

UNIVERSITE DE SHERBROOKE
Faculté des sciences appliquées

SIMULATION DE LA DISPERSION D'HYDROCARBURES
A LA SURFACE DE L'EAU
ET DES ECOULEMENTS A SURFACE LIBRE

Thèse de doctorat ès sciences appliquées
spécialité: génie chimique

Michel de BROISSIA

Sherbrooke, Québec

Canada

Février 1977

REMERCIEMENTS

C'est avec une certaine nostalgie que je remercie les docteurs Bernard Coupal et Jacques Bazinet. Ce travail n'aurait pu être mené à bien sans leur aide de tous les instants.

Je remercie les étudiants, techniciens et professeurs du département de génie chimique pour l'ambiance d'amitié et d'intérêt mutuel qu'ils ont su développer.

Les docteurs Normand Thérien et Pierre Lemieux m'ont apporté par leur enseignement le goût d'aller plus loin, qu'ils en soient remerciés.

La société André Marsan et Associés m'a fourni une aide technique importante et je l'en remercie vivement.

Je dédie ce travail à mon épouse et à mes enfants dont la patience a été sans égal.

TABLE DES MATIERES

REMERCIEMENTS	i
TABLE DES MATIERES	ii
LISTE DES TABLEAUX	v
LISTE DES FIGURES	vi
1. INTRODUCTION	1
BIBLIOGRAPHIE	5
2. DERIVATION DES EQUATIONS	6
2.1 Dispersion de l'huile	6
2.1.1 Description du phénomène	6
2.1.1.1 Etalement de l'huile	7
2.1.1.2 Advection de l'huile	8
2.1.1.3 Dégradation de l'huile	12
2.1.2 Modèle de dispersion intégré	13
2.1.2.1 Le modèle	13
2.1.2.2 Les conditions aux limites	18
2.2 Ecoulement peu profond à surface libre	20
2.2.1 Introduction	20
2.2.2 Les frontières du domaine	25
2.2.2.1 Frontière solide, fixe ou mobile	25
2.2.2.2 Frontière correspondant à la surface libre	26
2.2.2.3 Frontières ouvertes	30
2.2.3 Intégration des équations selon z - Ecoulement bidimensionnel	30
2.2.4 Les équations du système	40
2.2.5 Vérification des résultats	42
2.3 Equation régissant le transfert de chaleur	44
2.3.1 Ecriture du modèle	44
2.3.2 Conditions aux frontières	45
2.3.2.1 Conditions aux limites	45
2.3.2.2 Conditions initiales	45
2.3.3 Résolution analytique	46
2.3.4 Vérification analytique	47
BIBLIOGRAPHIE	49
3. METHODES D'INTEGRATION - ELEMENTS FINIS	53
3.1 Classification des équations différentielles partielles	53
3.1.1 Les méthodes de classification	53

3.1.2	Application aux équations étudiées	59
3.2	Méthodes d'intégration	61
3.2.1	Différentes méthodes de résolution	61
3.2.1.1	Réduction directe	62
3.2.1.2	Réduction par l'intermédiaire d'une forme intégrale	65
3.2.2	Choix de la méthode d'intégration	68
3.3	La méthode des éléments finis	71
3.3.1	Les fonctions d'approximation	73
3.3.1.1	Approximation des variables	73
3.3.1.2	Conditions de complétude	74
3.3.2	Mise sous forme intégrale	75
3.3.2.1	Approximation variationnelle	76
3.3.2.2	Approximations universelles ou Approche résiduelle	79
3.3.3	Fonctions d'interpolation	83
3.3.3.1	Approximation sur un élément	83
3.3.3.2	Fonction d'interpolation pour un cas particulier..	84
3.3.3.3	Ecriture généralisée	86
3.3.3.4	Propriétés aux noeuds et matrice de localisation..	90
3.3.4	Coordonnées locales et éléments isoparamétriques	93
3.3.4.1	Différents types d'éléments	93
3.3.4.2	Coordonnées locales ou naturelles	94
3.3.4.3	Éléments isoparamétriques	96
3.3.5	Assemblage	99
3.3.5.1	Approche globale	99
3.3.5.2	Approche locale élément par élément	100
3.3.6	Les conditions aux limites	102
3.3.6.1	Conditions aux limites principales ou naturelles..	102
3.3.6.2	Conditions aux limites rigides	103
3.3.7	Intégration sur le temps	104
3.3.8	Convergence et stabilité	108
3.3.8.1	Définitions	108
3.3.8.2	Les causes d'erreur	108
3.3.8.3	Quelques critères	109
3.4	Mise sous forme intégrale des équations étudiées	112
3.4.1	Dispersion de l'huile	112
3.4.1.1	Mise sous forme intégrale	112
3.4.1.2	Notation d'éléments finis	115
3.4.1.3	Intégration sur le temps	118
3.4.2	Ecoulement à surface libre	120
3.4.2.1	Mise sous forme intégrale	120
3.4.2.2	Notation d'éléments finis et forme matricielle ...	122
3.4.3	Transfert de chaleur	127
3.4.3.1	Mise sous forme intégrale	127
3.4.3.2	Notation d'éléments finis	129
	BIBLIOGRAPHIE	131
4.	TRAVAUX ANTERIEURS ET ORIENTATION DE CETTE RECHERCHE	136

4.1	Dispersion de l'huile	136
4.1.1	Etat de la recherche	136
4.1.2	Orientation de la recherche	138
4.2	Ecoulement peu profond à surface libre	139
4.2.1	Etat de la recherche	139
4.2.2	Orientations de ce travail	142
	BIBLIOGRAPHIE	145
5.	LE PROGRAMME ET LES PROBLEMES ASSOCIES	148
5.1	Intégration sur un élément	148
5.2	Résolution algébrique non linéaire	149
5.2.1	Les méthodes de résolution	150
5.2.2	Méthode utilisée	154
5.2.3	Application à l'écoulement à surface libre	155
5.3	Résolution algébrique linéaire	160
5.4	Structure du programme	161
	BIBLIOGRAPHIE	167
6.	PRESENTATION ET DISCUSSION DES RESULTATS	169
6.1	Vérification du programme	169
6.2	Ecoulement à surface libre	175
6.2.1	Répartition des conditions aux limites	176
6.2.2	Approximation du rayon hydraulique	179
6.2.3	Canaux courbes	181
6.3	Dispersion d'une nappe d'huile	189
6.3.1	Essai préliminaire	189
6.3.2	Description des problèmes traités	190
6.3.3	Résultats des simulations	196
	BIBLIOGRAPHIE	222
7.	CONCLUSION	223
	BIBLIOGRAPHIE	226
	APPENDICE A - LES ELEMENTS ISOPARAMETRIQUES	227

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.	Coefficients d'étalement pour trois types de déversement	17
Tableau 2.	Paramètres de l'équations (142)	48
Tableau 3.	4 points de Gauss	149
Tableau 4.	9 points de Gauss	149
Tableau 5.	Résultats comparés du transfert de chaleur dans une plaque	173
Tableau 6.	Résultats comparés Kreith - Eléments finis	174
Tableau 7.	Résultats comparés sur la composante de la vitesse u ...	178
Tableau 8.	Résultats comparés sur la hauteur d'eau H	178
Tableau 9.	Résultats comparés sur la composante de la vitesse u ...	180
Tableau 10.	Résultats comparés sur la hauteur d'eau H	180
Tableau 11.	Coordonnées des points et estimé de départ	184
Tableau 12.	Identification des essais	186
Tableau 13.	Composante de la vitesse selon l'axe x	187
Tableau 14.	Composante de la vitesse selon l'axe y	187
Tableau 15.	Hauteur d'eau	188
Tableau 16.	Première série temporelle	191
Tableau 17.	Deuxième série temporelle	192
Tableau 18.	Coefficient de dispersion	195
Tableau 19.	Simulations effectuées	195
Tableau 20.	Hauteur d'huile - Résultats numériques et analytiques ..	197
Tableau 21.	Hauteur d'huile - Résultats numériques et analytiques ..	198

LISTE DES FIGURES

Figure 2-1	Elément de volume d'huile	14
Figure 2-2	Bilan sur une frontière réfléchissante	18
Figure 2-3	Schématisation de l'écoulement	21
Figure 2-4	Bilan sur la surface libre	26
Figure 2-5	Bilan sur le fond	28
Figure 2-6	Schématisation du domaine	41
Figure 2-7	Conduction dans une plaque	46
Figure 3-1	Domaine découpé	83
Figure 3-2	Elément triangulaire	88
Figure 3-3	Elément rectiligne	94
Figure 3-4	Elément triangulaire	95
Figure 3-5	Elément isoparamétrique	96
Figure 3-6	Elément à quatre points	98
Figure 3-7	Elément à huit points	98
Figure 3-8	Elément à neuf points	98
Figure 3-9	Elément sur le temps	105
Figure 6-1	Conditions dans une plaque	169
Figure 6-2	Vérification 1	170
Figure 6-3	Vérification 2	170
Figure 6-4	Vérification 3	170
Figure 6-5	Vérification 4	170
Figure 6-6	Vérification 5	171
Figure 6-7	Vérification 6	171
Figure 6-8	Vérification 7	171
Figure 6-9	Vérification 8	171

Figure 6-10	Problème de Kreith - Conduit de cheminée	174
Figure 6-11	Conditions limites amont - 1 élément - 4 points	177
Figure 6-12	Conditions limites partagées - 1 élément - 4 points ...	177
Figure 6-13	Conditions limites aval - 1 élément - 4 points	177
Figure 6-14	Conditions limites amont - 2 éléments - 4 points	177
Figure 6-15	Conditions limites partagées - 2 éléments - 4 points ..	177
Figure 6-16	Conditions limites aval - 2 éléments - 4 points	177
Figure 6-17	Conditions limites amont - 4 éléments - 4 points	177
Figure 6-18	Conditions limites partagées - 4 éléments - 4 points ..	177
Figure 6-19	Conditions limites aval - 4 éléments - 4 points	177
Figure 6-20	Elément à huit points	179
Figure 6-21	Canal courbe représenté par des éléments droits	182
Figure 6-22	Ecoulement spiroïdaux	183
Figure 6-23	Canal courbe	183
Figure 6-24	Essai préliminaire	189
Figure 6-25	Maillages successifs	194
Figure 6-26	Simulation 1 (a) à (c)	203
Figure 6-26	Simulation 1 (d) à (f)	204
Figure 6-26	Simulation 1 (g) à (i)	205
Figure 6-27	Simulation 2 (a) à (d)	206
Figure 6-27	Simulation 2 (e) à (h)	207
Figure 6-27	Simulation 2 (i) à (l)	208
Figure 6-28	Simulation 4 (a) à (d)	209
Figure 6-28	Simulation 4 (e) à (h)	210
Figure 6-29	Simulation 5 (a) à (d)	211
Figure 6-29	Simulation 5 (e) à (g)	212
Figure 6-29	Simulation 5 (h) à (j)	213

Figure 6-30	Simulation 6 (a) à (c)	214
Figure 6-30	Simulation 6 (d) à (f)	215
Figure 6-30	Simulation 6 (g) à (i)	216
Figure 6-30	Simulation 6 (j) à (l)	217
Figure 6-30	Simulation 6 (m) à (p)	218
Figure 6-30	Simulation 6 (q) à (t)	219
Figure 6-31	Simulation 7	220
Figure 6-32	Estacades	221
Figure A-1	Elément isoparamétrique	227
Figure A-2	Elément à quatre points	229
Figure A-3	Elément à huit points	234
Figure A-4	Continuité des tangentes au contour	236
Figure A-5	Elément à neuf points	237

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

L'échange encore croissant des hydrocarbures crée un danger potentiel pour l'environnement. Le développement de nouveaux sites portuaires, ou l'accroissement des échanges pour des sites existants, nécessitent d'évaluer les impacts de tels projets. Ces impacts sont de nature accidentelle ou chronique. La pollution chronique, (nettoyage et fuites), représente une part très importante des hydrocarbures déversés dans le milieu aquatique. L'huile répandue peu à peu se dégrade et, sa densité se rapprochant de celle de l'eau, elle se mélange à la colonne d'eau. LEVY, [1972], par exemple, ne note aucune différence de concentration entre les teneurs en huile à différentes profondeurs dans le golfe du St-Laurent. Il en résulte que les volumes de mélange sont généralement importants. Les concentrations résiduelles restent donc peu élevées. Par ailleurs, la biodégradation, bien que lente, réduit la concentration en huile. Le deuxième type de pollution se produit lorsqu'un pétrolier perd rapidement sa cargaison à la suite d'un accident. De 500 à 100,000 tonnes d'hydrocarbure se trouvent rapidement relâchées dans le milieu aquatique. Dans les jours qui suivent, la nappe s'étend et se déplace à la surface de l'eau au gré des vents et des courants. Ce type d'accident est très lourdement ressenti par l'environnement, lorsque les nappes atteignent le littoral et touchent, ainsi, la zone biotique la plus riche. L'évaluation des impacts ne peut, donc, se faire sans l'utilisation de modèles physiques ou mathématiques pour prévoir le mouvement des nappes. Les modèles physiques sont peu utilisés car ils doivent respecter les lois de similitude et conduisent parfois à des

compromis extrêmement difficiles. Les modèles mathématiques connaissent actuellement des développements importants et se situent à plusieurs niveaux. Par exemple, une partie de ces modèles peut-être de nature déterministe tandis qu'une autre est de nature aléatoire. Cette présente étude se limitera aux modèles déterministes.

Jusqu'à présent, dans la plupart des cas, ces derniers modèles dissociaient l'influence de l'étalement par diffusion, [FAY, 1969], de l'étalement par convection, [MOORE, 1973], [BIEN, 1973]. L'objet de ce travail est donc de développer un modèle apte à décrire les mouvements d'une nappe d'huile et qui tienne compte simultanément des deux mécanismes.

Ce modèle consiste en une équation différentielle partielle décrivant la hauteur d'huile sur le plan d'eau considéré et son évolution dans le temps. Ce modèle doit permettre d'évaluer l'installation d'estacades provisoires ou permanentes destinées à contenir l'huile. Des expériences réalisées par la garde côtière américaine ont montré que de telles estacades pouvaient contenir l'huile efficacement pour des courants allant jusqu'à 2 noeuds, des vitesses de vent de 20 milles par heure et des vagues d'une hauteur de 5 pieds, [U.S. COAST GUARDS, 1973]. C'est précisément le cas dans l'estuaire maritime du St-Laurent au large de Rimouski, où ce modèle sera appliqué. Plusieurs simulations seront effectuées pour évaluer l'effet des coefficients de dispersion, les lieux d'impact et l'installation d'estacades. Les méthodes d'intégration sont rapidement comparées. Le choix de la méthode des éléments finis s'explique par sa souplesse, la facilité avec laquelle on tient compte des conditions limites et l'utilisation de maillages arbitraires.

Dans un premier temps, pour ce présent travail, nous nous limitons à l'utilisation de données expérimentales sur les courants. Ultérieurement, il serait intéressant de déterminer par un modèle, les vitesses de courants

dans le temps et dans l'espace. C'est la raison pour laquelle une partie non négligeable de ce travail a consisté à la mise au point d'un tel modèle sur des canaux droits et courbes. Là encore, grâce à la généralité de la méthode des éléments finis, nous utiliserons cette même méthode pour l'intégration des équations. L'effort de programmation est important et les chances de faire des erreurs sont grandes. C'est la raison pour laquelle le programme sera vérifié sur des problèmes classiques de transfert de chaleur pour lesquels on connaît la solution analytique ou numérique.

Le chapitre 2 présente les équations décrivant la dispersion de l'huile, les écoulements à surface libre et le transfert de chaleur. Dans les deux premiers cas les équations sont démontrées entièrement et les hypothèses simplificatrices effectuées apparaissent clairement. Les modèles existants pour la dispersion de l'huile sont décrits rapidement avant d'établir le modèle utilisé et ses conditions limites. Une solution analytique de la dispersion de l'huile est établie pour un cas simplifié. Les équations régissant les écoulements peu profonds à surface libre sont retrouvées à partir des équations de mouvement et de continuité pour un fluide non visqueux en régime turbulent. Une méthode de vérification est décrite pour les écoulements dans des canaux droits. L'équation régissant le transfert de chaleur est indiquée avec une solution analytique pour une plaque rectangulaire soumise à de la convection et ayant une de ses faces à une température fixée.

Dans le chapitre 3, la classification mathématique des différentes équations est analysée. La mise sous forme canonique est reprise en détail, puis appliquée aux trois problèmes considérés. La plupart des méthodes d'intégration sont passées en revue rapidement, justifiant ainsi le choix de la méthode des éléments finis. Une comparaison assez détaillée est

effectuée entre cette méthode et la méthode des différences finies. Les approches résiduelles et variationnelles sont ensuite étudiées et comparées. La méthode de Galerkin est, alors, choisie pour réduire le problème sous forme intégrale. La méthode des éléments finis est, enfin décrite en détail, (choix des fonctions d'interpolation, assemblage, éléments isoparamétriques, convergence et stabilité). L'intégration sur le temps est dissociée de l'intégration sur l'espace. Par la suite, les équations étudiées sont mises sous forme intégrale et les conditions limites sont insérées; une notation compacte est introduite pour l'assemblage.

Le chapitre 4 analyse l'état de la recherche sur les modèles de dispersion des nappes d'huile et d'écoulements à surface libre; l'étude bibliographique porte principalement sur l'application de la méthode des éléments finis. Pour les deux cas, l'orientation de ce travail est présentée.

Le chapitre 5 porte sur les difficultés ou choix mathématiques qui sont apparus au cours de cette étude et qui ne touchent pas spécifiquement la méthode des éléments finis. Ce chapitre traite de l'intégration sur un élément par la méthode de Gauss-Legendre, de la résolution algébrique non linéaire, ainsi que de la résolution algébrique linéaire. La structure du programme est exposée et chaque sous-routine est décrite brièvement.

Dans le chapitre 6, les résultats obtenus sont présentés et discutés pour chacun des problèmes retenus, (transfert de chaleur, écoulement à surface libre et dispersion de l'huile). Les données utilisées sont décrites ainsi que les maillages retenus. Les résultats sont exposés et comparés à l'aide de tableaux.

La conclusion fait le point sur ce travail et sur la contribution qu'il apporte à l'étude des deux problèmes principaux, (dispersion de l'huile et écoulement à surface libre). On y présente quelques suggestions de recherche.

BIBLIOGRAPHIE

BIEN, W., "Modeling Petroleum Spills at Supertanker Ports", Master of Arts Thesis, University of Toronto, 122 pages, 1973.

FAY, J.A., "Oil on the Sea", Plenum Press, New-York, 1969.

LEVY, E.M. and A. WALTON, "Dispersed and Particulate Petroleum Residues in the Gulf of St. Lawrence", Bedford Institute of Oceanography, Marine Sciences Branch, Department of the Environment, 1972.

MOORE, S.F., R.L. WYER and A.M. KATZ, "A preliminary Assessment of the Environmental Vulnerability of Machias Bay, Maine, to Oil Supertankers", National Technical Information Service, no. COM-73-10564, 1973.

U.S. COAST GUARDS, Prevention and Control of Oil Spills. Proceedings of a Joint Conference (API-EPA-USCG), Washington, D.C., 1973.

CHAPITRE 2

DERIVATION DES EQUATIONS

Dans ce chapitre, les équations régissant la dispersion de l'huile sur l'eau ainsi que les équations des écoulements à surface libre seront examinées successivement. Les équations de transfert de chaleur sont utilisées pour des fins de vérifications et nous ne ferons que les mentionner avec leurs conditions aux limites.

2.1 Dispersion de l'huile

Le rejet d'huile dans l'eau peut s'effectuer dans des conditions très diverses déjà mentionnées dans le chapitre d'introduction. Nous nous limiterons, ici, à l'étude de rejets accidentels. Ces déversements peuvent être rapides ou lents et interprétés plus mathématiquement comme impulsions ou continus.

2.1.1 Description du phénomène

Une nappe d'huile peut être transportée sur de longues distances sous l'influence combinée du vent, des courants et du potentiel d'étalement de la nappe elle-même. L'étalement de l'huile est un phénomène régi par plusieurs mécanismes dont les principaux paramètres sont la masse spécifique et la tension superficielle de l'huile. L'influence combinée du vent et des courants sur la dispersion, appelée advection ou convection, nécessite l'étude de trois milieux et de leurs interfaces, (l'air, l'huile et l'eau). Il faut noter également que l'huile répandue subit des transformations physico-chimiques importantes. En effet, les fractions volatiles s'évaporent rapidement et les composants résiduels forment des émulsions avec l'eau.

La nappe se transforme éventuellement en ilots de plus ou moins grande envergure.

2.1.1.1 Étalement de l'huile

Dans le cas idéalisé de déversements dans une eau calme, il semble possible de déceler trois mécanismes d'étalement, [FAY, 1969]. Dès l'instant suivant le déversement, il se produit un étalement dû aux forces de gravité combinées à l'inertie de l'huile. Le second mécanisme est régi par un équilibre entre l'énergie potentielle et la force de cisaillement à l'interface. En dernier lieu, le bilan des forces se modifie au fur et à mesure que l'épaisseur de l'huile diminue; le dernier mécanisme est, alors, régi par la tension superficielle. Ces trois mécanismes se produisent en série et il peut arriver que les deux premiers soient rapides et perçus uniquement en laboratoire. C'est le dernier mécanisme de tension superficielle qui l'emporte la plupart du temps.

FAY,[1969], propose trois modèles empiriques pour chacune de ces phases. Le modèle de BLOKKER,[1964], établit que le taux d'étalement est une fonction linéaire de l'épaisseur instantanée de la nappe; ce modèle semble surtout satisfaisant au cours du mécanisme intermédiaire d'équilibre entre les forces potentielles et le cisaillement à l'interface. O'BRIEN [1970] établit, pour sa part, un modèle d'étalement pour une source continue en eau calme; il en vient à la conclusion que le troisième mécanisme décrit plus haut l'emporte nettement sur les deux premiers.

Tous ces modèles, établis pour des eaux calmes, doivent être appliqués avec prudence lorsque l'on tient compte du milieu ambiant, (température, vagues, etc...).

2.1.1.2 Advection de l'huile

a) modèle de déplacement

Toutes les études portant sur l'advection de l'huile distinguent l'effet d'entraînement dû au vent de celui attribué aux courants hydrauliques, [SCHWARTZBERG, 1970, 1971], [WANG, 1974], [SHUKLA, 1974].

a.1) L'évaluation du transfert de quantité de mouvement entre le vent et la nappe d'huile est complexe. En émettant l'hypothèse d'un comportement identique pour l'air et l'eau certains auteurs utilisent la loi de Graham qui stipule que les vitesses sont en rapport inverse avec la racine carrée des masses spécifiques, [MOORE, 1973], [PRUTTON, 1957]. En d'autres termes:

$$\frac{V_e}{V_v} = \sqrt{\frac{d_{air}}{d_{eau}}} \quad (1)$$

où V_e représente la vitesse de la couche supérieure de l'eau et V_v la vitesse du vent; d_{air} et d_{eau} représentent les densités respectives de l'air et de l'eau. L'équation (1) conduit alors aux résultats suivants:

$$\frac{V_e}{V_v} = \sqrt{\frac{0.00129}{1}} = .035 \quad (2)$$

En pratique, le transfert de quantité de mouvement qui s'effectue entre l'huile et l'air s'écrira:

$$V_{huile} = \alpha V_{vent} \quad (3)$$

Expérimentalement, le coefficient α varie entre .03 et .05 selon les cas, [BIEN, 1973]. Les équations (1) et (2) ont été écrites entre l'air et l'eau plutôt qu'entre l'air et l'huile. En effet, la densité de l'huile varie avec le temps et dépend essentiellement de la qualité de l'huile répandue. Une densité de 0.8 conduirait par exemple à un coefficient de 0.04.

a.2) Le transfert de masse entre l'huile et l'eau est également difficile à établir. La plupart des auteurs s'entendaient, dernièrement encore, pour estimer que la nappe d'huile se déplaçait avec le courant, et à la même vitesse, pour des conditions de vents calmes, [BIEN, 1973], [MOORE, 1973], [PREMACK, 1973]. Depuis peu, on estime que la nappe d'huile est entraînée par le courant pour une fraction seulement de la vitesse du courant, [SCHWARTZBERG, 1970,1971], [SHUKLA, 1974]

$$V_{\text{huile}} = \beta V_{\text{courant}} \quad (4)$$

Le coefficient β est posé égal à 1 dans le premier cas et .56 pour l'autre cas [SCHWARTZBERG, 1970,1971].

a.3) en pratique, les deux effets sont combinés; la vitesse de la nappe est la résultante d'une composition vectorielle des vitesses de vents et de courants [HOULT, 1971]

$$V_{\text{huile}} = \alpha V_{\text{vent}} + \beta V_{\text{courant}} \quad (5)$$

a.4) Remarques:

- Lorsque l'effet du vent seul est étudié, on tient compte implicitement de l'effet de cisaillement à l'interface huile-eau.
 - La vitesse du courant est un concept difficile à clarifier puisqu'elle est elle-même influencée par la vitesse du vent.
- Les courants hydrauliques sont estimés, en général, par une intégration verticale du courant. Lorsque l'écoulement est d'une grande profondeur, on retient seulement la partie turbulente, (ou bien mélangée).

b) Simulation des trajectoires

L'évaluation de la trajectoire d'une nappe potentielle fait

intervenir, nous l'avons vu, les conditions de vent et de courant. L'utilisation du modèle établi au paragraphe précédent (5) est compliquée par le fait que les conditions météorologiques et hydrauliques précises d'une catastrophe à venir éventuellement sont inconnues. Il existe plusieurs méthodes de simulation.

b.1) Rose de dérive

Le courant hydraulique est estimé en moyenne autour du point de déversement étudié. Les données de vent sont traitées afin de déterminer les persistences maximales dans les seize directions cardinales de la rose des vents. Une vitesse moyenne de vent est associée à chacune de ces directions. L'équation (5) est appliquée permettant ainsi de calculer la distance parcourue par la nappe pour la persistance maximum dans chacune des seize directions cardinales. En réunissant les sommets des distances parcourues pour chaque direction, on définit une zone de grandeur maximale à l'intérieur de laquelle le déplacement se fera dans les premières heures suivant une catastrophe. Les surfaces ainsi générées sont appelées roses de dérive par analogie avec la rose des vents qui a servi à les tracer. Cette méthode est due à BIEN et HARRISON et a été appliquée sur le fleuve St-Laurent [DRAPEAU, 1974] et aux Bahamas [HARRISON, 1974]. Le calcul des roses de dérive ne s'intéresse qu'au déplacement des nappes, elles ne tiennent pas compte du volume déversé ni de son étalement. Ce calcul permet, cependant, de définir dans un premier temps des régions stratégiques.

b.2) Méthode stochastique

Une autre technique relevant plus nettement de la simulation consiste à déterminer la trajectoire de la nappe sur une base statistique. Comme dans le cas précédent, on fait l'hypothèse d'une vitesse moyenne pour

les courants, mais, cette fois-ci, susceptible de changer à chaque intervalle de temps. Les données de vent sont modelées selon un processus de Markov du premier ordre [LLOYD, 1974]. Selon ce modèle la direction du vent au temps t_{i+1} dépend de la direction du vent au temps t_i . La construction de ce modèle résulte en une matrice d'ordre $N+1$ où N représente le nombre de directions de la rose des vents auquel s'ajoute une direction fictive pour les périodes de vents calmes. Cette matrice est appelée matrice de transition du temps t_i au temps t_{i+1} . L'intervalle de temps Δt pour passer d'un état à l'autre est choisi constant, (les données météorologiques sont connues selon une base horaire). La matrice de transition T , d'élément t_{ij} , est constituée en ajoutant une unité à l'élément t_{ij} chaque fois que le vent passe de la direction i à la direction j . Une fois la matrice de transition construite sur une période donnée, on obtient la matrice d'incidence C d'élément C_{ij} :

$$C_{ij} = \frac{t_{ij}}{\sum_{j=1}^{N+1} t_{ij}} \quad \begin{array}{l} i=1, \dots, N+1 \\ j=1, \dots, N+1 \end{array} \quad (6)$$

La matrice C établit une probabilité de transition, $P(e_{j,t+1} | e_{i,t})$, entre l'état i et les autres états, y compris l'état i lui-même. La chaîne de Markov est appelée homogène si la matrice d'incidence est telle que la suite $\{C, C^2, C^3, \dots\}$ des puissances converge vers une matrice limite L constituée de lignes identiques. On obtient ainsi un vecteur stationnaire donnant la probabilité de se trouver dans l'état i quelque soit l'état initial du système. Ce vecteur stationnaire, ainsi trouvé, la simulation proprement dite consiste à utiliser la méthode de Monte-Carlo. En un premier temps, il faut construire le polygone des fréquences cumulées à partir du vecteur stationnaire. La technique de Monte-Carlo consiste, alors, à

simuler une direction de vent en générant un nombre aléatoire entre 0 et 1. Cette fréquence aléatoire est projetée sur le polygone des fréquences cumulées déterminant la direction de vent simulé. Une vitesse moyenne pour le vent est alors associée à cette direction puis composée vectoriellement avec les données de courant. Le processus est répété à chaque heure par exemple, [MOORE, 1973].

Cette méthode, là encore, ne considère que la trajectoire des nappes et est indépendante de la quantité initiale d'huile déversée.

2.1.1.3 Dégradation de l'huile

Une nappe d'huile répandue à la surface de l'eau subira une succession de transformations physiques, chimiques et biologiques agissant à des taux variables sur les différents constituants du pétrole. Après avoir identifié rapidement les causes de dégradation, nous discuterons des modèles disponibles.

a) Mécanismes de dégradation

Les mécanismes de dégradation sont fortement influencés par les caractéristiques chimiques et physiques des pétroles bruts considérés: composition, densité, point d'ébullition, poids moléculaire, tension de vapeur, solubilité dans l'eau, etc... Ces caractéristiques interviennent non seulement du point de vue de la dégradation mais aussi au niveau de la toxicité sur les organismes vivant dans le milieu marin. Les mécanismes de dégradation retenus sont les suivants [HOULT, 1972].

- L'évaporation constitue le phénomène le plus important de la dégradation [MACKAY, 1974].

- La solubilité des différents composants entraîne une certaine diffusion de l'huile dans l'eau.

- L'émulsion d'huile dans l'eau active le phénomène précédent, cette émulsion croît avec la turbulence.

- La précipitation se produit lorsque les fractions légères se sont évaporées. Il ne semble pas, cependant, que ce mécanisme soit important, [HOULT, 1972].

- L'oxydation photochimique brise la structure moléculaire des films d'huile pour produire des constituants volatils ou solubles ainsi que des résidus solides et visqueux, [DODD, 1971].

- La biodégradation, bien qu'effective, est très lente et n'intervient pas de façon significative dans les premiers jours qui suivent un déversement accidentel [HOULT, 1972].

b) Modèles de dégradation

Il existe plusieurs modèles pour représenter les phénomènes de dégradation. La plupart des auteurs, cependant, [FALLAH, 1976b] et [BLOKKER, 1964], ne retiennent que l'évaporation. Cette dernière représente la dégradation la plus rapide et la plus importante dans les premiers jours suivant le déversement. Ce type de modèle fait intervenir, en particulier, la vitesse du vent, la tension superficielle de l'huile ainsi que la superficie de la nappe. FALLAH,[1976b] , tient compte dans sa simulation du caractère aléatoire de la température et du vent.

MOORE, [1972], présente un modèle du premier ordre pour approximer la dégradation due à l'évaporation, à la solution ainsi qu'à la biodégradation.

2.1.2 Modèle de dispersion intégré

2.1.2.1 Le Modèle

Jusqu'à présent, nous avons décrit des modèles aptes à représenter

l'étalement, le déplacement ou la dégradation d'une nappe d'huile d'une manière séparée. Un modèle intégré reliant tous ces phénomènes serait très souhaitable. Idéalement, il faudrait écrire les équations de mouvement et de continuité des trois milieux en présence, (air, huile et eau) et établir des relations aux interfaces de ces milieux. Cette approche n'est pas réalisable en pratique. Il faut, en effet, compter sur les données disponibles pour pouvoir prédire le déplacement d'une nappe d'huile. L'établissement, par exemple, d'un modèle décrivant le comportement dynamique de l'air ne peut être réalisé avec uniquement des mesures de température, de vitesse et de directions de vent, données qui sont en général disponibles en certains endroits. Il en va de même pour la mise sur pied d'un modèle décrivant les équations de continuité et de mouvement de l'eau. Les conditions actuelles de calcul limitent cet objectif à des modèles utilisant l'hypothèse de faible profondeur. Il nous est apparu plus réaliste d'utiliser une approche plus macroscopique et d'écrire plus simplement un bilan de masse sur l'huile.

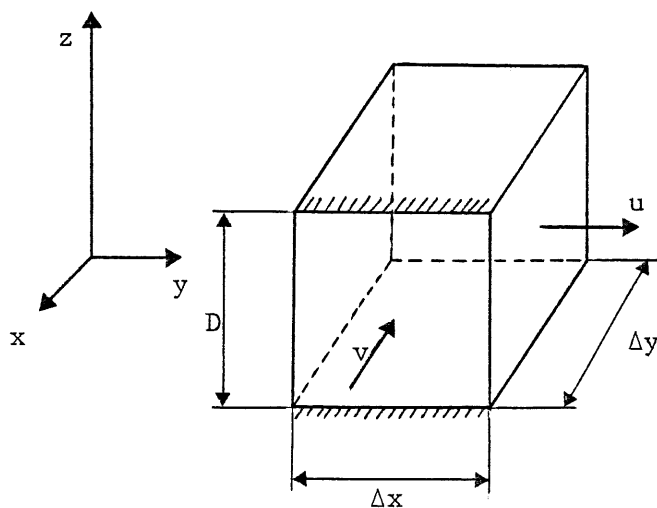


figure 2-1

Elément de volume d'huile

Les termes de convection dans cette équation seront donc traités de manière semi-empiriques; cette approche a déjà été utilisée [HARRISON, 1974], [JAMES, 1972] et permet d'éviter l'intégration des équations de mouvement sur chaque milieu considéré.

Un bilan de masse est effectué sur un élément de volume d'huile.

Les notations suivantes sont introduites:

- D épaisseur de la nappe [L]
- u vitesse de la nappe en direction x [LT⁻¹]
- v vitesse de la nappe en direction y [LT⁻¹]
- K_x et K_y coefficients d'étalement de l'huile
dans les directions x et y [L²T⁻¹]
- k constante de dégradation de l'huile [T⁻¹]
- M volume d'huile rejeté soudainement [L³]
- Δx et Δy accroissement sur l'espace [L]
- Δt accroissement sur le temps [T]
- δ(x-x₀) et δ(y-y₀) impulsion de Dirac
appliquée aux points x₀ et y₀ [L⁻¹]
- δ(t-t₀) impulsion de Dirac appliquée
au temps t₀ [T⁻¹]

Le bilan de masse s'écrit donc:

$$\begin{pmatrix} \text{accumulation} \\ \text{d'huile} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{dispersion} \\ \text{par convec-} \\ \text{tion, (ou} \\ \text{déplacement)} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{dispersion} \\ \text{par diffu-} \\ \text{sion, (ou} \\ \text{étalement)} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \text{dégradation} \\ \text{de} \\ \text{l'huile} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \text{génération} \\ \text{d'huile} \end{pmatrix} \quad (7)$$

Le bilan de masse s'applique, en fait, à un volume matériel où l'on suppose que la masse d'huile demeure à toute fin pratique constante.

Soit encore, en prenant pour hypothèse qu'une loi similaire à celle de Fick s'applique pour caractériser l'étalement:

$$\begin{aligned}
\left[D \Big|_{t+\Delta t}^{\Delta x \Delta y} - D \Big|_t^{\Delta x \Delta y} \right] &= u \Delta y \Delta t \Big|_x - u \Delta y \Delta t \Big|_{x+\Delta x} \\
&+ v \Delta x \Delta t \Big|_y - v \Delta x \Delta t \Big|_{y+\Delta y} \\
&- K_x \frac{\partial}{\partial x} (\Delta y D) \Delta t \Big|_x + K_x \frac{\partial}{\partial x} (\Delta y D) \Delta t \Big|_{x+\Delta x} \\
&- K_y \frac{\partial}{\partial y} (\Delta x D) \Delta t \Big|_y + K_y \frac{\partial}{\partial y} (\Delta x D) \Delta t \Big|_{y+\Delta y} \\
&- k \Delta x \Delta y \Delta t \\
&+ M \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(t-t_0) \Delta x \Delta y \Delta t \tag{8}
\end{aligned}$$

Dans l'équation précédente (8), le dernier terme indique que le volume M est injecté au temps t_0 au point de coordonnées (x_0, y_0) . La justification d'une telle écriture se retrouve dans la définition même de la fonction de Dirac [KORN and KORN, 1968]:

$$\int_{\Omega} f(x, y, t) \cdot \delta(x-x_0) \cdot \delta(y-y_0) \cdot \delta(t-t_0) \cdot dx dy dt = f(x_0, y_0, t_0) \tag{9}$$

En divisant chaque terme de l'équation (8) par le produit $\Delta x \Delta y \Delta t$, on obtient en passant à la limite:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial(uD)}{\partial x} + \frac{\partial(vD)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial D}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial D}{\partial y} \right) + kD = \\
M \cdot \delta(x-x_0) \cdot \delta(y-y_0) \cdot \delta(t-t_0) \tag{10}
\end{aligned}$$

Remarques:

a) Les vitesses u et v représentent les vitesses de l'huile dans les directions x et y en chaque point de l'espace et au temps t considéré. Ces vitesses sont déduites empiriquement de la composition vectorielle

des vitesses de vent et de courant:

$$u = \alpha u_{\text{vent}} + \beta v_{\text{courant}} \quad (11)$$

$$v = \alpha v_{\text{vent}} + \beta v_{\text{courant}} \quad (12)$$

b) L'équation (10) dans une forme simplifiée, (en particulier, $u = \text{constante}$, $v = 0$), a fait l'objet de vérifications expérimentales, [JAMES, 1972]. Cet auteur indique alors que le modèle est valide lorsque les gradients d'épaisseur de l'huile $\frac{\partial D}{\partial x}$ et $\frac{\partial D}{\partial y}$ sont faibles. Lors de ces différentes vérifications, les coefficients d'étalement reportés au tableau 1 ont été utilisés.

Tableau 1

Coefficients d'étalement pour trois types de déversement (m^2/sec)

vitesse du vent m/s	déversement continu		déversement rapide 500 tonnes		déversement rapide 30,000 tonnes	
	D_x	D_y	D_x	D_y	D_x	D_y
2.5-5	7	5	15	10	30	20
5-10	15	10	30	20	60	40
10-20	30	20	60	40	120	80

c) Le terme de dégradation retenu dans l'équation (10) est simple. Il fait l'hypothèse d'un taux de dégradation du premier ordre.

d) L'équation (10) a été écrite pour tenir compte d'un rejet rapide de volume M au temps t_0 et au point de coordonnées x_0 et y_0 . Il est facile de transformer le terme de génération pour représenter une source continue, on aurait alors:

$$\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial (uD)}{\partial x} + \frac{\partial (vD)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial D}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial D}{\partial y} \right) + kD = Q \cdot \delta(x-x_0) \cdot \delta(y-y_0) \quad (13)$$

où Q représente le débit de la source continue située au point (x_0, y_0) . [$L^3 T^{-1}$].

e) FALLAH, [1976a], arrive à un modèle très proche de l'équation (10) par des considérations statistiques. Plutôt que de donner la hauteur D , ce modèle fournit la probabilité pour l'huile de se trouver en un point de coordonnée x et y au temps t à la suite d'un déversement. La somme des probabilités de tous les points de l'espace n'est pas nécessairement égale à 1 si on tient compte des termes de dégradation.

2.1.2.2 Les conditions aux limites

Les conditions initiales ont été incorporées directement au modèle de dispersion dans les équations (10) ou (13). Il reste à définir les conditions aux limites du domaine considéré. Deux cas peuvent se présenter:

- Si le domaine est choisi arbitrairement très grand, et si la source est très éloignée des frontières, il est possible de penser qu'aux limites du domaine l'épaisseur d'huile est nulle. Ce genre de condition aux limites, condition de Dirichlet, s'applique couramment en transmission de chaleur. Elle nécessite de choisir un domaine suffisamment grand pour représenter des conditions aux limites qui se trouvent mathématiquement placées à l'infini.

- Si le domaine présente une frontière réfléchissante que l'huile ne peut traverser, les conditions aux limites font intervenir des gradients et conduisent le plus souvent à des conditions de Neumann. La figure 2-2 représente de telles conditions.

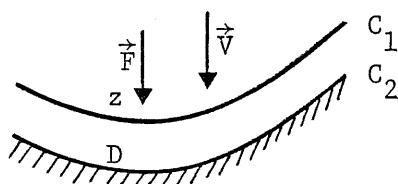


figure 2-2

Bilan sur une frontière réfléchissante

En appelant C_2 la frontière réfléchissante et C_1 une paroi fictive proche de C_2 , il est possible de faire un bilan sur un élément de volume compris entre C_1 et C_2 .

Introduisons la nomenclature suivante:

z	hauteur de l'huile sur C_1	$[L]$
D	hauteur de l'huile sur C_2	$[L]$
\vec{V}	vitesse ponctuelle de l'huile	$[LT^{-1}]$
\vec{F}	flux d'huile par étalement	$[L^2T^{-1}]$
\vec{n}_1 et \vec{n}_2	normale au contour C_1 et C_2	
$d\vec{S}_1 = \vec{n}_1 z dC_1$	élément d'aire orientée sur le contour C_1 correspondant à l'élément de longueur dC_1	
dC_2	élément de longueur sur le contour C_2	
dS	élément de surface compris entre dC_1 et dC_2	

$$\text{entrée par convection } [L^3T^{-1}] \text{ en } C_1 = \vec{V} \cdot \vec{dS}_1 = \vec{V} \cdot \vec{n}_1 \cdot z \cdot dC_1 \quad (14)$$

$$\text{entrée par étalement } [L^3T^{-1}] \text{ en } C_1 = \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dC_1 \quad (15)$$

$$\text{entrée par } C_2 = 0$$

$$\text{Accumulation } [L^3T^{-1}] = (D-z) \frac{dS}{dt} \quad (16)$$

Si on fait tendre C_1 vers C_2 , z tend vers D , le terme d'accumulation du deuxième ordre disparaît et le bilan s'écrit:

$$\vec{V} \cdot \vec{n}_1 D dC_1 = - \vec{F} \cdot \vec{n}_1 dC_1 \quad (17)$$

Soit encore, en simplifiant:

$$(n_1 u + n_2 v) D = -(n_1 F_1 + n_2 F_2) \quad (18)$$

F_1 et F_2 s'expriment, d'après les hypothèses faites plus haut, par:

$$F_1 = -K_x \frac{\partial D}{\partial x}, \quad F_2 = -K_y \frac{\partial D}{\partial y} \quad (19)$$

La condition limite dans le cas d'une réflexion s'écrit donc:

$$(n_1 u + n_2 v) D = n_1 K_x \frac{\partial D}{\partial x} + n_2 K_y \frac{\partial D}{\partial y} \quad (20)$$

Il est possible de ne retenir que des conditions aux limites de ce type, (équation (20)). On choisit, pour cela, un domaine autour de la source. L'équation (10) est résolue jusqu'à ce que l'huile atteigne les frontières. Le domaine est alors agrandi et les données obtenues juste avant que l'huile n'atteigne les frontières servent de données initiales pour le nouveau problème. C'est la démarche qui sera choisie pour notre étude. Ces conditions aux limites trouvent leur véritable application dans le concept d'une estacade limitant le mouvement de l'huile. Dans le dernier cas l'huile atteint l'estacade à la vitesse \vec{V} et est réfléchiée sur la paroi flottante.

2.1.2.3 Solution analytique

Il est facile de montrer que dans le cas simplifié où les vitesses u et v sont nulles et si les termes d'étalement K_x et K_y sont constants, l'expression suivante vérifie l'équation différentielle (10) dans le cas où les limites sont placées à l'infini.

$$D = \frac{M}{4\pi t \sqrt{K_x K_y}} e^{-\frac{x^2}{4K_x t} - \frac{y^2}{4K_y t}} \quad (21)$$

Cette solution obtenue dans un cas simplifié nous permettra de vérifier les résultats obtenus numériquement pour les mêmes conditions.

2.2 Ecoulement peu profond à surface libre

2.2.1 Introduction

Les écoulements peu profonds pour une rivière ou un estuaire ont déjà reçu beaucoup d'attention. L'utilisation des équations de mouvement et de continuité ne semble guère possible sans hypothèses simplificatrices. Les équations régissant les écoulements de type monodimensionnel ont été

largement utilisées, [STOKER, 1957], [HENDERSON, 1966], [BOERICKE, 1974], [FLETCHER, 1967], [BALTZER, 1968], [STRELKOFF, 1969], [LIGGET, 1968], et leur forme est bien connue. CHENG-LUNG CHEN, [1971], y inclut le ruissellement.

Récemment, plusieurs auteurs ont utilisé des équations de type bidimensionnel, [STOKER, 1957], [DAUBERT, 1967], [BAKER, 1975], [GROTKOP, 1973]. Bien que ces équations soient connues depuis longtemps, [LAMB, 1932], leur dérivation pour les écoulements à surface libre, à partir des équations de mouvement et de continuité, reste incertaine et les hypothèses mal définies. Il faut noter cependant, le travail de YEN, [1973], bien que très général, il reste difficilement applicable aux écoulements bi-dimensionnels. Il apparaît donc souhaitable de reprendre ces dérivations en faisant apparaître clairement les hypothèses retenues.

Soit un écoulement tel qu'indiqué sur la figure 2-3; l'axe des z est parallèle à l'accélération de la pesanteur g et forme un trièdre orthonormé avec les axes x et y . $b(x,y)$ représente le fond de l'écoulement par rapport au système de référence et $a(x,y)$ le niveau moyen de l'eau par rap-

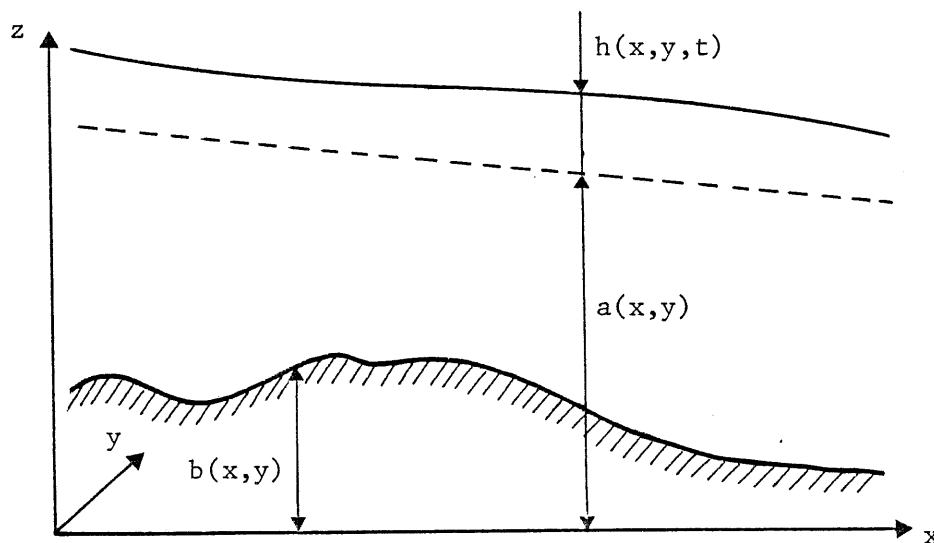


figure 2-3

Schématization de l'écoulement

port au même système. $h(x,y,t)$ représente la déviation par rapport au niveau

moyen au cours du temps.

L'équation de continuité, pour un fluide incompressible, s'écrit:

$$(22) \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

u , v et w sont les vitesses instantanées selon les axes x , y et z .

Les équations de mouvement s'écrivent:

$$(23) \quad \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\rho}{1} \left(\frac{\partial^2 ux}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 vx}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 wx}{\partial z^2} \right) + g_x + B_1$$

$$(24) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(vu)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\rho}{1} \left(\frac{\partial^2 vx}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 vy}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 vz}{\partial z^2} \right) + g_y + B_2$$

$$(25) \quad \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(wu)}{\partial x} + \frac{\partial(wv)}{\partial y} + \frac{\partial(ww)}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\rho}{1} \left(\frac{\partial^2 wx}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 wy}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 wz}{\partial z^2} \right) + g_z + B_3$$

P est la pression du fluide

τ est le tenseur de cisaillement

g_x , g_y et g_z sont les projections de l'accélération de la

pesanteur

B_1 , B_2 et B_3 des forces extérieures de volume ou de surface,

(forces de Coriolis, forces dues à la marée, etc...)

Les variables dépendantes, (P , u , etc...), sont exprimées de

manière instantanée; Les eaux peu profondes exhibent en général un compor-

tement turbulent. Ceci conduit aux équations:

$$(26) \quad u = u + u'$$

$$(27) \quad v = v + v'$$

$$(28) \quad w = w + w'$$

$$(29) \quad P = P + P'$$

où les lettres majuscules désignent les valeurs instantanées et les lettres minuscules les valeurs moyennes alors que u' , v' , w' et p' représentent les composantes turbulentes.

Les règles établies par Reynolds, [BRODKEY, 1967], sont excessivement pratiques pour la détermination des valeurs moyennes. La règle principale propose que des quantités qui ont fait l'objet d'une moyenne restent constantes si elles font à nouveau l'objet d'une moyenne. Plus clairement, si deux valeurs instantanées A et B peuvent s'écrire:

$$A = a + a' \quad (30)$$

$$B = b + b'$$

Alors,

$$\bar{a} = a \quad (31)$$

$$\overline{A + B} = a + b \quad (32)$$

$$\overline{aB} = a.b \quad (33)$$

et à l'aide du théorème de Leibniz:

$$\frac{\partial \bar{A}}{\partial x} = \frac{\partial a}{\partial x} \quad (34)$$

Il devient facile de déduire:

$$\bar{A} = \overline{a + a'} = \bar{a} + \overline{a'} = a \quad (35)$$

$$\overline{AB} = \overline{(a+a')(b+b')} = ab + \overline{a'b'} \quad (36)$$

Les équations de continuité et de mouvement s'écrivent donc, (en reportant l'équation de continuité dans les équations de mouvement):

$$\frac{\partial (u+u')}{\partial x} + \frac{\partial (v+v')}{\partial y} + \frac{\partial (w+w')}{\partial z} = 0 \quad (37)$$

$$\frac{\partial(u+u')}{\partial t} + (u+u') \frac{\partial(u+u')}{\partial x} + (v+v') \frac{\partial(u+u')}{\partial y} + (w+w') \frac{\partial(u+u')}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p+p')}{\partial x} - \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot \tau]_x + g_x + B_1 \quad (38)$$

$$\frac{\partial(v+v')}{\partial t} + (u+u') \frac{\partial(v+v')}{\partial x} + (v+v') \frac{\partial(v+v')}{\partial y} + (w+w') \frac{\partial(v+v')}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p+p')}{\partial y} - \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot \tau]_y + g_y + B_2 \quad (39)$$

$$\frac{\partial(w+w')}{\partial t} + (u+u') \frac{\partial(w+w')}{\partial x} + (v+v') \frac{\partial(w+w')}{\partial y} + (w+w') \frac{\partial(w+w')}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial(p+p')}{\partial z} - \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot \tau]_z + g_z + B_3 \quad (40)$$

En prenant la moyenne temporelle sur les équations (37) à (40), ceci conduit à, [BIRD, 1960]:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (41)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = - \left(\overline{u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z}} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot \bar{\tau}]_x + g_x + B_1 \quad (42)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = - \left(\overline{u' \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} + w' \frac{\partial v'}{\partial z}} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot \bar{\tau}]_y + g_y + B_2 \quad (43)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = - \left(\overline{u' \frac{\partial w'}{\partial x} + v' \frac{\partial w'}{\partial y} + w' \frac{\partial w'}{\partial z}} \right) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{\rho} [\nabla \cdot \bar{\tau}]_z + g_z + B_3 \quad (44)$$

où les termes en $\overline{a' \frac{\partial a'}{\partial x_i}}$ sont les forces de Reynolds et représentent les pertes d'énergie dues à la turbulence.

Remarque: le système d'axe choisi permet d'écrire:

$$\left. \begin{aligned} g_x &= g_y = 0 \\ g_z &= -g \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Hypothèse simplificatrice:

Le fluide est non visqueux $\bar{\tau} \equiv 0$.

Remarque:

$\bar{\tau}$ représentera, par la suite, non pas le tenseur des forces dues à la viscosité, $(\nabla \cdot \bar{\tau})$, qui sont négligées, mais plutôt le tenseur des forces de Reynolds, $(\overline{\nabla \cdot \tau})$.

Conditions limites:

Dans le cas des écoulements à surface libre, il existe trois types de conditions aux limites

1- Une frontière solide qui peut être fixe ou mobile de déplacement connu.

2- Une frontière correspondant à la surface libre et se déplaçant selon des lois inconnues.

3- Une frontière ouverte avec entrée ou sortie de fluide.

Ces trois types de conditions limites seront examinés tour à tour.

2.2.2 Les frontières du domaine2.2.2.1 Frontière solide, fixe ou mobile, d'équation:

$$f(x,y,z,t) = 0 \quad (46)$$

La dérivée totale de cette fonction doit être nulle:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt} + \frac{\partial f}{\partial t} = u \frac{\partial f}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial y} + w \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (47)$$

Le vecteur $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ représente le vecteur normal à la surface f .

Lorsque le fluide est en contact avec une surface rigide, une condition cinématique doit être satisfaite si le contact est maintenu à savoir que le

fluide et la surface rigide en contact doivent avoir la même vitesse normale, [MILNE-THOMSON, 1958]. Donc si la surface rigide est fixe, la vitesse normale doit être nulle et la vitesse du fluide est tangente à la surface rigide.

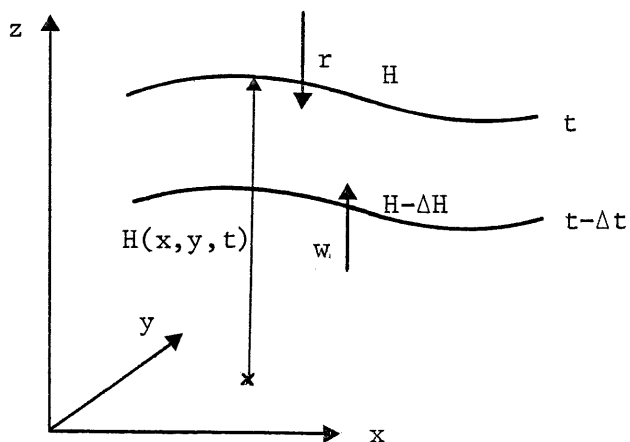
a) Si la frontière solide se déplace, la composante normale de la vitesse est donnée, [STOKER, 1957], par:

$$v_n = \frac{-\frac{\partial f}{\partial t}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}} \quad (48)$$

b) Si la frontière solide est fixe, alors $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ et:

$$\left. \begin{aligned} u f'_x + v f'_y + w f'_z &= 0 \\ u v_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (49)$$

2.2.2.2 Frontière correspondant à la surface libre



Si les équations différentielles sont obtenues en faisant un bilan sur un élément arbitraire, il en va de même pour les conditions limites en effectuant le bilan à la frontière, [JENSON, 1963].

figure 2-4

Bilan sur la surface libre

La figure 2-4 représente la surface inconnue au temps t et au temps $t-\Delta t$. Si $h(x,y,t)$ représente l'écart entre l'élévation de la surface libre et l'élévation moyenne $a(x,y)$, on pose:

$$H(x,y,t) = h(x,y,t) + a(x,y) \quad (50)$$

Un bilan est effectué sur la surface libre. Si r représente la précipitation, (ou l'évaporation), et si le bilan est effectué durant le temps Δt , pour une surface unitaire, on a:

$$\frac{H|_t - H|_{t-\Delta t}}{\Delta t} = r + w|_{H-\Delta H} \quad (51)$$

Lorsque Δt tend vers zéro, le terme de gauche dans l'équation (51) tend vers la dérivée; alors:

$$\frac{dH}{dt} = r + w|_H \quad (52)$$

Soit encore en développant:

$$\frac{\partial H}{\partial t} + u \frac{\partial H}{\partial x} + v \frac{\partial H}{\partial y} = r + w|_H \quad (53)$$

ou encore en se plaçant à nouveau en variable de déviation,

$$\left[\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial (a+h)}{\partial x} + v \frac{\partial (a+h)}{\partial y} - w \right]_{z=a+h} = r \quad (54)$$

r représente, rappelons-le, la précipitation, (ou l'évaporation en changeant le signe de r), et a pour dimension $[LT^{-1}]$.

Remarques:

a) Un bilan semblable peut être effectué au fond de l'eau (figure 2-5).

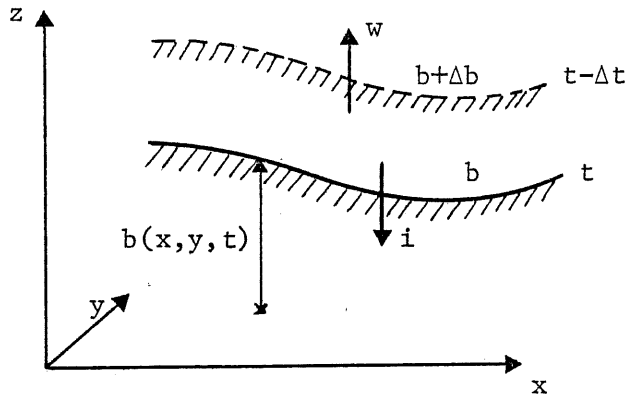


figure 2-5

Bilan sur le fond

Le fond a pour expression:

$$z = b(x, y, t) \quad (55)$$

Si le bilan est effectué pour une surface unitaire et si i représente l'infiltration, (i a pour dimension $[LT^{-1}]$), alors:

$$\frac{b|_t - b|_{t-\Delta t}}{\Delta t} = -i - w|_{b+\Delta b} \quad (56)$$

En passant à la limite, on trouve:

$$\frac{db}{dt} = i + w|_b \quad (57)$$

Soit encore en développant:

$$\frac{\partial b}{\partial t} + u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} = i + w|_b \quad (58)$$

On fera l'hypothèse simplificatrice que le fond ne varie pas avec le temps, (ni érosion, ni sédimentation), alors:

$$\left[u \frac{\partial b}{\partial x} + v \frac{\partial b}{\partial y} - w \right]_b = i \quad (59)$$

b) Il faut ajouter à la condition (54), une condition frontière "physique", concernant la pression atmosphérique:

$$p = \text{Constante (ou connue) sur la surface libre} \quad (60)$$

$$\bar{u} = \frac{\int_{z=b}^{z=a+h} u dz}{\int_{z=b}^{z=a+h} dz} \quad (61)$$

$$\bar{v} = \frac{\int_{z=b}^{z=a+h} v dz}{\int_{z=b}^{z=a+h} dz} \quad (62)$$

ou encore:

$$\bar{u} (a+h-b) = \int_{z=b}^{z=a+h} u dz \quad (63)$$

$$\bar{v} (a+h-b) = \int_{z=b}^{z=a+h} v dz \quad (64)$$

Les conditions limites (54) et (59) sont incorporées à l'équation de continuité (41) intégrée selon z .

Soit:

$$\int_{z=b}^{z=a+h} \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dz = \int_{z=b}^{z=a+h} - \frac{\partial w}{\partial z} dz \quad (65)$$

Le théorème de Leibniz permet d'écrire:

$$\int_{z=b}^{z=a+h} \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z=b}^{z=a+h} u dz - u \frac{\partial(a+h)}{\partial x} \Big|_{z=a+h} + u \frac{\partial b}{\partial x} \Big|_{z=b} \quad (66)$$

2.2.2.3 Frontières ouvertes

Les rivières étudiées, harnachées de barrages ou même naturellement, présentent en général un régime fluvial. Ceci revient à dire que l'écoulement en amont dépend des caractéristiques en aval. Il s'agit donc, en fait, d'un problème aux valeurs limites partagées. Si le niveau de l'eau est fixé de manière artificielle en aval, ceci aura une répercussion sur le fleuve dans son ensemble en amont; il ne sera pas nécessaire de fixer à nouveau cette grandeur aux autres frontières ouvertes, (flux entrant), à condition que le profil des vitesses aux différentes entrées^(*) du domaine considéré soit parfaitement connu. Ce problème est étudié en détail par DAUBERT et AL., [1967], par l'intermédiaire de la théorie des caractéristiques; en résumant:

<u>Frontières ouvertes</u>	<u>Conditions limites</u>
Flux entrant dans le domaine d'intégration	Profil des vitesses fixé (ou vitesse normale connue)
Flux sortant du domaine d'intégration	Niveau de l'eau fixé (ou encore relation débit-niveau ou même le débit)

2.2.3 Intégration des équations selon z - Ecoulement bidimensionnel

La résolution des équations différentielles (41) à (44) tenant compte des diverses conditions limites est peu praticable même sur les ordinateurs les plus puissants. Une simplification majeure consiste à intégrer les équations selon z utilisant ainsi une valeur moyenne pour les vitesses u et v.

(*) Les entrées-sorties telles que la pluie, l'infiltration, l'évaporation, etc... sont fixées à l'intérieur des équations aux limites; ces grandeurs n'interviennent pas en tant que conditions limites proprement dites.

$$\int_{z=b}^{z=a+h} \frac{\partial v}{\partial y} dz = \frac{\partial}{\partial y} \int_{z=b}^{z=a+h} v dz - v \frac{\partial(a+h)}{\partial y} \Big|_{z=a+h} + v \frac{\partial b}{\partial y} \Big|_{z=b} \quad (67)$$

Par application des équations (63) (64) (66) et (67) dans (65):

$$\begin{aligned} \frac{\partial[\bar{u}(a+h-b)]}{\partial x} + \frac{\partial[\bar{v}(a+h-b)]}{\partial y} &= w \Big|_{z=b} - w \Big|_{z=a+h} \\ &+ u \frac{\partial(a+h)}{\partial x} \Big|_{z=a+h} - u \frac{\partial b}{\partial x} \Big|_{z=b} \\ &+ v \frac{\partial(a+h)}{\partial y} \Big|_{z=a+h} - v \frac{\partial b}{\partial y} \Big|_{z=b} \end{aligned} \quad (68)$$

L'application des conditions limites (54) et (59) conduit à:

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial[\bar{u}(a+h-b)]}{\partial x} + \frac{\partial[\bar{v}(a+h-b)]}{\partial y} = r - i} \quad (69)$$

Il ne faut pas oublier la condition limite

$$p = \text{Constante (ou connue) sur la surface libre} \quad (60)$$

Il reste maintenant à intégrer selon z les équations de mouvement. On notera que:

$$\frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} = u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \quad (70)$$

$$\text{car } \nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (71)$$

Donc:

$$\int_{z=b}^{z=a+h} \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} + \frac{\partial(uw)}{\partial z} + \overline{[\nabla \cdot \tau]}_x + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + B_1 \right\} dz = 0 \quad (72)$$

$$\int_{z=b}^{z=a+h} \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} + \frac{\partial(vw)}{\partial z} + \overline{[\nabla \cdot \tau]}_y + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + B_2 \right\} dz = 0 \quad (73)$$

$$\int_{z=b}^{z=a+h} \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial(uw)}{\partial x} + \frac{\partial(vw)}{\partial y} + \frac{\partial(ww)}{\partial z} + \overline{[\nabla \cdot \tau]}_z + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + B_3 - g \right\} dz = 0 \quad (74)$$

où $\overline{[\nabla \cdot \tau]}_{x_i}$ représente le tenseur des forces de Reynolds.

L'équation (72) peut se décomposer sous la forme:

$$\int_{z=b}^{z=a+h} \frac{\partial u}{\partial t} dz + \int_{z=b}^{z=a+h} \left(\frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) dz + \int_{z=b}^{z=a+h} \frac{\partial(uw)}{\partial z} dz + \int_{z=b}^{z=a+h} \left(\overline{[\nabla \cdot \tau]}_x + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + B_1 \right) dz = 0 \quad (75)$$

Soit encore terme à terme:

$$\int_{z=b}^{z=a+h} \frac{\partial u}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \int_{z=b}^{z=a+h} u dz - u \frac{\partial(a+h)}{\partial t} \Big|_{z=a+h} + u \frac{\partial b}{\partial t} \Big|_{z=b} \quad (76)$$

ou encore puisque l'hypothèse a été faite que b ne dépend pas du temps:

$$\int_{z=b}^{z=a+h} \frac{\partial u}{\partial t} dz = \frac{\partial [\overline{u(a+h-b)}]}{\partial t} - u \frac{\partial(a+h)}{\partial t} \Big|_{z=a+h} \quad (77)$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} \int_{z=b}^{z=a+h} \left(\frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z=b}^{z=a+h} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z=b}^{z=a+h} uv dz - u \frac{2\partial(a+h)}{\partial x} \Big|_{z=a+h} + u \frac{2\partial b}{\partial x} \Big|_{z=b} \\ &\quad - uv \frac{\partial(a+h)}{\partial y} \Big|_{z=a+h} + uv \frac{\partial b}{\partial y} \Big|_{z=b} \end{aligned} \quad (78)$$

De plus:

$$\int_{z=b}^{z=a+h} \frac{\partial(uw)}{\partial z} dz = [uw]_{z=a+h} - [uw]_{z=b} \quad (79)$$

Les expressions (77) (78) et (79) peuvent être insérées dans l'équation (75) pour donner:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial[\bar{u}(a+h-b)]}{\partial t} - u \frac{\partial(a+h)}{\partial t} \Big|_{z=a+h} - u^2 \frac{\partial(a+h)}{\partial x} \Big|_{z=a+h} - uv \frac{\partial(a+h)}{\partial y} \Big|_{z=a+h} + [uw]_{z=a+h} \\ & + u^2 \frac{\partial b}{\partial x} \Big|_{z=b} + uv \frac{\partial b}{\partial y} \Big|_{z=b} - [uw]_{z=b} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z=b}^{z=a+h} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z=b}^{z=a+h} uv dz + \int_{z=b}^{z=a+h} \left\{ \frac{[\nabla \cdot \tau]_x}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + B_1 \right\} dz = 0 \end{aligned} \quad (80)$$

Il est facile de reconnaître les expressions (54) et (59), alors (80) devient:

$$\frac{\partial[\bar{u}(a+h-b)]}{\partial t} + [ui]_{z=b} - [ur]_{z=a+h} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z=b}^{z=a+h} u^2 dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z=b}^{z=a+h} uv dz + \int_{z=b}^{z=a+h} \left\{ \frac{[\nabla \cdot \tau]_x}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + B_1 \right\} dz = 0 \quad (81)$$

Les intégrales $\int_{z=b}^{z=a+h} u^2 dz$ et $\int_{z=b}^{z=a+h} uv dz$ ne sont pas intégrables analytiquement,

on peut poser, [YEN, 1973], [CHEN, 1971]:

$$\int_{z=b}^{z=a+h} u^2 dz = \beta_x \bar{u}^2 (a+h-b) \quad (82)$$

$$\int_{z=b}^{z=a+h} uv dz = \beta_{xy} \bar{u} \bar{v} (a+h-b) \quad (83)$$

$$\int_{z=b}^{z=a+h} \frac{1}{\bar{v}^2} dz = \beta_y \bar{v}^{-2} (a+h-b) \quad (84)$$

où β_x , β_{xy} , β_y représentent des facteurs de corrections.

L'équation (73) devient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\bar{u}(a+h-b)]}{\partial t} + \frac{\partial [\beta_x \bar{u}^2 (a+h-b)]}{\partial x} + \frac{\partial [\beta_{xy} \bar{u} \bar{v} (a+h-b)]}{\partial y} + \int_{z=b}^{z=a+h} \left\{ \frac{[\bar{\nabla} \cdot \tau]_x}{\rho} + \frac{\partial p}{\partial x} + B_1 \right\} dz \\ = [ur]_{z=a+h} - [ui]_{z=b} \end{aligned} \quad (85)$$

CHEN, [1971], mentionne que les facteurs de correction β varient dans l'espace et dans le temps. Cependant ces facteurs de corrections restent très proches de l'unité lorsque le régime est turbulent, ce qui a été supposé dès le départ dans le cas des eaux peu profondes. D'où:

$$\beta_x \approx \beta_{xy} \approx \beta_y \approx 1 \quad (86)$$

L'équation (85) peut donc s'écrire:

$$\begin{aligned} \frac{\partial [\bar{u}(a+h-b)]}{\partial t} + \frac{\partial [\bar{u}^2 (a+h-b)]}{\partial x} + \frac{\partial [\bar{u} \bar{v} (a+h-b)]}{\partial y} + \int_{z=b}^{z=a+h} \left\{ \frac{[\bar{\nabla} \cdot \tau]_x}{\rho} + \frac{\partial p}{\partial x} + B_1 \right\} dz = [ur]_{a+h} - [ui]_b \end{aligned} \quad (87)$$

Soit en développant:

$$\begin{aligned} (a+h-b) \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial h}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial [\bar{u}(a+h-b)]}{\partial x} + \bar{u} \frac{\partial [\bar{v}(a+h-b)]}{\partial y} + \bar{u} (a+h-b) \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \\ + \bar{v} (a+h-b) \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \int_{z=b}^{z=a+h} \left\{ \frac{[\bar{\nabla} \cdot \tau]_x}{\rho} + \frac{\partial p}{\partial x} + B_1 \right\} dz = [ur]_{a+h} - [ui]_b \end{aligned} \quad (88)$$

Il est facile de reconnaître l'équation de continuité transformée (69) et

en simplifiant:

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{1}{a+h-b} \left\{ \int_b^{a+h} \frac{[\nabla \cdot \tau]_x}{\rho} dz + \int_b^{a+h} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz + \int_b^{a+h} B_1 dz - \left([ur]_{a+h} - [ui]_b - \bar{u}(r-i) \right) \right\} = 0 \quad (89)$$

De la même façon, l'équation (73) intégrée s'écrira:

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{1}{a+h-b} \left\{ \int_b^{a+h} \frac{[\nabla \cdot \tau]_y}{\rho} dz + \int_b^{a+h} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dz + \int_b^{a+h} B_2 dz - \left([vr]_{a+h} - [vi]_b - \bar{v}(r-i) \right) \right\} = 0 \quad (90)$$

Quant à l'équation (74), en négligeant les forces de Reynolds et les forces extérieures B_3 , elle devient

$$\int_b^{a+h} \frac{dw}{dt} dz + \frac{1}{\rho} [p_{a+h} - p_b] - g(a+h-b) = 0 \quad (91)$$

Intégration des forces de Reynolds selon l'axe z:

Il existe de nombreuses expressions semi-empiriques pour rendre compte des forces de Reynolds, (viscosité turbulente de Boussinesq, longueur de mélange de Prandtl, hypothèse de similarité de von Karman, etc...). En fait, plusieurs auteurs, [PRANDLE, 1974], [DAUBERT, 1967], [GROTKOP, 1973], préfèrent associer les forces de Reynolds aux frottements exercés sur les parois. Nous distinguerons deux types de cisaillement selon qu'il s'agit d'un cisaillement entre l'eau et les parois solides ou d'un cisaillement entre l'air et la surface libre.

- Cisaillement associé aux parois solides

Pour un canal ouvert, les forces de frottements sont proportionnelles à la surface de contact ainsi qu'au carré de la vitesse mais dirigées en sens opposé de la vitesse [DAUBERT, 1967]. Pour une représentation

bidimensionnelle, ceci conduit à:

$$\int_{z=b}^{z=a+h} \frac{[\nabla \cdot \tau_1]_x}{C^2 R_h} dz = \frac{g u \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 R_h} \cdot (a+h-b) \quad (92)$$

$$\int_{z=b}^{z=a+h} \frac{[\nabla \cdot \tau_1]_y}{C^2 R_h} dz = \frac{g v \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 R_h} \cdot (a+h-b) \quad (93)$$

où R_h représente le rayon hydraulique et C le coefficient de Chezy de dimension $[LT^{-2}]^{\frac{1}{2}}$. L'indice 1 de τ indique qu'il s'agit du cisaillement sur les parois solides. Certains auteurs, [YEN, 1975], préconisent plutôt l'utilisation du facteur de rugosité de Manning n , notant que:

$$C = \frac{R_h^{1/6}}{n} \quad (94)$$

Le rayon hydraulique est très souvent approximé par

$$R_h = a+h-b \quad (95)$$

$a+h-b$ représente la hauteur d'eau. Cette approximation n'est valide que si la largeur du cours d'eau est notablement plus grande que la hauteur moyenne, [HENDERSON, 1966].

- Cisaillement associé à la surface libre

Le vent exerce un frottement à la surface. Celui-ci s'exprime par un terme analogue à la friction sur les parois, [SUNDERMANN, 1966].

$$\int_{z=b}^{z=a+h} \frac{[\nabla \cdot \tau_2]_x}{R_w} dz = \frac{\lambda W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2}}{R_w} \cdot (a+h-b) = \frac{\lambda W_x W \cdot (a+h-b)}{R_w} \quad (96)$$

$$\int_{z=b}^{z=a+h} \frac{[\nabla \cdot \tau_2]_y}{R_w} dz = \frac{\lambda W_y \sqrt{W_x^2 + W_y^2}}{R_w} \cdot (a+h-b) = \frac{\lambda W_y W \cdot (a+h-b)}{R_w} \quad (97)$$

où W_x et W_y représentent les composantes de la vitesse du vent selon x et y .

L'indice 2 de τ indique qu'il s'agit du cisaillement sur la surface libre.

Le rayon R_w est défini comme dans le cas du rayon hydraulique par:

$$R_w = \frac{S}{P} \quad (98)$$

S représente la section considérée et P le périmètre sur lequel s'exerce la friction. Pour une section rectangulaire idéale, si L représente la largeur du canal ouvert et $a+h-b$ la hauteur d'eau, on a:

$$R_w = \frac{L \cdot (a+h-b)}{L} = a+h-b \quad (99)$$

C'est cette forme de R_w (99) que nous retiendrons par la suite. SUNDERMAN, [1966], propose pour valeur de λ qui est un nombre sans dimension:

$$\lambda = 3.2 \cdot 10^{-6} \quad (100)$$

Hypothèse d'un fluide hydrostatique: (*)

Un fluide hydrostatique est tel que

$$p_z = \rho g(a+h-z) + p_{a+h} \quad (101)$$

Cette hypothèse est valide pour un très grand nombre d'écoulements hydrodynamiques, en particulier pour les régimes fluviaux et les estuaires lorsque l'eau reste peu profonde. Alors:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = g \frac{\partial(a+h)}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_o}{\partial x} \quad (102)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = g \frac{\partial(a+h)}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_o}{\partial y} \quad (103)$$

où $p_o = p_{a+h}$ représente la pression atmosphérique souvent considérée comme

constante $\frac{\partial p_o}{\partial x} = \frac{\partial p_o}{\partial y} = 0.$

(*) Dans cette thèse, fluide hydrostatique signifie un fluide en mouvement dont la distribution des pressions verticales est hydrostatique.

On peut déduire que:

$$\int_{z=b}^{z=a+h} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} dz = g(a+h-b) \frac{\partial(a+h)}{\partial x} + \frac{(a+h-b)}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} \quad (104)$$

$$\int_{z=b}^{z=a+h} \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} dz = g(a+h-b) \frac{\partial(a+h)}{\partial y} + \frac{(a+h-b)}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial y} \quad (105)$$

Les équations (89), (90) et (91) deviennent donc:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + \frac{g \bar{u} \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 R_h} + \frac{\lambda W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2}}{a+h-b} + g \frac{\partial(a+h)}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{1}{a+h-b} \int_{z=b}^{z=a+h} B_1 dz \\ = \left(\frac{[ur]_{a+h} - [ui]_b - \bar{u}(r-i)}{a+h-b} \right) \end{aligned} \quad (106)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{g \bar{v} \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 R_h} + \frac{\lambda W_y \sqrt{W_x^2 + W_y^2}}{a+h-b} + g \frac{\partial(a+h)}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial y} + \int_{z=b}^{z=a+h} B_2 dz \\ = \left(\frac{[vr]_{a+h} - [vi]_b - \bar{v}(r-i)}{a+h-b} \right) \end{aligned} \quad (107)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{dw}{dt} = 0 \quad (108)$$

Remarques:

La pression étant supposée hydrostatique, les dérivées de la pression par rapport aux axes x et y sont indépendantes de z . En faisant l'hypothèse que les forces extérieures ne dépendent pas de z et en notant que la forme choisie pour les forces de Reynolds ne fait pas intervenir z , alors

les équations (72) et (73) s'écrivent:

$$\int_{z=b}^{z=a+h} \left[\frac{du}{dt} - f(x,y,t) \right] dz = 0 \quad (109)$$

$$\int_{z=b}^{z=a+h} \left[\frac{dv}{dt} - g(x,y,t) \right] dz = 0 \quad (110)$$

où f et g sont deux fonctions qui ne dépendent pas de z . C'est donc dire que $\frac{du}{dt}$ et $\frac{dv}{dt}$ ne varient pas avec z , soit encore:

$$\begin{aligned} u &= \bar{u} \\ v &= \bar{v} \end{aligned} \quad (111)$$

Ceci conduit au résultat remarquable que $\beta_x = \beta_y = \beta_{xy} = 1$ si la pression est hydrostatique.

Les équations de mouvement (106) et (107) deviennent, puisque:

$$\bar{u}(r-i) = [ur]_{a+h} - [ui]_b = \bar{u} r - \bar{u} i \quad (112)$$

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + g \bar{u} \frac{\sqrt{-2\bar{u}^2 - 2\bar{v}^2}}{C^2 R_h} + \frac{\lambda W_x \sqrt{W_x^2 + W_y^2}}{a+h-b} + g \frac{\partial(a+h)}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_o}{\partial x} + \frac{1}{a+h-b} \int_b^{a+h} B_1 dz = 0 \quad (113)$$

$$\frac{\partial \bar{v}}{\partial t} + \bar{u} \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + g \bar{v} \frac{\sqrt{-2\bar{u}^2 - 2\bar{v}^2}}{C^2 R_h} + \frac{\lambda W_y \sqrt{W_x^2 + W_y^2}}{a+h-b} + g \frac{\partial(a+h)}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_o}{\partial y} + \frac{1}{a+h-b} \int_b^{a+h} B_2 dz = 0 \quad (114)$$

$$\frac{dw}{dt} = 0 \quad (115)$$

Les autres forces extérieures

Les termes B_1 et B_2 des équations (113) et (114) représentent les forces extérieures dont il n'a pas encore été tenu compte. Parmi celles-ci on peut noter par exemple les forces de la marée, [CERCEAU, 1974], ou encore l'intensité de la pluie comme force extérieure, [CHEN, 1971]. Ces forces sont en général négligées. Cependant pour des plans d'eau de grandes dimensions, il faut tenir compte des forces de Coriolis. Elles s'expriment par:

$$B_1 = -\Omega \bar{v} \quad (116)$$

$$B_2 = \Omega \bar{u}$$

Ω représente le paramètre de Coriolis et a pour dimension $[T^{-1}]$. Ω est défini par:

$$\Omega = 2\omega \cdot \sin \phi \quad (118)$$

ω représente la vitesse angulaire de la terre en radians/seconde, ϕ est la latitude du point considéré et s'exprime en degré. Par exemple, pour une latitude de 48° , (soit approximativement la latitude de l'estuaire maritime du fleuve St-Laurent), on aurait:

$$\Omega = 1.08 \cdot 10^{-4} \text{ sec}^{-1} \quad (119)$$

2.2.4 Les équations du système

Pour récapituler les équations de mouvement et de continuité pour un écoulement à surface libre peu profond s'écrivent, (en omettant dorénavant la barre sur les vitesses):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + gu \frac{\sqrt{u^2+v^2}}{C^2 R_h} + \frac{\lambda W_x \sqrt{W_x^2+W_y^2}}{a+h-b} + g \frac{\partial(a+h)}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_o}{\partial x} - \Omega v = 0 \quad (120)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g v \frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{C_f^2 R_h} + \frac{\lambda W}{y} \sqrt{\frac{W_x^2 + W_y^2}{a+h-b}} + g \frac{\partial(a+h)}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_o}{\partial y} + \Omega u = 0 \quad (121)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial [u(a+h-b)]}{\partial x} + \frac{\partial [v(a+h-b)]}{\partial y} = r-i \quad (122)$$

Les conditions aux limites sont de deux types, (figure 2-6):

- limites solides, C_f :

$$u n_1 + v n_2 = 0 \quad (123)$$

n_1 et n_2 représentent la normale à la paroi. L'équation (123) provient directement de l'équation (49) qui indique que la vitesse normale est nulle.

- limites ouvertes, C_o :

sur ces frontières on indiquera les valeurs de u , v ou h selon le cas.

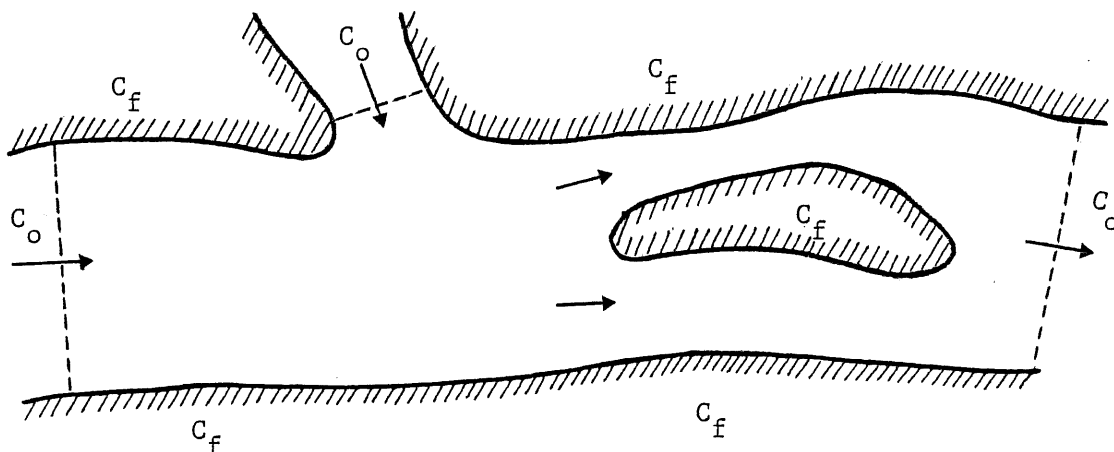


figure 2-6

Schématization du domaine

Les hypothèses retenues pour parvenir à ce modèle sont les suivantes :

- Fluide incompressible
- Ecoulement turbulent
- Les équations représentent une moyenne sur le temps, (ceci impose un intervalle de temps minimum)
- Le fluide est non visqueux
- Les équations sont intégrées selon la direction z
- Le fond de l'écoulement ne varie pas avec le temps
- Les paramètres β_x , β_{xy} et β_y sont voisins de 1 (équation 86)
 - } car le régime est turbulent
 - } Le fluide est hydrostatique ce qui entraîne que β_x , β_{xy} et β_y sont égaux à 1
- Les forces de Reynolds et les forces extérieures selon z sont négligées
- Les forces de Reynolds selon x et y sont représentées par les expressions (92), (93), (96) et (97)
- Le rayon hydraulique sera le cas échéant posé égal à la hauteur d'eau
- Les autres forces extérieures, (intensité de la pluie, marée, etc...), sont négligées.

Rappelons, pour finir, que le système d'axe de référence est choisi pour que l'accélération de la pesanteur soit opposée à l'axe z .

2.2.5 Vérification des résultats

Comme dans le cas de la nappe d'huile, il serait intéressant de considérer un exemple simplifié pour lequel on connaîtrait la solution analytique. Un tel exemple est difficile à construire car même dans le cas

d'un canal droit de section rectangulaire constante et de pente constante, il n'existe pas de solution analytique connue. Le système d'équations différentielles partielles peut cependant être écrit plus spécifiquement pour un canal droit. Ceci permet de se ramener à un système d'équations différentielles ordinaires faciles à intégrer par un algorithme classique. Plus précisément, si le canal droit est orienté selon l'axe des x , (la vitesse v est donc nulle), et si on se place à l'état de régime, les équations (120) à (122) se réduisent à:

$$u \frac{du}{dx} + \frac{gu^2}{C^2 R} + g \frac{d(a+h-b)}{dx} + g \frac{db}{dx} = 0 \quad (124)$$

$$\frac{d[u(a+h-b)]}{dx} = 0 \quad (125)$$

Posons:

$$a+h-b = H \quad (126)$$

Le système s'écrit, après manipulation:

$$\frac{du}{dx} = - \frac{gu}{u^2 - gH} \left(\frac{u^2}{C^2 R} + \frac{db}{dx} \right) \quad (127)$$

$$\frac{dH}{dx} = - \frac{H}{u} \frac{du}{dx} = \frac{gH}{u^2 - gH} \left(\frac{u^2}{C^2 R} + \frac{db}{dx} \right) \quad (128)$$

En utilisant le fait, pour l'écoulement dans un canal rectangulaire à l'état de régime, que hauteur, vitesse et débit sont liés simplement, les équations (127) et (128) peuvent être résolues séparément. En effet, si B représente la largeur du canal et Q le débit:

$$Q = u \cdot B \cdot H = \text{Constante} \quad (129)$$

Les équations (127) et (128) peuvent être écrites maintenant sous la forme:

$$\frac{du}{dx} = \frac{-gu}{u^2 - g \frac{Q}{uB}} \left(\frac{u^2}{C^2 R} + \frac{db}{dx} \right) \quad (130)$$

$$\frac{dH}{dx} = \frac{gH}{\frac{Q^2}{B^2 H^2} - gH} \left(\frac{\frac{Q^2}{B^2 H^2}}{C^2 R} + \frac{db}{dx} \right) \quad (131)$$

Le rayon hydraulique associé à l'équation (130) s'exprime par:

$$R = \frac{S}{P} = \frac{\frac{Q}{u}}{\frac{2Q}{uB} + B} \quad (132)$$

Le rayon hydraulique associé à l'équation (131) s'écrit:

$$R = \frac{S}{P} = \frac{BH}{2H+B} \quad (133)$$

Les valeurs de la vitesse et de la hauteur le long du canal seront facilement connues soit par résolution numérique directe du système composé des équations (127) et (128) soit par la résolution numérique successive des équations (130) et (131). Des conditions aux limites sur u et sur H seront fixées à l'une des deux extrémités du canal.

La méthode utilisée pour l'intégration est l'algorithme de Runge-Kutta-Merson avec ajustement automatique du pas d'intégration, [CHAI, 1970].

2.3 Equation régissant le transfert de chaleur

2.3.1 Ecriture du modèle

L'équation de transfert de chaleur est bien connue et nous nous contenterons de l'écrire. La nomenclature utilisée est la suivante:

$T = T(x,y,t)$ température au temps t et au point de coordonnées
(x,y) ($^{\circ}\text{C}$)

- k_x et k_y les conductivités thermiques dans les directions
x et y (kcal/hr-m-°C)
- C la chaleur spécifique (kcal/kg-°C)
- ρ la masse spécifique (kg/m³)
- Q génération ou perte de chaleur distribuée uniformément
sur le domaine (kcal/m³hr)

L'équation de transfert de chaleur s'écrit:

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + Q \quad (134)$$

2.3.2 Conditions aux frontières

2.3.2.1 Conditions aux limites

Elles sont de trois types correspondant à trois frontières

C_1 , C_2 et C_3 :

$$a) \quad T = T_S \quad \text{sur } C_1 \quad (135)$$

$$b) \quad - \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_1 + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_2 \right) = q \quad \text{sur } C_2 \quad (136)$$

$$c) \quad - \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} n_1 + k_y \frac{\partial T}{\partial y} n_2 \right) = \alpha(T - T_a) \quad \text{sur } C_3 \quad (137)$$

T_S représente une température spécifiée et T_a une température ambiante. Le coefficient α est le coefficient de transfert de chaleur (kcal/hr-m²-°C) entre le corps considéré où se situe la conduction et le milieu extérieur où la température ambiante est T_a .

q représente un flux de chaleur connu, (kcal/hr-m²).

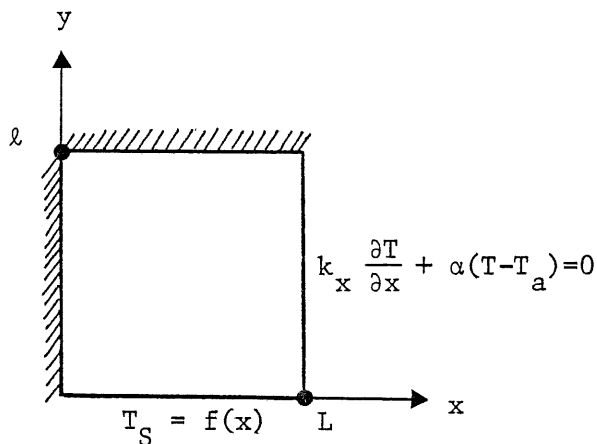
2.3.2.2 Conditions initiales

au temps $t=0$, les températures initiales sont fixées:

$$T(x,y,0) = T(x,y) \quad (138)$$

2.3.3 Résolution analytique

L'équation de transfert de chaleur servant de vérification dans les programmes utilisés, en particulier en ce qui concerne les conditions frontières, il est important de connaître une solution analytique de l'équation (134). Cette solution existe pour des domaines de forme géométrique simple, (un rectangle par exemple), et pour des formes simplifiées de l'équation (134). Nous étudierons le cas particulier de la conduction dans une plaque rectangulaire à l'état de régime, (figure 2-7). Les parties



hachurées indiquent les deux faces isolées. On retrouve ainsi, dans le même exemple, les trois types habituels de conditions aux limites, (Dirichlet, Neumann et troisième type, [CARNAHAN, 1969]). On retiendra la forme simplifiée suivante de l'équation de transfert de chaleur:

Figure 2-7

Conduction dans une plaque

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (139)$$

La température ambiante T_a sera choisie égale à 0°C

Le coefficient de transfert de chaleur α est de $2 \text{ kcal/hr-m}^2\text{-}^\circ\text{C}$

Les conductivités k_x et k_y sont toutes deux égales à $1 \text{ kcal/hr-m-}^\circ\text{C}$

2.3.4 Vérification analytique

Le problème exposé au paragraphe précédent possède une solution analytique, [CARSLAW and JAEGER, 1959], qui s'écrit:

$$T(x,y) = 2\alpha T_S \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(a_n x) \cosh[a_n (\ell - y)]}{[(a_n^2 + \alpha^2)L + \alpha] \cos(a_n L) \cosh(a_n \ell)} \quad (140)$$

où a_n représente les racines successives de l'équation:

$$a \operatorname{tg}(aL) = \alpha \quad (141)$$

Dans le cas particulier où:

$$\ell = L = 1 \text{ m}$$

$$\alpha = 2 \text{ kcal/hr-m}^2 \text{-}^\circ\text{C}$$

$$T_S = 100^\circ\text{C}$$

les équations (140) et (141) s'écrivent:

$$T(x,y) = 400 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(a_n x) \cosh[a_n (1-y)]}{(a_n^2 + 6) \cos(a_n) \cosh(a_n)} \quad (142)$$

avec

$$a \operatorname{tga} = 2 \quad (143)$$

Le tableau 2 indique les racines de l'équation (143), [CARSLAW and JAEGER, 1959], ainsi que certaines valeurs calculées de l'équation (142):

Tableau 2
Paramètres de l'équation (142)

	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6
racines	1.0769	3.6436	6.5783	9.6296	12.7223	15.8336
$a_n^2 + 6$	7.1597	19.2758	49.2740	98.7292	167.8569	256.7029
$\cos a_n$.4741	-.8766	.9568	-.9791	.9879	-.9921
$\cosh a_n$	1.6381	19.1277	359.6584	7604.1758	167569.3911	3761968.138
$(a_n^2 + 6) \cos(a_n) \cosh(a_n)$	5.5604	-323.204	16956.226	-735063.431	27778895.3	-9.58079×10^8

BIBLIOGRAPHIE

BAKER, A.J., "Predictions in environmental hydrodynamics using the finite element method - I. Theoretical Development", AIAA Journal, vol. 13, no. 1, p. 36-42, Jan. 1975.

BALTZER, R.A. and CHIN TU LAI, "Computer Simulation of unsteady flows in Waterways", Journal of the Hydraulic Division, A.S.C.E., p. 1083-1116, July 1968.

BIEN, W., "Modeling Petroleum Spills at Supertanker Ports", Master of Arts Thesis, University of Toronto, 122 pages, 1973.

BIRD, R.B., W.E. STEWART, E.N. LIGHTFOOT, "Transport Phenomena", John Wiley & Sons, 1960.

BLOKKER, P.C., "Spreading and Evaporation of Petroleum Products on Water", Proceedings of the 4th International Harbor Conference, Antwerp, June 1964.

BOERICKE, R.R. and D.W. HALL, "Hydraulics and Thermal Dispersion in an Irregular Estuary", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, p. 85-102, Jan. 1974.

BRODKEY, R.S., "The Phenomena of Fluid Motions", Addison-Wesley Publishing Company, 1967.

CARNAHAN, B., H.A. LUTHER and J.O. WILKES, "Applied Numerical Methods", John Wiley & Sons, 1969.

CARSLAW, H.S. and J.C. JAEGER, "Conduction of heat in solids", Second Edition, Oxford at the Clarendon Press, 1959.

CERCEAU, J. et Y. OUELLET, "Modèle Mathématique pour l'étude de la variation cyclique de la salinité dans l'estuaire moyen du St-Laurent", Université Laval, Centre de Recherches sur l'eau, Avril 1974.

CHAI, A.S., Technical Comment, Simulation, p. vi, oct. 1970.

CHEN, C.L., "Formulation of Mathematical Watershed-flow Model", Journal of the Engineering Mechanics Division, A.S.C.E. p.809-828, June 1971.

DAUBERT, A. et O. GRAFF, "Quelques aspects des écoulements presque horizontaux à deux dimensions en plan et non permanents, applications aux estuaires", La Houille Blanche, no.8, p. 847-859, 1967.

DODD, E.N., "The Effects of Natural Factors on the Movement, Dispersion and Destruction of Oil at Sea", Report to the Zuckerman Committee on the Scientific and Technological Aspects of the Torrey Canyon Disaster, unpublished Document.

DRAPEAU, G., W. HARRISON, W. BIEN and P. LEINONEN, "Oil Slick Fate in a Region of Strong Tidal Currents", Proceedings of the 14th Coastal Engineering Conference, Copenhagen, Denmark, ASCE, June 1974.

FALLAH, M.H. and R.M. STARK, "Literature Review: Movement of Spilled Oil at Sea", MTS Journal, vol. 10, no.1, p. 3-18, 1976a.

FALLAH, M.H. and R.M. STARK, "Random Model of Evaporation of Oil at Sea", The Science of the Total Environment, vol. 5, p. 95-109, 1976b.

FAY, J.A., "Oil on the Sea", Plenum Press, New-York, 1969.

FLETCHER, A.L. and W.S. HAMILTON, "Flood Routing in an irregular Channel", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, p. 45-62, June 1967.

GROTKOP, G., "Finite Element Analysis of long-period Water Waves", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2, p. 147-157, 1973.

HARRISON, W., "The Fate of Grude Oil Spills and the Siting of Four Super-tankers Ports", The Canadian Geographer, vol. 18, p.211-231, 1974.

HENDERSON, F.M., "Open Channel Flow", The MacMillan Company, New-York, 1966.

HOULT, D.P. and R.H. CROSS, "Collection of Oil Slicks", Waterways, Harbors and Coastal Engineering Division, ASCE, p. 312-322, 1971.

JAMES, W.P. et al., "Environmental Aspects of a Supertanker Port on the Texas Gulf Coast", National Technical Information Service, no. PB-220 051, Dec. 1972.

JENSON, V.G. and G.V. JEFFREYS, "Mathematical Methods in Chemical Engineering", Academic Press, 1963.

LAMB, H., "Hydrodynamics", Dover publications, NY 1945; Cambridge University Press, 1932.

LIGGET, J.A., "Mathematical Flow Determination in Open Channels", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, p. 947-963, Aug. 1968.

LLOYD, E.H., "What Is, And What Is Not, a Markov Chain?", Journal of Hydrology, vol. 22, p. 1-28, 1974.

MACKAY, et al., "Physical Aspects of Grude Oil Spills on Northern Terrain", (Second Report), Environmental Social Committee, Northern Pipelines. Environment Canada Report, no. R57-34, 1974.

MILNE-THOMPSON, L.M., "Theoretical Hydrodynamics", 4th Ed., The MacMillan Company, New-York, 1958.

MOORE, S.F., "Some Aspects of Deepwater Terminal Site Selection in Northern New England Coastal Areas", Paper presented at the Annual Meeting, Association of Sea Grant Institution, Houston, Texas, Oct. 11, 1972.

MOORE, S.F., R.L. WYER and A.M. KATZ, "A Preliminary Assessment of the Environmental Vulnerability of Machias Bay, Maine to Oil Supertankers", National Technical Information Service, no. COM-73-10564, 1973.

O'BRIEN, J.A., "Oil Spreading on Water from a Stationary leaking Source", The Chemical Engineer, p. 407-409, Dec. 1970.

PRANDLE, D. and N.L. CROOKSHANK, "Numerical Model of St. Lawrence River Estuary", Journal of the Hydraulics Division, HY4, p. 517-529, April 1974.

PREMACK, J. and G. BROWN, "Prediction of Oil Slick Motions in Narraganset Bay", 1973 Conference on Prevention and Control of Oil Spills, Washington, D.C., 1973.

PRUTTON, C.F. and S. MARON, "Fundamental Principles of Physical Chemistry", The MacMillan Company, New-York, Sixth Printing, 1957.

SCHWARTZBERG, H.G., "Spreading and movement of Oil Spills", Water Pollut. Cont. Res. Report, 15080-EPL 04/70, 1970.

SCHWARTZBERG, H.G., "The Movement of Oil Spills", American Pet. Inst., Proc. Joint Conf. on Prevention and Control of Oil Spills, Washington, D.C., p. 489-494, p. 117-125, 1974.

SHUKLA, D.K. and R.M. STARK, "Random Movement of Oil Patches", The Science of The Total Environment, vol. 3, p. 117-125, 1974.

STOKER, J.J., "Water Waves", Interscience Publishers, N.Y., 1957.

STRELKOFF, T., "One-Dimensional Equations of Open-Channel Flow", Journal of the Hydraulics Division, A.S.C.E., p. 861-875, May 1969.

SUNDERMANN, J., "A Comparison between the Analytical and Numerical Calculation of Wind Induced Currents and Water Levels in a Model Sea with Applications to the North Sea", Ph. D. Thesis, University of Hamburg, [english translation for C.C.I.W., (1969)], 1966.

YEN, B.C., "Open-Channel Flow Equations Revisited", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, p. 979-1009, Oct. 1975.

YEN, B.C., Discussion, "Numerical Model of St. Lawrence River Estuary", Journal of Hydraulics Division, ASCE, p. 202-203, Jan. 1975.

CHAPITRE 3

METHODES D'INTEGRATION - ELEMENTS FINIS

Il existe de nombreuses méthodes d'intégration des équations différentielles partielles. Plusieurs livres en présentent une analyse détaillée, [COURANT et HILBERT, 1962], [FORSYTHE et WASOW, 1960], [EPSTEIN, 1962], [AMES, 1969]. Le choix d'une méthode est, en général, influencé par le type du problème à résoudre, (elliptique, parabolique ou hyperbolique). Nous nous efforcerons donc de classifier les équations vues précédemment. Pour ce faire, nous présenterons d'abord une brève description des différentes classifications.

3.1 Classification des équations différentielles partielles

3.1.1 Les méthodes de classification

a) Classification physique: la classification physique fait la distinction entre les problèmes à l'équilibre, (à l'état de régime), et les problèmes de propagation, (ou transitoires). Les problèmes à l'équilibre, appelés encore problèmes aux valeurs limites, sont régis par les équations différentielles du problème et les conditions frontières qui lui sont appliquées. Les problèmes de propagation, appelés encore problèmes aux valeurs initiales, sont régis non seulement par les équations différentielles et les conditions frontières du problème mais aussi par des conditions sur l'état initial du système. Dans le premier type de problème le domaine est fermé alors que pour le second la solution se déplace à partir d'un état initial tout en respectant les conditions frontières.

b) Classification mathématique: la classification mathématique

repose sur le concept de caractéristiques. Les systèmes sont classés elliptiques, paraboliques ou hyperboliques selon que les caractéristiques sont complexes, nulles ou réelles. AMES, [1969], prétend que les problèmes à l'équilibre sont toujours elliptiques alors que les problèmes de propagation sont paraboliques ou elliptiques. Il ajoute, cependant, que les approximations adoptées éventuellement peuvent changer complètement le type du problème sans aucun rapport avec la classification physique.

La classification mathématique peut être abordée de deux façons selon que l'on considère une équation du deuxième ordre, [CARNAHAN, 1969], [NORRIE, 1973] ou un système d'équations différentielles du premier ordre [FORSYTHE, 1960], [HEIE, 1964].

b-1) Classification mathématique d'un système d'équations
du premier ordre

Soit le système d'équations différentielles quasilinéaires du premier ordre défini sur le domaine Ω :

$$\sum_{i=1}^m A_i \frac{\partial}{\partial x_i} (U) + D = 0 \quad (1)$$

où:

m représente le nombre de variables indépendantes, $(x_i \ i=1,m)$

n est le nombre de variables dépendantes, (u^1, \dots, u^n)

U représente le vecteur des variables dépendantes sur le domaine Ω

$A_i = (a_i^{vj})$ représente la matrice associée à la dérivée selon x_i .

C est une matrice carrée d'ordre n qui peut être fonction des

variables indépendantes x_i ainsi que des variables dépendantes u_i

$D = (d^v)$ est un vecteur $(n \times 1)$ qui peut être fonction des variables dépendantes et indépendantes.

L'équation (1) peut être développée sous la forme:

$$\sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n a_i^{vj} u_{x_i}^j \right] + d^v = 0 \quad v=1, \dots, n \quad (2)$$

Si les deux sommations sont interverties, le système (2) devient:

$$\sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^m a_i^{vj} u_{x_i}^j \right] + d^v = 0 \quad v=1, \dots, n \quad (3)$$

ou encore sous forme développée:

$$\sum_{j=1}^n \left[a_1^{vj} u_{x_1}^j + \dots + a_m^{vj} u_{x_m}^j \right] + d^v = 0 \quad v=1, \dots, n \quad (4)$$

L'expression entre crochets dans le système (4) peut être interprétée à un facteur près, comme la dérivée directionnelle de U dans la direction $\vec{V}_{vj} = (a_1^{vj}, \dots, a_m^{vj})$. Soit:

$$\sum_{j=1}^n \left\| \vec{V}_{vj} \right\| \cdot \nabla_{\vec{V}_{vj}} u^j + d^v = 0 \quad v=1, \dots, n \quad (5)$$

dans laquelle $\nabla_{\vec{V}_{vj}} u^j$ représente la dérivée directionnelle de u^j dans la direction $\vec{V}_{vj} = (a_1^{vj}, \dots, a_m^{vj})$. Si, à la suite d'une transformation, cette direction \vec{V}_{vj} , devient la même quels que soient v et j , alors le système (1) peut s'écrire sous la forme canonique:

$$M \cdot \nabla_s U + S = 0 \quad (6)$$

où

M représente une matrice carrée d'ordre n et qui peut être fonction des variables dépendantes et indépendantes,

S (n x 1) est un vecteur qui peut être fonction des variables dépendantes et indépendantes, s représente la direction de la dérivée directionnelle.

Selon la théorie des caractéristiques, [COURANT, 1962], et par définition, si le système d'équations (1) peut s'écrire après transformation sous la forme (6), la dérivée directionnelle $\nabla_s U$ indique la dérivée directionnelle le long des courbes, (surfaces ou hypersurfaces), caractéristiques si elles existent. Une transformation simple pour passer de la forme (1) à la forme (6) consiste à prémultiplier l'équation (1) par une matrice T composée d'éléments t_{ij} inconnus. Le système devient:

$$\sum_{i=1}^m TA_i \frac{\partial}{\partial x_i} (U) + TD = \sum_{i=1}^m B_i \frac{\partial}{\partial x_i} (U) + E = 0 \quad (7)$$

$$\text{où la matrice } B_i = TA_i \quad (8)$$

Le vecteur E est tel que:

$$E = TD \quad (9)$$

Le système (7) peut encore être développé sous la forme:

$$\sum_{i=1}^m \left[\sum_{j=1}^n b_i^{vj} u_{x_i}^j \right] + e^v = 0 \quad v=1, \dots, n \quad (10)$$

ou encore:

$$\sum_{j=1}^n \left[\sum_{i=1}^m b_i^{vj} u_{x_i}^j \right] + e^v = 0 \quad v=1, \dots, n \quad (11)$$

Posons q_i^v un vecteur orthogonal à l'hypersurface caractéristique pour v fixé. Si la transformation T est telle que l'équation (1) devient sous la forme (6), alors:

$$\sum_{i=1}^m (q_i^v \cdot b_i^{vj}) = 0 \quad v=1, \dots, n \quad (12)$$

car le vecteur $(q_1^v \dots, q_m^v)$ est orthogonal à la direction b^{vj} de la dérivée directionnelle.

L'équation (12) peut être généralisée quelque soit v sous forme matricielle:

$$\sum_{i=1}^m Q_i \cdot B_i = 0 \quad (13)$$

où Q_i représente une matrice diagonale telle que:

$$Q_i = \begin{bmatrix} q_i^1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_i^n \end{bmatrix}$$

L'équation (13) peut encore s'écrire sous forme développée en tenant compte de (8):

$$\sum_{\mu=1}^n (q_1^v t^{v\mu} a_1^{\mu i} + \dots + q_m^v t^{v\mu} a_m^{\mu i}) = 0 \quad i=1, \dots, n \quad (14)$$

$$v=1, \dots, n$$

L'équation (14) forme, pour v fixé, un système de n équations linéaires homogènes [FORSYTHE, 1960] en t^{v1}, \dots, t^{vn} et qui possède des solutions non triviales si et seulement si les nombres q_i^v satisfont l'équation caractéristique:

$$\det \left(\sum_{i=1}^m Q_i^v \cdot B_i \right) = 0 \quad (15)$$

Dans le cas où l'équation (15) possède n solutions réelles et non triviales $q_1^v, q_2^v, \dots, q_m^v$, le système est appelé totalement hyperbolique.

Le système peut donc alors être réduit à la forme canonique (6) et on sait que les directions q_1^v, \dots, q_m^v sont les directions caractéristiques.

b-2) Classification mathématique d'une équation du deuxième ordre

- si l'équation du deuxième ordre s'écrit sous la forme:

$$\sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + C u + D = 0 \quad (16)$$

CARNAHAN, [1969], donne les règles principales suivantes:

- . si tous les A_i sont non nuls et de même signe, l'équation est elliptique
- . si tous les A_i sont non nuls et ont à une exception près le même signe, le système est hyperbolique
- . si un des A_i est nul, par exemple pour $i=k$, et que les autres A_i sont non nuls et si le coefficient B_k de $\frac{\partial u}{\partial x_k}$ est non nul, l'équation est de type parabolique.

- dans le cas où l'équation du deuxième ordre s'écrirait:

$$a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = f \quad (17)$$

et où a_1, a_2, a_3 et f sont des fonctions de $x_1, x_2, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial u}{\partial x_2}$, la

classification sera, [NORRIE, 1973], en posant:

$$\Delta = a_2^2 - 4a_1 a_3$$

- . Δ négatif: le système est elliptique
- . Δ nul : le système est parabolique
- . Δ positif: le système est hyperbolique

3.1.2 Application aux équations étudiées

a) Nappe d'huile et transfert de chaleur

Dans les deux cas l'approche b-2 du paragraphe précédent montre rapidement que les deux équations sont paraboliques.

Si l'on omet le temps dans l'une ou l'autre équation pour considérer l'état de régime, les deux équations deviennent elliptiques.

b) Ecoulement à surface libre

Les équations régissant un tel phénomène sont nous l'avons vu :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial(a+h)}{\partial x} + \frac{gu\sqrt{u^2+v^2}}{C^2 R_h} - \Omega v + \lambda W_x \frac{W}{R_w} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_o}{\partial x} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial(a+h)}{\partial y} + \frac{gv\sqrt{u^2+v^2}}{C^2 R_h} + \Omega u + \lambda W_y \frac{W}{R_w} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_o}{\partial y} = 0 \quad (19)$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial[u(a+h-b)]}{\partial x} + \frac{\partial[v(a+h-b)]}{\partial y} = r-i$$

Les équations (18), (19) et (20) s'écrivent encore sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial t} \\ \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial h}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & 0 & g \\ 0 & u & 0 \\ (a+h-b) & 0 & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v & 0 & 0 \\ 0 & v & g \\ 0 & (a+h-b) & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Si la transformation T vue précédemment existe, l'expression (15) doit être vérifiée, soit encore:

$$\det \begin{bmatrix} q & 0 & 0 \\ 0 & q & 0 \\ 0 & 0 & q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ru & 0 & rg \\ 0 & ru & 0 \\ r(a+h-b) & 0 & ru \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} sv & 0 & 0 \\ 0 & sv & sg \\ 0 & s(a+h-b) & sv \end{bmatrix} = 0 \quad (22)$$

Soit:

$$\det \begin{bmatrix} q+ru+sv & 0 & rg \\ 0 & q+ru+sv & sg \\ r(a+h-b) & s(a+h-b) & q+ru+sv \end{bmatrix} = 0 \quad (23)$$

ou encore sous forme développée:

$$(q+ru+sv) \{ [(q+ru+sv)^2 - gs^2(a+h-b)] - gr^2(a+h-b) \} = 0 \quad (24)$$

L'équation (24) sera vérifiée par q, r et s si l'une des expressions suivantes est vérifiée:

$$\left\{ \begin{array}{l} q+ru+sv = 0 \\ (q+ru+sv)^2 - g(s^2+r^2)(a+h-b) = 0 \end{array} \right. \quad (25)$$

$$(26)$$

Il est aisé de voir que l'expression (24) possède des solutions réelles et non triviales pour peu que l'expression (a+h-b) soit positive. Physiquement, cette condition impose que l'écoulement existe (profondeur positive).

Dans le cas où l'état de régime est étudié, il est facile en reprenant la même méthodologie de retrouver les expressions:

$$\left\{ \begin{array}{l} ru+sv = 0 \\ (ru+sv)^2 - g(s^2+r^2)(a+h-b) = 0 \end{array} \right. \quad (27)$$

$$(28)$$

Le résultat est très semblable au précédent, les conditions pour obtenir des racines réelles et non triviales restent les mêmes.

En conclusion, les équations régissant les écoulements peu profonds sont purement hyperboliques que ce soit à l'état transitoire ou pour un régime permanent.

3.2 Méthodes d'intégration

Le choix d'une méthode est, nous l'avons vu, influencé par le type du problème à résoudre, (elliptique, parabolique ou hyperbolique), [FORSYTHE, 1964].

Par ailleurs, on observe l'utilisation de plus en plus fréquente, pour les problèmes de champ en particulier, de nouvelles techniques, (approches résiduelles). Comme les équations différentielles vues au chapitre précédent, couvrent tous les types connus, nous nous efforcerons de faire une brève description des différentes méthodes de résolution. Nous présenterons, par la suite, une description complète de la méthode utilisée et des motifs qui nous ont poussé vers cette méthode.

3.2.1 Différentes méthodes de résolution

Fréquemment, les techniques de résolution sont présentées à l'aide de la même classification que les équations différentielles partielles. C'est dire que l'intégration des équations hyperboliques, paraboliques ou elliptiques est traitée séparément. En fait, on constate que la plupart des méthodes restent générales, aussi distinguerons-nous plutôt deux grands types de résolution numériques ou analytiques: la résolution directe et la réduction par l'intermédiaire d'une forme intégrale. Dans les deux cas, s'il n'existe pas de solutions analytiques connues, le système d'équations différentielles partielles originales est transformé soit en un système d'équa-

tions différentielles ordinaires, soit en un système d'équations algébriques linéaires ou non.

3.2.1.1 Réduction directe

La réduction directe, par opposition à la réduction par l'intermédiaire d'une forme intégrale, prend sa base dans le système aux dérivées partielles original. La réduction peut se faire analytiquement ou numériquement, voire combiner les deux.

a) Réduction analytique

Pour un système linéaire de type quelconque, une technique analytique consiste à chercher la solution du système homogène. Le principe de superposition est appliqué par la suite. L'utilisation de cette méthode reste très limitée parce que les systèmes étudiés sont rarement linéaires et parce que la solution du système homogène reste souvent inconnue en pratique.

La méthode de séparation des variables est utilisée également pour tous les types de problèmes. Elle reste cependant limitée à des problèmes relativement simples généralement linéaires. Les applications les plus connues concernent les équations de Laplace et de Poisson [TYCHONOV et SANARSKI, 1964] ou encore le transfert de chaleur transitoire dans une plaque.

L'utilisation des méthodes caractéristiques est limitée aux équations différentielles partielles du premier ordre [FRANKLIN, 1975] ou aux problèmes hyperboliques. La résolution finale nécessite la plupart du temps l'emploi de méthodes numériques. Cette méthode a été appliquée aux écoulements presque horizontaux à surface libre [DAUBERT et GRAFFE, 1967]. Les auteurs montrent l'utilisation des surfaces caractéristiques pour établir un schéma aux différences finies.

La méthode de quasilinearisation est principalement utilisée dans les problèmes non linéaires aux valeurs limites partagées. Ils trouvent, la plupart du temps, leur origine en contrôle optimal. Cette méthode est une généralisation de la méthode de Newton-Raphson [KORN et KORN, 1968].

b) Réduction numérique

Les réductions numériques directes sont largement dominées par la méthode des différences finies. Cette dernière consiste à approximer la solution aux noeuds d'un maillage préalablement choisi par l'intermédiaire de développements en série de Taylor. Le système aux différentielles partielles original est donc remplacé par un système d'équations algébriques simultanées établies aux noeuds du maillage. FORSYTHE et WASOW, [1960], dressent une liste des problèmes reliés à l'utilisation d'une telle méthode. Cette liste nous sera très utile par la suite pour fin de comparaison.

- I - Quel est le meilleur choix de maillage?
- II - Comment respecter le mieux possible les conditions qui prévalent aux frontières?
- III - Quelles sont les meilleures approximations à utiliser à l'intérieur du maillage et principalement à la frontière (différences finies avant, arrière, centrale, etc...) ?
- IV - Une fois les décisions I, II et III prises, comment passer de la représentation graphique à l'établissement des équations aux différences, (obtention de matrices tridiagonales, équations spéciales aux parois, etc...) ?
- V - Comment résoudre le système algébrique obtenu le plus efficacement possible?
- VI - La suite des solutions approximées tend-elle vers la solution lorsque le maillage devient de plus en plus raffiné?
- VII - Si l'existence de la solution n'est pas prouvée, peut-on la démontrer par la convergence de la solution quand le maillage est réduit?
- VIII - Peut-on estimer l'erreur de discrétisation pour un maillage donné?

FORSYTHE et WASAW poursuivent en remarquant que les cinq premiers points et particulièrement les questions IV et V semblent primordiaux.

Un des principaux avantages de cette méthode réside dans le fait que la discrétisation peut être choisie pour mener à une résolution algébrique simple. Cette méthode doit cependant être utilisée avec précaution. Elle conduit parfois à des schémas inconditionnellement instables et pose souvent des problèmes de stabilité, (l'erreur, au lieu de s'atténuer, est amplifiée). D'autres méthodes reposent en partie sur ce type d'approximation.

La méthode des lignes [FORSYTHE et WASOW, 1960] consiste à discrétiser, quel que soit le type d'équation à résoudre, selon une ou plusieurs directions de manière à transformer le problème initial en un système d'équations différentielles ordinaires. On note peu d'applications dans la littérature. KELSEY [1974] combine la méthode des lignes à la quasilinearisation pour résoudre un problème d'écoulement visqueux.

La méthode des directions alternées [CARNAHAN, 1969] permet sous certaines conditions de ramener le système d'équations algébriques à résoudre à une matrice tridiagonale. Elle consiste à employer deux équations aux différences finies qui sont utilisées tour à tour dans l'une ou l'autre direction et conduit à deux systèmes algébriques tridiagonales que l'on résout implicitement. Cette méthode s'applique aux systèmes paraboliques, (en particulier aux problèmes transitoires ayant deux coordonnées spatiales). On peut étendre cette méthode aux systèmes elliptiques.

c) Remarques

Ce tour d'horizon rapide des méthodes de réduction directe n'est évidemment pas complet. Nous ne nous sommes pas intéressés à décrire les nombreux schémas des différences finies. Les méthodes de relaxation ne sont

pas touchées car elles concernent surtout la résolution des systèmes algébriques. Nous avons volontairement laissé de côté les techniques de résolution des systèmes aux valeurs propres, (méthodes des perturbations par exemple).

3.2.1.2 Réduction par l'intermédiaire d'une forme intégrale

Le système d'équations aux dérivées partielles est transformé en une équation intégrale avant de subir toute réduction.

a) Réduction analytique

Toute réduction analytique de ce type revient à effectuer une transformation intégrale linéaire de noyau donné. La plus connue des réductions est sans doute la transformation de Laplace. Les fonctions de Green pour les problèmes aux limites présentent un autre type de transformation intégrale bien connue. Ces dernières peuvent être utilisées, en particulier, pour résoudre l'équation de la diffusion sans termes convectifs. Tout comme pour les réductions directes, on peut réduire les systèmes linéaires à l'aide des propriétés de superposition.

b) Réduction numérique

b-1) Approche variationnelle

a) formulation mathématique préalable

L'approche variationnelle consiste à chercher les conditions de stationarité d'une fonctionnelle composée d'une intégrale sur le domaine étudié et d'une intégrale sur le contour de ce domaine, [ODEN, 1972], [NORRIE, 1973]. Les conditions de stationarité sont atteintes si les équations d'Euler ainsi que les conditions frontières sont satisfaites. La fonctionnelle est choisie de sorte que les équations d'Euler ainsi que les conditions frontières soient précisément les équations différentielles du système

original. Cette méthode possède plusieurs avantages:

I - elle présente fréquemment une signification physique; la fonctionnelle à minimiser représente, par exemple, l'énergie potentielle d'une structure.

II - elle possède des dérivées partielles d'ordre moindre que le système d'équations différentielles original.

III - les conditions frontières du système sont introduites "naturellement" dans l'expression de la fonctionnelle.

L'approche variationnelle présente un désavantage important. Elle ne s'applique pas à tous les systèmes d'équations différentielles partielles. En d'autres mots, un système différentiel donné ne possède pas toujours une forme variationnelle équivalente. De nombreux auteurs [NORRIE, 1974], [GUYMON, 1973] se sont penchés, pour cette raison, sur la formation de pseudo-fonctionnelles. Nous verrons plus tard que cette approche n'est pas indispensable, (méthodes résiduelles).

β) Réduction numérique

Le système ayant été transformé au préalable, l'approche numérique consiste à proposer une fonction d'approximation, polynomiale par exemple, pour chaque variable dépendante. Les paramètres inconnus ainsi introduits seront obtenus en rendant la fonctionnelle stationnaire, la dérivée par rapport à chacun de ces paramètres devant être nulle. On obtient aussi un système possédant autant d'équations algébriques que de paramètres inconnus. Le choix des fonctions d'approximation pour les variables est délicat, car elles doivent procurer une bonne représentation sur l'ensemble du domaine étudié. Cette méthode est connue, avec quelques variantes, sous les noms de Ritz ou Rayleigh-Ritz.

b-2) Approche résiduelle

α) formulation mathématique préalable

Dans l'approche résiduelle, la manipulation mathématique est plus simple que pour l'approche variationnelle. La formulation intégrale est obtenue directement à partir des équations différentielles originales, [ODEN, 1972], [NORRIE, 1973], [FINLAYSON, 1972]. Le résidu obtenu par l'application des fonctions d'approximation choisies sur le système différentiel est multiplié par une fonction de pondération. Le résultat est alors intégré sur le domaine considéré. Cette formulation doit, à priori, s'appliquer non seulement aux équations différentielles mais aussi aux conditions frontières et, le cas échéant, aux conditions initiales. Toutefois, la plupart du temps, les conditions frontières sont introduites dans la forme intégrale par intégration par partie. Ceci conduit à une forme voisine, voire identique, à la formulation variationnelle. En fait, pour cette raison, l'approche résiduelle englobe l'approche variationnelle, [HUEBNER, 1975], et permet ainsi de traiter des problèmes non linéaires ne possédant pas de formulation variationnelle. Cette méthode présente, encore, les avantages II et III de la formulation précédente en intégrant par partie le système différentiel original [NORRIE, 1973].

β) Réduction numérique

Le choix des fonctions de pondération ainsi que des fonctions d'approximation des variables conduit à un grand nombre de méthodes. Citons, parmi les plus connues, celle de Galerkin, de collocation et des moindres carrés. Le désavantage cité à la page précédente demeure: les fonctions d'approximation sur les variables doivent représenter leurs variations sur l'ensemble du domaine. L'approche résiduelle est présentée parfois comme un processus d'orthogonalisation. MURPHY, [1973], appelle cette méthode

la méthode de Galerkin généralisée.

b-3) La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis reprend l'une ou l'autre des formulations mathématiques préalables des deux approches précédentes. La réduction numérique de la méthode des éléments finis consiste à décomposer les intégrales obtenues sur le domaine en une sommation d'intégrales sur des sous-ensembles ou éléments de ce domaine. Les conditions de continuité inter-éléments sont respectées. De cette manière, le principal désavantage des deux méthodes précédentes est contourné. En effet, les fonctions d'approximation sont appliquées sur des plages beaucoup plus restreintes.

c) Remarques

La forme intégrale peut être obtenue par une approche physique en exprimant un principe de conservation, [VITCHNEVETSKY, 1976]. ODEN [1969a], [1969b], fut le premier à présenter cette approche basée sur des bilans énergétiques. Cette méthode présente l'avantage de garder plus de signification physique [ODEN, 1970]. Cependant, elle reste peu employée, l'approche résiduelle étant souvent plus simple.

Dans tous les cas, la mise sous forme intégrale revient à obtenir une formulation faible du système aux dérivées partielles original. Un avantage important de cette approche [ODEN, indéterminé], [HUEBNER, 1975], provient du fait que la classe des solutions faibles pour les problèmes aux valeurs limites est souvent plus étendue que la classe des solutions fortes. Ceci est dû, en partie, au fait que l'ordre du système différentiel original est fréquemment réduit lors du passage à la forme intégrale [HUEBNER, 1975].

3.2.2 Choix de la méthode d'intégration

Les équations posées sont complexes et l'espoir de trouver une

solution analytique est faible. Ces systèmes ont été considérablement étudiés. Cependant, les équations de mouvement sur l'eau peuvent être approchées par la méthode des caractéristiques en raison du caractère purement hyperbolique de ce système [DRONKERS, 1969], [DAUBERT, 1967]. Pour le problème parabolique de l'étalement d'une nappe d'huile on ne peut guère opposer véritablement que la méthode des éléments finis à celle des différences finies. Toutes les autres méthodes semblent peu prometteuses. Avant de faire un choix définitif, ces deux méthodes méritent d'être comparées plus attentivement. La liste des problèmes posés par la méthode des différences finies présentée par FORSYTHE, [1960], voir le paragraphe 3.2.1.1-b, peut servir de base à cette comparaison.

I - Le choix du maillage est aussi une question délicate dans la méthode des éléments finis. Il repose, en partie, sur l'habileté du concepteur ainsi que sur sa connaissance intuitive du phénomène étudié. Cependant, ce choix est considérablement étendu dans le cas des éléments finis. L'assemblage de petits éléments de taille et de forme quelconques permet de représenter facilement toute forme géométrique complexe.

II - La plupart du temps, les conditions frontières sont incluses directement dans la forme intégrale lorsque la méthode des éléments finis est utilisée. Cette manière "naturelle" d'introduire les conditions frontières présente un autre avantage marqué de cette méthode sur la méthode des différences finies [NORRIE, 1974], [HUEBNER, 1975].

III - Les approximations utilisées pour les éléments finis sont, en général, les mêmes sur tout le domaine. Ceci est dû au fait que cette méthode conduit à des approximations sur des éléments de taille finie alors que la méthode des différences finies effectue les approximations aux noeuds fixés du maillage. Les points frontières, par exemple, doivent être traités

différemment pour cette dernière méthode.

IV - L'établissement des équations du système s'effectue très simplement de manière automatique avec la méthode des éléments finis. C'est le procédé d'assemblage. Le système algébrique obtenu est en général large, épars et souvent symétrique. Cependant, il se présente rarement sous une forme tridiagonale simple, par exemple, comme c'est souvent le cas avec la méthode des différences finies.

Ces quatre premiers problèmes relevés par FORSYTHE, [1960], donne une préférence à la méthode des éléments finis. Les autres points (V à VIII) ne présentent pas de différences notables pour l'une ou l'autre méthode.

L'application de la méthode des éléments finis reste assez récente pour que les auteurs fassent preuve de préférences marquées. Il existe, cependant, de nombreuses publications comparant les deux méthodes particulièrement en transmission de chaleur, [BRUCH, 1976], [WARZEE, 1974], [GRAY, 1975] et [EMERY, 1971]. De tous ces auteurs, seul le dernier donne l'avantage à la méthode des différences finies pour le temps de calcul et surtout pour l'occupation mémoire. Les autres auteurs reconnaissent le problème de l'encombrement mémoire mais favorisent l'emploi de la méthode des éléments finis pour sa flexibilité, sa stabilité, sa rapidité et enfin parce qu'elle converge à la solution exacte [BRUCH, 1974]. HOUSTIS et AL, [1975], vont plus loin puisqu'ils proposent un algorithme de comparaison montrant que la méthode des éléments finis est significativement supérieure à la méthode des différences finies pour les équations de type elliptique. Ils précisent que leur étude porte sur des problèmes découlant d'applications réelles et non sur des géométries simples, (équation de Laplace sur un rectangle, par exemple).

Les comparaisons effectuées au début de ce paragraphe ainsi que l'étude bibliographique rapide nous ont décidé de choisir la méthode des éléments finis pour la résolution de l'étalement d'une nappe d'huile. Par ailleurs, l'écriture d'un code, ou programme, d'éléments finis représente une tâche réellement laborieuse et c'est la raison pour laquelle nous avons décidé d'appliquer cette même méthode aux équations régissant l'écoulement de l'eau à surface libre. HUEBNER, [1975], semble nous donner raison puisque parlant de la classification des équations différentielles partielles, il poursuit:

"Notre but en mentionnant la classification des équations différentielles partielles est de faire ressortir que l'application de la technique des éléments finis à la solution des équations différentielles et de leurs conditions de frontières dépend de la classification d'une équation donnée seulement dans la mesure où les conditions frontières sont concernées. Si les conditions frontières propres sont spécifiées, la classification des équations n'entre pas explicitement en considération. Quand les conditions frontières sont spécifiées correctement, en principe la méthode des éléments finis est applicable aux équations différentielles partielles linéaires et non linéaires valides sur des domaines de forme géométrique quelconque".

Nous verrons un peu plus loin que le choix de la méthode des éléments finis pour des écoulements peu profonds est également justifié par les tentatives fructueuses déjà effectuées.

3.3 La méthode des éléments finis

La méthode des éléments finis est d'une utilisation récente. Clough, [ODEN, 1972], fut le premier à utiliser le nom d'"éléments finis" en 1960. Le concept remonte aux années cinquante et a été développé, au départ, pour répondre à des besoins précis en structure. Ce n'est qu'en

1965 que la méthode des éléments finis a été appliquée à des problèmes de champ, [ZIENKIEWICZ, 1970]. Cependant la formulation mathématique restait rigide et passait obligatoirement par l'établissement d'un principe variationnel. La situation a changé lorsqu'il fut nécessaire de résoudre des problèmes non linéaires et non auto-adjoints. La méthode de Ritz (approche variationnelle) fut alors perçue, tout au contraire, comme un cas spécial et restreint de la méthode de Galerkin (approche résiduelle), [LEIPHOLZ, 1971].

Nous étudierons, tour à tour, les fonctions d'approximation utilisées, la mise sous forme intégrale, les fonctions d'interpolation, les éléments isoparamétriques, l'assemblage, la pose des conditions frontières, l'intégration sur le temps ainsi que les problèmes de convergence et de stabilité.

Le système à intégrer peut s'écrire, de façon générale:

$$L(u) = f_1 \quad (29), \text{ le système d'équations sur le domaine } \Omega$$

$$B_r(u) = f_2 \quad (r=1, \dots, p) \quad (30), \text{ les conditions aux limites sur la frontière du domaine, } (\partial\Omega)$$

$$I_s(u) = f_3 \quad (s=1, \dots, q) \quad (31), \text{ les conditions initiales sur le domaine } \Omega$$

p et q représente, respectivement, le nombre de conditions frontières et de conditions initiales distinctes.

Les deux paragraphes qui suivent s'appliquent sans restriction à la méthode des éléments finis; ils sont, cependant, présentés de manière plus générale et s'appliquent tout aussi bien aux méthodes de Ritz et aux méthodes résiduelles présentées au paragraphe 3.2.1.2-b précédent. Ces paragraphes traiteront brièvement des fonctions d'approximation et, de façon plus détaillée, de la mise sous forme intégrale.

3.3.1 Les fonctions d'approximation

Les méthodes variationnelles et résiduelles consistent, nous l'avons vu, après transformation intégrale des équations différentielles originales, à approximer les variables dépendantes sur le domaine étudié Ω . Ces approximations doivent être choisies parmi la classe des fonctions admissibles, (conditions de complétude).

3.3.1.1 Approximation des variables

Pour simplifier la notation le domaine étudié Ω est contenu dans \mathbb{R}^2 ; la généralisation à un domaine de dimension quelconque ne pose aucune difficulté. Pour chaque variable dépendante, et éventuellement pour toutes fonctions connues, on pose une approximation.

L'approximation d'une variable quelconque $u(x,y)$ dans la base fonctionnelle ϕ_i de dimension M s'écrit:

$$\tilde{u}(x,y) = \sum_{i=1}^M a_i \phi_i(x,y) \quad \forall (x,y) \in \Omega \quad (32)$$

Le signe " \sim " indique l'approximation. Les coefficients a_i sont appelés, [IMBERT, 1975], coordonnées généralisées de u dans la base fonctionnelle ϕ_i . Par définition, les fonctions ϕ_i sont linéairement indépendantes, (base fonctionnelle). Le problème revient donc à déterminer les coefficients constants a_i . Une fois ces coefficients connus, la variable $u(x,y)$ sera déterminée en tout point P du domaine Ω .

Si la variable u est, de plus, fonction du temps, on peut alors écrire deux types d'approximation:

$$\tilde{u}(x,y,t) = \sum_{i=1}^M a_i \cdot \phi_i(x,y,t) \quad (33)$$

ou

$$\tilde{u}(x,y,t) = \sum_{i=1}^M a_i(t) \cdot \phi_i(x,y) \quad (34)$$

La première approche proposée par ARGYRIS [1969] reste peu utilisée. Le plus souvent la décomposition est effectuée comme l'indique l'équation (34). Dans ce cas, les dérivées par rapport au temps subsistent et conduisent, une fois les approximations fixées, à un système d'équations différentielles totales en fonction du temps. C'est cette forme que nous retiendrons par la suite. La variable temps sera donc séparée des autres variables indépendantes. Ceci revient à faire l'étude d'un système à l'équilibre sans se soucier du temps, puis à intégrer le système résultant sur le temps.

3.3.1.2 Conditions de complétude

Les fonctions proposées, nous l'avons vu, doivent représenter les variations sur le domaine Ω étudié. La base $\phi_i(x,y)$ est dite complète si n'importe quelle fonction arbitraire admissible définie sur Ω peut être représentée par [IMBERT, 1975]:

$$\tilde{u}(x,y) = \sum_{i=1}^M a_i \cdot \phi_i(x,y)$$
 par rapport à un critère de convergence donné. Les critères de convergence sont multiples [NORRIE, 1973]:

a) L'ensemble des fonctions linéairement indépendantes ϕ_i est complet, au sens de la convergence en moyenne, s'il est possible de trouver un nombre M et des constantes a_i tels que:

$$\int_{\Omega} \left(u - \sum_{i=1}^M a_i \cdot \phi_i \right)^2 d\Omega < \delta \quad \forall \delta > 0 \quad (35)$$

L'intégrant étant toujours positif, l'inéquation (35) peut encore s'écrire:

$$\left| u - \sum_{i=1}^M a_i \cdot \phi_i \right| < \varepsilon \quad \forall \varepsilon > 0 \quad (36)$$

En général, un ensemble de fonctions est dit complet, sans autre qualificatif, si ε tend vers zéro quand M tend vers l'infini dans l'inéquation (36).

b) L'ensemble des fonctions linéairement indépendantes ϕ_i est complet par rapport à l'opérateur A si:

$$\int_{\Omega} A \left(u - \sum_{i=1}^M a_i \phi_i \right) \cdot \left(u - \sum_{i=1}^M a_i \phi_i \right) d\Omega < \varepsilon \quad (37)$$

On dit encore dans ce cas que l'ensemble des fonctions converge en énergie [NORRIE, 1973].

3.3.2 Mise sous forme intégrale

La mise sous forme intégrale peut être groupée, comme nous l'avons vu, en deux classes:

- Les méthodes d'approximation universelles ou méthodes résiduelles
- Les méthodes d'approximation variationnelles.

Dans le premier cas, méthodes résiduelles, on obtient trois types de résidus:

$$\text{Le résidu de l'équation différentielle: } L(u) - f_1 = R_1 \quad (38)$$

$$\text{Le résidu des conditions aux limites : } B_r(u) - f_2 = R_2 \quad (r=1, \dots, p) \quad (39)$$

$$\text{Le résidu des conditions initiales : } I_s(u) - f_3 = R_3 \quad (s=1, \dots, q) \quad (40)$$

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons particulièrement à l'intégration d'un système stationnaire à cause des hypothèses faites plus haut.

3.3.2.1 Approximation variationnelle

Soit la fonctionnelle J:

$$J = \int_{\Omega} F(y_i, y_{i,k}, x_k) d\Omega - \int_{\partial\Omega} \left[\phi_i y_i + \frac{\alpha y_i^2}{2} \right] dS \quad (41)$$

i est l'indice des variables dépendantes, il peut varier de 1 à n

k est l'indice des variables indépendantes et peut varier de 1 à m

et où: $y_{i,k} = \frac{\partial y_i}{\partial x_k}$.

Le calcul des variations permet de montrer qu'une condition nécessaire pour rendre la fonctionnelle stationnaire est que:

$$\delta J = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial F}{\partial y_i} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial y_{i,k}} \right) \right\} \delta y_i d\Omega + \int_{\partial\Omega} \left\{ -\phi_i - \alpha y_i + \sum_{k=1}^m \frac{\partial F}{\partial y_{i,k}} n_k \right\} \delta y_i dS = 0 \quad (42)$$

($i=1, \dots, n$)

équations d'Euler-Lagrange

Conditions aux limites

Pour que l'équation (42) soit vérifiée, et dans le cas où la variation de y_i est quelconque, il faut que chaque terme de l'équation (42) soit nul. Ceci nécessite que les équations d'Euler-Lagrange et les conditions aux limites soient nulles.

On distingue deux types de conditions aux limites:

a) Conditions aux limites rigides:

La fonction y_i est fixée en certains points de la frontière $\partial\Omega$:

$$y_i = \overline{y_i}(s_1, \dots, x_m) \quad (43)$$

$$\text{dans ce cas, } \delta y_i = 0 \Rightarrow \delta J = 0 \quad (44)$$

b) Conditions aux limites "naturelles"

La fonction y_i est quelconque. Pour que la variation de J soit nulle, il faut donc que:

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial F}{\partial y_{i,k}} n_k = \Phi_i(x_1, \dots, x_m) + \alpha y_i, \quad (i=1, \dots, n) \quad (45)$$

"Naturellement", si $\Phi_i + \frac{\alpha y_i^2}{2} = 0$, alors:

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial F}{\partial y_{i,k}} n_k = 0 \quad (46)$$

Il existe, en fait, de très nombreux problèmes physiques où il est possible de noter une équivalence de forme entre les équations différentielles du système et les équations d'Euler-Lagrange. Cette même équivalence s'applique, alors la plupart du temps, entre les conditions aux limites et l'intégrale sur la frontière du domaine Ω dans l'expression (42). Cette équivalence existe toujours, [FINLAYSON, 1967], pour les systèmes auto-adjoints, (voir plus bas).

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \sum_{k=1}^m \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{\partial F}{\partial y_{i,k}} \right) = 0 \leftrightarrow L(u) = f_1$$

$$\sum_{k=1}^m \frac{\partial F}{\partial y_{i,k}} n_k = \Phi_i(x_1, \dots, x_m) + \alpha y_i \leftrightarrow B_r(u) = f_2 \quad (r=1, \dots, p)$$

Le plus souvent, il est possible de montrer que les fonctions y_i qui rendent la fonctionnelle stationnaire sont précisément solutions du système différentiel original avec ses conditions limites, [NORRIE, 1973]. Il devient alors équivalent de résoudre le système différentiel ou de minimiser la fonctionnelle J.

Le passage à la forme intégrale se trouve donc accompli de cette façon. Cependant, le système différentiel original ne possède pas toujours un principe variationnel équivalent.

Une autre approche, [REKTORYS, 1969], consiste à se placer dans l'espace des fonctions carrées intégrables et réelles $L_2(\Omega)$ sur le domaine considéré Ω . Introduisons quelques notions; le produit scalaire s'écrit alors:

$$(u,v) = \int_{\Omega} uv \, d\Omega \quad (47)$$

L'opérateur différentiel A est dit symétrique, ou auto-adjoint, si pour toutes fonctions u et v de cet espace, on a:

$$(Au,v) = (u,Av) \quad (48)$$

Enfin l'opérateur A est défini positif si:

$$(Au,u) > 0 \quad \forall u \neq 0 \quad (49)$$

$$(Au,u) = 0 \quad \text{seulement si } u=0 \quad (50)$$

De nombreux théorèmes peuvent être démontrés selon cette approche [REKTORYS, 1969]. Citons, par exemple, le théorème suivant:

Théorème: Soit L un opérateur auto-adjoint, défini positif sur l'ensemble linéaire M de l'espace $L_2(\Omega)$ et soit f une fonction donnée et u

une fonction inconnue. Si l'équation:

$$L(u) - f = 0 \quad (51)$$

possède une solution dans M , cette solution est unique et produit un minimum pour la fonctionnelle:

$$F(u) = (L(u), u) - 2(u, f) \quad (52)$$

Réciproquement, la fonction produisant le minimum de cette fonctionnelle sur M satisfait l'équation (51).

Quelque soit l'approche variationnelle utilisée, cette méthode reste limitée car peu de problèmes non linéaires possèdent un principe variationnel. FINLAYSON, [1972], fournit un moyen très général de déterminer si un principe variationnel existe ou non. Cette méthode est basée sur l'étude de la dérivée de Fréchet de l'opérateur étudié.

De nombreux auteurs ont essayé d'introduire des pseudo-principes variationnels; [NORRIE, 1973], par exemple, en fait une analyse détaillée. FINLAYSON, [1967], démontre que ces principes variationnels restreints sont de peu d'utilité car ils peuvent être générés directement par l'approche résiduelle et parce qu'ils ne constituent pas de véritables principes variationnels, (il n'existe pas de fonctionnelle à rendre stationnaire dont les équations d'Euler-Lagrange seraient les équations du système étudié).

3.3.2.2 Approximations universelles ou Approche résiduelle

L'approche résiduelle est perçue de plus en plus comme une généralisation de l'approche précédente, [MURPHY, 1973]. Dans ce paragraphe nous introduirons ces généralisations qui s'appuient sur un processus d'orthogonalisation et sur la formation de résidus pondérés.

La substitution des fonctions d'approximation, vues plus haut,

dans le système différentiel original et dans les conditions aux limites résulte en la formation de résidus, équations (38) et (39). En prenant pour hypothèse que les conditions frontalières sont satisfaites au départ par les fonctions d'approximation, le système d'équations différentielles est placé, alors, sous forme intégrale.

Si le système original s'écrit:

$$\left. \begin{aligned} L(u(x,y)) &= f_1 && \text{sur } \Omega \\ \tilde{u}(x,y) &= \sum_{i=1}^N a_i \cdot \phi_i(x,y) \\ B_r(\tilde{u}) &= f_2 && (r=1, \dots, p) \end{aligned} \right\} (53)$$

La forme intégrale s'écrit alors:

$$\int_{\Omega} W_i \cdot [L(\tilde{u}) - f_1] \, d\Omega = 0 \quad i=1, \dots, N \quad (54)$$

N représente le nombre de paramètres inconnus. Le choix des fonctions de pondération W_i est multiple [NORRIE, 1973], [FINLAYSON, 1965]. Les choix retenus, ici, sont écrits pour des domaines simples, (plan ou droite), la généralisation à des domaines à n dimensions ne pose aucun problème.

a) Méthode de Galerkin

Dans la méthode de Galerkin, les fonctions de pondération W_i sont choisies identiques aux fonctions d'approximation.

$$W_i = \phi_i(x,y) \quad i=1, \dots, N \quad (55)$$

La méthode de Galerkin est étroitement reliée à l'approche variationnelle [FINLAYSON, 1965]. Selon ODEN, [année inconnue], sur l'espace

$L_2(\Omega)$, l'approximation de Galerkin représente la meilleure approximation de la solution exacte. Un des avantages de la méthode de Galerkin réside dans le fait que lorsqu'un principe variationnel existe elle conduit à une formulation équivalente [FINLAYSON, 1972]. Cependant, lorsqu'il n'existe pas de principe variationnel et quelque soit les non-linéarités du système, la méthode de Galerkin permet de placer le système différentiel sous forme intégrale.

b) Méthode de Miklin ou moindres carrés

La méthode des moindres carrés consiste à minimiser la fonctionnelle du résidu au carré, soit:

$$J = \frac{1}{2} \int_{\Omega} R_1^2(a_i) \, d\Omega \quad (56)$$

Les coefficients a_i cherchés dans les fonctions d'approximation sont tels qu'ils minimisent la fonctionnelle J:

$$\frac{\partial J}{\partial a_i} = 0 \quad i=1, \dots, N \quad (57)$$

Ceci revient à poser dans l'équation (54):

$$W_i = \frac{\partial R_1}{\partial a_i} \quad i=1, \dots, N \quad (58)$$

en rappelant que

$$R_1 = L(\tilde{u}) - f_1 \quad (59)$$

Cette méthode conduit à des équations compliquées mais a déjà été appliquée sur des problèmes difficiles, [FINLAYSON, 1965]. Elle possède

l'avantage de conduire toujours à des systèmes matriciels symétriques, ce qui est rarement le cas de la méthode de Galerkin pour des systèmes non-linéaires [LYNN, 1973].

c) Méthode intégrale et méthode des sous-domaines

Pour la méthode intégrale, les fonctions de pondération W_i sont telles que:

$$W_i = 1 \quad i=1, \dots, N \quad (60)$$

La méthode des sous-domaines est proche de la méthode intégrale. Le domaine Ω est divisé en M éléments conduisant à M équations (ou systèmes d'équations) simultanées. Ceci revient à poser comme fonction de pondération:

$$W_i = 1 \quad \text{si le point appartient à l'élément considéré} \quad (61)$$

$$W_i = 0 \quad \text{pour un point extérieur à l'élément} \quad (62)$$

Dans ce cas, la méthode intégrale est appliquée par partie.

d) Méthode des moments

La méthode des moments utilise comme fonctions de pondération, les éléments d'un ensemble complet de fonctions. L'exemple le plus connu consiste à poser:

$$W_i = x^{i-1} \quad i=1, \dots, N \quad (63)$$

e) Méthode de collocation

La méthode de collocation par points utilise comme fonction de pondération des fonctions impulsion de Dirac.

$$W_i = \delta(x-x_i) \quad i=1, \dots, N \quad (64)$$

Le résidu est donc annulé aux points de collocation spécifiés.

Remarques:

- Le respect des conditions aux limites a été, jusqu'à présent, laissé de côté. Nous verrons plus loin, paragraphe 3.3.6, que ces conditions peuvent être insérées assez facilement dans la fonctionnelle dont on cherche à minimiser le résidu.

- L'approche résiduelle permet, dans de nombreux cas, de retrouver des schémas aux différences finies. MURPHY, [1973], en donne plusieurs exemples.

- FINLAYSON, [1972], cite plusieurs exemples qui tendent à montrer que le choix de la méthode résiduelle n'est pas critique. Toutes les comparaisons indiquent que des résultats semblables sont obtenus pour tous les cas.

3.3.3 Fonctions d'interpolation

3.3.3.1 Approximation sur un élément

Jusqu'à présent, nous avons décrit les fonctions d'interpolation

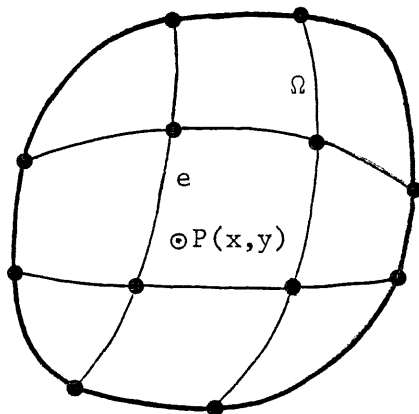


Figure 3-1

Domaine Découpé

et la mise sous forme intégrale sans faire appel à la notion d'éléments finis. La figure 3-1 montre le domaine découpé cette fois en éléments. Au point $P(x,y)$ de l'élément e , l'approximation s'écrit:

$$\tilde{u}^e(x,y) = \sum_{i=1}^{M^e} a_i^e \cdot \phi_i^e(x,y) \quad (65)$$

Par ailleurs, si le système différentiel original a été transformé en un système d'équations intégrales du type:

$$F_j = \int_{\Omega} G_j \, d\Omega + \int_{\partial\Omega} g_j \, ds \quad (66)$$

alors le domaine Ω est décomposé en plusieurs éléments:

$$F_j = \sum_{e=1}^E F_j^e = \sum_{e=1}^E \left[\int_{\Omega_e} G_j \, d\Omega \right] + \int_{\partial\Omega} g_j \, ds \quad (67)$$

Cette formulation représente la base des éléments finis. L'intégrale sur la frontière du domaine $\partial\Omega$ peut être décomposée en plusieurs éléments par le même procédé ou encore s'appliquer à l'ensemble de la frontière comme indiqué à l'équation (67).

Nous avons vu précédemment que les fonctions d'approximation choisies doivent appartenir à un ensemble complet de fonctions. Par ailleurs, la sommation effectuée en (67) indique la nécessité de respecter des conditions de continuité inter-éléments. Ces conditions doivent assurer la continuité jusqu'à la classe C^r si les équations contiennent des dérivées d'ordre $r+1$, [HUEBNER, 1975]. Ces conditions sont appelées conditions de compatibilité. Un moyen simple de s'assurer que ces conditions de compatibilité seront remplies, au moins pour la classe C^0 , est d'utiliser des fonctions d'interpolation.

3.3.3.2 Fonction d'interpolation pour un cas particulier

Considérons un problème particulier avec une variable dépendante et deux variables indépendantes.

Très souvent, et particulièrement dans le cas qui nous intéresse, les équations différentielles partielles originales du problème physique ne

possèdent que des dérivées du deuxième ordre au maximum. La plupart du temps, au moment de la mise sous forme intégrale, il est assez facile de se ramener à un système intégral ne contenant que des dérivées du premier ordre au moyen d'une intégration par partie judicieuse. La continuité de classe C^0 sera donc obtenue en utilisant des fonctions d'interpolation. C'est dire que les coefficients généralisés a_i^e vus précédemment, équation (65), sont remplacés par les valeurs des variables dépendantes cherchées en des noeuds préalablement spécifiés du maillage. L'approximation (65) devient:

$$\tilde{u}^e(x,y) = \sum_{i=1}^{M^e} \overline{u_i^e} \cdot \phi_i^e(x,y) \quad (68)$$

où $\overline{u_i^e}$ représente les valeurs des variables dépendantes recherchées aux noeuds i de l'élément e et M^e le nombre de noeuds de l'élément e .

Si \bar{n} désigne le nombre total de noeuds dans le maillage du domaine Ω , l'équation (68) peut être écrite sous la forme:

$$\tilde{u}(x,y) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \overline{u_i} \cdot \phi_i(x,y) \quad (69)$$

Les fonctions d'approximation $\phi_i(x,y)$ sont définies sur tout le domaine Ω et sont telles que:

$$\phi_i = \sum_{e=1}^E N_i^e \quad (70)$$

où E représente le nombre total d'éléments et où N_i^e satisfait les conditions suivantes:

- Chaque fonction N_i^e est nulle en dehors de l'élément e contenant

le point $P(x,y)$ considéré.

- La fonction N_i^e est une fonction continue des variables indépendantes telle que sa valeur aux noeuds du maillage est nulle ou égale à l'unité.

- La fonction N_i^e est nulle si le noeud i n'appartient pas à l'élément e .

L'approximation au même point P du domaine Ω s'écrira:

$$\tilde{u}_P(x,y) = \sum_{i=1}^{\bar{n}} \sum_{e=1}^E \overline{u}_i \cdot N_i^e \quad (71)$$

L'approximation au même point P , appartenant à l'élément e , peut s'écrire sur cet élément:

$$\tilde{u}_P^e(x,y) = \sum_{i=1}^M \overline{u}_i^e N_i^e \quad (72)$$

Il est clair que ces nouvelles fonctions d'approximation N_i^e sont des fonctions d'interpolation puisque au noeud i , on a:

$$N_k^e = 1 \quad \text{pour } k=i \quad (73)$$

$$N_k^e = 0 \quad \text{pour } k \neq i \quad (74)$$

3.3.3.3 Ecriture généralisée

Les développements subséquents suivent de près la présentation de NORRIE, [1973].

De manière générale, on pose:

$x_j \quad j=1, \dots, n$; les variables indépendantes,

$u_i \quad i=1, \dots, m$; les variables dépendantes.

L'approximation s'écrit:

$$\tilde{u}_i^e = \sum_{k=1}^{M^e} N_{ik}^e(x_j) \cdot \overline{u_{ik}^e} \quad i=1, \dots, m \quad (75)$$

• $\tilde{u}_i^e = \tilde{u}_i^e(x_j)$ représente l'approximation de la variable dépendante u_i dans l'élément e au point P de coordonnées

(x_1, \dots, x_n)

• $\overline{u_{ik}^e}$ représente la valeur de chaque variable dépendante et de leurs dérivées, (si nécessaire pour les conditions de compatibilité), au noeud $k=1, \dots, M$ de l'élément e

• M^e est le nombre de noeuds dans l'élément e

• E représente le nombre d'éléments dans le domaine Ω

• \bar{n} est le nombre total de noeuds dans le domaine Ω

• $\bar{m} = \bar{n} \cdot m$ est le nombre total de degrés de liberté

• $N_{ik}^e = N_{ik}^e(x_j) = N_{ik}^e(x_1, \dots, x_n)$, la fonction d'interpolation.

L'équation (75) s'écrit sous forme matricielle:

$$\tilde{u}_i^e = \begin{bmatrix} N_i^e \\ \vdots \\ N_i^e \end{bmatrix} \cdot \left\{ \overline{u_i^e} \right\} \quad (76)$$

$1 \times M^e \quad M^e \times 1$

Les m variables dépendantes sont incorporées à l'équation (76) en plaçant des éléments nuls dans la matrice N_i^e

$$\bar{u}_i^e = \begin{bmatrix} N_i^e \end{bmatrix} \cdot \{ \bar{q}^e \} \quad (77)$$

$1 \times m \quad m \times 1$

avec:

$$\{ \bar{q}^e \}^T = \left[\bar{u}_{11}^e, \dots, \bar{u}_{1M}^e, \dots, \bar{u}_{m1}^e, \dots, \bar{u}_{mM}^e \right] \quad (78)$$

et:

$$\{ \tilde{q}^e \}^T = [\tilde{u}_1^e, \tilde{u}_2^e, \dots, \tilde{u}_m^e] \quad (79)$$

L'équation (77) s'écrit alors:

$$\{ \tilde{q}^e \} = [N^e] \cdot \{ \bar{q}^e \} \quad (80)$$

$m \times 1 \quad m \times m \quad m \times 1$

en partitionnant, $\{ \bar{q}^e \}$ et $[N^e]$, on obtient, avec la notation de l'équation (77):

$$\{ \tilde{q}^e \} = \begin{bmatrix} [N_1^e] \\ [N_2^e] \\ \vdots \\ [N_m^e] \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{c} q_1^e \\ q_2^e \\ \vdots \\ q_m^e \end{array} \right\} \quad (81)$$

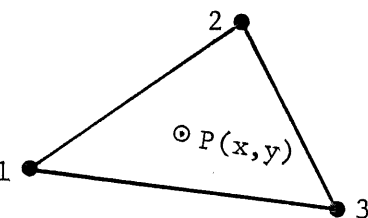


Figure 3-2

Elément triangulaire

Un exemple permettra de mieux comprendre ces différentes étapes.

On considère pour cela deux variables dépendantes u et v et deux variables indépendantes x et y . L'élément est triangulaire, ($M=3$), (figure 3-2). Chaque équation est reprise à l'aide de l'exemple.

$$\text{- équation (75): } \bar{u}^e = N_1^e \bar{u}_1^e + N_2^e \bar{u}_2^e + N_3^e \bar{u}_3^e$$

$$\bar{v}^e = N_1^e \bar{v}_1^e + N_2^e \bar{v}_2^e + N_3^e \bar{v}_3^e$$

$$\text{- équation (76): } \bar{u}^e = [N_1^e \ N_2^e \ N_3^e] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^e \\ \bar{u}_2^e \\ \bar{u}_3^e \end{Bmatrix}$$

$$\bar{v}^e = [N_1^e \ N_2^e \ N_3^e] \begin{Bmatrix} \bar{v}_1^e \\ \bar{v}_2^e \\ \bar{v}_3^e \end{Bmatrix}$$

1x3

3x1

$$\text{- équation (77): } \bar{u}_e = [N_1^e \ N_2^e \ N_3^e \ 0 \ 0 \ 0] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^e \\ \bar{u}_2^e \\ \bar{u}_3^e \\ \bar{v}_1^e \\ \bar{v}_2^e \\ \bar{v}_3^e \end{Bmatrix}$$

$$\bar{v}_e = [0 \ 0 \ 0 \ N_1^e \ N_2^e \ N_3^e] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1^e \\ \bar{u}_2^e \\ \bar{u}_3^e \\ \bar{v}_1^e \\ \bar{v}_2^e \\ \bar{v}_3^e \end{Bmatrix}$$

$$N_{ik}^e(x_{jp}) = \delta_{kp} = \begin{cases} 1 & p \equiv k \\ 0 & p \neq k \end{cases} \quad \forall_i \quad (82)$$

Rappelons que j représente les variables indépendantes, k le numéro du noeud et i les variables dépendantes.

Soit $\{\bar{q}\}$ le vecteur des valeurs aux noeuds \bar{u}_{ip} pour tous les noeuds du système. L'indice i varie de 1 à m et l'indice p de 1 à \bar{n} ; par définition $\{\bar{q}\}$ s'écrit:

$$\{\bar{q}\}_{\bar{m} \times 1} = \left\{ \begin{array}{c} u_{11} \\ \vdots \\ u_{m1} \\ \hline u_{12} \\ \vdots \\ u_{m2} \\ \hline \vdots \\ \hline u_{1\bar{n}} \\ \vdots \\ u_{m\bar{n}} \end{array} \right\} \quad (83)$$

La matrice T^e appelée matrice de localisation, d'incidence ou de connectivité géométrique permet de passer du vecteur global \bar{q} au vecteur des variables pour l'élément e considéré, \bar{q}^e . Cette matrice formée de 1 ou de 0 est telle que:

$$\{\bar{q}^e\}_{mM^e \times 1} = [T^e]_{mM^e \times \bar{m}} \{\bar{q}\}_{\bar{m} \times 1} \quad (84)$$

L'équation (84) est écrite sous forme non partitionnée. Rappelons encore que \bar{m} représente le nombre total de degrés de liberté dans tout le domaine et mM^e représente le nombre de degrés de liberté dans l'élément e . En prenant le cas particulier de deux variables dépendantes et d'un

élément triangulaire, l'équation (84) s'écrit:

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{u}_3 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{Bmatrix} = [T^e] \begin{Bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{v}_1 \\ \bar{u}_2 \\ \bar{v}_2 \\ \vdots \\ \bar{u}_n \\ \bar{v}_n \end{Bmatrix}$$

L'approximation \tilde{u}^e peut donc s'écrire pour le point $P(x,y)$ appartenant à l'élément e , d'après (80) et (84):

$$\begin{matrix} \{\tilde{q}^e\} = [N^e] [T^e] \{\bar{q}\} \\ \text{mx1} \quad \text{mxmM}^e \quad \text{mM}^e \text{xm} \quad \text{m} \times 1 \end{matrix} \quad (85)$$

ou encore:

$$\begin{matrix} \{\tilde{q}^e\} = [N^e] \{\bar{q}\} \\ \text{mx1} \quad \text{mxm} \quad \text{m} \times 1 \end{matrix} \quad (86)$$

avec:

$$\begin{matrix} [N^e] = [N^e] [T^e] \\ \text{mxm} \quad \text{mxmM}^e \quad \text{mM}^e \text{xm} \end{matrix} \quad (87)$$

Tous les éléments de $[N^e]$ doivent être nuls pour un point à l'extérieur de l'élément e et, par conséquent, $\{\tilde{u}^e\}$ sera nul aussi. Ceci permet d'étendre les équations (86) et (87) à tout le domaine:

$$\{\tilde{q}\} = \sum_{e=1}^E [N^e] \{\bar{q}\} = [N] \{\bar{q}\} \quad (88)$$

où:

$$[N] = \sum_{e=1}^E [N^e] \quad (89)$$

3.3.4 Coordonnées locales et éléments isoparamétriques

3.3.4.1 Différents types d'éléments

La méthode des éléments finis est caractérisée par la grande liberté qu'elle offre pour le choix des éléments. Ceux-ci dépendent en tout premier lieu du nombre de variables indépendantes dans le système. Pour notre part, nous utiliserons des éléments pour une ou deux variables indépendantes.

En général, lorsque le problème ne contient qu'une variable indépendante, les éléments sont constitués de segments de droite de différentes longueurs.

Pour des problèmes contenant deux variables indépendantes, les deux éléments les plus utilisés sont le triangle et le quadrilatère.

La forme de chacun de ces éléments est choisie arbitrairement selon l'habileté et l'intuition du concepteur. La plupart du temps, pour des raisons évidentes de simplicité, un maillage ne comporte que des éléments du même type. Cependant, les éléments rectangulaires offrent l'avantage de pouvoir être réduits à une forme triangulaire en confondant deux des sommets. Le nombre de noeuds dans les éléments est quelconque; il dépend des fonctions d'interpolation choisie, (ou vice-versa). Il existe de nombreux ouvrages qui décrivent les différents types d'élément, [ZIENKIEWICZ, 1971], [COOK, 1974], [HUEBNER, 1975], [NORRIE, 1973].

Nous nous contenterons de citer certains types d'éléments en mettant un accent particulier sur les éléments utilisés dans ce travail.

3.3.4.2 Coordonnées locales ou naturelles

Nous avons vu qu'il est préférable d'exprimer les variables dépendantes à l'intérieur d'un élément en terme d'interpolation. Pour ce faire, il est possible d'utiliser un système de coordonnées intrinsèques à la géométrie de l'élément.

a) Coordonnées locales pour une variable indépendante

La figure 3-3 indique un élément rectiligne à deux noeuds. Si L_1 et L_2 sont les coordonnées naturelles au point P fixé, la coordonnée cartésienne x_p s'écrira:

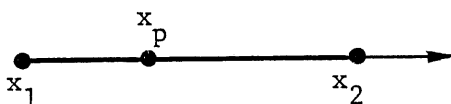


Figure 3-3

Elément rectiligne

$$x_p = L_1 x_1 + L_2 x_2 \quad (90)$$

L_1 et L_2 peuvent être interprétés comme des fonctions de pondération. Un examen rapide de l'équation (90) conduit à poser la contrainte:

$$L_1 + L_2 = 1 \quad (91)$$

Les équations (90) et (91) définissent les coordonnées locales L_1 et L_2 quelque soit le point appartenant au segment $[x_1, x_2]$.

$$L_1 = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \quad ; \quad L_2 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} \quad (92)$$

N'importe quelle variable dépendante s'écrira donc sous la forme approximative:

$$\tilde{u}(x) = L_1(x) \cdot \bar{u}_1 + L_2(x) \cdot \bar{u}_2 \quad (93)$$

b) Coordonnées locales pour deux variables indépendantes

La figure 3-4 indique un élément triangulaire. A_1 , A_2 et A_3 désignent respectivement, les aires des surfaces P23, P13 et P12. On appellera A l'aire totale du triangle. Les coordonnées intrinsèques du triangle peuvent être choisies comme étant les coordonnées barycentriques (comme dans le cas précédent):

$$L_1 = \frac{A_1}{A} \quad , \quad L_2 = \frac{A_2}{A} \quad , \quad L_3 = \frac{A_3}{A} \quad . \quad (94)$$

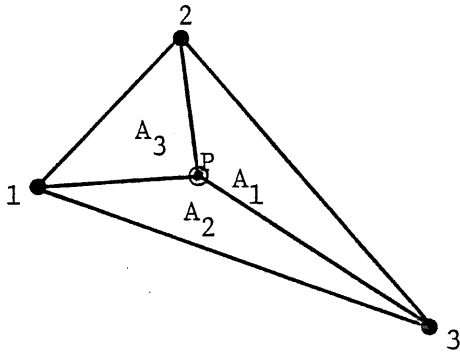


Figure 3-4

Élément triangulaire

On peut vérifier facilement que L_1 , L_2 et L_3 sont bien des fonctions d'interpolation:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{au noeud 1} \quad L_1=1 \quad L_2=0 \quad L_3=0 \\ \text{au noeud 2} \quad L_1=0 \quad L_2=1 \quad L_3=0 \\ \text{au noeud 3} \quad L_1=0 \quad L_2=0 \quad L_3=1 \end{array} \right.$$

Les fonctions d'interpolation L_1 , L_2 et L_3 sont facilement obtenus en fonction de x et y en posant:

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (95)$$

L'approximation, en un point $P(x,y)$ de l'élément e considéré, s'écrira donc:

$$\tilde{u}(x,y) = \sum_{i=1}^3 L_i(x,y) \cdot \bar{u}_i \quad (96)$$

3.3.4.3 Eléments isoparamétriques

Même si la procédure précédente reste simple, on voit qu'il devient nécessaire d'inverser une matrice d'ordre 3. Si, au lieu de poser une approximation linéaire, on décidait de prendre une approximation cubique, on voit que le problème deviendrait rapidement beaucoup plus compliqué.

De manière plus générale, il est possible de créer des éléments de forme quelconque, (voire curviligne), par transformation d'un élément simple, (carré par exemple pour un problème plan), exprimé en coordonnées locales et transformé dans le système de coordonnées cartésiennes (figure 3-4).

Autrement dit, les mêmes fonctions d'interpolation servent à définir les variables dépendantes et indépendantes, [COOK, 1974]. L'élément généré est appelé isoparamétrique si les fonctions f_i sont choisies identiques aux fonctions d'interpolation des variables dépendantes [ERGATOUDIS, 1968].

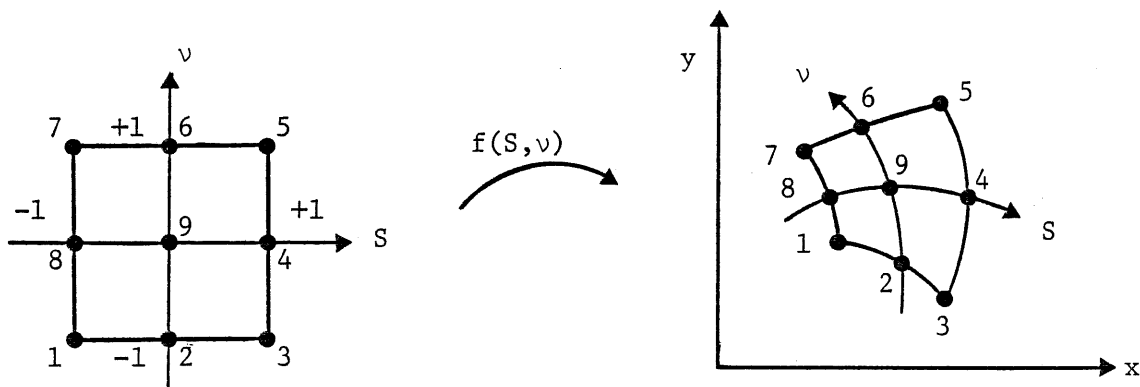


Figure 3-5

Elément isoparamétrique

$$x = \sum_{i=1}^{M^e} f_i(s, \nu) x_i \quad (97)$$

$$y = \sum_{i=1}^{M^e} f_i(s, \nu) y_i \quad (98)$$

Soit encore sous forme matricielle:

$$x^e = [N^e] \begin{Bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_{M^e} \end{Bmatrix} \quad (99)$$

$$y^e = [N^e] \begin{Bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{M^e} \end{Bmatrix} \quad (100)$$

$$\tilde{q}_i^e = [N^e] \left\{ \overline{q}_i^e \right\} \quad (101)$$

Les fonctions d'interpolation ne sont plus dans ce cas des fonctions des coordonnées cartésiennes x et y mais plutôt des coordonnées locales s et ν .

Mentionnons que les éléments subparamétriques sont des éléments où les fonctions d'interpolation retenues pour les changements de coordonnées sont d'un degré inférieur aux fonctions d'interpolation retenues pour les variables dépendantes. Les éléments superparamétriques présentent le cas inverse.

Les éléments plans utilisés dans ce travail sont des éléments isoparamétriques à quatre, huit et neuf points par élément. Ils sont illustrés dans les figures 3-6, 3-7 et 3-8; leurs fonctions d'interpolation apparaîtront juste après ces figures.

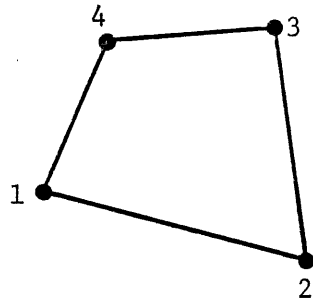


Figure 3-6

Elément à 4 points

$$\begin{aligned} N_1 &= (1-s)(1-v)/4 \\ N_2 &= (1+s)(1-v)/4 \\ N_3 &= (1+s)(1+v)/4 \\ N_4 &= (1-s)(1+v)/4 \end{aligned}$$

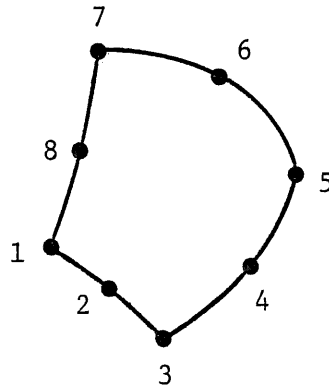


Figure 3-7

Elément à 8 points

$$\begin{aligned} N_1 &= -(1-s)(1-v)(s+v-1)/4 \\ N_2 &= (1-s^2)(1-v)/2 \\ N_3 &= (1+s)(1-v)(s-v-1)/4 \\ N_4 &= (1-v^2)(1+s)/2 \\ N_5 &= (1+s)(1+v)(s+v-1)/4 \\ N_6 &= (1-s^2)(1+v)/2 \\ N_7 &= (1-s)(1+v)(-s+v-1)/4 \\ N_8 &= (1-s)(1-v^2)/2 \end{aligned}$$

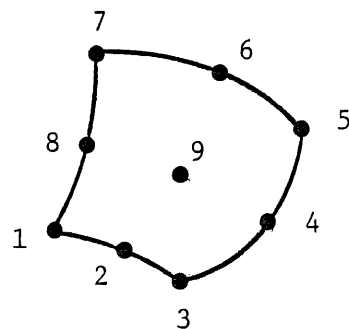


Figure 3-8

Elément à 9 points

$$\begin{aligned} N_1 &= sv(1-s)(1-v)/4 \\ N_2 &= -v(1-v)(1-s^2)/2 \\ N_3 &= -vs(1+s)(1-v)/4 \\ N_4 &= s(1+s)(1-v^2)/2 \\ N_5 &= sv(1+s)(1+v)/4 \\ N_6 &= v(1+v)(1-s^2)/2 \\ N_7 &= -sv(1-s)(1+v)/4 \\ N_8 &= -s(1-s)(1-v^2)/2 \\ N_9 &= (1-s^2)(1-v^2) \end{aligned}$$

Pour l'élément à quatre points l'approximation est linéaire sur les quatre faces de l'élément. Pour les éléments à huit et neuf points l'approximation est quadratique sur les quatre faces.

L'appendice A présente de manière plus complète ces trois éléments. Cette annexe illustre en particulier les problèmes de changement de coordonnées ainsi que les problèmes liés à l'intégration sur chaque élément. Ces difficultés liées à l'intégration seront mieux perçues lorsque les équations différentielles étudiées auront été mises sous forme intégrale.

3.3.5 Assemblage

L'intégration étant effectuée sur chaque élément, les équations doivent être reconstituées sur le domaine complet; c'est le processus d'assemblage que nous étudierons tour à tour par deux approches différentes tirées du livre de NORRIE, [1973]. Dans ce qui suit on se référera aux notations du paragraphe 3.3.3.2.

3.3.5.1 Approche globale

Au paragraphe 3.3.2.2 on a vu que si les conditions frontières sont vérifiées, la résolution du système d'équations différentielles peut être ramenée à la résolution du système intégral:

$$\int_{\Omega} W_i \cdot (L(\tilde{u}) - f) d\Omega = 0 \quad i=1, \dots, N \quad (102)$$

$$\text{avec } R = L(\tilde{u}) - f \quad , \quad (103)$$

le résidu. N représente le nombre de paramètres inconnus à déterminer. Dans le cas où le système différentiel est remplacé par un système de m équations différentielles comportant m variables dépendantes, le système (102) s'exprime par:

$$\int_{\Omega} W_{ji} \cdot (L_j(\tilde{q}) - f_j) d\Omega = 0 \quad \begin{array}{l} i=1, \dots, N \\ j=1, \dots, m \end{array} \quad (104)$$

$$\text{avec } R_j = L_j(\tilde{q}) - f_j, \quad (105)$$

les résidus, $j=1, \dots, m$. $L_j(\tilde{q})$ signifie évidemment $L_j(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_m)$.

Si les fonctions d'approximation utilisées sont des fonctions d'interpolation, le nombre N de paramètres inconnus pour j fixé correspond au nombre de noeuds \bar{n} dans le système. Le système (103) procure donc un nombre identique d'équations et d'inconnues. Si le problème est linéaire, il pourra être placé sous la forme:

$$[K]\{\bar{q}\} + \{f\} = \{0\} \quad (106)$$

La matrice K est souvent appelée matrice de raideur ou matrice de rigidité.

3.3.5.2 Approche locale élément par élément

Comme nous l'avons vu précédemment les équations transformées sous forme intégrale peuvent être décomposées en sommation sur chaque élément:

$$\int_{\Omega} W_{ji} R_j d\Omega = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} W_{ji} R_j d\Omega = 0 \quad \begin{array}{l} i=1, \dots, \bar{n} \\ j=1, \dots, m \end{array} \quad (107)$$

En considérant l'exemple plus particulier de la méthode de Galerkin, l'équation (107) s'écrira:

$$\int_{\Omega} \underline{N_{ji}} R_j d\Omega = \sum_{e=1}^E \int_{\Omega_e} \underline{N_{ji}^e} R_j d\Omega = 0 \quad \begin{array}{l} i=1, \dots, \bar{n} \\ j=1, \dots, m \end{array} \quad (108)$$

Pour l'élément e considéré $\underline{N_{ji}^e} = N_{ji}^e$ puisque tous les éléments de

N_{ip}^e doivent être nuls pour des points extérieurs à l'élément e.

Soit donc:

$$\int_{\Omega} \underbrace{N_{ji}}_{\substack{i=1, \dots, \bar{n} \\ j=1, \dots, m}} R_j d\Omega = \sum_{e=1}^E \underbrace{\int_{\Omega_e} N_{ji}^e R_j}_{\substack{i=1, \dots, M^e \\ j=1, \dots, m}} d\Omega = 0 \quad (109)$$

Pour chaque élément pris séparément, on peut former la fonctionnelle:

$$I_{ji}^e = \int_{\Omega_e} N_{ji}^e R_j d\Omega \quad \begin{cases} j=1, \dots, m \\ i=1, \dots, M^e \end{cases} \quad (110)$$

Les valeurs aux noeuds étant des constantes par rapport à x et y, et les fonctions d'interpolation étant choisies, on peut écrire (110) sous la forme:

$$\{I^e(\bar{q}_e)\} = [k^e] \{\bar{q}^e\} + \{F^e\} \quad (111)$$

$$\begin{matrix} mM^e \times 1 & m\bar{M}^e \times m\bar{M}^e & mM^e \times 1 & mM^e \times 1 \end{matrix}$$

L'équation (111) peut être réécrite sous forme globale en introduisant des éléments nuls correspondant aux éléments de N_{ip} qui sont nuls.

$$\{I^e(\bar{q})\} = [k'_e] \{\bar{q}\} + \{F'_e\} \quad (112)$$

$$\begin{matrix} m\bar{n} \times 1 & m\bar{n} \times m\bar{n} & m\bar{n} \times 1 & m\bar{n} \times 1 \end{matrix}$$

L'équation (108) permet d'écrire:

$$\{I\} = \sum \{I^e(\bar{q})\} = \{0\} \quad (113)$$

Soit sous certaines conditions de linéarité

$$[K] \{\bar{q}\} + \{F\} = \{0\} \quad (114)$$

on retrouve ainsi la matrice de rigidité constante déterminée au paragraphe précédent.

3.3.6 Les conditions aux limites

Jusqu'à présent nous avons éludé le problème des conditions aux limites dans la formulation des éléments finis. Le problème peut être réduit sous la forme:

$$\int_{\Omega} W_{ji} \cdot (L_j(\bar{q}) - f_j^1) d\Omega = 0 \quad \begin{array}{l} i=1, \dots, \bar{n} \\ j=1, \dots, m \end{array} \quad (115)$$

$$\int_{\partial\Omega_1} W_r \cdot (B_r(\bar{q}) - f_r^2) d\sigma = 0 \quad r=1, \dots, p_1 \quad (116)$$

$$\int_{\partial\Omega_2} W_s \cdot (C_r(\bar{q}) - f_r^3) d\sigma = 0 \quad r=1, \dots, p_2 \quad (117)$$

Les équations (116) et (117) expriment les deux types de conditions aux limites principales et rigides déjà distinguées au paragraphe 3.3.2.1. Nous nous retrouvons donc avec un nombre d'équations supérieur au nombre d'inconnues. Nous étudierons tour à tour l'insertion de ces conditions aux limites dans l'intégrale principale (115).

3.3.6.1 Conditions aux limites principales ou naturelles

L'expression (116) pourrait être combinée à l'équation (115) par simple addition des deux intégrales, l'intégrale de contour étant multipliée par une constante λ . Par la suite, l'intégrale sur le domaine peut être intégrée par partie de sorte que les intégrales de contour s'annulent en

partie par ajustement du paramètre λ , [BAKER, 1975],[NORRIE, 1973].

Plus simplement, l'intégrale sur le domaine peut être intégrée par partie pour faire apparaître directement les conditions aux limites "naturellement", [NORRIE, 1973], [HUEBNER, 1975], [ZIENKIEWICZ, 1970]. Ce mécanisme apparaîtra clairement lorsqu'il sera appliqué aux équations de mouvement sur l'eau et à l'équation de continuité sur l'huile. L'intégration par partie possède un autre avantage, elle diminue l'ordre des dérivées partielles permettant ainsi, très souvent, de choisir des fonctions d'interpolation parmi les fonctions de classe C^0 , [HUEBNER, 1975].

Les équations (115) et (116) peuvent donc s'écrire:

$$\int_{\Omega} L(\bar{q}) d + \int_{\partial\Omega} B(\bar{q}) d\sigma = 0 \quad (118)$$

3.3.6.2 Conditions aux limites rigides

L'équation (117) exprime des conditions rigides sur les variables dépendantes. C'est dire que la valeur des variables dépendantes est fixée sur ce type de frontière. Pour simplifier l'exposé nous considérerons le cas où il n'y a qu'une variable dépendante u . Dans ce cas, l'équation (118), nous l'avons vu au paragraphe précédent (3.3.5), s'écrira après l'assemblage sous la forme:

$$[K] \{\bar{q}\} + \{F\} = \{0\} \quad (119)$$

Si le noeud j correspond à une frontière rigide, la variable u_j est fixée. On remplace donc simplement dans ce cas la $j^{\text{ème}}$ ligne du système algébrique (119) par:

$$u_j = u^* \quad (120)$$

En pratique, le coefficient K_{jj} de la matrice K est multiplié par

un nombre arbitrairement grand A, alors que la $j^{\text{ème}}$ composante du vecteur {F} est remplacé par ce même nombre A lui-même multiplié par le produit de K_{jj} et de u^* . On aura:

$$K_{jj} \text{ corrigé} = K_{jj} \cdot A \quad (121)$$

$$F_j \text{ corrigé} = K_{jj} \cdot A \cdot u^* \quad (122)$$

Numériquement les équations (121) et (122) conduisent à un résultat très voisin de l'équation (120) et sont plus faciles à introduire dans le programme du calculateur.

Nous nous sommes donc ramenés à une seule équation intégrale du même type que l'équation (118) comportant autant d'équations que d'inconnues.

Si le problème étudié est non linéaire, la matrice K est fonction des variables dépendantes. Dans ce cas, l'écriture de l'équation (119) n'est pas unique et peut conduire à des équations algébriques différentes. Les solutions peuvent être uniques ou non, (possibilité d'obtenir une solution triviale, par exemple).

3.3.7 Intégration sur le temps

Les équations différentielles ont été traitées jusqu'à présent comme s'il s'agissait de problèmes stationnaires. Les fonctions d'interpolation s'écrivent, d'après (88):

$$\{\tilde{q}(x,y,t)\} = [\underline{N(x,y)}] \{\bar{q}(t)\} \quad (123)$$

Les termes différentiels du type $\frac{\partial \bar{q}}{\partial t}$ deviennent donc des dérivées ordinaires au noeuds, $\frac{d\bar{q}_i(t)}{dt}$. C'est dire que le système algébrique obtenu(119) s'écrira plutôt:

$$A \frac{d\{\bar{q}\}}{dt} + B \{\bar{q}\} + \{C\} = \{0\} \quad (124)$$

C'est donc un système d'équations différentielles ordinaires à intégrer.

On peut encore dans ce cas utiliser une formulation d'éléments finis mais cette fois-ci sur un domaine ouvert. On intègre les équations de t à $t+\Delta t$, (en coordonnées locales de 0 à τ), voir la figure 3-9. Les fonctions d'interpolation s'écrivent:

$$\bar{q}(\tau) = N_t(\tau) \cdot \bar{q}_{t+\Delta t} + N_{t+\Delta t}(\tau) \cdot \bar{q}_t \quad (125)$$

avec

$$N_t(\tau) = \frac{\tau}{\Delta t} \quad \text{et} \quad N_{t+\Delta t} = \frac{\Delta t - \tau}{\Delta t} \quad (126)$$



Figure 3-9

Elément sur le temps

Par la méthode des résidus pondérés, on obtient:

$$\int_0^{\Delta t} W_1 \cdot \left\{ A \left(\frac{q_{t+\Delta t} - q_t}{\Delta t} \right) + B \left[q_{t+\Delta t} \cdot \frac{\tau}{\Delta t} + q_t \cdot \frac{(\Delta t - \tau)}{\Delta t} \right] + \{C\} \right\} d\tau = 0 \quad (127)$$

En choisissant, par exemple, la méthode des sous-domaines, on pose:

$$W_1 = 1 \quad \text{de } t \text{ à } t+\Delta t \quad (128)$$

Si les matrices A et B sont représentées par des valeurs moyennes \bar{A} et \bar{B} sur l'intervalle de temps considéré, on obtient:

$$q_{t+\Delta t} = \left[\bar{A} + \frac{\Delta t}{2} \bar{B} \right]^{-1} \cdot \left[\left(\bar{A} - \frac{\Delta t}{2} \bar{B} \right) \cdot q_t - \int_0^{\Delta t} \{C\} d\tau \right] \quad (129)$$

Cette méthode conduit à une forme très voisine de la formule d'intégration de Crank-Nicolson, [CARNAHAN, 1969], [AMES, 1969], [POTTER, 1973], qui donne une erreur de troncature du second ordre et qui est inconditionnellement stable. L'équation (129) diffère du schéma de Crank-Nicolson dans la mesure où l'on prend l'intégrale de C au lieu d'une valeur moyenne, ce qui semble représenter une meilleure approximation. WEBER [1969], d'une part, et DONEA [1974], d'autre part, effectuent une analyse de la méthode de Crank-Nicolson. Ils notent dans les deux cas que la méthode de Crank-Nicolson semble moins précise pour des temps voisins de l'origine des temps et qu'elle génère alors des oscillations. WEBER [1969] recommande en conséquence de choisir un incrément très faible sur le temps pour les premiers pas puis de l'augmenter progressivement lorsque l'on s'éloigne de l'origine.

Remarques:

- a) L'intervalle de temps Δt peut être modifié sans aucune difficulté au cours du temps.
- b) L'équation (129) découle de l'application de la méthode des éléments finis. Cette forme n'est évidemment pas unique puisque W_1 , équation (127), peut prendre de nombreuses formes. La méthode de Galerkin aurait pu être choisie, par exemple. DONEA [1974] montre que cette dernière méthode est préférable pour des intervalles de temps proche de l'origine des temps à la méthode de Crank-Nicolson. Cependant, par la suite, la méthode de Galerkin ne possède plus les avantages de celle de Crank-Nicolson, (erreur de troncature du deuxième ordre). Nous suivrons WEBER [1969] en prenant un intervalle de temps très petit au départ puis en l'augmentant peu à peu de manière automatique limitant ainsi les oscillations dues à la méthode de Crank-Nicolson. La convergence est vérifiée en passant à un intervalle de temps plus petit, (ne retenant, actuellement, que la convergence sur le temps).

La méthode des moindres carrés représente une alternative intéressante pour l'intégration sur le temps à l'intérieur de la méthode des résidus pondérés. Elle possède comme avantage certain de conduire à des matrices symétriques dans tous les cas. L'expression obtenue est, cependant, beaucoup plus compliquée.

c) La résolution du système différentiel ordinaire en fonction du temps, équation (124), peut être effectuée par l'intermédiaire des transformées de Laplace. Le système doit évidemment se présenter sous forme linéaire ou être linéarisé, [HOLZLOHNER, 1974], [WARZEE, 1974]. Ces deux auteurs présentent des algorithmes d'inversion numérique.

d) L'intégration sur le temps peut être abordée tout à fait différemment. Le système (124) est écrit sous la forme:

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = -A^{-1} \cdot [B\{\bar{q}\} + \{C\}] \quad (130)$$

Soit encore:

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = f(\bar{q}, t) \quad (131)$$

Le système d'équations (131) peut être intégré directement qu'il soit linéaire ou non. TAYLOR [1975] intègre ainsi les équations régissant les écoulements à surface libre; il effectue, alors, une comparaison entre plusieurs schémas d'intégration et déduit qu'un schéma trapézoïdale simple est préférable.

Certains auteurs, [WILSON, 1974], préconisent d'approximer la matrice A, ("Lumping"), pour la rendre diagonale.

3.3.8 Convergence et Stabilité

Nous nous limiterons dans cette section à des notions plus intuitives que précises. Les théorèmes de convergence et de limite sont rares et se limitent, en général, aux problèmes auto-adjoints ou linéaires. Le livre d'ODEN, [1972], fournit, par exemple, une approche plus mathématique pour des problèmes de ce type. On pourra se référer également aux articles de CIARLET, [1972], [1973].

Nous commencerons par rappeler quelques définitions.

3.3.8.1 Définitions

a) La stabilité réfère à la croissance sans limite d'une erreur au fur et à mesure des calculs de sorte que rapidement la solution est masquée par l'erreur.

b) La convergence est appliquée aux processus itératifs où d'une étape à l'autre la différence entre les deux résultats est toujours plus faible. La convergence peut référer également à l'utilisation d'un maillage de plus en plus fin conduisant vers une solution donnée; c'est cette approche que nous considérerons brièvement, plus loin, dans ce paragraphe.

c) La précision réfère à l'écart existant entre la solution obtenue et la solution exacte.

d) Si, pour une variable donnée, la dérivée la plus élevée apparaissant sous le signe intégral est d'ordre t , les dérivées d'ordre 1 à $t-1$ sont appelées dérivées principales.

3.3.8.2 Les causes d'erreur

Il est important tant au niveau de la convergence que de la stabilité de connaître les différentes sources d'erreurs dans le programme de calculateur utilisé; on trouvera au chapitre 5 une description détaillée de ce programme.

a) Les erreurs de calcul réfèrent aux erreurs provenant directement des calculs; elles sont de trois ordres.

. Les erreurs de troncature proviennent du nombre de chiffres significatifs retenus par l'ordinateur. Le travail présent est effectué sur IBM 360/65 en double précision, (16 chiffres significatifs).

. La résolution algébrique, linéaire ou non, est effectuée avec plus ou moins de raffinement.

. L'intégration sur chaque élément est effectuée par la méthode de Gauss, voir le chapitre 5, avec une précision donnée.

b) D'autres erreurs proviennent de la définition approximative, par essence, des fonctions d'interpolation.

. Le nombre de termes retenus est toujours limité.

. Les frontières peuvent être représentées plus ou moins bien par les fonctions d'interpolation.

3.3.8.3 Quelques critères

a) Les conditions de stabilité sont difficiles à cerner. Une raison essentielle réside dans le fait que l'analyse de Fourier, où la solution proposée se présente sous la forme d'une série de Fourier, ne s'applique qu'à des systèmes linéaires ou linéarisés. Dans ce dernier cas, lorsque le système est linéarisé, on obtient uniquement des conditions locales, [POTTER, 1973]; les conditions de stabilité obtenues varient dans l'espace et le temps. Une seconde difficulté provient de ce que le maillage retenu pour des éléments finis est quelconque, alors que dans les analyses de stabilité classiques le maillage retenu est constant dans l'espace et dans le temps permettant de grandes simplifications. La méthode des éléments finis, cependant, est une méthode implicite et de façon générale les schémas implicites sont

plus stables que les schémas explicites, [CARNAHAN, 1969]. Effectivement, peu d'auteurs se préoccupent des conditions de stabilité dans l'utilisation de la méthode des éléments finis, excepté dans le cas où le temps est discrétisé selon un schéma explicite.

b) NORRIE,[1973], présente, sans démonstration, deux critères qui sont ensemble nécessaires et suffisants pour assurer la convergence d'une méthode d'éléments finis quelconque, (formulation variationnelle ou résiduelle).

Critère I: L'approximation, à l'intérieur de l'élément, de la variable, (et de sa ou ses dérivées), sous le signe intégral, doit pouvoir représenter n'importe quelle fonction continue quand la taille de l'élément tend vers zéro.

Critère II: L'approximation de la variable, (et de sa ou ses dérivées), doit tendre continûment vers la solution exacte, à travers les frontières inter-éléments, quand la taille de l'élément tend vers zéro.

Ces deux critères, toujours selon NORRIE [1973], peuvent être restreints pour donner deux critères (I' et II') suffisants pour assurer la convergence. L'auteur fait remarquer que le premier critère restreint (I'), à lui seul, fournit une condition suffisante de convergence.

Critère I': A l'intérieur de chaque élément, les variables et leurs dérivées sont représentées par un ensemble complet de fonctions.

Critère II': Les fonctions d'approximation et leurs dérivées principales sont continues.

Ce dernier Critère (II') est souvent appelé la "condition de compatibilité"; dans ce cas l'élément est dit conforme.

Remarques:

a) NORRIE [1973] fait remarquer que pour un maillage trop large, l'approximation du phénomène physique devient insuffisante. Dans ce cas une solution instable, aucune solution ou des solutions multiples peuvent être obtenues. Cependant, il existe un maillage critique au-delà duquel la solution devient stable et converge vers une solution unique. Ceci suppose, évidemment, que le modèle mathématique représente correctement la réalité physique.

b) HUEBNER [1975] remarque que les preuves mathématiques de convergence reposent sur un raffinement cohérent du maillage possédant les caractéristiques suivantes:

- . lorsque les éléments sont découpés plus finement, chaque point du domaine doit appartenir à un élément quelque soit la taille de l'élément,

- . tous les éléments du maillage préalable doivent être contenus dans le maillage raffiné,

- . la forme des fonctions d'interpolation doit rester inchangée au cours de ces raffinements successifs.

HUEBNER [1975] note que les deux premières conditions sont impossibles à respecter à l'aide d'éléments dont les côtés sont rectilignes lorsque les frontières sont courbes. Des preuves rigoureuses de convergence ne peuvent donc être obtenues dans ce cas à l'aide d'éléments dont les côtés seraient rectilignes.

c) Dans certains cas, le choix d'éléments non compatibles a permis d'obtenir une convergence plus rapide qu'avec des éléments compatibles [CLOUGH, 1965], [ZIENKIEWICZ, 1971].

d) Les critères de convergence posés imposent implicitement des conditions de régularité sur les variables.

3.4 Mise sous forme intégrale des équations étudiées

Les équations étudiées ont été décrites au chapitre 2 avec leurs conditions aux limites. Dans (cette section), ces équations sont placées sous forme intégrale et les conditions aux limites sont introduites, (paragraphe 3.3.6). Les équations intégrales résultantes sont alors remplacées par une sommation d'intégrales sur tous les éléments finis du domaine. Le résultat, enfin, est mis sous forme matricielle compacte.

3.4.1 Dispersion de l'huile

3.4.1.1 Mise sous forme intégrale

L'équation décrivant la dispersion d'une nappe d'huile a été établie au chapitre 2; l'équation (10) de ce chapitre devient en utilisant la formulation de Galerkin:

$$\int_S N_i \cdot \left\{ \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial(uD)}{\partial x} + \frac{\partial(vD)}{\partial y} + kD \right\} dS - \int_S N_i \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial D}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_y \frac{\partial D}{\partial y} \right) \right\} dS =$$

$$\int_S N_i \cdot M \cdot \delta(x-x_0) \cdot \delta(y-y_0) \cdot \delta(t-t_0) dS$$

$$i=1, \dots, n \quad (132)$$

Le terme du deuxième ordre sous le signe intégral peut être réduit tout en faisant apparaître les conditions aux limites. En notant que:

$$\int_S N_i \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial D}{\partial x} \right) dS = \int_S \frac{\partial}{\partial x} \left(N_i K_x \frac{\partial D}{\partial x} \right) dS - \int_S K_x \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} dS \quad (133)$$

$$i=1, \dots, n$$

l'équation (132) devient:

$$\int_S N_i \cdot \left\{ \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial(uD)}{\partial x} + \frac{\partial(vD)}{\partial y} + kD \right\} dS + \int_S \left\{ K_x \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + K_y \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} dS$$

$$- \int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(N_i K_x \frac{\partial D}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_i K_y \frac{\partial D}{\partial y} \right) \right\} dS = \int_S M \cdot N_i \cdot \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(t-t_0) dS$$

$i=1, \dots, n$ (134)

Le théorème de Green

$$\int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (f) + \frac{\partial}{\partial y} (g) \right\} dS = \oint_C (n_1 f + n_2 g) dC \quad (135)$$

où n_1 et n_2 représentent les composantes de la normale au contour, s'applique au dernier terme à gauche de l'égalité. Par ailleurs, le terme à droite de l'égalité peut s'écrire, par définition des fonctions de Dirac, (équation (9), chapitre 2):

$$\int_S M N_i \delta(x-x_0) \delta(y-y_0) \delta(t-t_0) dS = M \cdot N_i \Big|_{x_0, y_0} \cdot \delta(t-t_0)$$

$i=1, \dots, n$ (136)

L'équation (134) devient donc:

$$\int_S N_i \cdot \left[\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial(uD)}{\partial x} + \frac{\partial(vD)}{\partial y} \right] + kD + \left[K_x \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + K_y \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] dS$$

$$- \oint_C N_i \cdot \left[n_1 K_x \frac{\partial D}{\partial x} + n_2 K_y \frac{\partial D}{\partial y} \right] \cdot dC = M \cdot N_i \Big|_{x_0, y_0} \cdot \delta(t-t_0)$$

$i=1, \dots, n$ (137)

L'équation (137) présente le double avantage sur la forme (132) de faire apparaître les conditions aux limites tout en diminuant l'ordre des dérivées partielles. En tenant compte des conditions aux limites, (équation (20), chapitre 2), l'équation (137) devient:

$$\int_S \left\{ N_i \cdot \left[\frac{\partial D}{\partial t} + \frac{\partial(uD)}{\partial x} + \frac{\partial(vD)}{\partial y} + kD \right] + \left[K_x \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + K_y \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \right\} dS$$

$$- \oint_C N_i \cdot D \cdot (n_1 u + n_2 v) dC = M \cdot N_i \Big|_{x_0, y_0} \cdot \delta(t - t_0) \quad i=1, \dots, n \quad (138)$$

L'équation (138) a été utilisée telle quelle dans la majorité de nos travaux. Cependant, il faut noter que l'équation (138) peut être encore transformée. En effet, le terme suivant peut s'écrire:

$$\int_S N_i \cdot \left\{ \frac{\partial(uD)}{\partial x} + \frac{\partial(vD)}{\partial y} \right\} dS = \int_S \left\{ \frac{\partial(N_i u D)}{\partial x} + \frac{\partial(N_i v D)}{\partial y} \right\} dS$$

$$- \int_S \left\{ u D \frac{\partial N_i}{\partial x} + v D \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} dS \quad (139)$$

$i=1, \dots, n$

Encore une fois le théorème de Green permet d'écrire:

$$\int_S N_i \cdot \left\{ \frac{\partial(uD)}{\partial x} + \frac{\partial(vD)}{\partial y} \right\} \cdot dS = \oint_C N_i \cdot D(n_1 u + n_2 v) dC$$

$$- \int_S \left\{ u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} dS \quad (140)$$

L'équation (138) devient, en remarquant que les termes de contour

se simplifient:

$$\int_S \left\{ N_i \cdot \left[\frac{\partial D}{\partial t} + kD \right] - D \cdot \left[u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] + \left[K_x \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + K_y \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \right\} dS =$$

$$M.N_i \Big|_{x_0, y_0} \cdot \delta(t-t_0) \quad (141)$$

$i=1, \dots, n$

Les conditions aux limites sur une frontière réfléchissante, (équation (20), chapitre 2), sont donc incluses implicitement dans l'équation (141). Par la suite, nous développerons la notation d'éléments finis à partir des deux formes (138) et (141), les deux équations ayant été utilisées dans nos travaux.

3.4.1.2 Notation d'éléments finis

L'intégrale de surface est découpée en une sommation sur les différents éléments constituant le domaine. L'intégrale de contour, s'il y a lieu, est calculée puis assemblée pour chaque élément en notant que les intégrales de contour inter-éléments s'annulent.

Par ailleurs, les fonctions d'approximation suivantes sont introduites sur l'élément e :

$$\tilde{D}^e = \sum_{j=1}^m D_j^e(t) \cdot N_j^e(s, v) \quad (142)$$

$$\tilde{u}^e = \sum_{j=1}^m u_j^e(t) \cdot N_j^e(s, v) \quad (143)$$

$$\tilde{v}^e = \sum_{j=1}^m v_j^e(t) \cdot N_j^e(s, v) \quad (144)$$

m indique le nombre de sommets de l'élément e et D_j, u_j et v_j indiquent les valeurs de D, u et v aux sommets. Les paramètres k, K_x et K_y sont gardés constants; il serait, bien évidemment, très facile de les faire varier si une connaissance plus précise de ces coefficients l'exigeait. s et v indiquent les coordonnées d'un point quelconque de l'élément e considéré dans le système d'axe local. L'intégration est effectuée localement dans ce système d'axe. L'appendice A indique de quelle façon, les termes $\frac{\partial N_i}{\partial x}$ et $\frac{\partial N_i}{\partial y}$, qui sont eux-mêmes fonctions de s et v, sont déterminés. Les valeurs aux noeuds du domaine u_j, v_j et D_j dépendent du temps, (voir l'équation (34)). Dans les équations (138) et (141), l'indice i de N_i varie de 1 à n. En fait sur l'élément e considéré l'indice de la fonction $N_i^e = N_i$ varie de 1 à m, les autres valeurs étant nulles, (section 3.3.3).

Les équations (138) et (141) deviennent, respectivement, sous forme matricielle:

$$\left. \begin{aligned}
 \sum_{e=1}^E \left\{ \left[\int_{S_e} N_i^e N_j^e dS \right] \frac{d}{dt} \{D_e\} + \left[\int_{S_e} N_i^e \left(\frac{\partial (\tilde{u} N_j^e)}{\partial x} + \frac{\partial (\tilde{v} N_j^e)}{\partial y} \right) dS \right] \cdot \{D_e\} \right. \\
 + k \left[\int_{S_e} N_i^e N_j^e dS \right] \cdot \{D_e\} + \left[\int_{S_e} \left(K_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + K_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dS \right] \cdot \{D_e\} \\
 \left. - \left[\oint_{C_e} N_i^e N_j^e \cdot (n_1 \tilde{u} + n_2 \tilde{v}) dC \right] \cdot \{D_e\} \right\} = \left\{ M \cdot N_i^e \Big|_{x_0, y_0} \cdot \delta(t-t_0) \right\} \quad (145)
 \end{aligned} \right.$$

$i=1, \dots, m$
 $j=1, \dots, m$

et:

$$\begin{aligned}
 \sum_{e=1}^E \left\{ \left[\int_{S_e} N_i^e N_j^e dS \right] \frac{d}{dt} \{D_e\} - \left[\int_{S_e} N_j^e \cdot \left(\tilde{u} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \tilde{v} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) dS \right] \cdot \{D_e\} \right. \\
 \left. + k \left[\int_{S_e} N_i^e N_j^e dS \right] \cdot \{D_e\} + \left[\int_{S_e} \left(K_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + K_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dS \right] \cdot \{D_e\} = \right. \\
 \left. \left\{ M \cdot N_i^e \Big|_{x_0, y_0} \cdot \delta(t-t_0) \right\} \right. \quad (146) \\
 \left. \begin{array}{l} i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, m \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

Les expressions entre crochets indiquent des matrices d'ordre $m \times m$, (i varie de 1 à m et j de 1 à m). $\{D_e\}$ est le vecteur des noeuds de l'élément e .

Posons les notations suivantes:

$$AM = \sum_{e=1}^E AM^e = \sum_{e=1}^E \left[\int_{S_e} N_i^e N_j^e dS \right] \quad (147)$$

$$AK11 = \sum_{e=1}^E AK11^e = \sum_{e=1}^E \left[\int_{S_e} N_i^e \cdot \left(\frac{\partial (\tilde{u} N_j^e)}{\partial x} + \frac{\partial (\tilde{v} N_j^e)}{\partial y} \right) dS \right] \quad (148)$$

$$AK22 = \sum_{e=1}^E AK22^e = \sum_{e=1}^E \left[\int_{S_e} K_x \left(\frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_j^e}{\partial x} + K_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dS \right] \quad (149)$$

$$AK33 = \sum_{e=1}^E AK33^e = \sum_{e=1}^E \left[\int_{S_e} N_j^e \cdot \left(\ddot{u} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + \ddot{v} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dS \right] \quad (150)$$

$$AF = \sum_{e=1}^E AF^e = \sum_{e=1}^E \left[\oint_{C_e} N_i^e N_j^e \cdot (n_1 \ddot{u} + n_2 \ddot{v}) dC \right] \quad (151)$$

AM indique une matrice d'ordre n ainsi que AM^e mais pour laquelle on ne retient que la partie non nulle, (sous-matrice mxm), (n représente le nombre de sommets dans tout le domaine et m le nombre de sommets dans l'élément e). Il en va de même pour AK11, AK22, AK33 et AF. En fait, AM représente les matrices AM^e assemblées. Les équations (145) et (146) peuvent être écrites à nouveau, après assemblage:

$$AM \frac{d\{D\}}{dt} + (AK11 + AK22 + k \cdot AM - AF) \cdot \{D\} - M \cdot N_i \Big|_{x_0, y_0} \cdot \delta(t - t_0) = 0 \quad (152)$$

$$AM \frac{d\{D\}}{dt} + (AK22 - AK33 + k \cdot AM) \cdot \{D\} - M \cdot N_i \Big|_{x_0, y_0} \cdot \delta(t - t_0) = 0 \quad (153)$$

Le vecteur $\{D\}$ représente, cette fois, les valeurs inconnues de D aux n sommets du domaine.

3.4.1.3 Intégration sur le temps

Les équations (152) et (153) sont analogues à l'équation (124), la solution de ces équations sera donc conforme à l'équation (129). Si on pose, pour simplifier:

$$B_1 = AK11 + AK22 + k \cdot AM - AF \quad (154)$$

$$B_2 = AK22 - AK33 + k \cdot AM \quad (155)$$

Ceci conduit pour chaque équation, (152) et (153), à :

$$\{D\}_{t+\Delta t} = \left[\overline{AM} + \frac{\Delta t}{2} \overline{B}_1 \right]^{-1} \cdot \left[\left(\overline{AM} - \frac{\Delta t}{2} \overline{B}_1 \right) \cdot \{D\}_t + \int_0^{\Delta t} \left\{ M.N_i \Big|_{x_o, y_o} \cdot \delta(\tau - t_o) \right\} d\tau \right] \quad (156)$$

et

$$\{D\}_{t+\Delta t} = \left[\overline{AM} + \frac{\Delta t}{2} \overline{B}_2 \right]^{-1} \cdot \left[\left(\overline{AM} - \frac{\Delta t}{2} \overline{B}_2 \right) \cdot \{D\}_t + \int_0^{\Delta t} \left\{ M.N_i \Big|_{x_o, y_o} \cdot \delta(\tau - t_o) \right\} d\tau \right] \quad (157)$$

La barre sur AM, B_1 et B_2 indique qu'il s'agit d'une moyenne entre la valeur de la matrice au temps t et la valeur de la matrice au temps $t+\Delta t$. En fait seules les valeurs de \tilde{u} et \tilde{v} varient avec le temps. Comme ces valeurs interviennent linéairement, il est équivalent et, beaucoup plus simple, de choisir des valeurs moyennes pour \tilde{u} et \tilde{v} . Notons que :

$$\int_0^{\Delta t} \left\{ M.N_i \Big|_{x_o, y_o} \cdot \delta(\tau - t_o) \right\} d\tau = \left\{ M.N_i \Big|_{x_o, y_o} \right\}_{t_o} \quad (158)$$

Les équations (156) et (157) peuvent donc s'écrire encore :

$$\{D\}_{t+\Delta t} = \left[\overline{AM} + \frac{\Delta t}{2} \overline{B}_1 \right]^{-1} \cdot \left[\left(\overline{AM} - \frac{\Delta t}{2} \overline{B}_1 \right) \cdot \{D\}_t + \left\{ M.N_i \Big|_{x_o, y_o} \right\}_{t_o} \right] \quad (159)$$

et

$$\{D\}_{t+\Delta t} = \left[\overline{AM} + \frac{\Delta t}{2} \overline{B}_2 \right]^{-1} \cdot \left[\left(\overline{AM} - \frac{\Delta t}{2} \overline{B}_2 \right) \cdot \{D\}_t + \left\{ M.N_i \Big|_{x_o, y_o} \right\}_{t_o} \right] \quad (160)$$

3.4.2 Ecoulement à surface libre

3.4.2.1 Mise sous forme intégrale

La méthode reste la même que dans le paragraphe précédent. Elle est appliquée dans ce cas à un système d'équations, (équations (120), (121) et (122) du chapitre 2). Ces équations deviennent par application de la méthode de Galerkin:

$$\int_S N_i \cdot \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{u \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 R_h} + g \frac{\partial(a+h)}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_o}{\partial x} - \Omega v + \lambda \frac{W_x W}{(a+h-b)} \right\} dS = 0 \quad i=1, \dots, n \quad (161)$$

$$\int_S N_i \cdot \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{v \sqrt{u^2 + v^2}}{C^2 R_h} + g \frac{\partial(a+h)}{\partial y} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_o}{\partial y} + \Omega u + \lambda \frac{W_y W}{(a+h-b)} \right\} dS = 0 \quad i=1, \dots, n \quad (162)$$

$$\int_S N_i \cdot \left\{ \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial[u(a+h-b)]}{\partial x} + \frac{\partial[v(a+h-b)]}{\partial y} - (r-i) \right\} dS = 0 \quad i=1, \dots, n \quad (163)$$

Le domaine comporte n noeuds. Les termes en $\frac{\partial}{\partial x}$ et $\frac{\partial}{\partial y}$ dans les équations précédentes peuvent être transformés de la façon suivante:

$$\int_S N_i \cdot \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right\} dS = \int_S \left\{ \frac{\partial(u^2 N_i)}{\partial x} + \frac{\partial(uv N_i)}{\partial y} \right\} dS - \int_S u \left\{ \frac{\partial(u N_i)}{\partial x} + \frac{\partial(v N_i)}{\partial y} \right\} dS \quad (164)$$

$$\int_S N_i \cdot \left\{ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dS = \int_S \left\{ \frac{\partial(uv N_i)}{\partial x} + \frac{\partial(v^2 N_i)}{\partial y} \right\} dS - \int_S v \left\{ \frac{\partial(u N_i)}{\partial x} + \frac{\partial(v N_i)}{\partial y} \right\} dS \quad (165)$$

$$\int_S N_i \cdot \left\{ \frac{\partial [u(a+h-b)]}{\partial x} + \frac{\partial [v(a+h-b)]}{\partial y} \right\} dS = \int_S \left\{ \frac{\partial [uN_i(a+h-b)]}{\partial x} + \frac{\partial [vN_i(a+h-b)]}{\partial y} \right\} dS - \int_S (a+h-b) \left\{ u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} dS \quad (166)$$

Les expressions (164), (165) et (166) peuvent encore s'écrire, par application du théorème de Green:

$$\int_S N_i \cdot \left\{ u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right\} dS = \oint_C u N_i \cdot (un_1 + vn_2) dC - \int_S u \cdot \left\{ \frac{\partial (uN_i)}{\partial x} + \frac{\partial (vN_i)}{\partial y} \right\} dS \quad (167)$$

$$\int_S N_i \cdot \left\{ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right\} dS = \oint_C v N_i \cdot (un_1 + vn_2) dC - \int_S v \cdot \left\{ \frac{\partial (uN_i)}{\partial x} + \frac{\partial (vN_i)}{\partial y} \right\} dS \quad (168)$$

$$\int_S N_i \cdot \left\{ \frac{\partial [u(a+h-b)]}{\partial x} + \frac{\partial [v(a+h-b)]}{\partial y} \right\} dS = \oint_C N_i (a+h-b) \cdot (un_1 + vn_2) dC - \int_S (a+h-b) \cdot \left\{ u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} dS \quad (169)$$

Les expressions (167), (168) et (169) sont reportées dans les équations (161), (162) et (163).

On obtient:

$$\int_S \left\{ N_i \frac{\partial u}{\partial t} - u \left[\frac{\partial (uN_i)}{\partial x} + \frac{\partial (vN_i)}{\partial y} \right] + gN_i \frac{u\sqrt{u^2+v^2}}{C^2 R_h} + gN_i \frac{\partial (a+h)}{\partial x} + \frac{N_i}{\rho} \frac{\partial p_o}{\partial x} - N_i \Omega v + \lambda N_i \frac{W_x W}{(a+h-b)} \right\} dS + \oint_C u N_i \cdot (un_1 + vn_2) dC = 0$$

$i=1, \dots, n \quad (170)$

$$\int_S \left\{ N_i \frac{\partial u}{\partial t} - v \left[\frac{\partial (uN_i)}{\partial x} + \frac{\partial (vN_i)}{\partial y} \right] + gN_i \frac{v\sqrt{u^2+v^2}}{C^2 R_h} + gN_i \frac{\partial (a+h)}{\partial y} + \frac{N_i}{\rho} \frac{\partial p_o}{\partial y} + N_i \Omega u + \lambda N_i \frac{W_x W}{(a+h-b)} \right\} dS + \int_C v N_i \cdot (u_{n_1} + v_{n_2}) dC = 0$$

$i=1, \dots, n$ (171)

$$\int_S \left\{ N_i \frac{\partial h}{\partial t} - N_i (r-i) - (a+h-b) \cdot \left[u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \right\} dS + \int_C N_i (a+h-b) \cdot (u_{n_1} + v_{n_2}) dC$$

$i=1, \dots, n$ (172)

a et b ne sont pas des fonctions du temps. On posera, quand nécessaire:

$$H = a + h - b \tag{173}$$

3.4.2.2 Notation d'éléments finis et forme matricielle

Chaque variable connue ou inconnue est discrétisée comme précédemment:

$$\tilde{q} = \sum_{j=1}^m q_j(t) \cdot N_j(s, v) \tag{174}$$

Le système (170), (171) et (172) peut s'écrire, sous forme matricielle, (le système comporte $3 \times n$ équations, mais comme précédemment pour $N_i^e = N_i$ l'indice varie de 1 à m):

$$\begin{aligned}
\sum_{e=1}^E \left\{ \left[\int_{S_e} N_i^e N_j^e dS \right] \frac{d}{dt} \{u^e\} + \left[- \int_{S_e} N_j^e \left\{ \frac{\partial(\tilde{u}N_i^e)}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}N_i^e)}{\partial y} - gN_i^e \cdot \frac{\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{C^2 R_h} \right\} dS + \oint_{C_e} N_i^e N_j^e (\tilde{u}n_1 + \tilde{v}n_2) dC \right] \{u^e\} \right. \\
+ \left[- \int_{S_e} N_i^e N_j^e \tilde{\Omega} dS \right] \{v^e\} + \left[\int_{S_e} gN_i^e \frac{\partial N_j^e}{\partial x} dS \right] \{h^e\} + \left[\int_{S_e} gN_i^e \frac{\partial N_j^e}{\partial x} dS \right] \cdot \left\{ \left(a + \frac{p_0}{\rho g} \right)^e \right\} \\
+ \left. \left[\int_{S_e} N_i^e N_j^e dS \right] \cdot \left\{ \lambda \frac{W_x^e \tilde{W}}{\tilde{H}} \right\} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{175}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{e=1}^E \left\{ \left[\int_{S_e} N_i^e N_j^e dS \right] \frac{d}{dt} \{v^e\} + \left[\int_{S_e} \tilde{\Omega} N_i^e N_j^e dS \right] \{u^e\} + \left[- \int_{S_e} N_j^e \left\{ \frac{\partial(\tilde{u}N_i^e)}{\partial x} + \frac{\partial(\tilde{v}N_i^e)}{\partial y} - gN_i^e \frac{\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{C^2 R_h} \right\} dS \right. \right. \\
+ \left. \left. \oint_{C_e} N_i^e N_j^e (\tilde{u}n_1 + \tilde{v}n_2) dC \right] \{v^e\} + \left[\int_{S_e} gN_i^e \frac{\partial N_j^e}{\partial y} dS \right] \{h^e\} + \left[\int_{S_e} gN_i^e \frac{\partial N_j^e}{\partial y} dS \right] \cdot \left\{ \left(a + \frac{p_0}{\rho g} \right)^e \right\} \right. \\
+ \left. \left[\int_{S_e} N_i^e N_j^e dS \right] \cdot \left\{ \lambda \frac{W_y^e \tilde{W}}{\tilde{H}} \right\} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{176}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{e=1}^E \left\{ \left[\int_{S_e} N_i^e N_j^e dS \right] \frac{d}{dt} \{h^e\} - \left[\int_{S_e} \tilde{H}^e N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} dS \right] \{u^e\} - \left[\int_{S_e} \tilde{H}^e N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} dS \right] \{v^e\} + \left[\oint_{C_e} N_i^e N_j^e \cdot (\tilde{u}n_1 + \tilde{v}n_2) dC \right] \{h^e\} \right. \\
& \left. + \left[\oint_{C_e} N_i^e N_j^e \cdot (\tilde{u}n_1 + \tilde{v}n_2) dC \right] \{(a-b)^e\} - \left[\int_{S_e} N_i^e N_j^e dS \right] \{(r-i)^e\} \right\} = 0 \quad (177)
\end{aligned}$$

Les notations suivantes sont introduites:

$$AM = \sum_{e=1}^E AM^e = \sum_{e=1}^E \left[\int_{S_e} N_i^e N_j^e dS \right] \quad (178)$$

$$AK11 = \sum_{e=1}^E AK11^e = \sum_{e=1}^E \left[- \int_{S_e} N_j^e \cdot \left\{ \frac{\partial (\tilde{u}N_i^e)}{\partial x} + \frac{\partial (\tilde{v}N_i^e)}{\partial y} - g_{N_i}^e \frac{\sqrt{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}}{C^2 R_h} \right\} dS \right] \quad (179)$$

$$AK21 = \sum_{e=1}^E AK21^e = \sum_{e=1}^E \left[\int_{S_e} \tilde{\Omega} N_i^e N_j^e dS \right] \quad (180)$$

$$AK12 = - AK21$$

$$AK13 = \sum_{e=1}^E AK13^e = \sum_{e=1}^E \left[\int_{S_e} g N_i^e \frac{\partial N_j^e}{\partial x} dS \right] \quad (181)$$

$$AK23 = \sum_{e=1}^E AK23^e = \sum_{e=1}^E \left[\int_{S_e} g N_i^e \frac{\partial N_j^e}{\partial y} dS \right] \quad (182)$$

$$AK31 = \sum_{e=1}^E AK31^e = \sum_{e=1}^E \left[- \int_{S_e} \tilde{H}^e N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial x} dS \right] \quad (183)$$

$$AK32 = \sum_{e=1}^E AK32^e = \sum_{e=1}^E \left[- \int_{S_e} \tilde{H}^e N_j^e \frac{\partial N_i^e}{\partial y} dS \right] \quad (184)$$

$$AF = \sum_{e=1}^E AF^e = \sum_{e=1}^E \left[\oint_{C_e} N_i^e N_j^e \cdot (\tilde{u}_{n_1} + \tilde{v}_{n_2}) dC \right] \quad (185)$$

Les équations (175), (176) et (177) s'écriront donc plus simplement :

$$AM \frac{d\{u\}}{dt} + (AK11+AF) \cdot \{u\} - AK21 \cdot \{v\} + AK13 \cdot \{h\} + AK13 \cdot \left\{ a + \frac{P_0}{\rho g} \right\} + AM \left\{ \frac{\lambda W \tilde{W}}{H} \right\} = 0 \quad (186)$$

$$AM \frac{d\{v\}}{dt} + AK21 \{u\} + (AK11+AF) \cdot \{v\} + AK23 \cdot \{h\} + AK23 \cdot \left\{ a + \frac{P_0}{\rho g} \right\} + AM \left\{ \frac{\lambda W \tilde{W}}{H} \right\} = 0 \quad (187)$$

$$AM \frac{d\{h\}}{dt} - AK31 \{u\} - AK32 \{v\} + AF \{h\} + AF \{(a-b)\} - AM \{r-i\} = 0 \quad (188)$$

Les équations (186), (187) et (188) s'écrivent encore:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} AM & 0 & 0 \\ 0 & AM & 0 \\ 0 & 0 & AM \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} (AK11+AF) & -AK21 & AK13 \\ AK21 & (AK11+AF) & AK23 \\ AK31 & AK32 & AF \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix} \\
 & + \begin{bmatrix} AM & 0 & 0 \\ 0 & AM & 0 \\ 0 & 0 & AM \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \frac{W \tilde{W}}{x \tilde{H}} \\ \lambda \frac{W \tilde{W}}{y \tilde{H}} \\ -(r-i) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} AK13 & 0 & 0 \\ 0 & AK23 & 0 \\ 0 & 0 & AF \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a + \frac{p_0}{\rho g} \\ a + \frac{p_0}{\rho g} \\ (a-b) \end{pmatrix} = 0
 \end{aligned}
 \tag{189}$$

ou encore sous forme de coordonnées généralisées, en posant:

$$q = \begin{pmatrix} u \\ v \\ h \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} AM & 0 & 0 \\ 0 & AM & 0 \\ 0 & 0 & AM \end{bmatrix} \frac{dq}{dt} + \begin{bmatrix} (AK11+AF) & -AK21 & AK13 \\ AK21 & (AK11+AF) & AK23 \\ AK31 & AK32 & AF \end{bmatrix} \cdot q \\
 & + \begin{bmatrix} AM & 0 & 0 \\ 0 & AM & 0 \\ 0 & 0 & AM \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \frac{W \tilde{W}}{x \tilde{H}} \\ \lambda \frac{W \tilde{W}}{y \tilde{H}} \\ -(r-i) \end{pmatrix} + \begin{bmatrix} AK13 & 0 & 0 \\ 0 & AK23 & 0 \\ 0 & 0 & AF \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a + \frac{p_0}{\rho g} \\ a + \frac{p_0}{\rho g} \\ (a-b) \end{pmatrix} = 0
 \end{aligned}
 \tag{190}$$

Soit sous forme condensée:

$$M \frac{dq}{dt} + Kq + F = 0 \quad (191)$$

L'équation (191) se présente sous la forme (124) et la solution temporelle est donnée par l'équation (129). Cependant, dans ce qui suit nous étudierons les écoulements à surface libre à l'état de régime, l'équation (190) se réduit donc à:

$$\begin{bmatrix} (AK11+AF) & -AK21 & AK13 \\ AK21 & (AK11+AF) & AK23 \\ AK31 & AK32 & AF \end{bmatrix} \cdot q + \begin{bmatrix} AM & 0 & 0 \\ 0 & AM & 0 \\ 0 & 0 & AM \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{l} \lambda \frac{W}{x} \\ H \\ \lambda \frac{W}{y} \\ H \\ -(r-i) \end{array} \right\} + \begin{bmatrix} AK13 & 0 & 0 \\ 0 & AK23 & 0 \\ 0 & 0 & AF \end{bmatrix} \cdot \left\{ \begin{array}{l} a + \frac{p_o}{\rho g} \\ a + \frac{p_o}{\rho g} \\ (a-b) \end{array} \right\} = 0 \quad (192)$$

3.4.3 Transfert de chaleur

L'application de la méthode des éléments finis à l'équation du transfert de la chaleur est bien connue [MYERS, 1971]. Nous nous contenterons d'écrire les équations avec les notations adoptées depuis le début.

3.4.3.1 Mise sous forme intégrale

L'équation du transfert de chaleur, (équation 134, chapitre 2), devient:

$$\int_S N_i \left\{ \rho C \frac{\partial T}{\partial t} - Q \right\} dS - \int_S N_i \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right\} dS = 0 \quad (193)$$

$i=1, \dots, n$

n indique toujours le nombre de sommets dans tout le domaine.

Le dernier terme à gauche de l'égalité peut s'écrire:

$$\int_S N_i \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right\} dS = \int_S \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(N_i k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_i k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right\} dS$$

$$- \int_S \left\{ k_x \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} dS \quad (194)$$

L'équation (194) s'écrit encore, par application du théorème de

Green:

$$\int_S N_i \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) \right\} = \oint_C N_i \cdot \left\{ n_1 k_x \frac{\partial T}{\partial x} + n_2 k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right\} dC$$

$$- \int_S \left\{ k_x \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} dS \quad (195)$$

En reportant l'équation (195) dans l'équation (193), on obtient:

$$\int_S \left\{ N_i \left(\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - Q \right) + k_x \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} dS - \oint_C N_i \cdot \left\{ n_1 k_x \frac{\partial T}{\partial x} + n_2 k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right\} dC = 0$$

(196)

$i=1, \dots, n$

L'intégrale de contour fait apparaître l'une ou l'autre des conditions limites, (équations (136) et (137), chapitre 2). L'intégrale de contour s'écrira pour l'un et l'autre cas, (frontières C_2 ou C_3):

$$-\oint_C N_i \cdot \left\{ n_1 k_x \frac{\partial T}{\partial x} + n_2 k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right\} dC = \oint_{C_2} N_i q dC + \oint_{C_3} N_i \cdot \alpha (T - T_a) dC \quad (197)$$

L'équation (196) s'écrit donc:

$$\int_S \left\{ N_i \left(\rho C \frac{\partial T}{\partial t} - Q \right) + k_x \frac{\partial T}{\partial x} \frac{\partial N_i}{\partial x} + k_y \frac{\partial T}{\partial y} \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} dS + \oint_{C_2} N_i q dC + \oint_{C_3} N_i \alpha (T - T_a) dC = \{0\}$$

$i=1, \dots, n \quad (198)$

3.4.3.2 Notation d'éléments finis

Si k_x et k_y sont maintenus constants sur le domaine, la fonction d'approximation de la température s'écrit sur un élément e :

$$\tilde{T}^e = \sum_{j=1}^m T_j^e(t) \cdot N_j^e(s, v) \quad (199)$$

L'équation (198) devient:

$$\begin{aligned} \sum_{e=1}^E \rho C \left[\int_{S_e} N_i^e N_j^e dS \right] \frac{d}{dt} \{T^e\} + \left[\int_{S_e} \left(k_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \frac{\partial N_i^e}{\partial y} \right) dS \right] \{T^e\} \\ + \left[\int_{C_3} \alpha N_i^e N_j^e dC \right] \{T^e\} - \left\{ \int_{S_e} N_i^e \tilde{Q} dS \right\} + \left\{ \int_{C_2} N_i^e \tilde{q} dC \right\} - \left\{ \int_{C_3} N_i^e \alpha T_a dC \right\} = \{0\} \quad (200) \end{aligned}$$

Introduisons la notation suivante:

$$AM = \sum_{e=1}^E AM^e = \sum_{e=1}^E \left[\int_{S_e} N_i^e N_j^e dS \right] \quad (201)$$

$$AK = \sum_{e=1}^E AK^e = \sum_{e=1}^E \left[\int_{S_e} \left(k_x \frac{\partial N_i^e}{\partial x} \frac{\partial N_i^e}{\partial x} + k_y \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \frac{\partial N_j^e}{\partial y} \right) dS \right] \quad (202)$$

$$AF = \sum_{e=1}^E AF^e = \sum_{e=1}^E \left[\int_{C_3} \alpha N_i^e N_j^e dC \right] \quad (203)$$

$$\{B_1\} = \sum_{e=1}^E \{B_1^e\} = \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{S_e} N_i^e \tilde{Q} dS \right\} \quad (204)$$

$$\{B_2\} = \sum_{e=1}^E \{B_2^e\} = \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{C_2} N_i^e \tilde{q} dC \right\} \quad (205)$$

$$\{B_3\} = \sum_{e=1}^E \{B_3^e\} = \sum_{e=1}^E \left\{ \int_{C_3} \alpha N_i^e \tilde{T}_a dC \right\} \quad (206)$$

$$\{B\} = -\{B_1\} + \{B_2\} - \{B_3\} \quad (207)$$

L'équation (200) s'écrit:

$$\rho C AM \frac{dT}{dt} + (AK + AF) \{T\} + \{B\} = \{0\} \quad (208)$$

L'équation (208) étant principalement utilisée pour vérifier les intégrales de contour, (ou les conditions aux limites), on retiendra la forme permanente de l'équation (208):

$$(AK + AF) \{T\} + \{B\} = \{0\} \quad (209)$$

BIBLIOGRAPHIE

AMES, W.F., "Numerical Methods for Partial Differential Equations", Nelson, 1969.

ARGYRIS, J.H. and D.W. SCHARPF, "Finite Elements in Time and Space", Nuclear Engineering Design, vol. 10, p. 456-464, 1969.

BAKER, A.J., "Predictions in Environmental Hydrodynamics Using the Finite Element Method. I. Theoretical Development", AIAA Journal, vol. 13, no. 1, p. 36-42, 1975.

BRUCH, J.C., Jr and G. ZYVOLOVSKI, "Transient Two-Dimensional Heat Conduction Problems Solved by the finite Element Method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 8, p. 481-494, 1974.

CARNAHAN, B., H.A. LUTHER and J.O. WILKES, "Applied Numerical Methods", John Wiley & Sons, 1969.

CIARLET, P.G. and P.A. RAVIART, "Interpolation Theory over curved elements, with applications to finite Element Methods", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 1, p. 217-249, 1972.

CIARLET, P.G. and P.A. RAVIART, "Maximum Principle and Uniform Convergence for the Finite Element Method", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 2, p. 17-31, 1973.

CLOUGH, R.W. and J.L. TOCHER, "Finite Element Stiffness Matrices for the Analysis of Plate Bending", Proceedings of 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Dayton, Ohio, Oct. 1965.

COOK, R.D., "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, 1974.

COURANT, R. and D. HILBERT, "Methods of Mathematical Physics", John Wiley & Sons, vol. II, 1962.

DAUBERT, A. et O. GRAFFE, "Quelques aspects des écoulements presque horizontaux à deux dimensions en plan et non permanents, application aux estuaires", La Houille Blanche, no. 8, p. 847-859, 1967.

DONEA, J., "On the Accuracy of Finite Element Solutions to the Transient Heat Conduction Equation", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 8, p. 103-110, 1974.

DRONKERS, J.J., "Tidal Computations for rivers, coastal areas, and seas", Journal of the Hydraulic Division, HY1, p. 29-77, Jan. 1969.

EMERY, A.F. and W.W. CARSON, "An Evaluation of the Use of the Finite Element Method in the Computation of Temperature", Journal of Heat Transfer, Transactions of the ASME, p. 136-145, May 1971.

EPSTEIN, B., "Partial Differential Equations", Mc Graw-Hill Book Company, 1962.

ERGATOUDIS, I., IRONS, B.M. and O.C. ZIENKIEWICZ, "Curved, Isoparametric, "quadrilateral" elements for finite element analysis", International Journal of Solids and Structures, vol. 4, p. 31-42, 1968.

FINLAYSON, B.A. and L.E. SCRIVEN, "The Method of Weighted Residuals and its relation to certain variational principles for the analysis of transport processes", Chemical Engineering Science, vol. 20, p. 395-404, 1965.

FINLAYSON, B.A. and L.E. SCRIVEN, "The Method of Weighted Residuals - A review", Appl. Mech. Rev., vol. 19, p. 735-748, 1966.

FINLAYSON, B.A. and L.E. SCRIVEN, "On The Search for variational Principles", International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 10, p. 799-821, 1967.

FINLAYSON, B.A., "The Method of Weighted Residuals and Variational Principles", Academic Press, Mathematics in Science and Engineering, vol. 87, 1972.

FORSYTHE, G.E., and W.R. WASOW, "Finite Difference Methods for Partial Differential Equations", John Wiley & Sons, 1960.

GRAY, W.H. and N.M. SCHNURR, "A Comparison of the Finite Element and Finite Difference Methods for the Analysis of Steady Two Dimensional Heat Conduction Problems", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 6, p. 243-245, 1975.

GUYMON, G.L., "Finite Element Solution for General Fluid Motion", Journal of the Hydraulics Division, HY6, p. 913-919, June 1973.

HEIE, H. and D.C. LEIGH, "Stability of the Numerical Solution of Hyperbolic Partial Differential Equations using the Method of Characteristics", Department of Aerospace and Mechanical Sciences, Report no. 705, Princeton University, Nov. 1964.

HOLZLOHNER, "A Finite Element Analysis for Time Dependent Problems", International Journal for Numerical Methods in Engineering", vol. 8, p. 55-69, 1974.

HOUSTIS, E.N., R.E. LYNCH, I.S. PAPATHEODOROU and J.R. RICE, "Development, Evaluation and Selection of Methods for Elliptic Partial Differential Equations", Advances in Computer Methods for Partial Differential Equation, R. VICHNEVETSKY ed., Publ. AICA, 1975.

HUEBNER, K.H., "The Finite Element Method for Engineer", John Wiley & Sons, 1975.

IMBERT, J.F., "Introduction à la Méthode des Eléments finis appliquée à la Mécanique des Solides", Cours d'Eléments finis. Notes de Cours. Université de Sherbrooke. 1974.

KORN, G.A. and T.M. KORN, "Mathematical Handbook for Scientists and Engineers", Mc Graw-Hill Book Company, 2nd Ed., 1968.

LEIPHOLZ, H.H.E., "Recent trends in Galerkin's Method", Computer Aided Engineering, Proceedings of the Symposium held at the University of Waterloo, G.M.L. Gladwell, ed., p.315-331, May 11-13, 1971.

LYNN, P.P. and S.K. ARYA, "Use of the Least Squares criterion in the Finite Element Formulation", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 6, p. 75-88, 1973.

MURPHY, J.D., "Application of the Generalized Galerkin Method to the Computation of Fluid Flows", Proc. AIAA Computational Fluid Dynamics Conference, p. 63-68, 1973.

MYERS, G.E., "Analytical Methods in Conduction Heat Transfer", Mc Graw-Hill Book Company, 1971.

NORRIE, D.H. and G. de VRIES, "The Finite Element Method", Academic Press, New-York and London, 1973.

NORRIE, D.H. and G. de VRIES, "The Pseudo-Functional Finite Element Method", Finite Element Method in Flow problems, Edited by J.T. ODEN, O.C. ZIENKIEWICZ, R.H. CALLAGHER and C. TAYLOR, UAH Press, p. 21-28, Jan. 1974.

ODEN, J.T., "A general Theory of Finite Elements. I: Topological Considerations", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 1, no. 2, 1969a.

ODEN, J.T., "A general Theory of Finite Elements. II: Applications", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 1, no. 3, 1969b.

ODEN, J.T., "Finite Element analogue of Navier-Stokes equations", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, EM4, p. 529-534, Aug. 1970.

ODEN, J.T., "Finite Elements of Nonlinear continua", Mc Graw-Hill Book Company, 1972.

ODEN, J.T., "Finite Element Applications in Mathematical Physics", Source inconnue. Il apparaît dans cette publication des références allant jusqu'à Oct. 1972.

POTTER, D., "Computational Physics", John Wiley & Sons, 1973.

REKTORYS, K., "Survey of Applicable Mathematics", M.I.T. Press, Massachusetts Institute of Technology, 1969.

TAYLOR, C. and J. DAVIS, "Tidal and Long Wave Propagation - A Finite Element Approach", Computer & Fluids, vol. 3, p. 125-148, 1975.

VICHNEVTSKY, R., "Comments on the derivation of finite - element approximations from conservation principles", Transactions of the International Association for Mathematics and Computers in Simulation, Trans. IMACS, vol. XVIII, no. 3, July 1976., p. 149-152.

WARZEE, G., "Finite Element Method and Laplace Transform - Comparative solutions of Transient Heat Conduction Problems", Computer & Structures, vol.4, p. 979-991, 1974.

WEBER, M.E., "Improving the Accuracy of Crank-Nicolson Numerical Solutions to the Heat-Conduction Equation", Journal of Heat Transfer, Transactions of the ASME, p. 189-191, 1969.

WILSON, E.L., K.J. BATHE and F.E. PETERSON, "Finite Element Analysis of Linear and Nonlinear Heat Transfer", Nuclear Engineering and Design, vol.29, p. 110-124, 1974.

ZIENKIEWICZ, O.C. and C.J. PAREKH, "Transient field problems - two and three dimensional analysis by isoparametric finite elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, 2, p. 61-71, 1970.

ZIENKIEWICZ, O.C., "The Finite Element Method in Engineering Science", Mc Graw-Hill Publishing Company, Maidenhead-Berkshire, England, 1971.

CHAPITRE 4

TRAVAUX ANTERIEURS ET ORIENTATIONS DE CETTE RECHERCHE

Dans ce chapitre, nous analyserons l'état de la recherche dans les deux cas retenus plus haut soient, la dispersion d'une nappe d'huile sur une masse d'eau en mouvement et les équations de mouvement et de continuité de l'eau pour un écoulement peu profond à surface libre. L'étude bibliographique porte, dans les deux cas, sur l'utilisation de la méthode des éléments finis. D'autres méthodes sont éventuellement citées mais sans faire l'objet d'une description détaillée. A la fin de ce chapitre, l'état de la recherche est discuté et les orientations principales sont introduites.

Les équations de transfert de chaleur sont volontairement omises de cette description. Ces équations ont été étudiées intensivement pour toutes sortes de conditions aux limites tant par des méthodes de différences finies que par des méthodes d'éléments finis, [MYERS, 1971], [ZIENKIEWICZ, 1971]. Les résultats obtenus, pour ces équations, à l'aide de la méthode des éléments finis sont très bons; la distribution de la température au cours du temps dans une lame de rotor refroidie en représente un exemple bien connu, [ZIENKIEWICZ, 1970].

4.1 Dispersion de l'huile

4.1.1 Etat de la recherche

Le problème de la dispersion d'une nappe d'huile, tel que posé dans le chapitre 2, a été résolu analytiquement pour certains cas simples, soit par exemple pour un écoulement unidirectionnel et invariant, [JAMES, 1972]. Par contre, il ne semble pas que ce problème ait été traité tant par

la méthode des différences finies que par celle des éléments finis pour des situations complexes. Il est possible, toutefois, de noter une certaine analogie entre ces équations, (équation (10), chapitre 2), et les équations décrivant le transfert de masse d'une espèce dans un milieu donné.

ADEY, [1973], traite le problème d'un solide dissous dans le cas d'un estuaire. Il fait l'hypothèse que le constituant donné est bien mélangé selon la profondeur de l'eau, (cette hypothèse est réaliste en raison de la turbulence). ADEY écrit son modèle dans trois dimensions et ce n'est que lorsque la formulation de Galerkin est introduite qu'il fait l'hypothèse d'une concentration constante dans la direction verticale. Les conditions aux limites sont introduites en intégrant par partie; elles reposent sur l'hypothèse implicite que la vitesse normale sur la paroi est nulle. Pour l'intégration sur le temps, ADEY utilise un schéma lagrangien. Il intègre, donc, l'équation de transfert de masse sans tenir compte des termes de convection. Une fois la distribution due à la diffusion connue pour un intervalle de temps donné, il déplace la masse de fluide de chaque élément avec le profil connu des vitesses. Le maillage utilisé est triangulaire.

DAILEY, [1973], étudie le même problème que ADEY mais en tenant compte d'une seule direction. Il fait donc l'hypothèse d'un mélange parfait dans deux directions. L'intégration sur le temps est effectuée par différences finies; les termes de convection sont estimés au milieu de l'intervalle de temps.

BRUCH, [1975], propose une solution générale par la méthode des éléments finis pour une équation différentielle partielle de type parabolique à deux dimensions et du type de l'équation de transfert de masse. Il applique la méthode de Galerkin et utilise des éléments finis sur le temps et sur l'espace. Les fonctions d'interpolation sont, alors, de la forme $N(x,y,t)$. En intégrant par partie, il introduit les conditions aux limites

sans terme de convection.

Par ailleurs, GUYMON,[1970,1972], NALLUSWAMI,[1972], ainsi que WANG,[1975], formulent des principes variationnels pour l'équation de transfert de masse. Nous avons vu, cependant, dans les sections 3.3.2.1 et 3.3.2.2 que cette approche est de moins en moins utilisée et qu'elle n'est pas considérée comme nécessaire.

4.1.2 Orientation de la recherche

Le chapitre 1 d'introduction a montré l'intérêt d'étudier la variation d'épaisseur et le déplacement d'une nappe d'huile. La recherche bibliographique indique, de plus, qu'un tel problème n'a pas encore reçu de solution générale. Ce problème reste, donc, ouvert si l'on exclut certains cas simples résolus analytiquement. Pour ce travail les objectifs suivants ont été fixés:

- . La dispersion d'une nappe d'huile accidentelle sera étudiée numériquement en trois dimensions en tenant compte des termes de convection et de diffusion. La méthode retenue est celle des éléments finis.

- . Dans la perspective de l'évaluation des impacts d'une nouvelle implantation portuaire, par exemple, il faudra être en mesure de tenir compte de l'effet d'estacades provisoires ou permanentes.

- . L'huile devra être introduite sous la forme de perturbations quelconques. En particulier, la rupture brutale d'un pétrolier sera représentée par une impulsion de Dirac.

- . Les conditions aux limites devront tenir compte des termes de convection. Ces termes sont importants pour l'évaluation des estacades. La paroi de ces dernières est, en effet, perméable à l'eau et au vent mais imperméable à l'huile. Ceci a pour effet d'entraîner l'huile à une certaine vitesse jusqu'à la paroi de l'estacade.

. Un déversement accidentel sera évalué au large de Rimouski dans l'estuaire maritime du fleuve St-Laurent.

4.2. Ecoulement peu profond à surface libre

L'étude de la dispersion d'une nappe d'huile nécessite de connaître les vitesses de vent et de courant, (voir le chapitre 2). Si les vitesses de vents peuvent être connues avec un certain réalisme, celles de courant sont plus difficiles à évaluer particulièrement pour des écoulements complexes tels les estuaires, (équations (120), (121) et (122), chapitre 2). Par ailleurs, la méthode des éléments finis demande un effort de programmation important qui, s'il est effectué avec précautions, présente l'avantage de pouvoir s'appliquer à d'autres problèmes. Au début de ce travail il paraissait donc intéressant de résoudre également le problème de l'écoulement à surface libre pour un estuaire. Cet effort devait s'effectuer indépendamment du problème de la dispersion d'une nappe d'huile. En effet, dans cette première étape, nous préférons utiliser des résultats expérimentaux pour la vitesse du courant, étant limité par des difficultés matérielles et logicielles pour l'exploitation sur l'ordinateur. Toutefois, le problème de l'écoulement à surface libre a reçu depuis trois ans des développements importants et le but poursuivi a donc évolué au cours de cette étude.

4.2.1 Etat de la recherche

L'étude bibliographique se limitera aux problèmes d'écoulement à surface libre. Si la résolution des équations de Navier-Stokes retiendra notre attention dans certains cas, nous étudierons, principalement, les écoulements non visqueux.

GROTKOP, [1973], est le premier à s'intéresser à la résolution de l'écoulement hydrostatique à surface libre par la méthode des éléments finis.

Il applique la méthode de Galerkin et utilise des éléments finis sur le temps et l'espace de forme prismatique et à base triangulaire. Il linéarise l'équation de continuité en utilisant, dans les termes non linéaires, la valeur des variables au temps précédent. Les termes de convection non linéaires des équations de mouvement sont estimés par une valeur moyenne sur chaque élément. Les conditions aux limites sont introduites localement par changement du système d'axe. Il impose alors une vitesse normale nulle sur les contours fermés du domaine. GROTKOP utilise son modèle sur la mer du Nord qu'il découpe en 97 éléments triangulaires. Les noeuds sont éloignés les uns des autres d'une distance moyenne de 100 à 120 kilomètres. L'auteur tient compte des forces exercées par le vent ainsi que des forces de Coriolis. Il part avec des conditions initiales quelconques et il intègre le modèle jusqu'à ce que l'effet des conditions initiales disparaissent; c'est-à-dire lorsque l'écoulement montre un comportement périodique avec la marée. GROTKOP note qu'il reproduit bien le comportement moyen dû à la marée avec un maillage assez grossier. Il remarque, pour finir, que le modèle ne présente pas d'instabilité même lorsque l'intervalle de temps est choisi très grand.

CONNOR, [1973], note, dès l'abord, le peu d'applications de la méthode des éléments finis pour des équations de type hyperbolique. Cependant, à plusieurs reprises, il modifie la nature de son système d'équations par l'adjonction d'un terme de viscosité du deuxième ordre pour des raisons de stabilité. Les problèmes d'instabilité disparaissent avec des coefficients de viscosité de l'ordre de $10\text{m}^2/\text{sec}$. Dans plusieurs cas de géométrie simple, il conserve cependant la viscosité nulle. Enfin, dans son application à la baie de Massachusetts, il néglige les termes de convection. CONNOR souligne à la fin de son exposé que l'addition des termes de viscosité mériteraient une étude plus approfondie. Notons que l'auteur utilise des

éléments triangulaires aux contours géométriques linéaires. Les conditions aux limites sont introduites par application du théorème de Green. L'intégration sur le temps est effectuée soit par la méthode de Runge-Kutta du quatrième ordre soit par un schéma prédicteur-correcteur du troisième ordre.

TAYLOR,[1975], utilise la même approche générale que CONNOR. Il reprend dans cette publication deux publications précédentes, [TAYLOR, 1974a, 1974b]. Il met l'accent principalement sur l'intégration dans le temps en comparant trois schémas d'intégration, (procédure d'Adams-Moulton, approximation trapézoïdale, élément fini dans le temps). Il déduit de cette comparaison que les deux dernières méthodes sont inconditionnellement stables. Dans ces deux cas, cependant, les termes non linéaires étant conservés, la solution repose sur la résolution d'un système non linéaire. La convergence est accélérée à l'aide d'une méthode de relaxation. Plusieurs exemples sont effectués sur des canaux droits et un essai est accompli sur le mer du Nord. L'auteur part, dans le dernier cas, de conditions initiales nulles et il obtient une reproduction cyclique des résultats après trois cycles d'intégration. Il note qu'il reproduit correctement les hauteurs d'eau dues à la marée dans la mer du Nord avec neuf éléments rectangulaires à douze points. L'auteur tient compte des forces de Coriolis mais il néglige l'action du vent. L'intervalle de temps choisi, dans ce cas, est de six minutes pour l'approximation trapézoïdale. La superficie moyenne des éléments rectangulaires est de deux mille kilomètres carrés environ. Notons, enfin, que l'auteur utilise des éléments rectangulaires à douze points, mais sans indiquer pourquoi il retient des éléments aussi complexes.

BAKER,[1975] et ZELAZNY,[1975], présentent les équations de Navier-Stokes à trois dimensions et, intégrées selon une direction, à deux dimensions pour décrire le comportement de lacs, de rivières ou d'estuaires.

BAKER note que les équations paraboliques non linéaires résultantes présentent des difficultés importantes dues aux conditions aux limites non régulières. Il utilise la méthode de Galerkin. Les conditions aux limites sont introduites par utilisation du théorème de Green. Les forces de Reynolds sont déterminées à l'aide de modèles empiriques. Les essais effectués suggèrent, d'après l'auteur, que les forces de Reynolds devraient être approximées à l'aide de modèles d'ordre plus élevé. Les éléments utilisés sont triangulaires et l'intégration sur le temps est effectuée explicitement.

KEUNING,[1976], applique la méthode des éléments finis à un canal droit trapézoïdal. Les équations sont simplifiées et ne tiennent compte que de la variation débit-hauteur. Les intégrales sont évaluées par la méthode de Simpson. L'intégration sur le temps est réalisée à l'aide d'un schéma aux différences finies implicite. Les équations algébriques non linéaires résultantes sont résolues par la méthode de Newton-Raphson.

COOLEY,[1976], s'intéresse au même problème que Keuning. L'auteur utilise plusieurs schémas d'intégration sur le temps et il teste la méthode sur des canaux droits rectangulaires.

PARTRIDGE,[1976], étudie les équations des écoulements à surface libre à deux dimensions. Il utilise des éléments triangulaires à six noeuds. Il compare l'utilisation d'intégration implicite et explicite sur le temps. Il teste son modèle sur des canaux droits rectangulaires. Les conditions initiales sur le temps sont fixées arbitrairement à zéro; le coefficient de Chézy est augmenté au départ pour atténuer plus rapidement l'importance des conditions initiales. Les termes de convection sont négligés mais l'auteur établit qu'il faudrait en tenir compte si le fond du canal est irrégulier.

4.2.2 Orientations de ce travail

L'étude bibliographique montre que l'intégration des équations

décrivant les écoulements hydrostatiques à surface libre a été réalisée avec un certain succès dans plusieurs cas. L'étude bibliographique est, cependant, compliquée par le fait que les auteurs modifient fréquemment la nature des équations originales. BAKER,[1975], pour sa part, applique les équations de Navier-Stokes de forme parabolique à ce type d'écoulement. Il semble, en effet, que les équations de Navier-Stokes ont été intégrées sans difficultés par de nombreux auteurs, [TAYLOR, 1973], [TANNER, 1975], [SMITH, 1975]. Ceci semble confirmé par CONNOR,[1973], lorsque, dans certains cas, il introduit un terme de viscosité pour rendre stables les équations originales, (le système d'équations devient alors parabolique). Pour leur part, GROTKOP,[1973], PARTRIDGE,[1976] et CONNOR,[1973], modifient les équations en linéarisant les termes de convection.

Par ailleurs, l'intégration sur le temps ne semble pas présenter de difficultés. Elle est effectuée, en général, par des schémas aux différences finies implicites ou explicites.

Rappelons, pour notre part, que cette partie du travail consistait à intégrer les équations de mouvement et de continuité sur l'eau indépendamment de l'étude de la dispersion d'une nappe d'huile puisque nous préférons, dans un premier temps, utiliser des données expérimentales pour la vitesse du courant. Suite aux travaux de GROTKOP,[1973], de CONNOR,[1973] et surtout de TAYLOR,[1975], nous avons réorienté notre étude sur l'écoulement à surface libre dans les canaux, cet écoulement pouvant faire l'objet de vérifications numériques faciles, (section 2.2.5). Les articles de KEUNING,[1976], COOLEY,[1976] et PARTRIDGE,[1976], montre que nous avons réussi à nous placer rapidement à un niveau de recherche intéressant.

Les orientations suivantes sont retenues:

. L'intégration des équations de mouvement et de continuité sur

l'eau sera effectuée en conservant les termes de convection non linéaires et la nature hyperbolique du système, ce qui n'a pas été, nous venons de le mentionner, retenu dans la majorité des cas.

. L'intégration sera réalisée à l'état de régime. Le passage à l'état transitoire ne semble pas, en effet, poser de difficultés.

. L'intégration sera accomplie sur des canaux droits et des canaux courbes.

. La pose des conditions aux limites sur les frontières ouvertes, (section 2.2.2.3), sera étudiée numériquement.

BIBLIOGRAPHIE

ADEY, R.A. and C.A. BREBBIA, "Finite Element Solution for Effluent dispersion", Proc. of the Int. Conf. held at the University of Southampton, England, Numerical Methods in Fluid Dynamics, p. 325-354, 26th to 28th September 1973.

BAKER, A.J., "Predictions in Environmental Hydrodynamics Using The Finite Element Method - I. Theoretical Development", AIAA Journal, vol. 13, no. 1, p. 36-42, 1975.

BRUCH, J.C. and G. ZYVOLOSKI, "A Finite Element Solution to a general two-dimensional Nonsymmetric Parabolic Partial Differential Equations", Computer & Fluids, vol.3, p. 217-224, 1975.

CONNOR, J. and J. WANG, "Finite Element Modelling of Hydrodynamic Circulation", Proc. of the Int. Conf. held at the University of Southampton, England, Numerical Methods in Fluid Dynamics, p. 355-387, 26th to 28th September 1973.

COOLEY, R.L. and S.A. MOIN, "Finite Element Solution of Saint-Venant Equations", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, Hy6, p. 759-775, June 1976.

DAILEY, J.E., and D.R.F. HARLEMAN, "A Numerical Model of Transient Water Quality in a One-Dimensional Estuary Based on the Finite Element Method, Proc. of The Int. Conf. held at the University of Southampton, England, Numerical Methods in Fluid Dynamics, p. 412-439, 26th to 28th September 1976.

GROTKOP, G., "Finite Element Analysis of Long-Period Water Waves", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 2, p. 147-157, 1973.

GUYMON, G.G., "A Finite Element Solution of the One-Dimensional Diffusion-Convection Equation", Water Resources Research, vol. 6, no. 1, p. 204-210, Feb. 1970.

GUYMON, G.L., "Note on the Finite Element Solution of The Diffusion-Convection Equation", Water Resources Research, vo. 8, no. 5, p. 1357-1360, Oct. 1972.

JAMES, W.P. et al., "Environmental Aspects of a Supertanker Port on the Texas Gulf Coast", National Technical Information Service, no. PB-220051, Dec. 1972.

KEUNING, D.H., "Application of Finite Element Method to Open Channel Flow", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, HY4, p. 459-468, April 1976.

MYERS, G.E., "Analytical Methods in Conduction Heat Transfer", Mc Graw-Hill Book Company, 1971.

NALLUSWAMI, M., R.A. LONGENBAUGH and D.K. SUNADA, "Finite Element Method for the Hydrodynamic Dispersion Equation with Mixed Partial Derivatives", Water Resources Research, vol. 8, no. 5, p. 1247-1250, Oct. 1972.

PARTRIDGE, P.W. and C.A. BREBBIA, "Quadratic Finite Elements in Shallow Water Problems", Journal of the Hydraulics Division, ASCE, HY9, Sept. 1976.

SMITH, S.L. and C.A. BREBBIA, "Finite-Element Solution of Navier-Stokes Equations for Transient Two-Dimensional Incompressible Flow", Journal of Computational Physics, vol. 17, p. 235-245, 1975.

TANNER, R.I., R.E. NICKELL and R.W. BILGER, "Finite Element Methods for The Solution of Some incompressible Non-Newtonian Fluid Mechanics Problems with Free Surfaces", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vo. 6, p. 155-174, 1975.

TAYLOR, C. and P. HOOD, "A Numerical Solution of The Navier-Stokes Equations Using The Finite Element Technique", Computers & Fluids, vol. 1, p. 73-100, 1973.

TAYLOR, C. and J. DAVIS, "A Finite Element Model of Tides in Estuaries", Int. Symp. on Finite Element Methods in Flow Problems, Swansea, Great Britain, UAH Press, Jan. 1974a.

TAYLOR, C. and J. DAVIS, "A Numerical Model of Dispersion in Estuaries", Int. Symp. on Finite Element Methods in Flow Problems, Swansea, Great Britain, UAH Press, Jan. 1974b.

TAYLOR, C. and J. DAVIS, "Tidal and Long Wave Propagation - A Finite Element Approach", Computer & Fluids, vo. 3, p. 125-148, 1975.

WANG, M.S. and R.T. CHENG, "A Study of Convective-Dispersion Equation by isoparametric Finite Elements", Journal of Hydrology, vo. 24, p. 45-56, 1975.

ZIENKIEWICZ, O.C. and C.J. PAREKH, "Transient Field Problems. Two and Three Dimensional Analysis by Isoparametric Finite Elements", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vo. 2, p. 61-71, 1970.

ZIENKIEWICZ, O.C., "The Finite Element Method in Engineering Science",
Mc Graw-Hill Publishing Company, Maidenhead - Berkshire - England, 1971.

ZELANY, S.W. and A.J. BAKER, "Predictions in Environmental Hydrodynamics
Using the Finite Element Method - II. Applications", AIAA Journal, vol.13,
no. 1, p. 43-46, 1975.

CHAPITRE 5

LE PROGRAMME ET LES PROBLEMES ASSOCIES

Dans ce chapitre, nous analyserons tour à tour quelques problèmes reliés à la mise au point du programme. Nous étudierons, par la suite, la structure même du programme.

5.1 Intégration sur un élément

Les équations étudiées ont été établies au chapitre 2 par rapport au système global de coordonnées cartésiennes. On obtient ainsi des systèmes d'équations algébriques non linéaires dont les coefficients sont des intégrales de surface ou de contour à déterminer, (voir, par exemple, les équations (147) à (151) du chapitre 3. L'appendice A indique les transformations à effectuer pour passer du système global x, y au système local s, v . Par ailleurs, les éléments isoparamétriques sont tels qu'une intégration analytique est impossible. Il faut donc choisir une méthode d'intégration numérique, choix qui s'effectue, en général, entre les formes de Newton-Cotes et celles de Gauss. Les méthodes utilisant les formes de Newton-Cotes sont utilisées pour des supports également espacés et l'erreur associée à l'intégration est d'ordre $m+1$ ou, au mieux, $m+2$ si le polynôme d'approximation est d'ordre m , [LAPIDUS, 1962], [HILDEBRAND, 1974], [CARNAHAN, 1969]; ce type d'intégration est particulièrement intéressant pour des fonctions obtenues expérimentalement et pour des points également espacés. Par contre, les méthodes utilisant les formes de Gauss reposent sur le calcul de la fonction à intégrer en des points non régulièrement espacés; elles sont particulièrement utiles lorsque, comme c'est ici le cas, la forme à intégrer est connue analytiquement.

Pour une somme pondérée de m termes, on obtient une erreur d'ordre $2m+1$. L'intégration de Gauss-Legendre est bien adaptée puisque l'intégration est effectuée entre -1 et $+1$ ce qui est le cas dans le système local pour les éléments isoparamétriques choisis. La plupart des auteurs utilisant des éléments isoparamétriques appliquent ces formules d'intégration. COOK, [1974], en décrit l'application. L'intégrale s'écrit:

$$I = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(s,v) ds dv \approx \sum_i \sum_j \{W_i W_j f(s_i, v_j)\} \quad (1)$$

Les indices i et j varient de 1 à 2 ou de 1 à 3 selon que l'on utilise 4 points ou 9 points de Gauss respectivement. Les points de Gauss et la pondération apparaissent dans les tableaux 3 et 4

Tableau 3

4 points de Gauss
G = 0.5773502691896257645091488

x	y	W_i	W_j
-G	-G	1	1
+G	-G	1	1
+G	+G	1	1
-G	+G	1	1

Tableau 4

9 points de Gauss
G = .7745966692414833770358531

x	y	W_i	W_j
-G	-G	5/9	5/9
0	-G	8/9	5/9
+G	-G	5/9	5/9
+G	0	5/9	8/9
+G	+G	5/9	5/9
0	+G	8/9	5/9
-G	+G	5/9	5/9
-G	0	5/9	8/9
0	0	8/9	8/9

5.2 Résolution algébrique non-linéaire

Les équations de mouvement et de continuité sur l'eau sont non linéaires. L'application de la méthode des éléments finis résulte en un

système algébrique non linéaire. Dans ce paragraphe nous analyserons différentes méthodes de résolution des équations algébriques non linéaires avant d'exposer la méthode utilisée; nous l'appliquerons par la suite au système algébrique résultant de l'écoulement à surface libre.

5.2.1 Les méthodes de résolution

Soit le système d'équations algébriques non linéaires simultanées:

$$f = 0 \quad (2),$$

où $f^T = [f_1, \dots, f_n]$.

Traditionnellement, la résolution algébrique du système d'équations non linéaires s'effectue par élimination, par substitution successive ou encore par la méthode de Newton-Raphson, [ZAGUSKIN, 1961].

L'élimination ne peut s'appliquer qu'à un petit nombre d'équations. D'autre part, les inconnues ne peuvent pas toujours s'exprimer en fonction des autres inconnues du système selon le degré de non linéarité.

La substitution successive revient à transformer le système d'équations initial pour le mettre sous la forme:

$$P(x) = x,$$

où $x^T = [x_1, \dots, x_n]$ et où P représente le système d'équations transformé. Les méthodes de Jacobi ou de Gauss-Seidel peuvent alors être utilisées avec ou sans relaxation, [YOUNG, 1973], [ORTEGA, 1970]. L'application de cette méthode est limitée en raison de l'importance du choix de l'estimé initial sur la convergence [RALL, 1973].

La méthode de Newton-Raphson est basée sur le développement de Taylor au premier ordre du système d'équations (2), on obtient:

$$f(x+\Delta x) = f(x) + J\Delta x \quad (3)$$

J représente la matrice jacobienne des dérivées premières:

$$J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (4)$$

Δx est le vecteur correction, $\Delta x^T = [\Delta x_1, \dots, \Delta x_n]$.

Si le nouvel estimé des inconnues $x + \Delta x$ correspond au vecteur solution, l'expression (3) devient:

$$\Delta x = -J^{-1}.f(x) \quad (5)$$

La détermination analytique de la matrice jacobienne, qui ne doit évidemment pas être singulière, pose parfois de sérieuses difficultés. Par ailleurs, l'estimé de départ joue un rôle important; la convergence du deuxième ordre n'est effective que dans le voisinage de la solution, [POWELL, 1970a, 1970b], [JACOBY, 1972].

Plus récemment, la résolution de système d'équations algébriques non linéaires a été perçue comme un cas particulier d'un problème de minimisation, [FLETCHER, 1970], [JACOBY, 1972], [LEMIEUX, 1972], [DENNIS, 1973]. Le problème précédent, décrit par l'équation (2), peut être posé à nouveau mais de manière plus générale:

$$f = 0 \quad (6)$$

$$\text{avec: } f^T = [f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)]$$

$$m > n$$

La fonction $F = f^T f$ représente la somme des carrés des résidus du système d'équations original; une condition nécessaire pour que le minimum de la fonction objective F soit atteint est que:

$$\nabla F = 2 J^T f = 0 \quad (7)$$

Dans le cas particulier où $m=n$, et si la matrice jacobienne n'est pas singulière, l'équation (7) implique que le système d'équations algébri-

ques non linéaires initial est vérifié par le vecteur x qui minimise F . En tenant compte de l'équation (3), on aura au minimum, $x + \Delta x$:

$$2 J^T \cdot f(x + \Delta x) = 2(J^T f(x) + J^T J \Delta x) = 0 \quad (8)$$

L'équation (8) s'écrit encore :

$$J^T J \Delta x = - J^T \cdot f \quad (9)$$

L'équation (9) jette les bases d'une méthode itérative appelée méthode des moindres carrés généralisés. Cette méthode résulte fréquemment en de grandes oscillations avant d'obtenir le vecteur solution, [JACOBY, 1972]. La méthode de Levenberg-Marquardt, [JACOBY, 1972], outre-passe, en partie, cette difficulté. L'équation (9) est alors transformée en :

$$(J^T J + \mu I) \Delta x = - J^T \cdot f \quad (10)$$

où μ est un nombre positif arbitraire.

La méthode de Newton-Raphson, celle des moindres carrés généralisés ou celle de Levenberg-Marquardt, reposent sur un processus itératif qui peut s'écrire :

$$x^{k+1} = x^k + \Delta x^k \quad (11)$$

Le processus itératif peut également comporter une recherche le long du vecteur de correction. La nouvelle approximation à l'étape $k+1$ s'écrit alors :

$$x^{k+1} = x^k + \lambda^k \Delta x^k \quad (12)$$

Direction de descente, JACOBY, 1972

Par définition, la correction Δx^k indique une direction de descente

s'il existe un paramètre $\bar{\lambda}$ positif tel que,

$$\forall \lambda \in [0, \bar{\lambda}], \quad F(x^{k+1}) = F(x^k + \lambda \Delta x^k) < F(x^k) \quad (13)$$

Si $F(x)$ est différentiable, Δx^k représente une direction de descente si:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{F(x^k + \lambda \Delta x^k) - F(x^k)}{\lambda} = \left. \frac{dF(x^k + \lambda \Delta x^k)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0} = \frac{\partial F}{\partial x_1^k} \Delta x_1^k + \dots + \frac{\partial F}{\partial x_n^k} \Delta x_n^k < 0 \quad (14)$$

Soit encore:

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \frac{F(x^k + \lambda \Delta x^k) - F(x^k)}{\lambda} = [\Delta x^k]^T \cdot \nabla F(x^k) < 0 \quad (15)$$

Le terme à gauche de l'inégalité représente, à un facteur près, la dérivée directionnelle de F dans la direction Δx^k appliquée au point x_k . Si l'inégalité (15) est vérifiée, l'inégalité (13) le sera. JACOBY, [1972], montre que l'algorithme utilisant l'équation (9) est tel que la correction Δx indique toujours une direction de descente. Il en va de même pour la méthode du gradient pour laquelle la correction s'écrit:

$$\Delta x^k = - \nabla F(x^k) = - 2 J^T \cdot f \quad (16)$$

Pour toutes ces méthodes, dérivées de la minimisation des résidus, BROYDEN, [1970], propose l'écriture généralisée suivante:

$$x^{k+1} = x^k - H^k f^k \lambda^k \quad (17)$$

avec:

. méthode de Newton-Raphson : $H^k = (J^{-1})^k$ et $\lambda^k = 1$ (18)

. méthode du gradient : $H^k = (J^T)^k$ et $\lambda^k > 0$ (19)

. méthode de Levenberg-Marquardt : $H^k = ((J^T J)^k + \mu^k I)^{-1} (J^T)^k$ et $\lambda^k = 1, \mu^k \geq 0$

(20)

POWELL, [1970b], définit, pour sa part, la correction à effectuer par:

$$\Delta x^k = (1-\theta)u + \theta v \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (21)$$

où u et v représentent respectivement les corrections obtenues par les méthodes du gradient et de Newton-Raphson.

5.2.2 Méthode utilisée

Pour les problèmes d'optimisation, la méthode de Newton représente un outil classique. Très fréquemment la matrice hessienne des dérivées secondes est corrigée pour rendre l'algorithme convergent, c'est-à-dire pour assurer une direction de descente au vecteur de correction. Cette transformation consiste à rendre la matrice hessienne définie positive, [MURRAY, 1972], [LEMIEUX, 1976]. Quant à la méthode de Newton-Raphson, elle est identique à la méthode de Newton lorsque les fonctions f sont elles-mêmes dérivées d'une fonction $\phi(x_1, \dots, x_n)$:

$$f = \nabla \phi \quad (22)$$

Il est donc intéressant de savoir si le vecteur déterminé par la méthode de Newton-Raphson, (équation (5)), indique toujours une direction de descente, [LEMIEUX, 1972].

Les expressions (5) et (7) permettent d'écrire l'expression (15) sous la forme:

$$[\Delta x]^T \cdot \nabla F(x) = - [J^{-1} \cdot f]^T \cdot 2J^T f \quad (23)$$

Soit encore:

$$[\Delta x]^T \cdot \nabla F(x) = -2f^T [J^T]^{-1} \cdot J^T f = -2f^T f < 0 \quad (24)$$

L'expression (24) est toujours négative, c'est dire que le vecteur de correction donné par la méthode de Newton-Raphson indique une direction de descente. L'application du vecteur de correction peut, cependant, conduire à un nouvel estimé qui dépasse largement la correction souhaitée, voire se rapproche et s'éloigne indéfiniment de la réponse. Pour palier cette difficulté l'algorithme suivant est proposé:

1. x^0 estimé initial, calcul de $f(x^0)$, on pose $k=0$.
2. On pose $\alpha=1$; $k=k+1$.
3. Calcul de la correction $\Delta x^k = -J^{-1}f$.
4. Détermination de $x^{k+1} = x^k + \alpha \Delta x^k$.
5. Si $F(x^{k+1}) < F(x^k)$, on va en 2. Dans le cas contraire, on va en 6.
6. On pose $\alpha = \alpha/2$, on va en 3.

La procédure est répétée jusqu'à ce que la fonction F ne varie plus ou jusqu'à ce que la norme du vecteur de correction devienne inférieure à une valeur spécifiée.

5.2.3 Application à l'écoulement à surface libre

L'équation (192) du chapitre 3 présente le système d'équations algébriques non linéaires à l'état de régime. L'adjonction du terme transitoire ne présenterait aucune difficulté pour ce qui suit. L'équation (192) peut s'écrire à nouveau:

$$f^1 = [AK11+AF] \cdot \{u\} + [AK12] \cdot \{v\} + [AK13] \cdot \{h\} + [AK13] \cdot \left\{ a + \frac{p_0}{\rho g} \right\} + [AM] \cdot \left\{ \lambda \frac{W}{H} \right\} = 0 \quad (25)$$

$$f^2 = [AK21] \cdot \{u\} + [AK11+AF] \cdot \{v\} + [AK23] \cdot \{h\} + [AK23] \cdot \left\{ a + \frac{p_0}{\rho g} \right\} + [AM] \cdot \left\{ \lambda \frac{W}{H} \right\} = 0 \quad (26)$$

$$f^3 = [AK31] \cdot \{u\} + [AK32] \cdot \{v\} + [AF] \cdot \{h\} + [AF] \cdot \{a-b\} + [AM] \cdot \{-r-i\} = 0 \quad (27)$$

f^1 , f^2 et f^3 forment toujours un système de $3n$ équations à $3n$ inconnues,

l'application de la méthode de Newton-Raphson conduit au système suivant:

$$\frac{\partial f^1}{\partial u} \{u^{k+1} - u^k\} + \frac{\partial f^1}{\partial v} \{v^{k+1} - v^k\} + \frac{\partial f^1}{\partial h} \{h^{k+1} - h^k\} = -f^1 \quad (28)$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial u} \{u^{k+1} - u^k\} + \frac{\partial f^2}{\partial v} \{v^{k+1} - v^k\} + \frac{\partial f^2}{\partial h} \{h^{k+1} - h^k\} = -f^2 \quad (29)$$

$$\frac{\partial f^3}{\partial u} \{u^{k+1} - u^k\} + \frac{\partial f^3}{\partial v} \{v^{k+1} - v^k\} + \frac{\partial f^3}{\partial h} \{h^{k+1} - h^k\} = -f^3 \quad (30)$$

On a, en négligeant les effets du vent:

$$\frac{\partial f^1}{\partial u} = AK11 + AF + \frac{\partial AK11}{\partial u} \cdot \{u\} + \frac{\partial AF}{\partial u} \cdot \{u\} \quad (31)$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial u} = AK21 + \frac{\partial AK11}{\partial u} \cdot \{v\} + \frac{\partial AF}{\partial u} \cdot \{v\} \quad (32)$$

$$\frac{\partial f^3}{\partial u} = AK31 + \frac{\partial AF}{\partial u} \cdot \{H\} \quad (33)$$

$$\frac{\partial f^1}{\partial v} = AK12 + \frac{\partial AK11}{\partial v} \cdot \{u\} + \frac{\partial AF}{\partial v} \cdot \{u\} \quad (34)$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial v} = AK11 + AF + \frac{\partial AK11}{\partial v} \cdot \{v\} + \frac{\partial AF}{\partial v} \cdot \{v\} \quad (35)$$

$$\frac{\partial f^3}{\partial v} = AK32 + \frac{\partial AF}{\partial v} \cdot \{H\} \quad (36)$$

$$\frac{\partial f^1}{\partial h} = \frac{\partial AK11}{\partial h} \cdot \{u\} + AK13 \quad (37)$$

$$\frac{\partial f^2}{\partial h} = \frac{\partial AK11}{\partial h} \cdot \{v\} + AK23 \quad (38)$$

$$\frac{\partial f^3}{\partial h} = AF + \frac{\partial AK31}{\partial h} \cdot \{u\} + \frac{\partial AK32}{\partial h} \cdot \{v\} \quad (39)$$

Introduisons le symbolisme suivant:

$$DA11DU = \frac{\partial AK11}{\partial u} \cdot \{u\} = \left[\int_S \left\{ - \frac{\partial (N_i N_j)}{\partial x} u + \frac{gu^2}{C^2 R} \frac{N_i N_j}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right\} dS \right] \quad (40)$$

$$DA22DU = \frac{\partial AK11}{\partial u} \cdot \{v\} = \left[\int_S \left\{ - \frac{\partial (N_i N_j)}{\partial x} v + \frac{guv}{C^2 R} \frac{N_i N_j}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right\} dS \right] \quad (41)$$

$$DA11DV = \frac{\partial AK11}{\partial v} \cdot \{u\} = \left[\int_S \left\{ - \frac{\partial (N_i N_j)}{\partial y} u + \frac{guv}{C^2 R} \frac{N_i N_j}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right\} dS \right] \quad (42)$$

$$DA22DV = \frac{\partial AK11}{\partial v} \cdot \{v\} = \left[\int_S \left\{ - \frac{\partial (N_i N_j)}{\partial y} v + \frac{gv^2}{C^2 R} \frac{N_i N_j}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right\} dS \right] \quad (43)$$

$$DA31DH = \frac{\partial AK31}{\partial h} \cdot \{u\} = \left[\int_S - u N_j \frac{\partial N_i}{\partial x} dS \right] \quad (44)$$

$$DA32DH = \frac{\partial AK32}{\partial h} \cdot \{v\} = \left[\int_S - v N_j \frac{\partial N_i}{\partial y} dS \right] \quad (45)$$

$$DA33DU = \frac{\partial AF}{\partial u} \cdot \{H\} = \left[\oint_C n_1^H N_i N_j dC \right] \quad (46)$$

$$DA33DV = \frac{\partial AF}{\partial v} \cdot \{H\} = \left[\oint_C n_2^H N_i N_j dC \right] \quad (47)$$

$$DAF1DU = \frac{\partial AF}{\partial u} \cdot \{u\} = \left[\oint_C n_1^u N_i N_j dC \right] \quad (48)$$

$$DAF1DV = \frac{\partial AF}{\partial v} \cdot \{u\} = \left[\oint_C n_2^u N_i N_j dC \right] \quad (49)$$

$$DAF2DU = \frac{\partial AF}{\partial u} \cdot \{v\} = \left[\oint_C n_1^v N_i N_j dC \right] \quad (50)$$

$$DAF2DV = \frac{\partial AF}{\partial v} \cdot \{v\} = \left[\oint_C n_2^v N_i N_j dC \right] \quad (51)$$

$$DA11DH = \frac{\partial AK11}{\partial h} \cdot \{u\} \quad (52)$$

$$DA22DH = \frac{\partial AK11}{\partial h} \cdot \{v\} \quad (53)$$

Les expressions (52) et (53) ne sont pas facilement dérivables par rapport à h en raison du terme $C^2 R_h$ où:

$$C = \frac{R_h^{1/6}}{n} \quad (54)$$

et:

$$R_h = \frac{S}{P} \quad (55)$$

Dans ce cas, nous avons fait l'hypothèse que les termes DA11DH et DA22DH sont négligeables et ils sont posés égaux à 0.

Dans le cas plus simple où $R_h = a+h-b$, la dérivée est déterminée analytiquement, on obtient alors:

$$DA11DH = \frac{\partial AK11}{\partial h} \cdot \{u\} = -\frac{4}{3} \left[\int_S n^2 g \frac{u \sqrt{u^2 + v^2}}{H^{7/3}} N_i N_j dS \right] \quad (56)$$

$$DA22DH = \frac{\partial AK11}{\partial h} \cdot \{v\} = -\frac{4}{3} \left[\int_S n^2 g \frac{v \sqrt{u^2 + v^2}}{H^{7/3}} N_i N_j dS \right] \quad (57)$$

En utilisant les expressions (40) à (53) ainsi que les expressions (31) à (39), puis en les reportant dans les expressions (28) à (30), on trouve, (en négligeant les effets du vent):

$$[AK11+AF+DA11DU+DAF1DU] \cdot \{u^{k+1}\} + [AK12+DA11DV+DAF1DV] \cdot \{v^{k+1}\} + [AK13+DA11DH] \cdot \{h^{k+1}\} = \\ [DA11DU+DAF1DU] \cdot \{u^k\} + [DA11DV+DAF1DV] \cdot \{v^k\} + DA11DH \cdot \{h^k\} - AK13 \cdot \left\{ a + \frac{P_o}{\rho g} \right\} \quad (58)$$

$$[AK21+DA22DU+DAF2DU] \cdot \{u^{k+1}\} + [AK11+AF+DA22DV+DAF2DV] \cdot \{v^{k+1}\} + [AK23+DA22DH] \cdot \{h^{k+1}\} = \\ [DA22DU+DAF2DU] \cdot \{u^k\} + [DA22DV+DAF2DV] \cdot \{v^k\} + DA22DH \cdot \{h^k\} - AK23 \cdot \left\{ a + \frac{P_o}{\rho g} \right\} \quad (59)$$

$$[AK31+DA33DU] \cdot \{u^{k+1}\} + [AK32+DA33DV] \cdot \{v^{k+1}\} + [AF+DA31DH+DA32DH] \cdot \{h^{k+1}\} = \\ [DA33DU] \cdot \{u^k\} + DA33DV \cdot \{v^k\} + [DA31DH+DA32DH] \cdot \{h^k\} - AF \cdot \{a-b\} - AM \cdot \{-r-i\} \quad (60)$$

Remarque:

Les équations de mouvement et de continuité sur l'eau étant non linéaires, la formulation de base des équations n'est pas unique. Par exemple, l'équation (177) du chapitre 3, en se plaçant à l'état de régime et en négligeant pluie et infiltration, pourrait être factorisée sous la forme:

$$\left[-\int_S \left\{ u \frac{\partial N_i}{\partial x} + v \frac{\partial N_i}{\partial y} \right\} N_j \, dS + \oint_C N_i N_j (u n_1 + v n_2) \, dC \right] \cdot \{H\} = 0 \quad (61)$$

On voit que cette formulation conduirait à une solution triviale pour H, qu'on ne saurait accepter par considération physique.

5.3 Résolution algébrique linéaire

Il existe de nombreuses techniques pour la solution d'un système d'équations algébriques linéaires simultanées, [SEQUI, 1973], [MEYER, 1973, 1975]. La méthode des éléments finis appliquée aux structures a joué un rôle important dans le développement de ces techniques pour des systèmes de grande taille. La distinction entre les méthodes sont d'ordre pratique, (occupation mémoire, temps de calcul, etc...), ou d'ordre mathématique, (élimination de Gauss, méthodes itératives, etc...). Par exemple, on distingue fréquemment les méthodes utilisant exclusivement la mémoire interne de l'ordinateur directement accessible des méthodes qui font appel à des mémoires externes d'accès rapide tels les disques. Pour notre part, nous avons choisi dans ce travail de nous en tenir au premier type de méthodes, c'est-à-dire celles n'utilisant pas de mémoires externes.

Jusqu'à présent, la grande majorité des techniques utilisées font l'hypothèse de systèmes symétriques. Ceci n'est pas le cas pour notre travail. Par ailleurs, le système à résoudre a une structure de bande et est

de nature éparse. TEWARSON,[1973], fournit une étude très complète des méthodes de résolution de tels systèmes. SEQUI,[1973], fait la comparaison entre un grand nombre de sous-routines de résolution écrites en Fortran. La méthode de KEY,[1973], retient particulièrement l'attention puisqu'elle donne d'excellents résultats pour l'exemple servant de test à SEQUI,[1973], et parce qu'elle nécessite peu de place en mémoire. L'algorithme est basé sur la méthode de Gauss-Jordan, ce qui permet de conserver la nature éparse du système au cours de l'élimination, (par opposition à la méthode de Gauss qui nécessite moins d'opérations mais qui requiert plus d'espace-mémoire). Cette méthode, en raison des techniques de compression utilisées, permet d'occuper peu d'espace et donc de travailler à l'aide de la mémoire interne uniquement.

5.4 Structure du programme

Nous avons essayé de donner une structure modulaire à notre programme. Pour changer le système d'équations différentielles partielles à intégrer, il suffit de modifier quelques lignes de la sous-routine d'intégration sur chaque élément, (sous-routine MATR), et la sous-routine d'entrée des données, (sous-routine DONNEE). Le nombre d'équations différentielles partielles importe peu et un seul paramètre doit être modifié pour obtenir une solution transitoire ou une solution à l'état de régime. La figure 5-1 indique l'organisation générale du programme avec ses différentes sous-routines et leurs relations. Nous donnerons dans ce qui suit, une brève description des sous-routines et fonctions utilisées.

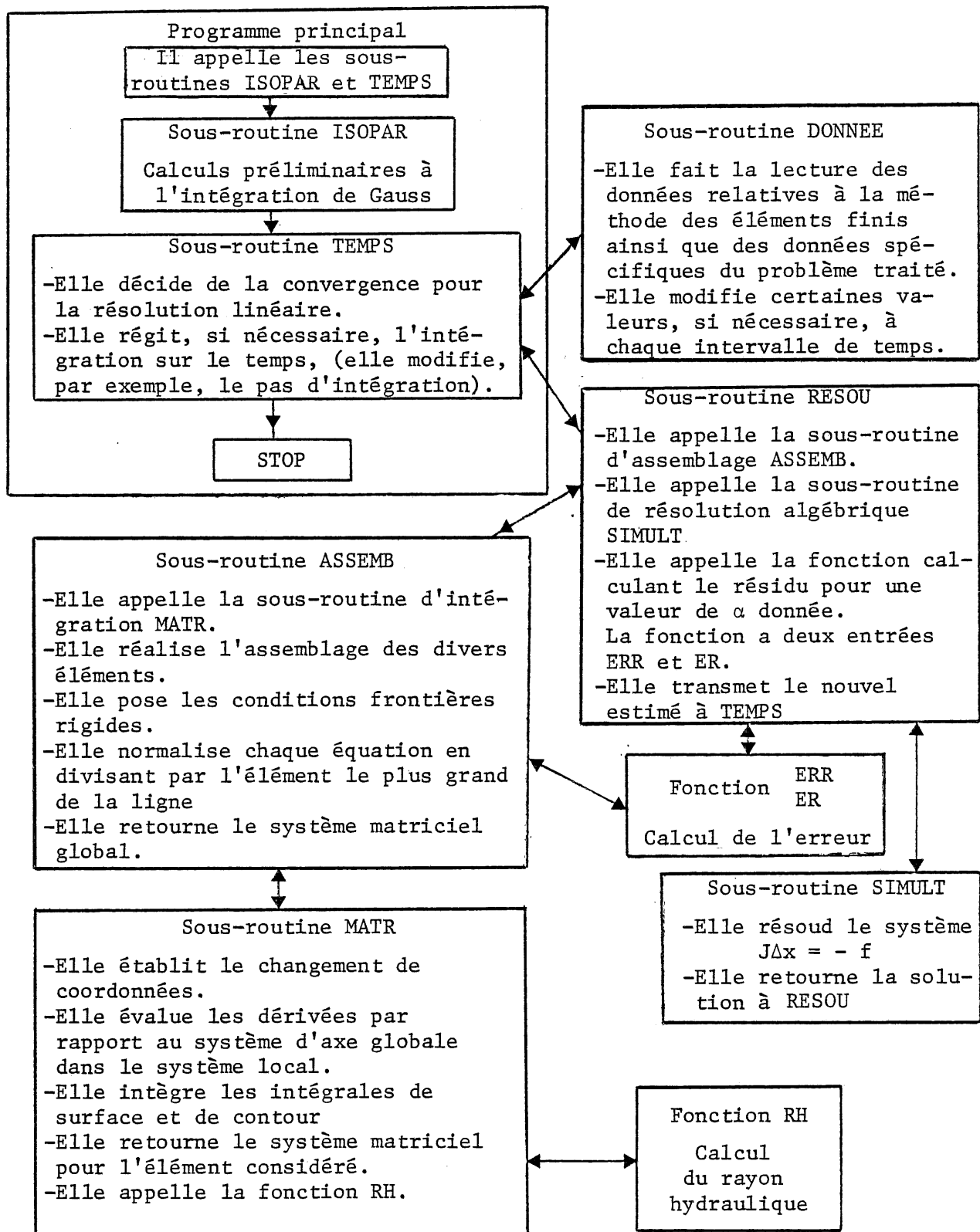


Figure 5-1

Organisation Générale du programme

Sous-routine ISOPAR

Cette sous-routine effectue dès le début de l'exécution du programme, et une fois pour toutes, les calculs préliminaires à l'intégration de Gauss. Elle établit en particulier les fonctions d'interpolation, ainsi que leurs dérivées, aux points de Gauss. Les valeurs calculées sont transmises à la sous-routine d'intégration à l'aide d'un bloc "common". Plusieurs sous-routines de ce type sont disponibles selon le type de l'élément et le nombre de points de Gauss. Le bloc "common" est, alors, modifié en conséquence dans tout le programme.

Sous-routine TEMPS

Cette sous-routine va lire les données pour chaque intervalle de temps. Elle appelle la sous-routine RESOU qui lui transmet le nouvel estimé au temps t fixé. Elle effectue un test de convergence sur la norme du vecteur correction lorsque le système algébrique est non-linéaire. Si la convergence est accomplie, ou si le système est linéaire, le temps est incrémenté d'une valeur Δt . S'il s'agit d'un problème à l'état de régime la valeur finale obtenue après convergence est indiquée.

Sous-routine DONNEE

Cette sous-routine permet d'obtenir, au départ, toute l'information nécessaire au bon fonctionnement du programme, (informations sur le maillage, paramètres connus des équations différentielles à intégrer, etc...). A chaque intervalle de temps, elle modifie les paramètres dépendants du temps s'il en est. Pour un problème à l'état de régime la sous-routine DONNEE n'est exécutée qu'une seule fois.

Sous-routine RESOU

C'est cette sous-routine qui détermine le nouvel estimé de la solution au temps t . En premier, elle appelle la sous-routine ASSEMB pour effectuer l'intégration sur chaque élément et l'assemblage. Elle appelle, par la suite, la sous-routine de résolution algébrique SIMULT. Le vecteur correction Δx ainsi obtenu est multiplié par le coefficient α égal à 1. Si nécessaire, ce coefficient α est alors modifié, ($\alpha = \alpha/2$), pour que le nouvel estimé au temps t entraîne des résidus plus faibles qu'à l'itération précédente.

Fonction ERR

Cette fonction fournit la somme des carrés des résidus. Elle possède deux entrées, (ER et ERR), selon que l'assemblage a déjà été effectué ou non avec le nouvel estimé. La somme des carrés des résidus est normalisée en divisant par le nombre de degrés de liberté du système étudié.

Sous-routine ASSEMB

Cette sous-routine initialise à zéro le système matriciel cherché avant d'appeler la sous-routine d'intégration pour chaque élément du domaine. La matrice du système à résoudre est alors assemblée, élément par élément, sous forme comprimée selon la technique de KEY, [1973]. Les indices des colonnes sont placés par ordre croissant. Par la suite, les conditions aux limites rigides, de type de Dirichlet, sont introduites selon la méthode expliquée à la section 3.3.6.2. Pour finir le système d'équations est normalisée en divisant chaque équation du système par le coefficient le plus grand de la ligne. Le système matriciel global est alors transmis par

l'intermédiaire d'un bloc "common" à la sous-routine RESOU.

Sous-routine MATR

C'est le coeur du programme. Cette sous-routine effectue l'intégration sur chaque élément. Les dérivées des fonctions d'interpolation exprimées dans le système d'axes global sont estimées dans le système d'axes local. La correction pour passer d'un élément de surface dans le système global à un élément de surface dans le système local est évalué dans le même temps. Les sous-matrices du système, voir par exemple les équations (40) à (53) de ce chapitre, sont initialisées à zéro. La somme pondérée de chaque sous-matrice est alors effectuée aux différents points de Gauss de l'élément pour les intégrales de surface. Le même processus s'applique aux intégrales de contour pour les points de Gauss du contour. Les sous-matrices sont alors assemblées sur l'élément. Le sous-système ainsi obtenu sur l'élément est alors retourné à la sous-routine d'assemblage ASSEMB. Un simple paramètre doit être spécifié pour intégrer le système dans le temps ou pour le résoudre à l'état de régime.

Fonction RH

Cette fonction permet de calculer le rayon hydraulique. Celui-ci est soit posé égal à la hauteur d'eau au point considéré ou est évalué à partir de la définition du rayon hydraulique sur une section. Dans ce dernier cas le périmètre mouillé est approximé par des segments de droites entre chaque noeud de la section considérée.

Remarques:

- La sous-routine SIMULT est décrite par KEY, [1973].

- Le programme a été implanté sur l'ordinateur IBM 360/65 du Centre de Calcul de l'Université de Sherbrooke. Dans tous les exemples retenus, nous nous sommes limités à l'utilisation de 300K d'espace mémoire.

- Les calculs sont effectués en double précision.

BIBLIOGRAPHIE

BROYDEN, C.G., "Recent Development in Solving Non-linear Algebraic Systems", Numerical Methods for Non-linear Algebraic Equations, Ed. by P. RABINOWITZ, Gordon and Breach Science Publishers, 1970.

CARNAHAN, B., H.A. LUTHER and J.O. WILKES, "Applied Numerical Methods", John Wiley & Sons, 1969.

COOK, R.D., "Concepts and Applications of Finite Element Analysis", John Wiley & Sons, 1974.

DENNIS, J.E., "Some Computational Techniques for the Nonlinear Least Square Problem", Numerical Solution of Systems of Nonlinear Algebraic Equations, Ed. by G.D. BYRNE and C.A. HALL, Academic Press, 1973.

FLETCHER, R., "Generalized Inverses for Nonlinear Equations and Optimization", Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations, Ed. by P. RABINOWITZ, Gordon and Breach Science Publishers, 1970.

HILDEBRAND, F.B., "Introduction to Numerical Analysis", Mc Graw-Hill Book Company, 2nd Ed., 1974.

JACOBY, S.L.S., J.S. KOWALIK and J.T. PIZZO, "Iterative Methods for Nonlinear Optimization Problems", Prentice-Hall, 1972.

KEY, J.E., "Computer Program for Solution of Large, Sparse, Unsymmetric Systems of Linear Equations", International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 6, p. 497-509, 1973.

LAPIDUS, L., "Digital Computation for Chemical Engineers", Mc Graw-Hill Book Company, 1962.

LEMIEUX, P.F., "Efficient Algorithm for Distribution Networks", Journal of The Hydraulics Division, Proc. of the ASCE, vol. 98, no. HY11, p. 1911-1920, Nov. 1972.

LEMIEUX, P.F. and M. de BROISSIA, "A New Modified Newton's Method", Paper presented at the Second Canadian Symposium on Fluids Dynamics held at Vancouver, May 17-20, 1976.

MEYER, C., "Solution of Linear Equations - State of the Art", Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 99, no. ST7, p. 1507-1526, July, 1973.

MEYER, C., "Special Problems Related to linear Equation Solvers", Journal of the Structural Division, ASCE, vol. 101, no. ST4, p. 869-890, April, 1975.

MURRAY, W., ed., "Numerical Methods for Unconstrained Optimization", Academic Press, New-York, 1972.

ORTEGA, J.M. and W.C. RHEINBOLDT, "Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables", Academic Press, 1970.

POWELL, M.J.D., "A Hybrid Method for Nonlinear Equations", Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations, Ed. by P. RABINOWITZ, Gordon and Breach Science Publishers, 1970a.

POWELL, M.J.D., "A Fortran Subroutine for Solving Systems of Nonlinear Algebraic Equations", Numerical Methods for Nonlinear Algebraic Equations, Ed. by P. RABINOWITZ, Gordon and Breach Science Publishers, 1970b.

RALL, L.B., "Solution of Nonlinear Systems of Equations", Numerical Solution of Partial Differential Equations, Proc. of the NATO Advanced Study Institute held at Kjeller, Norway, D. Reidel Publishing Company, August 20-24, 1973.

SEQUI, W.T., "Computer Programs For The Solution of Systems of Linear Algebraic Equations", NASA Contractor Report, NASA CR-2173, 1973.

TEWARSON, R.P., "Sparse Matrices", Academic Press, New-York and London, 1973.

YOUNG, D.M., "On The Solution of Large Systems of Linear Algebraic Equations With Sparse, Positive Definite Matrices", Numerical Solution of Systems of Nonlinear Algebraic Equations, Ed. by G.D. BYRNE and C.A. HALL, Academic Press, 1973.

ZAGUSKIN, V.L., "Handbook of Numerical Methods for the Solution of Algebraic and Transcendental Equations", Pergamon Press, 1961.

CHAPITRE 6

PRESENTATION ET DISCUSSION

DES RESULTATS

6.1 Vérification du programme

L'intégration numérique, le calcul des intégrales de contour, l'assemblage, la pose des conditions aux limites rigides sont autant d'éléments difficiles à mettre en oeuvre. L'intégration dans le système d'axes local (s, v) rendait mal aisée la vérification du programme bloc par bloc. C'est la raison pour laquelle cette première partie traite de plusieurs problèmes en transmission de chaleur dont la solution est connue, (analytiquement ou numériquement).

Dans un premier temps nous étudierons le transfert de chaleur dans une plaque soumise sur une de ses faces à des pertes par convection, (la température ambiante est de 0°).

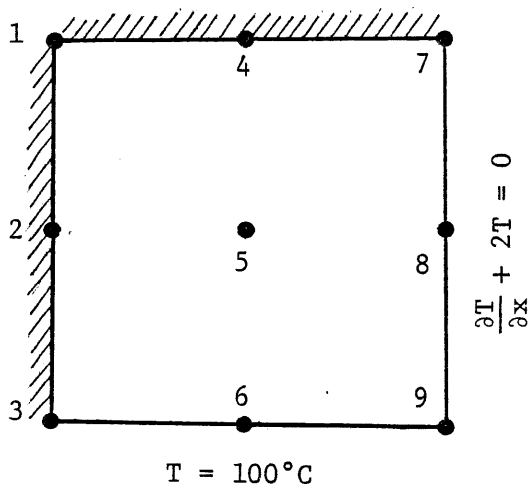


Figure 6-1

Conduction dans une plaque

Une autre face contiguë est exposée à une température de 100°C . Les deux autres arêtes sont bien isolées, (voir la figure 6-1). Les points numérotés de 1 à 9 indiquent les points où la vérification est effectuée. La solution analytique est déterminée à l'aide des équations (142) et (143)

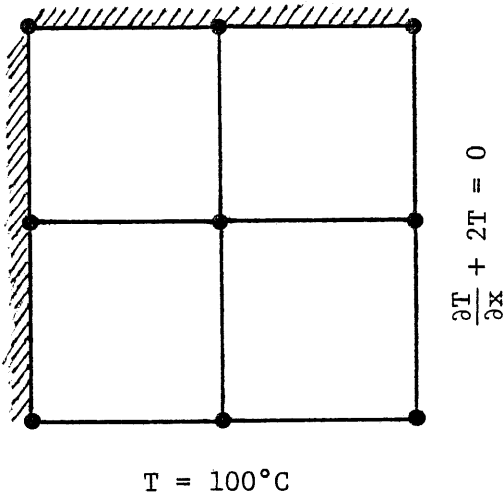


Figure 6-2

$n=9; E=4; n_E=4; n_G=4$

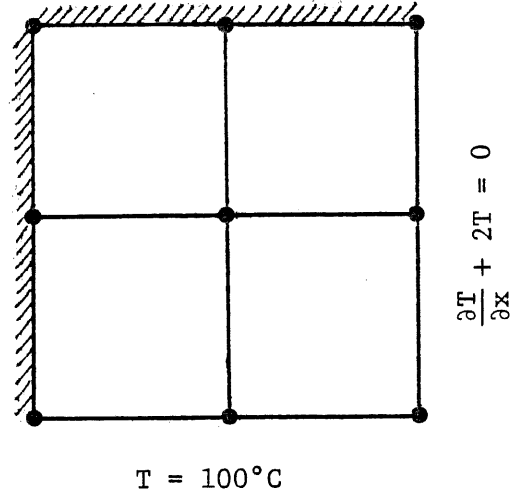


Figure 6-3

$n=9; E=4; n_E=4; n_G=9$

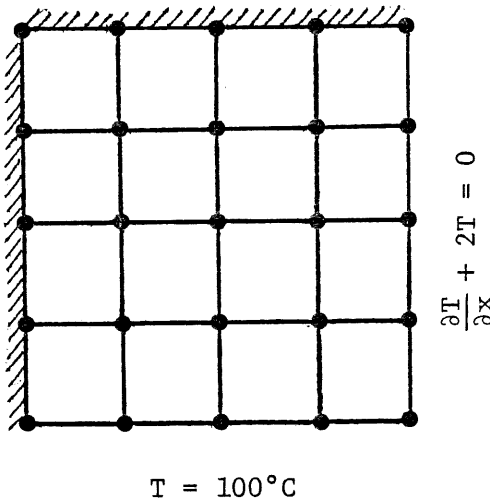


Figure 6-4

$n=25; E=16; n_E=4; n_G=4$

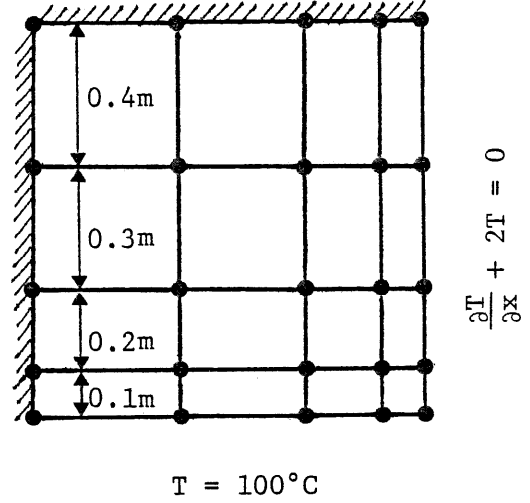
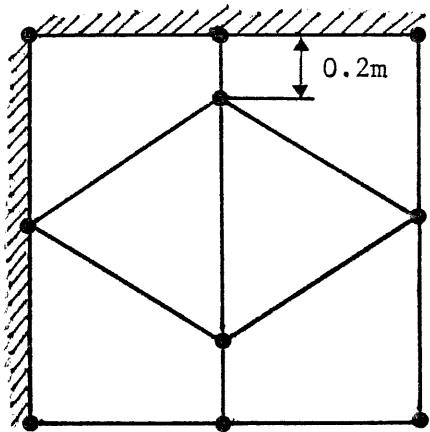


Figure 6-5

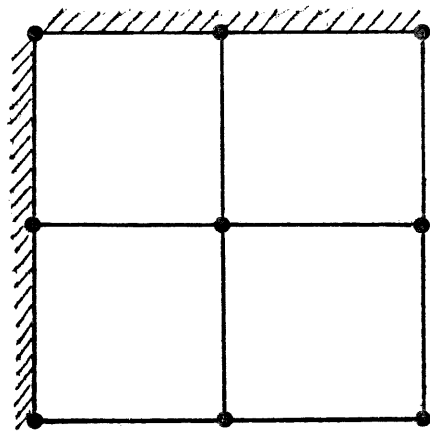
$n=25; E=16; n_E=4; n_G=4$



$T = 100^{\circ}\text{C}$

Figure 6-6
 $n=10; E=6; n_E=4; n_G=4$

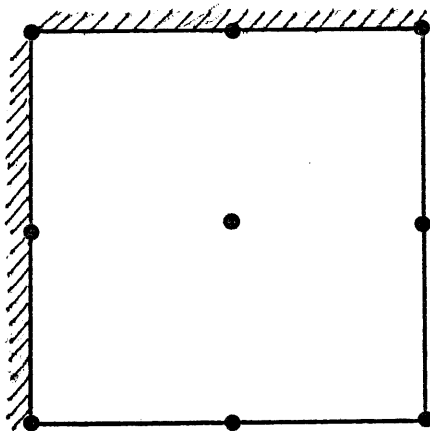
$$\frac{\partial T}{\partial x} + 2T = 0$$



$T = 100^{\circ}\text{C}$

Figure 6-7
 $n=21; E=4; n_E=8; n_G=4$

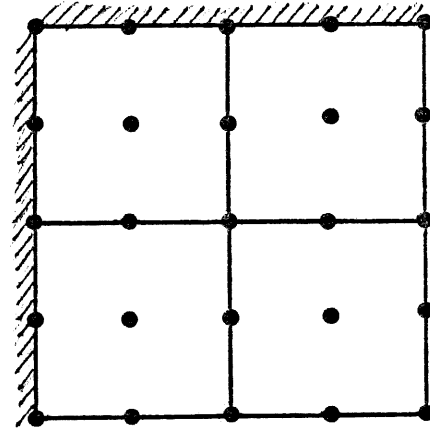
$$\frac{\partial T}{\partial x} + 2T = 0$$



$T = 100^{\circ}\text{C}$

Figure 6-8
 $n=9; E=1; n_E=9; n_G=9$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + 2T = 0$$



$T = 100^{\circ}\text{C}$

Figure 6-9
 $n=25; E=4; n_E=9; n_G = 9$

$$\frac{\partial T}{\partial x} + 2T = 0$$

du chapitre 2. La plaque est carrée et a un mètre de côté. Le tableau 5 indique le résumé de ces essais. Les différents types de maillage utilisés apparaissent dans les figures 6-2 à 6-9. Le symbolisme suivant est adopté:

- n nombre de noeuds du maillage,
- E nombre d'éléments du maillage,
- n_E nombre de points par élément,
- n_G nombre de points de Gauss pour l'intégration numérique.

"-" indique que la valeur de la température n'est pas déterminée numériquement en ce point.

Les noeuds du maillage apparaissent clairement sur les figures.

Les quelques remarques suivantes peuvent être déduites des résultats:

- Les températures obtenues numériquement sont proches des valeurs déterminées analytiquement même si le maillage utilisé est grossier.

- Les solutions obtenues sont d'autant meilleures que le maillage est plus raffiné. Il en va de même lorsque le nombre de points par élément est augmenté.

- Les figures 6-5 et 6-6 font apparaître l'utilisation d'éléments de forme variable. En particulier, la figure 6-6 montre des quadrilatères quelconques qui sont même réduits dans certains cas à de simples triangles.

- Les résultats obtenus suggèrent que quatre points de Gauss sont suffisants pour l'intégration sur des éléments à quatre points ou à huit points. Ceci n'est pas étonnant puisque les fonctions d'interpolation sont au maximum d'ordre 3 pour des éléments à huit points; l'utilisation de deux points de Gauss, en intégrant dans une direction seulement, conduit à un résultat exact pour un polynôme d'ordre 3. Par contre, les fonctions d'interpolation pour des éléments à neuf points sont d'ordre plus élevé. Des

Tableau 5

Résultats comparés du transfert de chaleur dans une plaque

Type de maillage	n	E	n _E	n _G	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Figure 6-2	9	4	4	4	72.3	80.3	100.0	61.6	73.5	100.0	34.8	39.2	100.0
Figure 6-3	9	4	4	9	72.3	80.3	100.0	61.6	73.5	100.0	34.8	39.2	100.0
Figure 6-4	25	16	4	4	71.1	79.4	100.0	62.1	72.0	100.0	35.0	42.7	100.0
Figure 6-5	25	16	4	4	71.2	-	100.0	-	-	-	34.9	-	100.0
Figure 6-6	10	6	4	4	69.3	80.8	100.0	63.2	-	100.0	32.5	42.1	100.0
Figure 6-7	21	4	8	4	70.7	79.2	100.0	62.5	70.3	100.0	36.4	42.5	100.0
Figure 6-8	9	1	9	9	71.8	78.2	100.0	61.1	72.1	100.0	39.8	41.1	100.0
Figure 6-9	25	4	9	9	70.7	79.0	100.0	62.1	71.7	100.0	35.4	44.1	100.0
Solution Analytique					70.7	79.0	100.0	62.0	71.6	100.0	35.2	43.0	100.0

Tableau 6

Résultats comparés Kreith-Eléments finis

numéro du point	Température	
	Kreith	°F
1	22.2	22.4
2	56.3	57.0
3	93.7	93.8
4	21.4	21.7
5	54.6	55.2
6	93.2	93.2
7	4.7	3.7
8	29.6	27.8
9	87.6	84.1

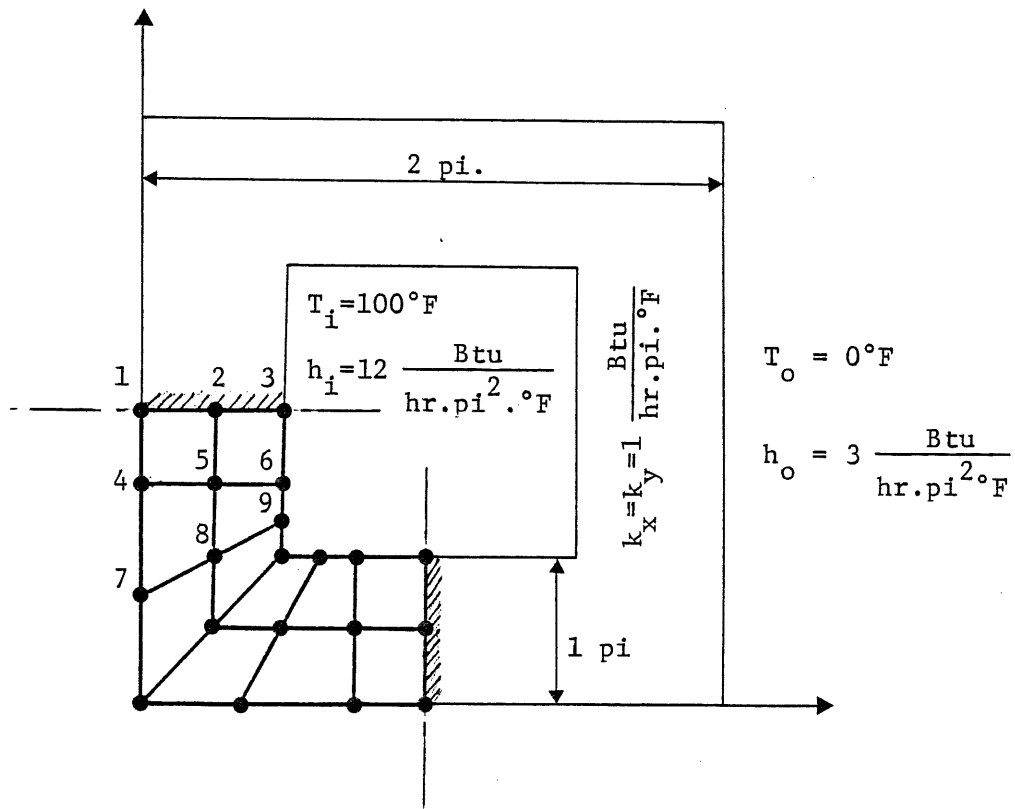


Figure 6-10

Problème de Kreith - Conduit de cheminée

essais effectués avec quatre points de Gauss pour des éléments à neuf points conduisent à des approximations beaucoup moins satisfaisantes.

- De nombreux essais ont été effectués dont un grand nombre n'ont pas été mentionnés. La plupart avaient pour but de s'assurer que les résultats obtenus étaient indépendants du système d'axe global choisi au départ.

Un autre type d'essai a été effectué. Ce problème est emprunté à KREITH, [1965], (p. 109). La figure 6-10 représente le quart de la maçonnerie d'une cheminée. La température des gaz de cheminée est de 100°F avec un coefficient de transfert de chaleur par convection de $12 \frac{\text{Btu}}{\text{hr-pi}^2-\text{°F}}$. La température extérieure est de 0°F, le coefficient de transfert de chaleur est de $3 \frac{\text{Btu}}{\text{hr-pi}^2-\text{°F}}$. Le gradient de température, par symétrie, est nul sur les faces coupées. Le coefficient de conduction est estimé à $1 \frac{\text{Btu}}{\text{hr-pi}-\text{°F}}$. Les résultats apparaissent au tableau 6 et montrent une bonne similitude entre les deux méthodes. KREITH a obtenu ses résultats par une méthode de relaxation et un schéma aux différences finies. Il est, donc, difficile de pousser plus loin la comparaison, les deux méthodes de résolution étant numériques.

6.2 Ecoulement à surface libre

Dans ce paragraphe, la résolution des équations à surface libre est testée pour divers types d'écoulement. Tous les canaux étudiés ont la même pente positive, ($S=0.001$), et le régime considéré est de type fluvial. Le coefficient de Manning est dans tous les cas de 0.02 et la largeur des canaux étudiés est de 2 mètres. Deux approximations interviennent pour le rayon hydraulique. L'approximation hydraulique consiste à effectuer le

quotient de l'aire de la section considérée sur le périmètre mouillé. L'approximation par la hauteur d'eau consiste à poser $R_h = a+h-b = H$. Dans une première partie, plusieurs types de conditions aux limites sont testées. Par la suite les deux types d'approximation sur le rayon hydraulique sont comparés. Enfin l'intégration des équations est appliquée à des canaux courbes.

6.2.1 Répartition des conditions aux limites

Nous avons vu, (section 2.2.1), que deux types de conditions aux limites prévalent. Les frontières fixes sont directement prises en compte par les équations. Par contre, sur les frontières ouvertes, il faut spécifier, en général, la vitesse normale \vec{V} , la hauteur H , voire les deux paramètres, (voir, par exemple, section 2.2.2.3 ou [GROTKOP, 1973]). Les figures 6-11 à 6-19 illustrent les exemples retenus. L'intégration numérique servant de base à la comparaison est effectuée par la méthode de Runge-Kutta-Merson, (voir la section 2.2.5); les vérifications s'appliquent uniquement aux canaux droits. Les résultats obtenus par la méthode de Runge-Kutta-Merson peuvent être considérés comme exacts pour le nombre de chiffres significatifs retenus. Les tableaux 7 et 8 font état des résultats sur la vitesse u et sur la hauteur H . Les vitesses v obtenues selon l'axe y par la méthode des éléments finis sont toutes inférieures à 10^{-5} m/sec. et n'ont donc pas été reportées, étant considérées comme nulles. Tous les exemples cités dans cette section utilisent l'approximation hydraulique sur R_h . Le canal a une longueur totale de 1500 mètres. Les numéros indiqués sur les figures 6-11 à 6-19 montrent les sections où s'effectuent les comparaisons. Les éléments utilisés sont des éléments à quatre points.

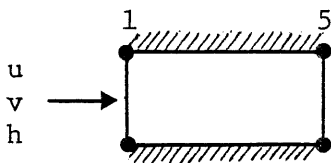


Figure 6-11

Conditions limites amont. Un élément à quatre points.

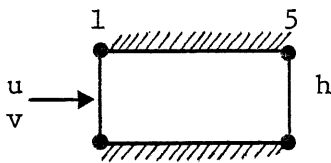


Figure 6-12

Conditions limites partagées. Un élément à quatre points.

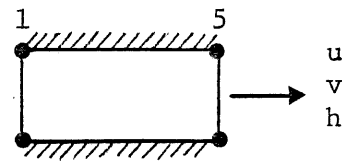


Figure 6-13

Conditions limites aval. Un élément à quatre points.

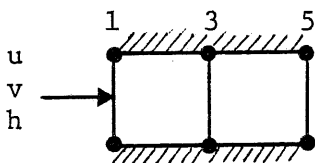


Figure 6-14

Conditions limites amont. Deux éléments à quatre points.

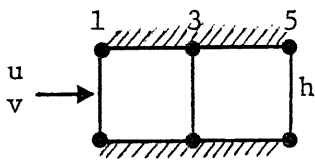


Figure 6-15

Conditions limites partagées. Deux éléments à quatre points.

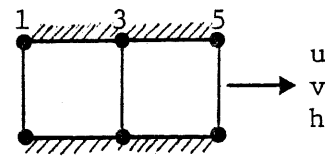


Figure 6-16

Conditions limites aval. Deux éléments à quatre points.

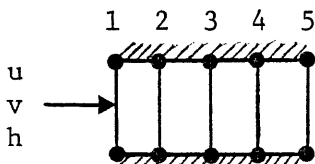


Figure 6-17

Conditions limites amont. Quatre éléments à quatre points.

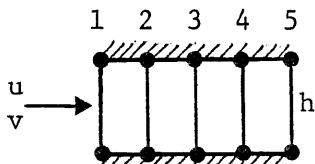


Figure 6-18

Conditions limites partagées. Quatre éléments à quatre points.

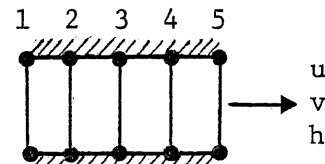


Figure 6-19

Conditions limites aval. Quatre éléments à quatre points.

Tableau 7

Résultats comparés sur la composante u de la vitesse

u	1	2	3	4	5
Figure 6-11	-	-	-	-	-
Figure 6-12	0.400	-	-	-	0.481
Figure 6-13	0.405	-	-	-	0.466
Figure 6-14	0.400	-	0.415	-	0.458
Figure 6-15	0.400	-	0.418	-	0.461
Figure 6-16	0.401	-	0.423	-	0.466
Figure 6-17	0.400	0.408	0.423	0.438	0.463
Figure 6-18	0.400	0.409	0.423	0.439	0.465
Figure 6-19	0.400	0.410	0.424	0.441	0.466
Runge-Kutta-Merson	0.400	0.411	0.424	0.441	0.466

Tableau 8

Résultats comparés sur la hauteur d'eau H

H	1	2	3	4	5
Figure 6-11	-	-	-	-	-
Figure 6-12	1.044	-	-	-	0.858
Figure 6-13	0.995	-	-	-	0.858
Figure 6-14	1.000	-	0.958	-	0.871
Figure 6-15	0.992	-	0.949	-	0.858
Figure 6-16	0.999	-	0.945	-	0.858
Figure 6-17	1.000	0.978	0.943	0.911	0.863
Figure 6-18	0.998	0.975	0.942	0.908	0.858
Figure 6-19	1.000	0.974	0.944	0.906	0.858
Runge-Kutta-Merson	1.000	0.974	0.944	0.906	0.858

Les constatations suivantes peuvent être effectuées :

- Le premier cas traité ne converge pas, (fig. 6-11). L'approximation d'une itération à l'autre se rapproche et s'éloigne constamment de la solution. Il faut, cependant, noter que dans ce cas la méthode de Newton-Raphson était utilisée sans les artifices dont nous avons parlé au chapitre 5 pour forcer la convergence. Par ailleurs, la matrice jacobienne est approximée puisque certains termes, (ceux contenant R_h), sont considérés comme constants au cours de la dérivation, (voir la section 5.2.3).

- Tous les autres exemples convergent. La position des conditions aux limites semblent jouer faiblement sur la précision finale. Les meilleurs résultats, dans tous les cas, sont obtenus en plaçant les trois conditions limites en aval. Dans ce dernier cas, les intégrales de contour sont évaluées sur la frontière ouverte en amont.

- La précision augmente avec le nombre d'éléments. Avec quatre éléments, la précision obtenue est excellente et ce, pour tous les cas de conditions aux limites.

6.2.2 Approximation du rayon hydraulique

La figure 6-20 présente l'essai sur lequel on applique tour à tour

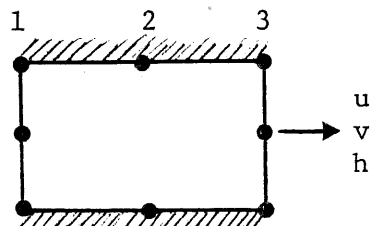


Figure 6-20

Elément à huit points

les deux approximations du rayon hydraulique. Les conditions limites sont placées en aval. Les caractéristiques du canal sont identiques au cas précédent exceptée la longueur qui est cette fois de 3500 mètres.

Tableau 9

Résultats comparés sur la composante u de la vitesse

u	1	2	3
approximation hydraulique	0.407	0.455	0.600
$R_h = H$	0.512	0.537	0.600
approximation hydraulique Runge-Kutta-Merson	0.400	0.441	0.600

Tableau 10

Résultats comparés sur la hauteur d'eau H

H	1	2	3
approximation hydraulique	1.205	1.083	0.792
$R_h = H$	0.933	0.891	0.792
approximation hydraulique Runge-Kutta-Merson	1.189	1.078	0.792

Les comparaisons sont toujours effectuées à l'aide de l'intégration de Runge-Kutta-Merson qui utilise l'approximation hydraulique sur R_h . Les tableaux 9 et 10 indiquent les résultats.

Les différences obtenues pour les deux types d'approximation sont assez importantes. En fait, l'approximation du rayon hydraulique par la hauteur d'eau est assez grossière dans ce cas. Elle s'appliquerait beaucoup mieux à un estuaire, par exemple, (la largeur est alors beaucoup plus grande que la hauteur d'eau). L'utilisation de l'approximation de la hauteur d'eau pour le rayon hydraulique est importante car, dans ce cas, la matrice jacobienne est évaluée correctement et la convergence est, alors, assurée, (voir le paragraphe 5.2). Ce type d'approximation peut donc servir pour obtenir un premier estimé de la solution. Le fait que la convergence soit assurée est important, car si certaines difficultés apparaissaient, l'utilisation du rayon hydraulique égal à la hauteur d'eau permet de ne pas imputer ces difficultés à la résolution algébrique non linéaire.

6.2.3 Canaux courbes

Les résultats obtenus sur les canaux droits laissaient entrevoir des perspectives intéressantes sur les écoulements non visqueux à surface libre. Cependant, des difficultés sérieuses sont apparues dans le cas d'écoulement dans des canaux courbes. Sans diverger, les estimés successifs ne se rapprochaient pas d'une solution acceptable. Par ailleurs, la somme des carrés des résidus restait élevée après quelques itérations. L'approximation de la hauteur d'eau pour le rayon hydraulique permettait d'écarter la résolution non linéaire comme étant la cause de ces difficultés. Deux autres raisons sont apparues comme étant essentielles pour la compréhension du problème, il s'agit de la nature hyperbolique du système à résoudre et

des écoulements secondaires de type spiroïdaux.

a) hyperbolicité du système

Le problème de l'écoulement à surface libre est régi par un système d'équations différentielles totalement hyperboliques, (voir la section 3.1.2). Ce type de problème se caractérise, en fait, par la possibilité d'obtenir une solution qui n'est pas analytique, [SOMMERFELD, 1964], [GARABEDIAN, 1964]. En particulier, une discontinuité géométrique à la frontière se propage dans le domaine entier. Ceci s'oppose particulièrement aux équations différentielles partielles de type elliptique qui possèdent toujours une solution analytique. Dans ce cas les discontinuités à la frontière ne se propagent pas à l'intérieur du domaine considéré. La nature hyperbolique des équations régissant l'écoulement à surface libre se retrouve facilement dans des exemples simples. En effet, les éléments droits à quatre points, (figure 6-21), ne permettent pas de représenter correctement un canal courbe; les

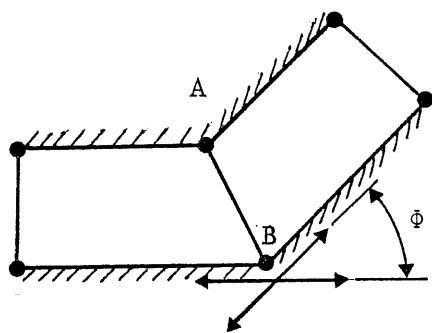


Figure 6-21

Canal courbe représenté par des éléments droits

doubles tangentes aux points A et B constituent une discontinuité inacceptable pour la solution du problème, et cela, même si l'angle ϕ que fait le canal est de l'ordre de quelques degrés. Il s'agit bien d'une discontinuité pour le problème aux points A et B puisque les conditions aux limites imposent une vitesse normale nulle en tout point des frontières fermées. Dans

les exemples retenus par la suite nous utiliserons donc des éléments courbes. Toutefois, même dans ce cas, les difficultés subsistent. Il faut, alors, assurer la continuité des tangentes sur les contours inter-éléments.

L'appendice A expose comment appliquer cette nouvelle contrainte sur le système d'axe (s,v) .

b) écoulements secondaires

Les canaux tournants sont caractérisés souvent par des écoulements secondaires de type spiroïdaux [CHOW, 1959]. La figure 6-22 indique un tel phénomène projeté sur une section donnée. Il est bien évident que le modèle

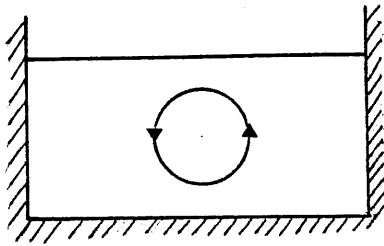


Figure 6-22

Écoulements spiroïdaux

proposé ne tient pas compte des pertes énergétiques dues à ces écoulements. Cependant, pour certaines géométries, [SHUKRY, 1950], ces pertes sont négligeables.

c) essais effectués et discussions

Les essais effectués ont été nombreux et nous n'en retiendrons que trois pour illustrer la résolution des équations sur des canaux courbes. La figure 6-23 montre la géométrie retenue tandis que le tableau 11 indique les coordonnées des points. Le canal tourne de 45° et commence par une section

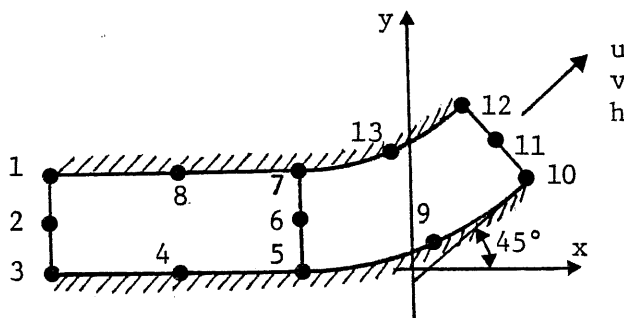


Figure 6-23

Canal courbe

droite de 250 mètres. La pente est de 0.0001. Pour le même cas de figure, les trois essais suivants sont effectués:

Essai 1 : Le rayon hydraulique est approximé par la hauteur d'eau.

On retient quatre chiffres significatifs pour définir les coordonnées des

Tableau 11
Coordonnées des points et estimé de départ

numéro du point	x	y	estimé de départ		
			u	v	H
1	-250.0	2.0	0.400	0.0	0.975
2	-250.0	1.0	0.400	0.0	0.975
3	-250.0	0.0	0.400	0.0	0.975
4	-125.0	0.0	0.400	0.0	0.9875
5	-5.0	0.0	0.400	0.0	0.9995
6	-5.0	1.0	0.400	0.0	0.9995
7	-5.0	2.0	0.400	0.0	0.9995
8	-125.0	2.0	0.400	0.0	0.9875
9	0.401650429	1.03033009	0.500	0.250	1.000
10	4.94974747	4.12132034	0.424	0.424	1.005
11	4.24264100	4.82842700	0.424	0.424	1.005
12	3.53553391	5.53553391	0.424	0.424	1.005
13	-.36611652	2.88388348	0.300	0.300	1.000

points.

Essai 2 : La même approximation que précédemment est retenue pour le rayon hydraulique et on conserve neuf chiffres significatifs pour définir les coordonnées des points.

Essai 3 : L'approximation hydraulique est utilisée pour R_h . Les coordonnées des points sont définis à l'aide de neuf chiffres significatifs.

Pour les deux premiers essais, l'estimé initial est indiqué au tableau 11, tandis que les résultats du deuxième essai servent d'estimé pour le troisième. Les conditions aux limites sont imposées en aval. Le tableau 12 résume les différents essais et indique la somme des résidus au carré atteinte après le nombre d'itérations indiqué. Les tableaux 13, 14 et 15 donnent les valeurs obtenues aux points indiqués à la figure 6-23. Ces résultats sont plausibles. La convergence est réalisée sans difficultés; le vecteur correction déterminé par la méthode de Newton-Raphson n'est corrigé qu'à deux ou trois reprises par l'intermédiaire du coefficient α , (voir la section 5.2.2). La somme des carrés des résidus est faible. Dans tous les cas, la composante de la vitesse selon l'axe y peut être considérée comme nulle pour le tronçon droit parallèle à l'axe des x. Dans le premier essai nous n'avons retenu que quatre chiffres significatifs pour la définition des coordonnées des points. On constate, alors, l'apparition de vortex. Avec neuf chiffres significatifs, les vortex sont disparus et les résultats paraissent tout à fait cohérents. L'influence de l'approximation sur le rayon hydraulique est relativement faible car le canal n'est pas très long.

Tableau 12
Identification des Essais

	Chiffres significatifs sur les coordonnées	Rayon hydraulique	Nombre d'itérations	Somme des résidus au carré
Essai 1	4	$R_h = H$	13	10^{-21}
Essai 2	9	$R_h = H$	17	10^{-22}
Essai 3	9	$R_h = S/P$	5	10^{-13}

Tableau 13

Composante de la vitesse selon l'axe x

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Essai 1	1.24	1.14	-2.15	0.569	1.69	0.447	0.016	-0.263	-0.812	0.424	0.424	0.424	2.02
Essai 2	1.21	0.593	0.014	0.462	0.856	0.606	0.327	0.736	0.424	0.424	0.424	0.424	0.665
Essai 3	1.23	0.502	0.182	0.537	0.852	0.607	0.316	0.747	0.417	0.424	0.424	0.424	0.665

Tableau 14

Composante de la vitesse selon l'axe y

v	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Essai 1	0.011	-0.003	-0.006	-0.008	0.018	0.025	-0.004	-0.013	-0.434	0.424	0.424	0.424	0.880
Essai 2	0.000	-0.001	0.002	-0.002	0.002	0.002	-0.002	-0.001	0.193	0.424	0.424	0.424	0.284
Essai 3	0.002	-0.002	0.004	-0.001	0.001	0.002	-0.004	0.000	0.191	0.424	0.424	0.424	0.284

Tableau 15
Hauteur d'eau

H	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Essai 1	1.0013	1.0015	1.0017	1.1045	1.0485	1.0479	1.0473	1.1045	1.1550	1.0050	1.0050	1.0050	1.1580
Essai 2	1.0057	1.0057	1.0057	1.0092	1.0030	1.0029	1.0028	1.0093	1.0096	1.0050	1.0050	1.0050	1.0024
Essai 3	1.0578	1.0579	1.0579	1.0375	1.0056	1.0055	1.0054	1.0375	1.0111	1.0050	1.0050	1.0050	1.0040

6.3 Dispersion d'une nappe d'huile

6.3.1 Essai préliminaire

L'essai préliminaire suivant est effectué. Un volume V est relâché soudainement au point A d'un domaine carré simple, (figure 6.24). Le

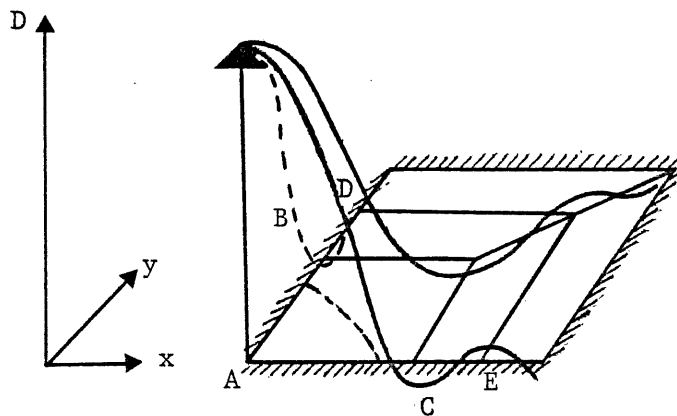


Figure 6-24

Essai préliminaire

peuvent être dégagées :

a- La conservation du volume initial est assurée. Au bout d'un certain temps, l'huile se retrouve uniformément répartie sur le maillage.

b- Il apparaît des oscillations plus ou moins importantes selon la position de la nappe. Ces oscillations sont inhérentes à la méthode utilisée. En effet si la courbe pointillée représente le véritable emplacement de la nappe au temps t , la méthode doit trouver des valeurs négatives en B et C de manière à conserver le volume initial. Au fur et à mesure que la nappe se déplace les points B et C deviennent recouverts et ce sont les points D et E où la hauteur d'huile devient négative et ainsi de suite. Ces oscillations ne nuisent pas, en général, à la compréhension ni à la précision

maillage est indiqué sur la figure. Les déplacements par convection sont négligés en posant les vitesses u et v nulles, (voir l'équation 10, chapitre 2). On suppose également qu'il n'y a pas de dégradation, ($k=0$).

Deux constatations simples

des résultats. Pour s'en persuader, il suffit de raffiner le maillage en prenant plus d'éléments; les oscillations deviennent, alors, plus faibles et éventuellement négligeables. Toutefois, l'intégration conduit aux mêmes valeurs approximatives pour des points situés suffisamment à l'intérieur de la nappe tant pour le maillage grossier que pour le maillage raffiné au même temps. La position de la ligne $D=0$ enfermant la nappe n'est qu'indicative. On conçoit d'après les réflexions précédentes qu'elle sera légèrement influencée par le maillage.

6.3.2 Description des problèmes traités

Les différents exemples qui suivent sont effectués sur le fleuve St-Laurent, dans l'estuaire maritime, à la hauteur de Rimouski. Dans tous les cas, le taux de dégradation est considéré comme nul ce qui constitue en fait une hypothèse conservatrice pour l'établissement de rapports d'impacts. En effet, une partie de l'huile s'évapore dans les premières heures suivant un éventuel accident. Par ailleurs, le premier essai est effectué pour des vitesses nulles. Ceci permet dans un premier temps de vérifier l'intégration numérique au cours du temps pour les maillages les plus fins. Par la suite, deux séries temporelles seront considérées pour les vitesses combinées du courant et du vent. Ces données sont extraites de mesures expérimentales effectuées sur le fleuve au large de Rimouski, (Station A), [DRAPEAU, 1975]. On fait l'hypothèse que ce profil de vitesse pour un temps donné s'applique à tout le domaine considéré. Les deux séries temporelles sont identiques, mais simplement décalées de quelques heures l'une par rapport à l'autre. Les tableaux 16 et 17 indiquent les deux séries retenues pour les vitesses.

Tableau 16

Première série temporelle

t heures	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u m/sec	0.40	0.08	0.20	0.35	0.5	0.35	-0.20	0.05	0.20	0.40	0.75	0.80	0.70
v m/sec	-0.25	-0.25	-0.10	-0.20	0.1	0.15	0.20	0.15	0.10	0.0	-0.20	-0.40	-0.25
t heures	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
u m/sec	0.30	-0.15	-0.15	-0.25	-0.15	-0.10	-0.05	-0.05	-0.05	0.05	0.10	0.15	0.10
v m/sec	-0.15	-0.20	-0.10	0.05	0.10	0.15	0.15	0.15	0.25	0.40	0.45	0.35	0.40
t heures	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36		
u m/sec	-0.20	-0.25	-0.35	-0.25	-0.10	0.0	0.10	0.20	0.40	0.50	0.90		
v m/sec	0.25	-0.10	-0.15	-0.05	0.05	0.05	0.10	0.15	-0.50	-0.30	0.0		

Tableau 17

Deuxième série temporelle

t heures	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u m/sec	0.35	0.5	0.35	-0.2	0.05	0.2	0.4	0.75	0.8	0.7	0.3	-0.15	-0.15
v m/sec	-0.2	0.1	0.15	0.2	0.15	0.1	0.0	-0.2	-0.4	-0.25	-0.15	-0.2	-0.1
t heures	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
u m/sec	-0.25	-0.15	-0.1	-0.05	-0.05	-0.05	0.05	0.1	0.15	0.10	-0.20	-0.25	-0.35
v m/sec	0.05	0.1	0.15	0.15	0.15	0.25	0.4	0.45	0.35	0.40	0.25	-0.10	-0.15
t heures	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36		
u m/sec	-0.25	-0.10	0.0	0.10	0.20	0.40	0.50	0.90	0.40	0.08	0.20		
v m/sec	-0.05	0.05	0.05	0.10	0.15	-0.50	-0.30	0.0	-0.25	-0.25	-0.10		

Plusieurs types de maillage sont étudiés

- Les maillages carrés successifs sont utilisés pour obtenir avec grande précision le déplacement de la nappe. Au départ, on retient un maillage de 140 mètres par 140 mètres comprenant 196 éléments. Juste avant que la nappe d'huile n'atteigne les parois, (et soit réfléchi), la taille du maillage est doublée tout en conservant le même nombre d'éléments et ainsi de suite. La figure 6-25 indique ces maillages successifs, (à partir du quatrième, 1120 mètres x 1120 mètres). Lorsque le maillage carré atteint la côte il est modifié pour en tenir compte (maillage 7 et 8).

- Le maillage carré global correspond au maillage 8, figure 6-25, avec des éléments carrés, (exceptés les éléments touchant la côte). Il se distingue des précédents dans la mesure où il est utilisé dès le début du déversement de la nappe et pour toute l'étude. Ce maillage comporte 199 éléments et 229 noeuds.

- Le maillage variable global apparaît, par exemple, à la figure 6-27(k). La figure ne reproduit que la plus grande partie du maillage. En effet, les quatre éléments carrés, qui entourent le point de déversement pour l'huile, (toujours indiqué par une flèche), sont en fait découpés en plusieurs éléments de taille variable, (les éléments sont plus petits vers le centre). Ce maillage comporte 164 éléments et 166 noeuds.

Plusieurs ensembles de valeurs sont envisagés pour les coefficients de dispersion selon les axes x et y, (ces axes apparaissent à la figure 6-25). Ceci permet d'évaluer la sensibilité des équations relativement à ces paramètres. Le tableau 18 indique les ensembles de valeurs retenus. L'ensemble 1 correspond aux données de JAMES, [1972], pour un vent de 5 à 10 mètres/sec et un déversement de 500 tonnes, (approximativement 550 m^3).

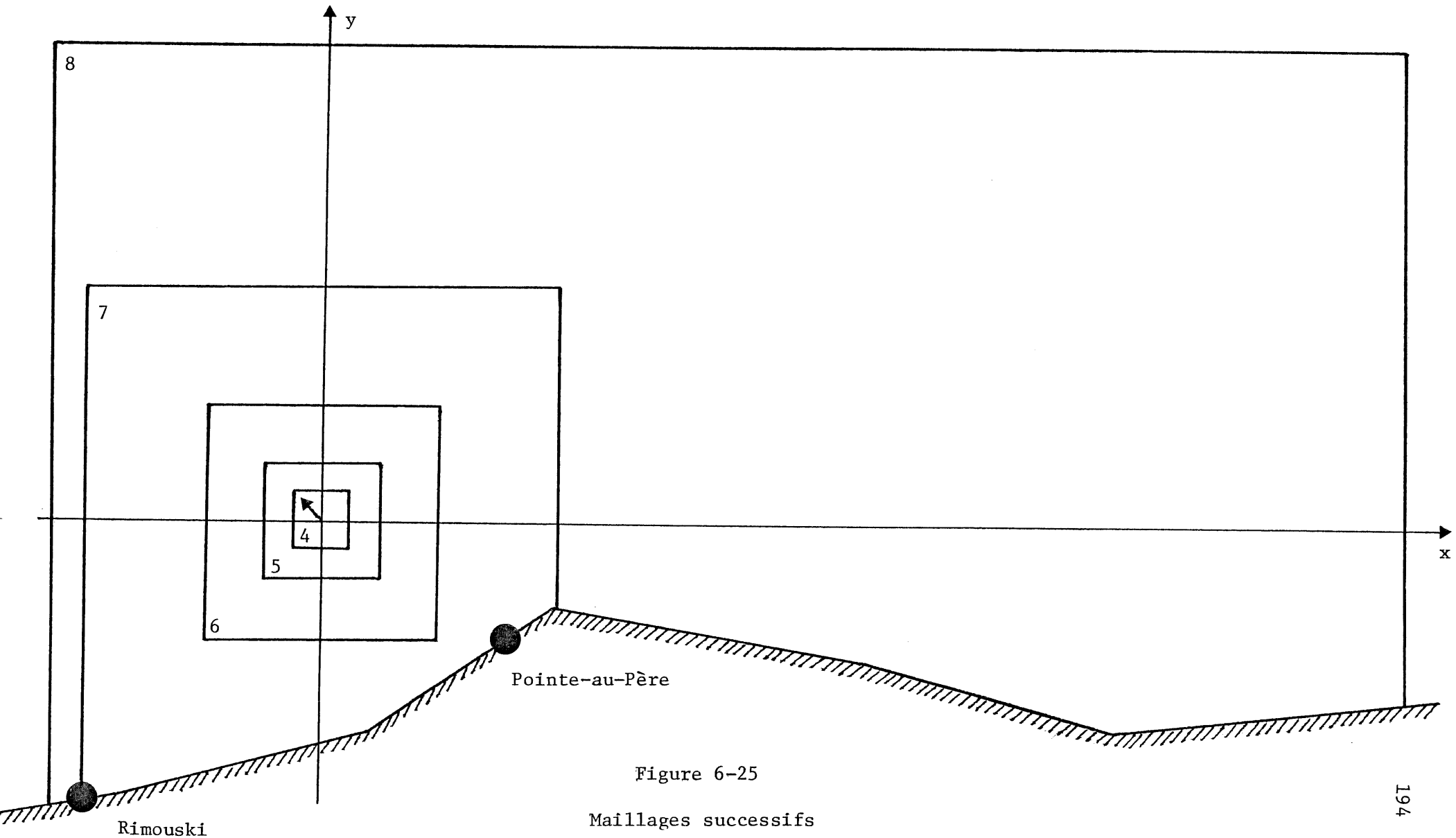


Figure 6-25

Maillages successifs

Tableau 18

Coefficient de dispersion, [m^2/sec]

	ensemble 1	ensemble 2	ensemble 3
k_x	30	20	60
k_y	20	20	60

Dans tous les essais nous considérerons qu'un volume de $550 m^3$ a été relâché brusquement au point d'impact. Les simulations traitées apparaissent au tableau 19.

Tableau 19

Simulations effectuées

Simulation	Figures	Série temporelle (*)	Coefficient de dispersion	Type de maillage
1	6-26	0	1	maillages carrés successifs
2	6-27 (a) à (j)	1	1	maillages carrés successifs
3	6-27 (k) et (l)	1	1	maillage variable global
4	6-28	1	2	maillages carrés successifs
5	6-29	1	3	maillages carrés successifs
6	6-30	2	1	maillages carrés successifs
7	6-31	2	1	maillage carré global
8	6-32	1	1	estacade carré de 4480 mètres de côté

(*) La série temporelle 0 correspond à $u=v=0$

6.3.3 Résultats des simulations

Simulation 1

Les résultats de la simulation 1 apparaissent aux figures 6-26. Il s'agit là d'une vérification de l'intégration dans le cas particulier où une solution analytique est connue, ($u=v=0$). Sur les figures un seul trait apparaît; il n'est pas possible en effet de discerner entre les résultats numériques et analytiques à ce niveau. Les tableaux 20 et 21 donnent deux exemples de résultats pour un temps proche du déversement et pour un temps plus éloigné. Les résultats trouvés restent très voisins dans les deux cas. Le maillage est agrandi chaque fois que la nappe atteint les bords du maillage. Pour arriver au temps $t=4040$ sec, il a fallu changer cinq fois de maillage en utilisant les dernières valeurs trouvées à chaque changement de maillage comme nouvelles valeurs initiales. Ces manipulations ne semblent pas produire d'imprécisions importantes. D'ailleurs, le volume calculé de la nappe est bien conservé.

Le premier intervalle de temps est de 0.1 sec; à chaque itération l'intervalle est augmenté de 1.25 fois sa valeur précédente. Lorsque l'intervalle Δt atteint 30 sec, il est conservé à cette valeur jusqu'à ce que le temps depuis l'impact dépasse 1800 sec. L'intervalle est alors fixé à 60 sec jusqu'à ce que l'on atteigne 7200 sec. Par la suite l'intervalle de temps est fixé à 300 secondes et ce jusqu'à la fin. Ce schéma pour l'intégration temporelle sera conservé dans tous les cas sauf indications contraires.

Les oscillations observées restent faibles et semblent bien provenir de l'approximation sur l'espace, comme nous l'avons vu à la section 6.3.1, plutôt que de l'intégration sur le temps. Ceci est confirmé lorsque l'intervalle d'intégration est encore diminué; les résultats ne sont pas

Tableau 20

Hauteur d'huile (millimètres)

Résultats comparés analytiques et numériques

(u=v=0; T=39.7 sec)

		$x(m)$		$y(m)$						
		0	-20	-40	-60	-80	-100	-120	-140	
Résultats analytiques	0	45.0	41.4	32.2	21.1	11.7	5.5	2.2	0.7	
	20	39.7	36.5	28.4	18.6	10.4	4.9	1.9	0.6	
	40	27.2	25.0	19.4	12.8	7.1	3.3	1.3	0.4	
	60	14.5	13.3	10.4	6.8	3.8	1.8	0.7	0.2	
	80	6.0	5.5	4.3	2.8	1.6	0.7	0.3	0.1	
	100	1.9	1.8	1.4	0.9	0.5	0.2	0.1	0.0	
	120	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	0.0	0.0	
Résultats numériques	0	43.3	40.1	31.8	21.4	12.0	5.5	2.1	1.1	
	20	38.7	35.8	28.3	19.0	10.7	4.9	1.9	1.0	
	40	27.4	25.3	20.0	13.4	7.5	3.4	1.3	0.7	
	60	15.1	13.9	10.9	7.3	4.0	1.8	0.7	0.4	
	80	6.1	5.7	4.4	2.9	1.6	0.7	0.3	0.2	
	100	1.7	1.6	1.2	0.8	0.4	0.2	0.1	0.1	
	120	0.3	0.2	0.2	0.1	0.1	-	-	-	

alors modifiés. Cette première simulation est importante, car elle permet de vérifier les résultats obtenus pour les maillages successifs et pour les intervalles de temps choisis. Ce type de maillage, en conservant le même schéma d'intégration sur le temps, nous servira donc de référence pour toutes les autres simulations.

Simulation 2

Les résultats de cette simulation apparaissent dans les figures 6-27(a) à 6-27(j). On s'aperçoit que la première série temporelle conduit rapidement la nappe d'huile au rivage qu'elle atteint entre 4780 et 5920 secondes. Le centre de gravité de la nappe a alors parcouru 2 kilomètres environ. Une fois sur les berges l'huile se dépose et il est alors difficile de faire l'hypothèse d'une réflexion totale. Par ailleurs, le profil des vitesses est le même en tout point du maillage à un temps fixé. Ce profil est normalement modifié par le rivage ce qui n'est pas le cas ici. Ceci peut conduire à une accumulation d'huile importante si la convection continue à pousser la nappe vers le rivage sans que cette accumulation ait un sens physique particulier. Les calculs sont donc interrompus lorsque la majeure partie de la nappe atteint les côtes.

Simulation 3

La même simulation que précédemment est effectuée. Cependant, on utilise cette fois le maillage variable global. Le même maillage est, rappelons-le, conservé tout au long de la simulation. Ce maillage est très fin proche du point d'impact et devient de plus en plus grossier au fur et à mesure qu'on s'en éloigne. L'intégration sur le temps est effectuée comme précédemment. En comparant les figures 6-27(h) et 6-27(k), d'une part,

aux figures 6-27(j) et 6-27(l), d'autre part, on s'aperçoit que les résultats trouvés sont tout à fait semblables. Le maillage variable permet d'obtenir la réponse plus rapidement. Cependant, la nappe devient plus difficile à tracer, la densité de point étant plus faible. Le contour $D=0$ est approximatif et, comme on le voit dans cette comparaison, il est influencé par le type de maillage.

Simulations 4 et 5

Ces deux types de simulation consistent à analyser la sensibilité des paramètres de diffusion k_x et k_y . Les maillages successifs sont conservés. En comparant les simulations 2 et 4, (figures 6-27 et 6-28), on voit que les résultats obtenus sont très proches pour des temps de comparaison voisins. La nappe apparaît circulaire dans le deuxième cas mais elle atteint la côte dans les mêmes conditions, (voir les figures 6-27(h) et 6-28(g) ainsi que les figures 6-27(i) et 6-28(h)). La simulation 5 utilise des coefficients de diffusion respectivement deux et trois fois plus gros pour k_x et k_y que la simulation 2. La nappe atteint le rivage après 3200 secondes avec la simulation 5 au lieu de 5920 secondes pour la simulation 2, (figure 6-29(g)). Dans tous les cas, il semble bien que l'importance des coefficients de diffusion choisis décroît avec le temps.

Simulation 6

La simulation 6 reprend la simulation 2 avec la deuxième série temporelle. Cette fois la nappe évite le rivage au départ et se déplace vers l'aval en augmentant de diamètre. Les résultats apparaissent dans les figures 6-30. Au bout de 10 heures, (figure 6-30(r)), le centre de gravité de la nappe a parcouru 14 kilomètres environ. Pendant quelques heures la

nappe longe le rivage. La progression de la nappe s'effectue par bonds car les vitesses de courant sont constamment modifiées par la marée.

Simulation 7

La simulation 7 apparaît à la figure 6-31. La simulation précédente est reprise mais avec le maillage carré global. L'intégration sur le temps est modifiée. Cette fois-ci, on utilise un intervalle sur le temps de 300 secondes. Cet intervalle est augmenté comme précédemment jusqu'à ce qu'il atteigne 600 secondes; il est alors conservé à cette valeur par la suite. La comparaison des simulations 6 et 7 est très intéressante. En effet, les résultats obtenus sont pratiquement identiques bien que les discrétisations dans l'espace et dans le temps soient considérablement transformées. La durée des calculs est réduite de beaucoup. Sur un ordinateur IBM 360/65, le temps de calcul est dans ces conditions, de 8 minutes C.P.u. pour 1 heure de temps réel. La figure 6-31 montre le déplacement chronologique de la nappe en prenant pour contour l'isohauteur 10^{-3} millimètres. Le trait pointillé indique le déplacement que subirait un corps flottant lâché au même instant au point d'impact. L'intégration numérique suit bien le profil général du courant.

Simulation 8

La simulation 2 est effectuée à nouveau mais une estacade carrée de 4480 mètres de côté est placée autour du point d'impact. La figure 6-32 indique le comportement de la nappe une fois qu'elle est réfléchiée sur les parois. On remarque sur la figure 6-32(b) l'apparition d'un contour particulier. A ce point il est difficile de savoir si l'étranglement qui se produit indique le véritable comportement de la nappe ou s'il s'agit de

problèmes numériques. Par la suite, la hauteur d'huile sur le bord augmente en raison des forces de convection et il se produit des oscillations du type vu à la section 6.3.1.

Il est toutefois possible de suivre de manière qualitative le déplacement de la nappe. L'huile se rassemble dans le coin droit au bas de la figure puis remonte le long de la paroi parallèle à l'axe y .

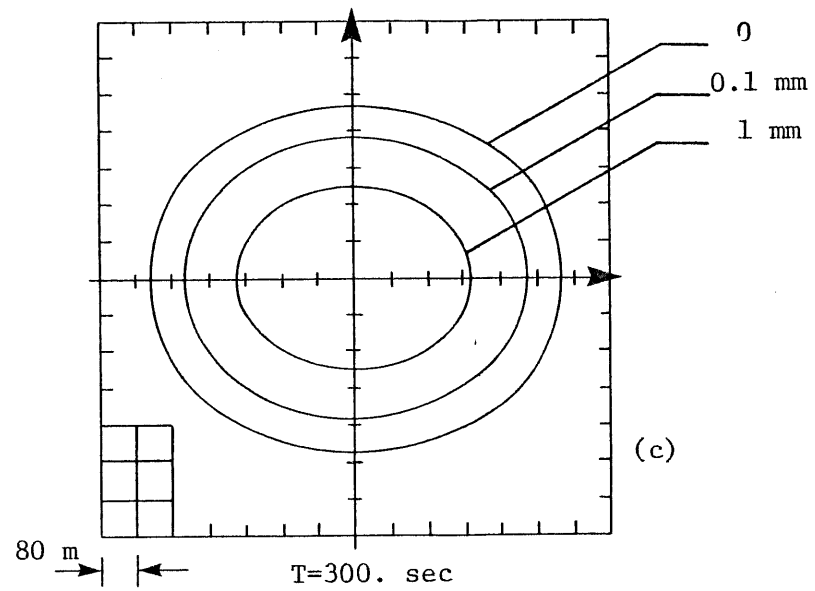
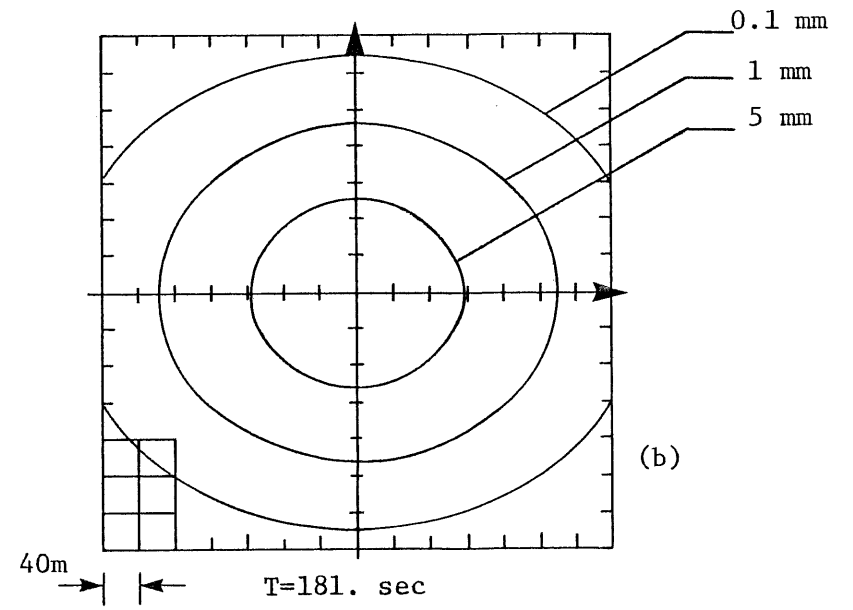
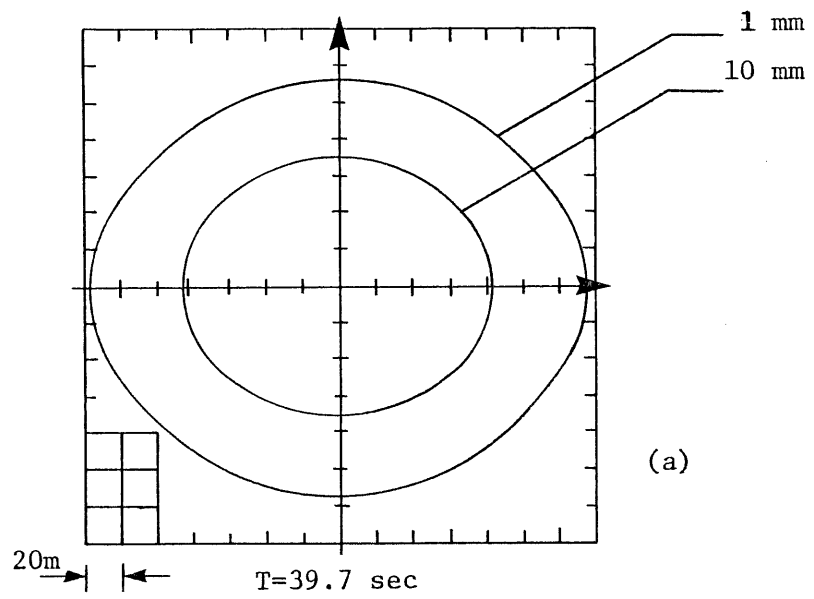


Figure 6-26
Simulation 1

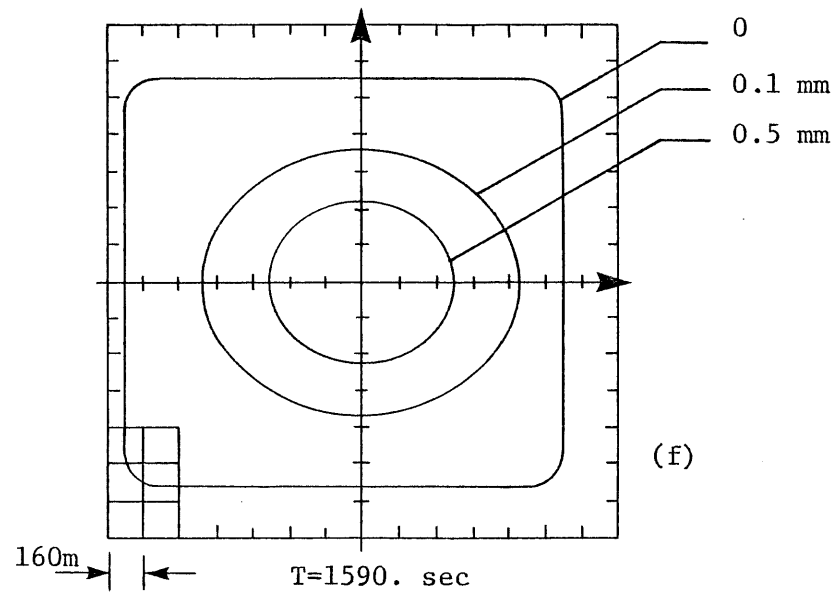
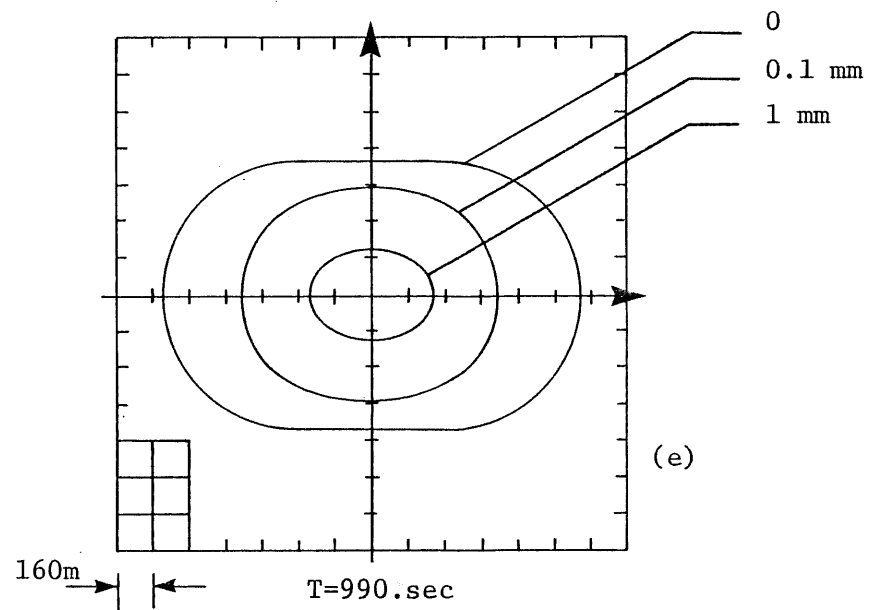
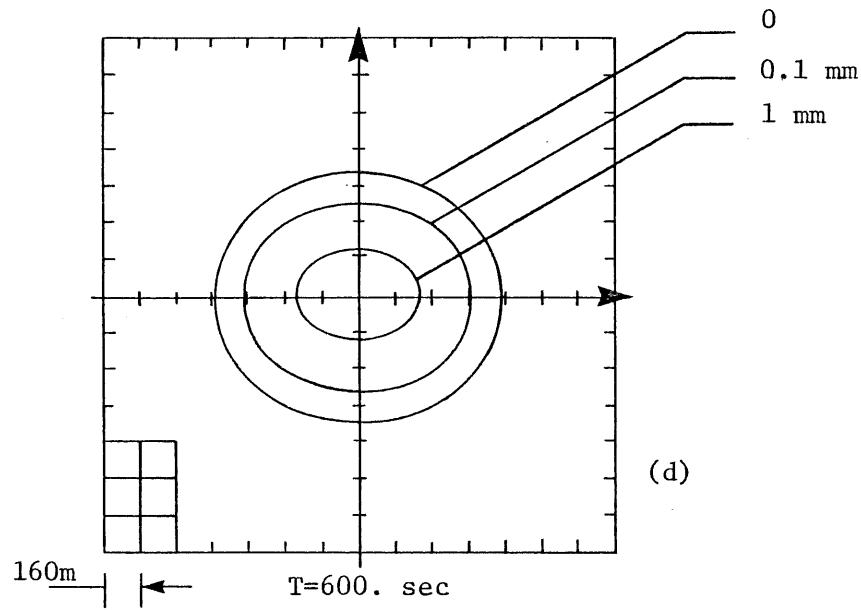


Figure 6-26
Simulation 1

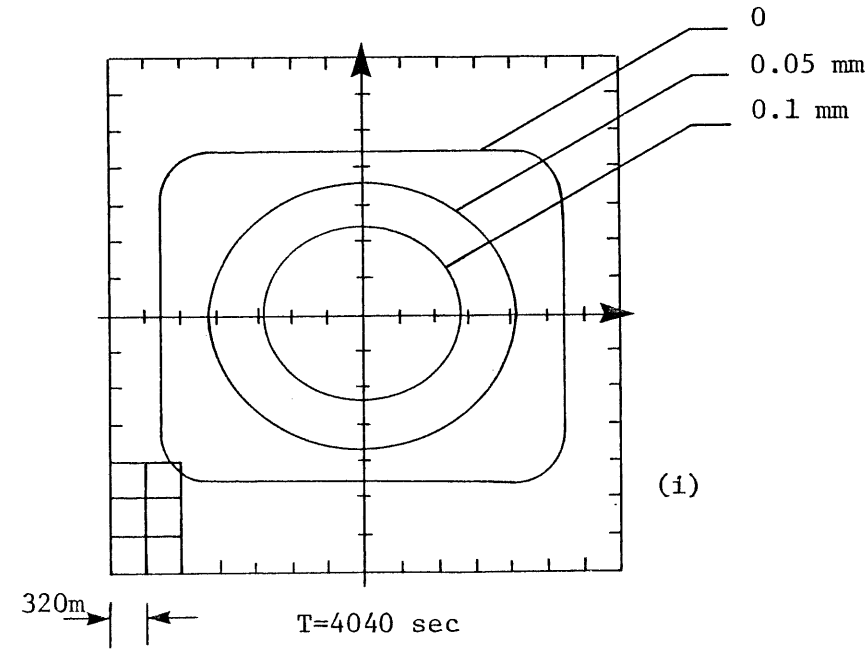
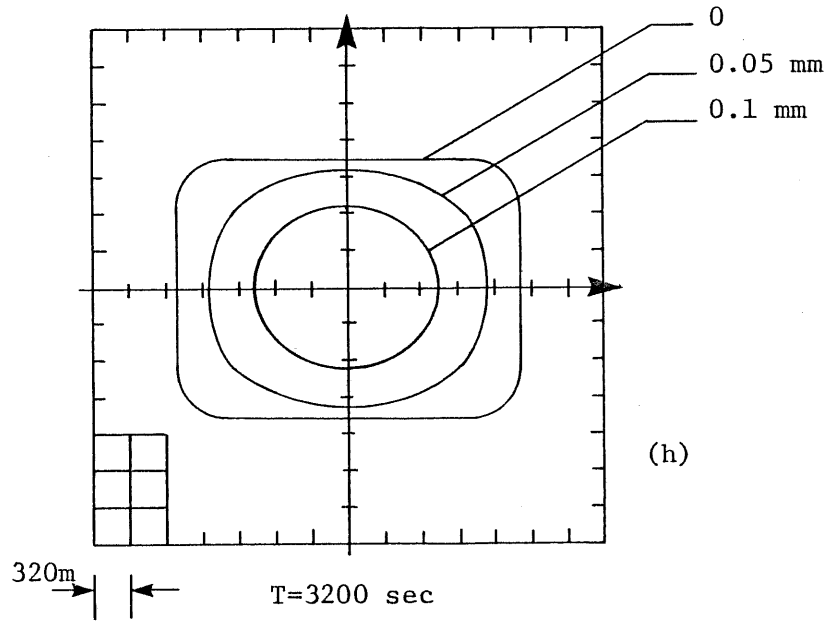
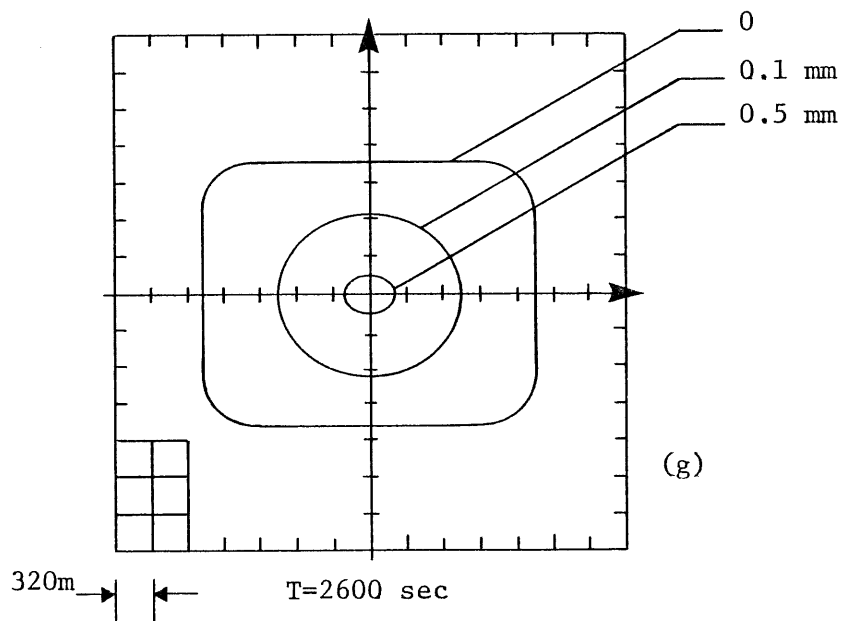


Figure 6-26
Simulation 1

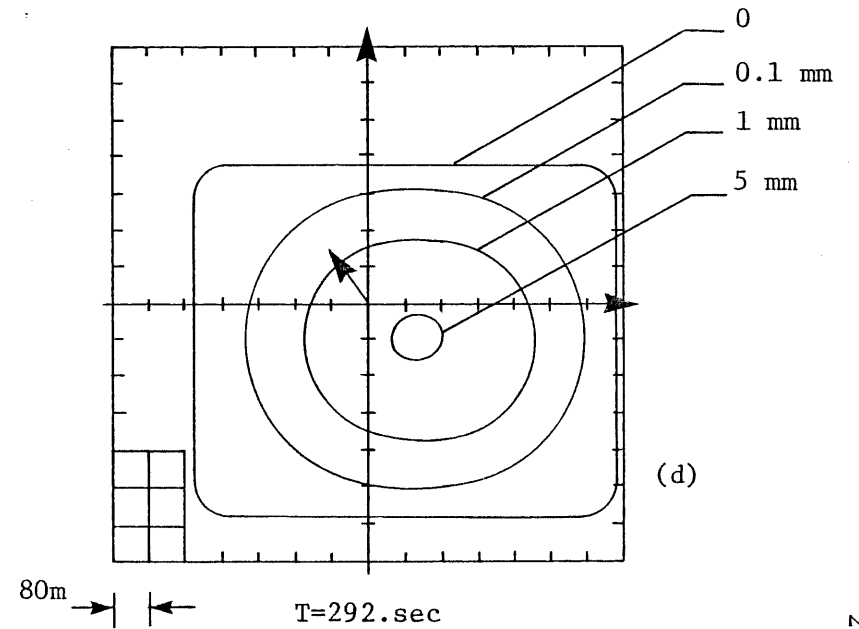
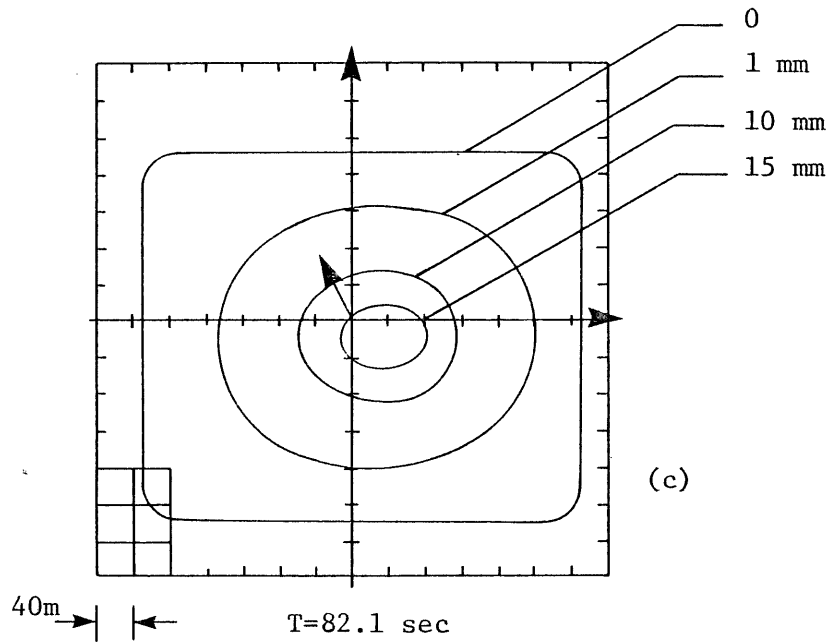
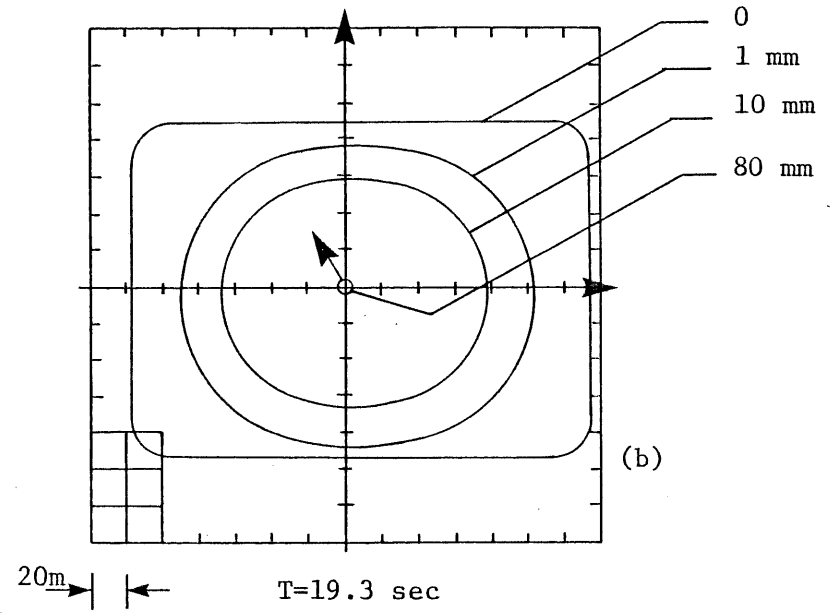
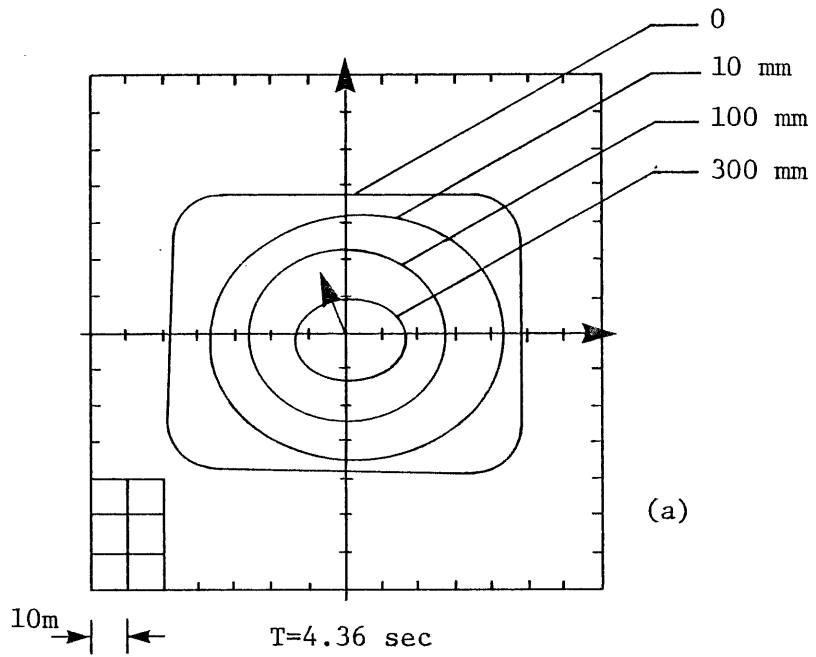


Figure 6-27 Simulation 2

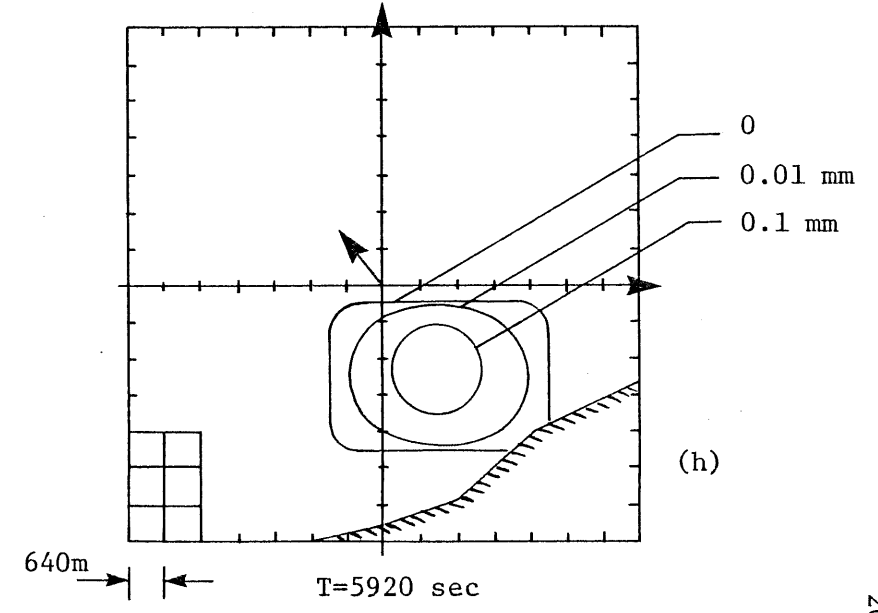
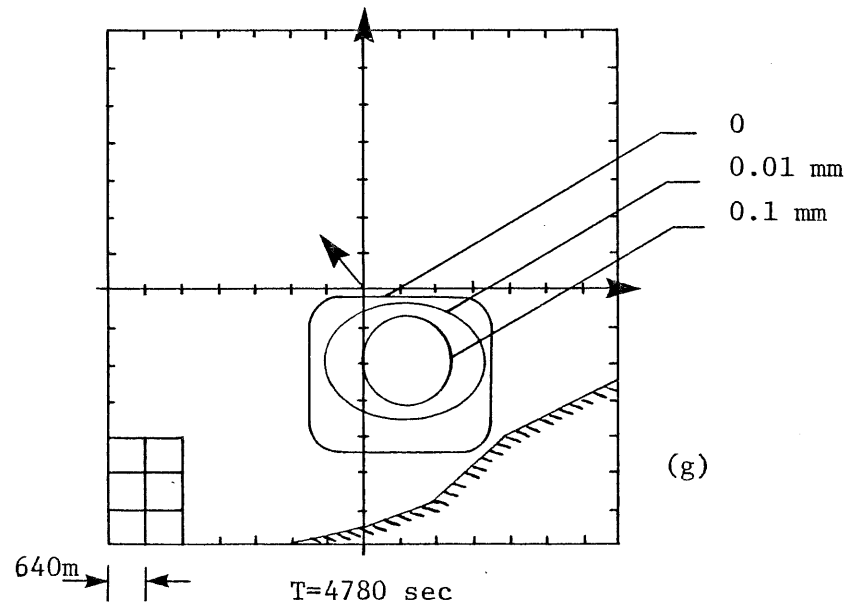
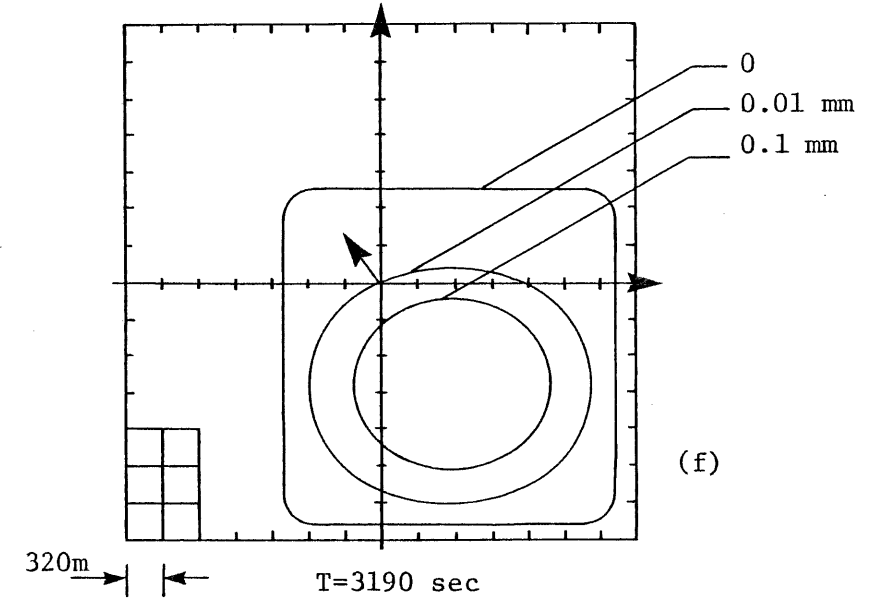
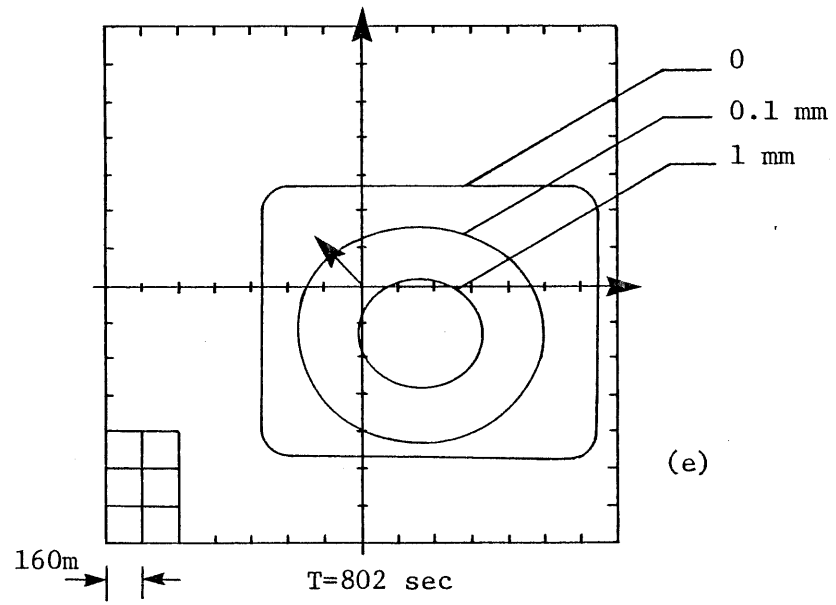


Figure 6-27 Simulation 2

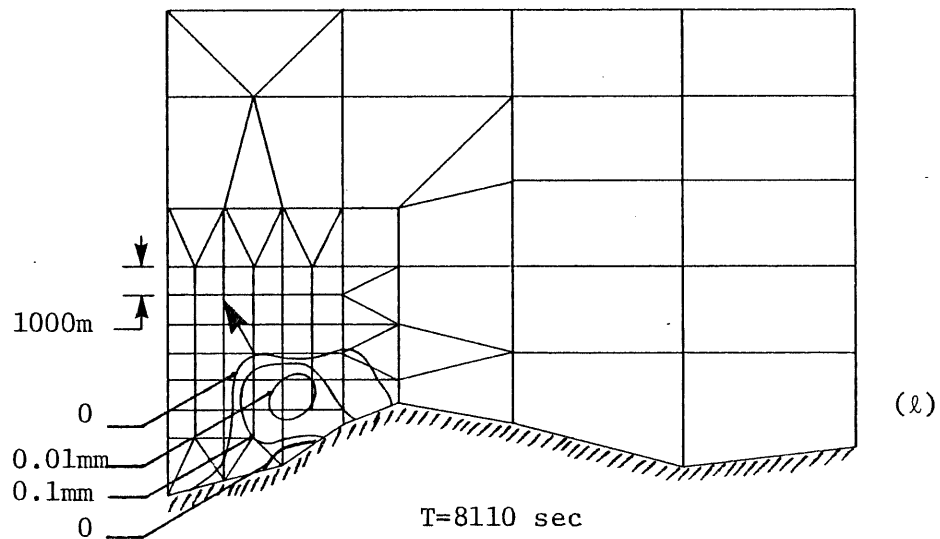
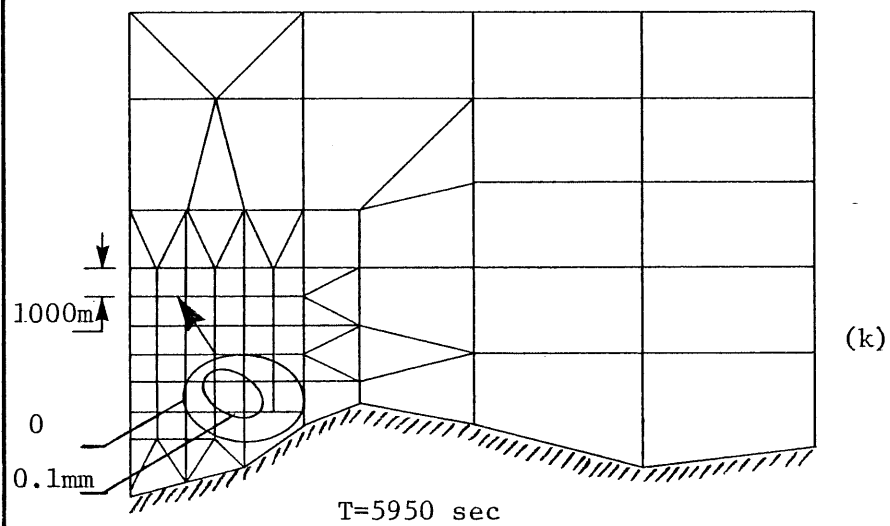
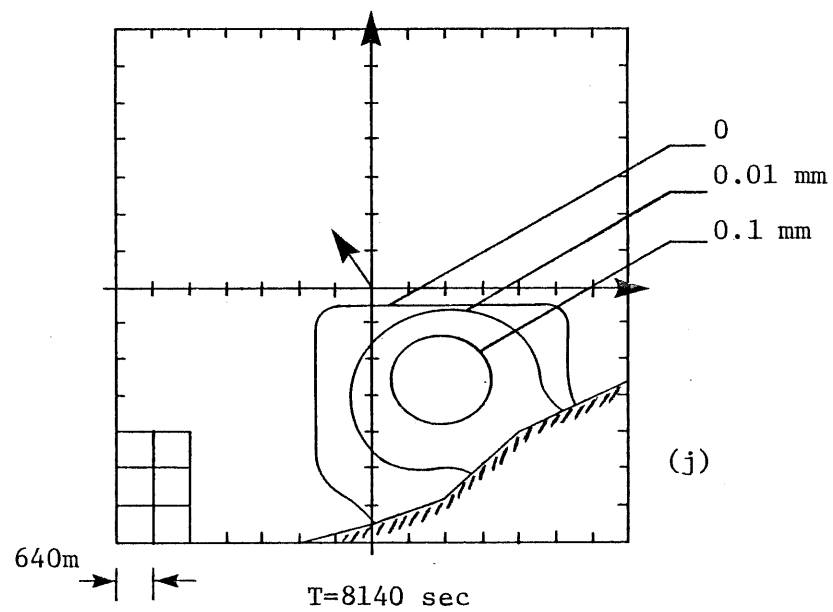
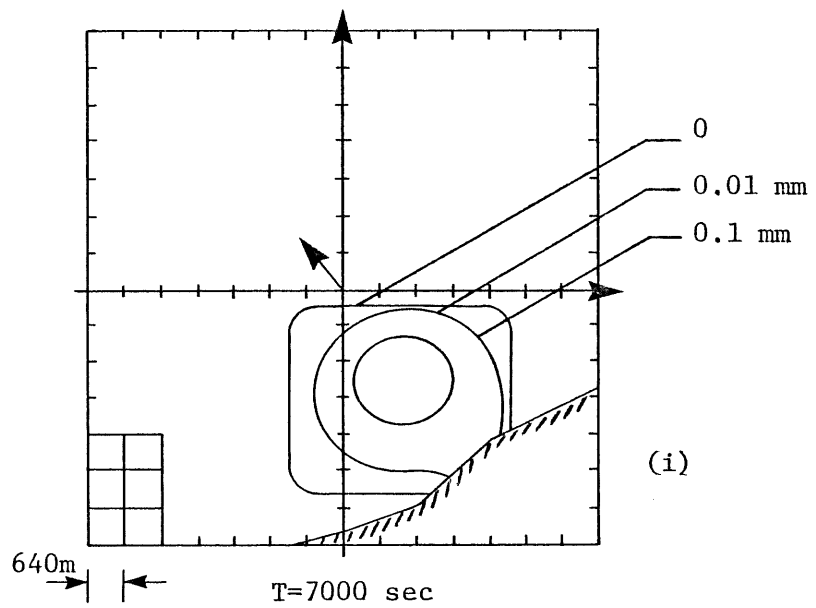


Figure 6-27 Simulations 2 et 3

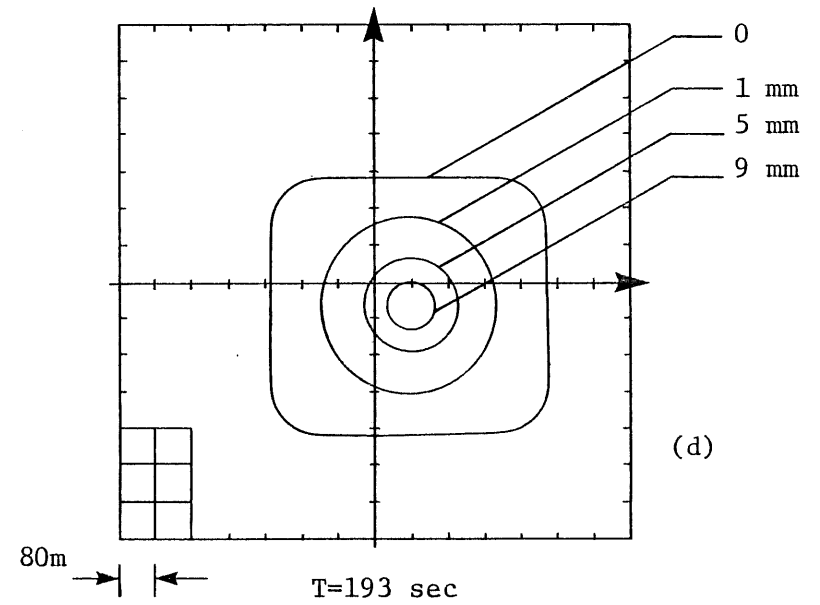
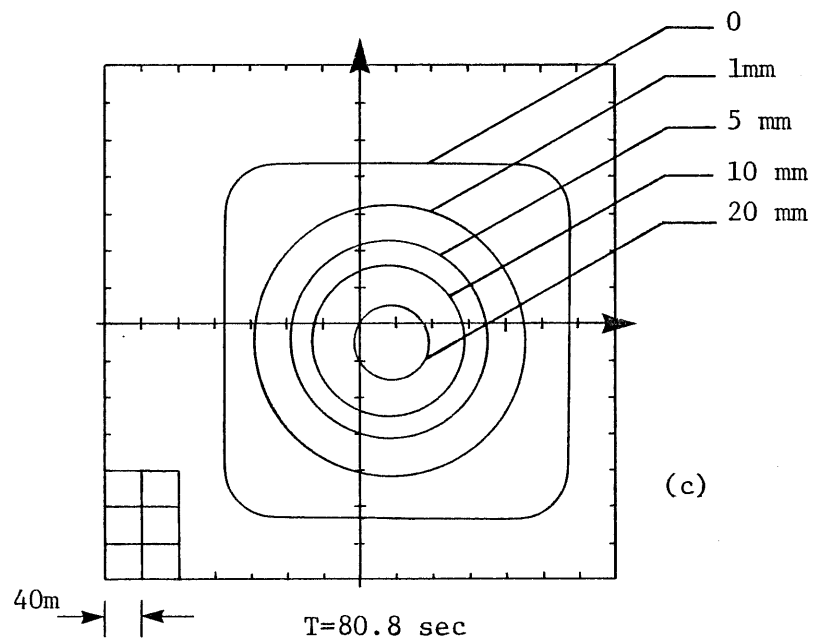
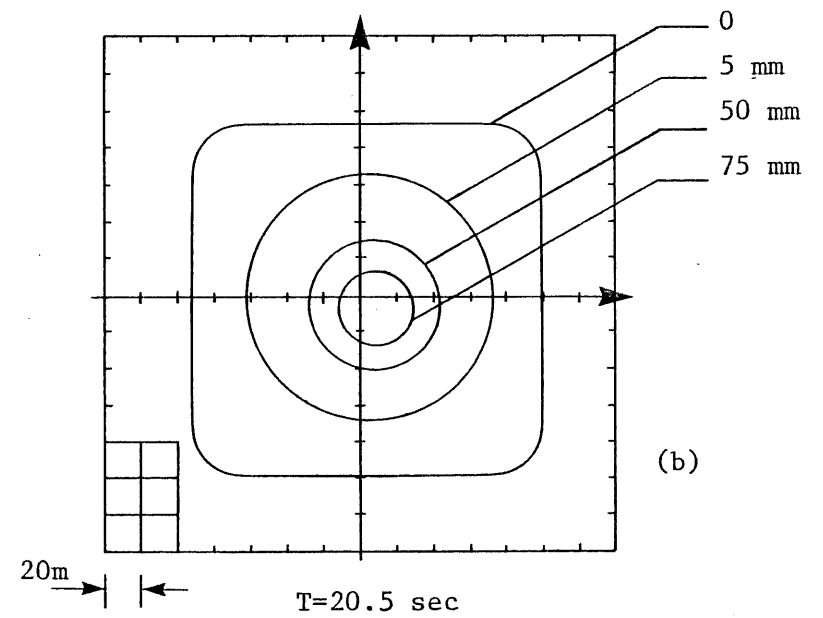
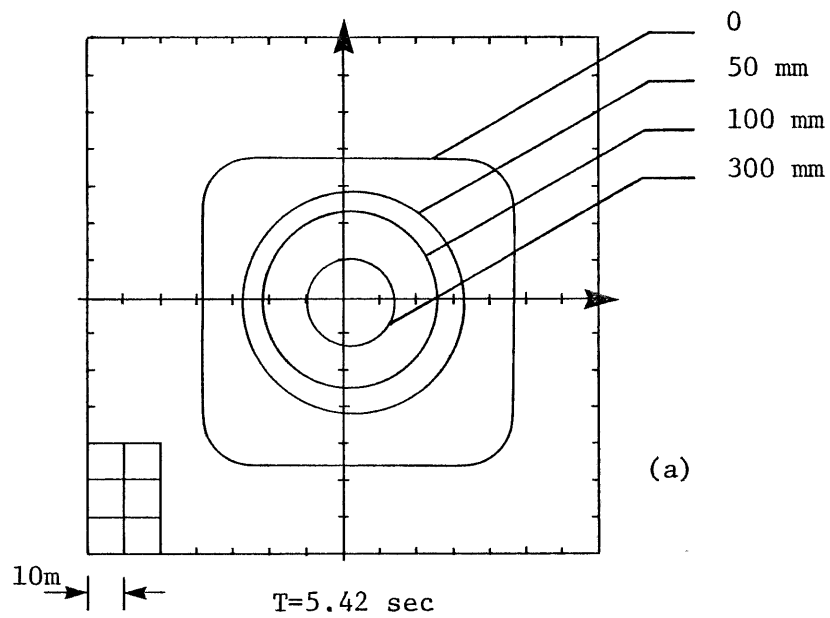


Figure 6-28 Simulation 4

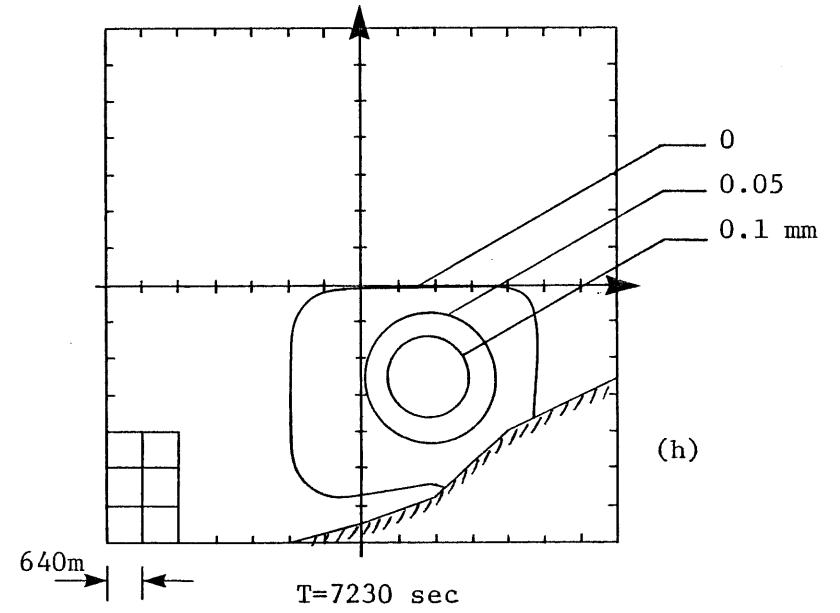
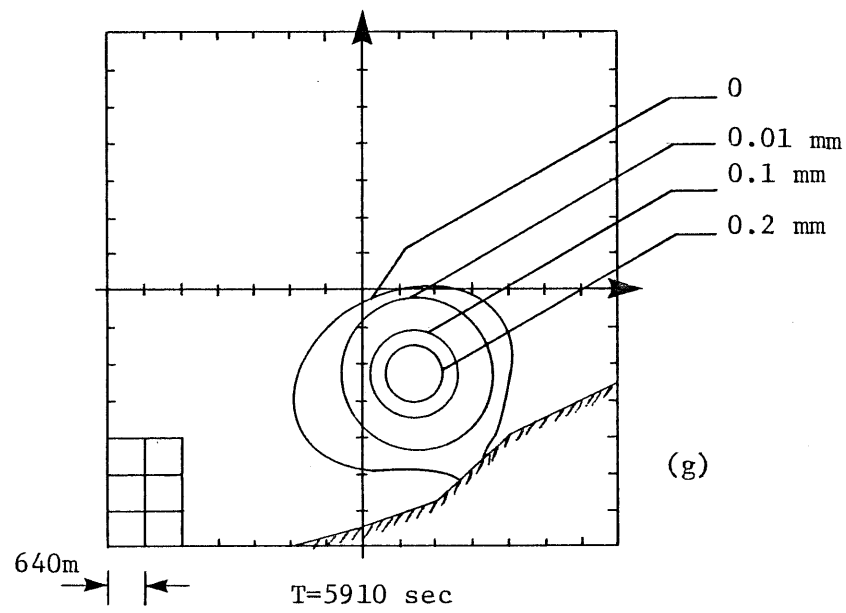
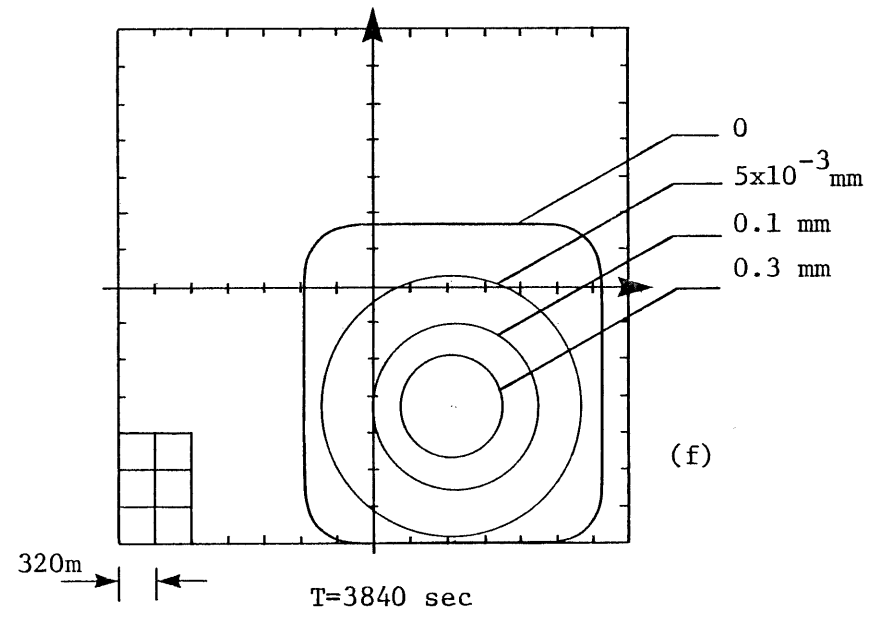
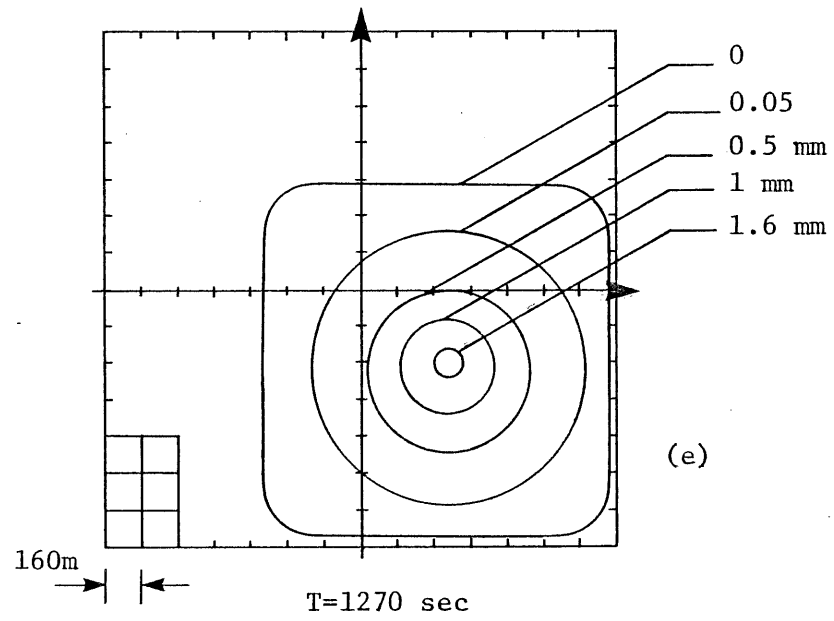


Figure 6-28 Simulation 4

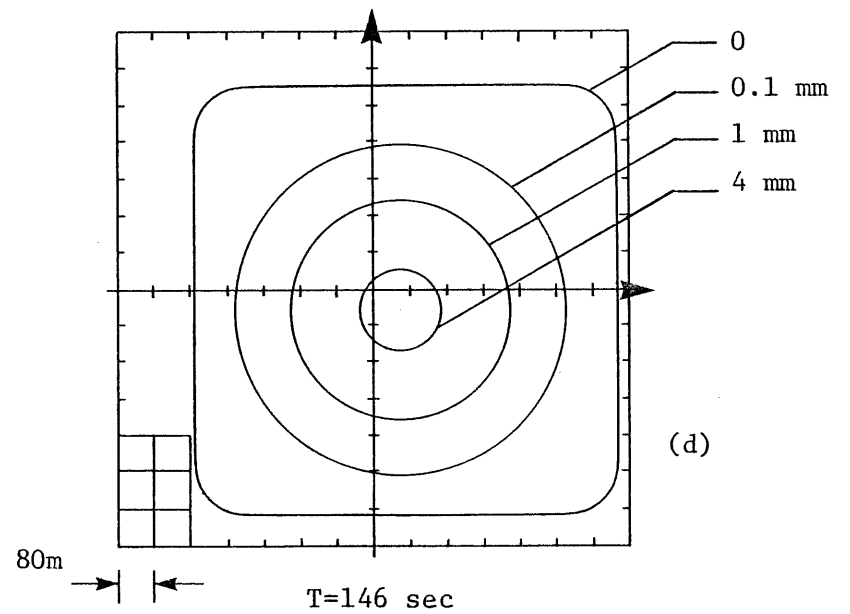
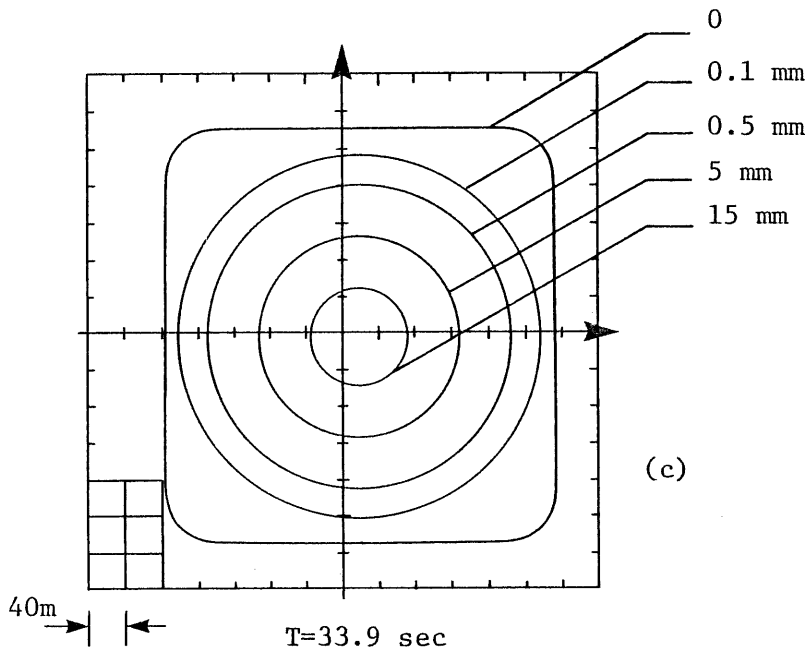
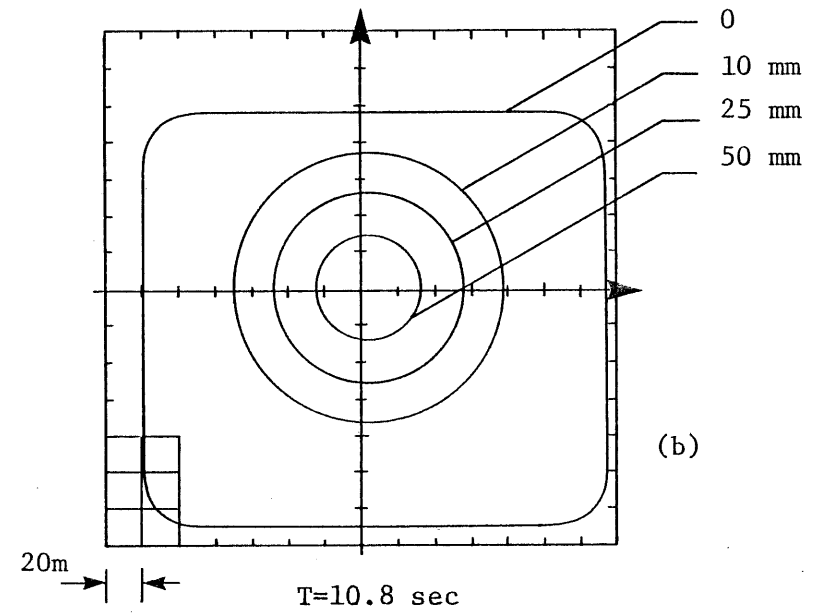
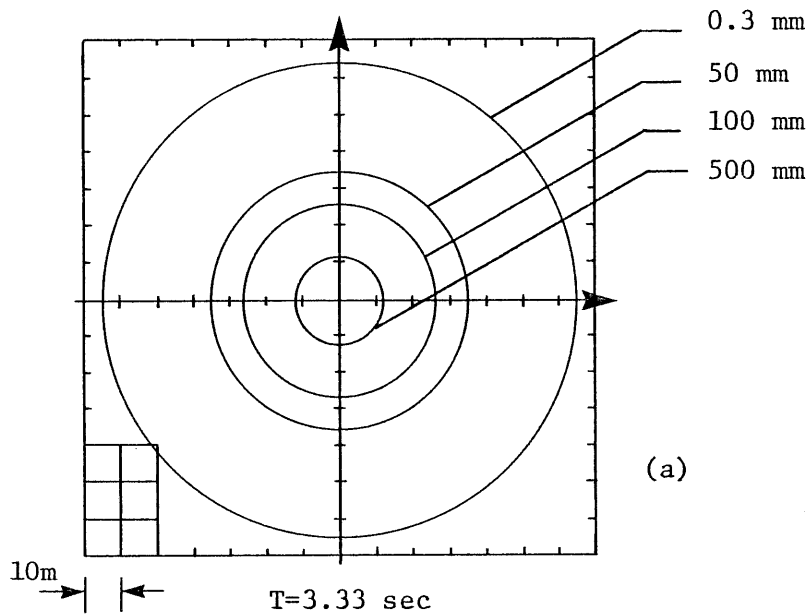


Figure 6-29 Simulation 5

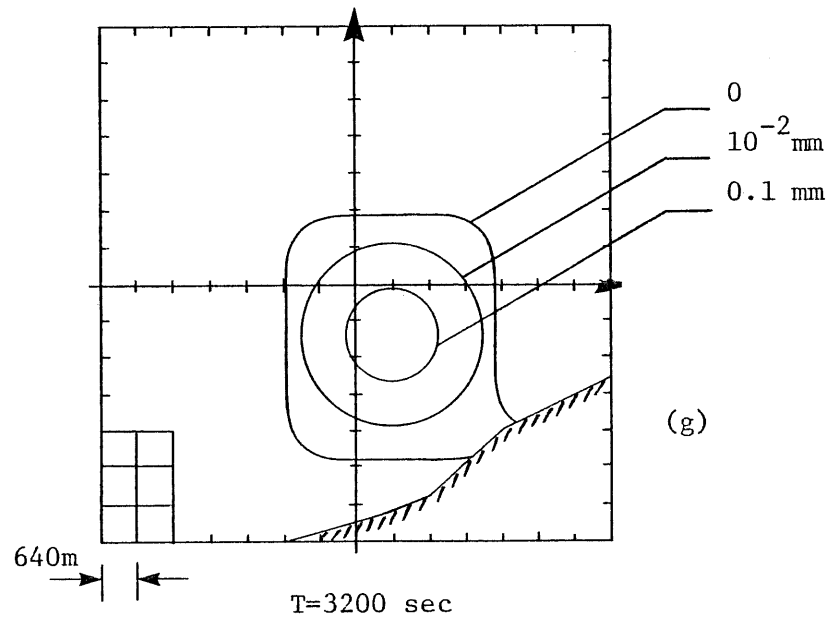
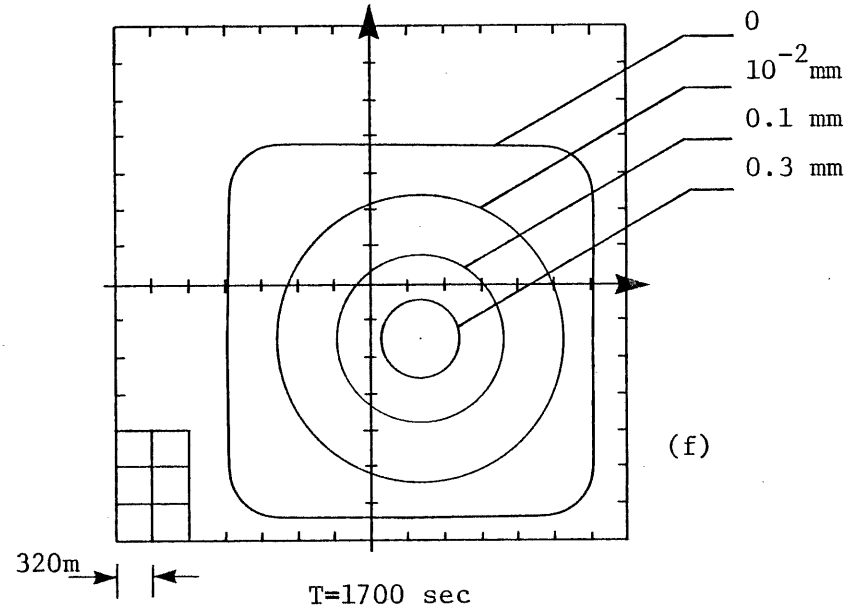
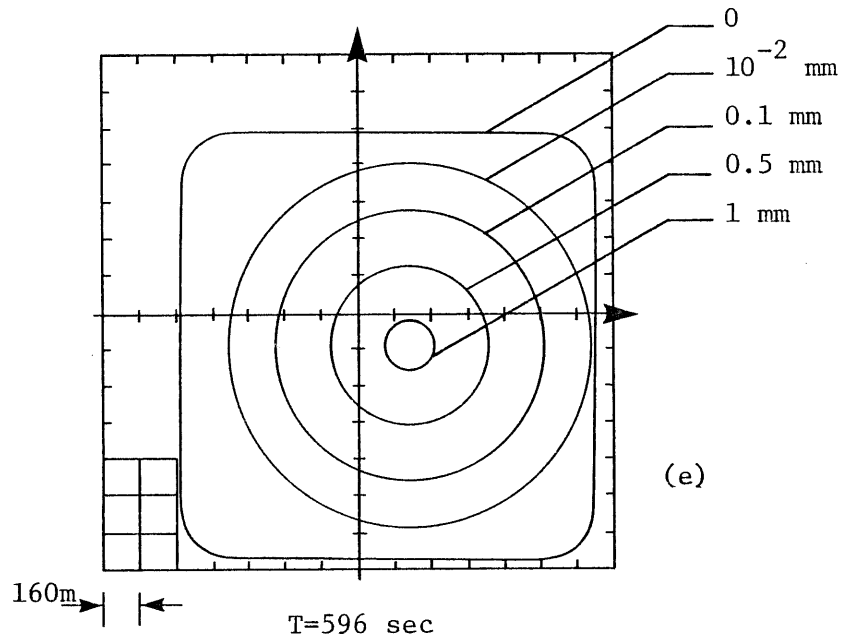


Figure 6-29 Simulation 5

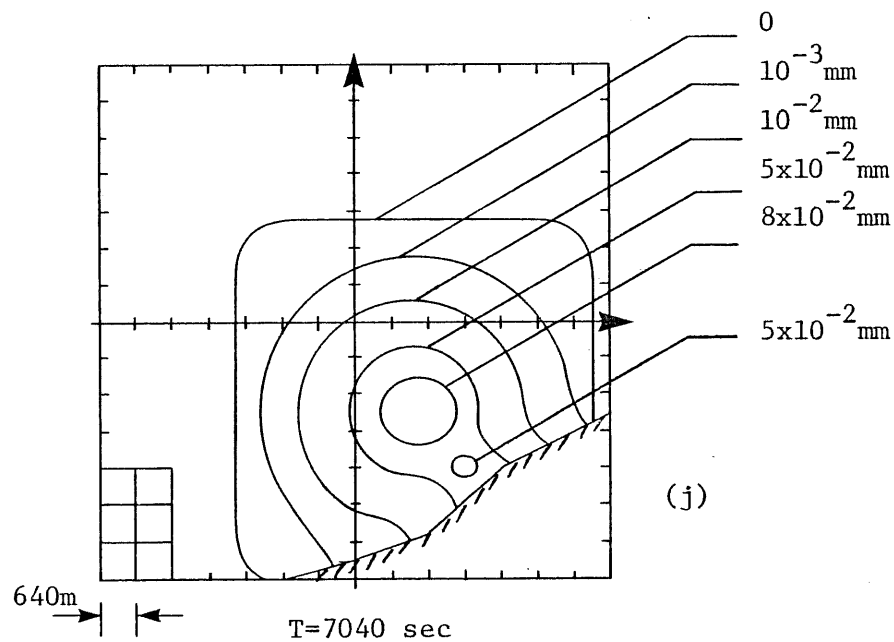
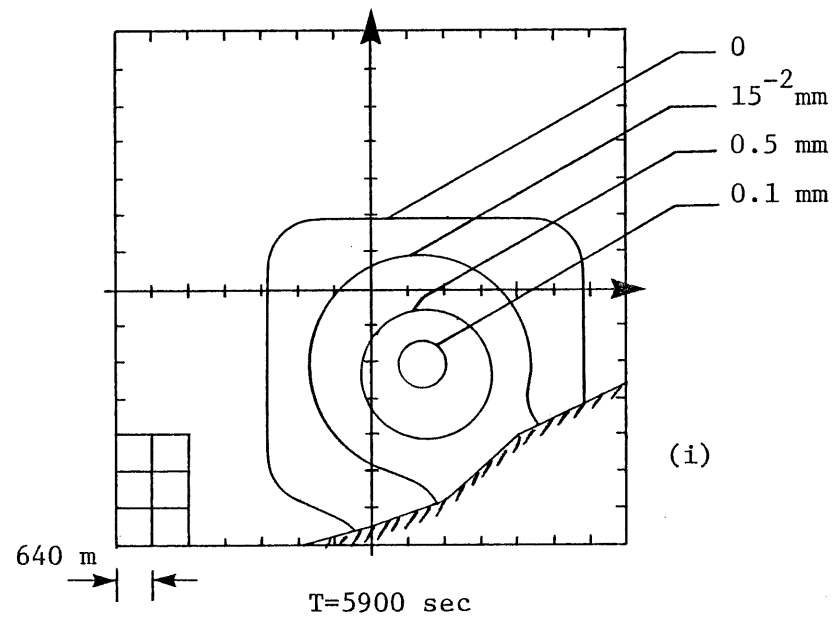
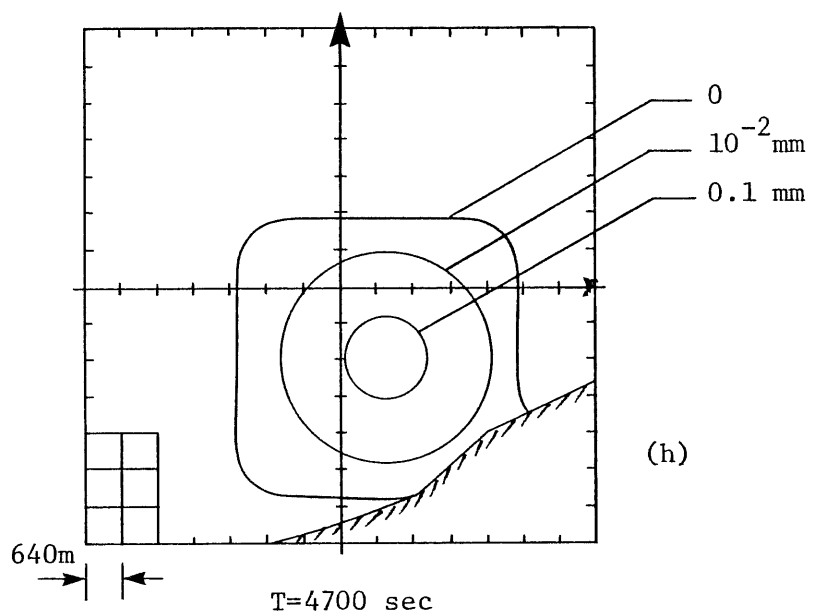


Figure 6-29 Simulation 5

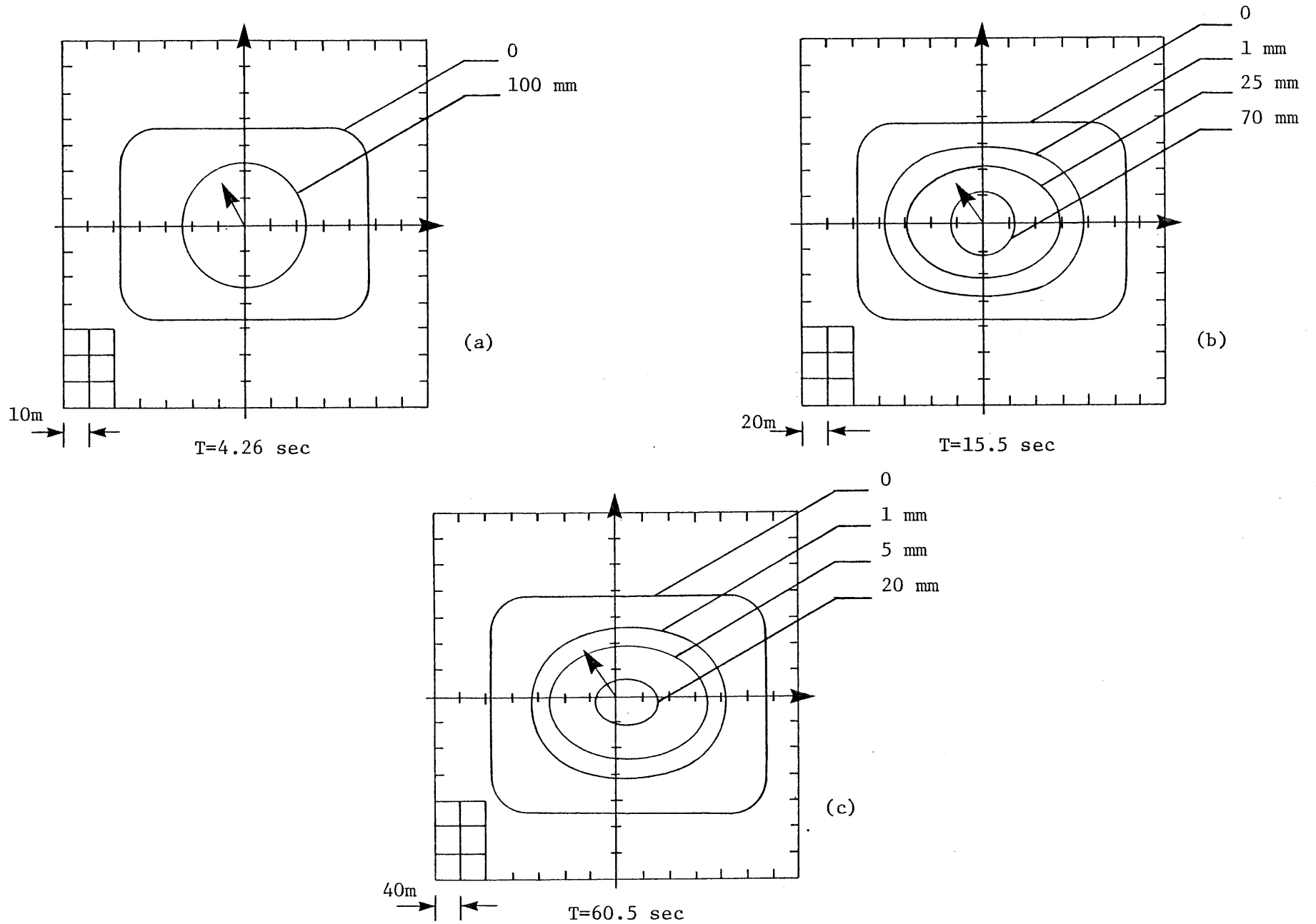


Figure 6-30 Simulation 6

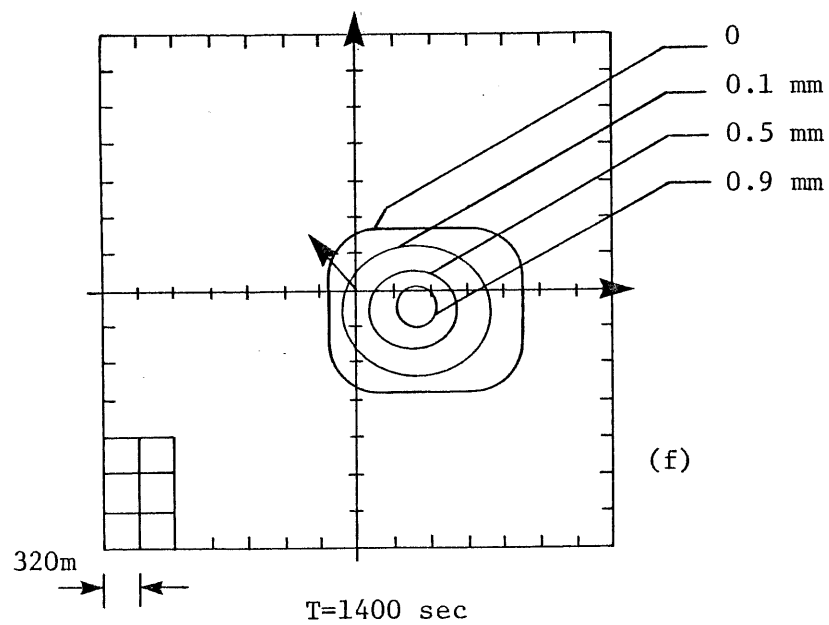
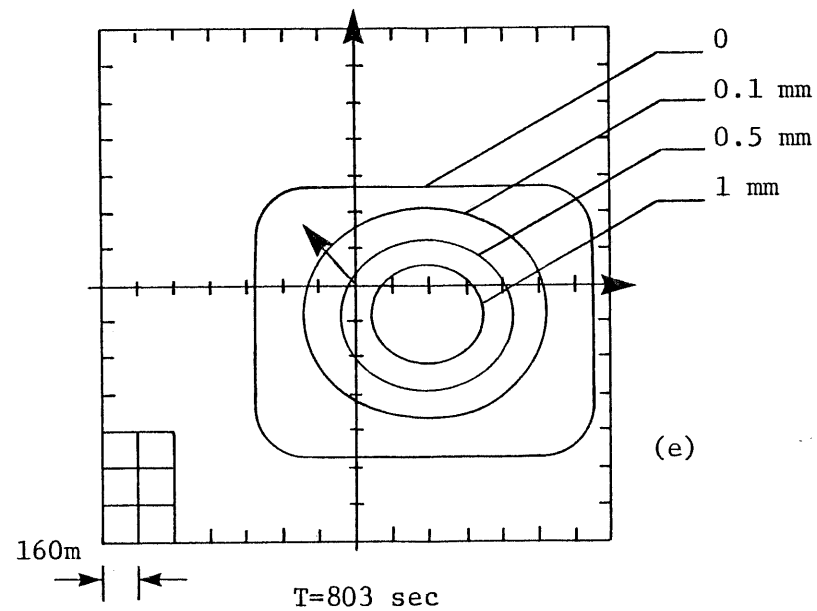
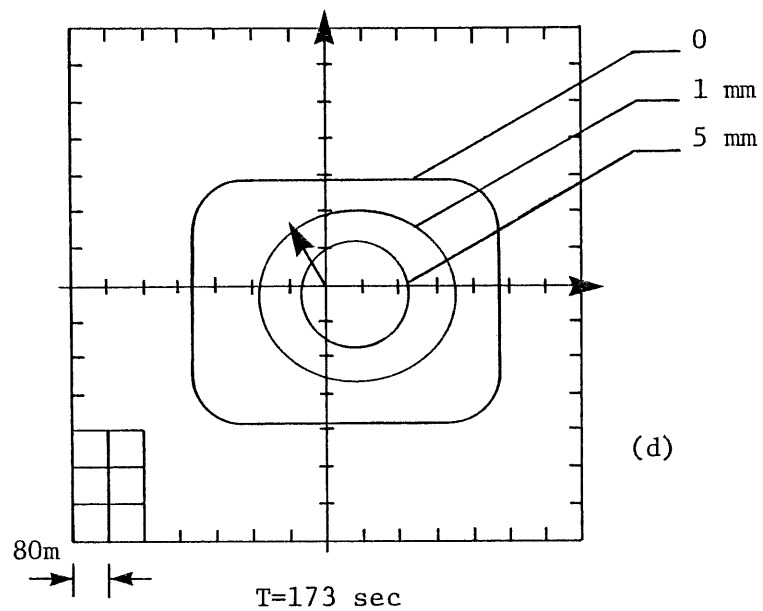


Figure 6-30 Simulation 6

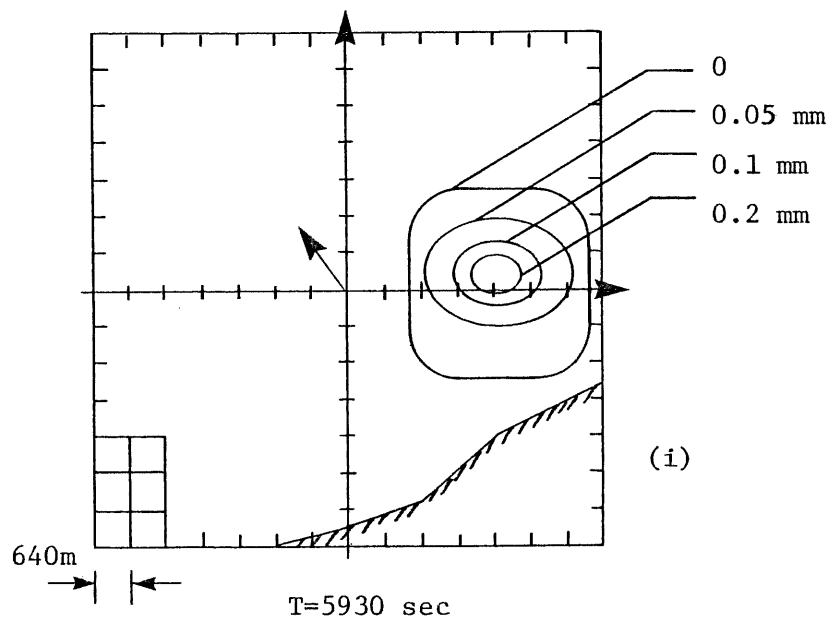
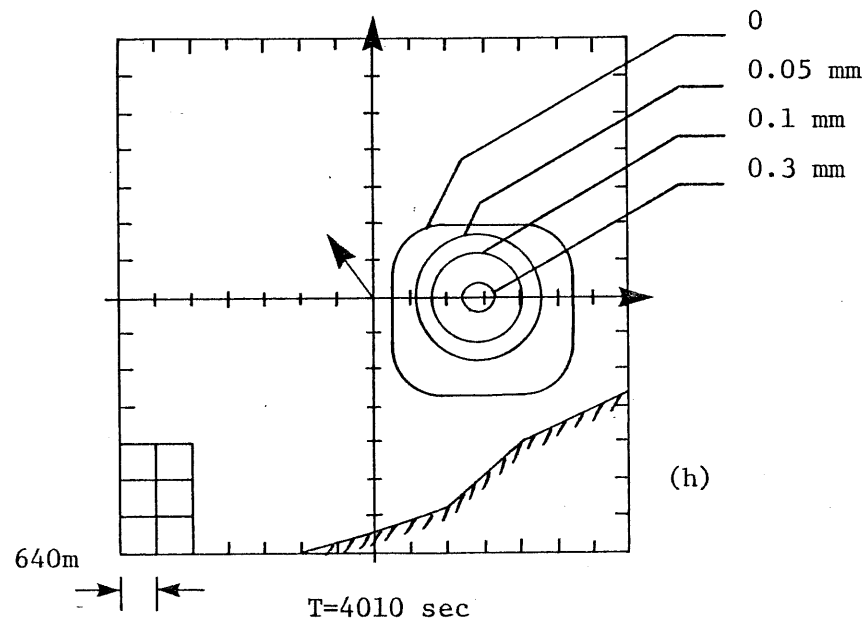
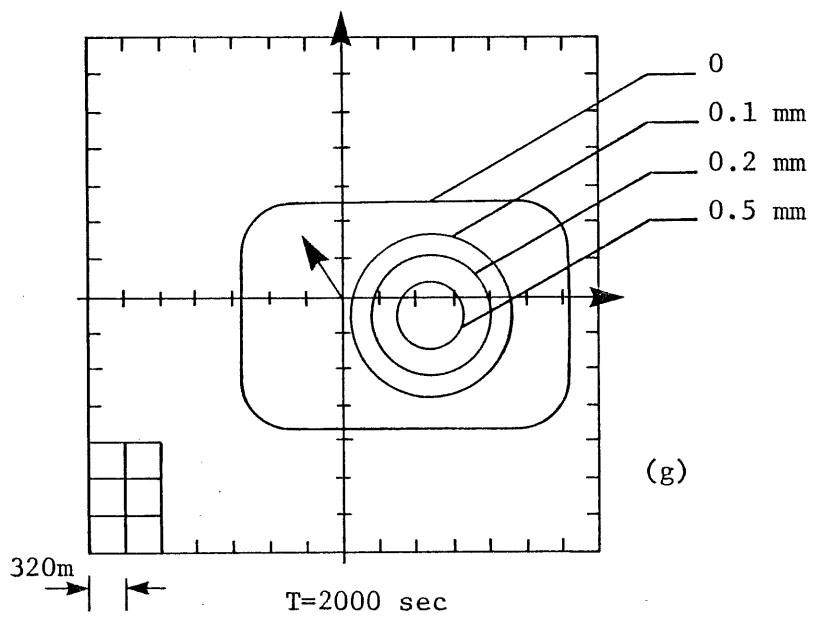
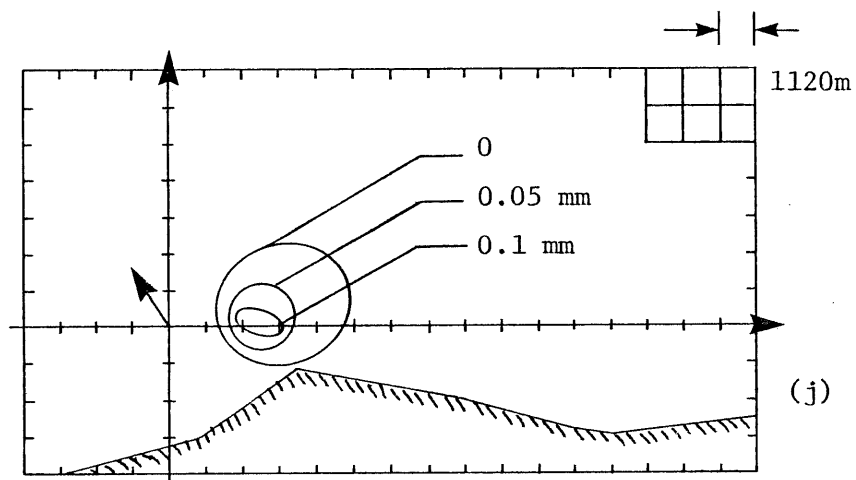
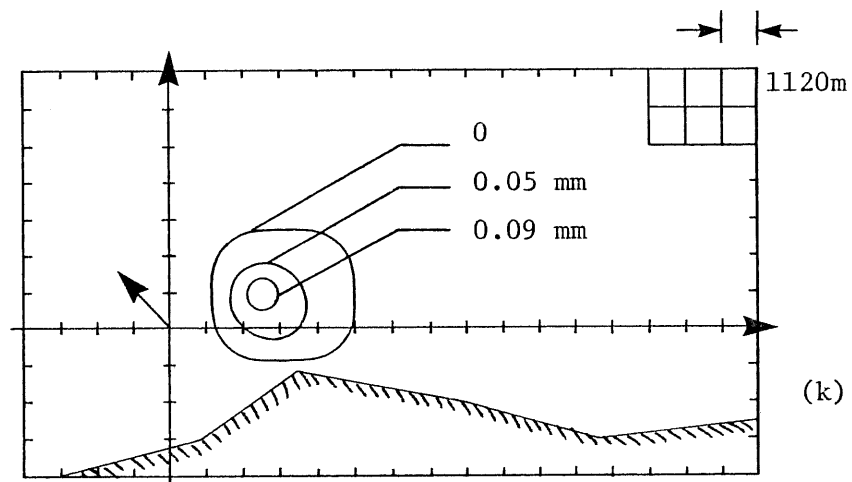


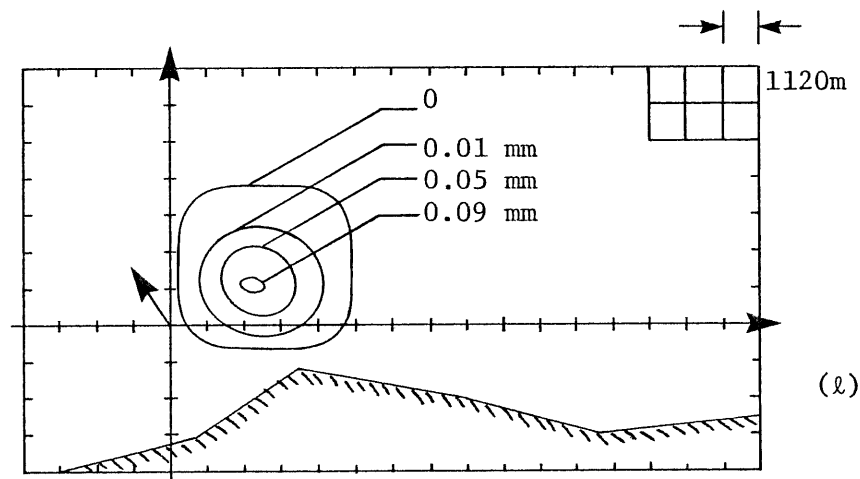
Figure 6-30 Simulation 6



T=7190 sec

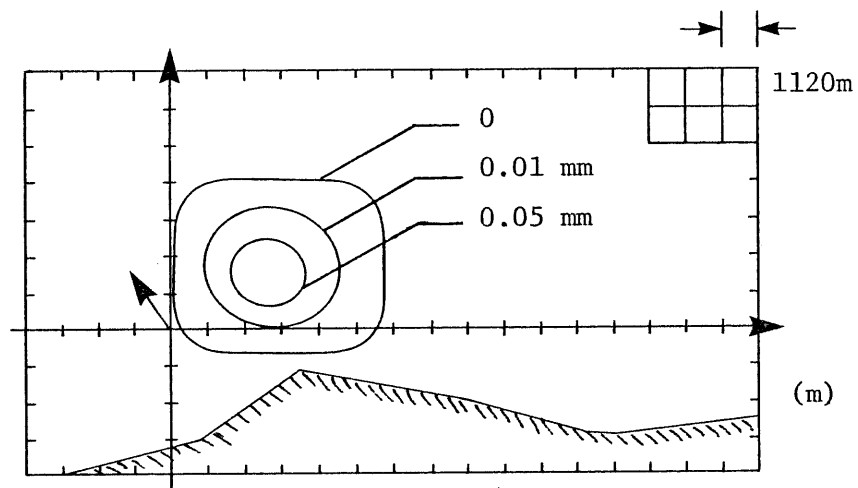


T=10850 sec

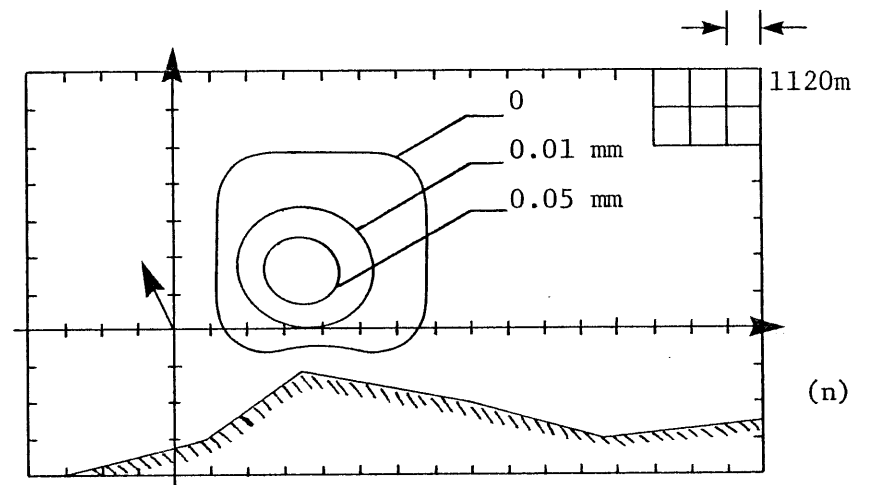


T=14450 sec

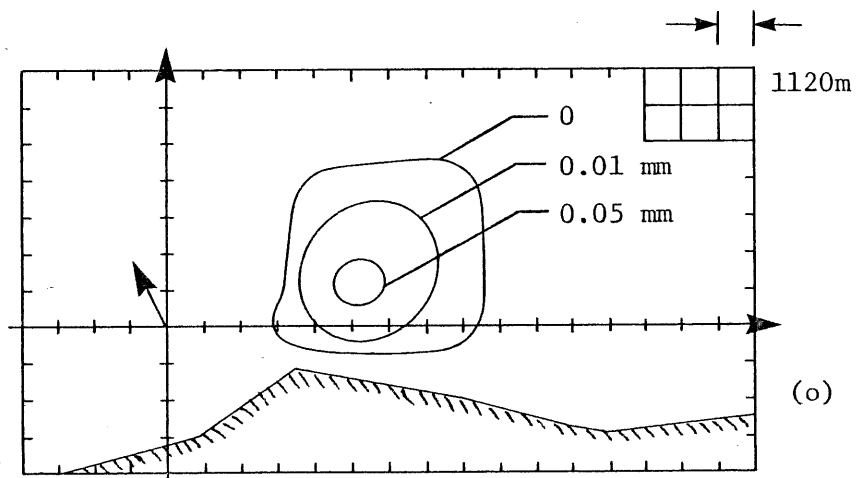
Figure 6-30 Simulation 6



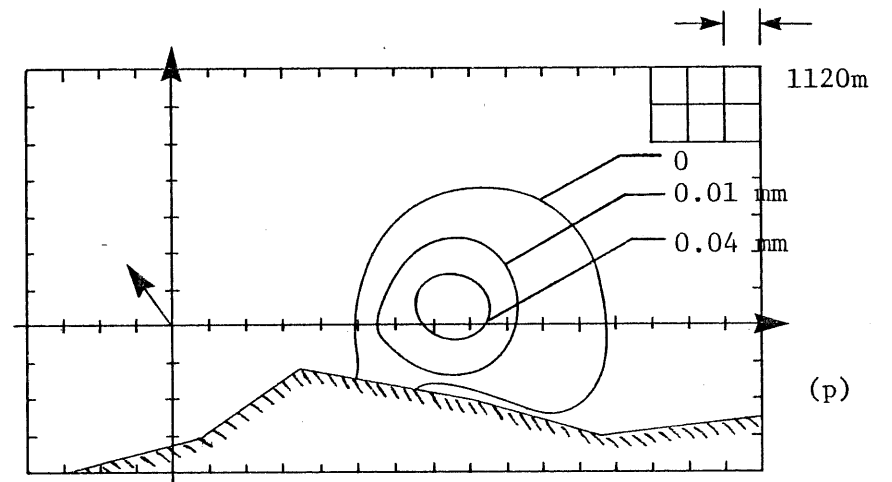
T=18,050 sec



T=21,650 sec

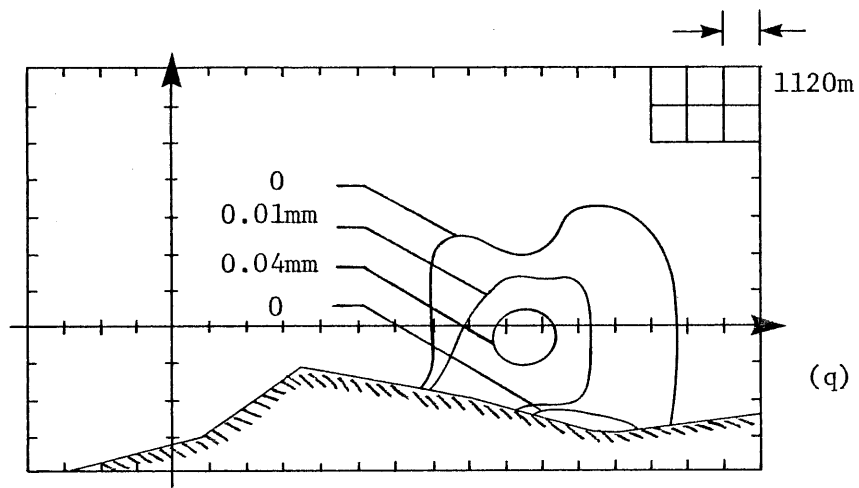


T=25,250 sec



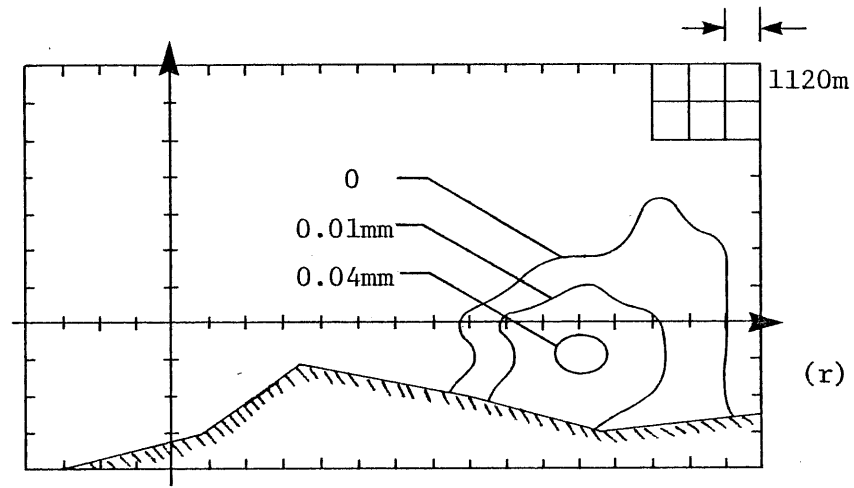
T=28,850 sec

Figure 6-30 Simulation 6



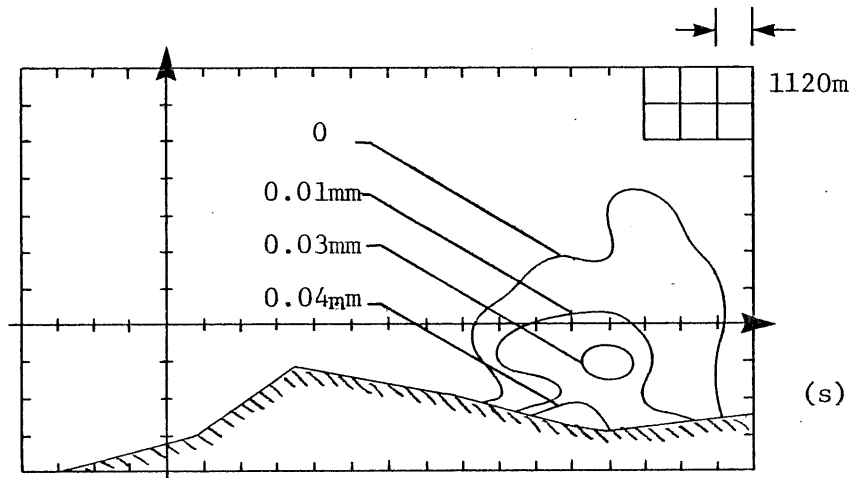
T=32,450 sec

(q)



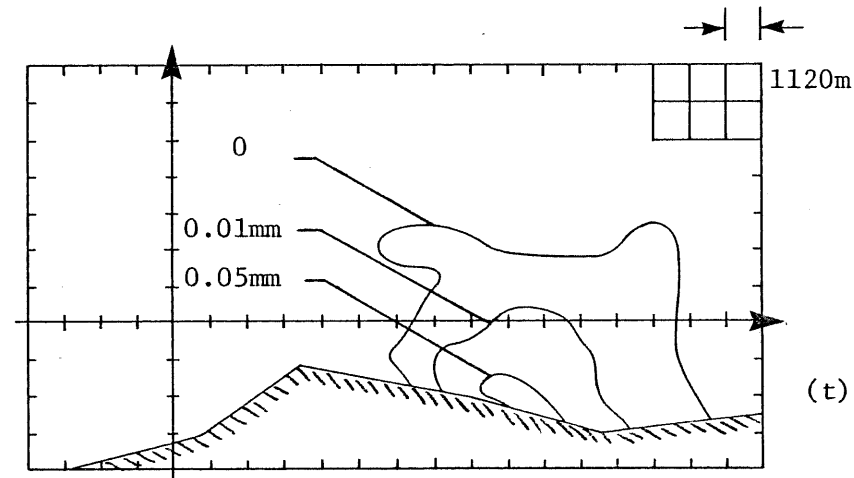
T=36,050 sec

(r)



T=39,650 sec

(s)



T=50,400 sec

(t)

Figure 6-30 Simulation 6

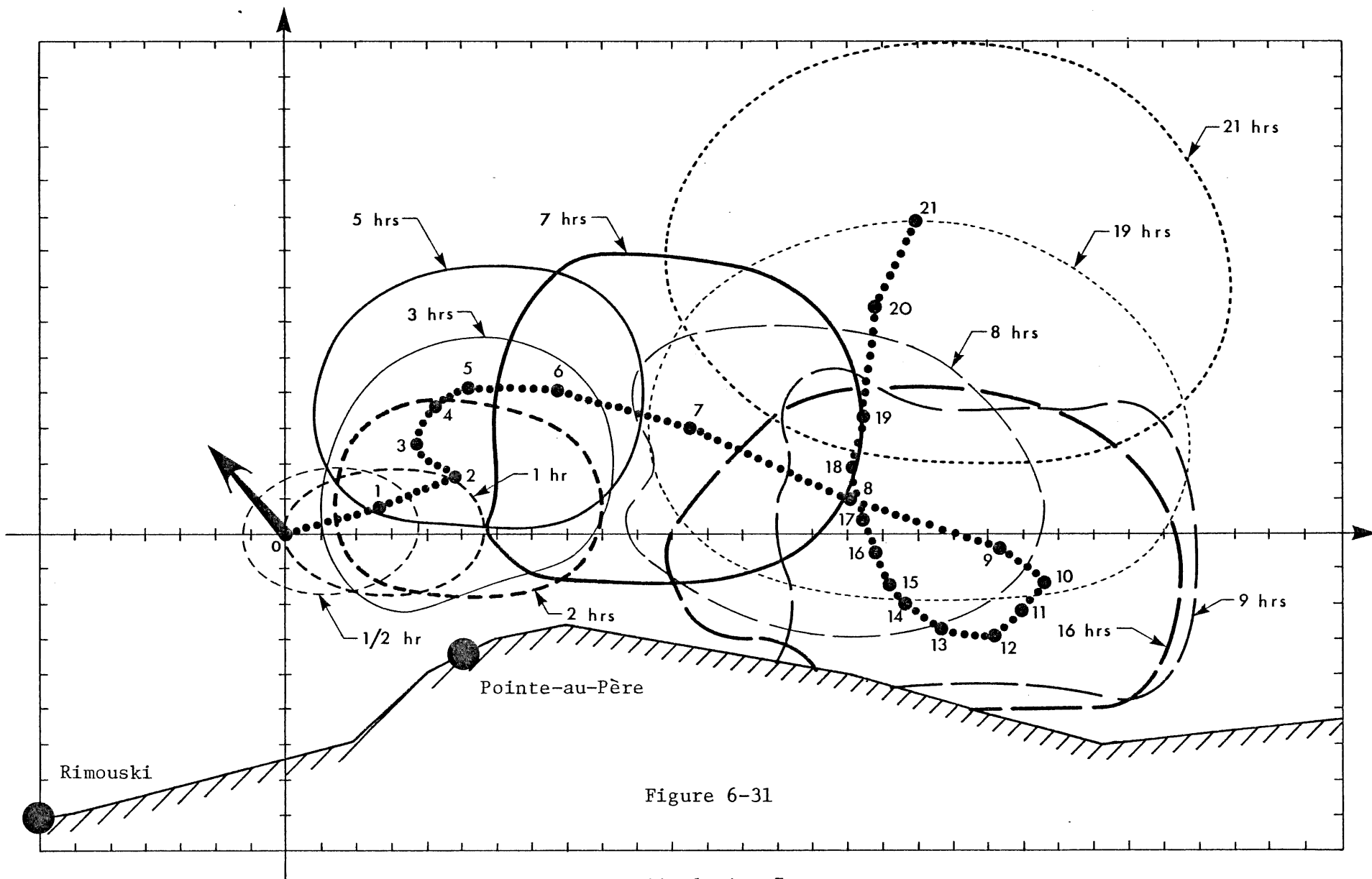


Figure 6-31

Simulation 7

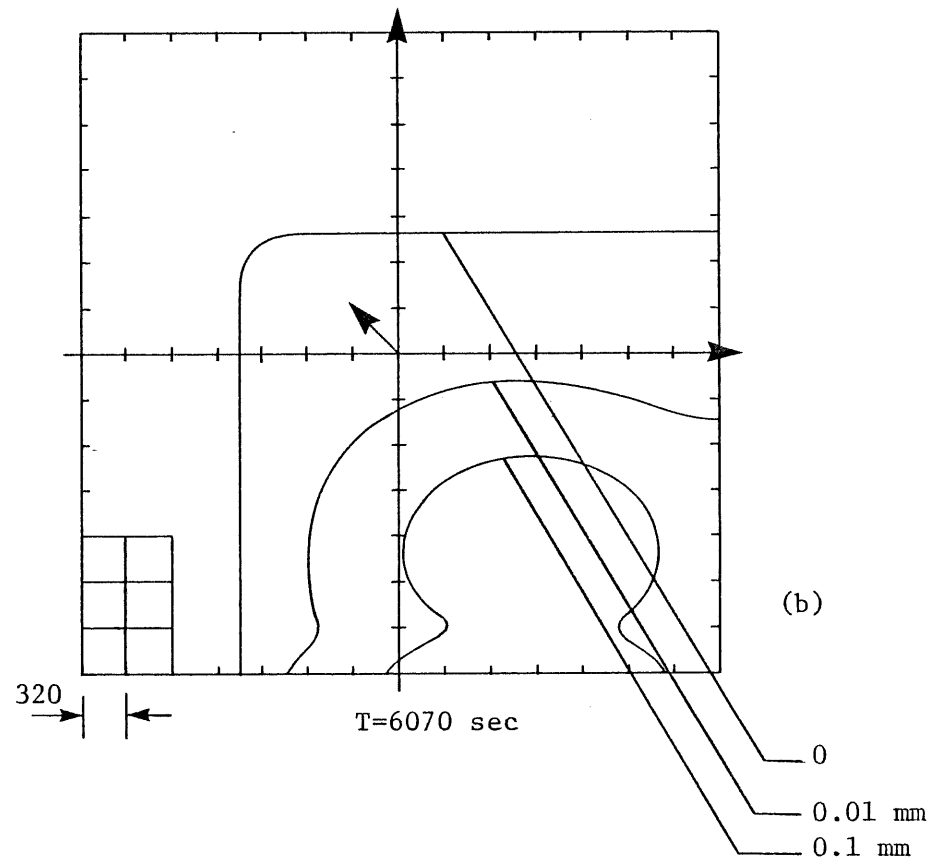
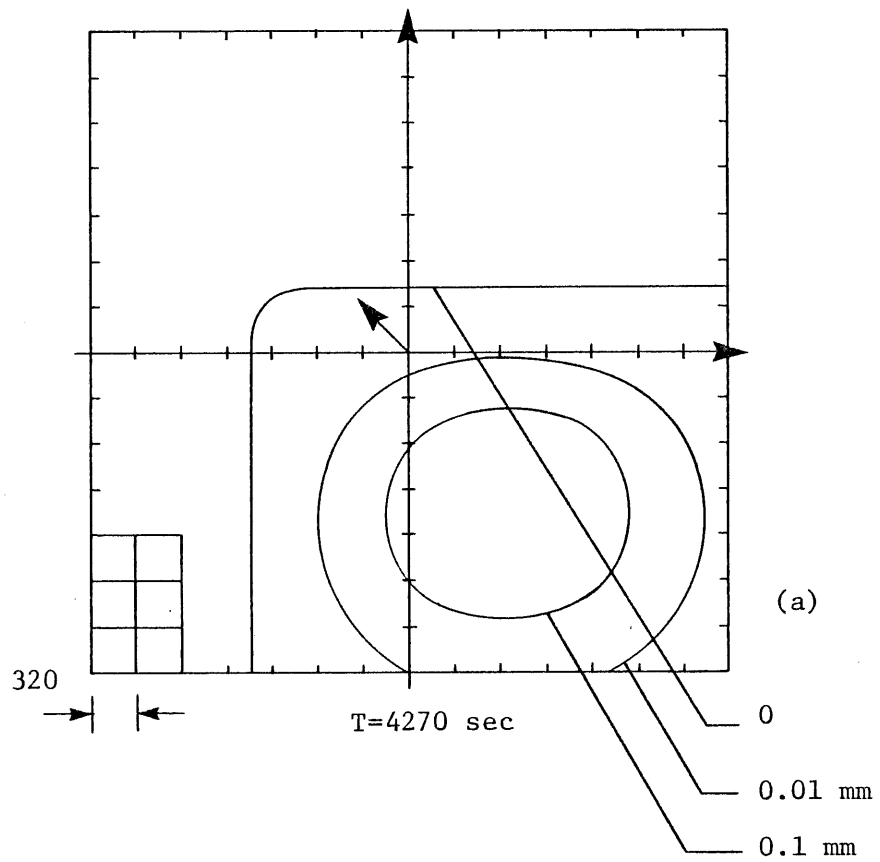


Figure 6-32

Estacades

BIBLIOGRAPHIE

CHOW, V.T., "Open-Channel Hydraulics", Mc Graw-Hill Book Company, 1959.

DRAPEAU, G., E. BOURGET et W. KOUTITONSKY, "Etude de la diffusion des eaux usées de Rimouski", Rapport Technique pour le Gouvernement du Québec, Min. des Aff. Municipales, Contrat no. 83427, INRS, Océanologie 1975.

GARABEDIAN, P.R., "Partial Differential Equations", John Wiley & Sons, 1964.

GROTKOP, G., "Finite Element Analysis of Long-Period Water Waves", Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2, p. 147-157, 1973.

JAMES, W.P. et al., "Environmental Aspects of a Supertanker Port on The Texas Gulf Coast", National Technical Information Service, no. PB-220 051, Dec. 1972.

KREITH, F., "Principles of Heat Transfer", Second Edition, International Textbook Company, 1965.

SHUKRY, A., "Flow Around Bends in An Open Flume", Transactions, American Society of Civil Engineers, vol. 115, p. 751-779, 1950.

SOMMERFELD, A., "Partial Differential Equations in Physics", Lectures on Theoretical Physics, volume VI, Academic Press, 1964.

CHAPITRE 7

CONCLUSION

Le travail que nous venons de présenter a permis de répondre aux questions que nous nous posions. Le comportement dynamique des nappes d'huile, en particulier, est déterminé numériquement. Les méthodes d'intégration sont testées sur des exemples connus puis appliquées à des rejets accidentels d'hydrocarbures au large de Rimouski sur l'estuaire maritime du St-Laurent. Les conditions aux limites, directement insérées dans les équations, permettent de tenir compte facilement de l'installation d'estacades. Ces conditions aux limites sont particulières car elles font intervenir la convection à la paroi ce qui n'est pas le cas en règle générale.

Cette étude dynamique du déplacement des nappes d'huile représente le premier effort intégré pour tenir compte à la fois de la diffusion et de la convection pour des vitesses de vent et de courant quelconques dans le temps et dans l'espace. Ce type de simulation est particulièrement recherché lors de l'établissement de rapports d'impact pour de nouvelles installations portuaires, par exemple. Les profils de vitesse pourraient être dans ce cas obtenus statistiquement à l'aide des chaînes de Markov et d'une simulation de Monte-Carlo.

Dans le but d'une meilleure utilisation du modèle les coefficients d'étalement K_x et K_y et le taux de biodégradation k devraient faire l'objet d'une étude particulière pour le site projeté. Le lien existant entre le volume de pétrole initial et la valeur des coefficients K_x et K_y mériterait d'être approfondi. Ces coefficients pourraient être posés, avec la méthode d'intégration employée, comme des fonctions de la hauteur d'huile. Ceci

permettrait de tenir compte des différents régimes d'étalement, (voir la section 2.1.1.1).

Si le type de simulation étudié permet d'évaluer les impacts sur l'environnement, il offre également la possibilité de servir de témoin pour des simulations plus grossières. Par exemple, il permettrait d'évaluer les erreurs effectuées lors de l'utilisation de modèles simples devant servir pour des prédictions rapides correspondant à des états d'urgence [SIMONS, 1975]. Rappelons, enfin, qu'il serait très facile de tenir compte de sources quelconques. Nous avons fait l'hypothèse jusqu'à présent que les rejets s'effectuaient brutalement; cette hypothèse pourrait être modifiée sans difficultés.

L'étude des écoulements à surface libre appliquée à des canaux nous a permis de nous placer rapidement au niveau de la recherche la plus récente dans ce domaine. Il semble bien que jusqu'à présent l'étude des canaux courbes, en particulier, n'avait pu être effectuée par la méthode des éléments finis. La nécessité de tenir compte de la nature hyperbolique des équations nous a conduit à poser des conditions particulières sur la géométrie des éléments. La résolution algébrique non linéaire basée sur une petite modification de la méthode de Newton-Raphson semble donner de très bons résultats.

L'écriture du programme mettant en oeuvre la méthode des éléments finis représente une tâche laborieuse. Les équations sont posées de manière à simplifier le plus possible le travail de programmation. Les notations développées dans ce travail sont ainsi présentées de manière particulière. La représentation matricielle adoptée est facile à mettre en oeuvre.

Le travail effectué conduit à de nouvelles interrogations qui pourraient faire l'objet de travaux de recherches originaux. En particulier,

les oscillations rencontrées lors de la simulation du déplacement d'une nappe d'huile pourraient être supprimées en intégrant les équations sur le domaine recouvert par la nappe uniquement. Ceci serait effectué à l'aide d'une formulation inverse, [MERCER, 1973]. On rechercherait, alors, les coordonnées (x,y) pour obtenir telle ou telle hauteur d'huile.

Dans cette étude nous avons employé la formulation de Galerkin. Il serait intéressant d'évaluer l'approche résiduelle par la méthode des moindres carrés. Cette approche a pour avantage qu'elle conduit à des systèmes matriciels symétriques. Enfin, l'intégration sur le temps par une méthode directe, (Runge-Kutta-Merson par exemple), permettrait de résoudre le système :

$$\frac{d\bar{q}}{dt} = A^{-1} \cdot f(\bar{q}, t) ,$$

sans avoir à résoudre le système matriciel. Cependant, la matrice A doit être inversée ou approximée au départ, (cette matrice ne dépend, en général, ni du temps, ni de l'espace).

BIBLIOGRAPHIE

MERCER, A.G., "Irrotational Flow With Irregular Boundary Shapes", Journal of the Hydraulics Division, Proceedings of the ASCE, vol. 99, no. HY8, Aug. 1973.

SIMONS, T.J., G.S. BEAL, K. BEAL, EL-SHAARAWI and T.S. MURTY, "Operational Model for Predicting the Movement of Oil in Canadian Navigable Waters", Manuscript Report Series no. 37, Marine Sciences Directorate, Department of the Environment, Ottawa, 1975.

APPENDICE A

LES ELEMENTS ISOPARAMETRIQUES

Les éléments isoparamétriques sont formés par la transformation de simples carrés exprimés dans un système local de coordonnées en des éléments de forme quelconque dans le système de coordonnées global. La figure A-1 exprime cette transformation.

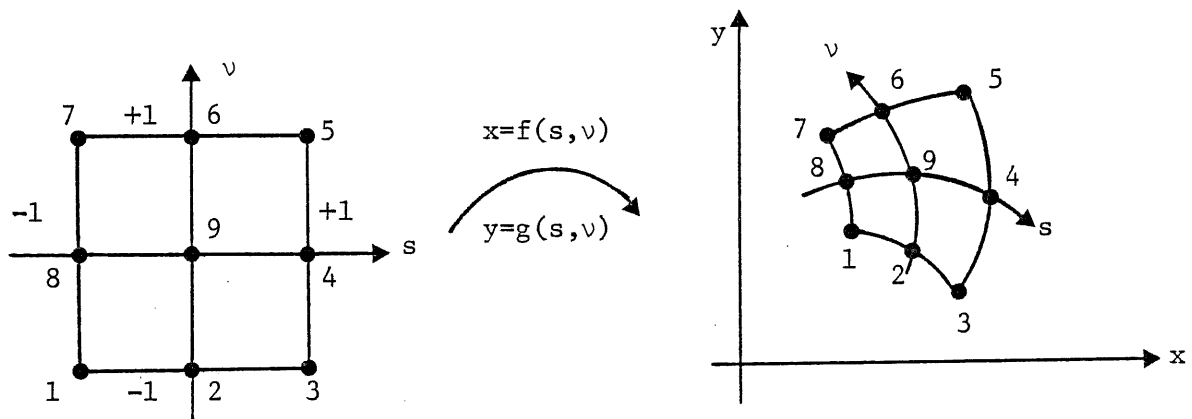


Figure A-1

Elément isoparamétrique

I- Introduction

La méthode des éléments finis permet de transformer un système d'équations différentielles partielles en un système d'équations intégrales exprimées sur des éléments du domaine. L'intégration des équations, qui se ferait normalement sur tout le domaine, est donc effectuée sur des éléments de taille moindre. Toutefois, l'intégration sur un élément de forme géométrique quelconque dans le système global est difficile à effectuer; l'intégration sur un carré dans le système local s'effectuera beaucoup plus

facilement. Cependant, très souvent les équations du système, transformées par une méthode résiduelle ou variationnelle, comportent des dérivées spatiales sous le signe intégral exprimées dans le système de coordonnées global. Par ailleurs, l'élément de surface exprimé dans le système global doit être transformé dans le système local.

Ce même problème se retrouve, mais de façon particulière, sur les contours des éléments. Enfin, sur les contours géométriques, la continuité des tangentes inter-éléments peut représenter une condition indispensable à respecter.

Pour chaque type d'élément retenu, (quatre, huit et neuf points), nous étudierons tour à tour:

- Les fonctions d'interpolation
- Le calcul des dérivées exprimées dans le système d'axes global et le changement de système d'axes
- Sur le contour,
 - . le changement de système d'axes pour l'élément de contour,
 - . la continuité géométrique inter-éléments.

Tous ces aspects sont étudiés dans le but d'être appliqués au calcul automatique. Les expressions utilisées sont très facilement programmables et se rapprochent donc très fortement du fortran. Dans tous les cas, on définit les vecteurs U et V par:

$$\{U\}^T = [-1, 1, 1, -1] \quad (1)$$

$$\{V\}^T = [-1, -1, 1, 1] \quad (2)$$

U(I) et V(I) représentent les éléments de ces vecteurs, I pouvant varier de 1 à 4. Par convention, les sommets des éléments sont numérotés de 1 à m,

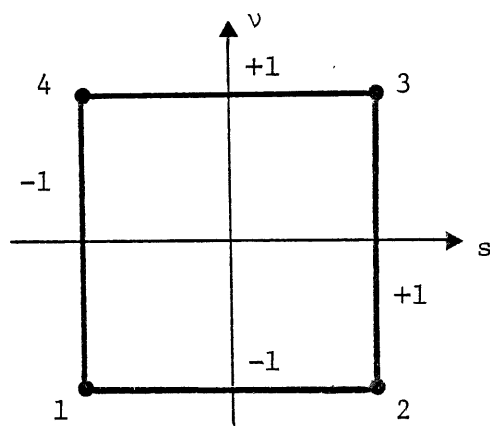
(m représentant le nombre de points de l'élément), en commençant par le coin gauche en bas et en tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre, (figure A-1), ceci pour le système d'axes local.

Dans le système global, les sommets sont définis sur l'ensemble du domaine de 1 à n , (n représentant le nombre total de sommets). Par ailleurs, les sommets du système global sont définis, à partir d'un sommet quelconque, pour chaque élément en tournant dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

II- Élément à quatre points

II-1 Les fonctions d'interpolation

La figure A-2 montre un élément isoparamétrique à quatre points dans le système local. Les fonctions d'interpolation sur cet élément



s'écrivent :

$$N_1 = (1-s)(1-v)/4 \quad (3)$$

$$N_2 = (1+s)(1-v)/4 \quad (4)$$

$$N_3 = (1+s)(1+v)/4 \quad (5)$$

$$N_4 = (1-s)(1+v)/4 \quad (6)$$

Figure A-2

Élément à quatre points

Les équations (3) à (6) peuvent s'écrire :

$$N(I) = (1+U(I) \cdot s) \cdot (1+V(I) \cdot v) / 4 \quad (7)$$

Remarques:

- Les arêtes sont des lignes droites; si s est constant, $N(I)$ linéaire.
- Les coordonnées x et y dans le système d'axes global, s'expriment à partir des coordonnées locales s et v par:

$$x = \sum_{j=1}^4 N_j(s,v) \cdot x_j \quad (8)$$

$$y = \sum_{j=1}^4 N_j(s,v) \cdot y_j \quad (9)$$

- au point 1: $x = x_1$, $y = y_1$, etc...

II-2 Calcul des dérivées et élément de surface

Les dérivées spatiales dans les systèmes d'axes global et local sont reliées par:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (10)$$

$i=1,2,3,4$

Soit encore, en inversant la matrice carrée:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} = \frac{1}{\frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial v}} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial v} & -\frac{\partial y}{\partial s} \\ -\frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s} \\ \frac{\partial N_i}{\partial v} \end{bmatrix} \quad (11)$$

$i=1,2,3,4$

L'équation (11) n'est valide que si le dénominateur est différent de zéro.

Les équations du système sont établies sur le système d'axes global et les intégrales de surface sont exprimées dans ce même système d'axes, on effectuera donc la transformation suivante:

$$dx dy = |J| ds dv \quad (12)$$

où:

$$J = \frac{\partial x}{\partial s} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial y}{\partial s} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \quad (13)$$

II-3 Les contours

a) Élément de contour

Sur les contours, les dérivées par rapport à s et v s'écrivent:

$$\frac{\partial N_1}{\partial v} = -\frac{(1-s)}{4} \quad (14)$$

$$\frac{\partial N_1}{\partial s} = -\frac{(1-v)}{4} \quad (15)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial v} = -\frac{1+s}{4} \quad (16)$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial s} = \frac{(1-v)}{4} \quad (17)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial v} = \frac{1+s}{4} \quad (18)$$

$$\frac{\partial N_3}{\partial s} = \frac{1+v}{4} \quad (19)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial v} = \frac{(1-s)}{4} \quad (20)$$

$$\frac{\partial N_4}{\partial s} = -\frac{1+v}{4} \quad (21)$$

a-1) Plaçons nous à $v = \text{constante}$, s variant de -1 à 1 .

Les équations (8) et (9) s'écrivent dans ce cas:

$$x(s) = \sum_{i=1}^4 N_i(s) \cdot x_i \quad (22)$$

$$y(s) = \sum_{i=1}^4 N_i(s) \cdot y_i \quad (23)$$

et on en déduit:

$$dx = \sum_{i=1}^4 x_i \frac{\partial N_i}{\partial s} ds \quad (24)$$

$$dy = \sum_{i=1}^4 y_i \frac{\partial N_i}{\partial s} ds \quad (25)$$

. Si $v = -1$, on aura plus précisément:

$$\frac{\partial N_1}{\partial s} = -\frac{1}{2} \quad \frac{\partial N_3}{\partial s} = \frac{\partial N_4}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial N_2}{\partial s} = \frac{1}{2}$$

Soit donc:

$$dx = \left(\frac{x_2 - x_1}{2} \right) ds \quad (26)$$

$$dy = \left(\frac{y_2 - y_1}{2} \right) ds \quad (27)$$

On obtient ainsi:

$$dC = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \left| \frac{d_{12}}{2} \right| ds \quad (28)$$

. Si $v = 1$, de la même manière, on obtient:

$$dC = \left| \frac{d_{34}}{2} \right| ds \quad (29)$$

On remarquera que ds , dans cette section, indique l'élément de contour le long de l'axe s dans le système local.

a-2) Plaçons-nous, cette fois-ci à $s = \text{constante}$, v variant de -1 à 1 . Par le même raisonnement, on obtient:

$$\text{. si } s = -1 \quad dC = \left| \frac{d_{41}}{2} \right| ds \quad (30)$$

$$\text{. si } s = 1 \quad dC = \left| \frac{d_{32}}{2} \right| ds \quad (31)$$

Plus généralement, le changement de système d'axes pour les intégrales de contour s'écrira:

$$dC = \left| \frac{d_{ij}}{2} \right| ds \quad (32)$$

b) La continuité géométrique des tangentes inter-éléments ne peut s'effectuer pour des éléments de ce type que si les contours inter-éléments sont alignés. C'est, en partie, cette restriction qui entraîne l'utilisation d'éléments plus complexes conduisant à des contours curvilignes.

III- Élément à huit points

III-1 Les fonctions d'interpolation

La figure A-3 indique un élément isoparamétrique à huit points dans le système local. Les fonctions d'interpolation sur cet élément s'écrivent:

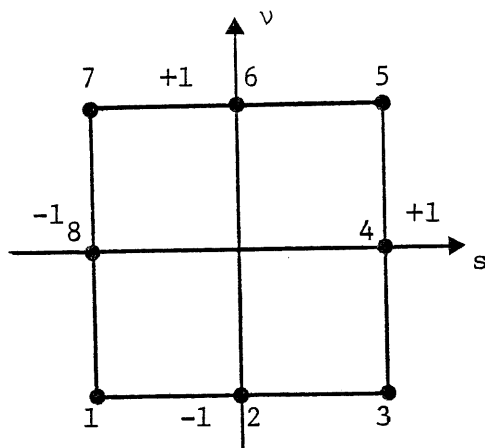


Figure A-3

Elément à huit points

On remarquera, dans ce cas, que les arêtes sont bien des fonctions quadratiques de s ou v .

Posons:

$$UV1(I) = (U(I) + V(I))/2 \quad (41)$$

$$UV2(I) = (U(I) - V(I))/2 \quad (42)$$

Les équations (33) à (40) peuvent, alors, s'écrire:

$$N(2.I-1) = (1+U(I).s).(1+V(I).v).(U(I).s+V(I).v-1)/4 \quad (43)$$

$$I=1,2,3,4$$

$$N(2.I) = (1-U(I).UV1(I).s^2).(1-U(I).UV2(I).v^2).(1+UV2(I).s).(1+UV1(I).v)/2 \quad (44)$$

$$I=1,2,3,4$$

$$N_1 = -(1-s)(1-v)(s+v+1)/4 \quad (33)$$

$$N_2 = (1-s^2)(1-v)/2 \quad (34)$$

$$N_3 = (1+s)(1-v)(s-v-1)/4 \quad (35)$$

$$N_4 = (1-v^2)(1+s)/2 \quad (36)$$

$$N_5 = (1+s)(1+v)(s+v-1)/4 \quad (37)$$

$$N_6 = (1-s^2)(1+v)/2 \quad (38)$$

$$N_7 = (1-s)(1+v)(-s+v-1)/4 \quad (39)$$

$$N_8 = (1-s)(1-v^2)/2 \quad (40)$$

III-2 Calcul des dérivées et élément de surface

Les calculs et résultats sont identiques aux calculs et résultats de la section II-2.

III-3 Les contours

a) Élément de contour

a-1) sur les contours correspondant à $v = \text{constante}$, on aura:

$$dx = \sum_{i=1}^8 x_i \frac{\partial N_i}{\partial s} ds \quad (45)$$

$$dy = \sum_{i=1}^8 y_i \frac{\partial N_i}{\partial s} ds \quad (46)$$

on en déduit:

$$dC = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^8 x_i \frac{\partial N_i}{\partial s} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^8 y_i \frac{\partial N_i}{\partial s} \right)^2} ds \quad (47)$$

a-2) sur les contours où $S = \text{constante}$, on établirait de la même façon:

$$dC = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^8 x_i \frac{\partial N_i}{\partial s} \right)^2 + \left(\sum_{i=1}^8 y_i \frac{\partial N_i}{\partial s} \right)^2} dv \quad (48)$$

b) Continuité géométrique des tangentes inter-éléments

La figure A-4 représente deux éléments connexes.

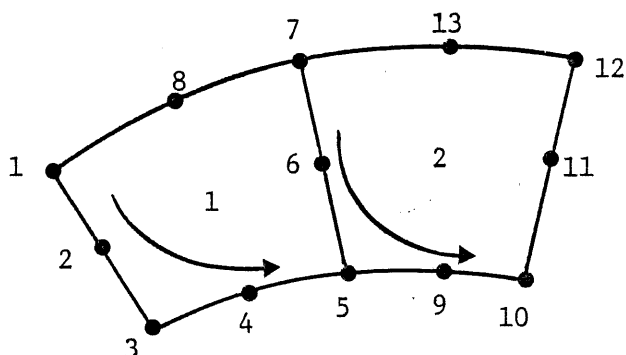


Figure A-4

Continuité des tangentes au contour

On se fixe pour but d'assurer la continuité de la tangente sur les contours 1,8,7,13,12 et 3,4,5,9,10.

Si les noeuds des éléments 1 et 2 sont définis selon les règles proposées dans l'introduction, on aura, par exemple, dans l'ordre:

élément 1 : 1,2,3,4,5,6,7,8

élément 2 : 7,6,5,9,10,11,12,13

Les sommets des éléments 1 et 2 énoncés dans le système global correspondent, dans l'ordre, aux noeuds 1,2,3,4,5,6,7,8 dans le système local, (figure A-3).

Sur le contour 1,8,7 de l'élément 1, correspondant à $s = -1$, on peut écrire:

$$x = x_1 N_1 + x_8 N_8 + x_7 N_7 \quad (49)$$

$$y = y_1 N_1 + y_8 N_8 + y_7 N_7 \quad (50)$$

Il est facile de déduire:

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{v=+1} = \frac{y_1 \frac{\partial N_1}{\partial v} + y_8 \frac{\partial N_8}{\partial v} + y_7 \frac{\partial N_7}{\partial v}}{x_1 \frac{\partial N_1}{\partial v} + x_8 \frac{\partial N_8}{\partial v} + x_7 \frac{\partial N_7}{\partial v}} \bigg|_{v=+1} \quad (51)$$

Si le point 7 et la tangente au point 7 sont fixés ainsi que le point 1, le point 8 doit être ajusté pour que l'équation (51) soit vérifiée. En fixant, par exemple, l'ordonnée du point 8, l'abscisse de ce même point sera déterminé à l'aide de l'équation (51).

Règle générale, nous avons pu constater que le point médian ne se déplace que très légèrement du contour. Ce déplacement minime permet ainsi d'assurer la condition de continuité des tangentes sur les contours. Cette condition est essentielle pour des problèmes de type hyperbolique.

IV- Élément à neuf points

IV-1 Les fonctions d'interpolation

La figure A-5 indique un élément isoparamétrique à neuf points

dans le système local. Les fonctions d'interpolation sur cet élément s'écrivent:

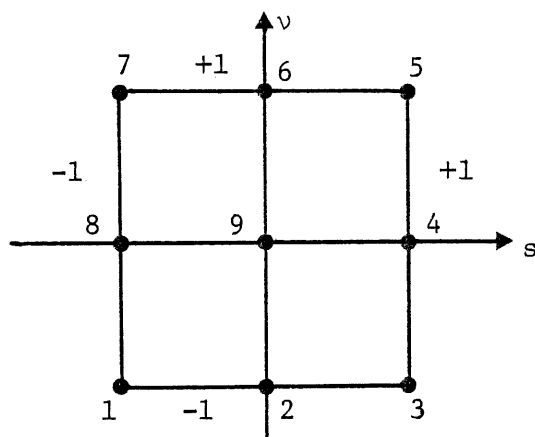


Figure A-5

Élément à neuf points

$$N_1 = sv(1-s)(1-v)/4 \quad (52)$$

$$N_2 = -v(1-v)(1-s^2)/2 \quad (53)$$

$$N_3 = -vs(1+s)(1-v)/4 \quad (54)$$

$$N_4 = s(1+s)(1-v^2)/2 \quad (55)$$

$$N_5 = sv(1+s)(1+v)/4 \quad (56)$$

$$N_6 = v(1+v)(1-s^2)/2 \quad (57)$$

$$N_7 = -sv(1-s)(1+v)/4 \quad (58)$$

$$N_8 = -s(1-s)(1-v^2)/2 \quad (59)$$

$$N_9 = (1-s^2)(1-v^2) \quad (60)$$

Posons :

$$S1(I) = 1+V(I).v \quad (61)$$

$$S2(I) = 1+U(I).s \quad (62)$$

$$P1(I) = 1-(U(I)+V(I)).V(I)/2 + U(I).v \quad (63)$$

$$P2(I) = 1+(V(I)-U(I)).U(I)/2 - V(I).s \quad (64)$$

on aura :

$$N(2I) = P1(I).S1(I).P2(I).S2(I)/2 \quad I=1,2,3,4 \quad (65)$$

$$N(2I-1) = U(I).V(I).s.v.S1(I).S2(I)/4 \quad I=1,2,3,4 \quad (66)$$

$$N(9) = (1-s^2).(1-v^2)$$

Les dérivées peuvent s'écrire avec les mêmes notations :

$$\frac{\partial N}{\partial v} (2I-1) = U(I).V(I).s.S2(I).(S1(I)+v.V(I))/4 \quad I=1,2,3,4 \quad (67)$$

$$\frac{\partial N}{\partial v} (2I) = S2(I).P2(I).(U(I).S1(I)+V(I).P1(I))/2 \quad I=1,2,3,4 \quad (68)$$

$$\frac{\partial N}{\partial S} (2I-1) = U(I).V(I).v.S1(I).(S2(I)+s.U(I))/4 \quad I=1,2,3,4 \quad (69)$$

$$\frac{\partial N}{\partial S} (2I) = S1(I).P1(I).(-V(I).S2(I)+U(I).P2(I))/2 \quad I=1,2,3,4 \quad (70)$$

$$\frac{\partial N}{\partial v} (9) = -2.v.(1-s^2) \quad (71)$$

$$\frac{\partial N}{\partial S} (9) = -2.s.(1-v^2) \quad (72)$$

IV-2 Calcul des dérivées et élément de surface

Les calculs et résultats sont identiques aux calculs et résultats de la section II-2.

IV-3 Les contours

On se réfèrera à la discussion de la section III-3 qui peut s'appliquer entièrement dans ce cas.