterior (vegeu la figura 4.14).

**Proposició 4.2.18.** *Si els grafs  $G_i = (V_i, E_i)$ ,  $i = 1, 2$ , són hamiltonians,  $n_2 = |V_2|$  és parell i el graf induït pels vèrtexs en  $U_1 \subset V_1$  té una aresta continguda en el cicle hamiltonià de  $G_1$ . Aleshores, el producte jeràrquic generalitzat  $H = G_2 \sqcap G_1(U_1)$  és hamiltonià.*





# Capítol 5

## Hiperarbres i hiperarbres $r$ -àdics

En aquest capítol estudiem les propietats bàsiques i les espectrals d'una família d'arbres, que hem anomenat hiperarbres, amb dues característiques destacables: són subgrafs generadors de l'hipercub i els seus vèrtexs presenten una forta jerarquia en les seves connexions. Els hiperarbres es poden definir recursivament a partir de l'anomenat producte jeràrquic de grafs complets de dos vèrtexs.

A la segona part del capítol estudiem els hiperarbres  $r$ -àdics, que són una generalització dels hiperarbres. Aquests arbres s'obtenen a partir del producte jeràrquic de camins de  $r$  vèrtexs. En aquest cas, es tracta de subgrafs generadors de la malla  $r$ -dimensional. Com en el cas dels hiperarbres, els seus vèrtexs també presenten una forta jerarquia.

Els nostres articles relacionats amb aquest capítol són [14, 15].

### 5.1 Hiperarbres

#### 5.1.1 Introducció

A la primera part del capítol estudiem les propietats bàsiques i les propietats espectrals dels anomenats hiperarbres o arbres binomials, en el llenguatge que s'utilitza en algorísmica (vegeu Cormen *et al.* [41]).

Definim l'hiperarbre de dimensió  $m$   $T_m$  com el producte jeràrquic de  $m$  còpies de  $K_2$ .

Entre altres propietats, l'hiperarbre és un bon exemple de graf amb tots els seus valors propis diferents. Aquest fet comporta algunes conseqüències estructurals, com ara que el seu grup d'automorfismes sigui abelià (vegeu Mowshowitz [74]). De fet, mostrem que el grup d'automorfismes de  $T_m$  és el grup simètric  $S_2$ . Això, juntament amb l'alt grau de jerarquia que presenta aquesta família d'arbres, comporta propietats interessants en el seu espectre.

Més concretament, a causa de la relació de recurrència que satisfà el polinomi característic de  $T_m$ , cada valor propi d'un hiperarbre d'una determinada dimensió dóna lloc a dos valors propis en l'hiperarbre de la dimensió següent. Per tant, hi ha una forta relació entre els valors propis (i els vectors propis) d'hiperarbres de dimensions diferents.

A més de trobar els valors propis de  $T_m$ , estudiem el seu comportament asimptòtic i com estan distribuïts en intervals definits pels valors propis de  $T_{m'}$ , per a  $m' < m$ .

Finalment, calculem els vectors propis de  $T_m$ , utilitzant tècniques de Fiol i Mitjana [50] i de Godsil [58], que es basen en l'obtenció d'una distribució de càrregues en els vèrtexs de  $T_m$  a partir de la distribució de càrregues en els vèrtexs de  $T_{m-1}$ .

### 5.1.2 Definició i propietats bàsiques

Comencem el nostre estudi de l'hiperarbre donant-ne la definició.

**Definició 5.1.1.** *Donat un enter  $m > 0$ , l'hiperarbre  $T_m$  és l'arbre arrelat amb el conjunt de vèrtexs  $\mathbb{Z}_2^m$  i amb les adjacències definides per la regla següent: dos vèrtexs són adjacents si i només si les seves etiquetes difereixen en exactament un dígit i el màxim sufix comú és buit o conté només zeros. El vèrtex arrel de  $T_m$  és  $\mathbf{0} = 00\dots 0$ .*

De fet, aquesta definició és equivalent a considerar el producte jeràrquic de  $m$  còpies de  $K_2$ . És a dir,  $T_m = K_2^m = K_2 \square \dots \square K_2$ , on l'operador “ $\square$ ” indica aquest tipus de producte, el qual està definit en el capítol anterior. Per conveni, considerem  $T_0 = K_1$ .

Com a exemple, la figura 5.1 mostra el producte jeràrquic de dos, quatre i sis grafs isomorfs al graf complet  $K_2$ .

Com que els grafs obtinguts del producte jeràrquic són subgrafs generadors del corresponent producte cartesià, tenim que  $T_m$  és un subgraf generador de l'hipercub  $Q_m$ . Recordem que  $Q_m$  té el conjunt de vèrtexs  $\mathbb{Z}_2^m$  i que dos vèrtexs són adjacents si i només si difereixen exactament en un dígit.

**Notació 5.1.2.** *Cada  $\mathbf{i} = i_{m-1}\dots i_1 i_0 \in \mathbb{Z}_2^m$  pot ser vist com l'expressió en base dos, de longitud  $m$ , de  $i = \sum_{k=0}^{m-1} i_k 2^k$ , amb  $i \in \{0, 1, \dots, 2^m - 1\}$ . En particular, considerem els vèrtexs de  $T_m$  etiquetats amb els nombres del conjunt anterior. En aquest sentit, fem ús de la identificació  $\mathbf{i} = i$ , ja que  $m$  està fixat. Per conveni, considerem  $\mathbb{Z}_2^0 = \{\emptyset\}$ , on  $\emptyset$  representa la seqüència buida.*

Vegem ara algunes propietats bàsiques de l'hiperarbre  $T_m$ , les quals es dedueixen del capítol anterior sobre el producte jeràrquic.

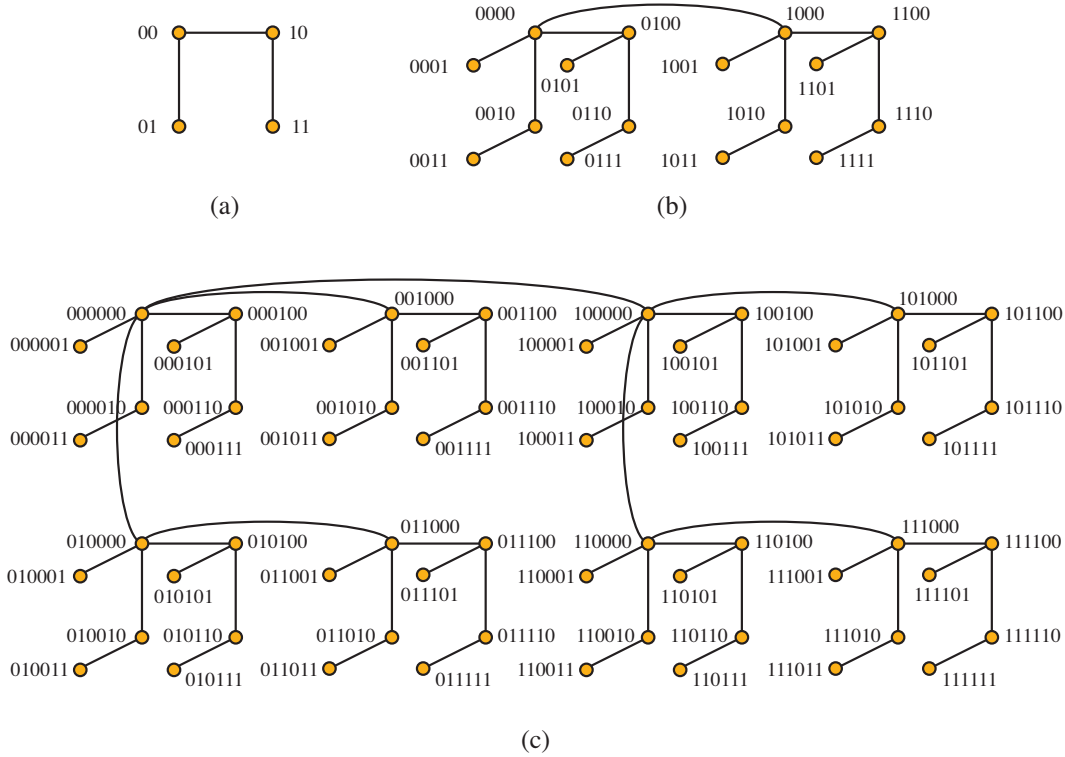


Figura 5.1: Els hiperarbres  $T_2 = K_2^2$ ,  $T_4 = K_2^4$  i  $T_6 = K_2^6$ .

- Per a  $m \geq 0$ , l'hiperarbre  $T_m$  té ordre  $n = 2^m$  i mida  $2^m - 1$ .
- $T_m = T_{m-1} \square K_2$  (ja que el producte jeràrquic compleix la propietat associativa).
- $T_m^* := T_m - \mathbf{0} = \bigcup_{k=0}^{m-1} T_k$ .
- $T_m - e$ , on  $e$  és l'aresta  $\{\mathbf{0}, 10^{m-1}0\}$ , és isomorf a la unió disjunta de dues còpies de  $T_{m-1}$ . De fet, aquestes còpies de  $T_{m-1}$  són els subgrafs induïts pels conjunts de vèrtexs  $V_0 = \{0\mathbf{w} | \mathbf{w} \in \mathbb{Z}_2^{m-1}\}$  i  $V_1 = \{1\mathbf{w} | \mathbf{w} \in \mathbb{Z}_2^{m-1}\}$ .
- $T_m$  té 2 vèrtexs de grau  $m$  i  $2^{m-j}$  vèrtexs de grau  $j$ , per a  $1 \leq j \leq m - 1$ . És a dir,
  - $\delta(\mathbf{0}) = \delta(10^{m-1}0) = m$ ;
  - $\delta(\mathbf{w}100^{j-1}0) = j$ , per a tot  $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}_2^{m-j}$  i per a  $1 \leq j \leq m - 1$ .

Com mostra el següent resultat, l'hiperarbre  $T_m$  és un cas particular de la xarxa jeràrquica  $H_{n,k}$ , que hem vist en el capítol anterior. En efecte, per les

condicions (4.3), (4.4) i (4.5), les adjacències de la xarxa jeràrquica  $H_{2,m}$ , amb el mateix conjunt de vèrtexs que  $T_m$ , són

$$x_1 x_2 \dots x_i \alpha \alpha \dots \overset{(j)}{\alpha} \alpha \dots \alpha \sim x_1 x_2 \dots x_i \alpha \alpha \dots \overset{(j)}{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} \dots \bar{\alpha}, \quad (5.1)$$

on  $\bar{\alpha} = \alpha + 1 \pmod{2}$ ,  $0 \leq i \leq m-1$ ,  $i+1 \leq j \leq m$ .

Vegeu la figura 5.2, en la qual s'entreveu el resultat següent:

**Proposició 5.1.3.** *L'hiperarbre de dimensió  $m$  és isomorf a la xarxa jeràrquica  $H_{2,m}$ :*

$$T_m \cong H_{2,m}.$$

**Demostració.** Comprovem que l'aplicació  $\Phi : V(H_{2,m}) \rightarrow V(T_m)$ , definida per

$$\Phi(x_1 x_2 \dots x_m) = x_1(x_1 + x_2)(x_2 + x_3) \dots (x_{m-1} + x_m),$$

on l'aritmètica és mòdul 2, és un isomorfisme de  $H_{2,m}$  a  $T_m$ . En efecte, les imatges de dos vèrtexs qualssevol adjacents en  $H_{2,m}$ , segons (5.1), són també adjacents en  $T_m$ , com es mostra a continuació:

$$\begin{aligned} & \Phi(x_1 x_2 \dots x_i \alpha \alpha \dots \overset{(j)}{\alpha} \alpha \dots \alpha) \\ &= x_1(x_1 + x_2) \dots (x_{i-1} + x_i)(x_i + \alpha) 2\alpha \dots \overset{(j)}{2\alpha} 2\alpha \dots 2\alpha \\ &= x_1(x_1 + x_2) \dots (x_{i-1} + x_i)(x_i + \alpha) 0 \dots \overset{(j)}{0} 0 \dots 0 \\ &\sim x_1(x_1 + x_2) \dots (x_{i-1} + x_i)(x_i + \alpha) 0 \dots \overset{(j)}{1} 0 \dots 0 \\ &= x_1(x_1 + x_2) \dots (x_{i-1} + x_i)(x_i + \alpha) 2\alpha \dots \overset{(j)}{(\alpha + \bar{\alpha})} 2\bar{\alpha} \dots 2\bar{\alpha} \\ &= \Phi(x_1 x_2 \dots x_i \alpha \alpha \dots \overset{(j)}{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} \dots \bar{\alpha}). \end{aligned}$$

□

De fet, es pot comprovar fàcilment que l'aplicació inversa  $\Phi^{-1} : V(T_m) \rightarrow V(H_{2,m})$  és

$$\Phi^{-1}(x_1 x_2 \dots x_m) = x_1(x_1 + x_2)(x_1 + x_2 + x_3) \dots (x_1 + x_2 + \dots + x_m).$$

Respecte a les simetries de l'hiperarbre, tenim el resultat següent:

**Proposició 5.1.4.** *Per a  $m \geq 1$ , el grup d'automorfismes de l'hiperarbre  $T_m$  és  $S_2$ .*

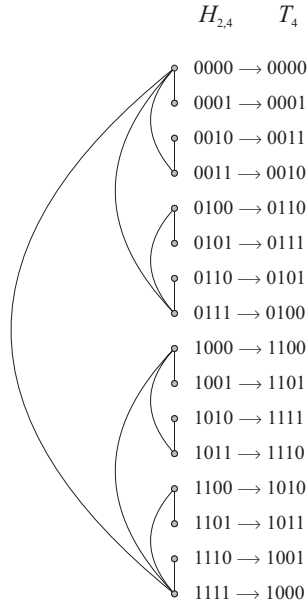


Figura 5.2:  $H_{2,4} \cong T_4 = K_2^4$ .

**Demostració.** Sigui  $\phi : T_m \rightarrow T_m$  definit per  $\phi(0\mathbf{i}) = 1\mathbf{i}$  i  $\phi(1\mathbf{i}) = 0\mathbf{i}$ . Aleshores, afirmem que  $\text{Aut}(T_m) = \{Id, \phi\}$ . Per tant, hem de demostrar que  $\phi$  és l'únic automorfisme no trivial de  $T_m$ .

Primer mostrem que  $\phi$  és un automorfisme de  $T_m$ . De la seva definició, queda clar que  $\phi$  és una bijecció involutiva, és a dir,  $\phi(\phi(v)) = v$  per a tot vèrtex  $v$  de  $T_m$ . Ara siguin  $u$  i  $v$  dos vèrtexs de  $T_m$ . Hem de veure que si  $u \sim v$ , aleshores  $\phi(u) \sim \phi(v)$ . Suposem, sense pèrdua de generalitat, que  $u$  comença per zero.

Si  $u = \mathbf{0}$  i  $v = 10^{m-1}0$ , aleshores  $\phi(u) = v$  i  $\phi(v) = u$ .

Altrament,  $v$  comença també per zero. Per simetria, podem considerar  $u = 0\mathbf{w}0^{j-1}$  i  $v = 0\mathbf{w}10^{j-1}$ . En aquest cas,  $\phi(u) = 1\mathbf{w}0^{j-1}$  i  $\phi(v) = 1\mathbf{w}10^{j-1}$ , els quals són clarament adjacents en  $T_m$ .

Finalment, demostrem per inducció sobre  $m$  que  $\phi$  és l'únic automorfisme no trivial de  $T_m$ .

Per a  $m = 1$ ,  $T_1 = K_2$  i  $\text{Aut}(K_2) = S_2$ . Sigui ara  $m > 1$ . Com s'ha dit abans,  $V_0 = \{0\mathbf{w} | \mathbf{w} \in \mathbb{Z}_2^{m-1}\}$  i  $V_1 = \{1\mathbf{w} | \mathbf{w} \in \mathbb{Z}_2^{m-1}\}$  indueixen dos subgrafs disjunts de  $T_m$ , isomorfs a  $T_{m-1}$ . Denotem aquests subgrafs per  $G_0 = G[V_0]$  i  $G_1 = G[V_1]$ . Suposem que  $\text{Aut}(T_{m-1}) = \{Id, \phi\}$  i sigui  $\gamma$  un automorfisme de  $T_m$ . A causa de la seqüència de graus de  $T_m$ , tenim un dels dos casos següents:

- $\gamma(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  i  $\gamma(10^{m-1}0) = 10^{m-1}0$ ,
- $\gamma(\mathbf{0}) = 10^{m-1}0$  i  $\gamma(10^{m-1}0) = \mathbf{0}$ .

En el primer cas,  $\gamma$  és una aplicació que fixa  $G_0$  i  $G_1$ . A més a més, l'automorfisme induït deixa l'arrel fixa. Aleshores, per la hipòtesi d'inducció,  $\gamma = Id$ . En el segon cas,  $\gamma$  és una aplicació de  $G_0$  a  $G_1$  i de  $G_1$  a  $G_0$ . Per a tot  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}_2^{m-1}$ , definim  $\gamma_0$  i  $\gamma_1$  de la manera següent:

- si  $\gamma(0\mathbf{i}) = 1\mathbf{v}$ , aleshores  $\gamma_0(\mathbf{i}) = \mathbf{v}$ ;
- si  $\gamma(1\mathbf{i}) = 0\mathbf{w}$ , aleshores  $\gamma_1(\mathbf{i}) = \mathbf{w}$ .

Es pot comprovar fàcilment que  $\gamma_0$  i  $\gamma_1$  són automorfismes de  $T_{m-1}$  que deixen l'arrel fixa. Per la hipòtesi d'inducció,  $\gamma_0 = \gamma_1 = Id$ . Això implica que  $\gamma = \phi$ , cosa que completa la demostració.  $\square$

### 5.1.3 Propietats espectrals

En aquesta secció, estudiem les propietats espectrals dels hiperarbres, en particular els valors propis (i el seu comportament asimptòtic) i els vectors propis.

#### Valors propis

Denotem per  $\mathbf{A}_m$  i  $\phi_m$  la matriu d'adjacència i el polinomi característic de l'hiperarbre  $T_m$ . Aleshores, com que  $T_m = T_{m-1} \sqcap K_2$ , l'equació (4.33) (del capítol del producte jeràrquic) es pot escriure com:

$$\mathbf{A}_m = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{m-1} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (5.2)$$

on la dimensió de cada bloc és  $2^{m-1} \times 2^{m-1}$ , mentre que l'equació (4.34) dóna la següent fórmula de recurrència:

$$\phi_m(x) = x^{2^{m-1}} \phi_{m-1}\left(x - \frac{1}{x}\right). \quad (5.3)$$

Per tant, resseguint el contingut i la demostració de la proposició 4.2.11, la relació de recurrència anterior implica que, si  $\lambda_{\mathbf{i}} \in \text{ev } T_{m-1}$ ,  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}_2^{m-1}$ , aleshores les dues solucions de  $x - \frac{1}{x} = \lambda_{\mathbf{i}}$ , és a dir, de

$$x^2 - \lambda_{\mathbf{i}} x - 1 = 0 \quad (5.4)$$

pertanyen a  $\text{ev } T_m$ . Com s'ha esmentat en el capítol anterior, una notació útil per a aquestes dues solucions és  $\lambda_{0\mathbf{i}}$  i  $\lambda_{1\mathbf{i}}$ , ja que, utilitzant les funcions

$$f_0(\lambda) := \frac{1}{2}(\lambda - \sqrt{\lambda^2 + 4}), \quad f_1(\lambda) := \frac{1}{2}(\lambda + \sqrt{\lambda^2 + 4}), \quad (5.5)$$

es poden calcular com a  $\lambda_{0\mathbf{i}} = f_0(\lambda_{\mathbf{i}})$  i  $\lambda_{1\mathbf{i}} = f_1(\lambda_{\mathbf{i}})$ .

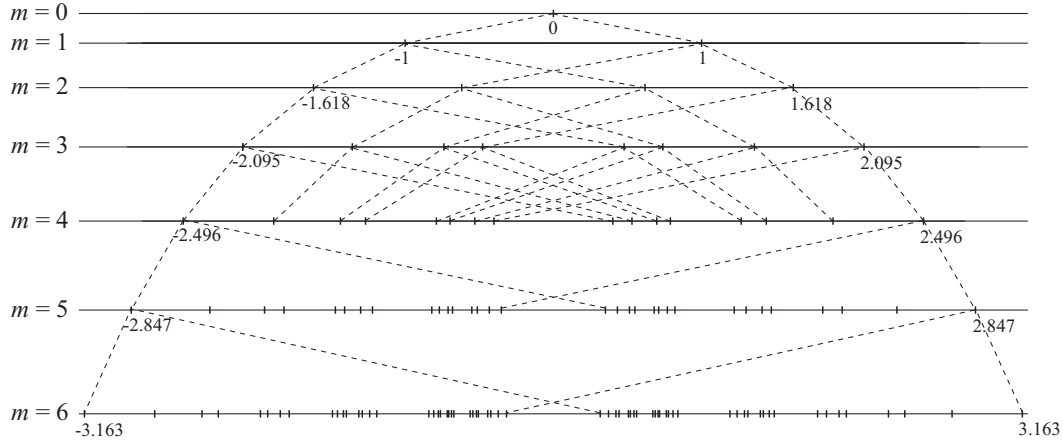


Figura 5.3: El conjunt de valors propis de  $T_m$  per a  $0 \leq m \leq 6$ .

A més a més, aplicant recursivament aquestes funcions començant amb  $\lambda_\emptyset := 0$ , obtenim el conjunt complet dels valors propis  $\text{ev } T_m = \{\lambda_{\mathbf{i}} \mid \mathbf{i} \in \mathbb{Z}_2^m\}$  on, si  $\mathbf{i} = i_{m-1}i_{m-2} \dots i_0$ , aleshores

$$\lambda_{\mathbf{i}} = (f_{i_{m-1}} \circ \dots \circ f_{i_1} \circ f_{i_0})(0). \tag{5.6}$$

Aquesta presentació dona un ordre natural, de manera que com més gran sigui el nombre  $i$ , més gran serà el valor propi  $\lambda_{\mathbf{i}}$ . Per tant, tots els  $2^m$  valors propis són diferents, propietat que té conseqüències de llarg abast. En particular, se sap que en aquestes condicions tot automorfisme de  $T_m$  és involutiu i que el seu grup ha de ser abelià (vegeu Mowshowitz [74]). De fet, recordem que en la proposició 5.1.4 hem demostrat  $\text{Aut}(T_m) = S_2$ .

També, com que  $T_m$  és trivialment bipartit, el seu conjunt de valors propis és simètric (vegeu Biggs [20]) i, aleshores, per a tot  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}_2^m$ ,

$$\lambda_{\mathbf{i}} = -\lambda_{\bar{\mathbf{i}}}, \tag{5.7}$$

on  $\bar{\mathbf{i}} (= n - 1 - i)$  denota el complement de  $\mathbf{i}$  (és a dir, l'operació NOT dígit a dígit). Per exemple, la figura 5.3 mostra l'espectre dels hiperarbres  $T_m$  per als casos  $0 \leq m \leq 6$ , i que cada valor propi en  $T_{m-1}$  dona lloc a dos valors propis en  $T_m$ .

Com a resum de les propietats anteriors tenim el resultat següent, on hem utilitzat la notació decimal per als subíndexs.

**Proposició 5.1.5.** *L'hiperarbre  $T_m$ , per a  $m > 1$ , té tots els valors propis diferents  $\lambda_0^m < \lambda_1^m < \dots < \lambda_{n-1}^m$ , amb  $n = 2^m$ , els quals satisfan la relació de*

recurrència i la propietat de simetria següents:

$$\lambda_{\frac{n}{2}+i}^m = \frac{\lambda_i^{m-1} + \sqrt{(\lambda_i^{m-1})^2 + 4}}{2}, \quad (5.8)$$

$$\lambda_i^m = -\lambda_{n-1-i}^m, \quad (5.9)$$

per a  $i = 0, 1, \dots, \frac{n}{2} - 1$ .

En el cas de l'hiperarbre, els polinomis  $p_i$  i  $q_i$  de la proposició 5.1.6 resulten ser també polinomis característics, com explicitem en el resultat següent:

**Proposició 5.1.6.** *Sigui  $\{p_i, q_i\}_{i \geq 0}$  la família de polinomis obtinguda de les relacions de recurrència de la proposició 4.2.13. Aleshores, els polinomis característics de l'hiperarbre  $T_m$ ,  $m \geq 0$  (amb  $T_0 = K_1$ ) i del graf  $T_m^* = T_m - \mathbf{0}$ , (amb  $m \geq 1$  i  $\mathbf{0} = 00\dots 0$ ) són, respectivament,*

$$\phi_{T_m}(x) = p_m(x), \quad (5.10)$$

$$\phi_{T_m^*}(x) = q_m(x). \quad (5.11)$$

**Demostració.** Per demostrar (5.10), simplement apliquem la proposició 4.2.13 amb  $G = K_1$ , cosa que implica  $n = 1$ ,  $\phi_0 = x$ , i

$$\phi_{T_m}(x) = (q_m(x))^n \phi_0 \left( \frac{p_m(x)}{q_m(x)} \right) = p_m(x).$$

Aleshores, la igualtat (5.11) ve d'aquesta darrera expressió i del fet que, aplicant recursivament (4.41), tenim

$$q_m(x) = \prod_{i=0}^{m-1} p_i(x).$$

Observem que, a partir del lema 4.2.3, tenim que  $T_m^* = \bigcup_{i=0}^{m-1} T_i$ .  $\square$

El següent resultat ve del fet que  $\lambda_{0\mathbf{i}}$  i  $\lambda_{1\mathbf{i}}$  són les arrels del polinomi quadràtic  $x^2 - \lambda_{\mathbf{i}}x - 1 = 0$  (5.4).

**Lema 5.1.7.** *Per a tot  $\alpha \in \mathbb{Z}_2$  i  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}_2^{m-1}$ ,*

$$\lambda_{0\mathbf{i}} + \lambda_{1\mathbf{i}} = \lambda_{\mathbf{i}}, \quad (5.12)$$

$$\lambda_{0\mathbf{i}} \lambda_{1\mathbf{i}} = -1, \quad (5.13)$$

$$\lambda_{\alpha\mathbf{i}} \lambda_{\alpha\bar{\mathbf{i}}} = 1, \quad (5.14)$$

$$\lambda_{\alpha\mathbf{i}} = \lambda_{\alpha\bar{\mathbf{i}}} + \lambda_{\mathbf{i}}. \quad (5.15)$$



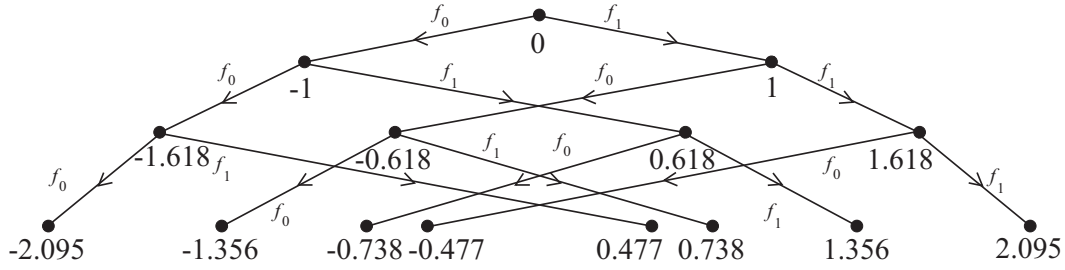


Figura 5.4: El digraf dels valors propis de  $T_m$  per a  $0 \leq m \leq 3$ .

**Demostració.** Les dues igualtats (5.12) i (5.13) s’obtenen directament de (5.4). La igualtat (5.14) és una conseqüència de (5.13) i de la “propietat de simetria” (5.7). Finalment, (5.12)–(5.14) impliquen (5.15), ja que

$$\begin{aligned} \lambda_{\mathbf{i}} &= \lambda_{0\mathbf{i}} - \frac{1}{\lambda_{0\bar{\mathbf{i}}}} = \lambda_{0\mathbf{i}} - \lambda_{0\bar{\mathbf{i}}} \Rightarrow \lambda_{0\mathbf{i}} = \lambda_{0\bar{\mathbf{i}}} + \lambda_{\mathbf{i}}, \\ \lambda_{\mathbf{i}} &= \lambda_{1\mathbf{i}} - \frac{1}{\lambda_{1\bar{\mathbf{i}}}} = \lambda_{1\mathbf{i}} - \lambda_{1\bar{\mathbf{i}}} \Rightarrow \lambda_{1\mathbf{i}} = \lambda_{1\bar{\mathbf{i}}} + \lambda_{\mathbf{i}}. \end{aligned}$$

□

Com una il·lustració de la igualtat (5.12), vegeu la figura 5.4 (que s’ha de comparar amb la figura 5.3).

En particular, per a (5.14), el màxim  $\rho_m = \lambda_{11\dots 1}$  i el mínim  $\sigma_m = \lambda_{10\dots 0}$  (tots dos en valor absolut) en  $\text{ev } T_m$  són un l’invers de l’altre, és a dir,  $\rho_m \sigma_m = 1$ , d’acord amb l’equació (5.19) que hi ha més endavant.

A més a més, aplicant recursivament (5.15), tenim que la suma dels primers  $m$  valors propis mínims positius dona el radi espectral de  $T_m$ :

$$\begin{aligned} \rho_m &= \lambda_{111\dots 1} \\ &= \lambda_{100\dots 0} + \lambda_{11\dots 1} \\ &= \lambda_{100\dots 0} + \lambda_{10\dots 0} + \lambda_{11\dots 1} \\ &\vdots \\ &= \sigma_m + \sigma_{m-1} + \dots + \sigma_1. \end{aligned}$$

En general, tenim el següent esquema per a la descomposició de  $\lambda_{\mathbf{i}}$ , amb  $\mathbf{i} = i_{m-1}i_{m-2}i_{m-3} \dots i_1i_0$ :

$$\begin{array}{cccccc}
i_{m-1} & \bar{i}_{m-2} & \bar{i}_{m-3} & \cdots & \bar{i}_1 & \bar{i}_0 \\
& i_{m-2} & \bar{i}_{m-3} & \cdots & \bar{i}_1 & \bar{i}_0 \\
& & i_{m-3} & \cdots & \bar{i}_1 & \bar{i}_0 \\
& & & \ddots & \vdots & \vdots \\
& & & & i_1 & \bar{i}_0 \\
& & & & & i_0
\end{array}
\quad
\lambda_{\mathbf{i}} = \lambda_{i_{m-1}\bar{i}_{m-2}\bar{i}_{m-3}\cdots\bar{i}_1\bar{i}_0} + \lambda_{i_{m-2}\bar{i}_{m-3}\cdots\bar{i}_1\bar{i}_0} + \lambda_{i_{m-3}\cdots\bar{i}_1\bar{i}_0} + \lambda_{i_1\bar{i}_0} + \lambda_{i_0}$$

Observem que, en el diagrama de l'esquerra, la seqüència  $i_{m-1}i_{m-2}i_{m-3}\cdots i_1i_0$  apareix a la diagonal principal i els elements de cada columna per sobre seu són els conjugats dels elements de la diagonal. En el diagrama de la dreta, tenim la suma dels valors propis de la descomposició, els subíndexs dels quals s'obtenen llegint per files el diagrama de l'esquerra. Un altre cas particular seria, per exemple,

$$\lambda_{10110} = \lambda_{11001} + \lambda_{0001} + \lambda_{101} + \lambda_{11} + \lambda_0.$$

Ara estudiem la distribució dels valors propis de  $T_m$  respecte als intervals definits pels valors propis de  $T_{m'}$ , per a  $m' < m$ .

Comencem demostrant que tots els valors propis són diferents, fins i tot si pertanyen a hiperarbres de dimensions diferents.

**Lema 5.1.8.** *Per a tot parell de seqüències binàries  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}_2^r$ ,  $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}_2^s$ , es compleix que*

$$\mathbf{i} = \mathbf{j} \iff \lambda_{\mathbf{i}} = \lambda_{\mathbf{j}}. \quad (5.16)$$

**Demostració.** La suficiència és trivial per (5.6). Respecte a la necessitat, suposem que tenim  $\lambda_{\mathbf{i}} = \lambda_{\mathbf{j}}$ , per a  $\mathbf{i} = i_{r-1}i_{r-2}\cdots i_1i_0$  i  $\mathbf{j} = j_{s-1}j_{s-2}\cdots j_1j_0$ . Aleshores,

$$f_{i_{r-1}}(f_{i_{r-2}} \circ \cdots \circ f_{i_1} \circ f_{i_0}(0)) = f_{j_{s-1}}(f_{j_{s-2}} \circ \cdots \circ f_{j_1} \circ f_{j_0}(0)). \quad (5.17)$$

Com que  $f_0(x) = \frac{1}{2}(x - \sqrt{x^2 + 4}) < 0$  i  $f_1(x) = \frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + 4}) > 0$  per a qualsevol  $x$ , ha de ser  $i_{r-1} = j_{s-1}$  i, per tant,  $f_{i_{r-2}} \circ \cdots \circ f_{i_1} \circ f_{i_0}(0) = f_{j_{s-2}} \circ \cdots \circ f_{j_1} \circ f_{j_0}(0)$ . Seguint el mateix raonament, tenim  $i_{r-2} = j_{s-2}$  i  $f_{i_{r-3}} \circ \cdots \circ f_{i_1} \circ f_{i_0}(0) = f_{j_{s-3}} \circ \cdots \circ f_{j_1} \circ f_{j_0}(0)$ , etc. Ara només ens cal demostrar que  $r = s$ . Suposem, sense pèrdua de generalitat, que  $r > s$ . Aleshores, repetint  $s$  vegades el procés, tenim  $i_{r-1} = j_{s-1}$ ,  $i_{r-2} = j_{s-2}, \dots, i_{r-s} = j_0$  i  $f_{i_{r-s-1}} \circ \cdots \circ f_{i_1} \circ f_{i_0}(0) = 0$ , cosa que contradiu el fet que, per a tot  $x$  i  $i = 0, 1$ ,  $f_i(x) \neq 0$ . Això completa la demostració.  $\square$

Per estudiar els valors propis dels hiperarbres de totes les dimensions, hem de considerar la unió de  $\mathbb{Z}_2^m$  per a tot  $m$  (o el conjunt de totes les seqüències sobre  $\mathbb{Z}_2$ ), que denotem per  $\mathbb{Z}_2^*$ .

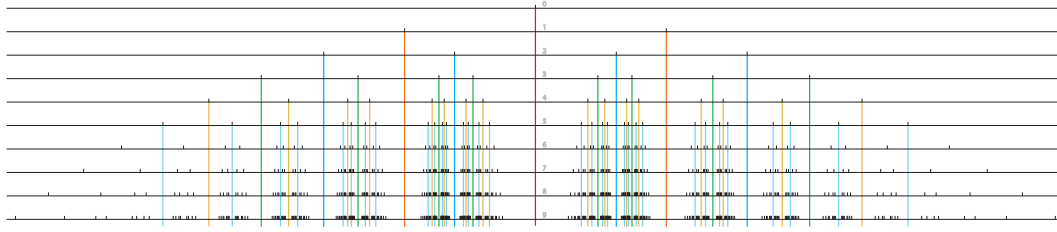


Figura 5.5: La distribució dels valors propis de  $T_m$ , per a  $m = 0, \dots, 9$ .

**Definició 5.1.9.** Siguin  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}_2^*$  i sigui  $\mathbf{w}$  el seu màxim prefix comú (que pot ser buit). Diem que  $\mathbf{i} <_T \mathbf{j}$  si i només si es compleix una de les condicions següents:

$$(i) \quad \mathbf{i} = \mathbf{w}0\mathbf{i}_1 \quad \mathbf{j} = \mathbf{w}1\mathbf{j}_1;$$

$$(ii) \quad \mathbf{i} = \mathbf{w} \quad \mathbf{j} = \mathbf{w}1\mathbf{j}_1;$$

$$(iii) \quad \mathbf{i} = \mathbf{w}0\mathbf{i}_1 \quad \mathbf{j} = \mathbf{w},$$

on  $\mathbf{i}_1$  i  $\mathbf{j}_1$  també poden ser seqüències buides. Diem que  $\mathbf{i} \leq_T \mathbf{j}$  si i només si  $\mathbf{i} <_T \mathbf{j}$  o  $\mathbf{i} = \mathbf{j}$ .

Observem que dues seqüències binàries diferents podrien representar el mateix nombre natural. Per tant, la relació  $<_T$ , que és d'ordre total en  $\mathbb{Z}_2^*$ , no és equivalent a l'ordre natural.

**Definició 5.1.10.** Per a qualsevol  $\ell \geq 0$  i  $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}_2^\ell$ , la  $\mathbf{w}$ -translació,  $\tau_{\mathbf{w}}$ , és la funció

$$\tau_{\mathbf{w}} = f_{w_{\ell-1}} \circ \dots \circ f_{w_1} \circ f_{w_0},$$

on  $\mathbf{w} = w_{\ell-1} \dots w_1 w_0$ .

Les funcions  $f_0$  i  $f_1$  són totes dues monòtones creixents. Això implica que  $\tau_{\mathbf{w}}$  és monòtona creixent, per a tot  $\mathbf{w}$ . D'altra banda, és important esmentar que, com que  $\tau_{\mathbf{w}}$  no conserva les distàncies, no és una translació en el sentit geomètric.

A més a més, tenim el lema següent:

**Lema 5.1.11.** Per a tot  $i = 0, 1$  i  $x, y$  arbitraris, es compleix

$$|f_i(x) - f_i(y)| < |x - y|. \quad (5.18)$$

**Demostració.** Per a  $i = 1$ , podem suposar sense pèrdua de generalitat que  $x < y$ . Aleshores,

$$f_1(x) < f_1(y) \quad \text{i} \quad f_1(y) - f_1(x) = \frac{1}{2} \left( y + \sqrt{y^2 + 4} - x - \sqrt{x^2 + 4} \right).$$

Ara només ens cal observar que  $\sqrt{y^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 4} < y - x$ , perquè

$$\begin{aligned} (\sqrt{y^2 + 4} - \sqrt{x^2 + 4})(\sqrt{y^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 4}) &= (y - x)(y + x) \\ &< (y - x)(\sqrt{y^2 + 4} + \sqrt{x^2 + 4}). \end{aligned}$$

Això implica que  $|f_1(x) - f_1(y)| < |x - y|$ . Amb un raonament similar, tenim  $|f_0(x) - f_0(y)| < |x - y|$ .  $\square$

Ara utilitzem les  $\mathbf{w}$ -translacions i el lema 5.1.11 per demostrar el resultat següent:

**Teorema 5.1.12.** *El conjunt de tots els valors propis*

$$\bigcup_{m=0}^{\infty} \text{ev } T_m = \{\lambda_{\mathbf{i}} \mid \mathbf{i} \in \mathbb{Z}_2^*\}$$

satisfà les propietats següents:

- (a) Per a tot  $\mathbf{i}, \mathbf{j} \in \mathbb{Z}_2^*$ ,  $\mathbf{i} <_T \mathbf{j}$  si i només si  $\lambda_{\mathbf{i}} < \lambda_{\mathbf{j}}$ .
- (b) L'interval determinat per dos valors propis consecutius de  $T_m$  conté exactament  $2^k$  valors propis consecutius de  $T_{m+k}$ , per a  $k \geq 1$ .
- (c) Les dues successions  $\{\lambda_{\mathbf{w}_{100.k.0}}\}_{k>0}$  i  $\{\lambda_{\mathbf{w}_{011.k.1}}\}_{k>0}$  tenen el mateix límit  $\lambda_{\mathbf{w}}$ .

**Demostració.** La translació  $\tau_{\mathbf{w}}$ , que va del conjunt

$$\{\lambda_{\mathbf{i}} \mid \mathbf{i} \in \mathbb{Z}_2^*\} = \{\lambda_{\emptyset}, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_{00}, \dots\}$$

al conjunt

$$\{\lambda_{\mathbf{w}\mathbf{i}} \mid \mathbf{i} \in \mathbb{Z}_2^*\} = \{\lambda_{\mathbf{w}}, \lambda_{\mathbf{w}0}, \lambda_{\mathbf{w}1}, \lambda_{\mathbf{w}00}, \dots\},$$

conserva l'ordre. Això implica que, en (a), podem suposar que  $\mathbf{i}$  i  $\mathbf{j}$  no tenen cap prefix comú. Això, juntament amb el lema 5.1.11, implica que, en (c), podem suposar que  $\mathbf{w} = \emptyset$ .

(a) Si  $\mathbf{i}$  i  $\mathbf{j}$  no tenen cap prefix comú. Aleshores  $\mathbf{i} <_T \mathbf{j}$  si i només si es compleix una de les condicions següents:

- $\mathbf{i} = 0\mathbf{i}_1$  i  $\mathbf{j} = 1\mathbf{j}_1$ ;
- $\mathbf{i} = \emptyset$  i  $\mathbf{j} = 1\mathbf{j}_1$ ;
- $\mathbf{i} = 0\mathbf{i}_1$  i  $\mathbf{j} = \emptyset$ ;

on  $\mathbf{i}_1$  i  $\mathbf{j}_1$  poden ser seqüències buides. La primera condició és equivalent a  $\lambda_{\mathbf{i}} < 0$  i  $\lambda_{\mathbf{j}} > 0$ . La segona condició equival a  $\lambda_{\mathbf{i}} = 0$  i  $\lambda_{\mathbf{j}} > 0$ . Finalment, la tercera és equivalent a  $\lambda_{\mathbf{i}} < 0$  i  $\lambda_{\mathbf{j}} = 0$ . Per tant, tenim que, si  $\mathbf{i}$  i  $\mathbf{j}$  no tenen cap prefix comú, aleshores  $\mathbf{i} <_T \mathbf{j}$  si i només si  $\lambda_{\mathbf{i}} < \lambda_{\mathbf{j}}$ .

(b) Sigui  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}_2^m$  i  $\mathbf{j} = \mathbf{i} + 1 \in \mathbb{Z}_2^m$ . Utilitzant 5.1.12, només hem de demostrar que

$$|\{\mathbf{w} \in \mathbb{Z}_2^{m+k} \mid \mathbf{i} <_T \mathbf{w} <_T \mathbf{j}\}| = 2^k.$$

Per definició de  $<_T$ ,

$$\{\mathbf{w} \in \mathbb{Z}_2^{m+k} \mid \mathbf{i} <_T \mathbf{w} <_T \mathbf{j}\} = \{\mathbf{i}1\mathbf{i}_1 \mid \mathbf{i}_1 \in \mathbb{Z}_2^{k-1}\} \cup \{\mathbf{j}0\mathbf{j}_1 \mid \mathbf{j}_1 \in \mathbb{Z}_2^{k-1}\},$$

la cardinalitat del qual és  $2^{k-1} + 2^{k-1} = 2^k$ .

(c) El resultat és una conseqüència directa de (5.19) i del fet que  $\lambda_{100\dots k,0} = \sigma_k$ , el valor propi positiu més petit de  $T_k$ , i  $\lambda_{011\dots k,1} = -\sigma_k$ .  $\square$

### Comportament asimptòtic

Tornant en la figura 5.3, observem que el valor propi més gran (en valor absolut) augmenta sense límit amb  $m$ , mentre que el valor propi més petit (també en valor absolut) tendeix a zero. Concretament, tenim el resultat següent:

**Proposició 5.1.13.** *Els comportaments asimptòtics, quan  $k \rightarrow \infty$ , del valor propi més gran  $\lambda_k$  (radi espectral) i el valor propi més petit  $\sigma_k$  (tots dos en valor absolut) de l'hiperarbre  $T_k$  són:*

$$\lambda_k \sim \sqrt{2k}, \quad \sigma_k \sim \frac{1}{\sqrt{2k}}. \quad (5.19)$$

**Demostració.** D'acord amb l'equació (5.6), els valors propis esmentats corresponen a:

$$\lambda_k = \lambda_{111\dots 1}, \quad \sigma_k = \lambda_{10\dots 00}. \quad (5.20)$$

Aleshores, per a  $k > 1$  el valor propi més gran  $\lambda_k$  verifica la relació de recurrència

$$\lambda_{k+1} = f_1(\lambda_k) = \frac{1}{2}(\lambda_k + \sqrt{\lambda_k^2 + 4}).$$

Aquesta funció tendeix a una llei potencial  $\lambda_k = \alpha k^\beta$  per a  $k \rightarrow \infty$  i algunes constants  $\alpha$  i  $\beta$ . De fet, si posem aquesta expressió de  $\lambda_k$  en l'equació anterior, obtenim:

$$\alpha(k+1)^\beta \sim \frac{\alpha k^\beta + \sqrt{\alpha^2 k^{2\beta} + 4}}{2} \Rightarrow \alpha^2(k+1)^\beta [(k+1)^\beta - k^\beta] \sim 1$$

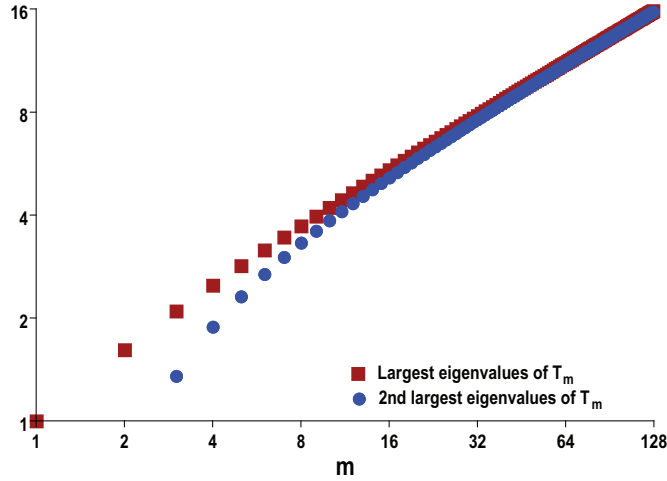


Figura 5.6: Els dos valors propis més grans de  $T_m$  per a  $1 \leq m \leq 128$ .

i és fàcil comprovar que  $\lambda_k = \sqrt{2k}$  és una solució quan  $k \rightarrow \infty$ , ja que

$$2(k+1)^{\frac{1}{2}}[(k+1)^{\frac{1}{2}} - k^{\frac{1}{2}}] = \frac{2(k+1)^{\frac{1}{2}}}{(k+1)^{\frac{1}{2}} + k^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 1.$$

Aquesta solució correspon a  $\alpha = \sqrt{2}$  i  $\beta = \frac{1}{2}$ . El comportament de  $\sigma_k$  es pot demostrar de manera similar o bé observant que, d'acord amb les equacions (5.13) i (5.20),  $\lambda_k \sigma_k = 1$ .  $\square$

En la figura 5.6 representem  $\lambda_m$  i  $\theta_m$  (el segon valor propi més gran) en termes de  $m$  per a tot  $T_m$ , amb  $1 \leq m \leq 128$ . Les dues escales són logarítmiques i l'asíptota és, en els dos casos,  $y = \frac{1}{2} \log 2 + \frac{1}{2} \log x$ . El comportament asimptòtic de  $\theta_m$  suggereix el següent estudi:

Considerem ara els valors propis de  $T_m$  en ordre decreixent:

$$\lambda_m^{(0)} > \lambda_m^{(1)} > \lambda_m^{(2)} > \dots$$

És a dir, el primer valor propi (el número 0) és  $\lambda_m^{(0)} = \lambda_{111\dots 1}$  ( $= \rho_m$ ), el segon (el número 1) és  $\lambda_m^{(1)} = \lambda_{111\dots 10}$ , etc. En general, per a tot enter fixat  $r \geq 0$ , considerem el valor propi  $r$ -èsim més gran  $\lambda_m^{(r)}$  de  $T_m$ , amb  $m \geq k = \lceil \log_2(r+1) \rceil$ . Sigui  $\mathbf{r}$  la representació binària de  $r$ . Aleshores,  $k$  és la longitud de  $\mathbf{r}$  i  $\lambda_m^{(r)} = \lambda_{111\dots k_1 \mathbf{r}}$ . En aquest context, com en el cas del radi espectral, ens preguntem sobre el comportament asimptòtic de la seqüència  $\{\lambda_m^{(r)} = \lambda_{111\dots k_1 \mathbf{r}}\}_{m \geq k}$ .

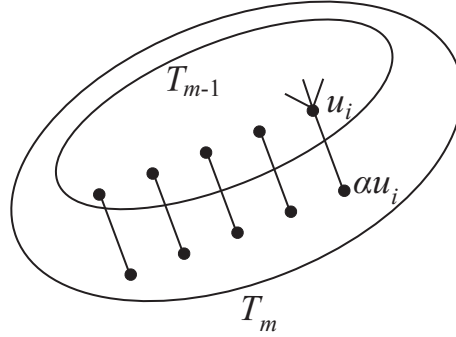


Figura 5.7: Construcció dels vectors propis de  $T_m$  a partir dels vectors propis de  $T_{m-1}$ .

**Proposició 5.1.14.** Per a tot  $r > 1$  fixat, sigui  $\gamma_m$  el valor propi  $r$ -èsim més gran de  $T_m$ , és a dir,  $\lambda_m^{(r)} = \gamma_m$ . Aleshores, el comportament asimptòtic de  $\gamma_m$  és:

$$\gamma_m \sim \sqrt{2m}.$$

**Demostració.** La demostració és la mateixa que la de la proposició per al valor propi més gran, ja que, per a  $m \geq k$ ,  $\gamma_{m+1} = f_1(\gamma_m) = \frac{1}{2}(\gamma_m + \sqrt{\gamma_m^2 + 4})$ , que és la mateixa recurrència que abans.  $\square$

## Vectors propis

Per a qualsevol (di)graf, és prou conegut que les components d'un vector propi  $\mathbf{v}$  es poden considerar com a càrregues en els vèrtexs, mentre que l'aplicació definida per la matriu d'adjacència  $\mathbf{v} \mapsto \mathbf{A}\mathbf{v}$  equival a un cert desplaçament de les càrregues (vegeu l'article de Fiol i Mitjana [50] i el llibre de Godsil [58]). Més concretament, suposem que  $G = (V, A)$  és un digraf (com ja s'ha dit, es pot considerar que un graf és un digraf simètric on cada aresta  $\{i, j\}$  està representada per dos arcs oposats  $(i, j)$  i  $(j, i)$ ) amb matriu d'adjacència  $\mathbf{A}$  i  $\lambda$ -vectors propis  $\mathbf{v}$ . Aleshores, la càrrega d'un vèrtex  $i \in V$  és la corresponent component  $v_i$  de  $\mathbf{v}$ . L'equació  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  s'entén com a

$$\sum_{i \rightarrow j} v_j = \lambda v_i \quad \text{per a tot } i \in V. \quad (5.21)$$

És a dir, cada vèrtex “absorbeix” les càrregues dels seus veïns de sortida per aconseguir una càrrega final  $\lambda$  vegades la que tenia originalment.

Aquesta interpretació ens permet calcular els vectors propis de  $T_m$  a partir dels vectors propis de  $T_{m-1}$ , com mostra el següent resultat:

**Proposició 5.1.15.** Cada  $\lambda_{\mathbf{i}}$ -vector propi  $\mathbf{u}_{\mathbf{i}}$  de l'hiperarbre  $T_{m-1}$  dóna lloc als següents vectors propis de  $T_m$ :

$$\mathbf{u}_{0\mathbf{i}} = (\mathbf{u}_{\mathbf{i}}, \alpha_{0\mathbf{i}}\mathbf{u}_{\mathbf{i}})^\top, \quad \mathbf{u}_{1\mathbf{i}} = (\mathbf{u}_{\mathbf{i}}, \alpha_{1\mathbf{i}}\mathbf{u}_{\mathbf{i}})^\top, \quad (5.22)$$

on  $\alpha_{0\mathbf{i}} = f_0(-\lambda_{\mathbf{i}})$  i  $\alpha_{1\mathbf{i}} = f_1(-\lambda_{\mathbf{i}})$ , amb els corresponents valors propis  $\lambda_{0\mathbf{i}} = \alpha_{0\mathbf{i}}^{-1}$  i  $\lambda_{1\mathbf{i}} = \alpha_{1\mathbf{i}}^{-1}$ .

**Demostració.** La idea bàsica d'aquesta demostració es mostra a la figura 5.7. A partir del vector propi  $\mathbf{u}$  de  $T_{m-1}$ , construïm el vector propi  $\mathbf{u}' = (\mathbf{u}, \alpha\mathbf{u})^\top$  de  $T_m$ , per a algun  $\alpha$  per determinar. Formalment, sigui  $\mathbf{A}$  la matriu d'adjacència de l'hiperarbre  $T_{m-1}$ , de manera que  $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda_{\mathbf{i}}\mathbf{u}$ . Aleshores, el valor propi  $\lambda'_{\mathbf{i}}$  de  $T_m$  corresponent al vector propi satisfà

$$\begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \alpha\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}\mathbf{u} + \alpha\mathbf{u} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_{\mathbf{i}} + \alpha)\mathbf{u} \\ \mathbf{u} \end{pmatrix} = \lambda'_{\mathbf{i}} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \alpha\mathbf{u} \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

d'on

$$\lambda_{\mathbf{i}} + \alpha = \frac{1}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \alpha - \frac{1}{\alpha} = -\lambda_{\mathbf{i}}. \quad (5.24)$$

Observem que la darrera equació en (5.24) i la primera en (5.4) coincideixen excepte en el signe de  $\lambda_{\mathbf{i}}$ . En conseqüència, els possibles valors de  $\alpha$ , denotats per  $\alpha_{0\mathbf{i}}$  i  $\alpha_{1\mathbf{i}}$ , s'obtenen aplicant, respectivament, les funcions  $f_0$  i  $f_1$  a  $-\lambda_{\mathbf{i}}$  en (5.5).  $\square$

Notem que aquesta demostració es basa en l'obtenció d'una distribució de càrregues en  $T_m$  a partir d'una distribució de càrregues en  $T_{m-1}$ . Aleshores, la primera equació en (5.24) correspon a les dues maneres (segons el tipus de vèrtex considerat) de calcular el nou valor propi  $\lambda'_{\mathbf{i}}$  utilitzant (5.21).

Com a exemple, la figura 5.8 mostra com es poden obtenir els vectors propis de l'hiperarbre  $T_m$  per a  $m = 0, 1, 2$ .

## 5.2 Hiperarbres $r$ -àdics

### 5.2.1 Introducció

En aquesta secció, proposem una generalització de l'hiperarbre (o arbre binomial), que anomenem hiperarbre  $r$ -àdic ( $m$ -dimensional)  $T_r^m$ , i n'estudiem les propietats principals. Aquesta estructura té dues característiques principals: és un subgraf generador de la malla  $r$ -dimensional i els seus vèrtexs tenen un alt grau de jerarquia en les seves connexions. A causa de les relacions entre els polinomis característics de  $T_r^{m-1}$  i  $T_r^m$ , cada valor propi del primer dóna lloc a  $r$  valors propis del segon. Per tant, hi ha una forta relació entre els valors (i els vectors propis) dels hiperarbres  $r$ -àdics de dimensions diferents.



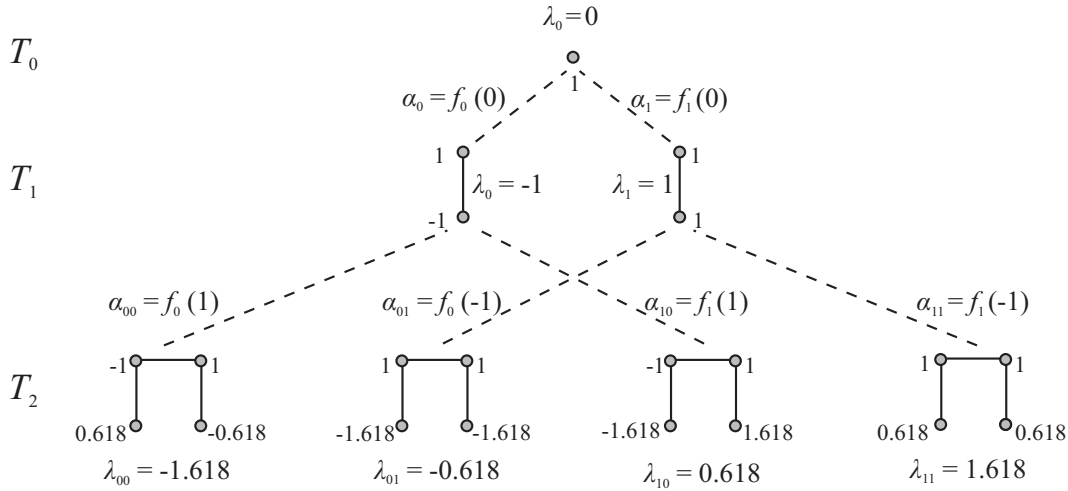


Figura 5.8: Els vectors propis dels hiperarbres  $T_0$ ,  $T_1$  i  $T_2$ .

### 5.2.2 Algunes propietats espectrals

A la primera part d'aquest capítol hem vist que l'hiperarbre té tots els seus valors propis diferents. De fet, aquest és un cas particular de la proposició següent, la qual mostra com es pot obtenir un graf amb aquesta propietat espectral mitjançant el producte jeràrquic.

Primer, recordem que el polinomi característic  $\phi_r$  del graf camí  $P_r$  (amb  $r$  vèrtexs i de longitud  $r - 1$ ) satisfà la recurrència

$$\phi_r(x) = x\phi_{r-1}(x) - \phi_{r-2}(x) \quad (r \geq 2), \tag{5.25}$$

amb  $\phi_0(x) = 1$  i  $\phi_1(x) = x$ . En conseqüència,  $\phi_r(x) = U_r(\frac{x}{2})$ , on  $U_r$  és el polinomi de Tchebixev de segona espècie de grau  $r$  (vegeu Szegö [91]). Com que aquests polinomi té zeros en  $x_i = \cos(\frac{i\pi}{r+1})$ ,  $i = 1, 2, \dots, r$ , els valors propis de  $P_r$  es poden escriure com a

$$\lambda_k = -2 \cos\left(\frac{(k+1)\pi}{r+1}\right), \quad k = 0, 1, \dots, r - 1,$$

amb  $\lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_{r-1}$  i  $\lambda_k = -\lambda_{r-1-k}$ . Vegeu, per exemple, Biggs [20] i Cvetkovic *et al.* [43].

Com hem esmentat abans, el següent resultat mostra com es pot utilitzar el producte jeràrquic per obtenir una família de grafs amb tots els seus valors propis diferents.

**Proposició 5.2.1.** *Sigui  $G$  un graf amb  $n$  vèrtexs amb tots els valors propis diferents,  $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n$ . Aleshores, tots els valors propis del producte*

jeràrquic  $H = G \square P_r$ , amb  $nr$  vèrtexs, són també diferents si s'agafa com a arrel del camí  $P_r$  un dels seus dos vèrtexs de grau 1. A més a més, cada valor propi  $\lambda_i$  de  $G$  dóna lloc a  $r$  valors propis de  $H$ ,  $\lambda_{0i} < \lambda_{1i} < \dots < \lambda_{(r-1)i}$ ,  $h = 0, 1, \dots, r-1$ , els quals són les solucions de l'equació

$$\phi_r(x) - \lambda_i \phi_{r-1}(x) = 0, \quad (5.26)$$

de manera que  $\lambda_i > \lambda_j$  implica  $\lambda_{hi} > \lambda_{hj}$ .

**Demostració.** Amb la notació indicada i utilitzant (4.43), el polinomi característic de  $H$  és

$$\phi_H(x) = (\phi_{r-1}(x))^n \phi_G \left( \frac{\phi_r(x)}{\phi_{r-1}(x)} \right),$$

ja que hem escollit l'arrel de  $P_r$  com un dels dos vèrtexs de grau 1 i, per tant,  $P_r^* = P_r - 0 = P_{r-1}$  i  $\phi_r^*(x) = \phi_{r-1}(x)$ .

Aleshores, tenim les implicacions següents:

$$\lambda \in \text{sp } H \Leftrightarrow \phi_H(\lambda) = 0 \Leftrightarrow \Phi_r(\lambda) \in \text{sp } G, \quad (5.27)$$

on  $\Phi_r(\lambda) := \frac{\phi_r(\lambda)}{\phi_{r-1}(\lambda)}$ . Observem que els zeros de  $\phi_{r-1}(x)$  no són zeros de  $\phi_H(x)$  perquè  $\phi_G(x)$  és un polinomi de grau  $n$ . Aleshores, cada  $\lambda_i \in \text{sp } G$  dóna lloc a  $r$  valors propis de  $H$ , denotats per  $\lambda_{hi}$ , per a  $h = 0, 1, \dots, r-1$ , els quals són les solucions de l'equació  $\Phi_r(x) = \lambda_i$  corresponent a (5.26). Per estudiar aquestes solucions ens cal conèixer el comportament de  $\Phi_r(x)$ . Primer, veiem que aquesta funció racional és estrictament creixent en el seu domini. De fet, per (5.25) tenim que  $\Phi_r$  satisfà la següent relació de recurrència:

$$\Phi_r(x) = \frac{\phi_r(x)}{\phi_{r-1}(x)} = x - \frac{\phi_{r-2}(x)}{\phi_{r-1}(x)} = x - \frac{1}{\Phi_{r-1}(x)} \quad (r > 2) \quad (5.28)$$

amb  $\Phi_1(x) = \frac{\phi_1(x)}{\phi_0(x)} = x$  estrictament creixent. Per inducció, el fet que  $\Phi_{r-1}(x)$  sigui estrictament creixent implica que  $\Phi_r(x)$  també ho sigui, perquè és la suma de dues funcions que ho són.

A més a més, la funció  $\Phi_r(x)$  té els mateixos zeros que  $\phi_r$ ,  $x_k = -2 \cos \left( \frac{(k+1)\pi}{r+1} \right)$ , per a  $k = 0, 1, \dots, r-1$ , i asíptotes en  $\tilde{x}_\ell = -2 \cos \left( \frac{\ell\pi}{r} \right)$ , per a  $\ell = 1, \dots, r-1$ , les quals s'entrellacen amb els zeros, és a dir,

$$x_0 < \tilde{x}_1 < x_1 < \tilde{x}_2 < x_2 < \dots < x_{r-2} < \tilde{x}_{r-1} < x_{r-1}, \quad (5.29)$$

cosa que és una propietat ben coneguda de tota seqüència de polinomis ortogonals (notem que  $\tilde{x}_\ell$  són els zeros de  $\phi_{r-1}$ ). Per a les propietats dels polinomis ortogonals, vegeu Godsil [58] (en relació amb les seves aplicacions en grafs) i Szegö [91].

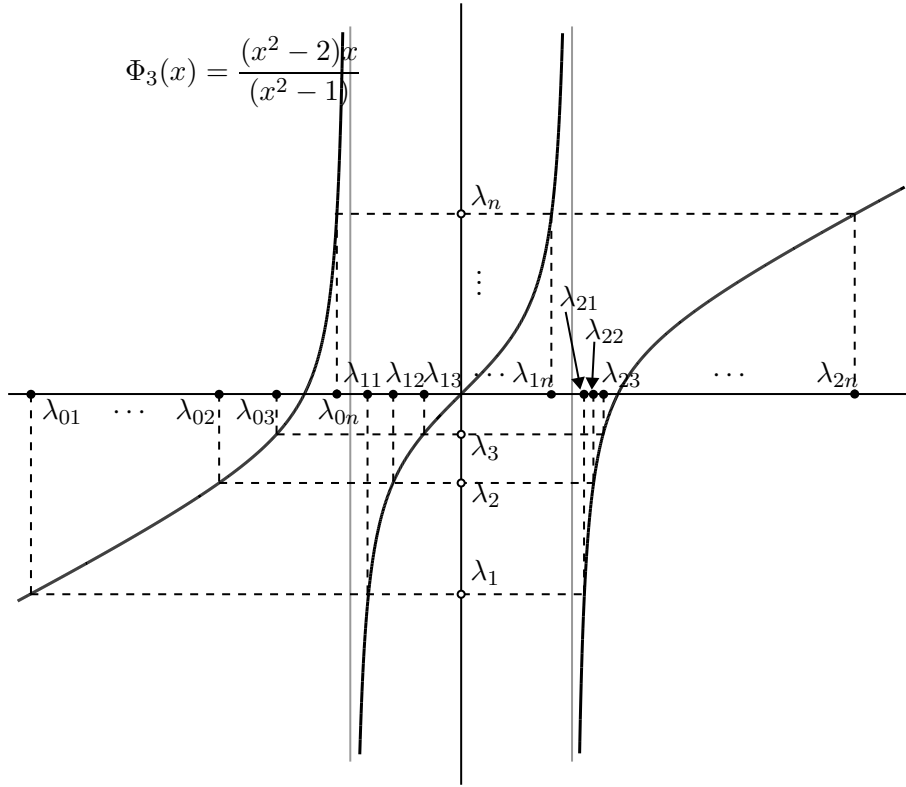


Figura 5.9: Valors propis de  $G \square P_3$  en funció dels valors propis de  $G$ .

En conseqüència, si  $r$  és parell, aleshores cada  $\lambda_i \in \text{sp } G$  dóna, en  $H$ ,  $\frac{r}{2}$  valors propis positius

$$0 < \lambda_{\frac{r}{2},i} < \lambda_{\frac{r}{2}+1,i} < \dots < \lambda_{r-1,i}$$

i  $\frac{r}{2}$  valors propis negatius

$$\lambda_{0,i} < \lambda_{1,i} < \dots < \lambda_{\frac{r}{2}-1,i} < 0.$$

D'altra banda, si  $r$  és senar, aleshores per a tot valor propi positiu (respectivament, negatiu)  $\lambda_i \in \text{sp } G$  dóna, en  $H$ ,  $\frac{r+1}{2}$  (respectivament,  $\frac{r-1}{2}$ ) valors propis positius i  $\frac{r-1}{2}$  (respectivament,  $\frac{r+1}{2}$ ) valors propis negatius. A més a més, si  $0 \in \text{sp } G$ , aleshores tenim en  $H$  el valor propi 0,  $\frac{r-1}{2}$  valors propis positius i el mateix nombre de valors propis negatius. Finalment, la condició en l'ordre dels valors propis obtinguts és deguda al caràcter creixent de la funció.  $\square$

Com a exemple, en la figura 5.9 es mostra que cada valor propi de  $G$  dóna tres valors propis de  $G \square P_3$ .

Observem que els valors propis de  $H$  estan distribuïts en els intervals fitats per les asímptotes de la manera següent: per a tot  $i_0, i_1, \dots, i_{r-1}$  en  $\{1, 2, \dots, n\}$

tenim

$$\lambda_{0i_0} < \tilde{x}_1 < \lambda_{1i_1} < \tilde{x}_2 < \lambda_{2i_2} < \cdots < \lambda_{(r-2)i_{r-2}} < \tilde{x}_{r-1} < \lambda_{(r-1)i_{r-1}}$$

(que s'ha de comparar amb (5.29)). Més concretament, existeixen funcions  $f_h$ , per a  $h = 0, 1, \dots, r-1$ , tals que, avaluades en cada  $\lambda_i \in \text{sp } G$ , donen els valors propis  $\lambda_{hi} \in \text{sp}(G \sqcap P_r)$ , els quals són les solucions de (5.26), que satisfan

$$\begin{aligned} \lambda_{0i} &= f_0(\lambda_i) \in I_0 = (-\infty, \tilde{x}_1), \\ \lambda_{hi} &= f_h(\lambda_i) \in I_h = (\tilde{x}_h, \tilde{x}_{h+1}), \quad h = 1, 2, \dots, r-2, \\ \lambda_{(r-1)i} &= f_{r-1}(\lambda_i) \in I_{r-1} = (\tilde{x}_{r-1}, \infty). \end{aligned} \quad (5.30)$$

Per exemple, com s'ha vist en el cas dels hiperarbres, quan  $r = 2$  l'equació que cal resoldre és  $\Phi_2(x) = \frac{x^2-1}{x} = \lambda_i$  i, aleshores, les funcions que s'obtenen són

$$f_0(\lambda_i) = \frac{\lambda_i - \sqrt{\lambda_i^2 + 4}}{2} < 0, \quad f_1(\lambda_i) = \frac{\lambda_i + \sqrt{\lambda_i^2 + 4}}{2} > 0.$$

Una altra conseqüència de la proposició anterior és el resultat següent:

**Corol·lari 5.2.2.** *Si  $\lambda$  és un valor propi no nul de  $G$  i  $\frac{1}{\lambda}$  és un valor propi de  $P_{r+1}$ , aleshores  $\lambda$  també és un valor propi de  $G \sqcap P_r$ .*

**Demostració.** De la hipòtesi, tenim  $\phi_{r+1}(\frac{1}{\lambda}) = 0$  i, utilitzant (5.25), tenim que

$$\frac{1}{\lambda} \phi_r\left(\frac{1}{\lambda}\right) - \phi_{r-1}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = 0.$$

Aleshores,  $\frac{1}{\lambda}$  és una solució de (5.26), amb  $\lambda_i = \frac{1}{\lambda}$  i la proposició 5.2.1 ens dona el resultat esperat.  $\square$

Com a exemple,  $G = P_4$  té els valors propis  $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$ , que satisfan

$$\lambda_0 = \lambda_1^{-1} = -2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = -\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_3 = \lambda_2^{-1} = 2 \cos\left(\frac{\pi}{5}\right) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Aleshores, del corol·lari anterior tenim que  $\text{sp } P_4 \subset \text{sp}(P_4 \sqcap P_3)$ .

Una altra manera de trobar els valors propis de  $G \sqcap P_r$  és mitjançant els seus respectius vectors propis, com mostra el resultat següent:

**Proposició 5.2.3.** *Sigui  $\lambda$  un valor propi de  $G$  amb el corresponent vector propi  $\mathbf{u}$ . Considerem la matriu (simètrica)  $r \times r$*

$$\mathbf{A}(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5.31)$$

amb els valors propis  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$  i els corresponents vectors propis  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{r-1}$ . Aleshores, el producte jeràrquic  $H = G \sqcap P_r$  té els mateixos valors propis amb els corresponents vectors propis  $\mathbf{w}_0 \otimes \mathbf{u}, \mathbf{w}_1 \otimes \mathbf{u}, \dots, \mathbf{w}_{r-1} \otimes \mathbf{u}$  (els vectors columna s'entenen com a matrius  $r \times 1$ ).

**Demostració.** De la hipòtesi, tenim que  $\mathbf{A}_G \mathbf{u} = \lambda \mathbf{u}$ . A més a més, per a tot  $h$ ,  $0 \leq h \leq r-1$ , sigui  $\mathbf{w}_h = (w_{h(r-1)}, w_{h(r-2)}, \dots, w_{h0})^\top$  el vector propi de  $\mathbf{A}(\lambda)$ , que satisfà  $\mathbf{A}(\lambda) \mathbf{w}_h = \lambda_h \mathbf{w}_h$ , cosa que correspon a les equacions

$$\begin{aligned} \lambda w_{h(r-1)} + w_{h(r-2)} &= \lambda_h w_{h(r-1)}, \\ w_{h(r-1)} + w_{h(r-3)} &= \lambda_h w_{h(r-2)}, \\ w_{h(r-2)} + w_{h(r-4)} &= \lambda_h w_{h(r-3)}, \\ &\vdots \\ w_{h2} + w_{h0} &= \lambda_h w_{h1}, \\ w_{h1} &= \lambda_h w_{h0}. \end{aligned} \tag{5.32}$$

Aleshores,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_H(\mathbf{w}_h \otimes \mathbf{u}) &= \begin{pmatrix} \mathbf{A}_G & \mathbf{I}_N & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{I}_N & \mathbf{0} & \mathbf{I}_N & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_N & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{0} & \mathbf{I}_N \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \cdots & \mathbf{I}_N & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_{h(r-1)} \mathbf{u} \\ w_{h(r-2)} \mathbf{u} \\ w_{h(r-3)} \mathbf{u} \\ \vdots \\ w_{h1} \mathbf{u} \\ w_{h0} \mathbf{u} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} w_{h(r-1)} \lambda \mathbf{u} + w_{h(r-2)} \mathbf{u} \\ w_{h(r-1)} \mathbf{u} + w_{h(r-3)} \mathbf{u} \\ w_{h(r-2)} \mathbf{u} + w_{h(r-4)} \mathbf{u} \\ \vdots \\ w_{h2} \mathbf{u} + w_{h0} \mathbf{u} \\ w_{h1} \mathbf{u} \end{pmatrix} = \lambda_h \begin{pmatrix} w_{h(r-1)} \mathbf{u} \\ w_{h(r-2)} \mathbf{u} \\ w_{h(r-3)} \mathbf{u} \\ \vdots \\ w_{h1} \mathbf{u} \\ w_{h0} \mathbf{u} \end{pmatrix} = \lambda_h (\mathbf{w}_h \otimes \mathbf{u}), \end{aligned}$$

com volíem demostrar.  $\square$

Notem que, d'aquest resultat, el polinomi característic de  $\mathbf{A}(\lambda)$  coincideix amb el polinomi de (5.26), és a dir,

$$\phi_{\mathbf{A}(\lambda)}(x) = \phi_r(x) - \lambda \phi_{r-1}(x).$$

Observem que, com que  $\mathbf{A}(\lambda)$  diagonalitza, els vectors propis  $\mathbf{w}_0, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{r-1}$  són linealment independents i, per tant, ho són els vectors propis  $\mathbf{w}_0 \otimes \mathbf{u}, \mathbf{w}_1 \otimes \mathbf{u}, \dots, \mathbf{w}_{r-1} \otimes \mathbf{u}$ . De fet, per a cada valor propi  $\lambda_h$  de  $\mathbf{A}(\lambda)$ , es pot calcular el seu corresponent vector propi avaluant a  $\lambda_h$  el polinomi característic  $\phi_i$  del camí  $P_i$ , per a  $i = r-1, r-2, \dots, 0$ , com mostra el lema següent:

**Lema 5.2.4.** *Si la matriu  $\mathbf{A}(\lambda)$  té el valor propi  $\lambda_h$ , aleshores el seu corresponent vector propi és*

$$\mathbf{w}_h = (w_{h(r-1)}, w_{h(r-2)}, \dots, w_{h0})^\top = (\phi_{r-1}(\lambda_h), \phi_{r-2}(\lambda_h), \dots, \phi_0(\lambda_h))^\top. \quad (5.33)$$

**Demostració.** Substituint  $w_{hi}$  per  $\phi_i(\lambda_h)$ , per a  $i = r - 1, \dots, 0$ , en (5.32), obtenim les equacions següents:

$$\begin{aligned} \lambda \phi_{r-1}(\lambda_h) + \phi_{r-2}(\lambda_h) &= \lambda_h \phi_{r-1}(\lambda_h) \\ \phi_{r-1}(\lambda_h) + \phi_{r-3}(\lambda_h) &= \lambda_h \phi_{r-2}(\lambda_h) \\ \phi_{r-2}(\lambda_h) + \phi_{r-4}(\lambda_h) &= \lambda_h \phi_{r-3}(\lambda_h) \\ &\vdots \\ \phi_2(\lambda_h) + \phi_0(\lambda_h) &= \lambda_h \phi_1(\lambda_h) \\ \phi_1(\lambda_h) &= \lambda_h \phi_0(\lambda_h). \end{aligned} \quad (5.34)$$

Aleshores, la primera equació es compleix ja que, utilitzant (5.25),

$$\lambda_h \phi_{r-1}(\lambda_h) - \phi_{r-2}(\lambda_h) - \lambda \phi_{r-1}(\lambda_h) = \phi_r(\lambda_h) - \lambda \phi_{r-1}(\lambda_h) = \phi_{\mathbf{A}(\lambda)}(\lambda_h) = 0$$

Passa el mateix passa en les següents  $r - 2$  equacions de (5.25) amb  $x = \lambda_h$ , mentre que la darrera equació es compleix perquè  $\phi_0(x) = 1$  i  $\phi_1(x) = x$ .  $\square$

### 5.2.3 Definició i propietats bàsiques de l'hiperarbre $r$ -àdic

Com una generalització de l'hiperarbre  $T_m = K_2^m = K_2 \square K_2 \square \dots \square K_2$  (definit a la primera part del capítol), proposem l'hiperarbre  $r$ -àdic (de dimensió  $m$ ) denotat i definit com a

$$T_r^m := P_r^m = P_r \square P_r \square \dots \square P_r,$$

on  $P_r$  és el graf camí. Per conveni,  $T_r^0 = K_1$ . Per a  $r = 2$ , observem que  $T_2^m$  correspon a l'hiperarbre (o arbre binomial)  $T_m$ . Com a exemple, en la figura 5.10 es mostra l'hiperarbre 3-àdic  $T_3^3$ .

Algunes de les propietats bàsiques de l'hiperarbre  $r$ -àdic són:

- L'ordre i la mida són  $|T_r^m| = r^m$  i  $\|T_r^m\| = r^m - 1$ .
- $T_r^m = T_r^{m-1} \square P_r$  (ja que el producte jeràrquic compleix la propietat associativa).
- $T_r^m$  és un subgraf generador de la malla  $m$ -dimensional  $P_r \square P_r \square \dots \square P_r$ .

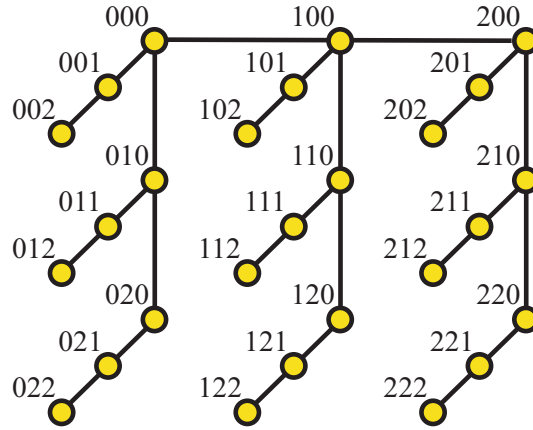


Figura 5.10: L'hiperarbre 3-àdic tridimensional  $T_3^3$ .

- Sigui  $E$  el conjunt d'arestes  $\{\{00, 10\}, \{10, 20\}, \dots, \{(r-2)\mathbf{0}, (r-1)\mathbf{0}\}\}$ . Aleshores,  $T_r^m - E$  és isomorf a la unió disjunta de  $r$  còpies de  $T_r^{m-1}$ . De fet, aquestes còpies de  $T_r^{m-1}$  són els subgrafs de  $T_r^m$  induïts pels conjunts de vèrtexs

$$V_\alpha = \{\alpha\mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in \mathbb{Z}_r^{m-1}\},$$

per a  $0 \leq \alpha \leq r-1$  (lema 4.2.2(a) amb  $\mathbf{z} = \alpha$ ).

- La distribució de graus dels vèrtexs de  $T_r^m$  és la següent:
  1.  $\delta(\alpha\mathbf{0}) = m+1$ , per a  $\alpha \neq 0, r-1$ ;
  2.  $\delta(00) = \delta((r-1)\mathbf{0}) = m$ ;
  3.  $\delta(\mathbf{w}\alpha 00 \overset{i-1}{\vdots} 0) = i+1$ , per a  $\alpha \neq 0, r-1$  i  $1 \leq i \leq m-1$ ;
  4.  $\delta(\mathbf{w}(r-1)00 \overset{i-1}{\vdots} 0) = i$ , per a  $1 \leq i \leq m-1$ .

Això dona:

- $r-2$  vèrtexs de grau  $m+1$  (cas 1);
  - $r(r-2)+2$  vèrtexs de grau  $m$  (cas 2 i cas 3 amb  $i = m-1$ );
  - $r^j + r^{j+1}(r-2)$  vèrtexs de grau  $m-j$ , per a  $1 \leq j \leq m-2$  (cas 3 amb  $i = m-j-1$  i cas 4 amb  $i = m-j$ );
  - $r^{m-1}$  vèrtexs de grau 1 (cas 4 amb  $i = 1$ ).
- Considerem un vèrtex genèric  $\mathbf{u} = u_{m-1}u_{m-2}\dots u_0$  de  $T_r^m$ , amb  $u_i \in \mathbb{Z}_r$ . Aleshores, la seva distància a l'arrel  $\mathbf{0} = 00\dots 0$  és

$$\text{dist}(\mathbf{0}, \mathbf{u}) = \sum_{i=0}^{m-1} u_i.$$

- Per trobar l'encaminament geodèsic  $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{0}$ , disminuïm successivament tots els dígitos de  $\mathbf{u}$  a 0 de dreta a esquerra. Per exemple, si  $\mathbf{u} = 3102 \in V(T_4^4)$ , el seu camí geodèsic al  $\mathbf{0}$  és

$$\mathbf{u} = 3102 \rightarrow 3101 \rightarrow 3100 \rightarrow 3000 \rightarrow 2000 \rightarrow 1000 \rightarrow 0000 = \mathbf{0}.$$

Aquest camí és únic, ja que  $T_r^m$  és un arbre.

- L'excentricitat de l'arrel és

$$\text{exc}(\mathbf{0}) = (r - 1)m, \quad (5.35)$$

amb un sol vèrtex a distància màxima,  $(r - 1)(r - 1) \dots (r - 1)$ .

- El radi (mínima excentricitat) de  $T_r^m$  és

$$r(T_r^m) = (r - 1)(m - 1) + \left\lfloor \frac{r}{2} \right\rfloor.$$

Si  $r$  és senar, hi ha exactament un vèrtex central,  $\frac{r-1}{2}0 \dots 0$ , amb dos vèrtexs a distància màxima,  $0(r - 1) \dots (r - 1)$  and  $(r - 1)(r - 1) \dots (r - 1)$ . Si  $r$  és parell, hi ha dos vèrtexs centrals:

- $\frac{r-2}{2}0 \dots 0$ , amb un únic vèrtex a distància màxima,  $(r - 1)(r - 1) \dots (r - 1)$  i
- $\frac{r}{2}0 \dots 0$ , amb un únic vèrtex a distància màxima,  $0(r - 1) \dots (r - 1)$ .

- Com que  $T_r^m = P_r \sqcap T_r^{m-1}$ , el diàmetre de  $T_r^m$  satisfà la recurrència següent:

$$D(T_r^m) = 2(r - 1) + D(T_r^{m-1}),$$

la qual, com que  $D(T_r^1) = D(P_r) = r - 1$ , dóna

$$D(T_r^m) = (r - 1)(2m - 1).$$

Sigui  $\Gamma_r^m(k)$  el conjunt de vèrtexs de  $T_r^m$  que estan a distància  $k$  de l'arrel  $\mathbf{0}$ , amb cardinalitat  $N_r^m(k) := |\Gamma_r^m(k)|$ . Per a  $r = 2$ , se sap que  $N_2^m(k) = \binom{m}{k}$ , ja que els vèrtexs a distància  $k$  des del  $\mathbf{0}$  tenen exactament un nombre  $k$  de símbols 1. En general,  $N_r^m(k)$  és el nombre de paraules de longitud  $m$  sobre l'alfabet de  $r$  símbols  $\{0, 1, \dots, r - 1\}$ , tals que sumen  $k$ . Aleshores, el següent resultat es pot veure com la generalització de les corresponents propietats de l'hiperarbre.

**Proposició 5.2.5.** *El nombre  $N_r^m(k)$  de vèrtexs a distància  $k$  de l'arrel  $\mathbf{0}$  en l'hiperarbre  $r$ -àdic  $T_r^m$  satisfà:*



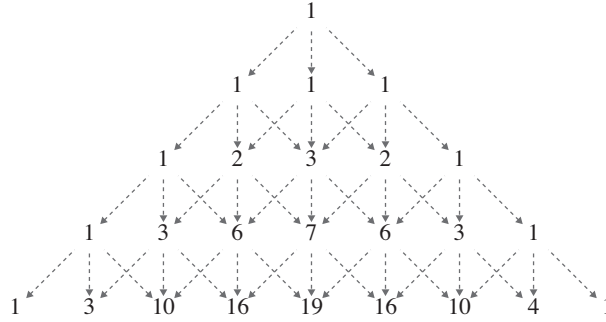


Figura 5.11: La propietat de recurrència de  $N_3^m$  mostrada com una generalització del triangle de Pascal.

(a) Propietat de simetria: sigui  $\varepsilon = \text{exc}(\mathbf{0})$ . Aleshores,

$$N_r^m(k) = N_r^m(\varepsilon - k),$$

per a  $0 \leq k \leq \varepsilon$ .

(b) Propietat de recurrència:

– Si  $k < r - 1$ , aleshores

$$N_r^m(k) = N_r^{m-1}(0) + N_r^{m-1}(1) + \dots + N_r^{m-1}(k).$$

– Si  $r - 1 \leq k < \frac{\varepsilon}{2}$ , aleshores

$$N_r^m(k) = N_r^{m-1}(k - r + 1) + N_r^{m-1}(k - r + 2) + \dots + N_r^{m-1}(k).$$

**Demostració.** (a) L'aplicació  $\psi : V(T_r^m) \rightarrow V(T_r^m)$  definida per

$$\psi(\mathbf{u}) = \psi(u_{m-1}u_{m-2} \dots u_0) = \bar{\mathbf{u}} = \bar{u}_{m-1}\bar{u}_{m-2} \dots \bar{u}_0,$$

on  $\bar{u}_i := r - 1 - u_i$ , és una bijecció de  $V(T_r^m)$  a ell mateix i porta un vèrtex  $\mathbf{u}$  a distància  $k$  (des del  $\mathbf{0}$ ) a un vèrtex  $\bar{\mathbf{u}}$  a distància  $\varepsilon - k$  (també des del  $\mathbf{0}$ ). De fet, si  $\text{dist}(\mathbf{0}, \mathbf{u}) = k$ , aleshores

$$\text{dist}(\mathbf{0}, \bar{\mathbf{u}}) = \sum_{i=0}^{m-1} \bar{u}_i = \sum_{i=0}^{m-1} (r - 1 - u_i) = m(r - 1) - k = \varepsilon - k,$$

on hem utilitzat (5.35). Per tant,  $\psi$  és una bijecció de  $\Gamma_r^m(k)$  a  $\Gamma_r^m(\varepsilon - k)$ .

(b) Suposem que  $r - 1 \leq k < \frac{\varepsilon}{2}$  (la demostració de l'altre cas és bàsicament la mateixa). Considerem el conjunt  $\Gamma_r^m(k)$  en particions de  $r$  subconjunts obtinguts fixant el valor  $u_0 = j$ ,  $0 \leq j \leq r - 1$ , és a dir,

$$\Gamma_r^m(k) = \bigcup_{j=0}^{r-1} \Gamma_r^{m-1}(k-j)j,$$

on  $\Gamma_r^{m-1}(k-j)j = \{u_{m-1} \dots u_1 j \mid \sum_{i=1}^{m-1} u_i = k-j\}$ . Aleshores, el resultat s'obté de considerar les respectives cardinalitats.  $\square$

Noteu que la propietat (b) de la proposició dóna lloc a una generalització del triangle de Pascal, com es veu a la figura 5.11 per al cas  $r = 3$ .

Observem que  $N_r^m$  és el nombre de composicions de  $k$  en  $m$  parts, cada una de les quals en  $\{0, 1, \dots, r-1\}$ . Això és equivalent a considerar el nombre de composicions de  $k+m$  en  $m$  parts, on cada part pren valors en  $\{1, 2, \dots, r\}$ . La funció generadora per aquests nombres és

$$G_r^m(z) = \sum_{k=0}^{(r-1)m} N_r^m(k) z^{k+m} = \left( z \frac{1-z^r}{1-z} \right)^m$$

(vegeu Flajolet i Sedgewick [55] per a més detalls). Per exemple, per al cas  $r = m = 3$ , tenim

$$\left( z \frac{1-z^3}{1-z} \right)^3 = z^3 + 3z^4 + 6z^5 + 7z^6 + 6z^7 + 3z^8 + z^9,$$

on els coeficients d'aquest polinomi corresponen a la quarta fila de la figura 5.11. En particular,  $N_3^3(2) = N_3^3(4) = 6$ , com es veu en la figura 5.12.

## Grup d'automorfismes

Respecte a la simetria dels hiperarbres  $r$ -àdics, observem que, de la proposició 5.2.1, tots els valors propis de  $T_r^m$  són diferents. Com mostra Mowshowitz [74], aquesta propietat té algunes conseqüències estructurals, com que el grup d'automorfismes sigui abelià. De fet, demostrem que el grup d'automorfismes de  $T_r^m$  no depèn de  $r$  i trobem que és el grup simètric  $S_2$ . Aquest resultat és una generalització del cas  $r = 2$  que hem vist a la primera secció del capítol.

**Proposició 5.2.6.** *Per a  $m \geq 1$ , el grup d'automorfismes de  $T_r^m$  és el grup simètric  $S_2$ .*

**Demostració.** Sigui  $\phi : T_r^m \rightarrow T_r^m$  definit per  $\phi(u_{m-1}\mathbf{w}) = \bar{u}_{m-1}\mathbf{w}$  per a tot  $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}_r^{m-1}$  (recordem que  $\bar{u}_{m-1} := r-1-u_m$ ). Afirmem que  $\text{Aut}(T_r^m) = \{Id, \phi\}$ , de manera que  $\phi$  és l'únic automorfisme no trivial de  $T_r^m$ .

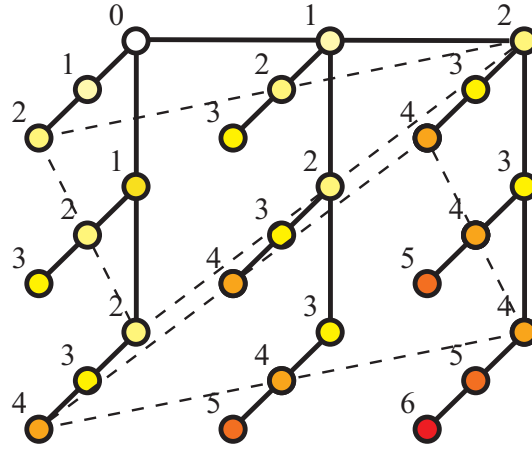


Figura 5.12: Distàncies dels vèrtexs (des del 0) en  $T_3^3$  (les línies discontinúes uneixen els vèrtexs a distància 2 i a distància 4).

Primer mostrem que  $\phi$  és un automorfisme. De la seva definició, queda clar que  $\phi$  és una bijecció involutiva, és a dir,  $\phi(\phi(\mathbf{u})) = \mathbf{u}$  per a tot vèrtex  $\mathbf{u}$  de  $T_m$ . Ara siguin  $\mathbf{u}$  i  $\mathbf{v}$  dos vèrtexs de  $T_m$ . Hem de mostrar que, si  $\mathbf{u} \sim \mathbf{v}$ , aleshores  $\phi(\mathbf{u}) \sim \phi(\mathbf{v})$ . Per tant, suposem, sense pèrdua de generalitat, que  $\mathbf{u}$  és de la forma  $\mathbf{u} = \mathbf{w}\alpha 0 \dots 0$ , on les seqüències  $\mathbf{w}$  o  $0 \dots 0$  poden ser buides i  $0 \leq \alpha < \frac{r}{2}$ . Aleshores, distingim dos casos:

- Si  $\mathbf{u} = \mathbf{w}0 \dots 0$  ( $\alpha = 0$ ) i  $\mathbf{v} = \mathbf{w}10 \dots 0$ , aleshores

$$\phi(\mathbf{u}) = \mathbf{w}(r-1)0 \dots 0 \sim \mathbf{w}(r-2)0 \dots 0 = \phi(\mathbf{v}).$$

- Si  $\mathbf{u} = \mathbf{w}\alpha 0 \dots 0$  ( $\alpha \neq 0$ ) i  $\mathbf{v} = \mathbf{w}(\alpha \pm 1)0 \dots 0$ , aleshores

$$\phi(\mathbf{u}) = \mathbf{w}(r-1-\alpha)0 \dots 0 \sim \mathbf{w}(r-1-\alpha \mp 1)0 \dots 0 = \phi(\mathbf{v}).$$

Ara demostrem que  $\phi$  és l'únic automorfisme no trivial de  $T_r^m$  per inducció sobre  $m$ . Per a  $m = 1$ ,  $T_r^m = P_r$  i  $\text{Aut}(P_r) = S_2$ . Sigui ara  $m > 1$ . Com hem esmentat abans (lema 4.2.2), el conjunt de vèrtexs  $V_\beta = \{\beta\mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in \mathbb{Z}_2^{m-1}\}$ , per a  $\beta = 0, 1, \dots, r-1$ , induïx  $r$  subgrafs disjunts  $G_\beta = G[V_\beta]$  de  $T_r^m$  isomorfs a  $T_r^{m-1}$ . Suposem que  $\text{Aut}(T_r^{m-1}) = \{Id, \phi\}$  i sigui  $\gamma$  un automorfisme de  $T_r^m$ . A causa de la seqüència de graus de  $T_r^m$ , es compleix un dels dos casos següents:

- $\gamma(\beta 0^{m-1} 0) = \beta 0^{m-1} 0$ ,
- $\gamma(\beta 0^{m-1} 0) = \overline{\beta} 0^{m-1} 0$ ,

per a  $0 \leq \beta \leq r - 1$ . En el primer cas,  $\gamma$  va d'un subgraf  $G_\beta$  a ell mateix. A més a més, l'automorfisme induït deixa fixa l'arrel. Aleshores, per la hipòtesi d'inducció,  $\gamma = Id$ . En el segon cas,  $\gamma$  va de  $G_\beta$  a  $G_{\bar{\beta}}$ . Per a tot  $\mathbf{w} \in \mathbb{Z}_r^{m-1}$ , definim les aplicacions  $\gamma_\beta$  de la manera següent:

- Si  $\gamma(\beta\mathbf{w}) = \bar{\beta}\mathbf{z}$  aleshores  $\gamma_\beta(\mathbf{w}) = \mathbf{z}$ .

Com que  $\gamma(\beta\mathbf{0}) = \bar{\beta}\mathbf{0}$ , tenim que  $\gamma_\beta(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$  i, per tant,  $\gamma_\beta$  és un automorfisme de  $T_r^{m-1}$  que deixa l'arrel fixada. Aleshores, per la hipòtesi d'inducció,  $\gamma_\beta = Id$ , que implica que  $\gamma = \phi$ . Això completa la demostració.  $\square$

### 5.2.4 Propietats espectrals de l'hiperarbre $r$ -àdic

En aquesta secció estudiem les propietats espectrals, és a dir, els valors i vectors propis de l'hiperarbre  $r$ -àdic. Els resultats obtinguts generalitzen els obtinguts per a l'hiperarbre.

#### Valors propis

En l'estudi de l'espectre de l'hiperarbre  $r$ -àdic, hem de distingir els casos  $r$  senar i  $r$  parell. En el primer cas trobem que l'espectre de  $T_r^m$  conté tots els altres espectres de  $T_r^\mu$  per a  $\mu < m$ , com mostra el següent resultat:

**Lema 5.2.7.** *Si  $r$  és senar, el conjunt de valors propis de  $T_r^m$  està contingut en  $T_r^{m+1}$ :*

$$\text{sp } T_r^m \subset \text{sp } T_r^{m+1},$$

per a  $m \geq 0$ .

**Demostració.** Procedim per inducció sobre  $m$ . Per a  $m = 0$ ,  $T_r^0 = K_1$  té només el valor propi 0 i  $T_r^1 = K_1 \sqcap P_r = P_r$  té també aquest valor propi perquè  $r$  és senar. Suposem que, per a un  $m$  donat, es compleix  $\text{sp } T_r^m \subset \text{sp } T_r^{m+1}$ . Aleshores, utilitzant (5.27), tenim les implicacions següents:

$$\lambda \in \text{sp } T_r^{m+1} \Leftrightarrow \Phi_r(\lambda) \in \text{sp } T_r^m \Rightarrow \Phi_r(\lambda) \in \text{sp } T_r^{m+1} \Leftrightarrow \lambda \in \text{sp } T_r^{m+2},$$

cosa que completa la demostració.  $\square$

En el cas  $r$  parell, els conjunts  $\{\text{sp } T_r^m \mid m \geq 0\}$  són disjunts dos a dos. És a dir, els valors propis dels hiperarbres  $r$ -àdics de totes les dimensions són tots diferents, com mostra el lema següent:

**Lema 5.2.8.** *Si  $r$  és parell, aleshores per a qualsevol parell de seqüències  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}_r^s$ ,  $\mathbf{j} \in \mathbb{Z}_r^t$ ,*

$$\mathbf{i} = \mathbf{j} \iff \lambda_{\mathbf{i}} = \lambda_{\mathbf{j}}.$$

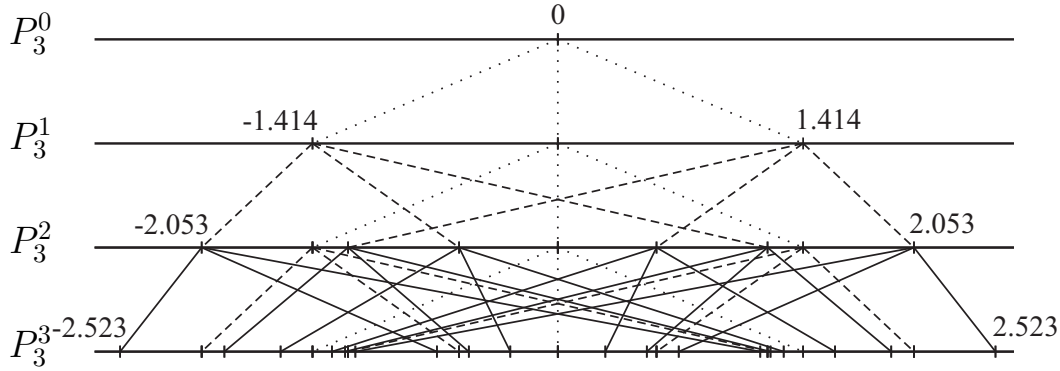


Figura 5.13: Distribució dels valors propis de  $P_3^m$  per a  $0 \leq m \leq 3$ .

**Demostració.** Sent  $r$  parell, la suficiència és evident. Respecte a la necessitat, suposem que tenim  $\lambda_{\mathbf{i}} = \lambda_{\mathbf{j}}$ , per a  $\mathbf{i} = i_{s-1}i_{s-2} \dots i_1i_0$  i  $\mathbf{j} = j_{t-1}j_{t-2} \dots j_1j_0$ . Per tant,

$$f_{i_{s-1}}(f_{i_{s-2}} \circ \dots \circ f_{i_1} \circ f_{i_0}(0)) = f_{j_{t-1}}(f_{j_{t-2}} \circ \dots \circ f_{j_1} \circ f_{j_0}(0)). \quad (5.36)$$

Aleshores, d'acord amb (5.30),  $f_h(x) \in I_h$  per a qualsevol  $h \in \{0, 1, \dots, r-1\}$  i  $x \in \mathbb{R}$ , s'ha de complir  $i_{s-1} = j_{t-1}$  i, per tant,  $f_{i_{s-2}} \circ \dots \circ f_{i_1} \circ f_{i_0}(0) = f_{j_{t-2}} \circ \dots \circ f_{j_1} \circ f_{j_0}(0)$ . Seguint el mateix raonament, obtenim  $i_{s-2} = j_{t-2}$  i  $f_{i_{s-3}} \circ \dots \circ f_{i_1} \circ f_{i_0}(0) = f_{j_{t-3}} \circ \dots \circ f_{j_1} \circ f_{j_0}(0)$ , etc.

En conseqüència, només cal demostrar que  $s = t$ . Suposem, sense pèrdua de generalitat, que  $s > t$ . Aleshores, repetint  $t$  vegades el procés anterior, obtenim  $i_{s-1} = j_{t-1}$ ,  $i_{s-2} = j_{t-2}$ ,  $\dots$ ,  $i_{s-t} = j_0$  i  $f_{i_{s-t-1}} \circ \dots \circ f_{i_1} \circ f_{i_0}(0) = 0$ , cosa que contradiu el fet que, per a  $r$  parell i per a tot  $h$  i  $x$ ,  $f_h(x) \neq 0$ . Això completa la demostració.  $\square$

Observem que el lema 5.2.7 implica que el lema anterior no se satisfà per a  $r$  senar.

Com que  $T_r^m$  és clarament bipartit, el seu conjunt de valors propis és simètric (vegeu Biggs [20]) i, per tant, per a tot  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}_r^m$ ,

$$\lambda_{\mathbf{i}} = -\lambda_{\bar{\mathbf{i}}}, \quad (5.37)$$

on, com abans,  $\bar{\mathbf{i}} = \bar{i}_{m-1} \dots \bar{i}_1\bar{i}_0$ . Per exemple, la figura 5.13 mostra l'espectre de l'hiperarbre 3-àdic  $T_3^m$ , per a  $0 \leq m \leq 3$ , i com cada valor propi de  $T_3^{m-1}$  dona lloc a tres valors propis de  $T_3^m$ .

En els dos resultats següents estudiem el comportament asimptòtic dels valors propis positius màxim i mínim de  $T_r^m$  quan  $m \rightarrow \infty$ . Mostrem que, mentre que el

valor propi màxim sempre té el mateix comportament (independentment de  $r$ ), el decreixement asimptòtic del mínim valor propi positiu segueix una llei potencial si  $r$  és parell i una llei exponencial si  $r$  és senar. Vegeu la figura 5.14 per a una representació dels dos valors propis positius més grans i el mínim valor propi positiu.

**Proposició 5.2.9.** *Per a tot  $k \geq 1$  fixat, sigui  $\lambda_{r^m-k}$  el valor propi  $k$ -èsim més gran de  $T_r^m$ . Aleshores, el seu comportament asimptòtic és*

$$\lambda_{r^m-k} \sim \sqrt{2m}$$

per a tot valor de  $r$ .

**Demostració.** Per simplificar la notació, sigui  $\lambda[m] = \lambda_{r^m-k}$ . Aleshores, d'acord amb la demostració de la proposició 5.2.1,  $\lambda[m]$  és la solució més gran de l'equació  $\Phi_r(x) = \lambda[m-1]$  (vegeu de nou la figura 5.14). Tanmateix, utilitzant (5.28), el comportament asimptòtic de  $\Phi_r(x)$ , quan  $x \rightarrow \infty$ , és

$$\Phi_r(x) = x - \frac{\phi_{r-2}(x)}{\phi_{r-1}(x)} \sim x - \frac{1}{x},$$

ja que tots els polinomis característics d'aquesta equació són mònic. Per tant, tenim que  $x \sim \lambda[m]$  si i només si  $x - \frac{1}{x} \sim \lambda[m-1]$ . Aleshores, només ens cal comprovar que, quan  $m \rightarrow \infty$ ,  $x = \sqrt{2m}$  satisfà

$$x - \frac{1}{x} \sim \sqrt{2(m-1)}.$$

De fet,

$$\left(\sqrt{2m} - \frac{1}{\sqrt{2m}}\right)^2 = 2m - 2 + \frac{1}{2m} \sim 2(m-1).$$

□

**Proposició 5.2.10.** *El comportament asimptòtic del valor propi positiu més petit de  $T_r^m$  és*

$$\lambda_{\frac{r^m+1}{2}} \sim \left(\frac{r+1}{2}\right)^{-m} \quad (r \text{ senar}), \quad (5.38)$$

$$\lambda_{\frac{r^m}{2}} \sim \frac{r\sqrt{2}}{\sqrt{m}} \quad (r \text{ parell}). \quad (5.39)$$

**Demostració.** Primer, sigui  $\Phi_r(x) = a_{0,r} + a_{1,r}x + a_{2,r}x^2 + \dots$ , on els coeficients  $a_{0,r}, a_{1,r}, a_{2,r}, \dots$ , es poden calcular mitjançant (5.25) i resulten ser

$$a_{0,r} = (-1)^{\frac{r}{2}}, \quad a_{2,r} = (-1)^{\frac{r-2}{2}} \frac{r^2 + 2r}{8} \quad (r \text{ parell}); \quad (5.40)$$

$$a_{1,r} = (-1)^{\frac{r-1}{2}} \frac{r+1}{2} \quad (r \text{ senar}). \quad (5.41)$$

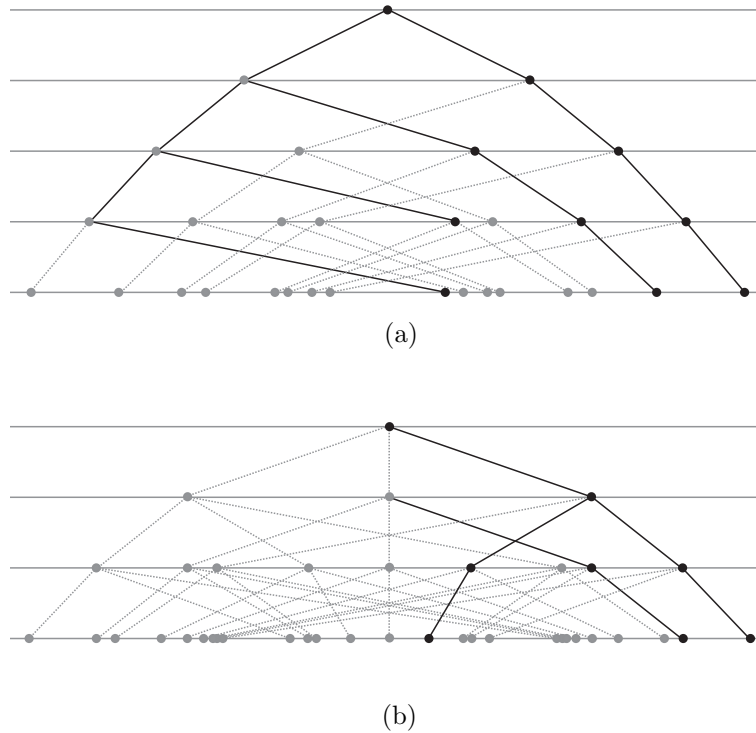


Figura 5.14: Els dos valors propis positius més grans i el mínim valor propi positiu amb (a)  $r$  parell i (b)  $r$  senar.

Els altres coeficients són nuls.

Per a  $r$  senar,  $\lambda\{m\} = \lambda_{\frac{r^{m+1}-1}{2}}$  és el valor propi positiu més petit de l'equació  $\Phi_r(x) = \lambda\{m-1\}$  (figura 5.14(b)). El comportament de  $\Phi_r(x)$ , quan  $x \rightarrow 0$ , és

$$\Phi_r(x) = \frac{\phi_r(x)}{\phi_{r-1}(x)} \sim \frac{a_{1,r}x}{a_{0,r}},$$

cosa que, utilitzant (5.40) i (5.41), dóna

$$\Phi_r(x) \sim \frac{(-1)^{\frac{r-1}{2}} \frac{r+1}{2} x}{(-1)^{\frac{r-1}{2}}} = \frac{r+1}{2} x.$$

Per tant, tenim que  $x \sim \lambda\{m\}$  si i només si  $\frac{r+1}{2}x \sim \lambda_{m-1}$ . Això implica

$$x \sim \lambda_m \sim \left(\frac{r+1}{2}\right)^{-m},$$

com afirmàvem en (5.38).

Per a  $r$  parell,  $\lambda\{m\} = \lambda_{\frac{r}{2}m}$  és ara la solució positiva més petita de l'equació  $\Phi_r(x) = -\lambda[m-1]$  (figura 5.14(a)). A més, el comportament asimptòtic de  $\Phi_r(x)$ , quan  $x \rightarrow 0$ , és

$$\Phi_r(x) = \frac{\phi_r(x)}{\phi_{r-1}(x)} \sim \frac{a_{2,r}x^2 + a_{0,r}}{a_{1,r-1}x}.$$

Aleshores, utilitzant de nou (5.40) i (5.41), obtenim l'equació

$$\frac{(-1)^{\frac{r-2}{2}} \frac{r^2+2r}{8} x^2 + (-1)^{\frac{r}{2}}}{(-1)^{\frac{r-2}{2}} \frac{r}{2} x} = -\lambda[m-1] \sim -\sqrt{2(m-1)}.$$

És a dir,

$$(r^2 + 2r)x^2 + 4r\sqrt{2(m-1)}x - 8 \sim 0.$$

Resolent per a  $x$ , la solució positiva és (després d'algunes simplificacions)

$$x \sim \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{r^2m + 2r} + r\sqrt{m+1}} \sim \frac{\sqrt{2}}{r\sqrt{m}},$$

com dèiem en (5.39).  $\square$

El següent resultat és una conseqüència del fet que  $\lambda_{\alpha\mathbf{i}}$ ,  $\alpha = 0, 1, \dots, r-1$ , són les arrels del polinomi (de grau  $r$ )  $p_r(x) = \phi_r(x) - \lambda_{\mathbf{i}}\phi_{r-1}(x) = 0$ .

**Lema 5.2.11.** *Per a tot  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}_r^{m-1}$ , tenim*

$$\sum_{\alpha=0}^{r-1} \lambda_{\alpha\mathbf{i}} = \lambda_{\mathbf{i}}, \quad (5.42)$$

$$\prod_{\alpha=0}^{r-1} \lambda_{\alpha\mathbf{i}} = \begin{cases} (-1)^{\frac{r}{2}} & (r \text{ parell}), \\ (-1)^{\frac{r-1}{2}} \lambda_{\mathbf{i}} & (r \text{ senar}). \end{cases} \quad (5.43)$$

**Demostració.** Recordem que els polinomis de Txebixev són parells (respectivament, senars) si  $r$  és parell (respectivament, senar). Aleshores, el coeficient de  $x^{r-1}$  en  $p_r(x)$  és  $\lambda_{\mathbf{i}}$  i això dóna (5.42).

A més a més, el terme constant de  $p_r(x)$  és

$$p_r(0) = \phi_r(0) - \lambda_{\mathbf{i}}\phi_{r-1}(0) = (-1)^r \prod_{\alpha=0}^{r-1} \lambda_{\alpha\mathbf{i}}, \quad (5.44)$$

on  $\phi_0(0) = 1$ ,  $\phi_1(0) = 0$  i  $\phi_r(0) = -\phi_{r-2}(0)$ , per a  $r \geq 2$ , a causa de (5.25). Això dóna  $\phi_r(0) = (-1)^{\frac{r}{2}}$  per a  $r$  parell i  $\phi_r(0) = 0$  per a  $r$  senar, com esperàvem. Aleshores, substituint aquests valors en (5.44), obtenim (5.43).  $\square$

Per a tot  $\mathbf{i} \in \mathbb{Z}_r^{m-1}$ , tenim el següent corollari:



**Corollari 5.2.12.** *Els valors propis de l'hiperarbre  $r$ -àdic satisfan les propietats següents:*

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}_r^m} \lambda_{\alpha \mathbf{i}} = \sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}_r^{m-1}} \lambda_{\alpha \mathbf{i}} = \dots = 0, \quad (5.45)$$

$$\sum_{\mathbf{i} \in \mathbb{Z}_r^{m-1}} \prod_{\alpha=0}^{r-1} \lambda_{\alpha \mathbf{i}} = \begin{cases} (-1)^{\frac{r}{2}} r^{m-1} & (r \text{ parell}), \\ 0 & (r \text{ senar}). \end{cases} \quad (5.46)$$

### Vectors propis

Els valors propis de  $T_r^m$  es poden calcular recursivament utilitzant la proposició 5.2.3. Per exemple, per a  $r = 3$ , podem començar a partir de  $T_3^0 = K_1$ , amb el valor propi 0 i el vector propi  $\mathbf{u} = 1$ . Aleshores, ens cal considerar els vectors propis de la matriu

$$\mathbf{A}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

(observem que correspon a la matriu d'adjacència del camí  $P_3$ ), amb els valors propis  $\lambda_0 = -\sqrt{2}$ ,  $\lambda_1 = 0$  i  $\lambda_2 = \sqrt{2}$ . Aleshores, per (5.33), els seus vectors propis respectius són:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_0^0 &= (\phi_2(\lambda_0), \phi_1(\lambda_0), \phi_0(\lambda_0))^\top = (1, -\sqrt{2}, 1)^\top, \\ \mathbf{w}_1^0 &= (\phi_2(\lambda_1), \phi_1(\lambda_1), \phi_0(\lambda_1))^\top = (-1, 0, 1)^\top, \\ \mathbf{w}_2^0 &= (\phi_2(\lambda_2), \phi_1(\lambda_2), \phi_0(\lambda_2))^\top = (1, \sqrt{2}, 1)^\top, \end{aligned}$$

ja que  $\phi_2 = x^2 - 1$ ,  $\phi_1 = x$  i  $\phi_0 = 1$ . De la proposició anterior, aquests són precisament els vectors propis de  $T_3^1 = P_3$ , ja que  $\mathbf{w}_h^0 \otimes \mathbf{u} = \mathbf{w}_h^0$ , per a  $h = 0, 1, 2$  (com esperàvem). En general, tenim el resultat següent:

**Proposició 5.2.13.** *Per a tota seqüència  $\mathbf{i} = i_{m-1}i_{m-2}\dots i_0 \in \mathbb{Z}_r^m$ , l'hiperarbre  $r$ -àdic  $T_r^m$  té el valor propi*

$$\lambda_{\mathbf{i}} = f_{i_{m-1}} \circ f_{i_{m-2}} \circ \dots \circ f_{i_0}(0)$$

amb el corresponent vector propi

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{\mathbf{i}} &= \mathbf{u}_{i_{m-1}i_{m-2}\dots i_1i_0} \\ &= \mathbf{w}_{i_{m-1}i_{m-2}\dots i_1i_0} \otimes \mathbf{w}_{i_{m-2}i_{m-3}\dots i_1i_0} \otimes \dots \otimes \mathbf{w}_{i_1i_0} \otimes \mathbf{w}_{i_0} \end{aligned}$$

on, per a  $0 \leq s \leq m-1$ , els vectors  $\mathbf{w}_{\mathbf{j}} = \mathbf{w}_{i_{s-1}i_{s-2}\dots i_1i_0}$  són matrius  $r \times 1$  i es calculen d'acord amb (5.33), és a dir,

$$\mathbf{w}_{\mathbf{j}} = (\phi_{r-1}(\lambda_{\mathbf{j}}), \phi_{r-2}(\lambda_{\mathbf{j}}), \dots, \phi_1(\lambda_{\mathbf{j}}), \phi_0(\lambda_{\mathbf{j}}))^\top.$$

**Demostració.** Com que  $T_r^m = T_r^{m-1} \sqcap P_r$ , el resultat ve d'aplicar recursivament la proposició 5.2.3.  $\square$

Per exemple, l'hiperarbre  $T_3^2$  té els valors propis següents (donats amb tres decimals):

$$\begin{aligned} \lambda_{00} &= -2.052, \lambda_{01} = -1.414, \lambda_{02} = -1.208, \lambda_{10} = -0.569, \lambda_{11} = 0, \\ \lambda_{12} &= 0.569, \lambda_{20} = 1.208, \lambda_{21} = -1.414, \lambda_{22} = 2.053. \end{aligned}$$

amb els vectors propis respectius

$$\mathbf{u}_{i_1 i_0} = \mathbf{w}_{i_1 i_0} \otimes \mathbf{w}_{i_0} = \begin{pmatrix} \phi_2(\lambda_{i_1 i_0}) \phi_2(\lambda_{i_0}) \\ \phi_2(\lambda_{i_1 i_0}) \phi_1(\lambda_{i_0}) \\ \phi_2(\lambda_{i_1 i_0}) \phi_0(\lambda_{i_0}) \\ \phi_1(\lambda_{i_1 i_0}) \phi_2(\lambda_{i_0}) \\ \phi_1(\lambda_{i_1 i_0}) \phi_1(\lambda_{i_0}) \\ \phi_1(\lambda_{i_1 i_0}) \phi_0(\lambda_{i_0}) \\ \phi_0(\lambda_{i_1 i_0}) \phi_2(\lambda_{i_0}) \\ \phi_0(\lambda_{i_1 i_0}) \phi_1(\lambda_{i_0}) \\ \phi_0(\lambda_{i_1 i_0}) \phi_0(\lambda_{i_0}) \end{pmatrix},$$

on  $i_1, i_0 \in \mathbb{Z}_3$  i, recordant que els valors propis de  $T_3^1 = P_3$  són  $\lambda_0 = -\sqrt{2}$ ,  $\lambda_1 = 0$  i  $\lambda_2 = \sqrt{2}$ .

# Capítol 6

## Xarxes Sierpinski

Malgrat que moltes xarxes reals tenen autosimilitud, no hi ha cap definició estàndard de fractalitat per a grafs. D'altra banda, l'efecte petit món és una de les propietats més importants i comunes de les xarxes reals. En aquest capítol intentem relacionar aquestes dues propietats, l'autosimilitud i l'efecte petit món, en la família dels grafs Sierpinski.

Per a aquesta família de grafs, el Sierpinski Gasket, el Sierpinski Carpet i el Sierpinski Tetra, donem les seves propietats bàsiques i calculem la dimensió *box counting* com una mesura de la seva fractalitat.

A més a més, definim una família determinista de grafs, que anomenem *grafs Sierpinski petit món*. Demostrem que la nostra construcció conserva l'estructura dels grafs Sierpinski, incloent-hi la seva dimensió *box counting*, mentre es dona l'efecte petit món. Per tant, en aquesta família de grafs, la fractalitat i l'efecte petit món hi són presents simultàniament.

Les nostres publicacions relacionades amb aquest capítol són [11, 12].

### 6.1 Introducció

En els darrers deu anys, les xarxes complexes han merescut l'atenció d'investigadors d'àrees diferents. L'habilitat de capturar, emmagatzemar i processar enormes quantitats d'informació permet l'anàlisi quantitativa de grans sistemes aparentment aleatoris i impredecibles. Moltes xarxes biològiques, socials, econòmiques, de comunicacions, Internet i WWW, igual que altres sistemes artificials, com les xarxes d'arquitectura de software, estan ben lluny de ser aleatòries i comparteixen algunes propietats interessants (vegeu l'article d'Albert i Barabási [1], el de Dorogovtsev i Mendes [45] i el de Newman [78]).

Les propietats efecte petit món, distribució scale-free i modularitat jeràrquica constitueixen la base de la comprensió de les xarxes reals. Una xarxa món petit és una xarxa amb una distància mitjana petita (o diàmetre petit), de l'ordre del

logaritme del nombre de vèrtexs. La distribució scale-free és una distribució de graus potencial, és a dir, amb un alt grau d'heterogeneïtat en la connectivitat dels vèrtexs. A més a més, algunes xarxes tenen una organització a gran escala caracteritzada per una modularitat jeràrquica. Com es podia esperar, alguns investigadors han estudiat com es relacionen aquestes propietats. Per exemple, la relació entre l'organització a gran escala (és a dir, modularitat jeràrquica i scale-free) i la densitat local ha estat estudiada per Vázquez *et al.* [95]. Cohen i Havlin [29] han demostrat que els efectes petit món i scale-free no són independents.

Song *et al.* [89] han obert una nova perspectiva amb l'estudi de l'autosimilitud d'algunes topologies i han mostrat que, en algunes xarxes complexes no homogènies, es pot calcular una mesura de fractalitat amb una adaptació per a grafs del mètode clàssic del *box counting*.

Molts investigadors han estudiat xarxes petit món, des que van ser introduïdes per Watts i Strogatz [97], i han descobert l'estructura petit món de xarxes reals específiques o han proposat models matemàtics per a les xarxes petit món. Newman [76] ha fet una anàlisi detallada d'aquestes xarxes. Els models usuals es basen en l'existència d'una estructura subjacent amb algunes arestes extra, afegides segons un cert procés d'augmentació. Comellas *et al.* [40] donen una manera de construir xarxes món petit deterministes. Des d'un punt de vista algorímic, un graf petit món es pot veure com un graf en el qual es poden trobar molts camins geodèsics entre els nodes, sense que calgui un coneixement global del graf (vegeu l'article de Barrière *et al.* [17], el de Duchon *et al.* [46] i el de Kleinberg [66]).

D'altra banda, els conceptes de fractalitat i autosimilitud estan relacionats amb el concepte de dimensió, el qual no és fàcil de definir per a grafs. Kron [68] dóna una definició matemàtica de graf autosimilar. Pel que en sabem, no hi ha una definició estàndard de fractalitat per a grafs. A més a més, a part de la recerca en fractalitat en xarxes de trànsit, es troben molts pocs articles sobre fractalitat en xarxes. Cal esmentar el recent estudi de Goh *et al.* [57], on es relaciona la fractalitat en grafs amb un arbre generador anomenat *esquelet*.

Per estudiar una possible relació entre l'efecte petit món i la fractalitat, mentre cerquem com es pot comprendre millor la topologia fractal, basem el nostre estudi en la família de grafs Sierpinski. Aquests grafs, els quals es deriven del triangle Sierpinski (vegeu Stewart [90]), han estat estudiats des d'un punt de vista probabilístic. En particular, el problema de camins aleatoris en grafs Sierpinski ha estat estudiat extensament (vegeu les referències en l'article de Kron [68]). Aquí fem un enfocament combinatori.

En aquest capítol presentem les propietats bàsiques de tres famílies de grafs Sierpinski: el Sierpinski Gasket  $SG_n$ , el Sierpinski Carpet  $SC_n$  i el Sierpinski Tetra  $ST_n$ , on  $n \in \mathbb{N}^+$ . A més a més, construïm determinísticament tres famílies

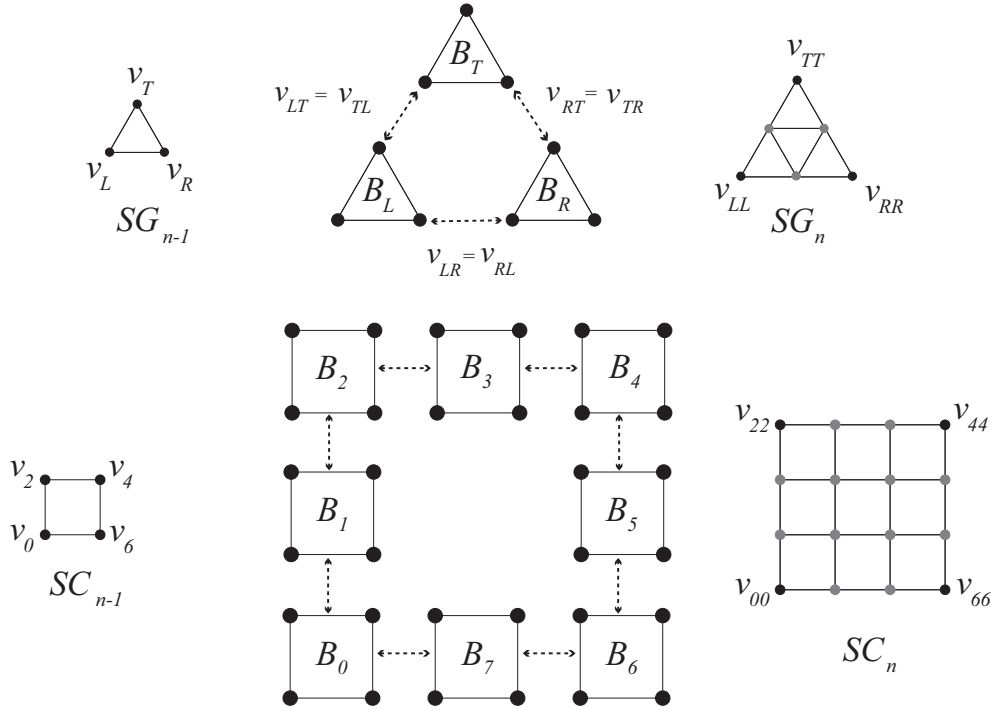


Figura 6.1: La construcció recursiva de  $SG_n$ , amb totes les identifikacions de nodes. La construcció recursiva de  $SC_n$ , amb totes les identifikacions de camins.

de grafs Sierpinski petit món:  $SWSG_{n,m}$ ,  $SWSC_{n,m}$  i  $SWST_{n,m}$ , per a  $n \geq 3$  i  $2 \leq m \leq n - 1$ .

En tots dos casos, el dels grafs Sierpinski i el dels grafs Sierpinski petit món, calculem el diàmetre, el clustering i la dimensió *box counting*. El clustering d'un node  $u$  es defineix com a

$$C_u = \frac{||\langle \Gamma(u) \rangle||}{\binom{|\Gamma(u)|}{2}},$$

on  $|\Gamma(u)|$  és el grau del node i  $||\langle \Gamma(u) \rangle||$  és la mida del subgraf induït pels seus veïns, i el clustering  $C_n$  d'un graf d'ordre  $n$  és la mitjana del clustering de tots els nodes.

Per al càlcul de la dimensió *box counting*, utilitzem el mètode del mateix nom, el qual està explicat en detall en l'article de Song *et al.* [89]. En tots els casos, els grafs Sierpinski petit món tenen la mateixa dimensió *box counting* que els corresponents grafs Sierpinski originals.

A més, demostrem que, en els grafs Sierpinski petit món, construïts afegint un nou vèrtex i algunes arestes als grafs Sierpinski, el seu diàmetre  $D$  és logarítmic en l'ordre  $N$ , cosa que justifica el seu nom.

Finalment, demostrem que la construcció dels grafs Sierpinski petit món a

partir dels grafs Sierpinski originals no implica un gran canvi en l'estructura d'aquests grafs, és a dir, que el nombre d'arestes afegides és petit respecte al nombre d'arestes dels grafs originals, com ho és el canvi en el clustering.

## 6.2 Grafs Sierpinski

En aquesta secció presentem les propietats bàsiques dels grafs Sierpinski. Aquesta família de grafs ve del Sierpinski Gasket, el ben conegut objecte fractal introduït per Sierpinski el 1915, com explica Stewart [90]. Aquesta família de grafs inclou el Sierpinski Gasket (figura 6.2), el Sierpinski Carpet (figura 6.4) i el Sierpinski Tetra (figura 6.6). Tots aquests grafs poden considerar-se induïts per la frontera del seu objecte fractal original. El nostre estudi es basa en les seves propietats com a models per a xarxes.

Els grafs Sierpinski es construeixen recursivament, a partir d'un bloc bàsic. En el cas del *Sierpinski Gasket*, comencem amb un triangle,  $SG_1 = K_3$  amb nodes denotats per  $v_T$ ,  $v_L$  i  $v_R$  ( $T$ ,  $L$  i  $R$  corresponen a “dalt”, “esquerra” i “dreta”, segons es mostra en la figura 6.1). El graf  $SG_2$  s'obté a partir de tres còpies de  $SG_1$ , denotades per  $B_T$ ,  $B_L$  i  $B_R$ , que identifiquen tres parells de nodes que denotem per  $v_{LT} \equiv v_{TL}$ ,  $v_{RT} \equiv v_{TR}$  i  $v_{LR} \equiv v_{RL}$ . En la representació plana de  $SG_2$  podem distingir tres nodes, els vèrtexs del triangle exterior, denotats per  $v_{TT}$ ,  $v_{LL}$  i  $v_{RR}$ . Anàlogament, per a  $n \geq 2$ , el graf  $SG_n$  es construeix a partir de tres còpies de  $SG_{n-1}$ , que identifiquen tres parells de nodes distingits, denotats per  $v_{LTT\dots T} \equiv v_{TLL\dots L}$ ,  $v_{RTT\dots T} \equiv v_{TRR\dots R}$  i  $v_{LRR\dots R} \equiv v_{RLL\dots L}$ . De nou,  $SG_n$  té una representació plana i tres nodes distingits en el triangle exterior,  $v_{TT\dots T}$ ,  $v_{LL\dots L}$  i  $v_{RR\dots R}$ .

Fem construccions recursives similars per al Sierpinski Carpet i el Sierpinski Tetra. En el cas del *Sierpinski Carpet*, el bloc bàsic és un quadrat.  $SC_n$  ve de 8 còpies de  $SC_{n-1}$ , unides segons una malla  $3 \times 3$  sense element central. Els blocs veïns comparteixen un camí.  $SC_n$  té una representació plana amb quatre nodes distingits en els vèrtexs del quadrat exterior. Per al *Sierpinski Tetra*, el bloc bàsic és un tetraedre i, per tant, ens cal una representació tridimensional.  $ST_n$  ve de quatre còpies de  $ST_{n-1}$ , en aquest cas unides per quatre nodes, de manera anàloga a la construcció de  $SG_n$ . Els quatre nodes distingits són els nodes que hi ha en els vèrtexs del tetraedre en  $\mathbb{R}^3$ , en el qual el graf està inscrit.

Vegeu la figura 6.1 per a una representació gràfica de la construcció del Sierpinski Gasket i el Sierpinski Carpet, i les figures 6.2, 6.4, i 6.6 per a les tres famílies de grafs en els casos  $n = 1, 2, 3, 4$ .

A continuació estudiem les propietats bàsiques de totes tres famílies.

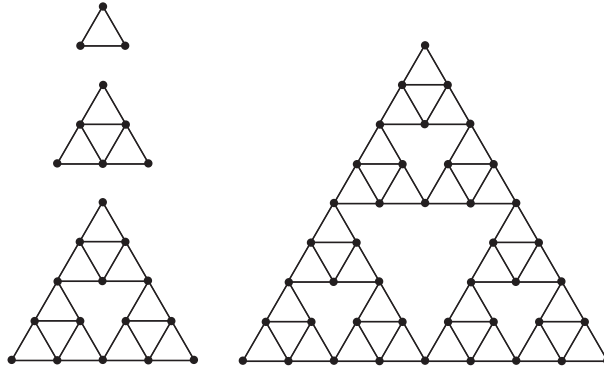


Figura 6.2:  $SG_1$ ,  $SG_2$ ,  $SG_3$  i  $SG_4$ .

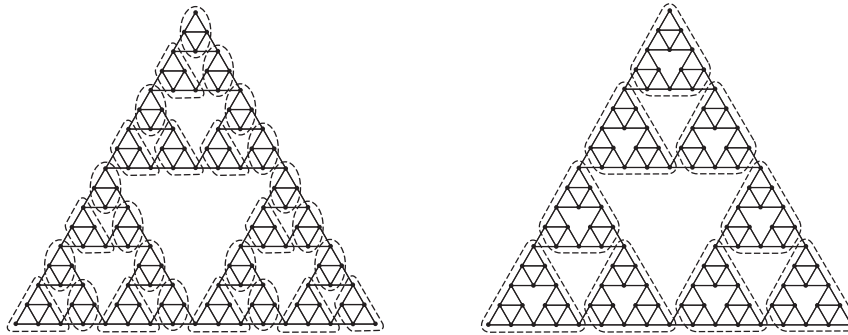


Figura 6.3: Caixes en  $SG_5$  amb  $\ell_B = 3$  (diàmetre=2) i  $\ell_B = 5$  (diàmetre=4).

### 6.2.1 Sierpinski Gasket

**Proposició 6.2.1.** *El Sierpinski Gasket,  $SG_n$ , satisfà les propietats següents:*

1. *L'ordre i la mida de  $SG_n$  són  $|V_n| = \frac{3^n+3}{2}$  i  $|E_n| = 3^n$ .*
2. *El diàmetre de  $SG_n$  és  $D_n = 2^{n-1}$ .*
3. *El clustering de  $SG_n$  és  $C_n = \frac{4 \cdot 3^{n-2} + 5}{3^{n+3}} \sim \frac{4}{9}$ .*

**Demostració.** Siguin  $a_n$  i  $b_n$ , respectivament,  $|V_n|$  i  $|E_n|$ . Per construcció de  $SG_n$ , per a  $n \geq 2$ ,  $a_n = 3a_{n-1} - 3$  i  $b_n = 3b_{n-1}$ . A més,  $a_1 = 3$  i  $b_1 = 3$ . Resolent les equacions de recurrència obtenim  $a_n = \frac{3^n+3}{2}$  i  $b_n = 3^n$ .

A partir de la definició recursiva tenim que  $D_n = 2D_{n-1}$ . Com que  $D_1 = 1$ , el diàmetre és  $D_n = 2^{n-1}$ . Observem que, de fet,  $SG_n$  és 3-antipodal, és a dir, té tres nodes a distància mútua el valor del diàmetre, que són els vèrtexs del triangle exterior.

Respecte al punt 3 de la proposició, els tres nodes en els vèrtexs del triangle exterior tenen grau 2 i clustering 1. Per a  $n \geq 2$ , tots els altres nodes tenen grau 4 i el clustering és  $\frac{1}{2}$  o  $\frac{1}{3}$ . En  $SG_n$ , siguin  $x_n$  el nombre de nodes amb clustering  $\frac{1}{2}$  i  $y_n$  el nombre de nodes amb clustering  $\frac{1}{3}$ . La construcció recursiva de  $SG_n$  ens permet trobar les equacions de recurrència següents:

$$\begin{aligned}x_n &= 3x_{n-1}, & x_2 &= 3 \\y_n &= 3y_{n-1} + 3, & y_2 &= 0,\end{aligned}$$

La solució de les quals és  $x_n = 3^{n-1}$  i  $y_n = \frac{3^{n-1}-3}{2}$ . Això ens permet calcular el valor del clustering:

$$C_n = \frac{3 + \frac{1}{3} \frac{3^{n-1}-3}{2} + \frac{1}{2} 3^{n-1}}{\frac{3^n+3}{2}} = \frac{4 \cdot 3^{n-2} + 5}{3^n + 3},$$

el límit del qual, per a  $n \rightarrow \infty$ , és  $\frac{4}{9}$ .  $\square$

**Proposició 6.2.2.** *La dimensió box counting de  $SG_n$  és*

$$d_B = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.585.$$

**Demostració.** Segons el mètode *box counting*, la dimensió *box counting*  $d_B$  ve donada per  $N_B \sim K \ell_B^{-d_B}$ , on  $N_B$  és el nombre mínim de caixes disjundes de diàmetre  $\ell_B - 1$  necessàries per recobrir el graf.

El graf  $SG_n$  té  $3^{n-m}$  subgrafs isomorfs a  $SG_m$ , per a  $m = n-1, n-2, \dots, 1$ . Cada un d'aquests subgrafs té 3 nodes a distància mútua el seu diàmetre  $D_m = 2^{m-1}$ , que s'identifiquen per parelles (exceptuant els tres vèrtexs del triangle exterior de  $SG_n$ ) en la construcció d'aquest graf. Per tant, el nombre total de nodes a distància mútua més gran o igual que  $D_m$  és:  $\frac{3^{n-m+1}-3}{2} + 3 = \frac{3^{n-m+1}+3}{2}$ . Si recobrim el graf amb caixes de diàmetre més petit que  $D_m$ , cada caixa pot contenir com a màxim un d'aquests nodes. Per tant, el nombre mínim de caixes de diàmetre  $D_m - 1$  és  $N_B \geq \frac{3^{n-m+1}+3}{2}$ .

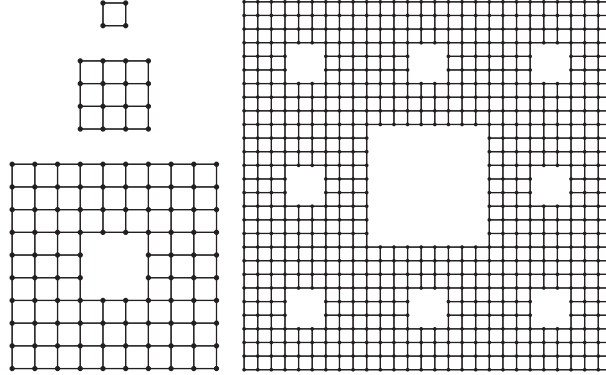
Substituint els valors anteriors a la fórmula  $N_B \sim K \ell_B^{-d_B}$ , on  $K$  és una constant que depèn del graf i  $\ell_B = D_m = 2^{m-1}$ , obtenim que

$$\begin{aligned}d_B &\sim \frac{\ln K - \ln N_B}{\ln \ell_B} \leq \frac{\ln K - [\ln(3^{n-m+1} + 3) - \ln 2]}{(m-1) \ln 2} \\ &\sim \frac{\ln K - (n-m) \ln 3}{m \ln 2} \sim \frac{\ln 3}{\ln 2},\end{aligned}$$

per a  $m$  prou gran i on el valor de  $K$  en aquest graf és  $3^n$ .

Per veure que aquest darrer valor s'assoleix tornem a considerar els  $3^{n-m}$  subgrafs isomorfs a  $SG_m$  continguts a  $SG_n$ . Com que cada un dels nodes d'unió



Figura 6.4:  $SC_1$ ,  $SC_2$ ,  $SC_3$  i  $SC_4$ .

(extrems de diàmetre) pot ser assignat a qualsevol de les dues còpies a les quals pertany, ara el nombre de caixes compleix  $N_B \leq 3^{n-m}$ , per a  $l_B = D_m + 1 = 2^{m-1} + 1$ . Com a exemple, vegeu la figura 6.3, per a  $n = 5$  i  $m = 2, 3$ . Aleshores tenim que

$$\begin{aligned} d_B &\sim \frac{\ln K - \ln N_B}{\ln \ell_B} \geq \frac{\ln K - \ln 3^{n-m}}{\ln(2^{m-1} + 1)} \\ &\sim \frac{\ln K - n \ln 3 + m \ln 3}{m \ln 2} \sim \frac{\ln 3}{\ln 2}, \end{aligned}$$

amb el mateix valor de  $K$  que abans. Això demostra el resultat.

□

## 6.2.2 Sierpinski Carpet

**Proposició 6.2.3.** *El Sierpinski Carpet,  $SC_n$ , satisfà les propietats següents:*

1. *L'ordre i la mida de  $SC_n$  són*

$$|V_n| = \frac{11}{70}8^n + \frac{8}{5}3^{n-1} + \frac{8}{7} \quad i \quad |E_n| = \frac{3}{10}8^n + \frac{8}{5}3^{n-1}.$$

2. *El diàmetre de  $SC_n$  és  $D_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ .*

3. *Tots els nodes en  $SC_n$  tenen clustering 0.*

**Demostració.** Siguin  $a_n$  i  $b_n$ , respectivament,  $|V_n|$  i  $|E_n|$  i sigui  $\ell_n$  la longitud del costat del quadrat exterior de  $SC_n$ .

Per construcció de  $SC_n$ , es compleixen les equacions de recurrència següents:

$$\begin{aligned} \ell_n &= 3 \ell_{n-1}, & \ell_1 &= 1 \\ a_n &= 8(a_{n-1} - \ell_{n-1} - 1), & a_1 &= 4 \\ b_n &= 8(b_{n-1} - \ell_{n-1}), & b_1 &= 4. \end{aligned}$$

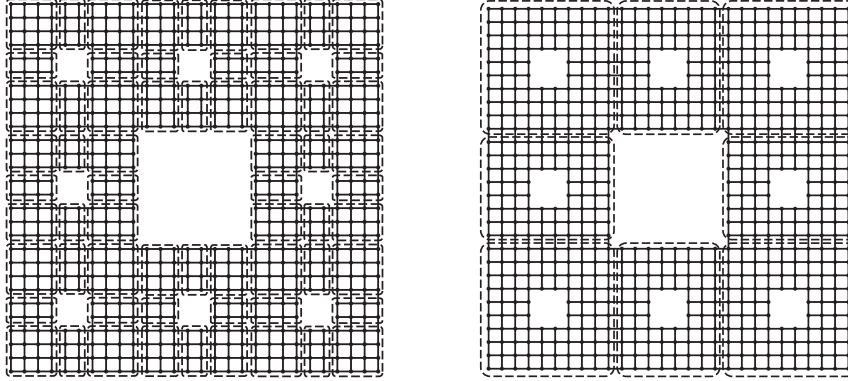


Figura 6.5: Caixes en  $SC_4$  amb  $\ell_B = 7$  (diàmetre= 6) i  $\ell_B = 19$  (diàmetre= 18).

Resolent aquestes equacions obtenim  $\ell_n = 3^{n-1}$ ,  $a_n = \frac{11}{70}8^n + \frac{8}{5}3^{n-1} + \frac{8}{7}$  i  $b_n = \frac{3}{10}8^n + \frac{8}{5}3^{n-1}$ .

Ara el diàmetre  $D_n$  és el doble de la longitud del costat del quadrat exterior, és a dir,  $D_n = 2\ell_n = 2 \cdot 3^{n-1}$ .

Com que  $SC_n$  no té triangles, el clustering és 0.  $\square$

**Proposició 6.2.4.** *La dimensió box counting de  $SC_n$  és*

$$d_B = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.8928.$$

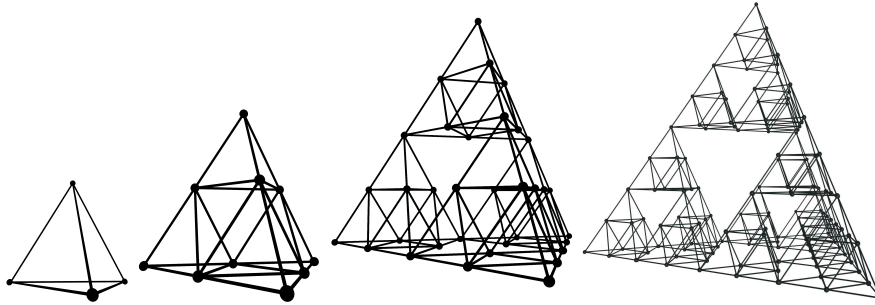
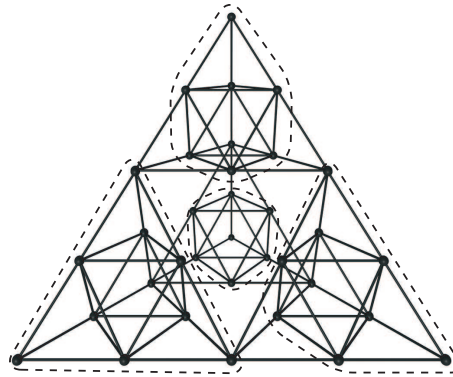
**Demostració.** Anàlogament a la demostració de la proposició 6.2.2, ens basem ara en el fet que  $SC_n$  conté  $8^{n-m}$  subgrafs isomorfs a  $SC_m$ , per a  $m = n-1, n-2, \dots, 1$ , amb alguns camins d'unió entre ells. Això implica l'existència d'un recobriment del graf amb un nombre de caixes  $N_B \leq 8^{n-r}$  i  $\ell_B = D_m + 1 = 2 \cdot 3^{m-1} + 1$  (vegeu la figura 6.5 amb  $n = 4$  i  $m = 2, 3$ ). El valor obtingut de la dimensió *box counting* és  $d_B \approx 1.8928$ .  $\square$

### 6.2.3 Sierpinski Tetra

**Proposició 6.2.5.** *El Sierpinski Tetra,  $ST_n$ , satisfà les propietats següents:*

1. *L'ordre i la mida de  $ST_n$  són  $|V_n| = 2(4^{n-1} + 1)$  i  $|E_n| = 6 \cdot 4^{n-1}$ .*
2. *El diàmetre de  $ST_n$  és  $D_n = 2^{n-1}$ .*
3. *El clustering de  $ST_n$  és  $C_n = \frac{5 \cdot 4^{n-1} + 16}{10(4^{n-1} + 1)} \sim \frac{1}{2}$ .*

**Demostració.** Siguin  $a_n$  i  $b_n$ , respectivament,  $|V_n|$  i  $|E_n|$ . Per construcció de  $ST_n$ , per a  $n \geq 2$ ,  $a_n = 4a_{n-1} - 6$  i  $b_n = 4b_{n-1}$ . A més a més,  $a_1 = 4$  i  $b_1 = 6$ . Resolent les equacions obtenim  $a_n = 2(4^{n-1} + 1)$  i  $b_n = 6 \cdot 4^{n-1}$ .

Figura 6.6:  $ST_1$ ,  $ST_2$ ,  $ST_3$  i  $ST_4$ .Figura 6.7: Caixes en  $ST_3$  amb  $\ell_B = 3$  (diàmetre=2).

Com hem mostrat per al Sierpinski Gasket,  $D_n = 2D_{n-1}$ . Com que  $D_1 = 1$ , tenim  $D_n = 2^{n-1}$ .

Els únics nodes de grau 3 són els 4 vèrtexs del tetraedre exterior. Aquests quatre nodes tenen clustering 1. Per a  $n \geq 2$ , el clustering és  $\frac{8}{15}$  o  $\frac{6}{15}$ . En  $ST_n$  sigui  $x_n$  el nombre de nodes en  $ST_n$  amb clustering  $\frac{8}{15}$  i sigui  $y_n$  el nombre de nodes amb clustering  $\frac{6}{15}$ . La construcció recursiva de  $ST_n$  ens permet trobar les següents equacions de recurrència.

$$\begin{aligned} x_n &= 4x_{n-1}, & x_2 &= 6 \\ y_n &= 4y_{n-1} + 6, & y_2 &= 0. \end{aligned}$$

La solució d'aquest sistema és  $x_n = 6 \cdot 4^{n-2}$  i  $y_n = 2(4^{n-2} - 1)$ . Això implica que el clustering és

$$C_n = \frac{4 + \frac{6}{15} \cdot 2(4^{n-2} - 1) + \frac{8}{15} \cdot 6 \cdot 4^{n-2}}{2(4^{n-1} + 1)} = \frac{5 \cdot 4^{n-1} + 16}{10(4^{n-1} + 1)},$$

el límit del qual, per a  $n \rightarrow \infty$ , és  $\frac{1}{2}$ .  $\square$

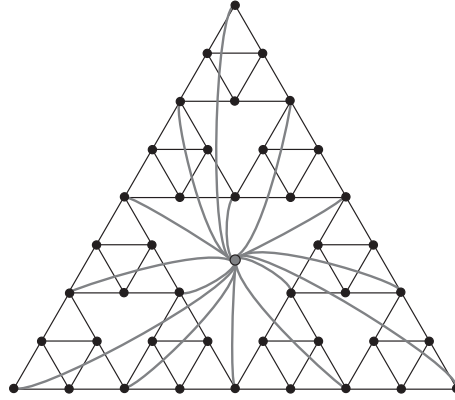


Figura 6.8:  $SWSG_{4,2}$ .

**Proposició 6.2.6.** *La dimensió box counting  $ST_n$  és  $d_B = 2$ .*

**Demostració.** Raonant com en la demostració de la proposició 6.2.2, i tenint en compte que  $ST_n$  conté  $4^{n-m}$  subgrafs isomorfs a  $ST_m$  amb diàmetre  $D_m = 2^{m-1}$ , per a  $m = n - 1, n - 2, \dots, 1$ , amb alguns nodes d'unió entre ells (vegeu la figura 6.7 amb  $n = 3$  i  $m = 2$ ). El valor obtingut de la dimensió *box counting* és  $d_B = 2$ .  $\square$

## 6.3 Grafs Sierpinski petit món

En aquesta secció, construïm els grafs Sierpinski món petit. El nostre objectiu és reduir prou el diàmetre per assolir un diàmetre logarítmic (en l'ordre) mantenint l'estructura original del graf. Per a aquestes tres famílies de grafs Sierpinski, proposem unes construccions similars en les quals hem afegit un node unit a un cert conjunt de nodes del graf original.

Com mostrarem a la secció 6.4, el nombre d'arestes afegides i la variació de clustering són raonablement petits.

### 6.3.1 Sierpinski Gasket petit món

Com ja hem dit, per a  $n \geq 3$  i  $m = 2, \dots, n - 1$ , es pot veure  $SG_n$  com a  $3^{n-m}$  còpies de  $SG_m$  fent algunes identifications de nodes. El Sierpinski Gasket petit món,  $SWSG_{n,m}$ , és el graf obtingut unint un nou node a cada vèrtex del triangle extern de cada còpia de  $SG_m$  (vegeu la figura 6.8). El nombre de noves arestes és exactament el nombre de vèrtexs de  $SG_{n-m+1}$ .

El diàmetre d'aquest nou graf depèn del valor de  $m$ . Més endavant mostrarem que, per a alguns valors de  $m$ ,  $D(SW SG_{n,m}) = O(\log |V(SW SG_{n,m})|)$ . Aleshores, aquesta construcció ens dóna un graf fractal petit món.

A continuació donem les propietats de  $SW SG$ :

**Proposició 6.3.1.** *El Sierpinski Gasket petit món,  $SW SG_{n,m}$ , satisfà les propietats següents (vegeu la figura 6.8):*

1. *L'ordre i la mida de  $SW SG_{n,m}$  són:*

$$|V_{n,m}| = \frac{3^n+5}{2} \quad i \quad |E_{n,m}| = 3^n + \frac{3^{n-m+1}+3}{2}.$$

2. *El diàmetre de  $SW SG_{n,m}$  és  $D_{n,m} = 2^{m-1} + 2$ .*

3. *El clustering de  $SW SG_{n,m}$  és  $C_{n,m} = \frac{20 \cdot 3^{n-2} - 2 \cdot 3^{n-m} + 7}{5(3^n+5)} \sim \frac{4}{9}$ .*

**Demostració.** L'ordre de  $SW SG_{n,m}$  és una unitat més que l'ordre de  $SG_n$ . La mida de  $SW SG_{n,m}$  és la mida de  $SG_n$  més el nombre d'arestes afegides. Com que el nombre d'arestes afegides és l'ordre de  $SG_{n-m+1}$ , d'acord amb la proposició 6.2.1, tenim

$$|V_{n,m}| = \frac{3^n+3}{2} + 1 = \frac{3^n+5}{2}, \quad |E_{n,m}| = 3^n + \frac{3^{n-m+1}+3}{2}.$$

Denotem per  $D(SG_k)$  el diàmetre de  $SG_k$  i per  $D_{n,m}$  el diàmetre de  $SW SG_{n,m}$ . Per calcular  $D_{n,m}$  només ens cal observar que, en  $SG_m$ , cada node és com a màxim a distància  $\frac{D(SG_m)}{2}$  del conjunt de vèrtexs del triangle exterior. Una fita superior de  $D_{n,m}$  és  $D(SG_m) + 2 = 2^{m-1} + 2$ . Es pot comprovar fàcilment que també és una fita inferior. Aleshores,  $D_{n,m} = 2^{m-1} + 2$ .

El nou node té clustering 0. Els nodes que estan en els vèrtexs del triangle exterior són els únics nodes de grau 3. Aquests tres nodes tenen clustering  $\frac{1}{3}$ . La resta dels nodes tenen grau 4 o 5.

Per als nodes de grau 4, el clustering és  $\frac{1}{2}$  o  $\frac{1}{3}$ . Siguin  $x_n$  el nombre de nodes de grau 4 amb clustering  $\frac{1}{2}$  i  $y_n$  el nombre de nodes de grau 4 amb clustering  $\frac{1}{3}$ .

Per construcció de  $SW SG_{n,m}$  i per la proposició 6.2.1 tenim

$$\begin{aligned} x_n &= 3^{n-1} \quad i \\ y_n &= \frac{3^{n-1}-3}{2} - \frac{3^{n-m+1}-3}{2} = \frac{3^{n-1}-3^{n-m+1}}{2}. \end{aligned}$$

Els altres  $\frac{3^{n-m+1}-3}{2}$  nodes tenen grau 5 i clustering  $\frac{1}{5}$ .

Això ens dóna el valor del clustering

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{\frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 3^{n-1} + \frac{1}{3} \cdot \frac{3^{n-1}-3^{n-m+1}}{2} + \frac{1}{5} \cdot \frac{3^{n-m+1}-3}{2}}{\frac{3^n+5}{2}} = \\ &= \frac{20 \cdot 3^{n-2} - 2 \cdot 3^{n-m} + 7}{5(3^n+5)} \sim \frac{4}{9}. \end{aligned}$$

□

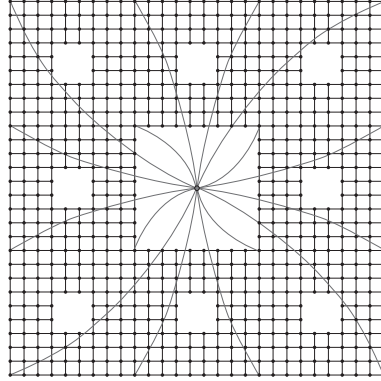


Figura 6.9:  $SWSC_{4,3}$ .

**Corollari 6.3.2.** Denotem per  $N$  i  $D$  l'ordre i el diàmetre de  $SWSG_{n,m}$ , respectivament. Si  $m \leq \log_2 n$ , aleshores  $D = O(\log N)$ .

**Demostració.** Segons la proposició 6.3.1,  $D = 2^{m-1} + 2$  i  $N = \frac{3^n + 5}{2}$ . Si  $m \leq \log_2 n$ , aleshores  $D \leq \frac{n}{2} + 2 = O(\log N)$ .  $\square$

**Proposició 6.3.3.** La dimensió box counting de  $SWSG_{n,m}$  és igual que la dimensió box counting de  $SG_n$ , és a dir,  $d_B = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.585$ .

**Demostració.** Podem recobrir  $SWSG_{n,m}$  amb caixes de mida  $\ell_B$  de la mateixa manera que hem recobert  $SG_n$  (vegeu la proposició 6.2.2 i la figura 6.3). Només ens cal afegir el nou node a una de les caixes que no estan del tot plenes. Obtenim exactament el mateix nombre de caixes per a cada valor de  $\ell_B$ . Per tant, la dimensió box counting de  $SWSG_{n,m}$  i  $SG_n$  són iguals.  $\square$

### 6.3.2 Sierpinski Carpet petit món

Com s'ha esmentat, per a  $n \geq 3$  i  $m = 2, \dots, n-1$ , es pot veure  $SC_n$  com a  $8^{n-m}$  còpies de  $SC_m$  fent algunes identifications de camins. El Sierpinski Carpet petit món,  $SWSC_{n,m}$ , és el graf obtingut unint un nou node als nodes que es troben en els vèrtexs del quadrat exterior de cada còpia de  $SC_m$  (vegeu la figura 6.9). El nombre de noves arestes és exactament el nombre de nodes de  $SC_{n-m+1}$ .

El diàmetre d'aquest nou graf depèn del valor de  $m$ . Demostrarem que, per a alguns valors de  $m$ ,  $D(SWSC_{n,m}) \approx \ln |V(SWSC_{n,m})|$ . Aleshores, aquesta construcció és un graf fractal petit món.

Aquesta definició és anàloga a la definició de  $SWSG_{n,m}$  (vegeu la secció 6.3.1). A continuació donem les propietats de  $SWSC$ :

**Proposició 6.3.4.** *El Sierpinski Carpet petit món,  $SWSC_{n,m}$ , satisfà les propietats següents:*

1. *L'ordre i la mida de  $SWSC_{n,m}$  són*

$$|V_{n,m}| = \frac{11}{70}8^n + \frac{8}{5}3^{n-1} + \frac{15}{7} \quad i \quad |E_{n,m}| = \frac{3}{10}8^n + \frac{8}{5}3^{n-1} + \frac{11}{70}8^{n-m+1} + \frac{8}{5}3^{n-m} + \frac{8}{7}.$$

2. *El diàmetre de  $SWSC_{n,m}$  és  $D_{n,m} = 5 \cdot 3^{m-2} + 1$ .*

3. *Tots els nodes de  $SWSC_{n,m}$  tenen clustering 0.*

**Demostració.** L'ordre de  $SWSC_{n,m}$  és l'ordre de  $SC_n$  més una unitat. La mida de  $SWSC_{n,m}$  és la mida de  $SC_n$  més el nombre d'arestes afegides. Com que aquest nombre és l'ordre de  $SC_{n-m+1}$ , segons la proposició 6.2.3 tenim

$$|V_{n,m}| = \frac{11}{70}8^n + \frac{8}{5}3^{n-1} + \frac{8}{7} + 1 = \frac{11}{70}8^n + \frac{8}{5}3^{n-1} + \frac{15}{7}$$

i

$$|E_{n,m}| = \frac{3}{10}8^n + \frac{8}{5}3^{n-1} + \frac{11}{70}8^{n-m+1} + \frac{8}{5}3^{n-m} + \frac{8}{7}.$$

Denotem per  $\ell_k = 3^{k-1}$  la longitud del costat del quadrat exterior de  $SC_k$  (vegeu la demostració de la proposició 6.2.3) i per  $D_{n,m}$  el diàmetre de  $SWSC_{n,m}$ . Per calcular  $D_{n,m}$  només ens cal observar que, en  $SC_m$ , cada node és a distància com a màxim  $2\ell_{m-1} + \frac{\ell_{m-1}-1}{2} = \frac{5\ell_{m-1}-1}{2}$  per al conjunt de nodes corresponents als vèrtexs del quadrat exterior. Una fita superior de  $D_{n,m}$  és  $5\ell_{m-1} - 1 + 2 = 5\ell_{m-1} + 1 = 5 \cdot 3^{m-2} + 1$ . Es pot veure fàcilment que també és una fita inferior. Aleshores,  $D_{n,m} = 5 \cdot 3^{m-2} + 1$ .

Com que  $SWSC_{n,m}$  no té triangles, el clustering és 0.  $\square$

**Corol·lari 6.3.5.** *Denotem per  $N$  i  $D$  l'ordre i el diàmetre de  $SWSC_{n,m}$ , respectivament. Si  $m \leq \log_3 n$ , aleshores  $D = O(\log N)$ .*

**Demostració.** De la proposició 6.3.4, tenim que  $D = 5 \cdot 3^{m-2} + 1$ . Si  $m \leq \log_3 n$ , aleshores  $D \leq \frac{5}{9}n + 1 = O(\log N)$ .  $\square$

**Proposició 6.3.6.** *La dimensió box counting de  $SWSC_{n,m}$  és igual a la dimensió box counting del  $SC$ , és a dir,  $d_B = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.892$ .*

**Demostració.** La demostració és anàloga a la de la proposició 6.3.3 (vegeu la figura 6.5).  $\square$

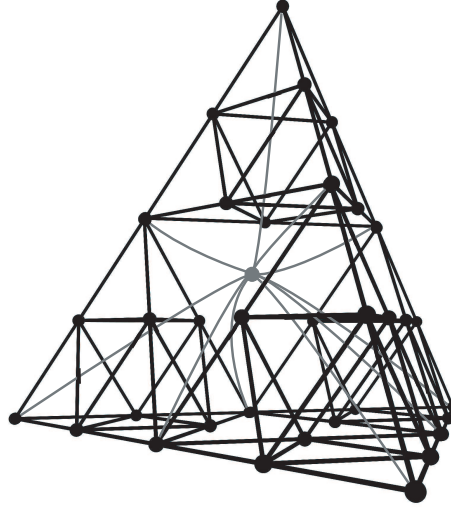


Figura 6.10:  $SWST_{3,2}$ .

### 6.3.3 Sierpinski Tetra petit món

Com hem dit anteriorment, per a  $n \geq 3$  i  $m = 2, \dots, n-1$ ,  $ST_n$  pot ser vist com  $4^{n-m}$  còpies de  $ST_m$  fent algunes identifications de nodes. El Sierpinski Tetra petit món,  $SWST_{n,m}$ , és el graf obtingut unint un nou node a tots els nodes corresponents als vèrtexs del tetraedre exterior de cada còpia de  $ST_m$  (vegeu la figura 6.10). El nombre d'arestes noves és exactament el nombre de nodes corresponents als vèrtexs de  $ST_{n-m+1}$ .

El diàmetre d'aquest nou graf depèn del valor de  $m$ . Més endavant demostrem que, per a alguns valors de  $m$ ,  $D(SWST_{n,m}) \approx \ln |V(SWST_{n,m})|$ . Aleshores, aquesta construcció ens dona un graf fractal petit món.

A continuació donem les propietats de  $SWST$ :

**Proposició 6.3.7.** *El Sierpinski Tetra petit món,  $SWST_{n,m}$ , satisfà les propietats següents:*

1. *L'ordre i la mida de  $SWST_{n,m}$  són*

$$|V_{n,m}| = 2 \cdot 4^{n-1} + 3 \quad i \quad |E_{n,m}| = 6 \cdot 4^{n-1} + 2 \cdot 4^{n-m} + 2.$$

2. *El diàmetre de  $SWST_{n,m}$  és  $D_{n,m} = 2^{m-1} + 2$ .*

3. *El clustering de  $SWST_{n,m}$  és  $C_{n,m} = \frac{35 \cdot 4^{n-1} - 8 \cdot 4^{n-m} - 50}{35(2 \cdot 4^{n-1} + 3)} \sim \frac{1}{2}$ .*



**Demostració.** L'ordre de  $SWST_{n,m}$  és una unitat més que l'ordre de  $ST_n$ . La mida de  $SWST_{n,m}$  és la mida de  $ST_n$  més el nombre d'arestes afegides. Com que aquest nombre és l'ordre de  $ST_{n-m+1}$ , d'acord amb la proposició 6.2.5 tenim

$$|V_{n,m}| = 2(4^{n-1} + 1) + 1 = 2 \cdot 4^{n-1} + 3, \quad |E_{n,m}| = 6 \cdot 4^{n-1} + 2 \cdot 4^{n-m} + 2.$$

Denotem per  $D(ST_k)$  el diàmetre de  $ST_k$  i per  $D_{n,m}$  el diàmetre de  $SWST_{n,m}$ . Per calcular  $D_{n,m}$  només ens cal observar que, en  $ST_m$ , cada node és a distància com a màxim  $\frac{D(ST_m)}{2}$  per al conjunt de vèrtexs del tetraedre exterior. Una fita superior de  $D_{n,m}$  és  $D(ST_m) + 2 = 2^{m-1} + 2$ . Es pot veure fàcilment que també és una fita inferior. Aleshores,  $D_{n,m} = 2^{m-1} + 2$ .

El nou node té clustering 0. Els nodes corresponents als vèrtexs del tetraedre exterior són els únics nodes amb grau 4. Aquests (quatre) nodes tenen clustering  $\frac{1}{2}$ . La resta de nodes tenen grau 6 o 7.

Per als nodes de grau 6, el clustering és  $\frac{8}{15}$  o  $\frac{6}{15}$ . Siguin  $x_n$  el nombre de nodes de grau 6 amb clustering  $\frac{8}{15}$  i  $y_n$  el nombre de nodes de grau 6 amb clustering  $\frac{6}{15}$ .

Per construcció de  $SWST_{n,m}$ , i segons la proposició 6.2.5, tenim:

$$\begin{aligned} x_n &= 6 \cdot 4^{n-2} \quad \text{i} \\ y_n &= 2(4^{n-2} - 1) - 2(4^{n-m} - 1) = 2(4^{n-2} - 4^{n-m}). \end{aligned}$$

Els restants  $2(4^{n-m} - 1)$  nodes tenen grau 7 i clustering  $\frac{6}{21}$ .

Això ens dóna el valor per al clustering:

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{\frac{1}{2}4 + \frac{8}{15}6 \cdot 4^{n-2} + \frac{6}{15}2(4^{n-2} - 4^{n-m}) + \frac{6}{21}2(4^{n-m} - 1)}{2 \cdot 4^{n-1} + 3} = \\ &= \frac{35 \cdot 4^{n-1} - 8 \cdot 4^{n-m} - 50}{35(2 \cdot 4^{n-1} + 3)} \sim \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

□

**Corol·lari 6.3.8.** Denotem per  $N$  i  $D$  l'ordre i el diàmetre de  $SWST_{n,m}$ , respectivament. Si  $m \leq \log_2 n$ , aleshores  $D = O(\log N)$ .

**Demostració.** D'acord amb la proposició 6.3.7, tenim que  $D = 2^{m-1} + 2$  i  $N = 2 \cdot 4^{n-1} + 3$ . Si  $m \leq \log_2 n$ , aleshores  $D \leq \frac{n}{2} + 2 = O(\log N)$ . □

**Proposició 6.3.9.** La dimensió box counting de  $SWST_{n,m}$  és igual a la dimensió box counting de  $ST_n$ , és a dir,  $d_B = 2$ .

**Demostració.** La demostració és anàloga a la de la proposició 6.3.3 (vegeu la figura 6.7). □

## 6.4 Grafs Sierpinski respecte a grafs Sierpinski petit món

A la secció anterior, hem proposat la construcció de grafs petit món per a tres famílies de grafs, el Sierpinski Gasket, el Sierpinski Carpet i el Sierpinski Tetra. Hem demostrat que aquestes tres famílies de grafs són fractals i tenen diàmetre logarítmic en l'ordre. Per recapitular, tenim els tres casos següents:

- El Sierpinski Gasket petit món,  $SWG_{n,m}$ , s'obté del Sierpinski Gasket,  $SG_n$ , afegint  $\frac{3^{n-m+1}+3}{2}$  arestes. La seva dimensió *box counting* és  $\frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.585$  i el seu diàmetre és  $O(\log N)$ , per a  $2 \leq m \leq \log_2 n$ .
- El Sierpinski Carpet petit món,  $SWSC_{n,m}$ , s'obté del Sierpinski Carpet,  $SC_n$ , afegint  $\frac{11}{70}8^{n-m+1} + \frac{8}{5}3^{n-m} + \frac{8}{7}$  arestes. La seva dimensió *box counting* és  $\frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.892$  i el seu diàmetre és  $O(\log N)$ , per a  $2 \leq m \leq \log_3 n$ .
- El Sierpinski Tetra petit món,  $SWST_{n,m}$ , s'obté del Sierpinski Tetra,  $ST_n$ , afegint  $2 \cdot 4^{n-m} + 2$  arestes. La seva dimensió *box counting* és 2 i el seu diàmetre és  $O(\log N)$ , per a  $2 \leq m \leq \log_2 n$ .

Com a mesura de com l'estructura subjacent es conserva en la construcció dels grafs Sierpinski petit món, podem avaluar el nombre d'arestes afegides i la variació de clustering. En aquest sentit, la nostra construcció és millor per a grans valors de  $m$ , entre els valors permesos pel diàmetre  $O(\log N)$ .

A continuació mostrem que el nombre d'arestes afegides i la variació de clustering són raonablement petits. Concretament, per a les tres famílies, els valors òptims de  $m$  satisfan que el nombre d'arestes afegides i la variació de clustering respecte al corresponent graf Sierpinski són  $O\left(\frac{N}{\log N}\right)$  i  $O\left(\frac{1}{\log N}\right)$ , respectivament, on  $N$  denota l'ordre del graf. Per simplicitat, restringim els nostres càlculs a valors específics de  $m$ .

**Corol·lari 6.4.1.** *Si  $m = \log_3 n$ , aleshores les variacions en la mida i en el clustering entre  $SG_n$  i  $SWG_{n,m}$  són  $O\left(\frac{N}{\log N}\right)$  i  $O\left(\frac{1}{\log N}\right)$ , respectivament, on  $N$  denota l'ordre de  $SG_n$ .*

**Demostració.** D'acord amb la proposició 6.2.1, l'ordre de  $SG_n$  és  $N = \frac{3^n+3}{2}$ . A més a més, la seva mida és  $E = 3^n$  i el seu clustering és  $C = \frac{4 \cdot 3^{n-2}+5}{3^{n+3}}$ .

D'acord amb la proposició 6.3.1, la mida de  $SWG_{n,m}$  és  $E' = 3^n + \frac{3^{n-m+1}+3}{2}$  i el seu clustering és  $C' = \frac{20 \cdot 3^{n-2} - 2 \cdot 3^{n-m} + 7}{5(3^n+5)}$ .

Fent uns càlculs fàcils tenim que

$$E' - E = \frac{3^{n-m+1}+3}{2},$$

$$\begin{aligned}
C - C' &= \frac{4 \cdot 3^{n-2} + 5}{3^n + 3} - \frac{20 \cdot 3^{n-2} - 2 \cdot 3^{n-m} + 7}{5(3^n + 5)} = \\
&= \frac{8 \cdot 3^{n-2} + 25}{(3^n + 3)(3^n + 5)} + \frac{2 \cdot 3^{n-m}}{5(3^n + 5)} - \frac{7}{5(3^n + 5)}.
\end{aligned}$$

Si  $m = \log_3 n$ , aleshores  $3^{n-m} = \frac{3^n}{n}$ , cosa que implica que el nombre d'arestes afegides és  $E' - E = O\left(\frac{N}{\log N}\right)$  i el decreixement del clustering és  $C - C' = O\left(\frac{1}{\log N}\right)$ .  $\square$

**Corol·lari 6.4.2.** *Si  $m = \log_3 n$ , aleshores la variació en la mida entre  $SC_n$  i  $SWSC_{n,m}$  és  $O\left(\frac{N}{\log N}\right)$ , on  $N$  denota l'ordre de  $SC_n$ .*

**Demostració.** D'acord amb la proposició 6.2.3, l'ordre de  $SC_n$  és  $N = \frac{11}{70}8^n + \frac{8}{5}3^{n-1} + \frac{8}{7}$  i la seva mida és  $E = \frac{3}{10}8^n + \frac{8}{5}3^{n-1}$ .

D'acord amb la proposició 6.3.4, la mida de  $SWSG_{n,m}$  és  $E' = \frac{3}{10}8^n + \frac{8}{5}3^{n-1} + \frac{11}{70}8^{n-m+1} + \frac{8}{5}3^{n-m} + \frac{8}{7}$ .

Fent uns càlculs fàcils tenim que

$$E' - E = \frac{11}{70}8^{n-m+1} + \frac{8}{5}3^{n-m} + \frac{8}{7}.$$

Si  $m = \log_3 n$ , aleshores  $3^{n-m} = \frac{3^n}{n}$  i  $8^{n-m} < \frac{8^n}{n}$ , cosa que implica que el nombre d'arestes afegides és  $E' - E = O\left(\frac{N}{\log N}\right)$ .  $\square$

En aquest cas, la discussió sobre el clustering no és necessària, ja que el seu valor és nul per als dos grafs  $SC_n$  i  $SWSC_{n,m}$ .

**Corol·lari 6.4.3.** *Si  $m = \log_4 n$ , aleshores les variacions en la mida i en el clustering entre  $ST_n$  i  $SWST_{n,m}$  són  $O\left(\frac{N}{\log N}\right)$  i  $O\left(\frac{1}{\log N}\right)$ , respectivament, on  $N$  denota l'ordre de  $ST_n$ .*

**Demostració.** D'acord amb la proposició 6.2.5, l'ordre de  $ST_n$  és  $N = 2(4^{n-1} + 1)$ . A més a més, la seva mida és  $E = 6 \cdot 4^{n-1}$  i el seu clustering és  $C = \frac{5 \cdot 4^{n-1} + 16}{10(4^{n-1} + 1)}$ .

D'acord amb la proposició 6.3.7, tenim que la mida de  $SWSG_{n,m}$  és  $E' = 6 \cdot 4^{n-1} + 2 \cdot 4^{n-m} + 2$  i el seu clustering és  $C' = \frac{35 \cdot 4^{n-1} - 8 \cdot 4^{n-m} - 50}{35(2 \cdot 4^{n-1} + 3)}$ .

Fent uns càlculs fàcils tenim que

$$\begin{aligned}
E' - E &= 2 \cdot 4^{n-m} + 2, \\
C - C' &= \frac{5 \cdot 4^{n-1} + 16}{10(4^{n-1} + 1)} - \frac{35 \cdot 4^{n-1} - 8 \cdot 4^{n-m} - 50}{35(2 \cdot 4^{n-1} + 3)} = \\
&= \frac{37 \cdot 4^{n-1} + 48}{10(4^{n-1} + 1)(2 \cdot 4^{n-1} + 3)} + \frac{8 \cdot 4^{n-m}}{35(2 \cdot 4^{n-1} + 3)} + \\
&+ \frac{10}{7(2 \cdot 4^{n-1} + 3)}.
\end{aligned}$$

Si  $m = \log_4 n$ , aleshores  $4^{n-m} = \frac{4^n}{n}$ , cosa que implica que el nombre d'arestes afegides és  $E' - E = O\left(\frac{N}{\log N}\right)$  i el decreixement del clustering és  $C - C' = O\left(\frac{1}{\log N}\right)$ .  $\square$

## 6.5 Conclusions

Hem presentat les propietats dels grafs Sierpinski, incloent-hi el clustering i la fractalitat. També hem proposat una construcció determinista dels grafs Sierpinski petit món i n'hem estudiat les propietats.

Hem aplicat tècniques combinatòries per mostrar que l'estructura dels grafs Sierpinski es conserva, incloent-hi la dimensió *box counting*, mentre es produeix l'efecte petit món.

En les nostres construccions petit món, el node afegit actua clarament com un *hub*. En xarxes de comunicacions caldria millorar això. Tanmateix, el nostre objectiu era mostrar que, el mètode del *box counting*, que ha estat adaptat per a grafs per Song *et al.* [89], funciona fins i tot en xarxes petit món. En aquest sentit, podem dir que hem trobat una família de grafs fractals petit món.

D'altra banda, pensem que la definició de fractalitat per a grafs s'hauria d'estandarditzar.

# Capítol 7

## Conclusions/Conclusions

### 7.1 Conclusions

Com a conclusions d'aquesta tesi presentem les nostres contribucions a cada tema i les publicacions que han originat. A més a més, enunciem les qüestions que queden obertes.

#### 7.1.1 Xarxes Manhattan multidimensionals

Contribucions [33, 34]

- Dues definicions rigoroses per al cas  $n$ -dimensional.
- $M_n$  és un graf bipartit i  $2^n$ -partit.
- Existeix un homomorfisme entre  $M_n$  i el digraf simètric de l'hipercub.
- $M_2$  és un digraf línia.
- $M_n$  és un digraf de Cayley.
- $M_2$  i  $M'_2$  corresponen als digrafs de Cayley de subgrups normals dels grups cristal·logràfics plans  $pgg$  i  $p4$ , respectivament.
- Diàmetre de  $M_n$ .
- $M_n$  és hamiltonià.
- Condicions suficients per a descompondre  $M_2$  en dos cicles hamiltonians arc-disjunts.

### Problemes oberts

- Connectivitat i superconnectivitat de  $M_n$ .
- Estudi dels digrafs de Cayley d'altres grups cristal·logràfics.
- Descomposició de  $M_n$  en  $n$  cicles de Hamilton arc-disjunts.

### 7.1.2 Esquemes de comunicació de les xarxes Manhattan

#### Contribucions [30, 31, 32]

- Algorisme d'encaminament local per a  $M_n$ .
- Difusió òptima en  $M_2$  a partir d'un algorisme genètic.

### 7.1.3 Espectre de les xarxes Manhattan

#### Contribucions [36, 37]

- L'espectre de  $M_n$  conté tots els valors propis (incloent les multiplicitats) de l'hipercub  $n$ -dimensional  $Q_n$ .
- Els valors propis de  $M_2$  i les seves multiplicitats.
- Definicions de l'*hipercub conjugat*  $\overline{Q}_n$  i l'*hipercub conjugat amb pesos*  $\overline{Q}_n^*$  i les seves relacions amb l'*hipercub plegat*  $\tilde{Q}_n$ .
- Els valors propis de  $M_n$  coincideixen amb els de l'hipercub conjugat amb pesos  $\overline{Q}_n^*$ .

### 7.1.4 El producte Manhattan de digrafs

#### Contribucions [35]

- Definició i propietats bàsiques.
- El producte Manhattan de cicles dirigits (d'ordre parell) és una xarxa Manhattan.
- El producte Manhattan de dues xarxes Manhattan és una xarxa Manhattan.
- El producte Manhattan de dos digrafs vèrtex-simètrics (isomorfs als seus conversos) és un digraf vèrtex-simètric.
- El producte Manhattan de digrafs, cadascun d'ells amb un camí hamiltonià, és un digraf hamiltonià.

### Problemes oberts

- Definició alternativa de producte Manhattan.
- Caracterització dels digrafs de Cayley provinents d'un producte Manhattan de digrafs de Cayley.

### 7.1.5 Xarxes jeràrquiques deterministes

#### Contribucions [16]

- Definició i propietats estructurals de  $H_{n,k}$ .
- Encaminament en  $H_{n,k}$ .
- Diàmetre, radi i excentricitat del vèrtex arrel de  $H_{n,k}$ .
- Distribucions de graus i de clusterings i grau mitjà de  $H_{n,k}$ .

### Problemes oberts

- Estudi del producte subjacent que dona  $H_{n,k}$ .

### 7.1.6 El producte jeràrquic de grafs

#### Contribucions [13]

- Definició i propietats mètriques del producte jeràrquic de grafs.
- Polinomis característics i valors propis del producte jeràrquic de dos grafs.
- Definició i condicions d'hamiltonicitat del producte jeràrquic generalitzat de grafs.

### Problemes oberts

- Espectre del producte jeràrquic generalitzat de grafs.

### 7.1.7 Hiperarbres binaris

#### Contribucions [14]

- Definició i propietats bàsiques dels hiperarbres binaris  $T_m$ .
- El grup d'automorfismes de  $T_m$  és  $S_2$ .

- Espectre de l'hiperarbre: matriu d'adjacència, polinomi característic i valors propis de  $T_m$ .
- Els valors propis de  $T_m$  són tots diferents per a tot  $m > 1$ .
- Comportament asimptòtic dels valors propis de  $T_m$ .

### Problemes oberts

- Densitat a  $\mathbb{R}$  del conjunt de valors propis dels hiperarbres binaris.

## 7.1.8 Hiperarbres $r$ -àdics

### Contribucions [15]

- Definició de  $T_r^m$  i les propietats principals (grau, excentricitat de l'arrel, diàmetre).
- El grup d'automorfismes de  $T_r^m$  és  $S_2$ .
- Si  $G$  és un graf amb tots els valors propis diferents, aleshores els valors propis de  $H = G \square P_r$  són també tots diferents.
- Els valors propis de  $T_r^m$  i el seu comportament asimptòtic.
- Els vectors propis de  $T_r^m$  i la seva relació amb els polinomis de Txebixev de segona espècie.

### Problemes oberts

- Densitat a  $\mathbb{R}$  del conjunt de valors propis dels hiperarbres  $r$ -àdics.

## 7.1.9 Xarxes Sierpinski

### Contribucions [11, 12]

- Propietats dels grafs Sierpinski Gasket, Sierpinski Carpet i Sierpinski Tetra.
- Construcció dels grafs Sierpinski Gasket petit món, Sierpinski Carpet petit món i Sierpinski Tetra petit món, els quals són petit món i fractals simultàniament.
- Propietats dels grafs Sierpinski Gasket petit món, Sierpinski Carpet petit món i Sierpinski Tetra petit món.



**Problemes oberts**

- Noves mesures de clustering.
- Definir formalment fractalitat i autosimilitud per a grafs.
- Espectre dels grafs Sierpinski.

**7.2 Conclusions (English)**

As a conclusion of this thesis, we present our contributions to each subject and the publications which have given rise to. Moreover, we some open problems are proposed.

**7.2.1 Multidimensional Manhattan street networks****Contributions [33, 34]**

- Two formal definitions of multidimensional Manhattan street networks  $M_n$ .
- $M_n$  is a bipartite and  $2^n$ -partite digraph.
- There exist an homomorphism from  $M_n$  to the symmetric digraph of the hypercube.
- $M_2$  is a line digraph.
- $M_n$  is a Cayley digraph.
- $M_2$  and  $M'_2$  correspond to the Cayley digraph of some normal subgroups of the planar crystallographic groups  $pgg$  and  $p4$ , respectively.
- Diameter of  $M_n$ .
- $M_n$  is Hamiltonian.
- Sufficient conditions to decompose  $M_2$  into two arc-disjoint Hamiltonian cycles.

**Open problems**

- Connectivity and superconnectivity of  $M_n$ .
- Cayley digraphs of other crystallographic groups.
- Decomposition of  $M_n$  into  $n$  arc-disjoint Hamiltonian cycles.

## 7.2.2 Communication protocols of Manhattan street networks

Contributions [30, 31, 32]

- Local routing algorithm for  $M_n$ .
- Optimal broadcasting in  $M_2$  from a genetic algorithm.

Open problems

- Optimal broadcasting in  $M_n$ .

## 7.2.3 The spectra of Manhattan street networks

Contributions [36, 37]

- The spectrum of  $M_n$  contains all the eigenvalues (including multiplicities) of the  $n$ -dim hypercube  $Q_n$ .
- Eigenvalues of  $M_2$  and their multiplicities.
- Definitions of the conjugate hypercube  $\overline{Q}_n$ , the weighted conjugate hypercube  $\overline{Q}_n^*$  and their relation to the folded hypercube  $\tilde{Q}_n$ .
- The eigenvalues of  $M_n$  coincide with the eigenvalues of  $\overline{Q}_n^*$ .

## 7.2.4 The Manhattan product of digraphs

Contributions [35]

- Definition and main properties.
- The Manhattan product of directed cycles (with even order) is a MSN.
- The Manhattan product of two MSN is a MSN.
- The Manhattan product of two vertex-symmetric digraphs (isomorphic to their converses) is a vertex-symmetric digraph.
- The Manhattan product of two digraphs, each of them with a Hamiltonian path, is a Hamiltonian digraph.

### Open problems

- Alternative definition of the Manhattan product.
- Characterization of the Manhattan product of Cayley digraphs.

## 7.2.5 Deterministic hierarchical networks

### Contributions [16]

- Definition and structural properties of  $H_{n,k}$ .
- Routing in  $H_{n,k}$ .
- Diameter, radius and eccentricity of the root vertex of  $H_{n,k}$ .
- Degree and clustering distributions, and mean degree of  $H_{n,k}$ .

### Open problems

- Study of the underlying product giving  $H_{n,k}$ .

## 7.2.6 The hierarchical product of graphs

### Contributions [13]

- Definition and metric properties of the hierarchical product of graphs.
- Characteristic polynomials and eigenvalues of the hierarchical product of two graphs.
- Definition and conditions of Hamiltonicity of the generalized hierarchical product of graphs.

### Open problems

- Spectrum of the generalized hierarchical product of graphs.

## 7.2.7 Binary hypertrees

### Contributions [14]

- Definition and main properties of the binary hypertrees  $T_m$ .
- The automorphism group of  $T_m$  is  $S_2$ .

- Spectra of hypertrees: adjacency matrix, characteristic polynomial and eigenvalues of  $T_m$ .
- The eigenvalues of  $T_m$  are different for all  $m > 1$ .
- Asymptotic behavior of the eigenvalues of  $T_m$ .

### Open problems

- Density in  $\mathbb{R}$  of the eigenvalue set of the hypertrees.

## 7.2.8 $r$ -adic hypertrees

### Contributions [15]

- Definition of  $T_r^m$  and its main properties (degree, eccentricity of the root, radius, diameter).
- The automorphism group of  $T_r^m$  is  $S_2$ .
- If  $G$  is a graph with all its eigenvalues different, then the eigenvalues of  $H = G \square P_r$  are also all different.
- The eigenvalues of  $T_r^m$  and their asymptotic behavior.
- The eigenvectors of  $T_r^m$  and their relation to the Chebyshev polynomials of the second kind.

### Open problems

- Density in  $\mathbb{R}$  of the eigenvalue set of the  $r$ -adic hypertrees.

## 7.2.9 Sierpinski graphs

### Contributions [11, 12]

- Properties of  $SG_n$ ,  $SC_n$  and  $ST_n$ .
- Construction of  $SWG_{n,m}$ ,  $SWSC_{n,m}$  and  $SWST_{n,m}$ , which are small-world and fractal simultaneously.
- Properties of  $SWG_{n,m}$ ,  $SWSC_{n,m}$  and  $SWST_{n,m}$ .

**Open problems**

- New measures of clustering.
- Formal definition of fractality and auto-similarity for graphs.
- Spectra of Sierpinski graphs.



# Índex de figures

1.1	El digraf de Cayley $\text{Cay}(\mathbb{Z}_6, \{1, 2\})$ . . . . .	5
2.1	L'estructura local d'una xarxa Manhattan i dos exemples de la vida real: els carrers de Manhattan i els de l'Eixample de Barcelona. . . . .	11
2.2	Una definició alternativa a l'estructura local d'una xarxa Manhattan bidimensional vista com un digraf 4-partit (tots els vèrtexs en $V_j$ estan denotats per $j$ ). . . . .	14
2.3	Vèrtexs amb el mateix veïnatge en $M_2$ . . . . .	15
2.4	Una xarxa Manhattan (amb les arestes fines i els vèrtexs blancs), el digraf línia del qual prové (amb les arestes gruixudes i els vèrtexs negres) i dos detalls de la xarxa Manhattan amb les etiquetes dels vèrtexs indicades. . . . .	16
2.5	La xarxa Manhattan $M(8, 2)$ i una representació del seu grup dièdric (les línies sense fletxa representen els dos arcs de sentits oposats). . . . .	19
2.6	Els vèrtexs amb les etiquetes estàndards i amb les induïdes per les aplicacions $\phi_j$ en la xarxa Manhattan $M(6, 4)$ . . . . .	20
2.7	Els vèrtexs a distància 7 (quadrats blancs) i a distància 8 (quadrats negres) des del vèrtex origen (cercle blanc) i les tessellacions corresponents. . . . .	22
2.8	Cicle hamiltonià en $M_n$ . . . . .	28
2.9	Cicle hamiltonià en $M(8, 6)$ . . . . .	28
2.10	Cicle hamiltonià en $C_6 \times C_4$ . . . . .	29
2.11	Una descomposició de $M(12, 8)$ en dos cicles hamiltonians arc-disjunts. . . . .	29
2.12	Els camins més curts cap al vèrtex $(0, 0)$ en $M(10, 8)$ , d'acord amb la demostració del teorema 2.1.9. . . . .	31
2.13	Arbre de difusió per a $N_1 \equiv N_2 \equiv 0 \pmod{4}$ . . . . .	33
2.14	Arbre de difusió per a $N_1 \equiv 0, N_2 \equiv 2 \pmod{4}$ . . . . .	34
2.15	Arbre de difusió per a $N_1 \equiv N_2 \equiv 2 \pmod{4}$ . . . . .	35
2.16	Un 0-vector propi de $M_2(6, 4)$ . . . . .	37

2.17	L'hipercub conjugat $\overline{Q}_3 \cong \tilde{Q}_2 \cup \tilde{Q}_2$ . . . . .	46
2.18	L'hipercub conjugat $\overline{Q}_4 \cong Q_4$ . . . . .	46
3.1	El producte Manhattan $H = \text{Cay}(\mathbb{Z}_6, \{1, 3\}) \# K_2^*$ (les línies dibuixades sense direcció representen dos arcs en direccions oposades). . . . .	50
3.2	Cicle Hamiltonià en el producte Manhattan de $G_1 \# G_2$ . . . . .	54
4.1	Grafs jeràrquics amb ordre inicial 4: (a) $H_{4,1}$ , (b) $H_{4,2}$ , (c) $H_{4,3}$ . . . . .	60
4.2	L'algorisme d'encaminament en $H_{n,5}$ . . . . .	64
4.3	Cas (i): Algorisme d'encaminament en $H_{n,5}$ quan $x_1, y_1 \neq 0$ . . . . .	65
4.4	Casos (ii) i (iii): Algorismes d'encaminament en $H_{n,5}$ quan $x_1 = 0$ , $y_1 \neq 0$ i $x_1 \neq 0, y_1 = 0$ . . . . .	66
4.5	El coeficient de clustering de $H_{n,k}$ per a $n = 4, 6, \dots, 20$ . . . . .	73
4.6	Comparació entre el valor exacte del clustering de $H_{60,k}$ (línia negra) i l'aproximació asimptòtica (línia gris). . . . .	74
4.7	Coeficient de transitivitat de $H_{n,k}$ per a $n = 4, 6, \dots, 20$ . . . . .	75
4.8	El producte jeràrquic $S_3 \sqcap S_2 \sqcap S_3$ . . . . .	77
4.9	Les potències jeràrquiques $K_2^2$ i $K_2^4$ . . . . .	79
4.10	Dues perspectives de la potència jeràrquica $K_3^3$ . . . . .	81
4.11	Valors propis de $G$ en funció dels valors propis de $H = G \sqcap K_2$ . . . . .	87
4.12	Dues perspectives del producte jeràrquic generalitzat $K_3^3$ amb $U_1 = U_2 = \{0, 1\}$ . . . . .	91
4.13	Cicle hamiltonià en $H = G_2 \sqcap G_1(U_1)$ a través de tres còpies de $G_2$ i $n_2$ còpies de $G_1$ . . . . .	92
4.14	Cicle hamiltonià en $H = G_2 \sqcap G_1(U_1)$ a través de dues còpies de $G_2$ i $n_2$ còpies de $G_1$ quan $n_2$ és parell. . . . .	92
5.1	Els hiperarbres $T_2 = K_2^2$ , $T_4 = K_2^4$ i $T_6 = K_2^6$ . . . . .	97
5.2	$H_{2,4} \cong T_4 = K_2^4$ . . . . .	99
5.3	El conjunt de valors propis de $T_m$ per a $0 \leq m \leq 6$ . . . . .	101
5.4	El digraf dels valors propis de $T_m$ per a $0 \leq m \leq 3$ . . . . .	103
5.5	La distribució dels valors propis de $T_m$ , per a $m = 0, \dots, 9$ . . . . .	105
5.6	Els dos valors propis més grans de $T_m$ per a $1 \leq m \leq 128$ . . . . .	108
5.7	Construcció dels vectors propis de $T_m$ a partir dels vectors propis de $T_{m-1}$ . . . . .	109
5.8	Els vectors propis dels hiperarbres $T_0, T_1$ i $T_2$ . . . . .	111
5.9	Valors propis de $G \sqcap P_3$ en funció dels valors propis de $G$ . . . . .	113
5.10	L'hiperarbre 3-àdic tridimensional $T_3^3$ . . . . .	117
5.11	La propietat de recurrència de $N_3^m$ mostrada com una generalització del triangle de Pascal. . . . .	119
5.12	Distàncies dels vèrtexs (des del 0) en $T_3^3$ (les línies discontinües uneixen els vèrtexs a distància 2 i a distància 4). . . . .	121



---

5.13	Distribució dels valors propis de $P_3^m$ per a $0 \leq m \leq 3$ . . . . .	123
5.14	Els dos valors propis positius més grans i el mínim valor propi positiu amb (a) $r$ parell i (b) $r$ senar. . . . .	125
6.1	La construcció recursiva de $SG_n$ , amb totes les identificacions de nodes. La construcció recursiva de $SC_n$ , amb totes les identificacions de camins. . . . .	131
6.2	$SG_1, SG_2, SG_3$ i $SG_4$ . . . . .	133
6.3	Caixes en $SG_5$ amb $\ell_B = 3$ (diàmetre=2) i $\ell_B = 5$ (diàmetre=4). . . . .	133
6.4	$SC_1, SC_2, SC_3$ i $SC_4$ . . . . .	135
6.5	Caixes en $SC_4$ amb $\ell_B = 7$ (diàmetre= 6) i $\ell_B = 19$ (diàmetre= 18). . . . .	136
6.6	$ST_1, ST_2, ST_3$ i $ST_4$ . . . . .	137
6.7	Caixes en $ST_3$ amb $\ell_B = 3$ (diàmetre=2). . . . .	137
6.8	$SWSG_{4,2}$ . . . . .	138
6.9	$SWSC_{4,3}$ . . . . .	140
6.10	$SWST_{3,2}$ . . . . .	142



# Bibliografia

- [1] R. Albert, A.L. Barabási, Statistical mechanics of complex networks, *Rev. Modern Phys.* **74** (2002) 47–97.
- [2] R. Albert, H. Jeong, A.L. Barabási, Diameter of the world wide web, *Nature* **401** (1999) 130–131.
- [3] C. Balbuena, D. Ferrero, X. Marcote, I. Pelayo, Algebraic properties of a digraph and its line digraph, *J. Interconnection Networks* **4** (2003) 377–393.
- [4] S. Banerjee, V. Jain, S. Shah, Regular multihop logical topologies for light-wave networks, *IEEE Comm. Surveys and Tutorials* **2** (1999).
- [5] D. Banerjee, B. Mukherjee, S. Ramamurthy, The multidimensional torus: analysis of average hop distance and application as a multihop lightwave network, *IEEE Int. Conf. on Comm.* **3** (1994) 1675–1680.
- [6] J. Bang-Jensen, G. Gutin, *Digraphs: Theory, Algorithms and Applications*, Springer Monographs in Mathematics, Springer, London, 2003.
- [7] A.L. Barabási, R. Albert, Emergence of scaling in random networks, *Science* **286** (1999) 509–512.
- [8] A.L. Barabási, Z. Dezsó, E. Ravasz, S.-H. Yook, Z. Oltvai, Scale-free and hierarchical structures in complex networks, *Statistical Mechanics of Complex Networks*, R. Pastor-Satorras, M. Rubí, A. Díaz-Guilera (Editors), Lecture Notes in Physics, Springer-Verlag 625, Berlin, 2003.
- [9] A.L. Barabási, Z.N. Oltvai, Network biology: Understanding the cell’s functional organization, *Nature Rev. Genetics* **5** (2004) 101–113.
- [10] A.L. Barabási, E. Ravasz, T. Vicsek, Deterministic scale-free networks, *Physica A* **299** (2001) 559–564.
- [11] L. Barrière, F. Comellas, C. Dalfó, Fractality and the small-world effect in Sierpinski graphs, *J.Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006) 11739–11753.

- 
- [12] L. Barrière, F. Comellas, C. Dalfó, Fractalidad y efecto small-world en los grafos Sierpinski, *V Jornadas de Matemática Discreta y Algorítmica*, Universidad de Valladolid, Sòria 11 a 14 de juny, 2006, pp. 117–246.
- [13] L. Barrière, F. Comellas, C. Dalfó, M.A. Fiol, The hierarchical product of graphs, *Discrete Appl. Math.*, sotmès, <http://hdl.handle.net/2117/672>.
- [14] L. Barrière, F. Comellas, C. Dalfó, M.A. Fiol, On the spectra of hypertrees, *Linear Algebra Appl.*, acceptat, <http://hdl.handle.net/2117/891>.
- [15] L. Barrière, F. Comellas, C. Dalfó, M.A. Fiol, On the hierarchical product of graphs and the generalized binomial tree, *Linear Multilinear Algebra*, sotmès, <http://hdl.handle.net/2117/1187>.
- [16] L. Barrière, F. Comellas, C. Dalfó, M.A. Fiol, Deterministic Hierarchical Networks, *Networks*, sotmès, <http://hdl.handle.net/2117/1356>.
- [17] L. Barrière, P. Fraigniaud, E. Kranakis, D. Krizanc, Efficient Routing in Networks with Long Range Contacts, *15th International Symposium on Distributed Computing (DISC 2001)*, *Lecture Notes in Comput. Sci.* **2180** (2001) 162–171.
- [18] M. Benkert, A. Wolff, F. Widmann, T. Shirabe, The minimum Manhattan network problem: Approximations and exact solutions, *Comput. Geom.* **35** (2006) 188–208.
- [19] J.C. Bermond, Hamiltonian graphs, en *Selected topics in Graph Theory*, Academic Press, Londres, 1978, pp. 127–167.
- [20] N. Biggs, *Algebraic Graph Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1974, segona edició, 1993.
- [21] W. L. Briggs, V.E. Henson, *The DFT: An Owners' manual for the Discrete Fourier Transform*, Philadelphia SIAM cop., 1995.
- [22] J.M. Brunat, M. Espona, M.A. Fiol, O. Serra, On Cayley line digraphs, *Discrete Math.* **138** (1995) 147–159.
- [23] G. Chartrand, L. Lesniak, *Graphs & Digraphs*, Chapman and Hall, London, tercera edició, 1996.
- [24] F.R.K. Chung, Diameters and eigenvalues, *J. Amer. Math. Soc.* **2** (1989) 187–196.
- [25] F.R.K. Chung, V. Faber, T.A. Manteuffel, An upper bound on the diameter of a graph from eigenvalues, *SIAM J. Discrete Math.* **7(3)** (1994) 443–457.

- 
- [26] F.R.K. Chung, The diameter and Laplacian eigenvalues of directed graphs, *Electron. J. Comb.* **13** (2006).
- [27] T.Y. Chung, D.P. Agrawal, On network characterization of and optimal broadcasting in the Manhattan Street Network, *IEEE INFOCOM '90* **2** (1990) 465–472.
- [28] T.Y. Chung, D.P. Agrawal, Design and analysis of multidimensional Manhattan street networks, *IEEE Trans. Commun.* **41** (1993) 295–298.
- [29] R. Cohen, S. Havlin, Scale-free networks are ultrasmall, *Phys. Rev. Lett.* **90**(5) (2003) 058701.
- [30] F. Comellas, C. Dalfó, Difusión de información en digrafos Manhattan, *IV Jornadas de Matemática Discreta y Algorítmica*, Universidad Politécnica de Madrid, Cercedilla (Madrid) 5 a 8 setembre, 2004, pp. 283–290.
- [31] F. Comellas, C. Dalfó. Using genetic programming to design broadcasting algorithms for Manhattan street networks, *Lecture Notes in Comput. Sci.*, **3005** (2004) 170–177.
- [32] F. Comellas, C. Dalfó, Optimal broadcasting in 2-Dimensional Manhattan street networks, *Parallel Distrib. Comput. Networks* **246** (2005) 135–140.
- [33] F. Comellas, C. Dalfó, M.A. Fiol, The multidimensional Manhattan networks, *Electron. Notes Discrete Math.* **29** (2007) 383–387.
- [34] F. Comellas, C. Dalfó, M.A. Fiol, The multidimensional Manhattan Street networks, *Siam J. Discrete Math.*, acceptat, <http://hdl.handle.net/2117/675>.
- [35] F. Comellas, C. Dalfó, M.A. Fiol, The Manhattan product of digraphs, <http://hdl.handle.net/2117/1223>.
- [36] F. Comellas, C. Dalfó, M.A. Fiol, M. Mitjana, A spectral study of the Manhattan networks, *Electron. Notes Discrete Math.* **29** (2007) 267–271.
- [37] F. Comellas, C. Dalfó, M.A. Fiol, M. Mitjana, The spectra of Manhattan street networks, *Linear Algebra Appl.*, sotmès.
- [38] F. Comellas, G. Fertin, A. Raspaud, Recursive graphs with small-world scale-free properties, *Phys. Rev. E* **69** (2004) 037104.
- [39] F. Comellas, M.A. Fiol, J. Gimbert, M. Mitjana, Weakly distance-regular digraphs, *J. Combin. Theory Ser. B* **90** (2004) 233–255.

- 
- [40] F. Comellas, J. Ozón, J. G. Peters, Deterministic small-world communication networks, *Inform. Process. Lett.* **76(1-2)** (2000) 83–90.
- [41] T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, C. Stein, *Introduction to Algorithms*, MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1990, segona edició, 2001.
- [42] H.S.M. Coxeter, W.O.J. Moder, *Generators and Relations for Discrete Groups*, quarta edició, Springer Verlag, Berlín, 1980.
- [43] D.M. Cvetkovic, M. Doob, H. Sachs, *Spectra of Graphs. Theory and applications*, Johann Ambrosius Barth, Heidelberg, tercera edició, 1995.
- [44] S.N. Dorogovtsev, A.V. Goltsev, J.F.F. Mendes, Pseudofractal scale-free web, *Phys. Rev. E* **65** (2002) 066122.
- [45] S.N. Dorogovtsev, J.F.F. Mendes, Evolution of networks, *Adv. Phys.* **51** (2002) 1079–1187.
- [46] P. Duchon, N. Hanusse, E. Lebhar, N. Schabanel, Could any graph be turned into a small-world?, *19th International Symposium on Distributed Computing (DISC 2005)*, LNCS 3724, Springer, 2005, pp. 511–513.
- [47] M. Faloutsos, P. Faloutsos, C. Faloutsos, On power-law relationships of the internet topology, *Comput. Commun. Rev.* **29** (1999) 251–260.
- [48] M.A. Fiol, Eigenvalue interlacing and weight parameters of graphs, *Linear Algebra Appl.* **290** (1999) 275–301.
- [49] M.L. Fiol, M.A. Fiol, J.L.A. Yebra, When the arc-colored line digraph of a Cayley colored digraph is again a Cayley colored digraph, *Ars Combin.* **34** (1992) 65–73.
- [50] M.A. Fiol, M. Mitjana, The local spectra of regular line graphs, *Discrete Math.*, sotmès.
- [51] M.A. Fiol, M. Mitjana, The local spectra of line graphs, *Electron. Notes Discrete Math.* **28** (2007) 95–102.
- [52] M.A. Fiol, M. Mitjana, The spectra of some families of digraphs, *Linear Algebra Appl.* **423** (2007) 109–118.
- [53] M.A. Fiol, J.L.A Yebra, Ciclos de Hamilton en redes de paso conmutativo y de paso fijo, *Stochastica* **XII-2,3** (1988) 113–129.
- [54] M.A. Fiol, J.L.A Yebra, I. Alegre, Line digraph iterations in the  $(d, k)$  digraph problem, *IEEE Trans. Comput.* **C-33** (1984) 400–403.

- 
- [55] P. Flajolet, R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*, 2007.  
<http://algo.inria.fr/flajolet/Publications/books.html>
- [56] P. Fraigniaud, E. Lazard, Methods and problems of communication in usual networks, *Discrete Appl. Math.* (1994) 79–133.
- [57] K.I. Goh, G. Salvi, B. Kahng, D. Kim, Skeleton and fractal scaling in complex networks, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 018701.
- [58] C. D. Godsil, *Algebraic Combinatorics*, Chapman and Hall, New York, 1993.
- [59] W.H. Haemers, Interlacing eigenvalues and graphs, *Linear Algebra Appl.* **227/228** (1995) 593–616.
- [60] S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, A. Liestman, A survey of gossiping and broadcasting in communication networks, *Networks* **18** (1988) 319–349.
- [61] C. Heuchenne, Sur une certaine correspondance entre graphes, *Bull. Soc. Royale Sciences Liège* **12** (1964) 743–753.
- [62] H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z.N. Oltvai, A.L. Barabási, The large-scale organization of metabolic networks, *Nature* **407** (2000) 651–654.
- [63] H. Jeong, S. Mason, A.L. Barabási, Z.N. Oltvai, Lethality and centrality in protein networks, *Nature* **411** (2001) 41–42.
- [64] S. Jung, S. Kim, B. Kahng, Geometric fractal growth model for scale-free networks, *Phys. Rev. E* **65** (2002) 056101.
- [65] B. Khasnabish, Topological properties of Manhattan street networks, *Electronics Lett.* **25** (1989) 1388–1389.
- [66] J. Kleinberg, The small-world phenomenon: an algorithm perspective. *32nd Annual ACM Symposium on Theory of Computing (STOC 2000)*, ACM Press, NY (USA), 2000, pp. 163–170.
- [67] J.R. Koza, *Genetic programming on the programming of computers by means of natural selection*, Mass. MIT Press cop., Cambridge, 1992.
- [68] B. Kron, Growth of self-similar graphs, *Journal of Graph Theory* **45(3)** (2003) 224–239.
- [69] J. Matoušek, J. Nešetřil, *Invitation to Discrete Mathematics*, Oxford University Press, Oxford, 1998.

- 
- [70] N.F. Maxemchuk, Routing in the Manhattan Street Network, *IEEE Trans. Commun.* **35** (1987) 503–512.
- [71] M. Miller, J. Širáň, *Moore graphs and beyond: A survey of the degree/diameter problem*, *Electronic J. Combin.*, DS14 (2005), [www.combinatorics.org/Surveys/ds14.pdf](http://www.combinatorics.org/Surveys/ds14.pdf).
- [72] J.C. Montserrat, *Propiedades Matriciales de los Grafos Dirigidos*, Tesi doctoral dirigida per J.L.A Yebra, UPC, 1986.
- [73] P. Morillo, M.A. Fiol, J. Fàbrega, The diameter of directed graphs associated to plane tessellations, *Ars Comb.* **20A** (1985) 17–27.
- [74] A. Mowshowitz, The group of a graph whose adjacency matrix has all distinct eigenvalues, F. Harary (Editor), *Proof Techniques in Graph Theory*, Academic Press, New York, 1969, pp. 109–110.
- [75] R.B. Nelsen, *Proofs Without Words: Exercises in Visual Thinking*, Washington, Math. Assoc. Amer., 1997.
- [76] M.E.J. Newman, Models of the small world, *J. Stat. Phys.* **101** (2000) 819–841.
- [77] M.E.J. Newman, The structure of scientific collaboration networks, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **98** (2001) 404–409.
- [78] M.E.J. Newman, The structure and function of complex networks, *SIAM Rev.* **45** (2003) 167–256.
- [79] M.E.J. Newman, D.J. Watts, and S.H. Strogatz. Random graph models of social networks, *Proc Natl Acad Sci USA* **99** (2002) 2566–2572.
- [80] J.D. Noh, Exact scaling properties of a hierarchical network model, *Phys. Rev. E* **67** (2003) 045103.
- [81] E. Ravasz, A.L. Barabási, Hierarchical organization in complex networks, *Phys. Rev. E* **67** (2003) 026112.
- [82] E. Ravasz, A. L. Somera, D. A. Mongru, Z. N. Oltvai, A.L. Barabási, Hierarchical organization of modularity in metabolic networks, *Science* **297** (2002) 1551–1555.
- [83] G. Sabudussi, On a class of fixed-point-free graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* **9** (1958) 800–804.



- 
- [84] P. Sarnak, *Some Applications of Modular Forms*, Cambridge Tracts in Mathematics 99, Cambridge University Press, Cambridge, 1990.
- [85] A.J. Schwenk, Computing the characteristic polynomial of a graph, *Graphs and Combin.*, *Proc. Capital Conf., Washington, D.C. 1973*, Lect. Notes Math. **406**, 1974, pp. 153–172.
- [86] A.V. Shutov, The number of words of a given length in the planar crystallographic groups, *J. Math. Sci.* **129** (2005) 3922–3926.
- [87] J. R. Silvester, Determinants of block matrices, *Maths Gazette* **84** (2000) 460–467.
- [88] R.V. Solé, S. Valverde, Information theory of complex networks: on evolution and architectural constraints, Complex Networks, E. Ben-Naim, H. Frauenfelder, Z. Toroczkai (Editors), *Lecture Notes in Phys* **650**, Springer-Verlag, Berlín, 2004, pp. 189–207.
- [89] C.M. Song, S. Havlin, H.A. Makse, Self-similarity of complex networks, *Nature* **433** (2005) 392–395.
- [90] I. Stewart, Four encounters with Sierpinski’s Gasket, *Math. Intelligencer* **17(1)** (1995) 52–64.
- [91] G. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol. XXIII. American Mathematical Society, Providence, quarta edició, 1975.
- [92] R.M. Tanner, Explicit constructions of concentrators from generalized  $n$ -gons, *SIAM J. Algebraic Discrete Methods* **5** (1984) 287–293.
- [93] W.T. Trotter, P. Erdős, When the cartesian product of directed cycles is Hamiltonian, *J. Graph Theory* **2** (1978) 137–142.
- [94] E.A. Varvarigos, Optimal communication algorithms for Manhattan Street Networks, *Discrete Appl. Math.* **83** (1998) 303–326.
- [95] A. Vazquez, R. Dobrin, D. Sergi, J.-P. Eckmann, Z. N. Oltvai, A.L. Barabási, The topological relationship between the large-scale attributes and local interactions patterns of complex networks, *Proceedings of the Nat’l Academy of Sciences* **101**, 2004, pp. 17940–17945.
- [96] J.L. Villar, *Contribución a la teoría de redes con enlaces bidireccionales derivadas de los digrafos línea*, Tesi doctoral dirigida per M.A. Fiol, UPC, 1994.

- [97] D.J. Watts, S.H. Strogatz, Collective dynamics of ‘small-world’ networks, *Nature* **393** (1998) 440–442.
- [98] S. Wuchty, E. Ravasz, A.L. Barabási, The Architecture of Biological Networks, *Complex Systems in Biomedicine*, T.S. Deisboeck, J. Yasha Kresh, T.B. Kepler (Editors), Kluwer Academic Publishing, New York, 2003.
- [99] Z.Z. Zhang, F. Comellas, G. Fertin, L.L. Rong, High dimensional Apollonian networks, *J. Phys. A: Math. Gen.* **39** (2006) 1811–1818.



