Universidad Nacional de Mar del Plata

Facultad de Ciencias Económicas y Sociales

Asignatura Matemática para Economistas II

ESTUDIO DE ECUACIONES DIFERENCIALES APLICADAS A MODELOS DE CRECIMIENTO ECONÓMICO DE HAAVELMO. FINAL

Pía Acciarini
Lizzie Marcel
Camila Roldán
Beatriz Lupín

XIX Jornadas Nacionales de Tecnología Aplicada a la Educación Matemática

Departamento Pedagógico de Matemática (DPM)
Centro de Investigación en Métodos Cuantitativos Aplicados a la Economía y a la Gestión (CMA/IADCOM)

FCE-UBA, CABA, 08-09 mayo 2019

INTRODUCCIÓN

Continuando con el estudio de ED aplicadas a los modelos de crecimiento económico desarrollados por el economista noruego Trygve Haavelmo y, tal como éste lo hace en su libro del año 1954, seguidamente, se complejiza el análisis.

En la edición 2017 de las Jornadas, se presentó la versión más simple de estos modelos, la que asume que solamente la producción y la población son variables.

Luego, el año pasado, se sumó la variabilidad de la acumulación de capital, suponiendo a la población como estacionaria.

Para cerrar el ciclo y, continuando con el supuesto de que la población es estacionaria, se propone un modelo en el que el conocimiento y la técnica (*know-how*) dejan de estar dados. Además, se formula otro modelo que relaciona el crecimiento de la población y los procesos de acumulación de capital.

FUNDAMENTACIÓN CONCEPTUAL

ECONÓMICA

CRECIMIENTO ECONÓMICO

Expansión continuada de las posibilidades de producción, medida como el incremento del PBI real durante un período de tiempo determinado.

Se logra mediante el ↑ de los factores productivos -por ejemplo, mano de obra y capital- y el progreso tecnológico.

El capital se acumula mediante el ahorro y la inversión.

(Blanchard *et al.*, 2012; Dornbusch *et al.*, 2009)

MATEMÁTICA

ECUACIONES DIFERENCIALES

ANÁLISIS DINÁMICO

Describe la **TRAYECTORIA** -senda temporal o cronológica- de alguna variable en el tiempo

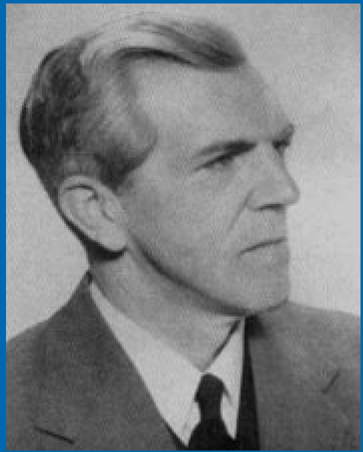
La solución de una EDO…

Es convergente si tiende a algún valor $\Re$ y definido, conforme "t" $\rightarrow \infty$.

El valor $\Re$ al que tiende la trayectoria es el estado **ESTACIONARIO**. Implica un equilibrio a largo plazo. La variable "y" permanece estática: $dy/dt = 0$.

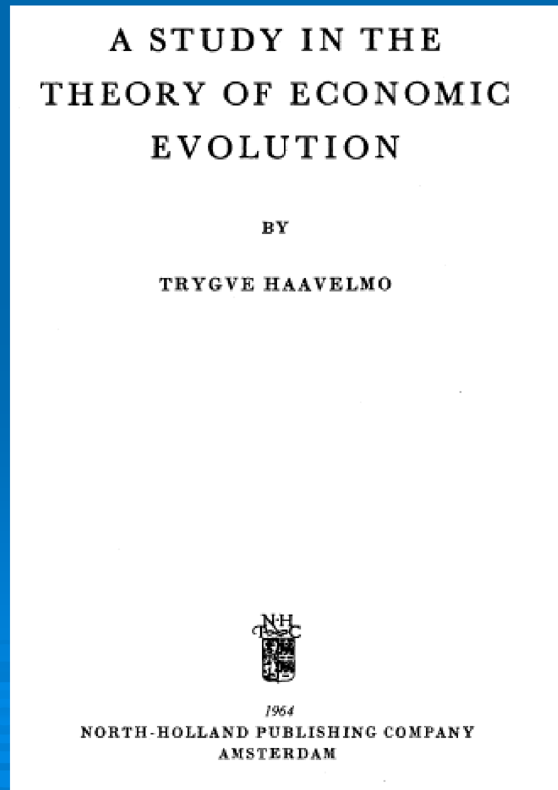
El estado estacionario es un caso particular del estado de equilibrio. En un estado de equilibrio, la variable "y" $\uparrow$ a una misma tasa. Particularmente, en un estado estacionario, la variable "y" $\uparrow$ a una tasa nula.

DESARROLLO DE LA PROPUESTA



Trygve HAAVELMO
(economista noruego, 1911-1999. Premio Nobel 1989)

"A Study in the Theory of Economic Evolution " (1954)



A STUDY IN THE
THEORY OF ECONOMIC
EVOLUTION

BY

TRYGVE HAAVELMO

1964
NORTH-HOLLAND PUBLISHING COMPANY
AMSTERDAM

MODELOS DE CRECIMIENTO ECONÓMICO DE HAAVELMO

VARIABLES

- Volumen de producción
- Tamaño de la población

Jornadas 2017
Cap. 5

VARIABLES

- Volumen de producción
- Tamaño de la población
- Acumulación de capital

Jornadas 2018
Cap. 6

VARIABLES

- Volumen de producción
- Tamaño de la población
- Acumulación de capital
- **Nivel de *know-how***

Jornadas 2019
Cap. 7

↑ de la población

Procesos de acumulación

Jornadas 2019
Cap. 8

Supuesto $\rightarrow$ población estacionaria ($dN / dt = 0$)

I. La variable *know-how* separada del ↑ del capital

Cap. 7

I.1.

Función de producción –lineal en K y S–

$$X = A + \chi K + \sigma S$$

Ley de Crecimiento del Capital –lineal–

$$\dot{K} = \gamma_1 X + \gamma_2 K + + \gamma_3 S + \gamma_0$$

Índice de *know-how* –lineal en t–

$$S = \mu_t + \mu_0$$

Dónde:

X	= producción por unidad de tiempo (t)
K	= capital físico acumulado
S	= nivel educativo y técnico (*know-how*)
A, χ, γ, μ	= constantes
•	= diferencial respecto al tiempo

Del sistema anterior:

$$\dot{K} = (\gamma_1 \chi + \gamma_2) K + \mu (\gamma_1 \sigma + \gamma_3) t + (\gamma_1 A + \gamma_1 \sigma \mu_0 + \gamma_3 \mu_0 + \gamma_0)$$

Cuya solución general es: $$K = B e^{(\gamma 1 \chi + \gamma 2)t} + A_1 t + A_0 \qquad [1]$$

Dónde:

B = arbitrario = $K_0 - A_0$, siendo K_0 el valor de K cuando t = 0

A_1, A_0 = constantes que dependen de los parámetros del sistema

Si $(\gamma_1 \chi + \gamma_2) > 0$ y $B > 0 \Rightarrow K \to \infty$, sin importar los valores de A_1 y A_0. La velocidad de ↑ de K depende de la tendencia (S). Dado K, B también depende de S.

Si $(\gamma_1 \chi + \gamma_2) < 0$, el 1er. miembro de la derecha de [1] $\to 0$ y $A_1 > 0 \Rightarrow$ K tendencia ↑. Interpretación: un $\gamma_2 < 0 \Rightarrow$ "sentimiento de saturación" respecto a la acumulación, morigerado por un $\gamma_3 > 0 \Rightarrow$ "comprensión" de la importancia de la misma.

I.2.

Alternativamente…

$$\dot{S} = \mu_0 \int_0^t e^{\mu(t-\tau)} \dot{K}(\tau)\, d\tau$$

Dónde: μ, μ_0 = constantes, < y > que 0, respectivamente.

El “efecto educativo” ↓ exponencialmente.

Del sistema anterior:

$$\dot{K} = (\gamma_1 \chi + \gamma_2) K + \mu (\gamma_1 \sigma + \gamma_3) S + (\gamma_1 A + \gamma_0)$$

Si se diferencia la expresión anterior, se obtiene la siguiente solución general:

$$K = B_1 e^{r1t} + B_2 e^{r2t} + B_0 \qquad [2]$$

Dónde:

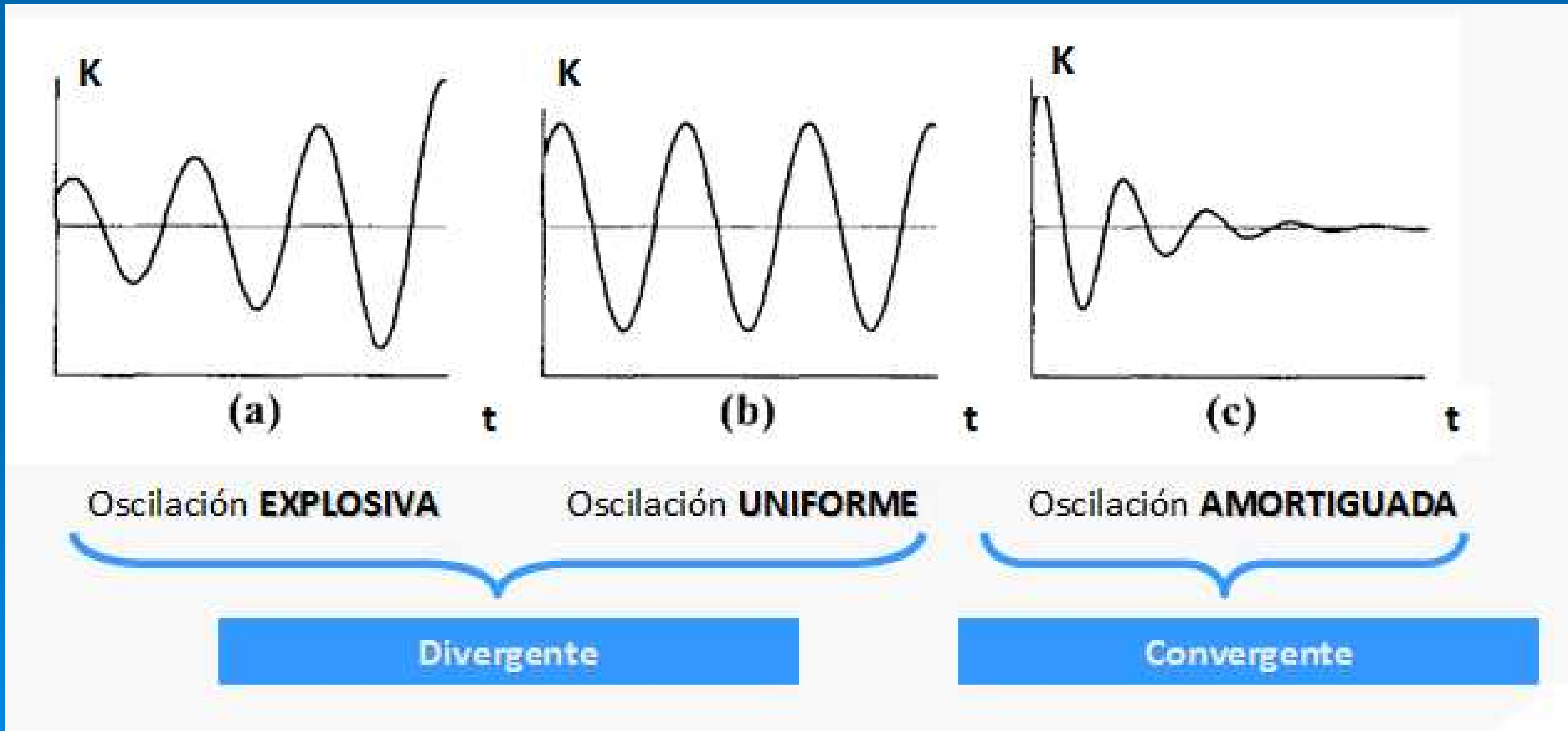
B_0 y B_1 o B_2 = constantes arbitrarias que se determinan a partir de las condiciones iniciales/de límite

r_1, r_2 = raíces de la ecuación auxiliar/característica asociada, $\Re$ o $\mathfrak{C}$ conforme la naturaleza de los coeficientes estructurales

Si las raíces son $\Re$:

S y X ↑ mientras K ↑ y lo seguirá haciendo aún cuando K comience a ↓ –"efecto secundario" de un período de crecimiento–.

Si las raíces son $\mathfrak{C}$, la solución depende de la parte $\Re$ del número complejo y la solución [**2**] puede ser:



II. El crecimiento de la población y la acumulación de capital

Cap. 8

Consideraciones básicas:

⇨ El ↑ de la población depende, en parte, del nivel económico de subsistencia que la región proporciona.

⇨ La producción se encuentra determinada por la mano de obra disponible, el capital y el *know-how*.

⇨ La tasa de acumulación de capital resulta del equilibrio entre los deseos de consumir en el presente y los deseos de consumir en el futuro.

⇨ La naturaleza de estas relaciones se encuentra asociada al nivel de educación de la región pues es el resultado del proceso de desarrollo pasado.

II.1. Logística generalizada

$$\frac{\dot{N}}{N} = \alpha - \beta \frac{N}{X}$$

$$X = a_1 N + a_2 K$$

$$\dot{K} = \gamma_1 X + \gamma_2 N + + \gamma_3 K$$

Dónde:

N = población
a_1, a_2 = constantes
α = TN
β = TM

El sistema no tiene solución estacionaria, salvo la solución trivial: N = X = K = 0.

Sin embargo, tiene una solución de cuasi-equilibrio: X/N = constante y K/N = constante. Dicho cuasi-equilibrio, dependerá de los coeficientes estructurales del sistema y será positivo y estable conforme las condiciones iniciales/de límite.

II.2. Una generalización alternativa

$$\frac{\dot{N}}{N} = \alpha - \beta \frac{N}{K}$$

Se supone que la TM varía inversamente con el nivel de K PC.

Tomando k = K/N y haciendo trabajo algebraico, se arriba a:

$$\dot{k} = (\gamma_1 a_2 + \gamma_3 - \alpha) k + (\gamma_1 a_1 + \gamma_2 + \beta)$$

Cuando $(\gamma_1 a_2 + \gamma_3 - \alpha) < 0$, k converge al estado estacionario

Cuando $(\gamma_1 a_2 + \gamma_3 - \alpha) > 0$, k $\uparrow$ (si k en t = 0 es lo suficientemente grande), N $\uparrow$ a tasa $\uparrow$ –o $\downarrow$ a tasa $\downarrow$–. Si k $\rightarrow$ constante, la tasa de $\uparrow$ de N $\rightarrow$ constante.

II.3. Influencia del nivel de educación en la tasa de natalidad

$$\frac{\dot{N}}{N} = \frac{\alpha}{1+\sigma S} - \beta \frac{N}{X}$$

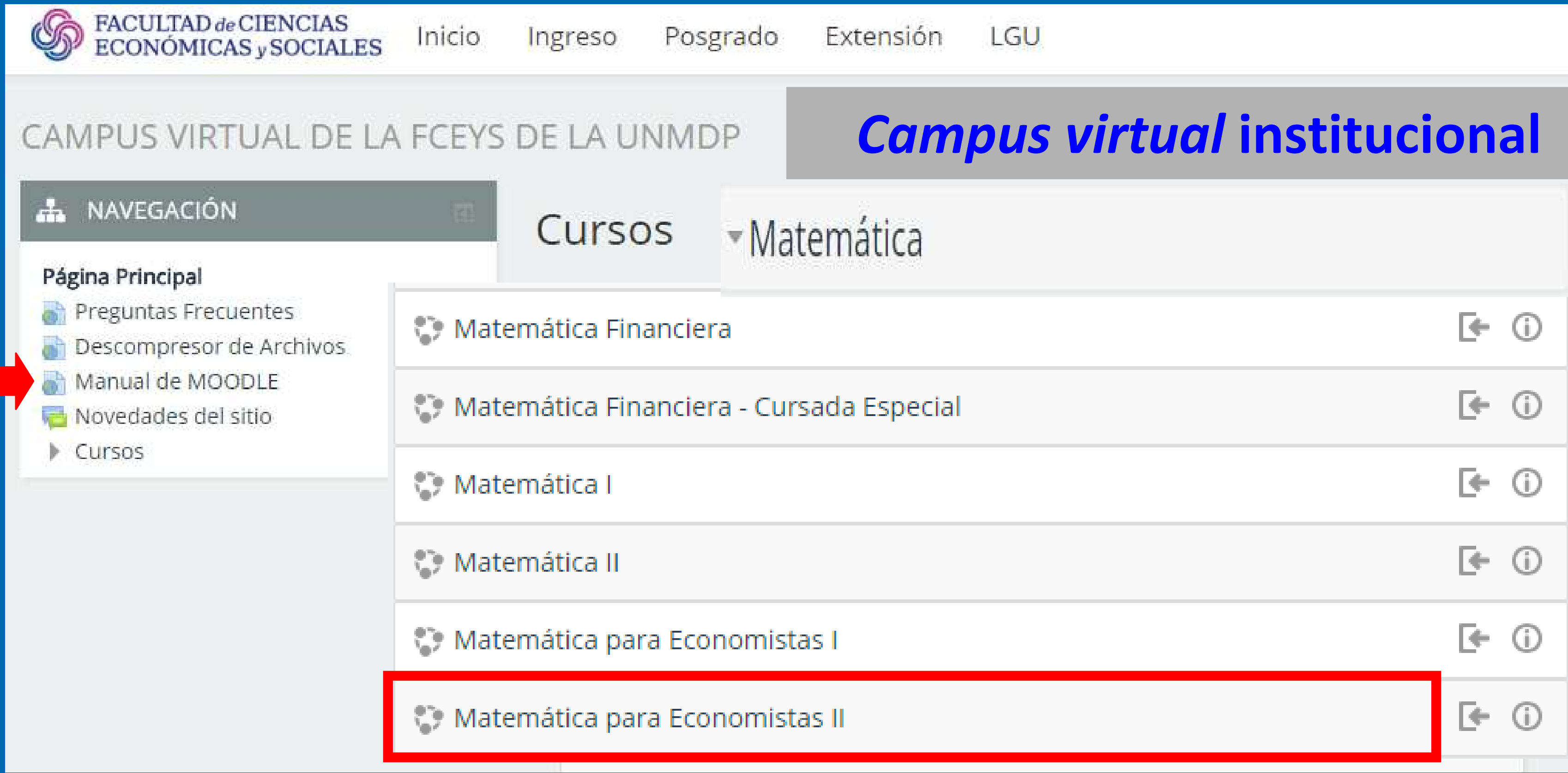
Se supone que la TN varía inversamente con un índice de educación (S).

$$S = \mu \frac{K}{N} - \mu_0$$

Se supone que S varía directamente con el K acumulado PC.

La discusión sobre los cuasi-equilibrios es similar a la realizada en II.1.

INTERVENCIÓN PEDAGÓGICA



Campus virtual institucional

moodle

Técnica C-Q-A

Conceptos matemáticos, revisión modelos anteriores, construcción conjunta de los nuevos modelos.

CONSIDERACIONES FINALES

Los modelos analizados en esta saga conforman la Parte II del texto de Haavelmo, denominada “Modelos simples de crecimiento económico”.

Dichos modelos, si bien con asunciones que implican fuertes restricciones, ilustran acerca de las relaciones básicas entre N, X y formación de K, útiles para el estudio de diferencias interregionales.

Entre los propósitos pedagógicos que guiaron el análisis de los mismos se encuentran: la aplicación de instrumental matemático a una problemática siempre candente por sus implicancias socioeconómicas –se priorizó la aplicación en lugar de la dificultad matemática–, acercar a los estudiantes a la obra original de un destacado economista, vincular diferentes asignaturas y promover el trabajo colaborativo.

Gracias por su atención

Pía
pia.accia@gmail.com
Lizzie
lizziemarcel@gmail.com
Camila
camila.anto.roldan@gmail.com
Beatriz
beatrizlupin@gmail.com