

**Contribució a l'estudi dels exponents de Lyapunov
per a sistemes bilineals i a l'anàlisi de les bifurcacions
en el convertidor Boost controlat amb superfície de lliscament i histèresi**

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Programa de doctorat:

MATEMÀTICA APLICADA

Tesi Doctoral

**Contribució a l'estudi dels exponents de Lyapunov
per a sistemes bilineals i a l'anàlisi de les bifurcacions
en el convertidor Boost controlat amb superfície de lliscament i histèresi**

Immaculada Massana Hugas

Codirectors de Tesi:

Carles Batlle Arnau (UPC)

Gerard Olivar Tost (Universidad Nacional de Colombia- Sede Manizales)

Departament de Matemàtica Aplicada IV

Juliol 2006

Immaculada Massana Hugas
Departament de Matemàtica Aplicada IV
Universitat Politècnica de Catalunya

Al meu marit Ferran.

Als meus fills Ferran, Laura, Mariona, Esther i Elisabeth.

Als meus pares Josep i Rita (al cel sia).

Agraïments

A Déu gràcies, sóc una dona afortunada, ja que en tots aquests anys de treball a l'EPSEVG, he trobat sempre el recolzament i suport dels meus companys de feina, així com els de la meva família.

D'entre ells, el meu agraïment en primer lloc, pels qui són els meus directors de tesi, el Dr. Carles Batlle, sense el qual no hagués començat ni portat a terme aquest treball, i el Dr. Gerard Olivar (que actualment està vivint i treballant a Colòmbia) sense el qual no hagués finalitzat la feina començada. Gràcies per la vostra paciència, dedicació i inestimable ajuda.

També vull agrair especialment al doctors Enric Fossas i a la doctora Fabiola Angulo, les seves suggeriments i consells.

Gràcies també, a tots els companys de la secció de MA4 de Vilanova i la Geltrú pel seu interès i suport, en especial a les doctores Joana D'Arc Prat i Fina Antonijuan, amb qui a més tinc el gust de compartir despatx, a les doctores Mercè Claverol, Marisa Zaragoza i Ester Simó i al doctor Santi Boza.

Finalment, la meva gratitud pel meu marit, germanes (en particular a la Montserrat) i tieta, per la seva inestimable ajuda en l'organització familiar.

Índex

1	Introducció	1
1.1	Presentació i motivació	1
1.2	Contingut i resultats	2
2	Contextualització	5
2.1	Convertidors	5
2.1.1	Els convertidors dc-dc	6
2.1.2	El convertidor buck	7
2.1.3	El convertidor boost	8
2.1.4	Altres convertidors	10
2.2	Dinàmiques no lineals i caos	11
2.2.1	Sistemes dinàmics i models de l'espai d'estats	11
2.2.2	Sistemes autònoms i no autònoms	12
2.2.3	Camp vectorial dels sistemes lineals, linealitzats i no lineals	12
2.2.4	Conjunts atractors en sistemes no lineals	15
2.2.5	Caos	15
2.2.6	L'aplicació de Poincaré	17
2.2.7	Dinàmiques dels sistemes en temps discret	18
2.2.8	Exponents de Lyapunov	21
2.2.9	Bifurcacions	21
2.3	Bifurcacions en aplicacions suficientment diferenciables	22
2.4	Bifurcacions non-smooth	25
3	El convertidor buck	29
3.1	Introducció	29
3.2	La descomposició QR	31
3.3	La descomposició QR en un sistema bilineal	33
3.4	Resultats analítics pel convertidor buck	41
3.5	Òrbites periòdiques de període gran	45

3.6	Conclusions i treball futur	48
4	Convertidor boost amb control de lliscament i amb banda d'histèresi: cas 2-dimensional	49
4.1	Presentació	49
4.2	Dinàmica de lliscament ideal	51
4.3	Dinàmica de lliscament amb banda d'histèresi	55
4.4	El mode de conducció contínua MCC	58
4.5	El mode de conducció discontinua (MCD)	62
4.6	Conclusions i treball futur	63
5	El convertidor boost amb control integral	67
5.1	Descripció de la dinàmica d'un convertidor boost dc-dc amb control integral	67
5.2	Estudi de la dinàmica variant el paràmetre V_{ref}	70
5.2.1	Evolució en MCC	71
5.2.2	Evolució en MCD	74
5.2.3	Tipus de bifurcacions	75
5.3	Conclusions i treball futur	76
6	Conclusions i treball futur	83
	Bibliografia	85
	Llista de figures	88
	Llista de taules	93

Capítol 1

Introducció

1.1 Presentació i motivació

Aquest treball s'inscriu en el Programa de Doctorat de Matemàtica Aplicada de la Universitat Politècnica de Catalunya i, temàticament, correspon a la Línia d'Investigació de Sistemes Dinàmics, Control i Modelització.

En aquesta àrea d'investigació s'estudien sistemes amb dinàmica pròpia, ja siguin del tipus $\dot{x} = f(x)$ en un espai de dimensió finita o infinita (dinàmiques clàssiques), o del tipus $\dot{x} = f(x, u)$ on u és una variable de dinàmica no fixada i que serveix per controlar el sistema.

En particular, els convertidors electrònics de potència es poden expressar com un sistema dinàmic del segon tipus.

Els sistemes de potència constitueixen una de les àrees relativament nova i de ràpid creixement dins de l'enginyeria elèctrica i electrònica, degut a les seves múltiples aplicacions pràctiques en àmbits tan diversos com l'industrial, el comercial, residencial i l'aeroespacial, per exemple. A l'igual que en moltes àrees de l'enginyeria, els sistemes de potències estan principalment incentivats per les seves aplicacions de tal forma que moltes vegades primer es coneixen aquestes i després es realitza un model analític per fer-ne l'estudi. Això és el que ha passat amb els convertidors electrònics de potència en les seves diverses modalitats dc/dc, dc/ac, ac/dc i ac/ac. Fa més de 35 anys que les seves nombroses aplicacions són conegudes i en canvi, no trobem bons models analítics que ens permetin una millor comprensió, i el disseny d'un circuit, fins a finals de la dècada dels 70 [1].

Els fenòmens no lineals són freqüents en els circuits electrònics de potència [26]. El seu origen és divers. Així els trobem en els elements de commutació ("switching elements"), en les components no lineals, com els díodes de potència, i en els mètodes de control no lineal com el PWM ("pulse width modulation").

Malgrat aquesta asídua presència de la no linealitat, fins fa poc els circuits electrònics de potència no eren estudiats adequadament. Tradicionalment han estat tractats amb mètodes lineals (transformades de Fourier i de Laplace, matrius i funcions de transferència, etc.). La raó principal la podem trobar en què el cas lineal, a diferència del no lineal, està totalment analitzat i classificat [18]. Però, com és lògic pensar, els mètodes lineals només poden aportar una petita part de la informació que hi ha amagada en els fenòmens no lineals.

D'entre els fenòmens no lineals que podem trobar hi ha l'oscil·lació de subharmònics, salts, règims de solucions quasiperiòdiques, bifurcacions i caos. Quan un enginyer es troba amb aquests fenòmens el que fa és ajustar els paràmetres de funcionament del circuit per tal d'evitar aquestes situacions. Però no entra en el perquè, com i quan es produeixen. Però a mida que creix la importància d'aquests sistemes i es vol una major eficàcia d'ells, no queda altra opció que entrar en detall en l'estudi d'aquests fenòmens i des d'un punt de vista totalment fiable: usant les dinàmiques no lineals. Al cap i a la fi, el coneixement total i íntegre d'aquests fets servirà a l'enginyer justament en el seu objectiu principal: evitar-los.

Per últim voldria recordar que el comportament dinàmic d'un circuit electrònic de potència ve determinat tant per la topologia del circuit com pel tipus de control usat, ja que la forma bàsica de funcionament d'aquests consisteix en la commutació entre diferents topologies de circuits (lineals o no) segons una llei de control. En aquest sentit, recentment estan agafant importància els controls o lleis de commutació que consisteixen en forçar al sistema a situar-se en una determinada superfície definida a l'espai d'estats. Sorgeixen aleshores solucions no inherents a cap de les topologies donades, ja que les commutacions tenen lloc quan el sistema travessa l'esmentada superfície, provocant moviments del sistema localment dirigida cap a ella. S'anomena superfície de lliscament a la superfície de commutació, i al moviment a què dona lloc s'anomena mode de lliscament [4].

1.2 Contingut i resultats

Després d'un capítol d'introducció (Capítol 2) on es defineixen i s'expliquen les característiques i els fenòmens més importants dels sistemes dinàmics, aquest treball el podríem dividir bàsicament en dues parts. La primera d'elles és la que està desenvolupada en el Capítol 3. En aquest capítol es recorda un dels mètodes numèrics més interessants, tan des del punt de vista numèric com des del punt de vista teòric, per calcular els exponents de Lyapunov. És el mètode que està basat en la descomposició QR de l'aplicació tangent que s'obté a l'estudiar l'evolució dinàmica de la diferència entre dues òrbites inicialment properes. S'ha aplicat el mètode als sistemes bilineals en general i s'han

obtingut resultats específics pel convertidor buck. En concret, s'han escrit les equacions diferencials que han de complir els exponents de Lyapunov del convertidor buck, a partir de la descomposició QR de l'aplicació tangent obtinguda a partir d'una trajectòria de referència. S'han resolt numèricament les esmentades equacions i s'ha calculat l'exponent de Lyapunov més gran (LLE) per a un rang de valors del paràmetre de bifurcació i s'han resolt analíticament quan la trajectòria de referència és periòdica, tan si és estable com si és inestable. Quan l'òrbita periòdica és l'atractor dominant, el resultat analític coincideix amb el valor obtingut per integració numèrica. Els resultats també es corresponen amb el què prèviament es coneix a la literatura sobre la part real dels exponents de Floquet de les òrbites periòdiques del convertidor buck.

La segona part del treball és la que està desenvolupada en els Capítols 4 i 5. En ells s'ha estudiat la dinàmica del convertidor boost controlat amb una superfície de lliscament. En el Capítol 4 s'ha estudiat la dinàmica de lliscament ideal del convertidor boost. S'han trobat les regions de lliscament en funció del paràmetre V_{ref} i s'ha estudiat el caràcter del punt d'equilibri d'aquesta dinàmica ideal en funció també d'aquest paràmetre. Ja que aquest control significaria que el sistema commuta amb freqüència infinita, a efectes pràctics, s'ha introduït una banda d'histèresi. Aleshores s'ha analitzat la dinàmica del sistema en funció d'un altre paràmetre, V_g , el qual forma part de l'expressió del punt d'equilibri que presenta el convertidor en una de les seves configuracions quan aquest treballa en mode de conducció contínua (MCC). S'ha comprovat que en funció de la posició d'aquest punt d'equilibri, $PE = (V_g, V_g/R)$, respecte la banda d'histèresi, la dinàmica o bé té un cicle límit que pot ser o no atractor, o un punt d'equilibri globalment estable o ambdues coses alhora.

Finalment, en el Capítol 5, s'ha introduït un control integral i una tercera variable (variable error) al convertidor boost amb control de lliscament i amb banda d'histèresi. Les trajectòries són ara de \mathbb{R}^3 i la dinàmica resultant és molt més complicada, havent-hi la possibilitat de la presència de caos. S'han trobat numèricament òrbites 1 i 2 periòdiques en funció del paràmetre de bifurcació V_{ref} tan en MCC com en MCD i s'han trobat exemples de bifurcacions típiques dels sistemes suficientment diferenciables, com el desdoblament de període, i d'altres bifurcacions relativament noves a la literatura com són les que es produeixen per un canvi de mode de conducció, de MCC a MCD o a la inversa, o les que es presenten en sistemes non-smooth (que no són infinitament diferenciables a tot l'espai d'estats) com són les bifurcacions "border collision", etc.

Capítol 2

Contextualització

2.1 Convertidors

Moltes branques de l'electrònica tracten el processament de la informació i dels senyals. En canvi, els sistemes de potència electrònics estudien el processament de l'energia elèctrica. Els convertidors electrònics de potència no tenen la finalitat en ells mateixos, sinó que són els intermediaris entre l'energia produïda i la consumida. Constitueixen un camp de creixent importància ja que s'ha estimat que en pocs anys el 90% de l'energia generada en els països desenvolupats serà processada per sistemes de potència electrònica abans de la seva utilització final [2].

Els sistemes de potència electrònics constitueixen una energia “verda”, amb tres objectius principals:

- Convertir l'energia elèctrica d'una forma a una altra, facilitant la seva regulació i el seu control.
- Aconseguir una alta eficiència en la conversió de l'energia i minimitzar la pèrdua de calor.
- Minimitzar la massa dels convertidors electrònics i de l'equipament (per exemple, motors) que ells impulsen.

El corrent suministrada pot ser de dos tipus: ac o dc [3]. Per aquest motiu hi ha quatre models bàsics de convertidors de potència: convertidors ac-dc (rectificadors), convertidors dc-ac (inversors), convertidors dc-dc i els convertidors ac-ac. El terme ac es refereix als voltatges del tipus sinusoidals i el terme dc als voltatges constants.

Interruptors, condensadors, bobines, transformadors i fonts són els components típics d'un convertidor de potència electrònic. Els podem agrupar en tres grups bàsics: les

fonts (de voltatge i de corrent), components passius (resistències, transformadors i condensadors) i finalment els elements commutadors (transistors i díodes).

Els interruptors, tals com transistors i díodes actuen cíclicament, i serveixen per variar les interconnexions del circuit (o la topologia del circuit) al llarg d'un cicle. Un interruptor ideal o bé està en un estat de commutació ("ON") i aleshores la tensió en els borns és nul·la, o bé està bloquejat i aleshores la intensitat de pas és nul·la. D'aquesta forma el producte $i \cdot v$ és sempre zero i per tant, no es dissipa l'energia. Els interruptors actius com els transistors, s'obren i es tanquen en resposta a un senyal aplicat; els passius (díodes) presenten una relació intensitat-voltatge altament no lineal, i el seu estat ve determinat per la resta del sistema.

Els condensadors i les bobines regulen els fluxos de potència sumministrat, emmagatzemant temporalment l'energia. Les equacions diferencials que els caracteritzen són: $v = L \frac{di}{dt}$ per la bobina i $i = C \frac{dv}{dt}$ pel condensador. Aquests elements absorbeixen l'energia, l'emmagatzemen i després la tornen al circuit.

Els transformadors mesuren el voltatge i el corrent i faciliten l'aïllament elèctric entre el voltatge d'entrada i el de sortida.

Ja que l'objectiu dels convertidors és transformar l'energia elèctrica amb una eficiència màxima, és a dir sense pèrdua d'energia, els interruptors, condensadors, bobines i transformadors ideals no dissipen energia i els circuits formats només per aquests elements, tampoc.

La presència d'aquests elements fa que els circuits siguin sistemes dinàmics no lineals i variants en el temps. Això té dues conseqüències immediates: els convertidors de potència són difícils d'analitzar i són propensos a presentar comportaments estranys.

Hi ha però, altres fonts inevitables de no linealitat, com ara

- Els dispositius de commutació del semiconductor tenen característiques de conducció contínua intrínseques no lineals. També tenen capacitàncies no lineals.
- Les inductàncies no lineals abunden: transformadors, amplificadors magnètics, etc.
- Els circuits de control contenen generalment components no lineals: comparadors, multiplicadors, PWMs, etc.

2.1.1 Els convertidors dc-dc

Els convertidor dc-dc són circuits que controlen la càrrega i descàrrega d'energia en els condensadors i les bobines per aconseguir un canvi en el nivell d'una tensió contínua. El flux de l'energia queda determinat per l'ús i el control dels interruptors.

Una forma d'aconseguir el nivell de tensió desitjat és mitjançant un modulador de l'amplada del pols (PWM). Donat un voltatge dc de valor V (el qual pot representar el voltatge dc d'entrada, o bé el de sortida, o fins i tot la diferència entre els dos), podem arreglar-ho fàcilment per tal que un interruptor controlat converteixi l'ona en una "pulse waveform" que vagi alternant entre els valors 0 i V . Aleshores es passa aquest senyal per un filtre passa-baixos (format per bobines i condensadors). Mitjançant el control del cicle de treball d ("duty ratio") de l'interruptor (és a dir, la fracció de temps en la que l'interruptor està obert en un cicle), es pot controlar la fracció de temps en la que el senyal pren el valor V , i per tant, controlar la component dc de l'ona.

Una classe important de convertidors dc-dc es basen en aquest principi.

Els convertidors dc-dc més importants són el convertidor buck i el convertidor boost. Els altres es basen en aquests dos.

2.1.2 El convertidor buck

A la figura (2.1) podem veure l'esquema bàsic del convertidor buck en llaç obert.

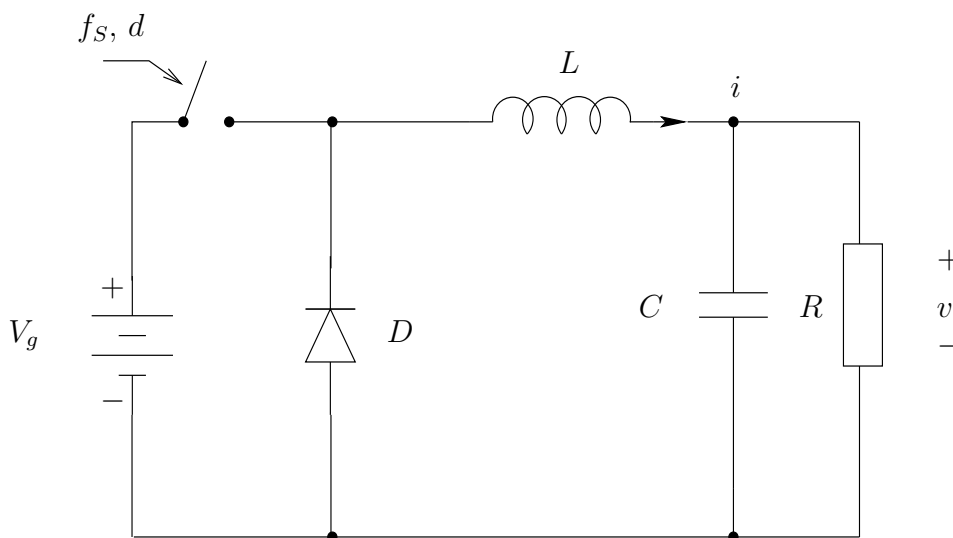


Figura 2.1: Esquema del convertidor buck de llaç obert.

És un dels més simples però més útil dels convertidors: es tracta d'un circuit que converteix un voltatge d'entrada dc en un voltatge de sortida dc d'un nivell més baix. Per això es diu que és un reductor. Una de les aplicacions quotidianes i de gran importància és la conversió del voltatge dc estàndard suministat per la xarxa elèctrica a un voltatge

de 3.3V o menys que necessiten els ordinadors. A més l'eficàcia aconseguida pel convertidor en aquest propòsit és d'un 92%. Encara que en aquest exemple s'usen valors de voltatge baixos, el convertidor buck també s'usa amb valors de diversos kilovats.

Mirem de nou la Figura 2.1. L'interruptor S s'obre i es tanca periòdicament en una freqüència de commutació f_S i amb un cicle de treball d (que com ja s'ha dit, és la fracció de temps en la que l'interruptor està obert). Quan S està tancat, el voltatge d'entrada és transferit al circuit LC que és un filtre passa-baixos. Quan S és obert, la bobina manté el seu flux de corrent, forçant el diode D a conduir i a fer zero el voltatge d'entrada del filtre LC. Per tant el filtre dona una ona quadrada que oscil·la entre 0 i V . La freqüència de tall del filtre és menor que f_S , eliminant la majoria de les ondulacions de la commutació i proporcionant un voltatge de sortida relativament suau a la resistència R .

El procés que acabem de descriure es conegut amb el nom de mode de conducció contínua (MCC), ja que a la bobina hi passa corrent sense interrupció. En canvi, si la sortida es carrega només lleugerament, el corrent de la bobina pot arribar a ser zero durant el tros del cicle en el que D està fora de conducció. Aquesta situació s'anomena mode de conducció discontinua (MCD).

A la pràctica és necessari regular el voltatge de sortida v davant de possibles canvis en el voltatge d'entrada i del corrent, afegint un llaç de control de realimentació com el de la Figura 2.2. Aquest controlador proporcional simplement consisteix en restar un voltage constant de referència, V_{ref} , del voltatge de sortida i amplificar la diferència, v_e , per un guany A per formar un senyal de control, $v_{con} = A(v - V_{ref})$. Aquest senyal és sumministrat a un circuit PWM format per una rampa (dent de serra) que oscil·la amb freqüència f_S i amb un voltatge v_{ramp} , entre els nivells V_l i V_u , i un comparador que és el que governa l'interruptor. Aquest interruptor condueix si $v_{con} < v_{ramp}$; per tant, v_{con} determina el cicle de treball d . L'objectiu de tot plegat es aconseguir que el voltatge de sortida valgui V_{ref} .

2.1.3 El convertidor boost

A diferència de l'anterior, el convertidor boost és un convertidor elevador ja que el voltatge de sortida és superior al d'entrada. A la Figura 2.3 podem veure el circuit en llaç obert que tot seguit comentarem.

De forma semblant al buck, l'interruptor T commuta periòdicament amb una freqüència de commutació f_S i per tant, el circuit presenta dues topologies segons l'estat en que es trobi l'interruptor.

Quan l'interruptor està en conducció, el corrent de la bobina creix i el diode queda polaritzat inversament, i en conseqüència el corrent que passa per ell serà pràcticament nul. I aleshores, la diferència de potencial en els borns de la bobina serà igual a la tensió d'entrada, V_g .

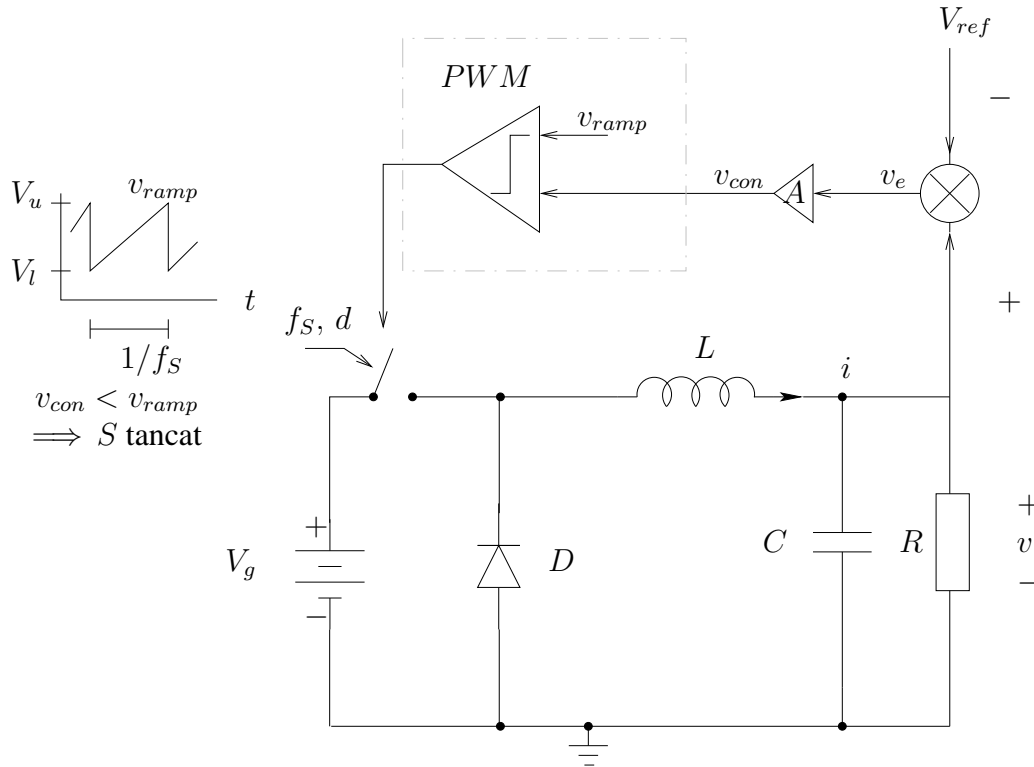


Figura 2.2: El convertidor buck amb un llaç de control.

En canvi quan l'interruptor està obert, el condensador es carrega a través del diode amb una tensió que és igual a la d'entrada menys la induïda a la bobina. En aquest cas el corrent a la bobina és decreixent, fins que l'interruptor no torna a canviar d'estat.

La descripció que hem donat és en mode de conducció contínua.

De la mateixa manera que succeeix amb el buck, quan el diode i el transistor estan tancats, la bobina pot descarregar-se totalment i la intensitat fer-se zero. És el MCD.

De forma semblant al buck l'interruptor es controla mitjançant una llei de control externa. Una altra forma de control altament utilitzada és la que usa una superfície de lliscament. Aquesta consisteix en demanar que les variables d'estat verifiquin una certa condició lineal, l'equació de la qual determina l'anomenada superfície de lliscament. L'interruptor canvia d'estat segons estiguem per "sobre" o per "sota" de la superfície de lliscament. Es demana que les òrbites quedin en aquesta superfície. D'aquí el nom de lliscament. I també, per aquest motiu, el nombre de commutacions del sistema és en teoria infinit. Es crea així un nou mode de moviment que s'anomena mode de lliscament [4],[5],[6]. Qualsevol implementació pràctica d'un control de lliscament implica

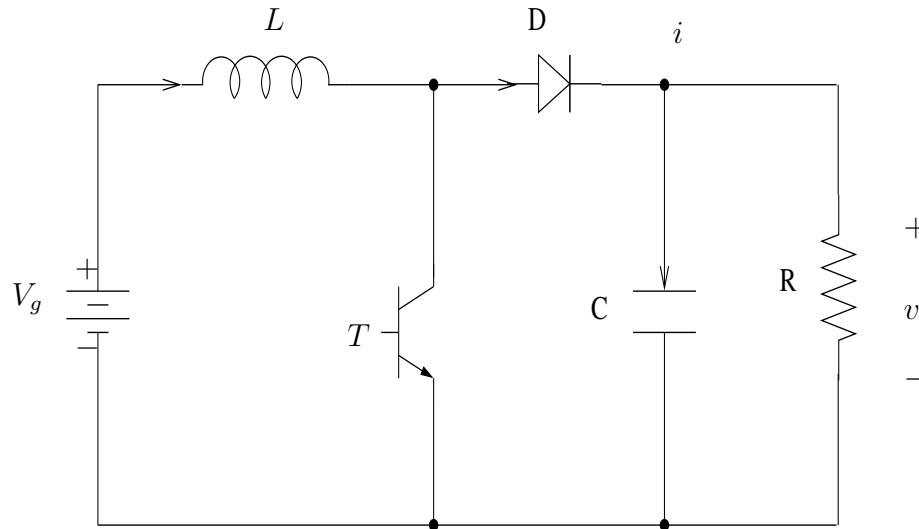


Figura 2.3: El convertidor boost en llaç obert.

limitar la freqüència de commutació a un nivell acceptable, i això tot sovint s'assoleix mitjançant un control amb histèresi, on l'interruptor és accionat en un sentit quan l'equació lineal de la superfície de lliscament excedeix un determinat nivell i es acciona en l'altre sentit quan està per sota d'un altre nivell (òbviament inferior al primer). Ho tractarem amb més detall als Capítols 4 i 5.

2.1.4 Altres convertidors

Cal destacar per la seva importància tot i que són derivats dels dos anteriors els següents convertidors:

- El convertidor buck-boost

S'obté connectant en cascada els convertidors buck i boost. Per tant, pot proporcionar una tensió de sortida superior o inferior a la d'entrada.

- El convertidor Ćuk

Porta el nom del seu inventor, el Dr. Slobodan Ćuk i representa el dual topològic del circuit buck-boost. Manté les propietats del seu predecessor i en millora d'altres, fins al punt de convertir-se en un dels circuits més interessants.

2.2 Dinàmiques no lineals i caos

2.2.1 Sistemes dinàmics i models de l'espai d'estats

Un sistema dinàmic és qualsevol sistema l'estat del qual varia en el temps. Aquesta definició no és referent només a sistemes que es mouen en el temps; qualsevol classe de canvi en un sistema es pot classificar com a dinàmic. Així, el canvi d'una composició química d'una solució és un problema dinàmic. I també ho és un circuit elèctric, tot i no tenir parts que es moguin.

Per poder estudiar aquests sistemes cal determinar un nombre mínim de variables que especifiquin de forma unívoca l'estat del sistema. Les anomenarem variables d'estat. L'estudi de la dinàmica bàsicament consisteix en investigar com varien aquestes variables d'estat en el temps. Matemàticament això s'aconsegueix relacionant la velocitat de canvi d'aquestes variables amb el seu valor actual mitjançant un sistema d'equacions diferencials d'ordre 1. Per tant, si x_i per $i = 1 \dots n$ són les variables d'estat, el sistema dinàmic queda representat per

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad (2.1)$$

o en forma vectorial

$$\dot{x} = f(x). \quad (2.2)$$

Alguns sistemes canvien de forma discreta. Per exemple, quan un sistema continu es analitza només en determinats instants de temps. La majoria dels circuits dels convertidors electrònics es poden modular d'aquesta forma. També podem trobar sistemes que són discrets de forma inherent, com ara els sistemes digitals electrònics. En aquests casos cal expressar l'estat de les variables a l'instant $k + 1$, en funció de l'estat de les variables a l'instant k :

$$x_{k+1} = f(x_k). \quad (2.3)$$

En aquesta última equació, el subíndex no indica la component del vector, sinó l'instant del temps.

Les equacions de la forma (2.2) i (2.3), juntament amb un conjunt de condicions inicials donat, es poden resoldre analíticament o numèricament i les solucions ens donen el futur estat del sistema en funció del temps.

Geomètricament es pot visualitzar la dinàmica construint un espai on les coordenades són les variables d'estat. Aquest espai s'anomena espai de fases o espai d'estats. L'estat del sistema en qualsevol instant és representat per un punt d'aquest espai. Començant des de qualsevol posició inicial donada, el punt es mou per l'espai de fases, amb un moviment que es completament determinat per les equacions d'estat. El camí obtingut s'anomena òrbita o trajectòria del sistema que té el seu origen en el punt donat

per les condicions inicials. Aquestes trajectòries no són res més que les solucions dels sistemes (2.2) o (2.3).

2.2.2 Sistemes autònoms i no autònoms

Els sistemes dinàmics les equacions dels quals no presenten cap entrada que depen del temps o altres tipus de variacions en el temps, s'anomenen sistemes autònoms. Un exemple típic d'un sistema autònom ens el dona l'anomenat sistema de Lorentz:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -3(x - y) \\ \frac{dy}{dt} &= -xz + rx - y \\ \frac{dz}{dt} &= xy - z\end{aligned}\tag{2.4}$$

on r és un paràmetre.

Els sistemes amb entrades externes o la definició dels quals varia en el temps, s'anomenen sistemes no autònoms. En aquests sistemes, els membres de la dreta de (2.2) contenen termes que depenen del temps. Un exemple típic és el cas del pèndul amb un suport oscil·lant, les equacions del qual són

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y \\ \frac{dy}{dt} &= -y - g \sin x + F \cos \omega t\end{aligned}\tag{2.5}$$

Els circuits d'electrònica de potència amb una lògica de control que varia en el temps, són sistemes no autònoms.

2.2.3 Camp vectorial dels sistemes lineals, linealitzats i no lineals

Per poder estudiar el comportament de la dinàmica d'un sistema, s'ha de trobar la trajectòria que comença en un punt donat. No obstant, en general no cal trobar totes les trajectòries possibles per estudiar el sistema. Podem observar que el membre de l'esquerra de l'equació (2.2) ens dona la velocitat de canvi de les variables d'estat. És un vector que està en funció de les variables d'estat. Per tant, l'equació (2.2) ens defineix un vector en cada punt de l'espai d'estats. Les propietats del sistema es poden estudiar a partir d'aquest camp vectorial.

Si el sistema és lineal, aquest procés és força clar i planer. En aquest cas es costum expressar l'equació (2.2) de la forma

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (2.6)$$

on A i B són matrius invariants en el temps, i les components del vector u són les entrades externes imposades al sistema.

Els punts on el vector \dot{x} té magnitud zero (és a dir, on $\dot{x} = Ax + Bu = 0$) s'anomenen punts d'equilibri. És evident de (2.6) que el terme Bu té un efecte de trasllació sobre el punt d'equilibri, i que l'estabilitat del punt la dona la matriu A . A més, per estudiar l'estabilitat del punt d'equilibri, hom considera el sistema lliure de les entrades externes imposades, on la matriu A opera sobre el vector x per donar el vector \dot{x} . En general aquests dos vectors presenten direccions diferents. Però hi ha unes direccions especials a l'espai d'estats on si el vector x es troba en una d'elles, el vector resultant \dot{x} també es troba en la mateixa direcció. Qualsevol vector que està en una d'aquestes direccions especials s'anomena vector propi. I el factor que contrau o expandeix el vector propi quan li apliquem la matriu A , s'anomena valor propi. Els valors propis λ , s'obtenen resolent l'equació $|A - \lambda I| = 0$, on I és la matriu identitat, i els vectors propis són obtinguts a partir de cada valor propi real resolent l'equació $(A - \lambda I)x = 0$. Aleshores, hom pot construir les solucions de l'equació diferencial com una combinació lineal de les solucions al llarg dels vectors propis v_i , expressades de la forma $e^{\lambda_i t} v_i$.

D'aquí es pot deduir que si les parts reals dels valors propis són negatives, el sistema és estable, entenen com a sistema estable aquell en el que si una perturbació qualsevol ens allunya eventualment del punt d'equilibri, el sistema ens hi torna a dur. Per aquest motiu un punt d'equilibri estable s'anomena node. Si les parts reals dels valors propis són positives, el sistema és inestable. Si les parts imaginàries de tots els valors propis són zero, el sistema no oscil·la; en cas contrari sí. Si alguns valors propis són reals i positius i els altres són reals i negatius, el sistema és estable en el subespai generat pels vectors associats als valors propis negatius, i és inestable fora d'aquest. En aquest cas es diu que el punt d'equilibri és un punt de sella, i el sistema que té un punt d'equilibri que és un punt de sella és globalment inestable. Si els valors propis són imaginaris purs, la resposta del sistema és oscil·latòria sense recargolaments i el punt d'equilibri s'anomena centre. Veure Figura 2.4

En els sistemes lineals amb $|A| \neq 0$ només hi pot haver un punt d'equilibri el qual determina totalment el comportament global del sistema. Per tant, aquests sistemes lineals són molt fàcils d'analitzar. Per això, es troben en el punt de mira de moltes investigacions. Avui en dia moltes de les metodologies de control disenyades es basen en la teoria dels sistemes lineals.

Per desgràcia, els sistemes que ens serveixen per explicar la natura i l'enginyeria, rarament són totalment lineals. En els sistemes no lineals el comportament del camp

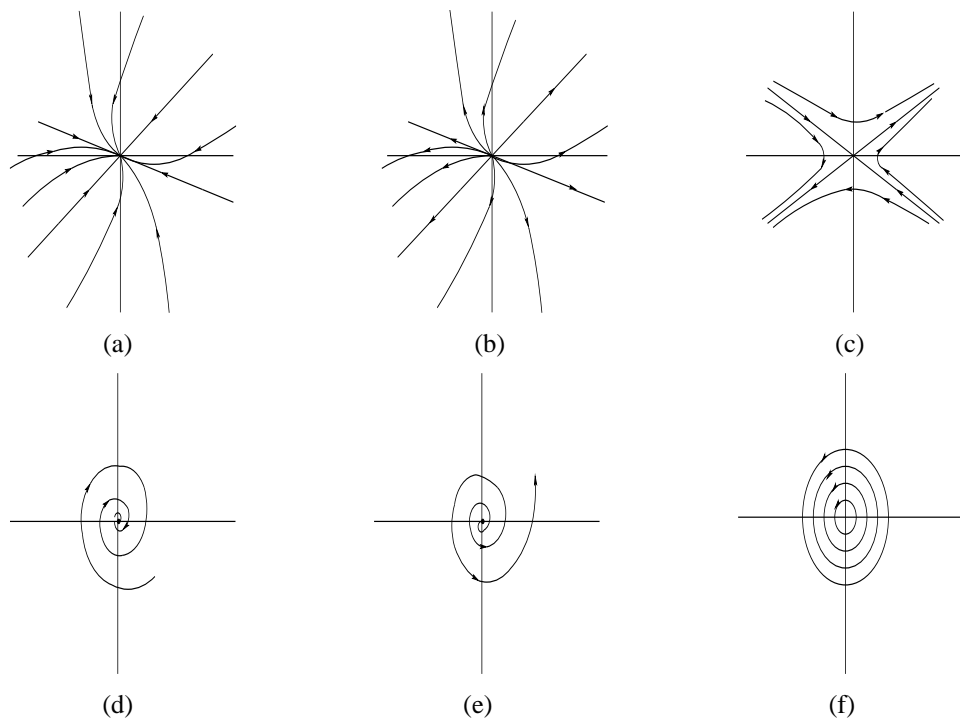


Figura 2.4: Camp vectorial al voltant d'un punt d'equilibri d'un sistema lineal 2-dimensional. (a) Un node atractor: els dos valors propis reals i negatius. (b) Un node repulsiu: els dos valors propis reals i positius. (c) Un punt de sella: ambdós valors propis reals, un positiu i l'altre negatiu. (d) Una espiral atractora: valors propis complexos i conjugats, amb part real negativa. (e) Una espiral repulsiva: valors propis complexos i conjugats amb part real positiva. (f) Un centre: valors propis imaginaris purs.

vectorial pot ser diferent en les diverses parts de l'espai d'estats i hi pot haver més d'un punt d'equilibri. En aquests casos es pot estudiar localment les propietats de l'espai d'estats linealitzant el sistema al voltant dels punts d'equilibri, definits per $\dot{x} = f(x) = 0$.

En general, si x^* és un punt d'equilibri de $\dot{x} = f(x)$, la linealització local al voltant del punt d'equilibri x^* , ve donada per

$$\delta \dot{x} = Jf(x^*) \delta x, \quad (2.7)$$

on $\delta x = x - x^*$ i la matriu $Jf(x^*)$ és la matriu Jacobiana de f avaluada en el punt d'equilibri x^* .

Les propietats del camp vectorial al voltant d'un punt d'equilibri donat, es poden obtenir estudiant els valors i els vectors propis de la matriu Jacobiana. Aquesta repre-

sentació és ampliament utilitzada pels enginyers perquè en general els punts de treball d'un sistema són els punts d'equilibri, i si les perturbacions són petites l'aproximació lineal dona un model simple de treball del sistema dinàmic.

En els sistemes no lineals un espera analitzar les propietats de tot el camp vectorial estudiant-lo tros per tros, dividint-lo en regions lineals. Desafortunadament, el tot no s'ajusta amb la suma de les parts. Hi ha propietats globals que no poden trobar-se estudiant el sistema per regions.

2.2.4 Conjunts atractors en sistemes no lineals

Podem trobar-nos en els sistemes no lineals que òrbites amb diferents condicions inicials convergeixen en el temps a una mateixa òrbita, que s'anomena cicle límit o conjunts w -límit, i que es comporta com un atractor dels punts de l'espai de fases. En els sistemes no lineals de dimensió 3 o més aquests cicles límits poden descriure llaços sense que l'òrbita es talli a sí mateixa. Trobem aleshores cicles límits periòdics, quasiperiòdics i finalment òrbites sense període però que estan localitzades en una regió acotada de l'espai d'estats. En aquesta situació l'estat del sistema roman acotat, amb un volum definit dins de l'espai de fases, però sense que es repeteixi mai el mateix estat: aquests atractors s'anomenen atractors estranys i la situació en què es produeixen s'anomena caos. Quan això succeeix en un circuit electrònic, el sistema aparentment sembla obeir unes oscil·lacions aleatòries.

2.2.5 Caos

Un dels primers investigadors que es va trobar amb un atractor estrany va ser en Lorenz [27], el qual estudiava la dinàmica de sistemes meteorològics donats pel model matemàtic definit per les equacions diferencials (2.4) on r és un paràmetre.

Lorenz va observar que per certs valors del paràmetre r , trajectòries que començaven en condicions inicials molt pròximes, divergien i donaven lloc a diferents estats. És el què es coneix com a dependència sensible de les condicions inicials, fet que constitueix una de les característiques del caos.

Aquesta sensibilitat té una repercursió important en l'estudi dels sistemes, ja que en gran part, l'estudi d'aquests està motivat per la predicció de la evolució de l'estat del sistema. Aquesta dependència sensible en les condicions inicials en els sistemes caòtics fa que sigui impossible aquesta predicció en períodes curts de temps. Això es degut a que les condicions inicials no són mesurades amb una exactitud infinita. Petitíssims errors en la definició de les condicions inicials no són importants en sistemes estables no caòtics, ja que les trajectòries que comencen en condicions inicials lleugerament

diferents no divergeixen exponencialment. En canvi en un atractor caòtic, estats inicials molt pròxims divergeixen exponencialment i per tant, les prediccions són impossibles.

Una altra característica d'aquest fenomen és aquesta: imaginem que agafem un conjunt de condicions inicials contingudes dins d'una bola de l'espai d'estats i n'estudiem l'evolució. Trobaríem que aquesta bola s'expandeix en una direcció, ja que les condicions inicials s'allunyen unes de les altres en aquesta direcció. Però, segons el teorema d'en Liouville (el qual estableix que en sistemes conservatius, és a dir, sistemes que no dissipen energia, això és, sense resistències i friccions, el volum del conjunt de les condicions inicials es manté i que en els sistemes dissipatius, el volum es contrau) si la forma del conjunt de punts s'expandeix en una direcció, s'ha de contraure en una altra.

Alguna cosa passa perquè malgrat aquesta direcció en la que té lloc l'expandiment, la regió es mantingui dins d'uns contorns. Això és el que passa en els sistemes caòtics: la direcció que s'expandeix es doblega. Hi ha un continu estirament i doblegament de l'espai d'estats que assegura que les trajectòries romanguin dintre d'un espai acotat, malgrat la divergència entre elles.

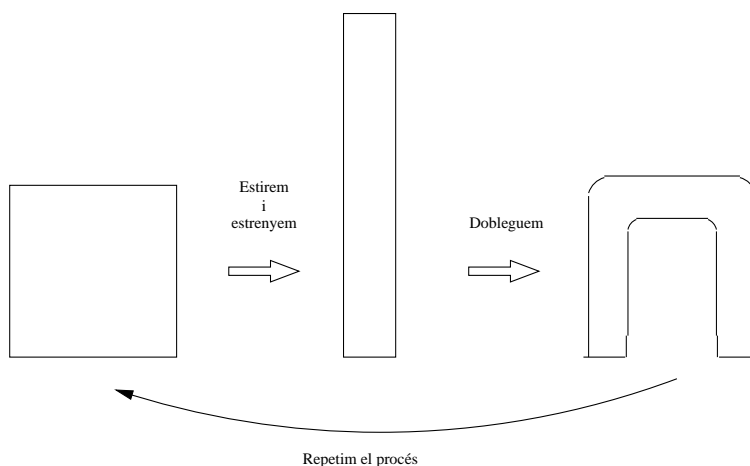


Figura 2.5: Una iteració de la funció de ferradura d'en Smale.

Smale [28] va demostrar que aquest procés d'estirament i doblegament es pot explicar mitjançant una transformació anomenada l'aplicació ferradura. Per visualitzar-la considerarem un sistema de dimensió 2. Considerem una figura d'àrea quadrada a l'espai d'estats (Figura 2.5). L'estirem en una direcció i l'estrenyem en una altra. Aleshores dobleguem la figura en la direcció més llarga donant-li forma de ferradura. Repetim aquest procés sobre l'àrea de la ferradura. L'aplicació iterada d'aquest esdeveniment produeix una estructura de fines capes la qual és present en els atractors estranys dels sistemes caòtics.

2.2.6 L'aplicació de Poincaré

En moltes situacions és més convenient per fer l'anàlisi del sistema, tenir-lo expressat com una aplicació discreta que com un sistema en temps continu. Això és possible gràcies al mètode inventat per Henri Poincaré. El mètode consisteix en fixar una superfície, anomenada secció de Poincaré, a l'espai d'estats. L'aplicació de Poincaré és aleshores, la que transforma el punt intersecció de la superfície amb la trajectòria, amb el nou punt intersecció de la trajectòria amb el mateix costat de la superfície. D'aquesta manera, l'evolució en temps continu a l'espai d'estats queda reduïda a una aplicació de la forma (2.3) en un espai de dimensió inferior, tal i com es pot veure a la Figura 2.6(a).

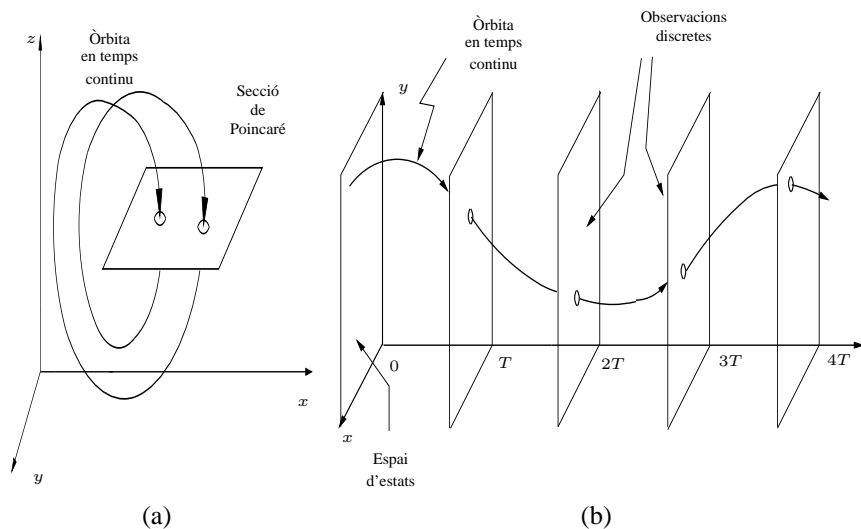


Figura 2.6: Obtenció del model discret d'un sistema dinàmic continu en el temps: (a) el sistema és autònom, i (b) per un sistema no autònom on l'entrada externa té període T .

Si el sistema té una dependència explícita del temps (sistemes no autònoms), on la funció externa té període T , la manera més natural d'elegir l'aplicació de Poincaré és l'aplicació que transforma les variables d'estat a l'instant t en les de l'instant $t + T$ (Figura 2.6(b)). És com si a l'espai d'estats hi tinguèssim un estroboscopi que il·luminés les variables d'estat en els instants múltiples de T .

Si l'òrbita en temps continu és periòdica, hi haurà un nombre finit de punts sobre la secció de Poincaré. En conseqüència el sistema discretitzat ens mostra la periodicitat de l'òrbita a través de la periodicitat dels corresponents valors de les variables d'estat intersectats en la superfície. Perquè això sigui possible és necessari que la superfície de Poincaré sigui tal que experimenti el màxim d'interseccions possibles amb l'òrbita donada. En un sistema no autònom, la periodicitat de l'òrbita ve definida en funció del

període de la senyal externa i no com a funció del nombre de llaços de l'òrbita a l'espai d'estats en temps continu. Així, una òrbita formada per un llaç en temps continu, però que necessita de dos cicles de la funció externa per representar el llaç, es diu que és 2 periòdica.

En el cas de les òrbites quasiperiòdiques, on dues freqüències són incommensurables, els punts de l'òrbita sobre la secció de Poincaré mai no coincidiran un amb l'altre, però descriuran un llaç tancat sobre la superfície. Si l'òrbita és caòtica, el comportament asimptòtic en temps discret presentarà un nombre infinit de punts, continguts en un volum finit, i distribuïts en una regió d'una estructura complicada. És l'atractor estrany que es fa visible en el domini discret.

2.2.7 Dinàmiques dels sistemes en temps discret

Per analitzar els sistemes no lineals expressats per l'equació (2.3), el primer que es fa és trobar els punts fixos $x_{n+1} = x_n = x^*$. Aleshores es pot linealitzar el sistema discret localment al voltant del punt fix obtenint la matriu jacobiana. Els valors propis de la matriu indiquen l'estabilitat del punt fix.

Ara bé, hi ha una subtil diferència entre el què indiquen els valors propis en temps continu i el què indiquen en temps discret. La matriu jacobiana en un sistema en temps continu, quan opera sobre el vector de les variables d'estat, ens dona el vector velocitat corresponent a aquestes variables. En canvi en el sistema en temps discret, el resultat d'aplicar la matriu sobre el vector de les variables d'estat, és el vector de les variables d'estat en la següent iteració.

Per exemple, sigui el sistema de dimensió 2 en temps discret linealitzat al voltant del punt fix $(0, 0)$, donat per les equacions:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}$$

Siguin λ_1 i λ_2 els valors propis de la matriu jacobiana. Suposem que la condició inicial es troba en la direcció del vector propi associat al valor propi real λ_1 . Si $0 < \lambda_1 < 1$, la iteració següent va a parar a un punt situat més a prop del punt fix i en la mateixa direcció del vector propi associat a λ_1 , i en les successives iteracions els valors de les variables d'estat convergeixen al punt fix en la direcció del vector propi (Figura 2.7 (a)). Si els dos valors propis són reals, positius i menors que la unitat, qualsevol condició inicial es mourà asimptòticament a prop d'un vector propi i convergirà al punt fix. Per tant, el sistema és estable i el punt fix és un atractor. D'una altra banda, si la magnitud dels valors propis és major que 1, el sistema és inestable i el punt fix és un repulsiu (Figura 2.7(b)). Si aquests valors propis són reals, amb λ_1 de magnitud menor que 1, i la magnitud de λ_2 més gran que la unitat, el sistema és estable en una direcció

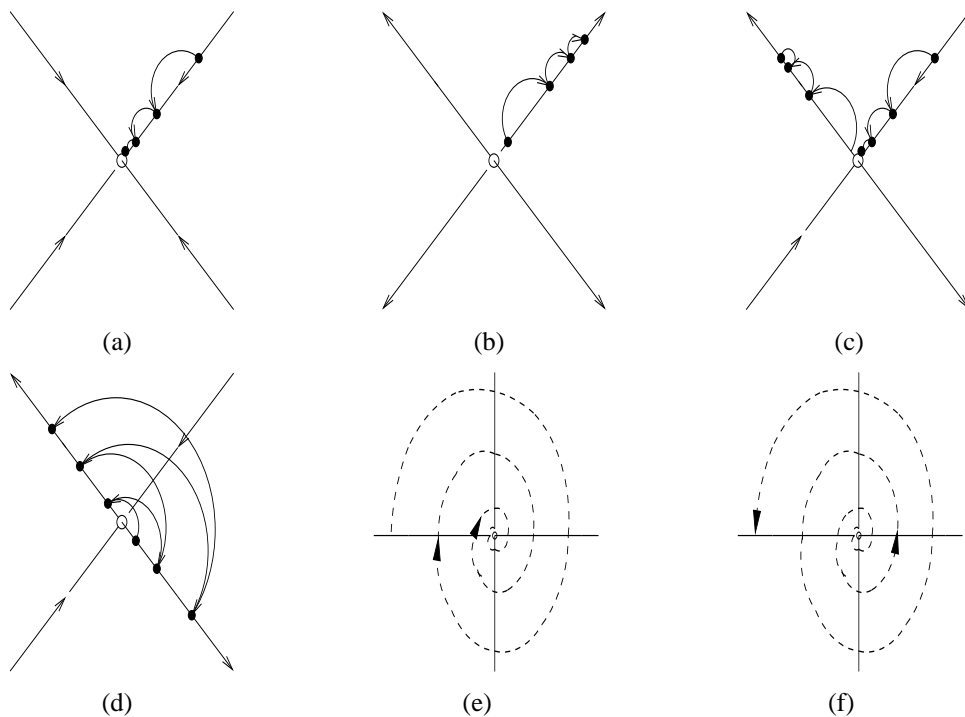


Figura 2.7: Exemples de punts fixos en sistemes discrets linealitzats 2-dimensionals. (a) Un atractiu: valors propis reals, $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$. (b) Un repulsiu: valors propis reals, $\lambda_1, \lambda_2 > 1$. (c) Un “regular saddle”: valors propis reals, $0 < \lambda_1 < 1, \lambda_2 > 1$. (d) Un “flip saddle”: valors propis reals, $0 < \lambda_1 < 1, \lambda_2 < -1$. (e) Una espiral atractora: valors propis complexos, $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1$. (f) Una espiral repulsiva: valors propis complexos: $|\lambda_1|, |\lambda_2| > 1$.

(l'associada al valor propi λ_1) i inestable en una altra direcció. Aquest tipus de punts fixos s'anomenen “saddle”. Si un dels valors propis és negatiu, els successius estats van saltant d'una banda a l'altra del punt fix, el qual s'anomena “flip saddle” (Figura 2.7(d)). Si els dos valors propis són positius, un punt a un costat del punt fix roman en el mateix costat en les successives iteracions, i aleshores el punt fix s'anomena “regular saddle” (Figura 2.7(d)).

Si λ_1 i λ_2 són complexos conjugats amb magnituds menors que la unitat, qualsevol condició inicial dóna una successió de punts que es mouen en forma d'espiral convergent al punt fix. Es diu que el punt fix és una espiral atractora (Figura 2.7(e)). En canvi, si els valors propis són complexos conjugats i les seves magnituds són superiors a 1, el punt fix és una espiral repulsiva (Figura 2.7(f)). Aquestes idees són fàcils d'estendre a

dimensions superiors.

És important observar que en un sistema discret un punt fix és estable si tots els valors propis de la matriu Jacobiana tenen una magnitud menor que la unitat. En canvi, un sistema continu en el temps té un punt d'equilibri estable si la part real dels valors propis és negativa.

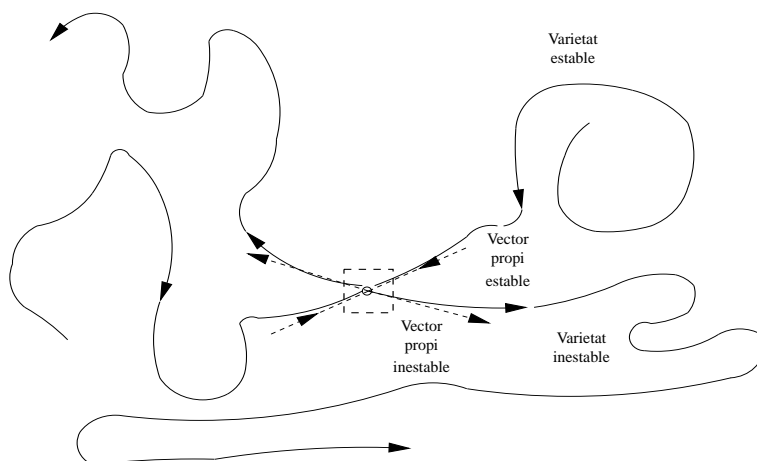


Figura 2.8: Vista esquemàtica de les varietats estables i inestables d'un punt fix "saddle". Tamé es visible l'entorn linealitzat del punt fix.

Fora d'un petit entorn del punt fix, l'anterior descripció del comportament del sistema linealitzat deixa de ser vàlida. Per exemple, si el punt fix és del tipus "saddle", els vectors propis aplicats en el petit entorn del punt fix, tenen la propietat que si una condició inicial està situada en la direcció del vector propi, roman en ella en les successives iteracions. Fora d'aquest petit entorn les línies amb aquesta propietat no formen una línia recta. Aleshores es poden identificar unes línies corbes que passen pel punt fix i que tenen la propietat que les successives iteracions de qualsevol condició inicial situada sobre ella, segueixen estant sobre ella. Aquestes corbes s'anomenen varietats invariants (Figura 2.8). Si les successives iteracions d'una condició inicial s'apropen al punt fix al llarg de la varietat, aleshores es diu que la varietat és estable; en canvi si s'allunya del punt fix (o bé s'apropa cap a ell per l'aplicació inversa $x_n = f(x_{n+1})$), aleshores es diu que la varietat és inestable. És obvi que els vectors propis en el model linealitzat són localment tangents a les varietats estables i inestables del punt fix.

Si la condició inicial no es troba sobre cap de les dues varietats, les iteracions de l'aplicació fan que els successius punt s'allunyin de la varietat estable i s'apropin a la inestable. La varietat inestable atrau els punts de l'espai d'estats, i si a més hi ha un punt fix del tipus "saddle" en el sistema, tots els atractors es troben sobre la seva

varietat inestable. En canvi, la varietat estable actua com un repulsiu dels punts de l'espai d'estats. A més, si hi ha més d'un atractor en el sistema, la varietat estable del punt "saddle" actua com a separador de les bases d'atracció. Per tant, aquestes varietats són molt importants per determinar les dinàmiques.

En els sistemes no lineals aquestes varietats es poden corbar i recargolar-se a l'espai d'estats de forma força complicada. L'estructura i intersecció d'aquestes varietats juguen un paper molt important en la definició de la dinàmica de sistemes no lineals.

2.2.8 Exponents de Lyapunov

Una altra forma de caracteritzar un sistema caòtic és mitjançant la quantificació de les raons d'allargament i escursament en l'espai d'estats. Això es fa mitjançant els exponents de Lyapunov. En la direcció d'allargament dues trajectòries inicialment pròximes divergeixen, mentre que en la direcció d'escursament, dues trajectòries veïnes convergeixen. Si s'aproxima aquesta convergència i divergència de dues solucions mitjançant funcions exponencials les raons d'escursament i allargament són quantificades pels exponents. Aquests valors són els exponents de Lyapunov. Ja que aquests exponents varien sobre l'espai d'estats, s'han de ponderar aquestes raons de les exponencials de la divergència (convergència) d'òrbites inicialment pròximes sobre un llarg període de temps (infinit).

El nombre total dels exponents de Lyapunov és igual als graus de llibertat del sistema. Si les trajectòries del sistema tenen al menys un exponent de Lyapunov positiu, aleshores o bé són trajectòries inestables o bé caòtiques. Si les trajectòries es mouen en una regió de l'espai d'estats acotada i tenen un exponent positiu, aleshores segur que hi ha caos en el sistema. Com més gran és el valor de l'exponent positiu, més curt és l'interval de temps en què el sistema és predicible. D'aquí que l'estimació del valor de l'exponent de Lyapunov més gran sigui d'especial importància.

2.2.9 Bifurcacions

Una bifurcació és un canvi qualitatiu en la dinàmica que es produeix quan un paràmetre del sistema canvia de valor. A l'electrònica de potència, els convertidors estan preparats en general, per funcionar sota un mode de treball específic que ens proporciona un voltatge de sortida concret, característiques espectrals concretes, etc. Per tant, el mode de treball pot canviar substancial i qualitativament quan es varia un paràmetre com pot ser el voltatge d'entrada o la carga. En conseqüència, l'estudi de les bifurcacions és de gran importància en aquests sistemes.

Una forma d'estudiar les bifurcacions és mitjançant els anomenats diagrames de bifurcació. Aquests consisteixen en una representació gràfica en la que a l'eix de les

abcisses es col·loquen els valors del paràmetre que varia. A l'eix de les ordenades es representa amb punts el comportament asimptòtic d'una de les variables d'estat. Si el sistema opera en període 1 (és a dir, període igual a l'interval de temps avaluat) per algun valor del paràmetre, hi haurà només un punt representat en la vertical que passa per aquest valor del paràmetre. Si el període fos 2, hi haurà dos punts. Si el comportament del sistema esdevé caòtic per algun valor del paràmetre, hi haurà un gran nombre de punts (en teoria infinits) en el corresponent valor del paràmetre. Aquest diagrama de bifurcació resumeix els canvis en el comportament del sistema en resposta a la variació del paràmetre.

2.3 Bifurcacions en aplicacions suficientment diferenciables

Les quatre principals bifurcacions que es poden trobar en un sistema en temps discret

$$x_{k+1} = f(x_k, \mu), \quad (2.8)$$

on f és suficientment diferenciable arreu respecte de x i μ és el paràmetre de bifurcació són:

- La bifurcació “pitchfork”.

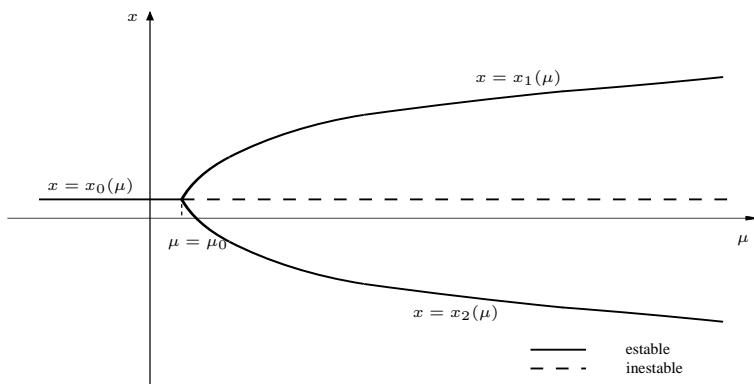


Figura 2.9: Representació de la bifurcació “pitchfork”.

Aquesta bifurcació té lloc quan per $\mu < \mu_0$ tenim un únic punt fix estable, x^* de (2.8) (és a dir, $x^* = f(x^*, \mu)$ per $\mu < \mu_0$), mentre que per $\mu > \mu_0$ aquest és inestable però aleshores el sistema presenta altres dos punts fixos que són estables.

A la Figura 2.9 hi ha representat un exemple (x_1 representa el punt fix estable per $\mu < \mu_0$ i inestable per $\mu > \mu_0$; x_2 i x_3 són les altres dos punts fixes que apareixen per $\mu > \mu_0$, i que són estables; tots tres depenen de μ).

- La bifurcació “saddle-node”.

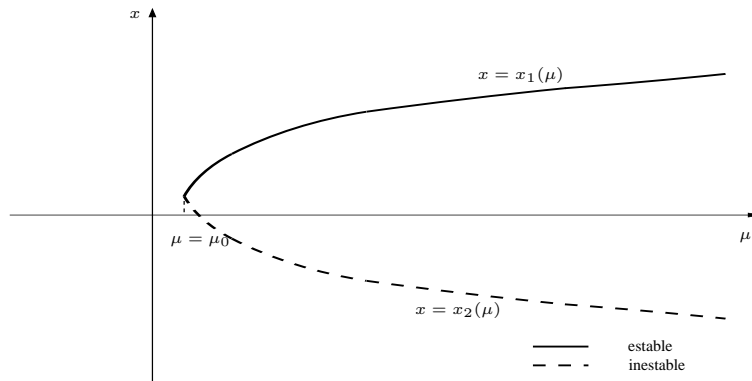


Figura 2.10: Representació de la bifurcació saddle-node.

En aquesta situació, el sistema no presenta cap punt fix per $\mu < \mu_0$ i per $\mu > \mu_0$ n'hi ha dos, un que és estable (x_1) i un altre que és inestable (x_2). Està representat a la Figura 2.10.

- La bifurcació de doblament de període.

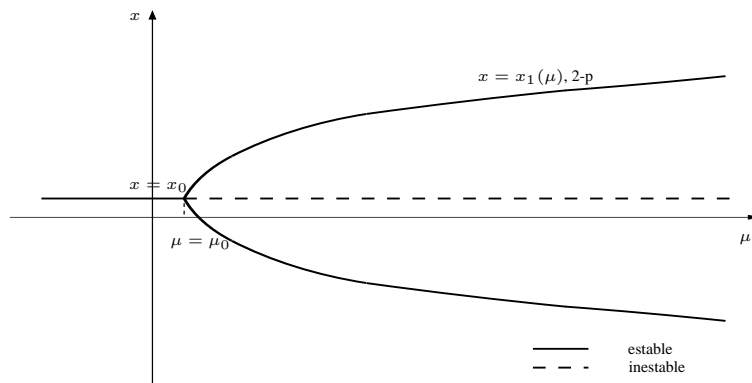


Figura 2.11: Representació de la bifurcació doblament de període.

Aquesta es produeix quan pels valors del paràmetre $\mu < \mu_0$ tenim un punt fix que és estable (x_0) i que per $\mu > \mu_0$ és inestable, però aleshores el sistema presenta

una òrbita 2-periòdica, x_1 , que és estable (és a dir, $x_1 \neq f(x_1, \mu)$, però $x_1 = f(f(x_1, \mu), \mu)$). Es considera que pel valor del paràmetre $\mu = \mu_0$ hi ha hagut un doblament de període. Si aquests doblaments de períodes es van repetint, el fenomen es coneix amb el nom de doblament de període en cascada. Ho il·lustrem a la Figura 2.11.

- La bifurcació de Neimark-Sacker.

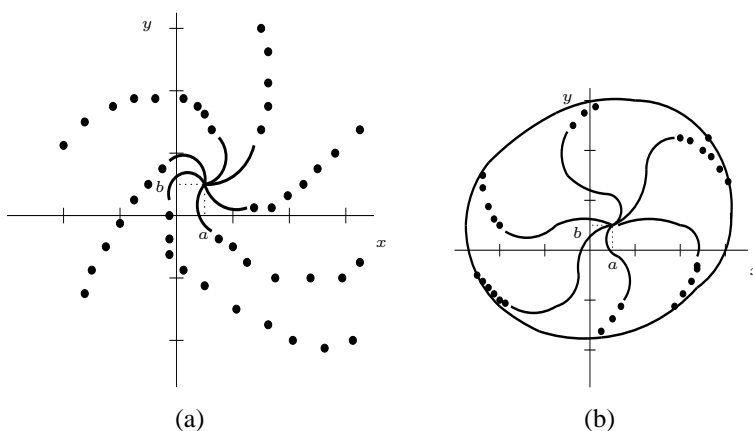


Figura 2.12: Pla de fase per $x_{k+1} = f(x_k, \mu)$ de dimensió 2: (a) $\mu < \mu_0$. El punt fix (a, b) és estable i les iteracions s'aproximen cap a ell. (b) $\mu > \mu_0$, el punt fix (a, b) , ha esdevingut inestable i les iteracions s'allunyen d'ell cap a un cicle límit estable.

Aquesta bifurcació només es presenta si estem en un espai de dimensió superior o igual a 2. Es dona quan el punt fix (a, b) de l'aplicació és estable per valors del paràmetre $\mu < \mu_0$ i inestable per $\mu > \mu_0$. A més en el cas $\mu < \mu_0$, l'aplicació iterada de la funció des de qualsevol condició inicial, ens apropa al punt fix tot seguint un recorregut en forma d'espiral. En canvi, per $\mu > \mu_0$, el punt fix és inestable i qualsevol condició inicial a prop d'ell és allunyat d'ell en les successives iteracions cap a una corba invariante, la qual és estable i atractora de qualsevol punt de l'espai d'estats. Ho tenim il·lustrat a la Figura 2.12

Ja que aquestes aplicacions sorgeixen al fer seccions de Poincaré en l'espai d'estats de sistemes continus en el temps, és interessant observar que passa en el sistema continu quan es presenta una bifurcació de Neimark-Sacker. Abans de la bifurcació la secció de Poincaré ens mostra un punt fix estable, per tant, en el sistema en temps continu hi tenim un cicle límit estable. Després de la bifurcació, a la secció de Poincaré hi tenim un llaç tancat, el qual és equivalent a una òrbita

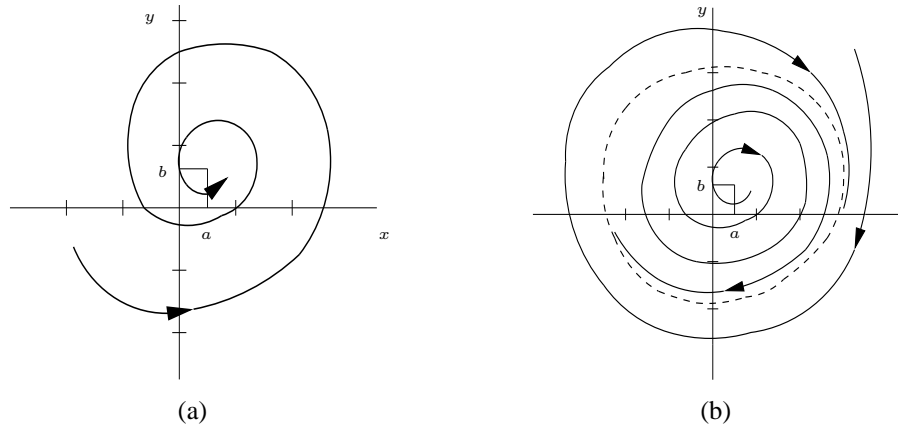


Figura 2.13: El naixement d'un cicle límit en un sistema continu en el temps $\dot{x} = f(x, \mu)$ de dimensió superior o igual a 2 en una bifurcació Hopf. (a) $\mu < \mu_0$ i (b) $\mu > \mu_0$.

quasiperiòdica en el sistema de temps continu. Així doncs, en temps continu, aquesta bifurcació marca el pas d'una òrbita periòdica a una òrbita quasiperiòdica.

Ara bé, aquesta situació ens la podem trobar directament en el sistema $\dot{x} = f(x, \mu)$, on en aquest cas el què tenim és un punt d'equilibri donat per $f(x, \mu) = 0$. Aquest punt d'equilibri passa de ser estable a inestable quan $\mu = \mu_0$. El fet de que el sistema és no lineal fa que apareixi un cicle límit, tal i com es veu a la Figura 2.13. La bifurcació es coneix amb el nom de bifurcació de Hopf.

Així com l'última bifurcació té dos noms diferents segons el sistema vingui donat en temps discret (bifurcació de Neimark-Sacker) o en temps continu (bifurcació de Hopf), resulta que les dues primeres (la de "pitchfork" i la de "saddle-node") també les trobem en els sistemes en temps continu, però no és així amb les de doblament de període. Per tal de poder analitzar les bifurcacions de doblament de període en temps continu, cal obtenir algun model discretitzat del sistema. Per a més detalls es pot consultar [29].

2.4 Bifurcacions non-smooth

Molts sistemes físics estan caracteritzats per fenòmens que no són suficientment diferenciables. Entre aquests sistemes hi trobem els circuits electrònics amb commutadors [34]. Aquests fenòmens són sovint modelats per un conjunt d'equacions diferencials, cadascuna de les quals actua sobre una determinada regió de l'espai d'estats, S_i , a on la funció que defineix l'equació és derivable amb derivada contínua que deixa de ser-ho

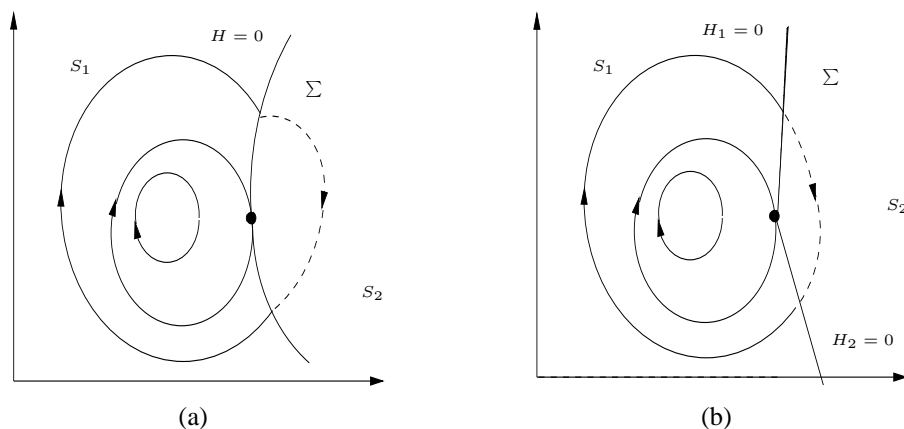


Figura 2.14: Representacions 2-dimensionals de bifurcacions de (a) “grazing” i (b) de “corner-collision”.

quan les trajectòries travessen les corbes que delimiten les regions S_i . Veure la Figura 2.14. És a dir, suposem que localment l’espai de fases es pot escriure com

$$\mathcal{D} = S_1 \cup S_2 \cup \Sigma \subset \mathbb{R}^n, \quad (2.9)$$

on Σ és la frontera $n - 1$ dimensional que separa les regions S_1 i S_2 .

El model matemàtic que descriu el sistema seria (en el cas de temps continu):

$$\dot{x} = f(x, \mu) \quad (2.10)$$

on $x \in \mathbb{R}^n$, μ és el paràmetre de bifurcació i $f(x, \mu)$ està definida així:

$$f(x, \mu) = \begin{cases} f_1(x, \mu) & \text{si } x \in S_1 \\ f_2(x, \mu) & \text{si } x \in S_2 \end{cases} \quad (2.11)$$

on $f_1(x, \mu)$ i $f_2(x, \mu)$ és derivable amb derivada contínua a S_1 i S_2 respectivament i f és contínua però la seva derivada no és contínua a Σ , la frontera entre S_1 i S_2 .

Aquests models presenten uns fenòmens de bifurcació i caos que no poden ser explicats en termes de la teoria de bifurcacions coneguda pels sistemes suficientment diferenciables. Ens trobem amb noves bifurcacions com ara la bifurcació “grazing” i la “corner-collision” que s’inclouen dins de la classe anomenada C -bifurcacions [32]. Aquestes noves bifurcacions consisteixen en interaccions no trivials entre trajectòries límit diferenciables (com ara òrbites periòdiques o òrbites caòtiques que es troben dins d’un conjunt w -límit) i les fronteres que delimiten les regions de l’espai de fase. En el cas de les de “grazing”, Σ no és diferenciable, i sota la variació d’un paràmetre (el paràmetre

de bifurcació), una òrbita periòdica toca tangencialment Σ en un punt on no és diferenciable. En canvi, en l'altre tipus de bifurcació, per un determinat valor del paràmetre la trajectòria límit toca tangencialment la frontera Σ , que és ara diferenciable. En els dos casos, Σ , localment, no és simultàniament atractora (o repelent) des dels dos costats de S_1 i S_2 .

Recentment s'ha demostrat que les bifurcacions “grazing” i les “corner-collision” poden unificar-se si es considera un conjunt de formes normals apropiades. Es pot veure-ho amb detall a [31].

Recentment també s'ha vist, que sistemes amb camps vectorials discontinus (o sistemes Filippov [25]) presenten un nou tipus de C -bifurcacions, les anomenades bifurcacions de lliscament [35].

Capítol 3

El convertidor buck

3.1 Introducció

Tal i com s'ha indicat en el Capítol 2, els exponents de Lyapunov mesuren el promig de variació de l'expansió o contracció dels elements infinitessimals a l'espai d'estats, on els valors positius es corresponen a la separació de trajectòries en una direcció donada. Els exponents de Lyapunov de temps infinit es calculen respecte una trajectòria de referència i en certa forma generalitzen (veure [7] per un major discussió) l'anàlisi de l'estabilitat a través dels valors propis del jacobinà d'un punt d'equilibri, tal i com hem esmentat en el capítol anterior, o mitjançant els logaritmes dels valors propis de la matriu de transició sobre un període d'una òrbita periòdica (els també anomenats exponents de Floquet). La definició estandard des del punt de vista pràctic d'un atractor caòtic ([8]) és la d'un conjunt atractor acotat amb al menys un exponent de Lyapunov positiu.

Diversos mètodes es poden trobar a la bibliografia ([8], [9]) per calcular numèricament els exponents de Lyapunov, però el més interessant tan des del punt de vista computacional com el teòric, és el que està basat en la descomposició QR de l'aplicació tangent ([10], [9], [12]). Tot seguit es recordarà breument aquest mètode i s'aplicarà als sistemes bilineals en general. S'obtiniran resultats específics pel convertidor buck ([13], [14]). El mateix procés funciona en altres sistemes lineals a trossos. S'escriuran les equacions diferencials satisfetes pels exponents de Lyapunov i la variable angular auxiliar, i es resoldran numèricament usant el conjunt atractor dominant com la trajectòria de referència, per cada valor del paràmetre de bifurcació. També s'escriuran les equacions en el cas en que l'òrbita de referència és una òrbita periòdica, i a més a més, en aquest cas, es resoldran analíticament, i per tant, es deduirà una expressió tancada per l'exponent de Lyapunov més gran. Els resultats que s'obtenen coincideixen amb la part real dels exponents de Floquet de la mateixa òrbita [15] (també es pot consultar [16] per calcular numèricament els exponents de Lyapunov del convertidor buck usant el mètode

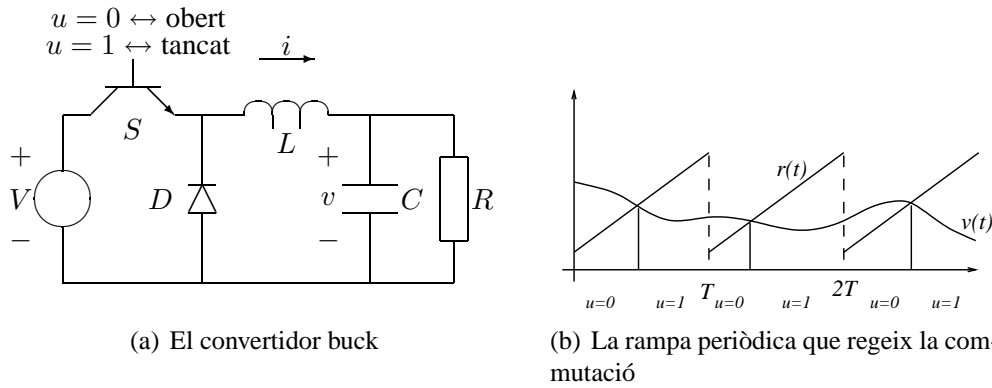


Figura 3.1: Esquema bàsic del convertidor buck i la seva rampa

de Müller [17]).

La Figura 3.1 representa l'esquema bàsic del convertidor buck. Quan aquest opera en mode continu (és a dir, la corrent que tenim a l'inductor mai es fa zero, tal i com ja s'ha dit al Capítol 2) el convertidor commuta entre dues topologies en funció de si $v(t)$ està per sota o per sobre de la rampa periòdica. Aleshores el sistema dinàmic presenta un camí de desdoblament periòdic cap al caos quan s'usa el paràmetre V com a paràmetre de bifurcació [13]. Les òrbites periòdiques es poden calcular explícitament resolent els dos sistemes lineals i unint les solucions en el punt de tall, encara que l'equació transcendental s'ha de resoldre numèricament [14]. Es veurà que aquesta informació numèrica, és a dir, el valor de l'instant de temps en què es produeix la commutació, és l'única informació no analítica que s'usarà en l'estudi que es farà.

La funció de commutació es pot expressar en termes de la funció esglaó o de Heaviside θ de la forma següent:

$$u([v], t) = \theta(r(t) - v(t)), \quad (3.1)$$

on $[v]$ denota la dependència funcional i r és la rampa periòdica d'equació

$$r(t) = V_{\text{ref}} + \frac{V_l}{a} + \frac{V_u - V_l}{aT}t, \quad (3.2)$$

amb t calculat mòdul T .

Usant les variables adimensionals (voltatge en les unitats de V_{ref} , la intensitat en les unitats de V_{ref}/R i el temps en les unitats de RC) les equacions diferencials del sistema són (s'ha usat el mateix símbol t per indicar el temps adimensionat).

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + y, \\ \dot{y} &= -\gamma x + \gamma V \theta(r(t) - x), \end{aligned} \quad (3.3)$$

on $v \mapsto x$, $i \mapsto y$, $V = E/V_{\text{ref}}$ i $\gamma = R^2C/L$, i $r(t)$ convenientment adimensionada.

En tots els resultats numèrics presentats en aquest capítol s'han usat els següents valors dels paràmetres [13]: $V_{\text{ref}} = 11.3\text{V}$, $R = 22\Omega$, $C = 47 \cdot 10^{-6}\text{C}$, $L = 0.02\text{H}$, $V_u = 8.2\text{V}$, $V_l = 3.8\text{V}$, $T = 400 \cdot 10^{-6}\text{s}$ i $a = 8.4$.

El convertidor buck és un cas particular dels sistemes bilineals periòdics, és a dir, sistemes que commuten entre dos camps vectorials lineals, els quals, per assolir els objectius plantejats, es interessant expressar com

$$\dot{x} = \begin{cases} Ax + a & \text{if } \langle \alpha, x \rangle + h(t) > 0, \\ Bx + b & \text{if } \langle \alpha, x \rangle + h(t) < 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

En aquesta expressió A i B són matrius, a , b i α són vectors, x és la variable d'estat, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ designa producte escalar i $h(t)$ és una funció T -periòdica. De forma compacta es pot escriure com

$$\dot{x} = Bx + b + \theta(\langle \alpha, x \rangle + h(t))[(A - B)x + (a - b)]. \quad (3.5)$$

En els següents apartats d'aquest capítol es tractarà el què segueix. A l'apartat 3.2 són presentats els resultats més importants sobre la descomposició QR i són usats per calcular els exponents de Lyapunov. A l'apartat 3.3 són tractades les equacions per als sistemes bilineals 2-dimensionals en general i s'aplica al cas particular del convertidor buck, trobant les solucions del sistema mitjançant la integració numèrica i es calcula una relació de recurrència per a òrbites T -periòdiques, el límit de les quals és calculat analíticament a l'apartat 3.4. A 3.5 s'extèn aquest procés a òrbites de període més gran i finalment a l'apartat 3.6 es resumeixen els resultats del capítol i s'apunten futures línies de treball.

3.2 La descomposició QR

Sigui un sistema definit per la següent equació diferencial de primer ordre a \mathbb{R}^n

$$\frac{dx}{dt} = F(x, t), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.6)$$

i sigui $x_0(t)$ una solució.

Considerem $x(t)$ una trajectòria pròxima a la solució. Sigui $z = x - x_0(t)$ la diferència entre elles. L'evolució d'aquesta diferència és:

$$\frac{dz}{dt} = \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0(t)} z \equiv DF(t) \cdot z \quad (3.7)$$

La solució a (3.7) és $z(t) = M(t)z(0)$, on

$$M(t) = \mathbb{T} e^{\int_0^t DF(s) ds} \quad (3.8)$$

i \mathbb{T} representa l'anomenada exponencial ordenada en el temps o sèries de Peano-Baker [18]. Geomètricament, $M(t)$ és la funció tangent de $x_0(0) \mapsto x_0(t)$.

La SVD (descomposició del valor singular) permet la factorització de qualsevol matriu, i en particular la de $M(t)$, de la forma següent

$$M(t) = U(t) \cdot A(t) \cdot V^T(t) \quad (3.9)$$

on les dues matrius $U(t)$ i $V(t)$ són ortogonals ($V^T V = \mathbb{I} = U^T U$), i $A(t)$ és diagonal. Ja que

$$M^T(t)M(t) = V(t)A(t)A^T(t)V^T(t) \quad (3.10)$$

és semi-definida positiva i simètrica, els seus valors propis són no negatius (els valors de la diagonal de $A(t)A^T(t)$) i es corresponen a una base ortonormal de vectors propis (les columnes de $V(t)$). Els valors singulars de $M(t)$ són els elements de la diagonal de $A(t)$. Els exponents de Lyapunov de temps infinit associats a la solució $x_0(t)$, λ_i , són els logaritmes dels valors propis de

$$\Lambda = \lim_{t \rightarrow +\infty} (M^T(t)M(t))^{\frac{1}{2t}} \quad (3.11)$$

sempre que aquest límit existeixi.

Malgrat que la SVD de la funció tangent produeix una eficient partició dels espais d'expansió i contracció, és la descomposició QR, també anomenada ortogonalització contínua Gram-Schmidt [9], la que proporciona una formulació amb el mínim nombre de variables [10]. En aquest cas, aquesta descomposició és

$$M(t) = Q(t) \cdot R(t) \quad (3.12)$$

on $Q(t)$ és ortogonal i $R(t)$ és triangular superior i amb elements positius a la diagonal. Observem que

$$M^T(t)M(t) = R^T(t)R(t) \quad (3.13)$$

per tant, és $R(t)$ la que conté tota la informació sobre els exponents de Lyapunov. Si $\Delta_i(t)$, $i = 1, \dots, n$, són els elements de la diagonal de $R(t)$, $r(t)$ és $R(t)$ amb la i -èssima fila dividida per $\Delta_i(t)$, i $d(t)$ és la matriu triangular inferior que afecta la ortogonalització de Gram-Schmidt de $r(t)$, es pot demostrar [11] que els exponents de Lyapunov són:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} (\log \Delta_i(t) - \log d_{ii}(t)). \quad (3.14)$$

Els valors d_{ii} estan fitats, per tant, són irrelevantes en el límit i en conseqüència els exponents de Lyapunov poden ser calculats com el següent valor asimptòtic $\log(\Delta_i(t))/t$.

L'equació que verifica la funció tangent és

$$\dot{M} = DF \cdot M \quad (3.15)$$

amb $M(0) = \mathbb{I}$. Usant la descomposició QR i aplicant Q^T i R^{-1} s'obté

$$Q^T \dot{Q} + \dot{R}R^{-1} = Q^T \cdot DF \cdot Q \equiv S. \quad (3.16)$$

S'observa que $\dot{R}R^{-1}$ és triangular superior, i que els valors de la seva diagonal venen donats per $\dot{\Delta}_i \Delta_i^{-1}$. La matriu triangular Q es pot parametritzar com [10]

$$Q = Q^{(1,2)} Q^{(1,3)} \dots Q^{(1,n)} Q^{(2,3)} \dots Q^{(n-1,n)}, \quad (3.17)$$

on $Q^{(i,j)}$ és la rotació d'angle ϕ_{ij} en el pla (i, j) . Així doncs, M queda parametritzada per $n(n-1)/2$ angles, més els n elements Δ_i de la diagonal de R , més els $n(n-1)/2$ elements of R que estan per sobre de la diagonal. La resta no intervenen en el càlcul dels exponents de Lyapunov, tai i com veurem. En efecte, ja que $Q^T \dot{Q}$ és antisimètrica, els elements de la diagonal de (3.16) donen lloc a

$$\dot{\Delta}_i = S_{ii}(\phi) \Delta_i, \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.18)$$

Els elements de S depenen nomès dels angles ϕ i per tant, és una equació de variables separables sempre que els angles $\phi_{ij}(t)$ siguin coneguts. Comparant els elements de la subdiagonal a (3.16) s'obtenen les equacions

$$(Q^T \dot{Q})_{ij} = S_{ij}(\phi), \quad i > j. \quad (3.19)$$

Amb la parametrització usada a Q , el membre de l'esquerra de (3.19) és lineal en $\dot{\phi}_{ij}$ i l'equació es pot reescriure com

$$\dot{\phi}_{ij} = g_{ij}(\phi), \quad i > j. \quad (3.20)$$

Aquest és un sistema d'equacions no lineals en funció dels $n(n-1)$ angles, el qual s'ha de resoldre i aleshores usar les solucions a (3.18).

3.3 La descomposició QR en un sistema bilineal

El Jacobià del camp vectorial definit per (3.5) és

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial F}{\partial x} \right|_{x_0(t)} &\equiv F(t) = B + \theta(\langle \alpha, x_0(t) \rangle + h(t))(A - B) \\ &+ \delta(\langle \alpha, x_0(t) \rangle + h(t))[(A - B)x_0(t) + (a - b)\alpha^T], \end{aligned} \quad (3.21)$$

on $\delta = \theta'$ és la funció delta de Dirac.

El cas més senzill és quan $\langle \alpha, x_0(t) \rangle + h(t)$ té només un zero simple a $t = t_c \bmod T$ per cada període. Suposant que al començament de cada període la topologia que es té, ve donada per (A, a) , resulta

$$\theta(\langle \alpha, x_0(t) \rangle + h(t)) = 1 - \theta(t - t_c) \quad (3.22)$$

$$\delta(\langle \alpha, x_0(t) \rangle + h(t)) = \frac{1}{|\langle \alpha, \dot{x}_0(t_c) \rangle + \dot{h}(t_c)|} \delta(t - t_c). \quad (3.23)$$

D'aquesta manera, definint la matriu (variable en el temps)

$$D(t) = \frac{1}{|\langle \alpha, \dot{x}_0(t_c) \rangle + \dot{h}(t_c)|} [(A - B)x_0(t) + (a - b)\alpha^T], \quad (3.24)$$

es pot obtenir el Jacobià associat a aquesta classe d'òrbites periòdiques.

$$DF(t) = A + \theta(t - t_c)(B - A) + \delta(t - t_c)C, \quad (3.25)$$

on el factor $\delta(t - t_c)$ permet introduir la matriu constant $C = D(t_c)$ en lloc de $D(t)$.

Les equacions anteriors són vàlides per a sistemes de dimensió n . Per a sistemes de dimensió 2 només tenim un angle $\phi_{12}(t) \equiv \alpha(t)$ i dues funcions $\Delta_i(t)$ per trobar, i en conseqüència

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \cos \alpha(t) & \sin \alpha(t) \\ -\sin \alpha(t) & \cos \alpha(t) \end{pmatrix}, \quad (3.26)$$

$$Q^T \dot{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \dot{\alpha} \\ -\dot{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

i

$$R(t) = \begin{pmatrix} \Delta_1(t) & r_{12}(t) \\ 0 & \Delta_2(t) \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

Del càlcul de $Q^T DFQ$ resulta (t es calcula $\bmod T$ si no es diu el contrari).

$$\frac{\dot{\Delta}_1}{\Delta_1} = f_{11} \cos^2 \alpha - (f_{12} + f_{21}) \sin \alpha \cos \alpha + f_{22} \sin^2 \alpha \quad (3.29)$$

$$\frac{\dot{\Delta}_2}{\Delta_2} = f_{11} \sin^2 \alpha + (f_{12} + f_{21}) \sin \alpha \cos \alpha + f_{22} \cos^2 \alpha \quad (3.30)$$

$$\dot{\alpha} = f_{12} \sin^2 \alpha - (f_{11} - f_{22}) \sin \alpha \cos \alpha - f_{21} \cos^2 \alpha, \quad (3.31)$$

on els termes f_{ij} són obtinguts dels elements de A , B i C així

$$f_{ij} = a_{ij} + (b_{ij} - a_{ij})\theta(t - t_c) + c_{ij}\delta(t - t_c).$$

S'observa que

$$\frac{d}{dt} \log(\Delta_1 \Delta_2) = f_{11} + f_{22} = a_{11} + a_{22} + (b_{11} + b_{22} - a_{11} - a_{22})\theta(t - t_c) + (c_{11} + c_{22})\delta(t - t_c) \quad (3.32)$$

i aquesta és la divergència del camp vectorial donat pel membre de la dreta de (3.5) calculat a $x_0(t)$. Tenint en compte que $(t - t_c)\delta(t - t_c) \equiv 0$, l'equació (3.32) pot ser integrada i s'obté

$$\log(\Delta_1 \Delta_2) = (a_{11} + a_{22})t + (b_{11} + b_{22} - a_{11} - a_{22})(t - t_c)\theta(t - t_c) + (c_{11} + c_{22})\theta(t - t_c). \quad (3.33)$$

Ja que les equacions de Δ_1 i Δ_2 són independents, es pot trobar Δ_2 després d'haver trobat Δ_1 . Les equacions (3.29) i (3.31) s'han de resoldre a cada període $[nT, (n+1)T]$, agafant com a condicions inicials els valors finals del període precedent.¹

Primer es resol l'equació que ens dóna α . La presència de la funció $\delta(t - t_c)$ significa que $\alpha(t)$ no és contínua a $t = t_c$ i que el corresponent salt ha de ser calculat; per $t_0 \leq t < t_c$ i $t_c < t \leq t_0 + T$ hom pot oblidar-se de la funció delta. En el règim que es considera, els valors propis de A i B han de ser complexos amb part real negativa. Per tant,

$$\Delta_a \equiv (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21} < 0 \quad \text{and} \quad a_{11} + a_{22} < 0 \quad (3.34)$$

i el mateix pels elements b_{ij} de B .

- Per $t_0 \leq t < t_c$ es té

$$\dot{\alpha} = a_{12} \sin^2 \alpha - (a_{11} - a_{22}) \sin \alpha \cos \alpha - a_{21} \cos^2 \alpha \quad (3.35)$$

Cal observar que $a_{12} \neq 0$ en les condicions assumides. En termes de $\alpha(t_0) \equiv \alpha_0$, la solució a aquesta equació és

$$\tan \alpha(t) = \frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} + \frac{\sqrt{-\Delta_a}}{2|a_{12}|} \cdot \tan \left[\frac{a_{12}\sqrt{-\Delta_a}}{2|a_{12}|}(t - t_0) + \arctan \left(\frac{2|a_{12}|}{\sqrt{-\Delta_a}} \left(\tan \alpha_0 + \frac{a_{22} - a_{11}}{2a_{12}} \right) \right) \right]. \quad (3.36)$$

¹Cal observar que el que fa que dues trajectòries pròximes s'ajuntin o s'apartin està causat només pels temps diferents en els que es canvia de topologia dins del període; el canvi al final de cada període afecta totes les trajectòries alhora.

- A l'instant $t = t_c$ tenim el salt en el valor de α . Per calcular-lo podem prescindir de tots els termes del membre de la dreta de la igualtat (3.31) excepte dels que són proporcionals a $\delta(t - t_c)$. S'obté

$$\dot{\alpha} = (c_{12} \sin^2 \alpha - c_{21} \cos^2 \alpha - (c_{11} - c_{22}) \cos \alpha \sin \alpha) \delta(t - t_c) \quad (3.37)$$

i integrant al voltant de t_c

$$\int_{t_c^-}^{t_c^+} \frac{d\alpha}{c_{12} \sin^2 \alpha - c_{21} \cos^2 \alpha - (c_{11} - c_{22}) \cos \alpha \sin \alpha} = \int_{t_c^-}^{t_c^+} \delta(t - t_c) dt = 1. \quad (3.38)$$

Si designem per $G(\alpha)$ a una primitiva de l'integrand del membre de l'esquerra de la igualtat, s'obté

$$\alpha(t_c^+) = G^{-1}(1 + G(\alpha(t_c^-))). \quad (3.39)$$

- Per $t_c < t \leq t_0 + T$ es té la mateixa equació que abans, amb els elements b_{ij} enlloc dels a_{ij} . La solució es pot obtenir a partir de (3.36) substituint t_0 per t_c i α_0 per $\alpha(t_c^+)$.

Una vegada $\alpha(t)$ es coneguda, es pot resoldre l'equació per Δ_1 . S'introdueix la notació

$$\Delta_i(t) = e^{\lambda_i(t)}. \quad (3.40)$$

Aleshores, tenint en compte (3.14), els exponents de Lyapunov són

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \lambda_i(t). \quad (3.41)$$

Ja que $\lambda_2(t)$ es pot obtenir de $\lambda_1(t)$, es designa $\lambda(t) \equiv \lambda_1(t)$, el qual ha de complir l'equació

$$\dot{\lambda} = f_{11} \cos^2 \alpha - (f_{12} + f_{21}) \cos \alpha \sin \alpha + f_{22} \sin^2 \alpha. \quad (3.42)$$

De nou s'han de considerar tres casos.

- $t_0 \leq t < t_c$. Dividint les equacions que satisfan λ i α s'obté

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = \frac{a_{11} - (a_{12} + a_{21}) \tan \alpha + a_{22} \tan^2 \alpha}{a_{12} \tan^2 \alpha + (a_{22} - a_{11}) \tan \alpha - a_{21}}. \quad (3.43)$$

El costat dret d'aquesta equació es pot convertir en una integral racional i es pot obtenir $\lambda(\alpha)$. La corresponent constant d'integració es pot determinar per la condició inicial $\lambda(\alpha_0) = \lambda(t_0)$.

- A l' instant $t = t_c$, el quocient de termes proporcional a $\delta(t - t_c)$ en les equacions de λ i α és

$$\frac{d\lambda}{d\alpha} = \frac{c_{11} \cos^2 \alpha - (c_{12} + c_{21}) \cos \alpha \sin \alpha + c_{22} \sin^2 \alpha}{c_{12} \sin^2 \alpha - c_{12} \cos^2 \alpha - (c_{11} - c_{22}) \cos \alpha \sin \alpha}. \quad (3.44)$$

Si s'anomena $H(\alpha)$ a la primitiva del costat dret de la igualtat (3.44) en funció de α , integrant entre t_c^- i t_c^+ resulta

$$\lambda(t_c^+) = \lambda(t_c^-) + H(\alpha(t_c^+)) - H(\alpha(t_c^-)). \quad (3.45)$$

- Finalment, per $t_c < t \leq t_0 + T$ s'obté la mateixa equació que per $t_0 \leq t < t_c$, substituint a_{ij} per b_{ij} . La condició inicial és ara $\lambda(\alpha(t_c^+)) = \lambda(t_c^+)$, i t ha de ser substituïda per $t - t_c$ en la solució trobada.

S'aplicaran tot seguit, les anteriors equacions al cas particular del convertidor buck adimensionat. Es té

$$A = B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ \gamma V \end{pmatrix}, \quad \alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.46)$$

i $h(t) = -r(t)$, i el Jacobià calculat a $(x_0(t), y_0(t))$ és

$$DF(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -\gamma & 0 \end{pmatrix} + \delta(r(t) - x_0(t)) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\gamma V & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.47)$$

Les equacions (3.18) i (3.19) aplicades a aquest sistema són

$$\frac{\dot{\Delta}_1}{\Delta_1} = -\cos^2 \alpha + (\gamma - 1) \sin \alpha \cos \alpha + \gamma V \delta(r(t) - x_0(t)) \sin \alpha \cos \alpha \quad (3.48)$$

$$\frac{\dot{\Delta}_2}{\Delta_2} = -\sin^2 \alpha + (1 - \gamma) \cos \alpha \sin \alpha - \gamma V \delta(r(t) - x_0(t)) \cos \alpha \sin \alpha \quad (3.49)$$

$$\dot{\alpha} = -\sin^2 \alpha - \cos \alpha \sin \alpha - \gamma(1 + V \delta(r(t) - x_0(t))) \cos^2 \alpha \quad (3.50)$$

Es pot observar que $\dot{\Delta}_1 \Delta_2 + \Delta_1 \dot{\Delta}_2 = -\Delta_1 \Delta_2$ i d'aquí $\Delta_1(t) \Delta_2(t) = e^{-t}$, ja que $\Delta_1(0) = \Delta_2(0) = 1$. En funció de les $\lambda_i(t)$ això és

$$\frac{\lambda_1(t) + \lambda_2(t)}{t} = -1, \quad (3.51)$$

així que la suma dels dos exponents de Lyapunov del convertidor buck és igual a -1 . De fet, això és una conseqüència directa d'un resultat més general com és que la divergència del camp vectorial del convertidor buck adimensionat sigui igual a -1 .

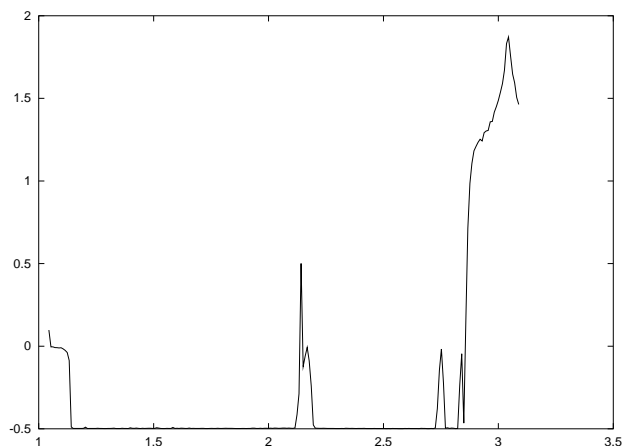


Figura 3.2: LLE del conjunt atractor dominant en termes de V .

S'han integrat numèricament les equacions de $\lambda(t)$, $\alpha(t)$ i el sistema de variables $(x_0(t), y_0(t))$ per un rang de valors del paràmetre de bifurcació V , usant la funció arctangent amb un coeficient suficientment alt per aproximar la funció esglaó i la seva derivada per aproximar la funció delta. El corresponent exponent de Lyapunov més gran (LLE) està representat a la Figura 3.2, on es pot veure que el LLE és -0.5 en una regió força gran. Ja que hem fet integració numèrica, el sistema evoluciona cap al conjunt atractor dominant. D'aquí que el LLE positiu ens indica la presència d'un atractor caòtic. Les zones de presència d'aquest atractor caòtic que ens mostra la Figura 3.2 coincideixen amb el què es coneix sobre el convertidor buck [14].

Per a òrbites T -periòdiques amb un únic instant de commutació t_c en cada període, les equacions (3.48) i (3.50) queden reduïdes a (3.29) i (3.31). En aquest cas es únicament l'element

$$c_{21} = -\frac{\gamma V}{|\dot{r}(t_c) - \dot{x}_0(t_c)|} \equiv -\nu \quad (3.52)$$

el què és no nul i les dues equacions de rellevància són

$$\dot{\lambda} = -\cos^2 \alpha + (\gamma + \nu \delta(t - t_c) - 1) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (3.53)$$

$$\dot{\alpha} = \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + (\gamma + \nu \delta(t - t_c)) \cos^2 \alpha. \quad (3.54)$$

El denominador a (3.52) és la diferència de la pendent entre la rampa i el voltatge en el punt de creuament, i aquesta és l'única informació sobre l'òrbita periòdica que necessitem pels càlculs.

Tal i com s'ha discutit en el cas general, l'única qüestió de rellevància per la integració de les equacions anteriors és el càlcul del salt de les discontinuïtats en el punt $t = t_c$, és a dir, les equacions (3.39) i (3.45). Fàcilment s'obté

$$\tan \alpha(t_c^+) - \tan \alpha(t_c^-) = \nu. \quad (3.55)$$

i

$$\lambda(t_c^+) - \lambda(t_c^-) = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \tan^2 \alpha(t_c^+)}{1 + \tan^2 \alpha(t_c^-)}. \quad (3.56)$$

Amb aquests resultats, les equacions diferencials poden ser integrades sobre cada període i es pot calcular la relació de recurrència pels valors $\alpha_n = \alpha(nT)$ i $\lambda_n = \lambda(nT)$.

Escrivint

$$r_n = \tan \left(\mu t_c + \arctan \frac{\tan \alpha_n + 1/2}{\mu} \right), \quad (3.57)$$

s'obté l'aplicació racional

$$r_{n+1} = \frac{A + B + r_n}{1 - AB - Ar_n}, \quad (3.58)$$

on $A = \tan \mu T$, $B = \nu/\mu$ i $\mu = \sqrt{\gamma - 1/4}$, mentre que per λ_n

$$\lambda_{n+1} = -\frac{1}{2}T + \lambda_n + \frac{1}{2} \log \frac{(\tan^2 \alpha_{n+1} + 1)(\tan^2 \alpha_n + \tan \alpha_n + \gamma)((M_n + \nu)^2 + M_n + \nu + \gamma)}{(\tan^2 \alpha_n + 1)(\tan^2 \alpha_{n+1} + \tan \alpha_{n+1} + \gamma)(M_n^2 + M_n + \gamma)}, \quad (3.59)$$

on

$$M_n = \mu r_n - 1/2. \quad (3.60)$$

La Figura 3.3 ens mostra els resultats de la iteració de (3.59) per un valor usual de V en el règim T -periòdic. Es pot veure que λ_n es comporta linealment amb una oscil·lació fitada sobre d'ella, és a dir,

$$\lambda(t) = \lambda \cdot t + \phi(t) \quad (3.61)$$

amb $\phi(t)$ fitada. Per tant,

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(t)}{t}. \quad (3.62)$$

La Figura 3.4 ens mostra els valors asimptòtics de α_n i $\lambda_n/(nT)$ per un rang de valors del paràmetre de bifurcació. De fet, es pot demostrar que per $B \geq B^* = 2(1 + \sqrt{1 + A^2})/A$, l'aplicació (3.58) té un punt fix atractor i que $(\alpha_n) \rightarrow \sim -\pi/2$ (depenent lleugerament de V), mentre que la seqüència (α_n) no convergeix per $B < B^*$. De la figura es veu que això es correspon a que $\lambda_n/(nT)$ s'aproxima a $-1/2$ en el cas en que no hi ha punt fix, i a un valor que depèn de V quan hi ha un punt fix. La forma concreta de la corba puntejada de la Figura 3.4 es correspon totalment amb el càlculs exactes dels exponents de Floquet de les òrbites periòdiques (veure per exemple la Figura 3 a [15]).

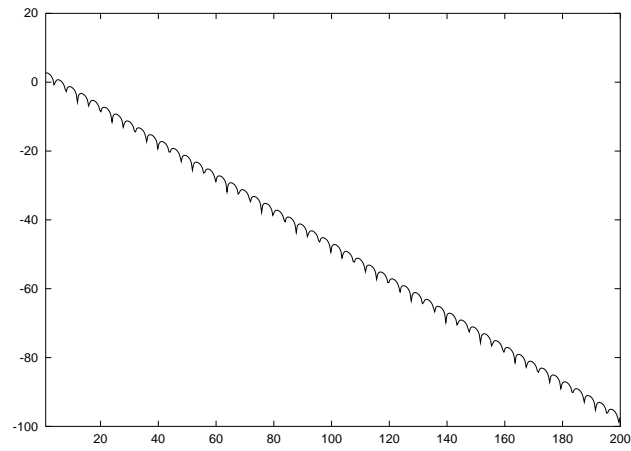


Figura 3.3: Evolució de λ_n a partir de (3.59).

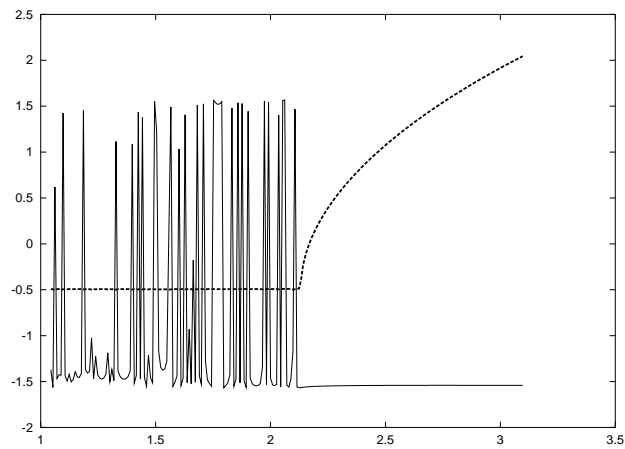


Figura 3.4: Valors asimptòtics de l'angle (contínua) i LLE (discontínua) per l'òrbita T -periòdica en funció de V .

3.4 Resultats analítics pel convertidor buck

Pel convertidor buck, el fet de conèixer explícitament les equacions (3.58) i (3.59) permet de provar analíticament els resultats que en la secció anterior s'han obtingut per iteració numèrica. Això treu a la llum alguns aspectes interessants de l'aplicació racional (3.58), que es pot reescriure com

$$f(x) = \frac{A + B + x}{1 - AB - Ax}. \quad (3.63)$$

Les solucions a $f(x) = x$ són

$$x = -\frac{B}{2} \pm \sqrt{\frac{B^2}{4} - \frac{A+B}{A}}, \quad (3.64)$$

i els punts fixos existeixen si es compleix la condició

$$\frac{B^2}{4} - \frac{A+B}{A} \geq 0 \quad (3.65)$$

és a dir,

$$B \geq B^* = 2(1 + \sqrt{1 + A^2})/A \quad (3.66)$$

tal i com ja s'ha esmentat prèviament.

La condició (3.66) implica que

$$\nu \geq \frac{2 + 2\sqrt{1 + A^2}}{A} \mu = 10.22531653, \quad (3.67)$$

El primer valor de V pel qual ν verifica (3.67) és $V = 2.13$ (que es correspon a $V = 24.1\text{V}$). Aquest resultat es correspon amb els resultats numèrics que podem veure a la Figura 3.4. Només un dels dos valors donats per (3.64), el que té el signe "+", dona lloc a un punt fix estable.

Anomenant

$$C_n = \frac{\tan^2 \alpha_n + 1}{\tan^2 \alpha_n + \tan \alpha_n + 1}, \quad (3.68)$$

$$D_n = \frac{(M_n + \nu)^2 + M_n + \nu + \gamma}{M_n^2 + M_n + \gamma}. \quad (3.69)$$

es pot reescriure (3.59) com

$$\lambda_{n+1} = \frac{1}{2} \log \frac{C_{n+1}}{C_n} + \frac{1}{2} \log D_n + \lambda_n - \frac{1}{2} T. \quad (3.70)$$

i d'aquí

$$\lambda_m = \frac{1}{2} \log \frac{C_m}{C_0} + \frac{1}{2} \log(D_{m-1} \cdots D_0) + \lambda_0 - \frac{m}{2} T \quad (3.71)$$

A més a més,

$$\begin{aligned} \lambda &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{\lambda_m}{mT} = \\ &= -\frac{1}{2} + \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2mT} \log C_m + \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2mT} \log(D_{m-1} \cdots D_0). \end{aligned} \quad (3.72)$$

Ja que $\log \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}$ està fitat per $x \in \mathbb{R}$, el primer límit de (3.72) és trivialment zero. El segon límit es pot reescriure com

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2mT} \log(D_{m-1} \cdots D_0) = \lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2mT} \log(D_m \cdots D_1). \quad (3.73)$$

Suposarem primer que (α_n) té un límit, és a dir que la funció (3.63) té un punt fix. Aleshores les seqüències (r_n) , (M_n) i (D_n) també són convergents. Sigui D_* el límit de (D_n) . Usant el fet que el límit de la forma aritmètica d'una seqüència convergent és igual al límit de la última, es fàcil veure que en aquest cas

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2mT} \log(D_m \cdots D_1) = \frac{\log D_*}{2T} \quad (3.74)$$

i d'aquí, quan hi ha punt fix,

$$\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{\log D_*}{2T}, \quad (3.75)$$

amb

$$D_* = \frac{(M_* + \nu)^2 + M_* + \nu + \gamma}{M_*^2 + M_* + \gamma}, \quad (3.76)$$

$M_* = \mu r_* - 1/2$ i r_* el punt fix atractiu de (3.63). Cal observar que aquest depèn del paràmetre de bifurcació V a través del paràmetre ν . Calculant (3.75) per valors de V superiors a 2.13 s'obtenen valors que coincideixen amb la part creixent de la línia discontinua de la Figura 3.4.

Quan (α_n) no és convergent, és a dir $V < 2.13$ es pot calcular de forma no trivial que

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{1}{2mT} \log(D_m \cdots D_1) = 0 \quad (3.77)$$

i que per tant, el LLE és independent del paràmetre de bifurcació en aquest tram i que és igual a $-1/2$, tal i com s'ha vist en les iteracions numèriques prèvies.

En efecte, per demostrar (3.77), usarem (3.69) i (3.60) per escriure

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log D_k = \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{(r_k + B)^2 + 1}{r_k^2 + 1}. \quad (3.78)$$

De (3.58) s'obté

$$r_n + B = \frac{r_{n+1} - A}{1 + Ar_{n+1}}, \quad (3.79)$$

i aplicant-ho a (3.78) el resultat és

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log D_k = -\log(r_1^2 + 1) + \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{1 + A^2}{(1 + Ar_{k+1})^2}. \quad (3.80)$$

De nou, de (3.58) obtenim

$$Ar_{n+1} + 1 = \frac{1 + A^2}{1 - AB - Ar_n}, \quad (3.81)$$

i per tant, la sèrie de (3.80) és

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{1 + A^2}{(1 + Ar_{k+1})^2} = \\ 2 \sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{1 - AB - Ar_k}{\sqrt{1 + A^2}} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} L_k - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \log \sqrt{1 + A^2}, \end{aligned} \quad (3.82)$$

on $L_k = \log(1 - AB - Ar_k)$.

Estudiarem ara la suma

$$L_1 + \dots + L_n. \quad (3.83)$$

Es té, usant (3.58)

$$L_n + L_{n-1} = \log(1 - 3C + C^2 + A(C - 2)r_{n-1} - A^2), \quad (3.84)$$

on $C = AB$.

Definint $A^{(1)} = A(C - 2)$, $C^{(1)} = 3C - C^2 + A^2$ s'obté

$$L_{n-1}^{(1)} = L_{n-1} + L_n = \log(1 - C^{(1)} - A^{(1)}r_{n-1}). \quad (3.85)$$

Aleshores, la suma dels tres últims termes de (3.83) és

$$\begin{aligned} L_{n-2} + L_{n-1}^{(1)} = \\ \log\left(1 - C^{(1)} - C\left(1 - C^{(1)} - \frac{A^{(1)}}{A}\right) - A^{(1)}A + (C^{(1)}A - A - A^{(1)})r_{n-2}\right). \end{aligned} \quad (3.86)$$

Definint de nou $A^{(2)} = A^{(1)} - C^{(1)}A + A$, $C^{(2)} = C^{(1)} + C + \frac{A^{(1)}}{A}C - CC^{(1)} + A^{(1)}A$ s'obté

$$L_{n-2}^{(2)} = L_{n-2} + L_{n-1}^{(1)} = \log(1 - C^{(2)} - A^{(2)}r_{n-2}). \quad (3.87)$$

Iterant aquest procés s'obté una expressió tancada per $L_1 + \dots + L_n$. De fet, si $A^{(k)} = A^{(k-1)} - C^{(k-1)}A + A$, $C^{(k)} = C^{(k-1)} + C + \frac{A^{(k-1)}}{A}C - CC^{(k-1)} + A^{(k-1)}A$, hom obté la suma dels últims k termes de (3.83)

$$L_{n-k}^{(k)} = L_{n-k} + L_{n-k+1}^{(k-1)} = \log(1 - C^{(k)} - A^{(k)}r_{n-k}), \quad (3.88)$$

per tant, finalment

$$L_1 + \dots + L_n = \log(1 - C^{(n)} - A^{(n)}r_1). \quad (3.89)$$

La seqüència (A, C) ve donada per

$$\begin{pmatrix} A^{(k)} \\ C^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -A \\ \frac{C}{A} + A & 1 - C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{(k-1)} \\ C^{(k-1)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}. \quad (3.90)$$

amb $A^{(0)} = A$, $C^{(0)} = C$. Així,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{1 + A^2}{(1 + Ar_{k+1})^2} = 2 \log \frac{1 - C^{(m)} - A^{(m)}r_1}{(\sqrt{1 + A^2})^m}. \quad (3.91)$$

Per m grans, $A^{(m)}$ i $C^{(m)}$ creixeran a raó del més gran dels valors propis de la matriu

$$\begin{pmatrix} 1 & -A \\ \frac{C}{A} + A & 1 - C \end{pmatrix}.$$

Quan α_n no té punts fixos, els dos valors propis són complexos i de magnitud $\sqrt{1 + A^2}$. Llavors,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \log \frac{1 + A^2}{(1 + Ar_{k+1})^2} = 2 \log \frac{K(\sqrt{1 + A^2})^{(m)} + P^{(m)}}{(\sqrt{1 + A^2})^m}, \quad (3.92)$$

amb

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} \frac{P^{(m)}}{(\sqrt{1 + A^2})^m} = 0. \quad (3.93)$$

En conseqüència,

$$\log\left(K + \frac{P^{(m)}}{(\sqrt{1 + A^2})^m}\right) \quad (3.94)$$

està acotat amb el que queda demostrat (3.77).

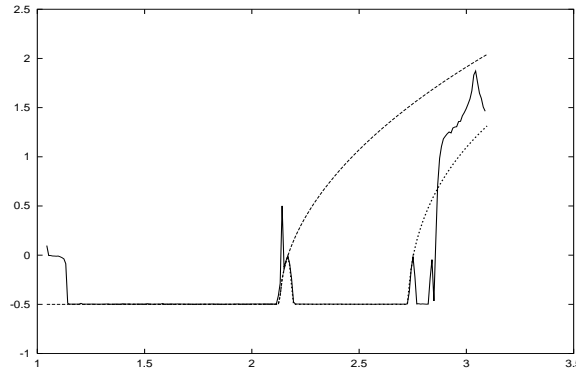


Figura 3.5: Valor asimptòtic del LLE (línia contínua) del conjunt atractor dominant, LLE (línia discontinua) per les òrbites T -periòdiques i LLE (línia puntejada) per òrbites $2T$ -periòdiques en funció de V .

3.5 Òrbites periòdiques de període gran

En aquest apartat es veurà com els càlculs fets per a les òrbites T -periòdiques es poden generalitzar a òrbites de període superior.

Per a les òrbites $2T$ -periòdiques amb temps de commutació t_1 i t_2 (un en cada període de la rampa) es té $r(t_1) - x_0(t_1) = 0$ i $r(t_2) - x_0(t_2) = 0$, $0 < t_1 < T < t_2 < 2T$ mòdul $2T$ i per tant

$$\delta(r(t) - x_0(t)) = \frac{1}{|\dot{r}(t_1) - \dot{x}_0(t_1)|} \delta(t - t_1) + \frac{1}{|\dot{r}(t_2) - \dot{x}_0(t_2)|} \delta(t - t_2). \quad (3.95)$$

El sistema que s'ha de resoldre a $[0, 2T]$ és

$$\dot{\alpha} = \sin^2 \alpha + \sin \alpha \cos \alpha + (\gamma + \nu_1 \delta(t - t_1) + \nu_2 \delta(t - t_2)) \cos^2 \alpha \quad (3.96)$$

$$\dot{\lambda} = -\cos^2 \alpha + (\gamma + \nu_1 \delta(t - t_1) + \nu_2 \delta(t - t_2) - 1) \sin \alpha \cos \alpha, \quad (3.97)$$

on $\nu_1 = \gamma V / |\dot{r}(t_1) - \dot{x}_0(t_1)|$, i $\nu_2 = \gamma V / |\dot{r}(t_2) - \dot{x}_0(t_2)|$, i la informació que necessitem sobre l'òrbita es limita als valors t_1 i t_2 . El sistema anterior es pot resoldre analíticament i també es pot iterar usant el valor final d'una iteració com a condició inicial per la següent, i es pot obtenir una relació de recurrència pels valors de $\alpha_n = \alpha(2nT)$ i $\lambda_n = \lambda(2nT)$.

La Figura 3.5 ens mostra el LLE obtingut amb la integració numèrica directa del sistema i els LLEs que resulten de les relacions de recurrència de α_n i λ_n per ambdues òrbites la T -periòdica i la $2T$ -periòdica (les òrbites pròpiament $2T$ -periòdiques

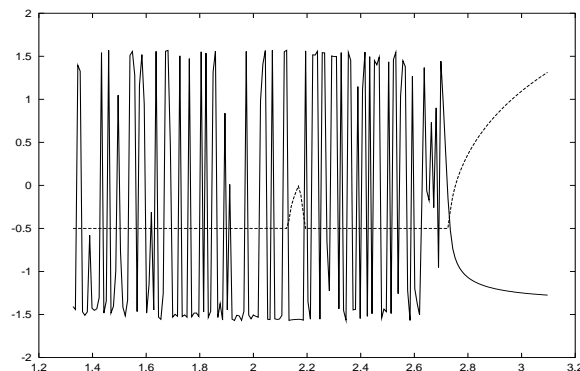


Figura 3.6: Valor asimptòtic de l'angle (línea contínua) i de LLE (línea discontinua) de les òrbites $2T$ -periòdiques en termes de V .

apareixen només quan les òrbites T -periòdiques es fan inestables) pel rang de valors del paràmetre de bifurcació V . Sempre que una òrbita periòdica és estable, el LLE obtingut de la corresponent recurrència coincideix amb el obtingut de la integració numèrica. Observeu la existència d'una petita finestra caòtica just abans que les òrbites T -periòdiques esdevinguin inestables.

Més concretament, si $\alpha_n = \alpha(2nT)$, $\Delta = t_2 - t_1 - T$,

$$r_n = \tan\left(\arctan\left(\frac{\tan \alpha_n + 1/2}{\mu}\right) + \mu t_1\right), \quad (3.98)$$

Si $A = \tan(\mu(T - \Delta))$, $B = \frac{\nu_2}{\mu}$, $C = \tan(\mu(T + \Delta))$ i $D = \frac{\nu_1}{\mu}$ obtenim la recurrència racional

$$r_n = \frac{A + \frac{C + r_{n-1} + D}{1 - C(r_{n-1} + D)} + B}{1 - A\left(\frac{C + r_{n-1} + D}{1 - C(r_{n-1} + D)} + B\right)} \quad (3.99)$$

La Figura 3.6 ens mostra els valors asimptòtics de α_n i $\lambda_n/(2nT)$ per un cert rang de valors del paràmetre de bifurcació. En aquesta figura podem observar que $\lambda_n/(2nT)$ convergeix a $-1/2$ quan la seqüència (α_n) no convergeix. Això té lloc en dues regions. La primera d'elles correspon al cas en què les òrbites $2T$ -periòdiques són dues òrbites T -periòdiques i la segona regió que abarca els valors des de $V = 2.2$ a $V = 2.75$, es tracta d'òrbites $2T$ -periòdiques pròpiament. És té que (3.99) té un punt fix si i només si

$$\begin{aligned} & (ABCD - A(B + D) + C(B - D))^2 \\ & - 4(ABC - C - A)(CD(A + B) - (A + B + C + D)) \geq 0. \quad (3.100) \end{aligned}$$

Calculant aquesta condició en funció de V , s'obté el complement de les dues regions anteriorment discutides.

També s'ha obtingut el valor asimptòtic de LLE quan (α_n) té límit. La relació de recurrència per $\lambda_n = \lambda(2nT)$ és

$$\begin{aligned} \lambda_{n+1} &= \frac{1}{2} \log \frac{(\tan^2 \alpha_{n+1} + 1)(\tan^2 \alpha_n + \tan \alpha_n + \gamma)}{(\tan^2 \alpha_n + 1)(\tan^2 \alpha_{n+1} + \tan \alpha_{n+1} + \gamma)} \\ &+ \frac{1}{2} \log \frac{((M_{1n} + \nu_1)^2 + M_{1n} + \nu_1 + \gamma)((M_{2n} + \nu_2)^2 + M_{2n} + \nu_2 + \gamma)}{(M_{1n}^2 + M_{1n} + \gamma)(M_{2n}^2 + M_{2n} + \gamma)} \\ &- T + \lambda_n. \end{aligned} \quad (3.101)$$

on

$$M_{1n} = \mu \tan \left(\mu t_1 + \arctan \frac{\tan \alpha_n + \frac{1}{2}}{\mu} \right) - \frac{1}{2} = \mu r_n - \frac{1}{2}, \quad (3.102)$$

i

$$M_{2n} = \mu \tan \left(\mu(t_2 - t_1) + \arctan \frac{M_{1n} + \nu_1 + \frac{1}{2}}{\mu} \right) - \frac{1}{2}. \quad (3.103)$$

Anomenant M_{1*} i M_{2*} els límits de (M_{1n}) i (M_{2n}) s'obté, seguint els mateixos passos que per les òrbites T -periòdiques, l'expressió de LLE

$$\begin{aligned} \lambda &= -\frac{1}{2} \\ &+ \frac{1}{4T} \log \frac{((M_{1*} + \nu_1)^2 + M_{1*} + \nu_1 + \gamma)((M_{2*} + \nu_2)^2 + M_{2*} + \nu_2 + \gamma)}{(M_{1*}^2 + M_{1*} + \gamma)(M_{2*}^2 + M_{2*} + \gamma)} \end{aligned} \quad (3.104)$$

la qual reproduïx la línia discontinua creixent de la Figura 3.6 des de $V \sim 2.75$ en endavant.

El mateix procés es pot portar a terme per les òrbites kT -periòdiques. La relació de recurrència per $\lambda_n = \lambda(nkT)$ és

$$\begin{aligned} \lambda_n &= \frac{1}{2} \log \frac{(\tan^2 \alpha_n + 1)(\tan^2 \alpha_{n-1} + \tan \alpha_{n-1} + \gamma)}{(\tan^2 \alpha_n + \tan \alpha_n + \gamma)(\tan^2 \alpha_{n-1} + 1)} \\ &+ \frac{1}{2} \log \frac{((\nu_1 + M_{1,n-1})^2 + \nu_1 + M_{1,n-1} + \gamma) \cdots ((\nu_k + M_{k,n-1})^2 + \nu_k + M_{k,n-1} + \gamma)}{(M_{1,n-1}^2 + M_{1,n-1} + \gamma) \cdots (M_{k,n-1}^2 + M_{k,n-1} + \gamma)} \\ &- \frac{1}{2} kT + \lambda_n \end{aligned} \quad (3.105)$$

amb $M_{1,n}$ dependent de t_1 i $\alpha((n-1)kT)$ i $M_{i,n}$ dependent de $t_i - t_{i-1}$ i $M_{i-1,n}$ per $i = 2, \dots, k$. Altra vegada, s'obté que $\lambda = -1/2$ quan la recurrència $\alpha_n = \alpha(nkT)$ no convergeix, mentre que

$$\lambda = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2T} \log \frac{((\nu_1 + M_{1*})^2 + \nu_1 + M_{1*} + \gamma) \cdots ((\nu_k + M_{k*})^2 + \nu_k + M_{k*} + \gamma)}{((M_{1*})^2 + M_{1*} + \gamma) \cdots ((M_{k*})^2 + M_{k*} + \gamma)}, \quad (3.106)$$

sí que ho fa.

D'aquesta manera, incrementant el valor de k , es poden obtenir expressions analítiques dels successius trossos de la corba del LLE de la Figura 3.2, durant el tram en el què l'atractor dominant és una òrbita periòdica, és a dir, abans del començament del caos. Tan mateix, ja que s'han obtingut expressions analítiques pel LLE associat a una òrbita periòdica, sigui estable o no, aquests resultats poden ser un punt de partida per l'obtenció d'expressions analítiques aproximades pel LLE en règim caòtic, en el sentit que s'assenyala a la teoria d'òrbites periòdiques [20].

Aquest procediment pot ser, en principi, fàcilment aplicable a qualsevol sistema lineal a trossos i, en particular, a qualsevol altre convertidor PWM-controlat.

3.6 Conclusions i treball futur

S'han escrit les equacions diferencials que han de complir els exponents de Lyapunov del convertidor buck, a partir de la descomposició QR de la funció tangent obtinguda a partir d'una trajectòria de referència. S'han resolt numèricament les esmentades equacions i s'ha calculat l'exponent Lyapunov més gran (LLE) per a un rang de valors del paràmetre de bifurcació, i s'han resolt analíticament quan la trajectòria de referència és periòdica, tan si és estable com si és inestable. Quan l'òrbita periòdica és l'atractor dominant, el resultat analític coincideix amb el valor obtingut per integració numèrica. Els resultats també es corresponen amb el que prèviament es coneix a la literatura sobre la part real dels exponents de Floquet de les òrbites periòdiques del convertidor buck. Aquests càlculs es poden fer extensius a òrbites periòdiques de període superior i és d'esperar que això permeti obtenir aproximacions analítiques als LLE quan s'està plenament en règim caòtic, usant les eines de la teoria de les òrbites periòdiques [20]. També pot resultar interessant calcular les correccions d'ordre superior al LLE linealitzat, basades en el hessià enlloc del jacobià [11].

Capítol 4

Convertidor boost amb control de lliscament i amb banda d'histèresi: cas 2-dimensional

4.1 Presentació

Sigui el sistema presentat a la figura 4.1 la qual representa un convertidor tipus boost. Tenim dues variables d'estat que són x_1 (el voltatge en el condensador) i x_2 (la intensitat en el inductor).

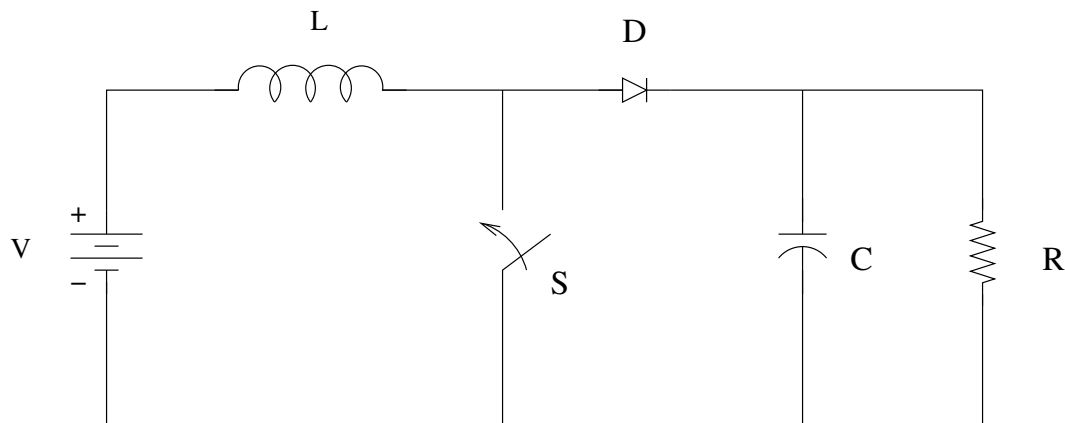


Figura 4.1: Esquema d'un convertidor de potència boost.

Les equacions que regeixen la dinàmica del convertidor són

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\frac{1}{RC}x_1 + \frac{1}{C}(1-u)x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{L}(1-u)x_1 + \frac{V_g}{L}\end{aligned}\quad (4.1)$$

on u és la variable de control. Els valors d'aquesta variable són 0 i 1. El valor $u = 1$ correspon al cas en què l'interruptor S està tancat. Aleshores tot el corrent de la font circula per la bobina i deixa aïllada la branca RC . En canvi, $u = 0$ quan l'interruptor S està obert.

Combinant adequadament les dues equacions de (4.1), s'obté que una condició necessària perquè el punt (x_1, x_2) de l'espai d'estats, sigui un punt d'equilibri de la dinàmica és que

$$x_2 V_g - \frac{1}{R}x_1^2 = 0. \quad (4.2)$$

Així, aquest sistema presenta un punt d'equilibri $PE = (V_g, V_g/R)$ que compleix la condició (4.2) si l'interruptor està obert. En canvi, si l'interruptor està tancat, el voltatge del condensador es farà zero i la intensitat de l'inductor creix indefinidament.

Mitjançant les tècniques de control en règim de lliscament es preten forçar el sistema a assolir una superfície concreta, anomenada superfície de lliscament, la qual està definida en l'espai d'estats, controlant així el comportament asimptòtic del sistema. Aleshores, sobre aquesta superfície solen aparèixer noves propietats de la dinàmica, ja que les característiques de la superfície són imposades sobre aquesta (així per exemple, l'ordre del sistema queda reduït).

Per exemple, la superfície de lliscament podria ser $x_1 - V_{ref} = 0$. Demanar que les trajectòries romanguin en ella equival a imposar que $x_1 = V_{ref}$ en el temps. Es pot comprovar que el punt d'equilibri de la dinàmica resultant sobre la superfície és inestable. Per aquest motiu la superfície que imposarem serà $S_l = 0$, on

$$S_l \equiv x_2 + a(x_1 - V_{ref}). \quad (4.3)$$

A la secció 4.2 estudiarem la dinàmica de lliscament ideal. Aquestes tècniques de control proporcionen al sistema una major protecció davant de la variació dels paràmetres i perturbacions externes. Tenen en contra però, que per tal que el sistema romangui en la superfície de lliscament, aquest hauria de commutar amb freqüència infinita. Per aquest motiu a la pràctica, una de les tècniques usades per evitar aquest defecte és la banda d'histèresi [2]. Ho tractarem a la secció 4.3. I finalment, perquè el sistema sigui més robust, moltes vegades es controla també l'error. Apareix aleshores una nova variable i una nova equació en el sistema dinàmic. Ho tractarem amb una mica de més detall en el capítol següent.

4.2 Dinàmica de lliscament ideal

Sigui el sistema dinàmic donat per les equacions (4.1) i representat a la Figura 4.1.

La variable de control u anirà alternant els valors $u = 0$ i $u = 1$ amb freqüència infinita per tal que la trajectòria solució de les equacions romangui sobre la superfície de lliscament. Considerem la representació bilineal de (4.1), [24].

$$\frac{d}{dt}x = Ax + uBx + \delta, \quad (4.4)$$

on

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{RC} & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L} & 0 \end{pmatrix}, \quad \delta = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{V_g}{L} \end{pmatrix}.$$

El règim de lliscament existeix sempre que x arribi a la superfície i després quedi atrapada en ella gràcies al continu canvi de posició del commutador. Les dinàmiques de lliscament ideals estan caracteritzades per les següents condicions d'invariància:

$$S_l = 0, \quad \langle \nabla S_l, Ax + uBx + \delta \rangle = 0 \quad (4.5)$$

on $\langle \cdot, \cdot \rangle$ simbolitza el producte escalar.

La segona condició de (4.5) defineix el control equivalent u_{eq} com la llei de control derivable, que idealment atrapa les trajectòries sobre S_l si la dinàmica del moviment satisfà la primera condició d'invariància.

Aquest control d'equivalència ve donat per

$$u_{eq}(x) = -\frac{\langle \nabla S_l, Ax + \delta \rangle}{\langle \nabla S_l, Bx \rangle} \quad (4.6)$$

essent $\langle \nabla S_l, Bx \rangle \neq 0$ l'anomenada condició de transversalitat.

Aplicat al boost,

$$u_{eq}(x) = 1 - \frac{\frac{V_g}{L} - \frac{ax_1}{CR}}{\frac{1}{L} - \frac{ax_2}{C}} \quad (4.7)$$

Per tal que existeixi el règim de lliscament a S_l s'ha de complir, [4]

$$0 < u_{eq}(x) < 1 \quad (4.8)$$

per tot $x = (x_1, x_2)$ de la superfície de lliscament.

D'aquí es dedueix que els punts de la superfície $S_l = 0$ que estaran en règim de lliscament són els que compleixen o bé

$$x_1 > \frac{a^2 V_{ref} L}{L a^2 + C} \text{ i } x_1 > \frac{C V_g + a^2 V_{ref} L}{a^2 R L + a L + C R} R \text{ i } x_1 < \frac{V_g C R}{L a} \quad (4.9)$$

o bé

$$x_1 < \frac{a^2 V_{ref} L}{L a^2 + C} \text{ i } x_1 < \frac{C V_g + a^2 V_{ref} L}{a^2 R L + a L + C R} R \text{ i } x_1 > \frac{V_g C R}{L a} \quad (4.10)$$

Anomenem

$$R_1 = \{(x_1, x_2) \in S_l = 0 \text{ que compleixen les condicions (4.9)}\} \quad (4.11)$$

i

$$R_2 = \{(x_1, x_2) \in S_l = 0 \text{ que compleixen les condicions (4.10)}\} \quad (4.12)$$

De les condicions (4.9) i (4.10) es dedueix que hi ha zona de lliscament a $S_l = 0$ sempre que

$$1 \neq \frac{a^2 L + C}{a^3 L^2 V_{ref}} C V_g R. \quad (4.13)$$

Anomenant

$$\begin{aligned} f1 &= \frac{a^2 V_{ref} L}{L a^2 + C}, \\ f2 &= \frac{C V_g + a^2 V_{ref} L}{a^2 R L + a L + C R} R \\ f3 &= \frac{V_g C R}{L a}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

que són els valors que limiten les regions de lliscament a (4.9) i (4.10), resulta que la condició (4.13) es pot escriure com

$$1 \neq f3 (f1)^{-1} \quad (4.15)$$

Treballant amb les desigualtats que defineixen R_1 i R_2 es pot demostrar que la següent proposició.

V_{ref}	Regió de lliscament	f1
4	$4.2038 < x_1 < 22.7273$	3.8035
8	$7.9269 < x_1 < 22.7273$	7.6071
12	$11.6500 < x_1 < 22.7273$	11.4106
16	$15.3731 < x_1 < 22.7273$	15.2141
20	$19.0962 < x_1 < 22.7273$	19.0177
22	$20.9577 < x_1 < 22.7273$	20.9194
23	$21.8885 < x_1 < 22.7273$	21.8703
24	$22.7273 < x_1 < 22.8193$	22.8212
26	$22.7273 < x_1 < 24.6808$	24.7230

Taula 4.1: Regió de lliscament segons els valors de V_{ref} .

Proposició 4.2.1.

- $1 < f3(f1)^{-1} \iff f1 < f2 \iff R_2 = \emptyset, R_1 \neq \emptyset \text{ i } R_1 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / f2 < x_1 < f3 \text{ i } x_2 = -a(x_1 - V_{ref})\}$.
- *En canvi*, $1 > f3(f1)^{-1} \iff f1 > f2 \iff R_1 = \emptyset, R_2 \neq \emptyset \text{ i } R_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 / f3 < x_1 < f2 \text{ i } x_2 = -a(x_1 - V_{ref})\}$.

La proposició 4.2.1, l'exemplifiquem a la Taula 4.1 on presentem la regió de lliscament de $S_l = 0$ per aquests valors dels paràmetres

$$V_g = 10, R = 10, C = 0.0002, L = 0.0002, a = 4.4 \tag{4.16}$$

i variant V_{ref} entorn de l'únic valor pel que segur que no hi ha regió de lliscament, que en aquest cas és $V_{ref} = 23.90120210$, que és quan $1 = f3(f1)^{-1}$

Ja que $f3$ no depen de V_{ref} , un dels extrems que definiex l'interval de lliscament és fix. S'ha indicat també el valor de $f1$ per cada cas.

Podem observar que a mesura que ens apropem al valor $V_{ref} = 23.9012$, l'interval on està definit el règim de lliscament, es va fent més petit.

A més, per $V_{ref} < 23.9012$, aleshores $1 < f3(f1)^{-1}$ i per tant, la regió de lliscament és R_1 i ve definida per $f2 < x_1 < f3$ i $x_2 = -a(x_1 - V_{ref})$.

En canvi per $V_{ref} > 23.9012$, aleshores $1 > f3(f1)^{-1}$ i la regió de lliscament ideal és R_2 definida per $f3 < x_1 < f2$ i $x_2 = -a(x_1 - V_{ref})$.

Per tant, es compleix la proposició 4.2.1.

També es té que el possible punt d'equilibri de la dinàmica PE per $u = 0$, mai estarà en règim de lliscament tot i està en $S_l = 0$, ja que en aquest punt la segona de les desigualtats tan en (4.9) com en (4.10) es converteixen en una igualtat.

Imposant el valor trobat per u_{eq} a (4.7) a les equacions que ens defineixen el convertidor boost, (4.1), sobre la superfície de lliscament $S_l = 0$, (4.3), s'obté la dinàmica de lliscament ideal que en aquest cas, ve regida per l'equació:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{R} \frac{x_1^2 + R a V_g (x_1 - V_{ref})}{C x_1 + L a^2 (x_1 - V_{ref})} \quad (4.17)$$

Independentment dels valors dels paràmetres existeix un possible punt d'equilibri de la dinàmica (l'altra solució de l'equació de grau dos no té sentit ja que aleshores $x_1 < 0$):

$$\begin{aligned} x_1^* &= \frac{-R a V_g + \sqrt{R^2 a^2 V_g^2 + 4 R a V_g V_{ref}}}{2} \\ x_2^* &= -a(x_1^* - V_{ref}) \end{aligned} \quad (4.18)$$

Fàcilment es pot comprovar que compleix (4.2), condició necessària per ser punt d'equilibri de la dinàmica i que $x_2^* > 0$.

Per saber el caràcter estable o inestable del punt, linealitzarem l'equació (4.17) al voltant del punt d'equilibri. Resulta

$$\frac{d\hat{x}_1}{dt} = A \hat{x}_1 \quad (4.19)$$

on

$$A = -\frac{1}{R} \frac{(L a^2 x_1^* - R C a^2 V_g)(x_1^* - 2V_{ref})}{(x_1^* C + L a^2 (x_1^* - V_{ref}))^2} \quad \text{i} \quad \hat{x}_1 = x_1 - x_1^* \quad (4.20)$$

Usant la definició de x_1^* es pot demostrar que $x_1^* - 2V_{ref} < 0$ i aleshores:

Proposició 4.2.2.

- Si x_1^* compleix (4.9), és a dir pertany a R_1 , aleshores $A < 0$ i el punt d'equilibri és asíntòticament estable.
- En canvi, si x_1^* compleix (4.10), és a dir pertany a R_2 , aleshores $A > 0$ i el punt d'equilibri és inestable.

A la Taula 4.2 presentem resultats sobre l'estabilitat del punt d'equilibri usant els valors dels paràmetres donats a (4.16) i variant V_{ref} tal i com s'ha fet a la Taula 4.1. Indiquem en cada cas si hi ha punt d'equilibri i en el cas que n'hi hagi senyalem si el punt pertany a R_1 o a R_2 .

Estudiant en quines condicions x_1^* està en una de les dues possibles regions de lliscament, R_1 o R_2 , es pot demostrar que:

V_{ref}	Regió de lliscament	caràcter
4	\emptyset	
8	\emptyset	
12	R_1	A. estable
16	R_1	A. estable
20	R_1	A. estable
22	R_1	A. estable
23	R_1	A. estable
24	R_2	inestable
26	R_2	inestable

Taula 4.2: Regió a la que pertany el punt d'equilibri i caràcter d'aquest en funció de V_{ref} .

Proposició 4.2.3.

- Si $1 > f_3 (f_1)^{-1}$, la dinàmica de lliscament ideal (4.17) sempre té un punt d'equilibri donat per (4.18), el qual pertany a la regió de lliscament R_2 i el seu caràcter és inestable.
- En canvi, si $1 < f_3 (f_1)^{-1}$, el punt d'equilibri (4.18) està en la regió de lliscament, que ha de ser R_1 , $\iff V_{ref} > V_g \frac{aR+1}{Ra}$ i el seu caràcter és asimptòticament estable.

Per tant, si pels valors dels paràmetres que defineixen el convertidor boost i la superfície $S_l = 0$, la regió de lliscament és R_2 , el règim de lliscament té un punt d'equilibri que és inestable. Però, si la regió és R_1 , tenim punt d'equilibri si i només si $V_{ref} > V_g \frac{aR+1}{Ra}$. I el seu caràcter és asimptòticament estable. Si els valors dels paràmetres són els definits a (4.16) aleshores la regió de lliscament és R_1 i tenim un punt d'equilibri que és asimptòticament estable si i només si $10.2273 < V_{ref} < 23.9012$. Això és el què veiem a la Taula 4.2.

4.3 Dinàmica de lliscament amb banda d'histèresi

Per tal de poder realitzar i simular el sistema, afegim a la superfície de lliscament una banda d'histèresi, que provoca canvis en la topologia, fent que el sistema commuti d'una posició a l'altre. Aquesta banda ve definida per

$$S_{dk} \equiv x_2 + a(x_1 - V_{ref}) - dk$$

$$S_{-dk} \equiv x_2 + a(x_1 - V_{ref}) + dk \quad (4.21)$$

$$(4.22)$$

La configuració del sistema es defineix de la següent manera: quan l'interruptor S està tancat (configuració 1) tot el corrent de la font circula per la bobina i deixa aïllada la branca RC i aleshores les equacions que descriuen la dinàmica del sistema són:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{RC}x_1$$

$$\dot{x}_2 = \frac{V_g}{L} \quad (4.23)$$

D'aquesta forma el corrent que passa per la bobina comença a pujar, en canvi el voltatge en el condensador baixa. La llei de control fa que el sistema segueixi d'aquesta manera fins que s'assoleix la superfície $S_{dk} = 0$. En aquest moment l'interruptor s'obre (configuració 2). Les equacions que descriuen el sistema són:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{RC}x_1 + \frac{1}{C}x_2$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{1}{L}x_1 + \frac{V_g}{L} \quad (4.24)$$

El sistema seguirà en aquesta configuració fins que succeeix una d'aquestes dues possibilitats: 2.1) El sistema verifica l'equació $S_{-dk} = 0$ ó 2.2) el corrent a l'inductor es fa zero (configuració 3). Pel cas 2.1) el sistema tanca l'interruptor i comença de nou el cicle (veure Figura 4.2). Aquesta forma d'actuació es coneix amb el nom de mode de conducció contínua (MCC).

El cas 2.2) es conegut amb el nom de mode de conducció discontinua (MCD). Ja que el diode no permet que la corrent canviï de sentit, les equacions que ens descriuen aquesta dinàmica són:

$$\dot{x}_1 = -\frac{1}{RC}x_1$$

$$\dot{x}_2 = 0 \quad (4.25)$$

Aquesta és la configuració 3. Aquesta es manté fins que passa una d'aquestes dues situacions: 3.1) el sistema compleix l'equació $S_{-dk} = 0$ ó 3.2) $x_1 = V_g$.

En el cas 3.1), la trajectòria ha aconseguit la superfície de commutació $S_{-dk} = 0$, l'interruptor es tanca i comença un nou cicle una altra vegada. La Figura 4.3 il·lustra aquesta situació.

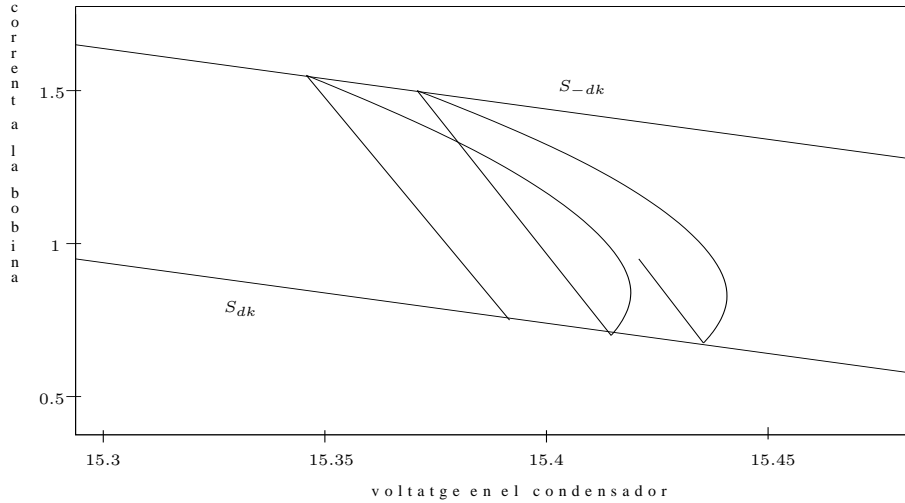


Figura 4.2: Mode de conducció contínua: pasem de la configuració 1 a la 2 cíclicament.

El cas 3.2) només es possible si el punt d'equilibri $(V_g, V_g/R)$ es troba dintre de la banda d'histèresi, és a dir

$$S_{dk}|_{(V_g, V_g/R)} < 0 < S_{-dk}|_{(V_g, V_g/R)} \tag{4.26}$$

Quan $x_1 = V_g$ el sistema evoluciona segons les equacions

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\frac{1}{RC}x_1 + \frac{1}{C}x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\frac{1}{L}x_1 + \frac{V_g}{L} \end{aligned} \tag{4.27}$$

Aleshores el sistema pot evolucionar fins a assolir el punt d'equilibri i aleshores ja no hi ha cap més commutació. O bé, la trajectòria pot de nou tallar a la superfície de commutació $S_{-dk} = 0$ i aleshores l'interruptor es tancaria, començant novament un nou cicle. Les Figures 4.4 i 4.5 ens mostren aquestes situacions.

A continuació estudiarem el comportament del sistema en funció de la posició del paràmetre V_g . Inicialment el punt d'equilibri es troba a l'esquerra de la banda. Aumentant el valor de V_g el punt d'equilibri es desplaça cap a la dreta i aquest entra dins la banda. Finalment el punt d'equilibri estarà a la dreta de la banda. En l'últim cas el sistema no funciona com un convertidor boost, ja que el sistema en general, s'enganxa al punt d'equilibri.

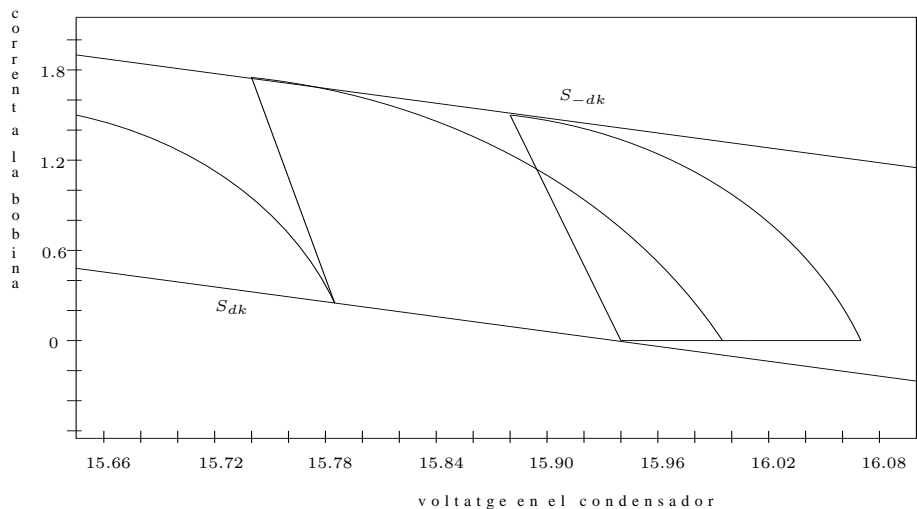


Figura 4.3: Mode de conducció discontinua: passem de la configuració 1 a la 3 cíclicament.

4.4 El mode de conducció contínua MCC

En aquest mode de conducció podem considerar tres casos importants:

- Cas 1: $S_{-dk}|_{(V_g, V_g/R)} < 0$.

Quan el punt d'equilibri es troba a la part esquerra de la banda la situació és ben simple. El sistema sempre evoluciona cap a un cicle límit, ja que el punt d'equilibri és un equilibri virtual. Aquest cicle límit és atractor en tot l'espai d'estats. Veure la Figura 4.6

- Cas 2: $S_{dk}|_{(V_g, V_g/R)} < 0 < S_{-dk}|_{(V_g, V_g/R)}$.

Aquest és probablement el cas més interessant del convertidor de potència boost controlat a través d'una banda d'histèresi. Quan el punt d'equilibri es mou en l'interior de la banda, aquest no és un punt d'equilibri virtual. A la Figura 4.7 es pot veure l'òrbita tangent. Aquesta trajectòria és una trajectòria que comença a S_{-dk} en el punt (i) , amb el sistema en la configuració 2, i que és tangent a S_{-dk} . El punt de tangència, que designarem per (a) , es calcula imposant

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_{(a)} = \left. \frac{dS}{dx} \right|_{(a)} \quad (4.28)$$

on ϕ representa l'òrbita solució. Es poden distingir dues situacions importants:

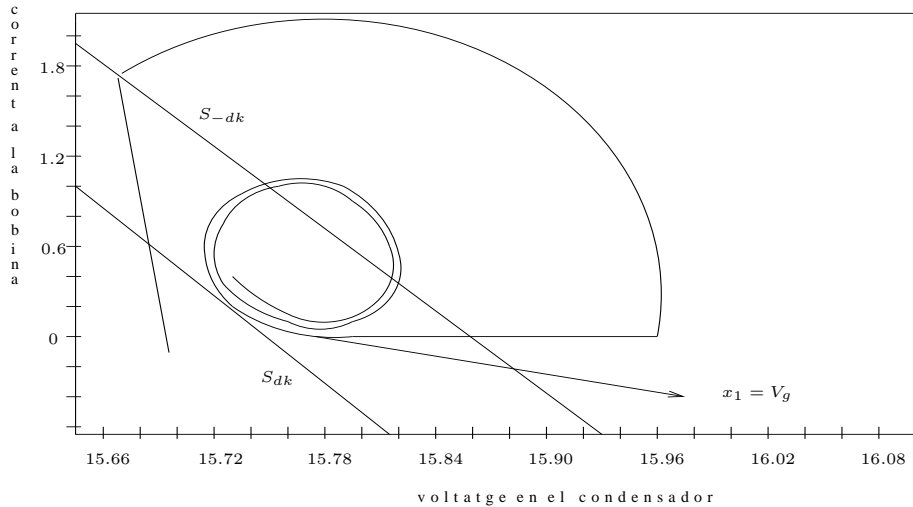


Figura 4.4: Òrbita on deixem el MCD abans de tallar la superfície.

– Cas 2.1:

La primera correspon al cas en el que quan anem enrera en el temps des del punt de tangència (a) la trajectòria no talla a la superfície S_{dk} abans de tallar de nou a la superfície S_{-dk} (veure la Figura 4.7). Depenent de la condició inicial, el sistema evoluciona al punt d'equilibri o al cicle límit. L'única regió interior del sistema que va a parar al punt d'equilibri està limitada per la trajectòria que comença al punt $(i) \in S_{-dk}$ i que es tangent a S_{-dk} en el punt (a) (el sistema ha de començar en la configuració 2). Aquesta situació es pot veure a la Figura 4.7. Generalment, però el sistema evoluciona al cicle límit. Es pot veure aquesta situació a la Figura 4.8.

– Cas 2.2:

Es correspon al cas en què la trajectòria tangent a S_{-dk} ha creuat la superfície S_{dk} abans d'arribar al punt de tangència (a). De nou hi ha diverses possibilitats.

- * 1) Hi ha un cicle límit i un punt d'equilibri. En aquest cas és necessari obtenir els punts de tall de la trajectòria amb les superfícies S_{dk} i S_{-dk} . Aquests punts es poden trobar de la forma següent: partim del punt de tangència (a) i anant enrera en el temps trobarem els punts de tall amb S_{dk} : són els punts (b) i (c) (veure la Figura 4.9). Seguint enrera en el temps i considerant el canvi de configuració, trobem els punts (d) i (e) . Aquest procés pot continuar fins que el sistema entra en MCD. La notació usada per indicar aquest procés de tirar enrera en el temps és:

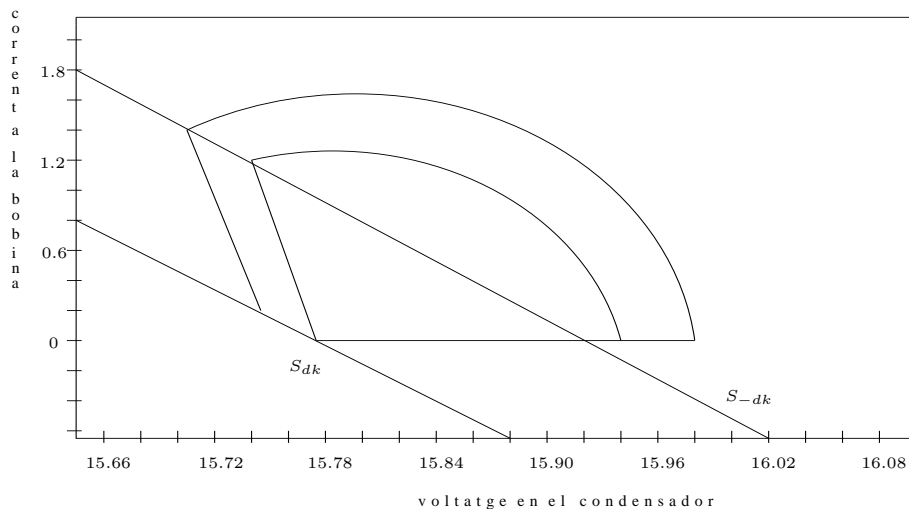


Figura 4.5: L'òrbita surt de MCD perquè talla de nou a S_{dk} .

$$(a) \leftarrow (b) \leftarrow (d) \leftarrow (f) \leftarrow (h) \quad (4.29)$$

on (h) es obtingut com a condició inicial sobre la recta S_{-dk} amb el sistema en la configuració 1.

Quan aquesta trajectòria assoleix la superfície S_{dk} en el punt (f) el sistema passa a la configuració 2. En aquesta configuració el sistema arriba al punt (d) i de nou passa a la configuració 1. De nou torna a tallar a la superfície S_{dk} en el punt (b) , i el sistema canvia a la configuració 2. Finalment arribem a (a) . Aquesta és l'òrbita tangent.

De forma semblant a l'òrbita tangent, anant enrera en el temps, tenim descrita una altra òrbita definida per

$$(a) \leftarrow (c) \leftarrow (e) \leftarrow (g) \leftarrow (i) \quad (4.30)$$

Aleshores totes les òrbites que comencen en el segment $((d), (e))$ definit sobre la recta S_{dk} , van a parar al punt d'equilibri ja que l'òrbita tangent no els permet arribar de nou a la superfície S_{-dk} . El mateix succeeix amb les trajectòries que comencen en el segment $((i), (h))$. En canvi si l'òrbita comença en algun sector inclòs al segment $((e), (i))$, l'òrbita queda atrapada en aquesta zona. Aquest anàlisi pot continuar, tirant el temps enrera i es poden trobar els sectors que satisfan diferents condicions. Per tant, hi ha dues solucions de l'estat estacionari les quals depenen de les condicions inicials: el punt d'equilibri i un cicle límit.

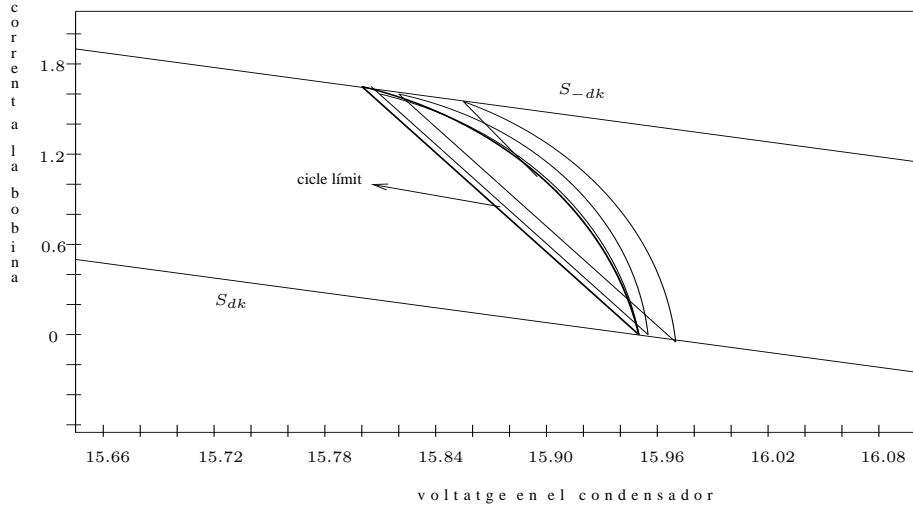


Figura 4.6: Existeix un cicle límit en MCC si $S_{-dk}|_{(V_g, V_g/R)} < 0$.

Cal observar que es una condició necessària perquè es dongui aquest cas que el punt (i) es trobi a la dreta del punt de tangència (a) .

- * 2) Si el punt (c) coincideix amb el punt (p) aleshores tenim una òrbita 1 periòdica que és inestable ja que qualsevol altra trajectòria convergeix al punt d'equilibri. Aquest fet està representat a la Figura 4.10.
- * 3) Existeix una òrbita 2 periòdica que és inestable. Aquest cas es dona quan el punt (i) coincideix amb el punt de tangència (a) , (p) coincideix amb (g) i (q) amb (e) . Aquesta òrbita la podem expressar així:

$$(a) \rightarrow (g) \rightarrow (e) \rightarrow (c) \rightarrow (a) \tag{4.31}$$

Totes les trajectòries que comencen en el segment $((e), (a))$ queden atrapades en aquesta zona. Les que comencen en el segment $((d), (e))$ convergeixen al punt d'equilibri. Per suposat, aquest anàlisi es pot fer a tot l'espai d'estats. La Figura 4.11 ens mostra aquesta situació.

- * 4) Hi ha un punt d'equilibri que és globalment estable. En aquest cas el punt (i) es troba a l'esquerra del punt de tangència (a) . Totes les trajectòries que comencen en el sector $((d), (i))$ convergeixen al punt d'equilibri. Ho podem veure a la Figura 4.12

- Cas 3: $S_{dk}|_{(V_g, V_g/R)} > 0$.

Si el punt d'equilibri es troba a la dreta de la banda del sistema, la situació es ben similar al cas anterior i els resultats depenen fortament dels valors dels paràmetres.

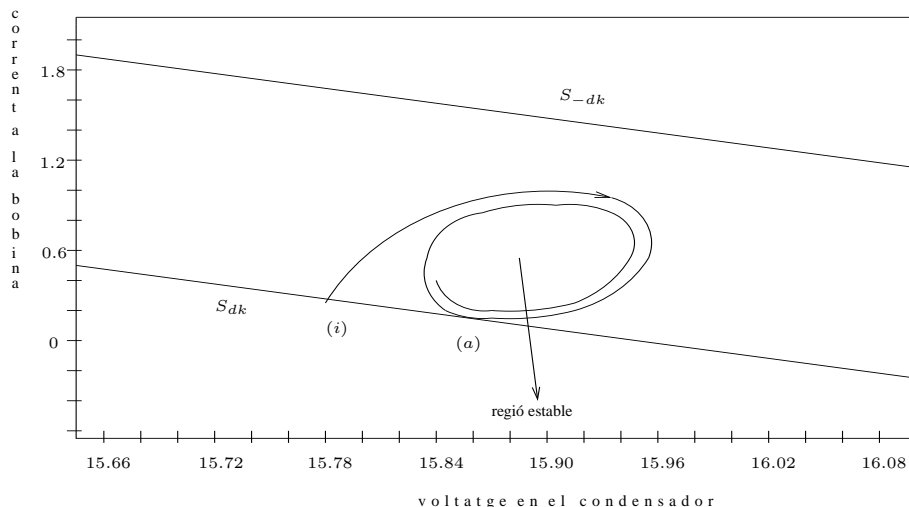


Figura 4.7: Primera situació en la que el sistema evoluciona al punt d'equilibri amb $S_{dk}|_{(V_g, V_g/R)} < 0 < S_{-dk}|_{(V_g, V_g/R)}$.

L'essència de l'anàlisi està en considerar la localització del punt (i) i això es fa tal i com s'ha fet en el cas 2. De totes formes aquest tercer cas no el considerarem perquè el sistema no es comporta com un convertidor boost (ja que el sistema s'enganxa al punt d'equilibri).

És obvi que podem caracteritzar tot l'espai de d'estats tirant enrera en el temps cada sector. Aquest procediment acaba quan es considera el mode MCD.

4.5 El mode de conducció discontinua (MCD)

Incrementant el valor de la resistència el sistema treballa en MCD. A l'igual que l'anàlisi fet en MCC, es pot fer l'estudi d'aquest mode dividint-lo en tres casos, havent-hi en cada cas situacions similars a les que ens hem trobat en el MCC. L'únic que s'ha de tenir en compte és que podem deixar el MCD per dos motius diferents. El primer és perquè el voltatge ha assolit el valor V_g abans de tallar de nou la superfície S_{-dk} i el segon motiu és just pel contrari, l'òrbita ha tallat la superfície i $v > V_g$. Per tant, en els casos a discutir hi entra en joc el punt $(V_g, 0)$.

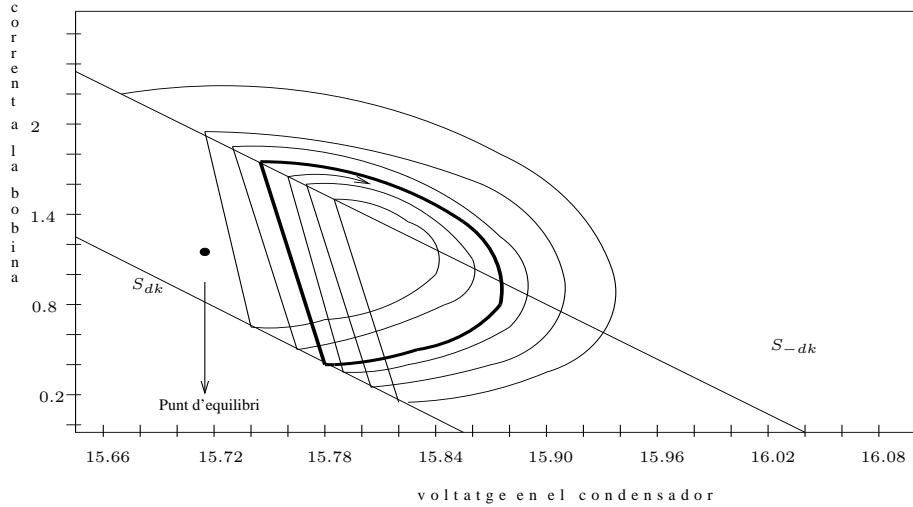


Figura 4.8: Situació en la que el sistema evoluciona a un cicle límit amb $S_{dk}|_{(V_g, V_g/R)} < 0 < S_{-dk}|_{(V_g, V_g/R)}$.

4.6 Conclusions i treball futur

S’ha analitzat la dinàmica del convertidor boost amb control de lliscament. Primer s’ha estudiat la dinàmica de lliscament ideal que ens dona el control equivalent, [4], del convertidor boost. S’han trobat les regions de lliscament en funció del paràmetre V_{ref} i s’ha estudiat el caràcter del punt d’equilibri d’aquesta dinàmica ideal en funció també d’aquest paràmetre. Ja que aquest control significaria que el sistema commuta amb freqüència infinita, a efectes pràctics, s’ha introduït una banda d’histèresi. Aleshores s’ha analitzat la dinàmica del sistema en funció d’un altre paràmetre, V_g , el qual forma part de l’expressió del punt d’equilibri que presenta el convertidor en una de les seves configuracions quan aquest treballa en mode de conducció contínua (MCC). S’ha comprovat que en funció de la posició d’aquest punt d’equilibri, $PE = (V_g, V_g/R)$, respecte la banda d’histèresi, la dinàmica o bé té un cicle límit que pot ser o no atractor, o un punt d’equilibri globalment estable o ambdues coses alhora.

En un treball futur caldria analitzar i escriure els diferents casos que es poden trobar en mode de conducció discontinua (MCD) pel convertidor boost amb control de lliscament i banda d’histèresi. Es podria intentar també, en el cas en que s’ha introduït un control integral amb una nova variable.

Es podria també fer aquest anàlisi a altres convertidors.

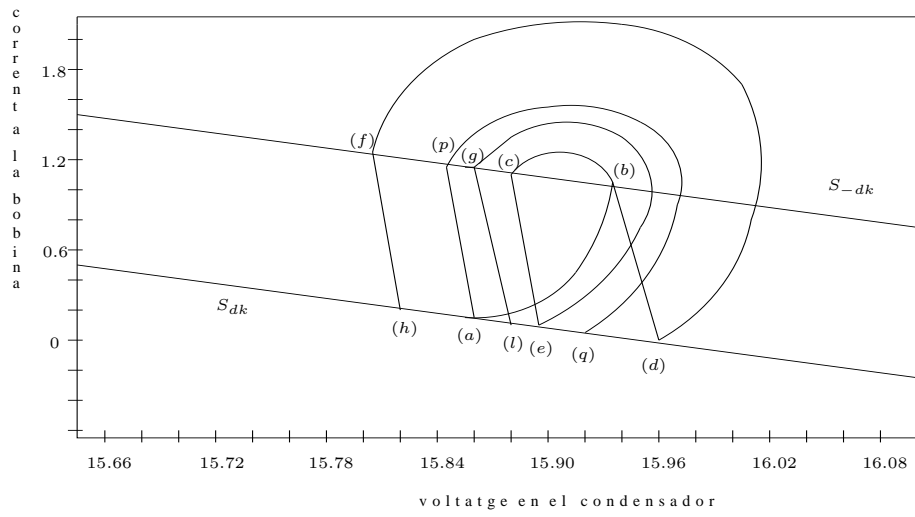


Figura 4.9: Segona situació amb diferents sectors d'estabilitat $S_{dk}|_{(V_g, V_g/R)} < 0 < S_{-dk}|_{(V_g, V_g/R)}$.

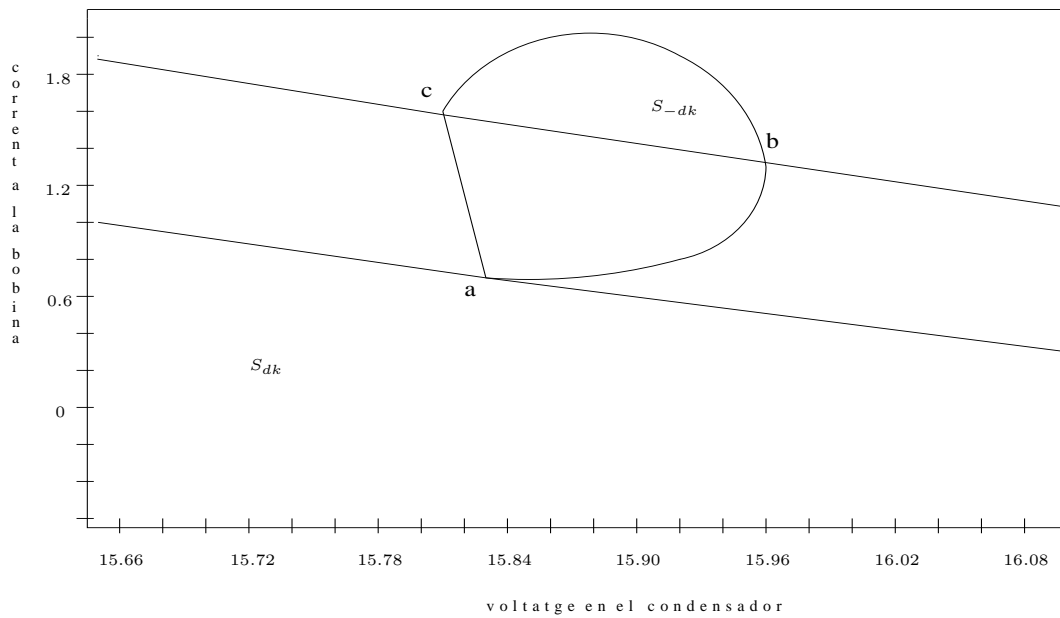


Figura 4.10: Segona situació amb una òrbita tangent 1 periòdica i inestable $S_{dk}|_{(V_g, V_g/R)} < 0 < S_{-dk}|_{(V_g, V_g/R)}$.

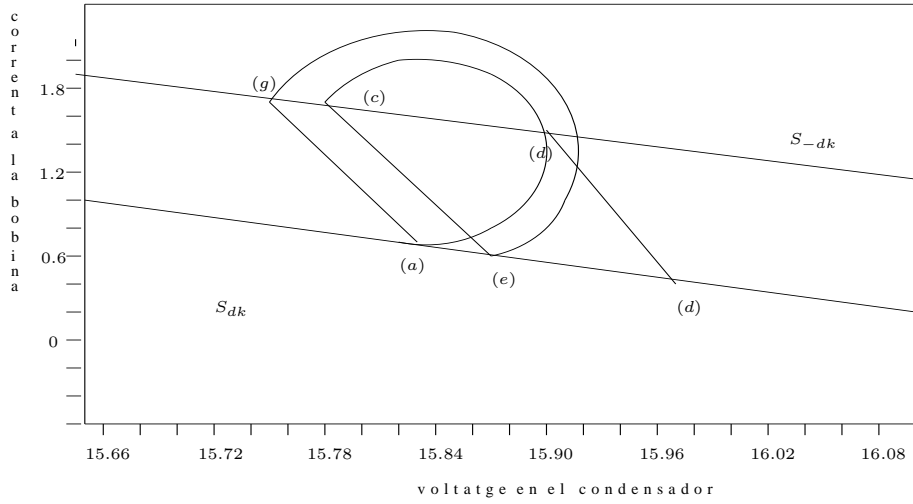


Figura 4.11: Segona situació amb una òrbita tangent 2 periòdica i inestable $S_{dk}|_{(V_g, V_g/R)} < 0 < S_{-dk}|_{(V_g, V_g/R)}$.

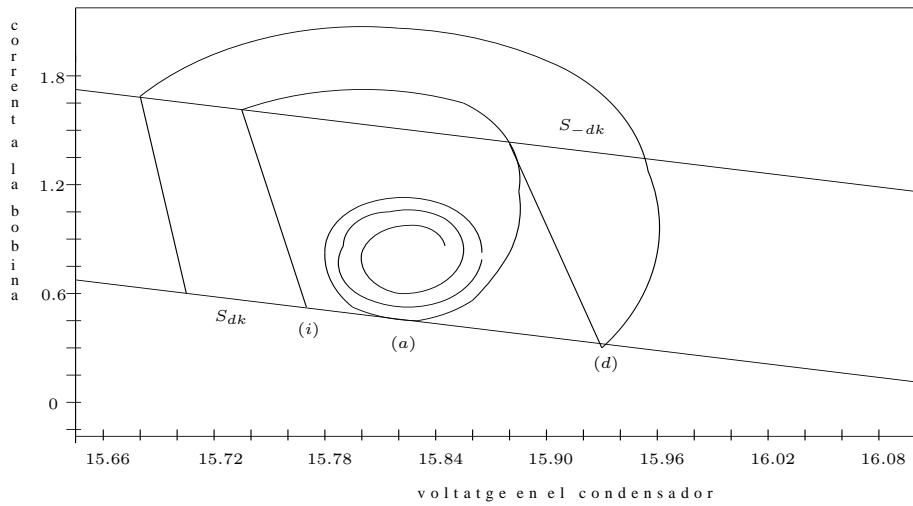


Figura 4.12: Segona situació amb una punt d'equilibri estable $S_{dk}|_{(V_g, V_g/R)} < 0 < S_{-dk}|_{(V_g, V_g/R)}$.

Capítol 5

El convertidor boost amb control integral

5.1 Descripció de la dinàmica d'un convertidor boost dc-dc amb control integral

Tot seguit descriurem la dinàmica d'un convertidor boost dc-dc amb una banda d'histeresi i amb una tercera variable d'estat anomenada error, la qual fa que el voltatge x_1 del condensador convergeixi a un valor de referència donat V_{ref} , garantint així que el sistema sigui robust respecte el voltatge d'entrada. Aquesta funció error és

$$x_3 = \int (V_{ref} - x_1) dt \quad (5.1)$$

d'on s'obté l'equació

$$\frac{dx_3}{dt} = V_{ref} - x_1. \quad (5.2)$$

Si x_2 és la variable d'estat que representa la intensitat en la bobina del convertidor, la dinàmica del sistema en mode de conducció continu (MCC) ve donada per les equacions diferencials:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{RC}x_1 + \frac{1}{C}x_2(1-u) \quad (5.3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = -\frac{1}{L}x_1(1-u) + \frac{V_g}{L} \quad (5.4)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = V_{ref} - x_1 \quad (5.5)$$

essent u la variable de commutació, els valors de la qual (1 ó 0) depenen de la llei de control que s'elegeixi, i R, C, L, V_g i V_{ref} són paràmetres del circuit.

Si el corrent es fa zero i es manté a zero en un interval de temps, entrarem aleshores en un nou mode de conducció, el mode de conducció discontinu (MCD) que vindrà descrit per les equacions:

$$\frac{dx_1}{dt} = -\frac{1}{RC}x_1 \quad (5.6)$$

$$x_2 = 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = V_{ref} - x_1 \quad (5.8)$$

Per cadascun dels dos valors de la variable de commutació u en MCC i en MCD, les equacions diferencials són lineals cosa que permet obtenir les solucions analítiques de les equacions. Més concretament, prenent

$$k = \frac{1}{2RC} \quad w = +\sqrt{\frac{1}{LC} - k^2} \quad (5.9)$$

i suposant que

$$\frac{1}{LC} - k^2 > 0 \quad (5.10)$$

que és la condició necessària per obtenir les solucions oscil·latòries del sistema, per $u = 0$ en MCC tenim la primera topologia lineal

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{RC}x_1 + \frac{1}{C}x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} &= -\frac{1}{L}x_1 + \frac{V_g}{L} \\ \frac{dx_3}{dt} &= V_{ref} - x_1 \end{aligned} \quad (5.11)$$

les solucions de la qual són

$$x_1(t) = V_g + e^{-k(t-t_0)} \left\{ (v_0 - V_g) \cos w(t - t_0) - \frac{k}{w} (v_0 + V_g - 2Ri_0) \sin w(t - t_0) \right\}$$

$$\begin{aligned}
 x_2(t) &= \frac{V_g}{R} + e^{-k(t-t_0)}. \\
 \{(i_0 - \frac{V_g}{R}) \cos w(t-t_0) + (\frac{k}{w}(i_0 - \frac{V_g}{R}) - \frac{1}{Lw}(v_0 - V_g)) \sin w(t-t_0)\} \\
 x_3(t) &= E_0 + (V_{ref} - V_g)(t-t_0) + L(x_2(t) - i_0).
 \end{aligned} \tag{5.12}$$

Per $u = 1$, s'obté la segona topologia:

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{RC}x_1 \\
 \frac{dx_2}{dt} &= \frac{V_g}{L} \\
 \frac{dx_3}{dt} &= V_{ref} - x_1
 \end{aligned} \tag{5.13}$$

amb les respectives solucions:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= v_0 e^{-2k(t-t_0)} \\
 x_2(t) &= \frac{V_g}{L}(t-t_0) + i_0 \\
 x_3(t) &= E_0 + V_{ref}(t-t_0) + \frac{1}{2k}(x_1(t) - v_0).
 \end{aligned} \tag{5.14}$$

I finalment quan $x_2 = 0$ per un cert interval de temps, entrem en MCD obtenint la tercera topologia, definida per les equacions

$$\begin{aligned}
 \frac{dx_1}{dt} &= -\frac{1}{RC}x_1 \\
 x_2 &= 0 \\
 \frac{dx_3}{dt} &= V_{ref} - x_1
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

de solucions:

$$\begin{aligned}
 x_1(t) &= v_0 e^{-2k(t-t_0)} \\
 x_2(t) &= 0 \\
 x_3(t) &= E_0 + V_{ref}(t-t_0) + \frac{1}{2k}(x_1(t) - v_0).
 \end{aligned} \tag{5.16}$$

Tant a (5.12), com a (5.14) i a (5.16), v_0 , i_0 i E_0 són els valors inicials de x_1 , x_2 i x_3 respectivament.

Podem observar que quan $u = 1$ el voltatge decreix cap a zero, la intensitat augmenta indefinidament a l'igual que l'error. En canvi per $u = 0$, el voltatge va cap a V_g , la intensitat cap a $\frac{V_g}{R}$ i l'error creix indefinidament excepte en el cas en que $V_{ref} = V_g$; aleshores tendeix a V_{ref} . Per tant, la dinàmica no té punts d'equilibri llevat del cas en què $V_{ref} = V_g$: aleshores per $u = 0$ tenim el punt d'equilibri $(V_g, \frac{V_g}{R}, V_g)$.

Imposant un control en mode de lliscament que consisteix en forçar el sistema a estar sobre la superfície de lliscament $S := S(x_1, x_2, x_3) = 0$, la qual es pot escriure de forma general com

$$S(x_1, x_2, x_3) = a_1(x_2 - I_{ref}) + a_2(x_1 - V_{ref}) + a_3(x_3 - E_{ref}), \quad (5.17)$$

i considerant la banda d'histèresi (necessària per poder realitzar càlculs pràctics) donada per

$$S + dk = 0 \quad \text{i} \quad S - dk = 0,$$

la llei de control consisteix en elegir $u = 0$ o $u = 1$ segons quina de les dues superfícies $S + dk = 0$ ó $S - dk = 0$ hagi intersectat la trajectòria del sistema.

5.2 Estudi de la dinàmica variant el paràmetre V_{ref}

Amb l'ajuda de diferents programes en MAPLE s'ha pogut fer un estudi de l'evolució del sistema fixats tots els paràmetres llevat de V_{ref} . Els valors fixats són:

$$R = 10; \quad L = 0.002; \quad C = 0.002; \quad V_g = 10; \quad k_1 = 4.4; \quad dk = 0.31. \quad (5.18)$$

Els valors dels paràmetres de la superfície de lliscament (5.17) són

$$a_1 = 1; \quad a_2 = k_1; \quad a_3 = -k_1 \cdot z; \quad z = \frac{2}{RC}; \quad I_{ref} = 0; \quad E_{ref} = 0. \quad (5.19)$$

Tot seguit detallarem algunes de les òrbites obtingudes en MCC i en MCD i passarem a comentar el tipus de bifurcacions trobades al variar V_{ref} .

5.2.1 Evolució en MCC

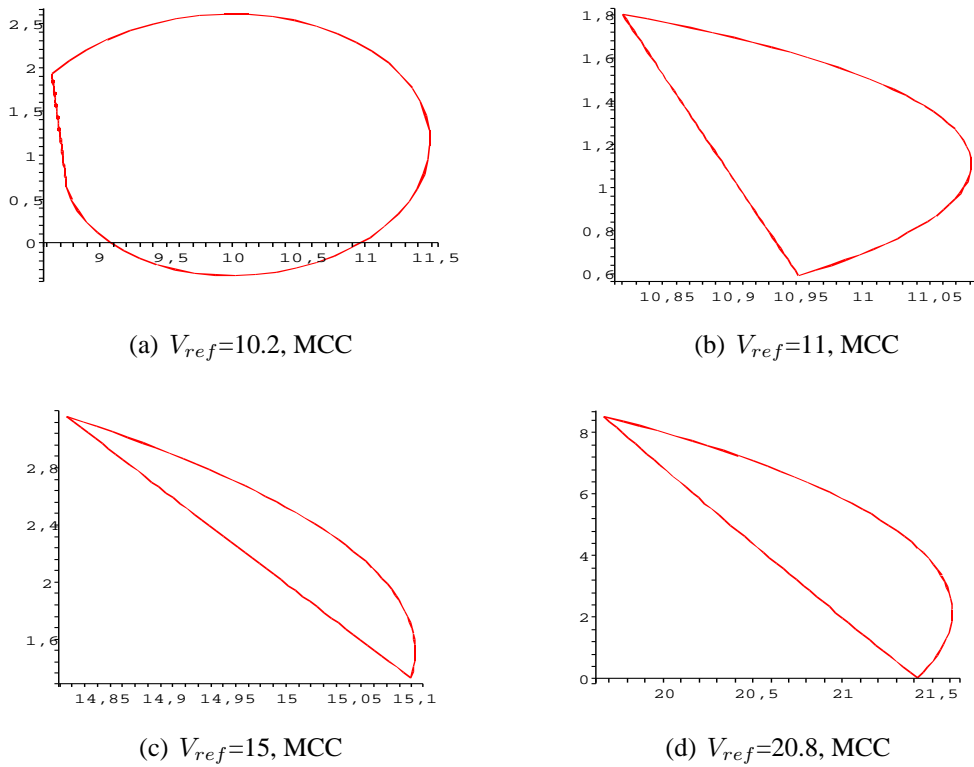


Figura 5.1: Òrbites 1-p en MCC per diferents V_{ref} obtingudes usant MAPLE.

A la Figura 5.1 hi ha representades algunes de les òrbites 1-periòdiques en MCC trobades. I a la Taula 5.1 hi ha tabulats els multiplicadors característics d'algunes òrbites 1 periòdiques. Podem observar que el valor absolut d'un dels multiplicadors de cada una de les òrbites periòdiques és menor que 10^{-90} , és a dir 0, cosa que sempre succeeix en les òrbites periòdiques [8].

Podem observar que en la primera òrbita la intensitat es fa negativa. Aquesta òrbita no es correspondria al circuit dissenyat, ja que el diode només deixa passar el corrent en un sentit. S'ha calculat el valor de V_{ref} pel qual l'òrbita 1 periòdica és tangent a $i = 0$ i s'ha obtingut $V_{ref} = 10.2158718824$. És una òrbita inestable, ja que els seus multiplicadors característics són: $\lambda_1 = 0.9511825321$, $\lambda_2 = 0$ i $\lambda_3 = -1.1630387316$. Per valors més petits que aquest les intensitats de les òrbites 1 periòdiques agafen valors negatius i per valors més grans, $i > 0$ en tot moment. A la Figura 5.2 hi ha representades un total de tres òrbites que il.lustren aquest fet. A l'òrbita corresponent a

V_{ref}	λ_1	λ_2	λ_3
10.2	0.9703278492	$0.85 \cdot 10^{-99}$	-2.6720704681
11	-0.76	$-0.12 \cdot 10^{-98}$	0.7959729365
13	-0.4697719715	$-0.47 \cdot 10^{-99}$	0.8851491434
15	-0.4520453535	$0.39 \cdot 10^{-98}$	0.8982122640
17	-0.5900666126	$0.63 \cdot 10^{-98}$	0.8896130946
19	-0.9279554295	$4.98 \cdot 10^{-101}$	0.8581548866
20	-1.3470412510	$0.35 \cdot 10^{-97}$	0.8276913996
20.8	-3.0255238656	$-0.22 \cdot 10^{-96}$	0.8111322588

Taula 5.1: Multiplicadors característics de les òrbites 1 periòdiques en MCC.

$V_{ref} = 10.2158718824$ hi ha dibuixades les seccions de les superfícies de lliscament amb el pla $x_3 = 0$. A la Figura 5.4 hi ha una representació en dimensió 3 de l'òrbita 1

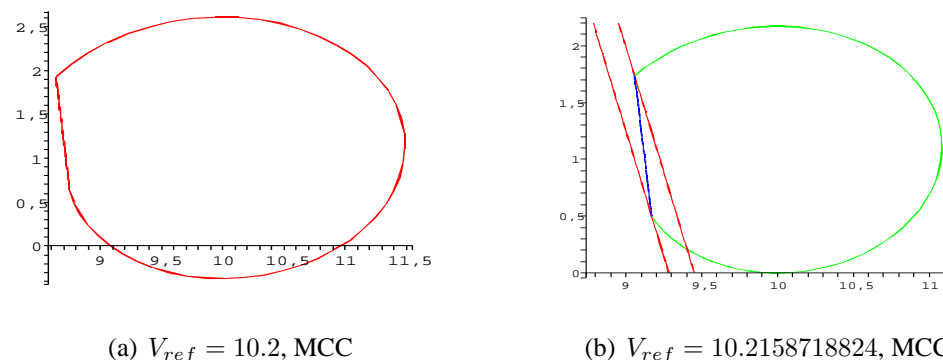


Figura 5.2: Òrbites 1-p en MCC amb diferents valors de la intensitat.

periòdica que és tangent a $i = 0$. Buscant el valor V_{ref} pel qual un dels multiplicadors característics pren el valor -1 , s'obté el punt a partir del qual el sistema ens dona òrbites 1 periòdiques estables. Aquest és:

$$V_{ref} = 10.2238329959 \quad (5.20)$$

fins els valor

$$V_{ref} = 19.2480119875 \quad (5.21)$$

Per aquest valor últim un dels multiplicadors característics val -1 i detectem un desdoblament de període: les òrbites 2 periòdiques obtingudes a partir d'aquest valor són estables fins a $V_{ref} = 19.5474656827$.

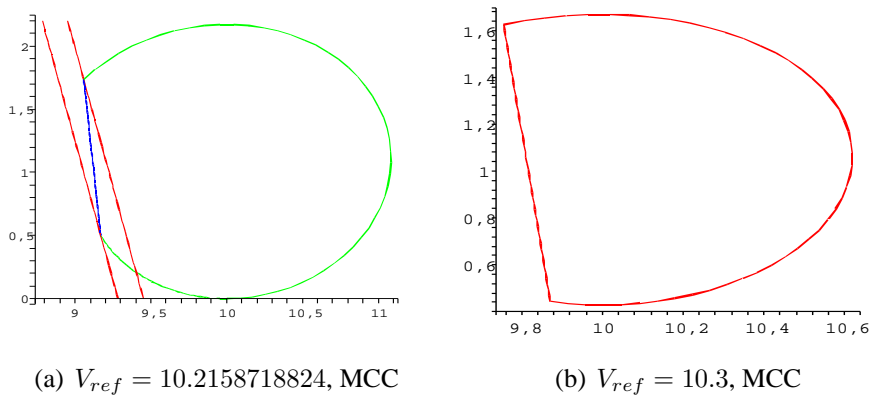


Figura 5.3: Òrbites 1 periòdiques en MCC amb diferents valors de la intensitat.

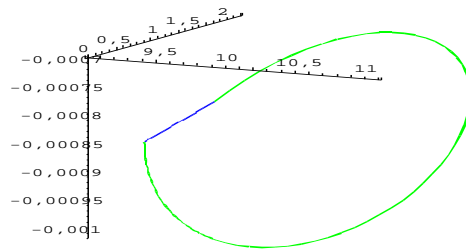


Figura 5.4: Òrbita 1 periòdica en MCC tangent a $i = 0$.

També es pot observar que les òrbites tendeixen a una òrbita on $i0 = 0$. Buscat el valor de V_{ref} pel qual això es fa cert s'obté:

$$V_{ref} = 20.80665222947. \tag{5.22}$$

A la Figura 5.5 hi trobem algunes de les òrbites 2 periòdiques trobades i a la Taula 5.2 hi ha tabulats els multiplicadors característics d'algunes d'aquestes òrbites.

Podem observar que per $V_{ref} = 19.6$ l'òrbita obtinguda té valors de la intensitat que són negatius en un període de temps. Buscat el valor de V_{ref} pel qual la intensitat en mode $u = 0$ és fa zero, obtenim $V_{ref} = 19.5474656827$. Per V_{ref} majors que aquest valor la intensitat es fa negativa per un cert període de temps.

Trobarem ara òrbites en MCD? Ho averiguarem en el següent apartat.

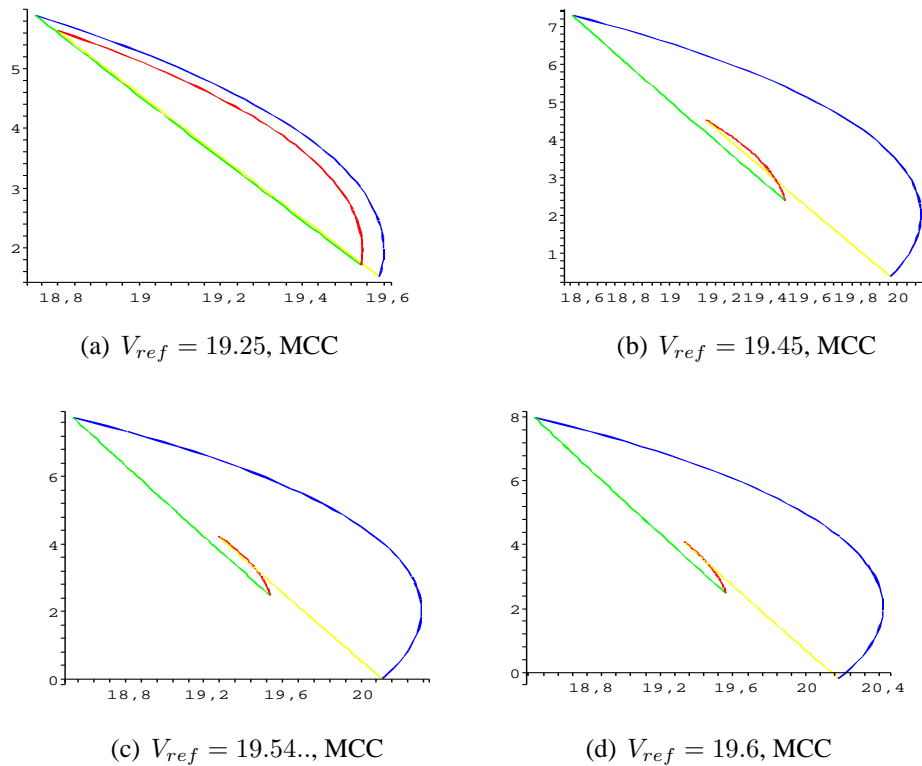


Figura 5.5: Òrbites 2 periòdiques en MCC per diferents V_{ref} obtingudes usant MAPLE.

5.2.2 Evolució en MCD

A la Figura 5.6 hi hem representat les òrbites 1 periòdiques en mode de conducció discontinua que s'han trobat usant el programa MAPLE. Aquestes òrbites es corresponen a la situació en què es deixa el mode de conducció discontinua perquè s'ha tallat de nou a la superfície $S + dk = 0$ (són les de tipus 2).

A la Figura 5.7 hi hem representat algunes de les òrbites en MCD 1 periòdiques del tipus 1 (el voltage ha assolit el valor V_g , sense haver tallat de nou a la superfície $S + dk = 0$).

I finalment tenim a la Figura 5.8 algunes de les òrbites 2 periòdiques en MCD del tipus 1 trobades.

A la Taula 5.3 estan calculats els multiplicadors característics de les òrbites 2 periòdiques en MCD. Podem observar que al variar el paràmetre de bifurcació V_{ref} , l'òrbita 2 periòdica en mode de conducció discontinua es converteix en una òrbita 1 periòdica en MCC. Per aquest motiu, l'únic multiplicador que fins ara era no nul es va fer també

V_{ref}	λ_1	λ_2	λ_3
19.25	0.9974827821	$2.31 \cdot 10^{-98}$	0.7243777086
19.3	0.9379632811	$-0.59 \cdot 10^{-97}$	0.6884035187
19.4	0.8607809764	$0.29 \cdot 10^{-98}$	0.5415848393
19.5	0.8308904554	$0.35 \cdot 10^{-97}$	0.2994011548
19.54..	0.8240091750	$-0.14 \cdot 10^{-97}$	0.1588880626
19.6	0.8192132878	$0.11 \cdot 10^{-97}$	-0.01420299617

Taula 5.2: Multiplicadors característics de les òrbites 2 periòdiques en MCC.

cada vegada més proper al zero, tant el càlcul analític, com en el numèric (diferències finites).

V_{ref}	λ_1	λ_2	λ_3
19.55	0.7573471406	$-0.34 \cdot 10^{-98}$	$0.63 \cdot 10^{-99}$
19.6	0.7529007331	$-0.10 \cdot 10^{-99}$	$-0.74 \cdot 10^{-98}$
20.2	0.6179379346	$1.14 \cdot 10^{-99} + 1.39 \cdot 10^{-99}j$	$1.14 \cdot 10^{-99} + 1.39 \cdot 10^{-99}j$
20.8	-0.1064164617	$0.75 \cdot 10^{-96}$	$-0.11 \cdot 10^{-96}$

Taula 5.3: Multiplicadors característics de les òrbites 2 periòdiques en MCD.

5.2.3 Tipus de bifurcacions

Amb aquest petit estudi usant el programa MAPLE i usant V_{ref} com a paràmetre de bifurcació s'han pogut detectar les següents bifurcacions:

- Una bifurcació de desdoblament de període per $V_{ref} = 19.2480119875$. Per aquest valor, les òrbites 1 periòdiques deixen de ser estables i passen a ser inestables, i apareixen òrbites 2 periòdiques estables fins a $V_{ref} = 19.5474656827$, on la intensitat agafa el valor 0 per un instant de temps. Aleshores per valors del paràmetre superiors a $V_{ref} = 19.5474656827$, les òrbites de període 2 obtingudes en MCC tenen valors d'intensitat negativa per un cert interval de temps.
- Per $V_{ref} = 19.5474656827$, valor pel qual toquem $i = 0$, apareixen òrbites 2 periòdiques estables en MCC amb un interval de temps on la intensitat és negativa, i també òrbites 2 periòdiques en MCD també estables. En aquest valor del paràmetre hi hauria una nova bifurcació, la que es dona quan passem de MCC a MCD (veure [35] per més exemples).

- Per $V_{ref} = 20.8066522294$ hi trobem una altra bifurcació, ja que, tal i com es pot veure a la Figura 5.9 usant els diferents programes de MAPLE elaborats per trobar les respectives òrbites, tots quatre ens donen la mateixa òrbita. Aquesta òrbita toca a la superfície $i = 0$. Podríem dir que es tracta d'una bifurcació "border collision".

Els multiplicadors característics de les òrbites de la Figura 5.9 estan tabulats a la Taula 5.4

Tipus d'òrbita	λ_1	λ_2	λ_3
1-p, MCC	-3.07490	0.81150	0
2-p, MCC	9.45506	0.65853	0
1-p, MCD	1.13260	0	0
2-p, MCD	-0.06823	0	0

Taula 5.4: Multiplicadors característics de les òrbites trobades per $V_{ref} = 20.80665$.

- Finalment tenim una bifurcació en MCD per $V_{ref} = 15.54503178956$ en la que l'òrbita corresponent a aquest valor s'obté tant pel programa que ens permet trobar òrbites de període 1 en MCD del tipus 1 (que són les que deixen el MCD perquè el voltatge val V_g , però no han tallat de nou la superfície $S + dk = 0$), com en el programa que troba les 1 periòdiques tipus 2 (les quals deixen el MCD perquè de nou s'han trobat amb la superfície $S + dk = 0$ amb valors del voltage majors que V_g). Justament en aquest punt passen les dues coses alhora: el voltage pren el valor V_g i l'òrbita talla a la superfície $S + dk = 0$. Si analitzem els multiplicadors característics s'obté:

Tipus d'òrbita	λ_1	λ_2	λ_3
1-p, MCD tipus 1	26.890065	0	0
1-p, MCD tipus 2	38.001567	0	0

Taula 5.5: Multiplicadors característics de les òrbites 1 periòdiques en MCD trobades per $V_{ref} = 15.54503178956$.

5.3 Conclusions i treball futur

Hem pogut veure com les dinàmiques de sistemes de dimensió 3 o més són molt més complicades que les de una o dues dimensions. A l'estudiar la dinàmica del convertidor

boost amb control de lliscament i histèresi, en el què s'ha introduït una nova variable i una nova equació diferencial (factor integrant), en funció de la variació d'un paràmetre, ens hem trobat a la secció 5.2 exemples de bifurcacions clàssiques (la de desdoblament de període) i exemples de noves bifurcacions tractades en estudis recents que es presenten en dinàmiques no suaus, a més de les que es produeixen pel canvi de MCC a MCD i a l'inrevés, i les que hi ha en MCD.

Hem vist també que un dels multiplicadors obtinguts per les diferents òrbites periòdiques trobades és zero [8].

Tots aquests exemples trobats s'haurien de tractar des d'un punt de vista analític.

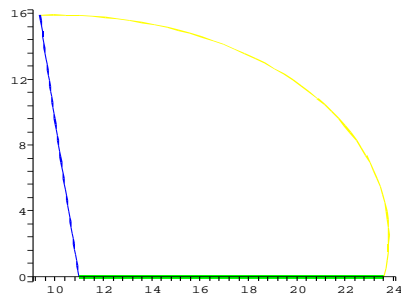
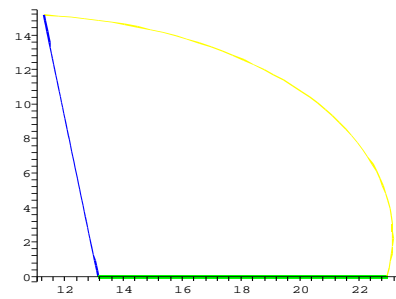
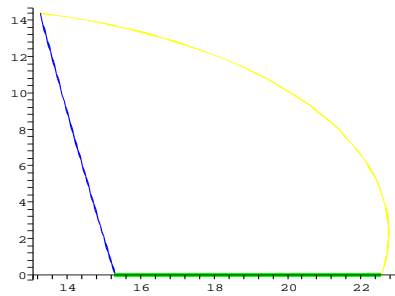
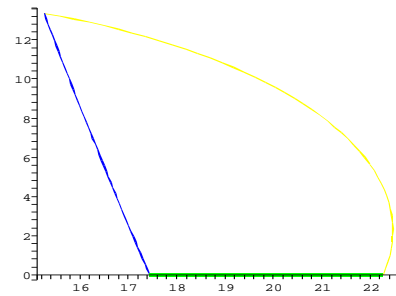
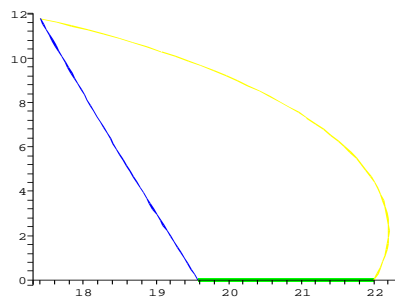
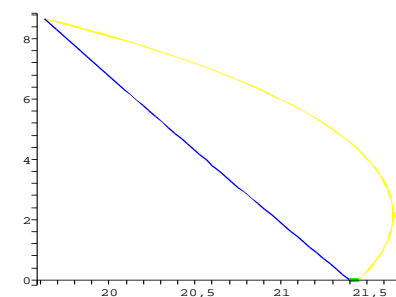
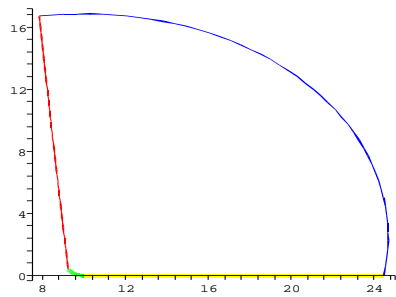
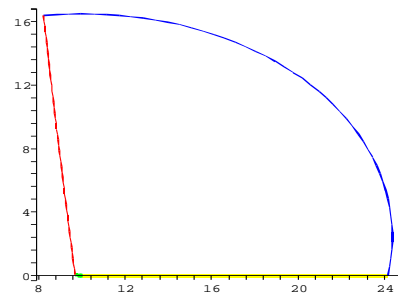
(a) $V_{ref}=16$, MCD(b) $V_{ref}=17$, MCD(c) $V_{ref}=18$, MCD(d) $V_{ref}=19$, MCD(e) $V_{ref}=20$, MCD(f) $V_{ref}=20.8$, MCD

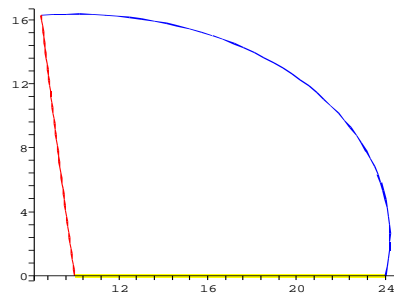
Figura 5.6: Òrbites 1 periòdiques en MCD per diferents V_{ref} obtingudes usant MAPLE.



(a) $V_{ref}=15.2$, MCD



(b) $V_{ref}=15.4$, MCD



(c) $V_{ref}=15.5450$, MCD

Figura 5.7: Òrbites 1 periòdiques en MCD per diferents V_{ref} obtingudes usant MAPLE del tipus 1.

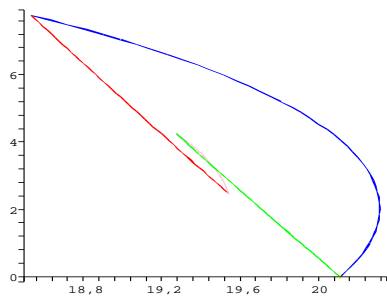
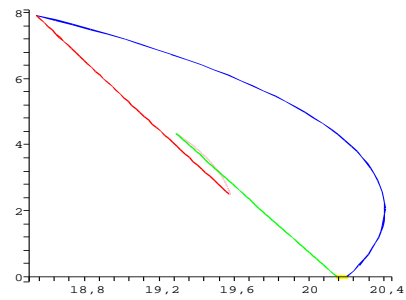
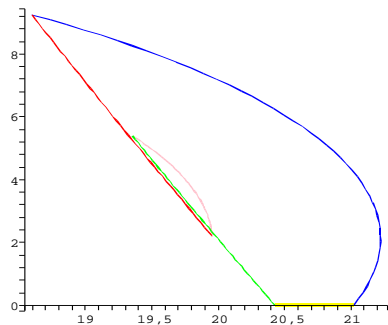
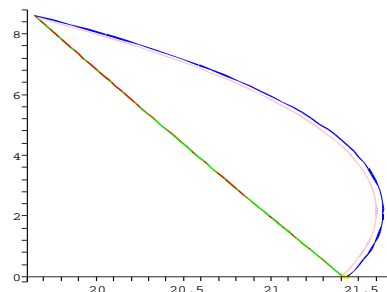
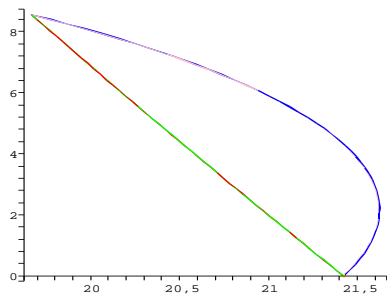
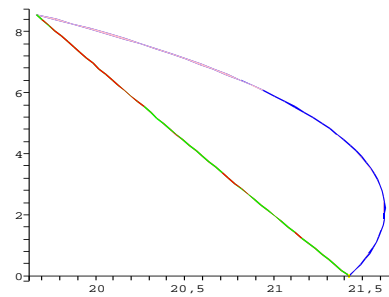
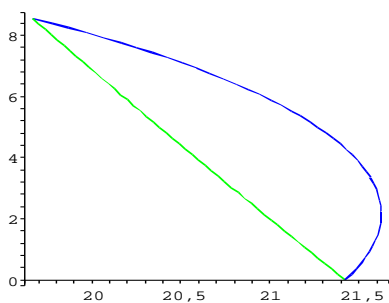
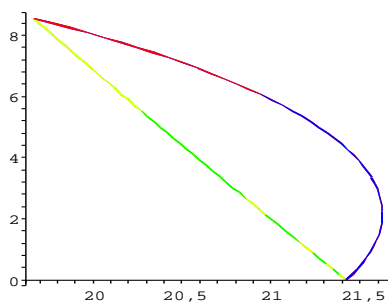
(a) $V_{ref}=19.55$, MCD(b) $V_{ref}=19.6$, MCD(c) $V_{ref}=20$, MCD(d) $V_{ref}=20.8$, MCD(e) $V_{ref}=20.806$, MCD(f) $V_{ref}=20.8066$, MCD

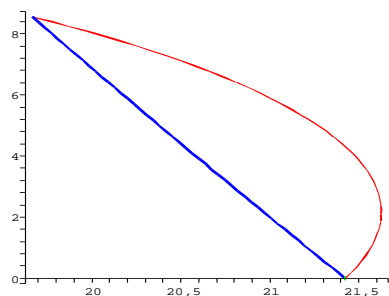
Figura 5.8: Òrbites 2 periòdiques en MCD per diferents V_{ref} obtingudes usant MAPLE.



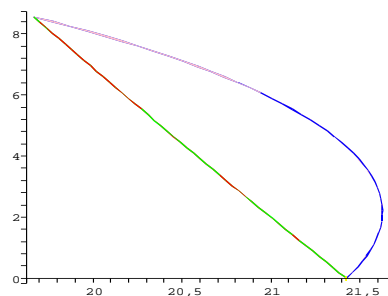
(a) 1-p, MCC



(b) 2-p, MCC



(c) 1-p, MCD



(d) 2-p, MCD

Figura 5.9: Comparació de les òrbites obtingudes pels diferents programes de MAPLE per $V_{ref} = 20.8066522292$.

Capítol 6

Conclusions i treball futur

Tot seguit detallarem per capítol quins resultats s'han obtingut i els possibles treballs que es poden dur a terme com a continuació del que s'ha fet.

- Capítol 3:

En aquest capítol s'ha recordat un dels mètodes numèrics més interessants, tan des del punt de vista numèric com des del punt de vista teòric, per calcular els exponents de Lyapunov. És el mètode que està basat en la descomposició QR de l'aplicació tangent, que s'obté a l'estudiar l'evolució dinàmica de la diferència entre dues òrbites inicialment properes. S'ha aplicat el mètode als sistemes bilineals en general i s'han obtingut resultats específics pel convertidor buck. En concret, s'han escrit les equacions diferencials que han de complir els exponents de Lyapunov del convertidor buck, a partir de la descomposició QR de l'aplicació tangent obtinguda a partir d'una trajectòria de referència. S'han resolt numèricament les esmentades equacions i s'ha calculat l'exponent de Lyapunov més gran (LLE) per a un rang de valors del paràmetre de bifurcació i s'han resolt analíticament quan la trajectòria de referència és periòdica, tan si és estable com si és inestable. Quan l'òrbita periòdica és l'atractor dominant, el resultat analític coincideix amb el valor obtingut per integració numèrica. Els resultats també es corresponen amb el que prèviament es coneix a la literatura sobre la part real dels exponents de Floquet de les òrbites periòdiques del convertidor buck.

Tots aquests càlculs es poden fer extensius a òrbites periòdiques de període superior i es d'esperar que això permeti obtenir aproximacions analítiques als LLE quan s'està plenament en règim caòtic, usant les eines de la teoria de les òrbites periòdiques [20]. També pot resultar interessant calcular les correccions d'ordre superior al LLE linealitzat, basades en el hessià enlloc del jacobià [11].

- Capítol 4:

S’ha analitzat la dinàmica del convertidor boost amb control de lliscament. Primer s’ha estudiat la dinàmica de lliscament ideal que ens dóna el control equivalent, [4], del convertidor boost. S’han trobat les regions de lliscament en funció del paràmetre V_{ref} i s’ha estudiat el caràcter del punt d’equilibri d’aquesta dinàmica ideal en funció també d’aquest paràmetre. Ja que aquest control significaria que el sistema commuta amb freqüència infinita, a efectes pràctics, s’ha introduït una banda d’histèresi. Aleshores s’ha analitzat la dinàmica del sistema en funció d’un altre paràmetre, V_g , el qual forma part de l’expressió del punt d’equilibri que presenta el convertidor en una de les seves configuracions, quan aquest treballa en mode de conducció contínua (MCC). S’ha comprovat que en funció de la posició d’aquest punt d’equilibri, $PE = (V_g, V_g/R)$, respecte la banda d’histèresi, la dinàmica o bé té un cicle límit que pot ser o no atractor, o un punt d’equilibri globalment estable o ambdues coses alhora.

En un treball futur caldria analitzar i escriure els diferents casos que es poden trobar en mode de conducció discontinua (MCD) pel convertidor boost amb control de lliscament i banda d’histèresi. Es podria intentar també, en el cas en que s’ha introduït un control integral amb una nova variable.

Es podria també fer aquest anàlisi a altres convertidors.

- Capítol 5:

Finalment, en el capítol 5, s’ha introduït un control integral i una tercera variable d’estat (variable error) al convertidor boost amb control de lliscament i amb banda d’histèresi. Les trajectòries són ara de \mathbb{R}^3 i la dinàmica resultant és molt més complicada, havent-hi la possibilitat de la presència de caos. S’han trobat numèricament òrbites 1 i 2 periòdiques en funció del paràmetre de bifurcació V_{ref} tan en MCC com en MCD i s’han trobat exemples de bifurcacions típiques dels sistemes suficientment diferenciables, com el desdoblament de període, i d’altres bifurcacions relativament noves a la literatura com són les que es produeixen per un canvi de mode de conducció, de MCC a MCD o a la inversa, o les que es presenten en sistemes non-smooth (que no són suficientment diferenciables a tot l’espai d’estats) com són les bifurcacions “border collision”, etc.

Es podria, en un treball futur fer la simulació del sistema dinàmic i obtenir els diagrames de bifurcació per diferents paràmetres. També seria interessant realitzar un estudi analític del les bifurcacions non-smooth trobades.

Bibliografia

- [1] R.D. Middlebrook and S. Ćuk “A general unified approach to modeling switching-converter power stages”, *Proc. IEEE Power Electronics Specialists Conf.*, 1976, pp. 18-34.
- [2] S. Banerjee and G.C. Verghese, Eds. “Nonlinear phenomena in power electronics”. *IEEE Pres*, Piscataway, 2001.
- [3] <http://www.doctrionics.co.uk/signals.htm>
- [4] H. Sira-Ramírez, “Sliding motions in bilinear switched networks”. *IEEE Trans. on Circuits and Systems*, vol.34, no. 8, 1987, pp. 919-933.
- [5] S. R. Sanders, G. C. Verghese, and D. E. Cameron, “Nonlinear control of switching power converters”. *Control-Theory and Advanced Tecnology*, vol 5, no. 4, 1989, pp. 601-627.
- [6] L. Malesani, L. Rosseto, G. Spiazzi, and P. Tenti, “Performance optimization of Ćuk converters by sliding-mode control”. *IEEE Trans. on Power Electronics*, vol. 10, no. 3, 1995, pp. 302-309.
- [7] W.-E. Wiesel. “Stability exponents, separation of variables, and Lyapunov transforms”. Preprint nlin.CD/9905002, 1999.
- [8] T. S. Parker, L. O. Chua. “Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems”. *Springer-Verlag*, NY, 1989.
- [9] K. Ramasubramanian, M. S. Sriram. “A comparative study of Lyapunov spectra with different algorithms”. Preprint nlin.CD/9909029, 1999.
- [10] T.M. Janaki, G. Rangarajan, S. Habib, R.D. Ryne. “Computation of the Lyapunov spectrum for continous-time dynamical systems and discrete maps”. *Phys. Rev. E60*, 1999, pp. 6614-6626.

- [11] J.-L. Thiffeault. "Differential constraints in chaotic flows on curved manifolds". Preprint nlin CD/0105010, 2001.
- [12] J.-L. Thiffeault. "Derivatives and constraints in chaotic flows: Asymptotic behaviour and a numerical method". *Physica D* 172, 2002, pp. 139-161.
- [13] J. Deane, D. Hamill. "Analysis, simulation and experimental study of chaos in buck converter". *IEEE Power Electronics Specialists Conf. 1990*. Vol. 2, San Antonio, Texas 1990. pp. 491-498.
- [14] E. Fossas, G. Olivar. "Study of chaos in the buck converter". *IEEE Trans. Circuit Syst.-I* 43, 1996. pp. 13-25.
- [15] C. Batlle, E. Fossas, G. Olivar. "Stabilization of periodic orbits of the buck converter by time-delayed feedback". *Int. J. Circuits Theor. Appl.* 27, 1999. pp. 617-631.
- [16] Y.H. Lim, D.C. Hamill. "Problems of computing Lyapunov exponents in power electronics". *Proc. IEEE Int. Symp. Circuits and Systems (IS-CAS1999)* V, 1999. pp. 297-301.
- [17] P.C. Müller. "Calculation of Lyapunov exponents for dynamic systems with discontinuities". *Chaos Solit. Fract.* 5, 1995. pp. 1671-1681.
- [18] W. J. Rugh. "Linear System Theory". (Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ), 1996.
- [19] P. Cvitanović. "Universality in chaos". (Institute of Physics Publishing), London 1984.
- [20] P. Cvitanović, R. Artuso, R. Mainieri, G. Vattay. "Classical and Quantum Chaos (webbook)". (Niels Bohr Institute, Copenhagen - available from www.nbi.dk/ChaosBook/), 2000.
- [21] P. Mattavelli, L. Rossetto, G. Spiazzi, P. Tenti. "General-purpose sliding-mode controller for DC/DC converter applications". In: (Proc. IEEE Power Electronics Specialist Conference,), 1993, pp. 609-615.
- [22] D. Biel, E. Fossas, F. Guinjoan, E. Alarcón, A. Poveda. "Application of Sliding-Mode Control to the Design of a Buck-Based Sinusoidal Generator". (*IEEE Transactions on industrial electronics*,), vol. 48, no 3, 2001, pp 563-571.

- [23] A. Romero, L. Martínez-Salamero, J. Calvente, E. Alarcón, S. Porta, A. Poveda. "Sliding mode control of switching converters: general theory in an integrated circuit solution". (*HAIT Journal of Science and Engineering B*), vol 2, no. 5-6, pp. 609-624, 2005.
- [24] J. R. Wood. "Power conversion in electrical networks". NASA REP. No. CR-120830, Harvard University, Division of Engineering and Applied Physics, Cambridge, MA, 1974.
- [25] A. F. Fillipov. "Differential equations with discontinuous right-hand side". (*Trans. Amer. Math. Soc.*), series 2, vol 2, pp. 199-231, 1964.
- [26] D. C. Hamill. "Power electronics: A field rich in nonlinear dynamics". (*Nonlinear Dynamics of Electronic Systems*), Dublin, 1995.
- [27] E. N. Lorenz. "Deterministic nonperiodic flow". (*J. Atmospheric Sciences*), vol. 20, no. 2, pp.130-141, 1963.
- [28] S. Smale. "Differentiable dynamical systems". (*Bulletin of the American Mathematical Society*), vol. 73, p. 747, 1967.
- [29] J. Guckenheimer i P. Holmes. "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Field". (*New York: Springer-Verlag*), 1983.
- [30] S. Banerjee and C. Grebogi. "Border Collision bifurcations in two-dimensional piecewise smooth maps". *Physical Review E* 59, pp.4052-4061, 1999.
- [31] M. di Bernardo, C. J. Budd and A. R. Champneys. "Grazing and Border-Collision in Piecewise-Smooth Systems: A Unified Analytical Framework". *Physical Review Letters* vol. 86, no. 12, pp. 2553-2556, 2001.
- [32] M. di Bernardo, M. I. Feigin, S. J. Hogan and M. E. Homer. "Local Analysis of C-bifurcations in n -dimensional piecewise smooth dynamical systems". *Chaos, Solitons and Fractals* vol. 10, pp. 1881-1908, 1999.
- [33] M. di Bernardo, P. Kowalczyk and A. Nordmark. "Sliding Bifurcations: a novel mechanism for the sudden onset of chaos in dry-friction oscillators". *International Journal of Bifurcations and Chaos* vol. 13, no. 10, pp. 2935-2998, 2003.

- [34] J. Deane, D. Hamill. "Instability, sub-harmonics and chaos in power electronic systems". *IEEE Transactions on Power Electronics* . Vol. 5, pp. 260-268, 1990.
- [35] S. Parui, S. Banerjee. "Bifurcations due to transition from continuous conduction mode to discontinuous conduction mode in the Boost converter ". *IEEE Transactions on Circuits and Systems-I: Fundamental theory and applications*. Vol. 50, no. 11, pp. 1464-1469, 2003.

Índex de figures

2.1	Esquema del convertidor buck de llaç obert.	7
2.2	El convertidor buck amb un llaç de control.	9
2.3	El convertidor boost en llaç obert.	10
2.4	Camp vectorial al voltant d'un punt d'equilibri d'un sistema lineal 2-dimensional. (a) Un node atractiu: els dos valors propis reals i negatius. (b) Un node repulsiu: els dos valors propis reals i positius. (c) Un punt de sella: ambdós valors propis reals, un positiu i l'altre negatiu. (d) Una espiral atractora: valors propis complexos i conjugats, amb part real negativa. (e) Una espiral repulsiva: valors propis complexos i conjugats amb part real positiva. (f) Un centre: valors propis imaginaris purs. . . .	14
2.5	Una iteració de la funció de ferradura d'en Smale.	16
2.6	Obtenció del model discret d'un sistema dinàmic continu en el temps: (a) el sistema és autònom, i (b) per un sistema no autònom on l'entrada externa té període T	17
2.7	Exemples de punts fixos en sistemes discrets linealitzats 2-dimensionals. (a) Un atractiu: valors propis reals, $0 < \lambda_1, \lambda_2 < 1$. (b) Un repulsiu: valors propis reals, $\lambda_1, \lambda_2 > 1$. (c) Un "regular saddle": valors propis reals, $0 < \lambda_1 < 1, \lambda_2 > 1$. (d) Un "flip saddle": valors propis reals, $0 < \lambda_1 < 1, \lambda_2 < -1$. (e) Una espiral atractora: valors propis complexos, $ \lambda_1 , \lambda_2 < 1$. (f) Una espiral repulsiva: valors propis complexos: $ \lambda_1 , \lambda_2 > 1$	19
2.8	Vista esquemàtica de les varietats estables i inestables d'un punt fix "saddle". Tamé es visible l'entorn linealitzat del punt fix.	20
2.9	Representació de la bifurcació "pitchfork".	22
2.10	Representació de la bifurcació saddle-node.	23
2.11	Representació de la bifurcació doblament de període.	23
2.12	Pla de fase per $x_{k+1} = f(x_k, \mu)$ de dimensió 2: (a) $\mu < \mu_0$. El punt fix (a, b) és estable i les iteracions s'aproximen cap a ell. (b) $\mu > \mu_0$, el punt fix (a, b) , ha esdevingut inestable i les iteracions s'allunyen d'ell cap a un cicle límit estable.	24

2.13	El naixement d'un cicle límit en un sistema continu en el temps $\dot{x} = f(x, \mu)$ de dimensió superior o igual a 2 en una bifurcació Hopf. (a) $\mu < \mu_0$ i (b) $\mu > \mu_0$	25
2.14	Representacions 2-dimensionals de bifurcacions de (a) "grazing" i (b) i de "corner-collision".	26
3.1	Esquema bàsic del convertidor buck i la seva rampa	30
3.2	LLE del conjunt atractor dominant en termes de V	38
3.3	Evolució de λ_n a partir de (3.59).	40
3.4	Valors asimptòtics de l'angle (contínua) i LLE (discontínua) per l'òrbita T -periòdica en funció de V	40
3.5	Valor asimptòtic del LLE (línia contínua) del conjunt atractor dominant, LLE (línia discontínua) per les òrbites T -periòdiques i LLE (línia puntejada) per òrbites $2T$ -periòdiques en funció de V	45
3.6	Valor asimptòtic de l'angle (línea contínua) i de LLE (línea discontínua) de les òrbites $2T$ -periòdiques en termes de V	46
4.1	Esquema d'un convertidor de potència boost.	49
4.2	Mode de conducció contínua: pasem de la configuració 1 a la 2 cíclicament.	57
4.3	Mode de conducció discontínua: passem de la configuració 1 a la 3 cíclicament.	58
4.4	Òrbita on deixem el MCD abans de tallar la superfície.	59
4.5	L'òrbita surt de MCD perquè talla de nou a S_{dk}	60
4.6	Existeix un cicle límit en MCC si $S_{-dk} _{(V_g, V_g/R)} < 0$	61
4.7	Primera situació en la que el sistema evoluciona al punt d'equilibri amb $S_{dk} _{(V_g, V_g/R)} < 0 < S_{-dk} _{(V_g, V_g/R)}$	62
4.8	Situació en la que el sistema evoluciona a un cicle límit amb $S_{dk} _{(V_g, V_g/R)} < 0 < S_{-dk} _{(V_g, V_g/R)}$	63
4.9	Segona situació amb diferents sectors d'estabilitat $S_{dk} _{(V_g, V_g/R)} < 0 < S_{-dk} _{(V_g, V_g/R)}$	64
4.10	Segona situació amb una òrbita tangent 1 periòdica i inestable $S_{dk} _{(V_g, V_g/R)} < 0 < S_{-dk} _{(V_g, V_g/R)}$	64
4.11	Segona situació amb una òrbita tangent 2 periòdica i inestable $S_{dk} _{(V_g, V_g/R)} < 0 < S_{-dk} _{(V_g, V_g/R)}$	65
4.12	Segona situació amb una punt d'equilibri estable $S_{dk} _{(V_g, V_g/R)} < 0 < S_{-dk} _{(V_g, V_g/R)}$	65
5.1	Òrbites 1-p en MCC per diferents V_{ref} obtingudes usant MAPLE.	71
5.2	Òrbites 1-p en MCC amb diferents valors de la intensitat.	72

5.3	Òrbites 1 periòdiques en MCC amb diferents valors de la intensitat. . .	73
5.4	Òrbita 1 periòdica en MCC tangent a $i = 0$	73
5.5	Òrbites 2 periòdiques en MCC per diferents V_{ref} obtingudes usant MAPLE.	74
5.6	Òrbites 1 periòdiques en MCD per diferents V_{ref} obtingudes usant MAPLE.	78
5.7	Òrbites 1 periòdiques en MCD per diferents V_{ref} obtingudes usant MAPLE del tipus 1.	79
5.8	Òrbites 2 periòdiques en MCD per diferents V_{ref} obtingudes usant MAPLE.	80
5.9	Comparació de les òrbites obtingudes pels diferents programes de MAPLE per $V_{ref} = 20.8066522292$	81

Índex de taules

4.1	Regió de lliscament segons els valors de V_{ref}	53
4.2	Regió a la que pertany el punt d'equilibri i caràcter d'aquest en funció de V_{ref}	55
5.1	Multiplicadors característics de les òrbites 1 periòdiques en MCC. . . .	72
5.2	Multiplicadors característics de les òrbites 2 periòdiques en MCC. . . .	75
5.3	Multiplicadors característics de les òrbites 2 periòdiques en MCD. . . .	75
5.4	Multiplicadors característics de les òrbites trobades per $V_{ref} = 20.80665$	76
5.5	Multiplicadors característics de les òrbites 1 periòdiques en MCD trobades per $V_{ref} = 15.54503178956$	76