



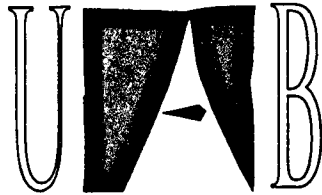
Universitat Autònoma de Barcelona

# Facultat de Ciències

INESTABILITATS DINÀMIQUES EN DISPOSITIUS ÒPTICS  
PASSIUS EXCITATS AMB LLUM MODULADA.

TESI DOCTORAL  
Jordi FARJAS i SILVA  
Bellaterra, Novembre de 1993

7-2-94



Universitat Autònoma de Barcelona

# Facultat de Ciències

INESTABILITATS DINÀMIQUES EN DISPOSITIUS ÒPTICS  
PASSIUS EXCITATS AMB LLUM MODULADA.

**TESI**

per a l'obtenció del GRAU DE DOCTOR

presentada a

LA FACULTAT DE CIÈNCIES

de la

UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA

per

**Jordi FARJAS SILVA**

Director de la Tesi  
**Gaspar ORRIOLS TUBELLA**

Novembre de 1993



*Als meus pares  
Joan i Anna Maria*

*A la Nuri*



*Voldria expressar el més profund agraïment al Dr. GASPAR ORRIOLS i TUBELLA per haver acceptat la direcció d'aquest treball. El seu constant ajut, suport i dedicació han estat inapreciables.*

*Al mateix temps, m'agradaria destacar la inestimable col·laboració del Dr. FRANCESC PI i VILA per l'important suport i encertats consells que en tot moment he rebut, sobretot pel que fa a la part experimental d'aquest treball.*

*També voldria expressar el meu agraïment a la resta de membres del Grup d'Òptica per la seva actitud de col·laboració al llarg d'aquest treball.*

*També vull recordar aquí als amics de despatx Joan Ignasi, Cesc, Josep, Ramon H. Ramon P. i Juli, pel seu ajut i comprensió al llarg de tot aquest temps.*

*Finalment vull agrair a la DGU de la Generalitat de Catalunya la concessió de la d'una beca de formació d'investigadors, així com el finançament rebut de la CIRIT a través d'un ajut de recerca per a joves investigadors.*

# ÍNDIX

INTRODUCCIÓ .....	3
I. CONCEPTES BÀSICS DE LA DINÀMICA DE SISTEMES .....	9
I.1 Introducció .....	9
I.2 Sistemes autònoms i no autònoms .....	9
I.3 Sistemes discrets .....	11
I.4 conjunts límits .....	11
I.5 Mapes de Poincaré .....	18
I.6 Estabilitat dels conjunts límits .....	21
I.7 Oscil·ladors .....	27
I.8 Bifurcacions .....	32
I.9 Rutes al caos .....	35
II. DESCRIPCIÓ DEL DISPOSITIU OPTO-TÈRMIC BIESTABLE .....	37
II.1 Introducció .....	37
II.2 Descripció del sistema. ....	38
II.3 Sistema autònom .....	49
II.4 Sistema experimental .....	60
III. LA CASCADA SUBHARMÒNICA .....	67
III.1 Introducció .....	67
III.2 Conceptes bàsics de la cascada subharmònica .....	67
III.3 Seqüència de doblaments de període en la bicapa modulada .....	71
III.4 Crisis internes en el dispositiu bicapa modulada .....	86
IV. INTERMITÈNCIES .....	95
IV.1 Introducció .....	95
IV.2 Anàlisi teòrica de les Intermitències de tipus I .....	96
IV.3 Resultats numèrics i experimentals de relaminarització quasiperiòdica .....	100
IV.4 Resultats numèrics i experimentals de relaminarització caòtica ...	111
IV.5 Estudi estadístic de les intermitències de tipus I .....	127
V. ACOBLAMENTS NO LINEALS .....	133
V.1 Introducció .....	133
V.2 Sincronització d'oscil·ladors no lineals. Mapes circulars .....	134
V.3 Finestres periòdiques del dispositiu bicapa .....	141
V.4 Estudi de codimensió dos de l'estabilitat de les solucions periòdiques .....	148
V.5 Bifurcacions locals de codimensió dos. ....	167
V.6 Organització de les zones caòtiques. ....	181

VI. BIFURCACIONS GLOBALES .....	187
VI.1 Òrbites homoclíniques en el mapa estroboscòpic .....	188
VI.2 Bifurcacions homoclíniques. Bifurcació homoclínica en el dispositiu bicapa autònom .....	190
VI.3 Bifurcacions globals i bifurcacions de codimensió 2 .....	193
VI.4 Bifurcació homoclínica amb una òrbita sella nascuda en modular un punt fix sella del sistema autònom .....	204
VI.5 Estudi detallat de dues bifurcacions homoclíniques transversals ...	209
VI.6 Evidències experimentals de bifurcacions homoclíniques en el dispositiu bicapa modulada. ....	220
VII. CONCLUSIONS .....	239
VIII. APÈNDIX. ....	243
A. Funció interferomètrica per a una cavitat amb miralls absorbents ..	243
B. Càlcul de la matriu variacional. Tècnica de localització d'òrbites periòdiques. .....	245
C. Determinació del exponent de Lyapunov a partir d'una sèrie temporal .....	248
IX. REFERÈNCIES .....	251

# INTRODUCCIÓ

Aquesta memòria està dedicada a l'estudi del comportament dinàmic d'un determinat tipus de dispositiu òptic biestable il·luminat amb un feix d'intensitat modulada.

El dispositiu en qüestió forma part d'una família de sistemes biestables que hem desenvolupat al Laboratori d'Òptica No Lineal. Els dos aspectes més rellevants de la dinàmica d'aquests sistemes són el fet que la seva dimensió dinàmica efectiva pot ser escollida a voluntat mitjançant la gradual complicació de la seva estructura i l'abundant exhibició de fenomenologia homoclínica.

El dispositiu aquí considerat, el qual anomenarem dispositiu bicapa per les raons que veurem més endavant, quan és il·luminat amb un feix d'intensitat constant es comporta amb una dimensió dinàmica efectiva igual a dos, i pot exhibir solucions estacionaries multivaluades, auto-oscil·lacions a una única freqüència i una certa varietat de bifurcacions homoclíniques senzilles. La modulació del feix incident introdueix un nou grau de llibertat que, afegit als propis del dispositiu bicapa, permet l'aparició de fenòmens més complexos. El nostre treball ha estat dedicat a l'estudi, a nivell teòric, de simulació numèrica, i d'observació experimental, d'un conjunt d'aquests fenòmens.

Hi han dues raons que fan interessant l'estudi dinàmic del dispositiu bicapa modulad. Per una banda, tal i com demostrarem al llarg del treball, el dispositiu bicapa exhibeix una rica varietat de fenòmens típics dels oscil·ladors no lineals forçats: intermitències tipus I, bifurcacions de Hopf de segon ordre, cascades subharmòniques, crisis internes i afermament de freqüències. Per altre banda, la fenomenologia homoclínica exhibida autònomament pel dispositiu bicapa, la qual degut a la dimensió dos del sistema es manifesta amb la participació d'òrbites d'estructura senzilla i sense l'aparició de caos, en el cas del dispositiu forçat per la modulació externa s'enriqueix en complexitat i varietat. Convé aquí remarcar l'important paper que, segons l'opinió cada dia més estesa, juguen les connexions homoclíniques en la determinació de les propietats globals de la majoria de sistemes en els quals s'han observat respostes caòtiques. Tal i com veurem, el dispositiu bicapa modulad pot ser molt útil per estudiar aquest tipus d'instabilitats.

Per altra banda, en aquest treball hem resolt el problema de la reducció del sistema de equacions en derivades parcials, que en principi, és necessari per descriure aquest tipus de dispositius, a un sistema d'equacions en derivades ordinàries d'ordre igual a la dimensió efectiva del sistema original. La reducció s'ha fet mitjançant mètodes d'aproximació que ens permeten de mantenir una relació ben definida entre els paràmetres del sistema físic i els coeficients del sistema reduït. L'interés de treballar amb sistemes d'equacions en derivades ordinàries de baixa dimensió està, apart de reduir considerablement el temps de càlcul, en la possibilitat d'utilitzar tècniques molt potents de caracterització d'instabilitats com són: el càlcul d'estabilitat i seguiment d'òrbites periòdiques, càlcul de *manifolds* i càlcul d'exponents de Lyapunov.

Finalment, voldríem remarcar que el desenvolupament del treball, tant pel que fa a la simulació numèrica com a les observacions experimentals, ha requerit la posta

a punt de tot un seguit de tècniques d'anàlisi i caracterització dels diferents fenòmens dinàmics estudiats i això ha constituït una part significativa de la tasca realitzada.

### **Els dispositius òptics biestables com a sistemes dinàmics.**

El camp de la biestabilitat òptica (BO) està dedicat al estudi de tot un seguit de sistemes òptics que presenten pronunciades no linealitats en les seves corbes característiques d'entrada/sortida. Aquestes corbes característiques consisteixen en la representació de la resposta del sistema, caracteritzada normalment a través de la potència reflectida o transmesa, en funció de la potència incident. En aquestes corbes les no linealitats apareixen en la forma de trams de pendent pràcticament nul o de pendent molt pronunciat o, inclús, de pendent negatiu, els quals, aquests darrers, estan associats als cicles d'histèresi típics de la biestabilitat. D'aquestes no linealitats naixent les aplicacions potencials de la BO al processament òptic, a la computació òptica i, més en general, a la manipulació de llum amb llum [1,2].

El que volem remarcar en aquest apartat és el fet que els fenòmens de la BO són fenòmens típics de la Dinàmica de Sistemes. En altres paraules, volem remarcar que les no linealitats essencials de la BO no són les convencionals de l'òptica no lineal, les quals es basen en la resposta no lineal dels oscil·ladors dipolars microscòpics, sinó que estan associades a l'existència de mecanismes de realimentació entre les variables macroscòpiques que caracteritzen la dinàmica interna del sistema i a la presència de dependències no lineals en l'anell de realimentació.

En efecte, la BO s'ha demostrat en una gran varietat de sistemes, sobre la base de diferents materials i de diferents esquemes [1,2], i el comú denominador de tots ells és la presència d'un bucle de realimentació no lineal entre l'estat del sistema i la seva resposta a la llum exterior. En altres paraules, l'estat del sistema és afectat per la llum a través d'un efecte físic, la magnitud del qual depèn de forma no lineal del mateix estat del sistema.

Convé distingir dos nivells diferents dins el conjunt de mecanismes físics involucrats en la realimentació. A un primer nivell, hi ha els efectes induïts per la llum, els quals introdueixen a la potència lluminosa en el bucle de realimentació i a vegades poden ser no lineals, com per exemple l'absorció saturada o una refracció no-lineal [1], o efectes lineals com ara la pressió de radiació sobre un mirall suspès [3] o efectes termo-òptics deguts a l'absorció de llum [4]. A un altre nivell, hi ha els efectes que creen la dependència de la realimentació respecte a una funció no lineal del paràmetre afectat per la potència lluminosa [1,5]. Aquesta funció no lineal constitueix la principal no linealitat responsable del fenòmens de la biestabilitat òptica. En el cas dels dispositius biestables interferomètrics dispersius, com serà el nostre, la funció no lineal està relacionada amb la funció interferomètrica que descriu la resposta de l'interferòmetre en funció de la fase.

Una conseqüència molt significativa de l'origen dinàmic de la BO és la possibilitat d'obtenir cicles d'histèresi amb potències lluminoses inferiors en molts ordres de magnitud a les típiques de l'Òptica No Lineal. Així, per exemple, en el nostre laboratori s'han observat cicles biestables amb potències inferiors al mW [12].

Des d'un punt de vista més general, l'Òptica ha proporcionat sistemes molt adients per a la investigació de fenòmens dinàmics, gràcies a la relativa simplicitat



tant de la seva construcció i control experimental com de la corresponent descripció matemàtica. De fet, l'estudi d'instabilitats dinàmiques ha estat molt prolífic en el cas dels làsers i, a partir de la previsió per Ikeda [9] de possible caos en sistemes híbrids amb retard, es va estendre als sistemes òptics passius i, especialment, als sistemes biestables [6].

D'aquesta manera, la biestabilitat òptica ha esdevingut un camp molt útil per a l'estudi de la dinàmica de sistemes i caos. Els dispositius biestables són sistemes relativament senzills que presenten una gran varietat de fenòmens típics de la dinàmica de sistemes no lineals i que ens permeten poder estudiar sistemes molt més complexos. Un exemple el tenim en les conmutacions associades a cicles d'histèresi deguts a bifurcacions sella node, cosa que és objecte de l'estudi del fenomen de la "caiguda crítica lenta" [7]. S'han observat oscil·lacions regeneratives en dispositius biestables que tenen dos contribucions a la realimentació de signe oposat i constants de temps diferents [8]. En aquest cas la competència entre els dos efectes oposats introdueix una bidimensionalitat en el sistema que dona la possibilitat que apareixin bifurcacions de Hopf. Uns sistemes amb més dimensions es poden aconseguir en introduir desfasaments en el bucle de realimentació [9] de manera que es poden observar respostes caòtiques a través de doblaments de període [10].

### **Biestabilitat òptica amb absorció localitzada (BOITAL).**

El tipus de biestabilitat considerat en aquest treball és un cas particular de biestabilitat òptica induïda tèrmicament (BOIT), el qual considerem molt indicat per estudiar bifurcacions locals i globals en sistemes de baixa dimensió i amb la peculiaritat que la dimensió dinàmica del problema pot ser escollida a voluntat.

La BOIT s'acostuma a observar en cavitats interferomètriques amb pèrdues per absorció i on el camí òptic depèn de la temperatura. L'interferòmetre sol ser una cavitat [1] però també s'han obtingut resultats amb interferòmetres de doble feix [11]. La variable que caracteritza la resposta del sistema i governa el bucle de realimentació és la fase interferencial, la qual afecta la potència a través de les interferències i al mateix temps és afectada per la llum absorbida a través dels efectes tèrmics sobre el camí òptic dins l'interferòmetre.

La no linealitat principal està associada a la funció interferomètrica, la qual és una funció periòdica tipus Airy, i, per això, la BOIT no necessita involucrar cap efecte òptic no lineal. Els efectes involucrats són absorcions lineals de la llum, dilatacions tèrmiques o variacions lineals del índex d'un material en funció de la temperatura.

A diferència de l'esquema convencional dels dispositius BOIT, on tant l'absorció com els efectes termo-òptics es donen al mitjà espaciador, el nostre sistema presenta la peculiaritat de tenir l'absorció localitzada en una dels miralls de la cavitat interferomètrica (BOITAL), mentre que l'espaciador termo-òptic és transparent [12]. D'aquesta manera aconseguim la separació de les dues funcions bàsiques del sistema biestable opto-tèrmic, la qual cosa permet una optimització independent i, per tant, més fàcil de les dues funcions. A més a més, la separació de funcions també permet d'introduir estructures en el dispositiu, ja sia a base de diverses capes de materials termo-òptics al mitjà espaciador com de diverses pel·lícules absorbents. Aquestes

estructures complexes poden ser útils a l'hora d'obtenir noves funcions lògiques o comportaments dinàmics interessants [13].

Concretament, les cavitats BOITAL amb un espaciador multicapa de materials amb coeficients termo-òptics alternativament oposats presenten una rica varietat de fenòmens dinàmics. En aquest cas, la realimentació no lineal responsable de la resposta biestable del dispositiu és afectada per la competència entre les fases interferomètriques de les diferents capes de l'espaciador. La posició relativa de les capes respecte a la font de calor introdueix uns retards temporals entre aquestes contribucions i, d'aquesta manera, és possible obtenir auto-oscil·lacions i altres tipus d'inestabilitats en la resposta del sistema.

La dinàmica del la família de dispositius BOITAL amb espaciador multicapa té dues característiques que els fan interessants, per una banda la facilitat amb la que donen bifurcacions homoclíniques i per altre banda el fet de que la dimensió efectiva del sistema és igual al número de capes del espaciador. Això últim permet l'estudi gradual de sistemes de complexitat creixent. En el cas de sistemes bicapes s'ha observat tant experimental com numèricament diverses bifurcacions homoclíniques sense una estructura d'òrbites complexa [14]. En sistemes de dimensió superior, la homoclinicitat pot aparèixer acompanyada d'una rica dinàmica i, en particular, s'han obtingut evidències tant numèriques com experimentals de caos del tipus Shil'nikov [15,16,17].

### Motivació i objectius del treball.

La tesi es centrarà en l'estudi de la dinàmica de dispositius BOITAL il·luminats amb un feix làser modulad. Concretament analitzarem la dinàmica del dispositiu bicapa quan apliquem la modulació sobre una potència base amb la qual el sistema autònom ja exhibeix auto-oscil·lacions. En aquest treball ens centrarem en l'estudi de la dinàmica resultant de la interacció entre els dos oscil·ladors: un de no lineal, el dispositiu, i un de lineal que és la modulació del feix làser. La motivació d'aquest treball és l'alt l'interès que sempre han despertat en el món científic l'interacció entre oscil·ladors. En el món real en la majoria de fenòmens que ens envolten hi han implicats l'interacció entre dos o més oscil·ladors. Per exemple tenim el moviment relatiu de la terra amb la lluna [18], l'alternància entre dies i nits amb els bioritmes dels éssers vius [19], acoblament d'oscil·ladors químics [20], acoblament d'oscil·ladors electrònics i mecànics [21], etc.

L'estudi dels oscil·ladors no és nou, però la recent evolució de la dinàmica de sistemes iniciada per Henri Poincaré [22] juntament amb la millora de les capacitats de càlcul dels ordinadors [23] ha obert noves perspectives en l'estudi d'aquests sistemes, que han permet d'entendre fenòmens com l'aparició d'oscil·lacions subharmòniques, evolucions caòtiques, etc.

Durant el decurs del treball demostrarem que el dispositiu bicapa és un bon candidat per l'estudi de les inestabilitats dinàmiques en oscil·ladors no lineals forçats. Per una banda hem trobat una completa i rica dinàmica característica dels dispositiu forçats com són les cascades subharmòniques, bifurcacions sella node d'òrbites periòdiques, intermitències de tipus I i bifurcacions globals de frontera i homoclíniques. Per altre banda demostrarem que la descripció numèrica del

dispositiu es pot reduir a un sistema d'equacions en derivades ordinàries senzill, cosa que facilita molt l'estudi i comprensió d'aquest fenomen. A més a més, experimentalment, disposem d'una elevada finesa en el control del muntatge, el dispositiu experimental presenta una bona estabilitat per experiments temporalment llargs i la resolució dels resultats experimentals és molt bona. També comprovarem que el grau de coincidència entre les prediccions numèriques i els resultats experimentals és molt gran.

El model matemàtic que descriu la dinàmica de la família de dispositius BOITAL és un sistema d'equacions homogènies de transport de calor en derivades parcials. Aquestes equacions estan sotmeses a unes condicions de contorn i de continuïtat, i la única no linealitat es troba en la condició de contorn que descriu l'absorció de calor en el mirall d'entrada [36]. Tot i que hem observat que la dinàmica descrita per aquest sistema d'equacions és de baixa dimensió, la dimensió real del sistema és infinita. Això suposa una seriosa limitació a l'hora de caracteritzar les diferents inestabilitats que han estat objecte d'estudi en aquesta tesi. Per aquesta raó, un dels objectius d'aquest treball, ha estat la reducció del sistema d'equacions en derivades parcials a un sistema d'equacions en derivades ordinàries. Així ho hem fet i hem obtingut un model reduït d'ordre igual al número de capes del espaciador i amb els coeficients de les equacions ben definits a partir dels paràmetres físics del dispositiu. El treball de simulació numèrica l'hem realitzat amb aquest model de baixa dimensió i, gràcies a això, ens ha estat possible implementar diverses tècniques numèriques molt potents d'anàlisi que ens han permès la caracterització de fenòmens complexos.

## Organització de la memòria.

La tesi s'ha dividit en sis capítols. Podem distingir però dos blocs bàsics en la presentació del sistema. La primera part la formen els dos primers capítols on ens introduïrem en la problemàtica dels dispositiu bicapa modulats i on donarem els conceptes bàsics pel seu estudi. La segona part la formen els darrers quatre capítols on descriurem les diferents inestabilitats trobades numèricament en el dispositiu bicapa modulats i il·lustrarem evidències experimentals de les mateixes.

El primer capítol és una breu introducció a la teoria de la dinàmica de sistemes per tal de presentar al lector els conceptes i les eines que utilitzarem durant tot el desenvolupament del treball. En aquest capítol definirem els conceptes més importants i bàsics de la teoria de sistemes fent especial incidència en aquells relacionats amb els sistemes forçats. Descriurem els diferents tipus de solucions per a un sistema. Farem una breu explicació de les diferents bifurcacions característiques dels sistemes forçats i introduïrem diferents exemples de sistemes fent una especial incidència en els oscil·ladors forçats.

En el segon capítol presentarem el dispositiu objecte de la investigació, tant des del punt de vista físic com matemàtic. Descriurem el sistema d'equacions en derivades parcials basat en l'equació homogènia de la calor, que és una equació lineal, i subjecte a una condició de contorn no lineal. A partir d'aquest sistema d'EDP's deduirem formalment el sistema reduït d'EDO's. Farem un breu anàlisi de les principals característiques del sistema d'equacions del dispositiu bicapa modulats. A

més a més, farem un anàlisi de la dinàmica del sistema no modulad. Aquest anàlisi ens ajudarà a entendre millor la dinàmica del sistema modulad. Finalment descriurem el dispositiu i muntatge experimental, i presentarem alguns resultats experimentals obtinguts en el sistema bicapa no modulad.

En el tercer capítol estudiarem tant numèricament com experimentalment la cascada subharmònica en el nostre dispositiu. Farem un estudi detallat de les inestabilitats subharmòniques així com de la cascada inversa. També descriurem les crisis internes, que són un tipus de bifurcació global que apareix en les cascades inverses.

En el quart capítol estudiarem tant numèricament com experimentalment les intermitències tipus I en el nostre dispositiu. Distingirem dues situacions diferents en les que aquestes intermitències poden venir acompanyades de l'aparició de solucions quasiperiòdiques o caòtiques. També il·lustrarem diverses tècniques qualitatives i quantitatives que ens permeten de caracteritzar les intermitències de tipus I i distingir-les de les de tipus II i III.

En el cinquè capítol centrarem l'estudi en l'anàlisi de l'acoblament entre el dispositiu i la modulació externa. Estudiarem l'aparició de les finestres periòdiques resultants de l'afermament de freqüències. Farem un estudi en l'espai dels paràmetres de les bifurcacions locals de codimensió  $u$  i dos, aquest estudi ens donarà un visió global de les inestabilitats al voltant de les finestres periòdiques.

En el sisè i darrer capítol estudiarem tant numèricament com experimentalment bifurcacions globals homoclíniques. Començarem descrivint un cas molt senzill de bifurcació homoclínica del sistema no modulad. Després analitzarem les diferents situacions en que es produeixen les bifurcacions homoclíniques del sistema bicapa modulad i finalment analitzarem en detall dos casos fent una especial incidència en l'estudi de la naturalesa caòtica de les solucions implicades en aquestes bifurcacions.

# I.- CONCEPTES BÀSICS DE LA DINÀMICA DE SISTEMES

## I.1 Introducció.

Aquest treball està dedicat a l'estudi de la dinàmica d'un sistema no lineal: un dispositiu BOITAL format per un espaciador de dues capes il·luminat amb un feix modulat. Tot i que l'estudi de la dinàmica dels sistemes no lineals és un problema clàssic, ha estat fins ben entrat aquest segle un camp ignorat donada la dificultat de la seva anàlisi. Els dos problemes que dificulten l'anàlisi dels sistemes no lineals són; d'una banda, la impossibilitat d'obtenir solucions anàliques i, de l'altra, la complexa dinàmica associada a les solucions d'aquest sistema.

Tal i com ja s'ha comentat a la introducció en els darrers anys s'ha produït una revolució en l'estudi de la dinàmica de sistemes. L'aparició de nous conceptes i tècniques d'estudi com són els mapes de Poincaré, els multiplicadors de Floquet, els exponents de Lyapunov, etc, ha permès una comprensió més profunda dels fenòmens dinàmics implicats en la dinàmica de les evolucions dels sistemes no lineals. Aquestes tècniques han permès una simplificació de l'anàlisi i la possibilitat de caracteritzar les dinàmiques més complexes. Aquesta revolució està acompanyada de l'aparició dels ordinadors, cada cop més potents, que permeten reproduir numèricament la solució del sistema, tot i no disposar d'una solució analítica, mitjançant algorismes d'integració d'equacions diferencials.

En el desenvolupament d'aquest treball s'han utilitzat les tècniques i conceptes abans esmentats per tal de descriure la dinàmica del dispositiu bicapa modulat. Per això, ha estat convenient dedicar aquest capítol a presentar breument els conceptes bàsics de la dinàmica de sistemes, fent una especial incidència en aquells que fan referència a sistemes modulats. La bibliografia consultada per a l'elaboració d'aquest capítol han estat diverses obres que tracten de la dinàmica de sistemes no lineals [24-30].

Per tal de introduir el lector en la dinàmica dels sistemes forçats dedicaré part d'aquest capítol a descriure diversos sistemes clàssics en l'estudi de la dinàmica de sistemes tot centrant-lo en oscil·ladors i sistemes forçats.

A la última part s'introduirà el concepte de bifurcació, fent una breu anàlisi dels diferents tipus de bifurcacions i comentant a mena d'introducció diferents rutes al caos --un estudi més ampli i detallat dels mateixos és donarà en els següents capítols.

## I.2 Sistemes autònoms i no autònoms.

Un sistema dinàmic autònom d'ordre  $n$  és definit per l'equació d'estat:

$$\dot{x} = f(x), \quad x(t_0) = x_0 \quad (I.1)$$

on  $\dot{x}=dx/dt$ ,  $x(t) \in \mathbb{R}^n$  és l'estat al temps  $t$ , i  $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  és el camp vectorial. Atès que el



camp vectorial no depèn del temps, podem escollir com a temps inicial  $t_0=0$ .

Per tal de mostrar la dependència explícita de les condicions inicials, la solució de l'equació (I.1) s'acostuma a escriure com  $\phi_t(x_0)$ . S'anomena *flux* la família d'aplicacions  $\phi_t: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que acompleixen les dues condicions,  $\phi_{t_1+t_2} = \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2}$  i  $\phi_0(x) = x$ .

S'anomena *trajectòria* a partir de  $x_0$  el conjunt de punts  $\{\phi_t(x_0): -\infty < t < \infty\}$ .

El sistema dinàmic (I.1) és lineal si el camp de vectors  $f$  és lineal.

Un sistema dinàmic no autònom d'ordre  $n$  és definit per l'equació d'estat:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (\text{I.2})$$

En els sistemes no autònoms, el camp vectorial depèn del temps, cosa que significa que no podem fixar arbitràriament el temps inicial. Denotem la solució de l'equació (I.2) que passa per  $x_0$  a l'instant  $t_0$  per  $\phi_t(x_0, t_0)$ . Si el camp vectorial  $f(x, t)$  és lineal en  $x$  llavors el sistema dinàmic (I.2) és lineal.

Si existeix un  $T > 0$  tal que  $f(x, t) = f(x, t+T)$  per a tots els  $x$  i  $t$ , llavors el sistema és *periòdic en el temps* amb període  $T$ . El període  $T$  més petit s'anomena *període mínim*.

L'objecte d'estudi d'aquest treball és el nostre dispositiu BOITAL sotmès a una modulació externa. Com veurem al capítol II la dependència en el temps del camp vectorial ve donada per aquesta modulació externa, i com que aquesta modulació és periòdica, el sistema és periòdic en el temps.

Un sistema no autònom d'ordre  $n$  amb període  $T$ , com és aquest, es pot convertir sempre en un sistema autònom d'ordre  $n+1$  si afegim una nova variable  $\theta = 2\pi t/T$ . El sistema autònom ve donat per

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \theta T/2\pi), & x(t_0) &= x_0 \\ \dot{\theta} &= 2\pi/T, & \theta(t_0) &= 2\pi t_0/T \end{aligned} \quad (\text{I.3})$$

Atès que  $f$  és periòdica en el temps amb període  $T$ , el sistema és periòdic en  $\theta$  amb període  $2\pi$ . Així doncs, els plans,  $\theta=0$  i  $\theta=2\pi$  són idèntics i, per tant, podem passar d'un espai Euclidià  $\mathbb{R}^{n+1}$  a l'espai cilíndric  $\mathbb{R}^n \times S^1$  on  $S^1 = [0, 2\pi)$  defineix el cercle.

La solució de (I.3) en l'espai cilíndric és

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_t(x_0, t_0) \\ 2\pi t/T \bmod 2\pi \end{bmatrix} \quad (\text{I.4})$$

on la funció mòdul restringeix  $0 < \theta < 2\pi$ . Utilitzant aquesta transformació, la teoria per a sistemes autònoms es pot aplicar a sistemes no autònoms periòdics.

Per a qualsevol  $t$  suposarem que  $\phi_t$  i  $\phi(x, t_0)$  són diferenciables i invertibles. Aquesta suposició no és restrictiva i té unes conseqüències significatives:

1. Existeix una solució del sistema per a qualsevol  $t$ .
2. Per a uns temps  $t, t_0$  qualsevol  $\phi_t(x) = \phi_t(y)$  si i només si  $x=y$ . Això implica, tenint en compte que  $\phi_{t_1+t_2} = \phi_{t_1} \circ \phi_{t_2}$ , que per a un sistema autònom donat un punt inicial existeix una única trajectòria, i que dues trajectòries diferents no poden interseccionar.

3. Per a uns temps  $t, t_0$  qualsevol  $\phi_t(x, t_0) = \phi_t(y, t_0)$  si i només si  $x = y$ . Això implica que per a un sistema no autònom, donats un punt i temps inicial existeix una única solució. Tanmateix, donats  $t_0 \neq t_1$ , és possible que existeixi un temps  $t$  tal que  $\phi_t(x, t_0) = \phi_t(y, t_1)$  i un temps  $t'$  tal que  $\phi_{t'}(x, t_0) \neq \phi_{t'}(y, t_0)$  cosa que implica que, a diferència del cas dels sistemes autònoms, en els sistemes no autònoms dues trajectòries diferents poden interseccionar sempre i quan ho facin per temps diferents.
4. Com que existeix la derivada de la trajectòria per a qualsevol punt inicial, i a més a més no és singular, llavors  $\phi_t(x)$  i  $\phi_t(x, t_0)$  són contínues.

### I.3 Sistemes Discrets.

Una aplicació  $P: \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_n$ , defineix un sistema discret mitjançant l'equació

$$x_{k+1} = P(x_k), \quad k=0, 1, 2, \dots \quad (I.5)$$

Donat un punt inicial  $x_0$ , successives aplicacions de  $P$  generen un conjunt de punts  $\{x_0\}_{k=0}^{\infty}$  que formen la trajectòria. Tot i que el nostre és un sistema continu, mitjançant la tècnica dels mapes de Poincaré, el podem transformar en un de discret. Veurem un estudi detallat d'aquesta tècnica a l'apartat I.5, però cal destacar que la utilització de mapes de Poincaré és una eina important per a l'estudi de flux d'un sistema continu i, a més a més, permet il·lustrar conceptes importants sense haver d'entrar en la problemàtica de la resolució de sistemes d'equacions.

### I.4 Conjunts Límits.

En aquest apartat veurem què és un *conjunt límit* i un estat estable.

L'*estat estable* fa referència al comportament asimptòtic del sistema quan  $t$  tendeix a  $+\infty$ . La diferència entre una trajectòria i el seu estat estable s'anomena *transitori*. L'equivalent a l'estat estable a l'espai dels estats són els conjunts límits.

Un punt  $y$  és un *punt  $\omega$ -límit* d' $x$  si, per a qualsevol entorn  $U$  d' $y$ , quan  $t \rightarrow +\infty$  aleshores  $\phi_t(x)$  entra repetidament a  $U$ .

S'anomena *conjunt  $\omega$ -límit* al conjunt  $L(x)$  format per tots els punts  $\omega$ -límit d' $x$ .

Un conjunt  $\omega$ -límit és *atractiu* si existeix un entorn obert  $U$  de  $L$  tal que  $L(x) = L$  per a tot  $x \in U$ . Els conjunts límits atractius són especialment interessants perquè són els únics observables experimentalment.

La *conca d'atracció*  $B_L$  d'un conjunt límit atractiu  $L$  és la unió de tots els entorns oberts  $U$  abans esmentats.  $B_L$  és el conjunt de totes les condicions inicials que tendeixen cap a  $L$  quan  $t \rightarrow +\infty$ .

Podem també definir punts i conjunts  $\alpha$ -límit. Les definicions són idèntiques a les anteriors però canvien  $t \rightarrow +\infty$  per  $t \rightarrow -\infty$ .

Tot i que les anteriors definicions corresponen a sistemes autònoms continus, també s'apliquen a sistemes discrets i es poden extrapolar a sistemes no autònoms realitzant la transformació descrita a I.3 o bé mitjançant la transformació a través de mapes de Poincaré.

En un sistema lineal estable només existeix un conjunt límit, i la conca d'atracció és tot l'espai, és a dir, l'estat estable és independent de les condicions inicials. Per contra, és típic trobar en els sistemes no lineals diferents conjunts límits, cadascun amb una conca d'atracció diferent. En aquest cas les condicions inicials determinen quin conjunt límit s'assoleix.

A continuació estudiarem quatre estats estables diferents començant pel més senzill i acabant pel més complex. Cadascun d'ells es pot descriure de tres formes diferents segons l'evolució temporal, és a dir, en forma d'ones temporals, en el domini de les freqüències i en l'espai dels estats, això és, com a conjunts límits.

#### I.4.1 Punts d'equilibri.

Un *punt d'equilibri*  $x_{eq}$  d'un sistema autònom és una solució constant de l'equació (I.1), és a dir,  $x_{eq} = \phi_t(x_{eq})$  per a tot  $t$ . En un punt d'equilibri el camp vectorial s'anul·la, així doncs  $f(x)=0$  implica que  $x$  és un punt d'equilibri.

En el cas de sistemes no autònoms en aplicar la transformació (I.3) podem comprovar que no existeixen solucions estàtiques, atès que  $\dot{\theta}$  és constant i diferent de 0 per a tot  $T$  real.

L'espectre per a les components de  $\phi_t(x_{eq})$  no nul·les és un únic pic de freqüència nul·la.

El conjunt límit corresponent al punt d'equilibri és el mateix punt d'equilibri.

#### I.4.2 Solucions periòdiques.

$\phi(x^*)$  és una solució periòdica d'un sistema autònom si, per a tot  $t$ ,

$$\phi_t(x^*) = \phi_{t+T}(x^*) \quad (I.6)$$

per a un període mínim  $T > 0$ . Cal assenyalar que  $x^*$  no és únic, ja que qualsevol punt que es trobi dins la solució periòdica també complirà l'equació I.6. Un canvi en el temps inicial implica un canvi en  $x^*$ .

Tota solució periòdica per a la qual existeixi com a mínim un entorn que no contingui cap altra solució periòdica és *aïllada*. En el cas de sistemes autònoms una solució periòdica aïllada s'anomena *cicle límit*.

L'espectre per a cada component del cicle límit conté un pic de freqüència nul·la i pics situats a múltiples enters de la freqüència fonamental  $\mu = 2\pi/T$ . Algunes d'aquestes components, incloent-hi la fonamental, poden ser nul·les. Això implica que per conèixer la freqüència fonamental d'una ona periòdica, cal analitzar tot l'espectre. Si la solució a banda de ser periòdica és sinusoidal pura l'espectre només conté un únic pic per a la freqüència fonamental.

El conjunt límit corresponent a un cicle límit és la corba tancada resultant de recórrer  $\phi_t(x^*)$  durant un període sencer.

$\phi(x^*, t_0)$  és una solució periòdica d'un sistema autònom si, per a tot  $t$ ,

$$\phi_t(x^*, t_0) = \phi_{t+T}(x^*, t_0) \quad (I.7)$$

per a un període mínim  $T > 0$ .

Quan un sistema no autònom i periòdic amb període  $T_f$  és converteix en un sistema autònom mitjançant la transformació (I.3), la solució periòdica esdevé un cicle límit l'espai dels estats cilíndrics. El període  $T$  del cicle límit és un múltiple enter  $k$  del període forçant del sistema  $T_f$ . S'anomena *solució de període  $k$*  a la solució  $\phi_t(x^*, t_0)$ . Una solució de període 1 s'anomena *solució fonamental*, i una solució de període  $k$  s'anomena *subharmònic d'ordre  $k$* .

L'espectre de cada component de la solució periòdica conté un pic de freqüència nul·la i pics situats a múltiples enters de  $2\pi/kT_f$ .

### I.4.3 Solucions quasiperiòdiques.

Una funció *quasiperiòdica* és aquella que es pot expressar com a suma d'un nombre comptable de funcions periòdiques

$$x(t) = \sum_i h_i(t) \quad (I.8)$$

on  $h_i$  és una funció periòdica de període  $T_i$  i freqüència  $\mu_i = 2\pi/T_i$ . D'altra banda, ha d'existir un conjunt de *freqüències de base*  $\{\bar{\mu}_1, \dots, \bar{\mu}_p\}$  amb les següents condicions:

1. Ser linealment independents.
2. Formar una *base integral finita* per a les freqüències  $\mu_i$ , és a dir, per a qualsevol  $i$  existeix un conjunt d'enters  $\{k_1, \dots, k_p\}$  tals que  $\mu_i = |k_1\bar{\mu}_1 + \dots + k_p\bar{\mu}_p|$ .

En altres paraules, una ona quasiperiòdica és la suma d'un conjunt d'ones periòdiques, cadascuna de les quals es pot expressar com a combinació d'un conjunt base finit de freqüències.

Cal esmentar que aquest conjunt base de freqüències no està unívocament definit, però que  $p$  sí que és únic. Una solució quasiperiòdica amb  $p$  freqüències de base s'anomena  *$p$ -periòdica*.

D'acord amb aquesta definició una ona periòdica és una ona quasiperiòdica amb  $p=1$ .

L'espectre de cada component d'una ona quasiperiòdica té un pic de freqüència 0 i un conjunt de pics  $\sum k_i \mu_i$  amb  $k_i = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$   $i=1, \dots, p$ . Algunes d'aquestes components poden ser nul·les. Teòricament, l'espectre d'una ona quasiperiòdica d'ordre 2 o superior es pot distingir d'una ona periòdica, perquè els pics de l'ona quasiperiòdica no estan espaiats amb valors múltiples d'una única freqüència. A la pràctica, no sempre és possible precisar si un valor és racional o irracional.

Per exemple, la funció

$$x(t) = \cos(2\pi t) + \cos(2\pi\sqrt{2}t) \quad (I.9)$$

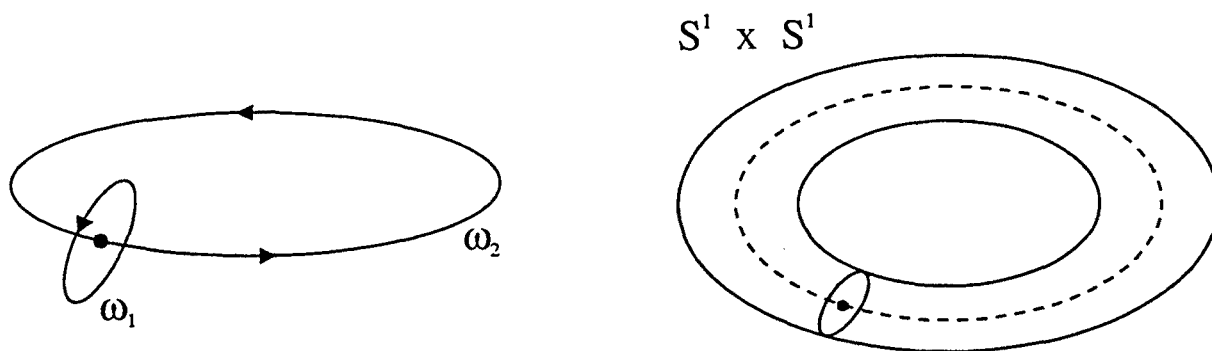


Fig I.1 Esquema d'una òrbita 2-periòdica.

és 2-periòdica o *biperiòdica*. Una possible base és  $\{1, \sqrt{2}\}$ . La irracionalitat de  $\sqrt{2}$  garanteix la condició 1.

Una funció 2-periòdica més complexa és

$$x(t) = h_1(t) + h_2(t) \quad (\text{I.10})$$

on  $h_1(t)$ ,  $h_2(t)$  són dues funcions periòdiques arbitràries amb períodes  $T_1$ ,  $T_2$  respectivament. S'ha assumit que  $T_1$  i  $T_2$  són *incommensurables*, és a dir, que  $T_1/T_2$  és irracional. L'espectre d'aquesta ona està format per dos conjunts d'harmònics. El primer grup, situat a freqüències  $2\pi k/T_1$  amb  $k=0,1,\dots$  corresponents a  $h_1$  i el segon conjunt, amb la freqüència fonamental  $2\pi/T_2$ , corresponent a  $h_2(t)$ . Cal tenir en compte que si  $T_1$  i  $T_2$  són commensurables, llavors existeixen un parell d'enters  $p, q$  tals que  $pT_1 = qT_2$ , i per tant  $x(t)$  és periòdic amb període  $T = pT_1$ .

El conjunt límit associat a una trajectòria 2-periòdica és topològicament equivalent (difeomòrfica) a un torus. Atès que la trajectòria és una corba i un torus una superfície, no tots els punts del torus es troben dins la trajectòria. De tota manera, es pot demostrar que la trajectòria passa repetidament i arbitràriament a prop de tots els punts del torus per la qual cosa podem concloure que el conjunt límit és el torus. Aquest és el primer cas en el que comprovem que el conjunt límit i la trajectòria no són iguals.

Des d'un punt geomètric podem interpretar la necessitat que les dues freqüències siguin incommensurables per a un comportament 2-periòdic. Considerem, la trajectòria que recorre les voltes del torus en la direcció  $\omega_1$  (fig I.1) amb un període  $T_1$  i en la direcció  $\omega_2$  amb període  $T_2$ . Si  $T_1$ ,  $T_2$  són commensurables existeixen uns enters positius  $p$ ,  $q$  tals que  $pT_1 = qT_2$ . Per tant, en  $pT_1$  seg. la trajectòria es tancarà sobre si mateixa, i haurà fet exactament  $p$  voltes en la direcció  $\omega_1$  i  $q$  voltes en la direcció  $\omega_2$ . El resultat és un cicle límit periòdic amb període  $pT_1$ . En canvi, si  $T_1$ ,  $T_2$  són incommensurables no existeixen aquests  $p$ ,  $q$  i la trajectòria no es tanca mai sobre si mateixa.



### I.4.4 Caos.

No existeix una definició àmpliament acceptada pel caos. Des d'un punt de vista pràctic podem dir que caos és un estat estable que no és cap dels anteriors.

Quan observem l'evolució temporal d'una solució caòtica el comportament sembla, a diferència dels casos anteriors, erràtic i aleatori.

L'espectre és molt diferent al d'un estat periòdic o quasiperiòdic. No té pics aïllats, sinó que mostra bandes àmplies; aparentment sembla l'espectre d'un senyal amb un gran component de soroll. També és característic trobar pics predominants sobre aquestes bandes àmplies, els quals corresponen a les freqüències predominants de la solució.

L'objecte geomètric en l'espai de les fases cap on són atretes les trajectòries caòtiques s'anomena *atractor estrany*. Cal dir que l'atractor caòtic d'un sistema no és un objecte geomètric senzill com ara una circumferència o un torus, sinó que està caracteritzat per tenir la dimensió fractal. De tota manera, en capítols posteriors tornarem sobre aquest punt.

Una característica molt important de les solucions caòtiques és que són molt sensibles a les condicions inicials. Aquesta sensibilitat és plasma en què, donats dos punts inicials arbitràriament propers, les trajectòries resultants divergeixen, és a dir, no estan a la pràctica correlacionades.

Aquesta dependència crítica de les condicions inicials té unes conseqüències molt importants. A la pràctica, tant en un experiment com en una simulació numèrica, sempre hi ha una component de soroll. Donada la gran sensibilitat dels sistemes caòtics, aquest soroll per petit que sigui, pot alterar el comportament de la solució caòtica. Això sumat al fet que és pràcticament impossible determinar les condicions inicials amb una precisió infinita, fa que malgrat ser deterministes, tanmateix els sistemes caòtics són impredecibles. La naturalesa determinista ens l'assegura l'equació que descriu la seva dinàmica, ja que aquesta ho és.

Abans hem esmentat que les trajectòries són contínues respecte a les condicions inicials. A primer cop d'ull, sembla que aquesta continuïtat està en contradicció amb aquesta dependència crítica de les condicions inicials, atès que la continuïtat exigeix que les trajectòries properes romanin properes. Aquesta paradoxa es resol si tenim en compte que la continuïtat garanteix aquesta proximitat per a un interval finit de temps, és a dir, la continuïtat no té cap implicació amb els comportaments de les trajectòries per a temps llargs. Així doncs, dues trajectòries amb condicions inicials properes romandran properes al principi, però en el decurs del temps aniran divergint.

Considerem dos observadors mirant-se un sistema dinàmic. L'observador A mira el sistema a l'instant  $t_1$  i l'observador B a l'instant  $t_2 > t_1$ . Suposem que la imprecisió en les observacions és la mateixa per a ambdós observadors. Donades les condicions inicials a  $t_1$ , l'observador A pot predir amb infinita precisió l'estat a l'instant  $t_2$ , l'únic error en la seva predicció es troba en les condicions inicials. Quin dels dos observadors coneix millor l'estat a l'interval  $t_2$ , B amb l'observació o A amb l'aproximació?

Si l'observador A coneix amb més precisió l'estat a  $t_2$ , el sistema s'anomena *predictible*. En un sistema predictable, les prediccions són més acurades que les observacions. Si l'observador B coneix amb més precisió l'estat a  $t_2$ , el sistema s'anomena *impredictible*. En aquest sistema les observacions són més precises que les prediccions.

Quan nosaltres diem que un sistema determinista és aleatori, volem dir que és impredictible, és a dir, que es tracta d'un sistema molt sensible a les condicions inicials.

Com exemple de sistema predictiu, suposem un sistema que contreu el flux, és a dir, un sistema on les trajectòries tendeixen a aproximar-se les unes a les altres:

$$\|\phi_{t_2}(y) - \phi_{t_2}(x)\| < \|\phi_{t_1}(y) - \phi_{t_1}(x)\| \quad (\text{I.11})$$

per a qualsevol  $x, y, x \neq y$ , i qualsevol  $t_1, t_2, t_1 < t_2$ . Anomenem a l'observació d'A  $x_1$ . L'observador A sap que l'estat al temps  $t_1$  està dins un entorn  $B_\varepsilon(x_1)$  de radi  $\varepsilon$  i centrat a  $x_1$ , i, per tant, l'estat a l'instant  $t_2$  està contingut dins del conjunt  $\phi_{t_2-t_1}(B_\varepsilon(x_1))$ . Si anomenem  $x_2$  l'observació de B a l'instant  $t_2$ , l'observador B sap que l'estat a  $t_2$  està dins un entorn  $B_\varepsilon(x_2)$  de radi  $\varepsilon$  i centrat a  $x_2$ . Com que el flux és contractiu, el radi del conjunt  $\phi_{t_2-t_1}(B_\varepsilon(x_1))$  és més petit que  $\varepsilon$ , és a dir, l'observador A coneix amb més precisió l'estat a l'instant  $t_2$ .

Considerem ara el cas contrari, un sistema que expandeix el flux, és a dir, un sistema on les trajectòries divergeixen les unes de les altres:

$$\|\phi_{t_2}(y) - \phi_{t_2}(x)\| > \|\phi_{t_1}(y) - \phi_{t_1}(x)\| \quad (\text{I.12})$$

per a qualsevol  $x, y, x \neq y$ , i qualsevol  $t_1, t_2, t_1 < t_2$ . Per a un sistema expansiu el radi del conjunt  $\phi_{t_2-t_1}(B_\varepsilon(x_1))$  és més gran que  $\varepsilon$ , és a dir, l'observador B coneix amb més precisió l'estat a l'instant  $t_2$ , llavors un sistema expansiu és un sistema impredictible.

Fins ara hem vist que un sistema que expandeix el flux és un sistema impredictible, de tota manera no està limitat, és a dir, mai podem assolir un estat estable. Encara ens queda pendent saber com una solució estable pot ser un conjunt límit impredictible. Per resoldre aquesta qüestió descriuré la *ferradura* de Smale. La ferradura és un sistema discret impredictible. Aquest sistema és una aplicació d'un quadrat unitari en si mateix. Tal i com mostra la figura 2 una iteració d'aquest mapa conté tres accions:

1. *Estirament*: fa que el mapa sigui impredictible.
2. *Contracció*: necessària per tal de fer que la imatge estigui continguda dins el quadrat original. Després de l'estirament el rectangle resultant té un àrea major que la del quadrat original, amb la contracció reduïm l'àrea per tal que sigui menor o igual que la del quadrat original.
3. *Plegament*: necessari per a fer que la imatge sigui totalment dins el quadrat, de no ser així parts de l'imatge en quedarien fora.

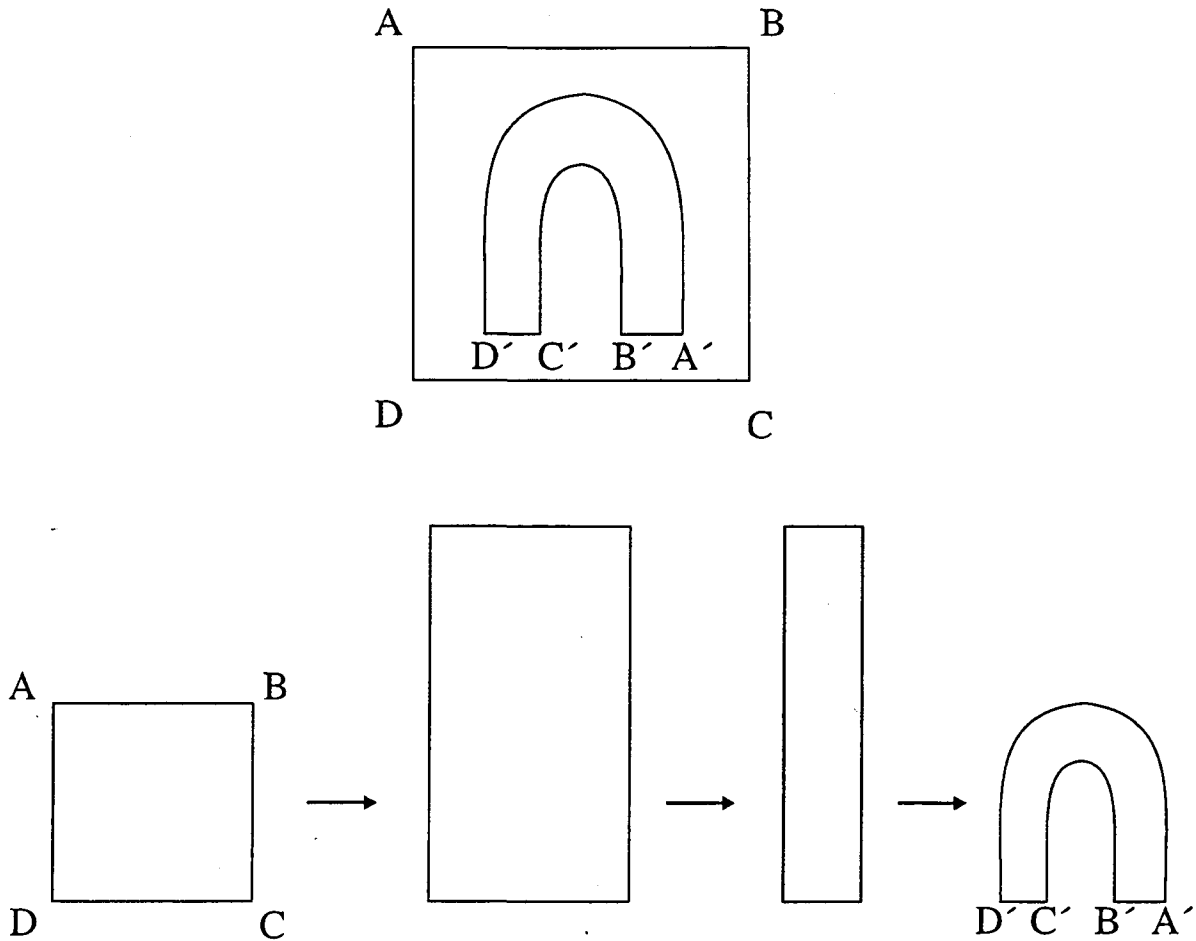


Fig. 1.2 Aplicació de la ferradura de Smale.

Tot i que aquesta aplicació sembla molt senzilla pot estar associada a sistemes continus amb fluxos molt complexos. Aquesta aplicació és molt important atès que tot sistema caòtic es pot entendre com una successió de les tres transformacions anteriors.

El terme "ferradura" s'acostuma a utilitzar en un sentit més ampli que el descrit anteriorment. Qualsevol aplicació on l'imatge d'un conjunt està inclosa dins el conjunt inicial s'anomena *endomorfisme*. Si en aplicar un endomorfisme tots els punts es distribueixen en dos o un número finit de zones, llavors aquest endomorfisme té les mateixes propietats de recurrència que la ferradura d'Smale. Aquestes aplicacions es poden trobar en tots els atractors caòtics dels sistemes dissipatius. En aquest sentit podem pensar en la ferradura d'Smale com a definició de replagament en els atractors caòtics.

En el capítol sisè comprovarem que l'evolució dels atractors caòtics associats a les bifurcacions globals ve descrit, en part, per l'aplicació ferradura d'Smale. En aquest sisè capítol també veurem una anàlisi més exhaustiva d'aquesta aplicació.

## I.5 Mapes de Poincaré

Els mapes de Poincaré són una tècnica creada per Henri Poincaré al 1892 que actualment ha esdevingut una eina bàsica per analitzar sistemes dinàmics. La tècnica canvia el flux d'un sistema continu d'ordre  $n$  per un flux discret d'ordre  $n-1$  anomenat mapa de Poincaré. La definició del mapa de Poincaré assegura que els seus conjunts límits es corresponen amb els del sistema continu, és a dir, que presenta les mateixes propietats topològiques que el flux inicial. Els avantatges dels mapes de Poincaré són dos. D'una banda, la reducció de l'ordre del sistema, la discretització temporal ens redueix les equacions diferencials a equacions algebraiques més senzilles que defineixen el mapa. I d'altra banda, la reducció significativa del nombre de dades a analitzar en un sistema discret, cosa que facilita la caracterització de les solucions.

### I.5.1 Definició.

La definició del mapa de Poincaré és diferent per als casos autònom i no autònom.

Tal i com ja hem explicat, un sistema no autònom periòdic amb període  $T$  d'ordre  $n$  es pot transformar mitjançant I.3 en un sistema autònom d'ordre  $n+1$ , i l'espai dels estats se'ns transforma en l'espai cilíndric  $\mathbb{R}^n \times S^1$ . Considerem l'hiperplà de dimensió  $n$   $\Sigma \in \mathbb{R}^n \times S^1$  definit per:

$$\Sigma = \{(x, \theta) \in \mathbb{R}^n \times S^1 : \theta = \theta_0\}. \quad (\text{I.13})$$

A cada  $T$  segons la trajectòria I.4 intersecta amb l'hiperplà  $\Sigma$ . El mapa resultant  $P_N: \Sigma \rightarrow \Sigma (\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)$  es defineix com

$$P_N(x) = \phi_{t_0+T}(x, t_0) \quad (\text{I.14})$$

$P_N$  s'anomena *Mapa de Poincaré* per a sistemes no autònoms, el subíndex  $N$  indica que es tracta d'un sistema no autònom. Cal fer notar que  $P_N$  és invertible i diferenciable, és a dir, un difeomorfisme.

Podem interpretar el mapa  $P_N$  de dues maneres:

1.  $P_N(x)$  quin valor té  $x$  després de  $T$  segons.
2. La òrbita  $\{P_N^k(x)\}_{k=1}^{\infty}$  és el resultat d'una única trajectòria cada  $T$  segons, és a dir:

$$P_N^k(x) = \phi_{t_0+kT}(x, t_0), \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{I.15})$$

Això es similar a l'acció d'il·luminar estroboscòpicament amb un període  $T$ , d'aquí que també sigui conegut com a *Mapa Estroboscòpic*.

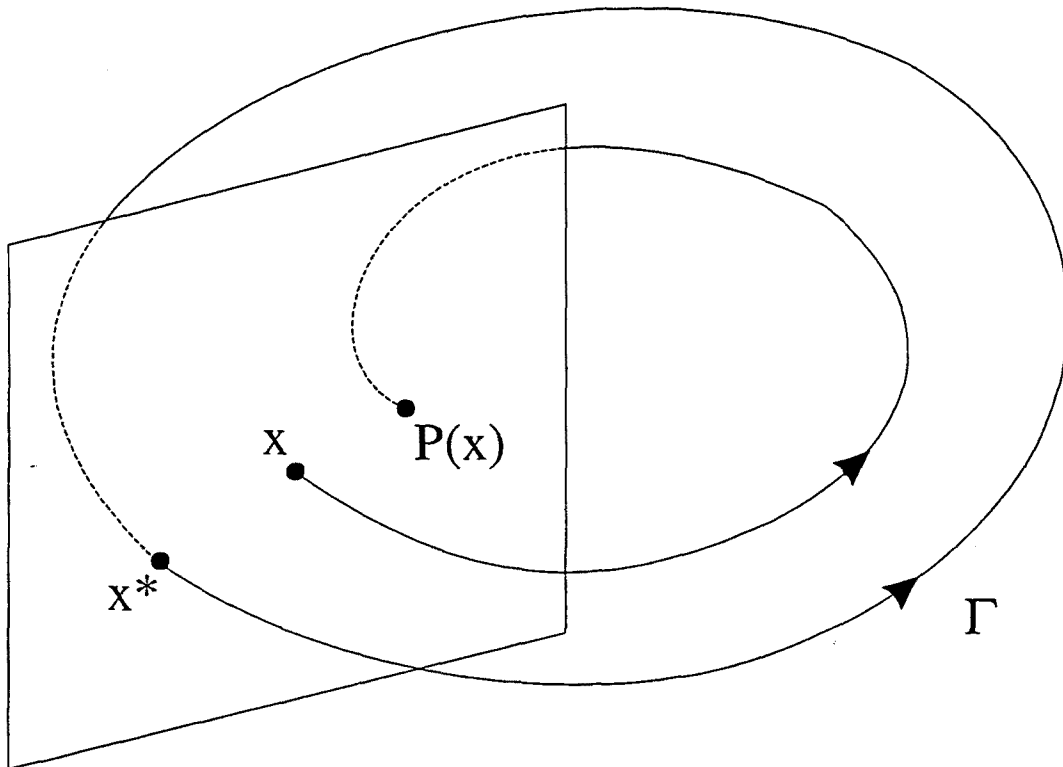


Fig. I.3 Mapa de Poincaré per a un sistema autònom.

Suposem ara un sistema autònom d'ordre  $n$  amb un cicle límit  $\Gamma$  mostrat a la (fig. I.3.) Suposem que  $x^*$  és un punt del cicle límit, i que  $\Sigma$  és un hiperplà de dimensió  $(n-1)$  transversal a  $\Gamma$  en el punt  $x^*$ . La trajectòria que surt de  $x^*$  interseccionarà  $\Sigma$  a  $x^*$  al cap de  $T$  segons, on  $T$  és el període mínim del cicle límit. Degut a la continuïtat de  $\phi_t$  respecte a les condicions inicials, trajectòries que surtin properes a  $x^*$  interseccionaran amb  $\Sigma$  en un punt proper a  $x^*$  al cap d'aproximadament  $T$  segons. Llavors,  $\phi_t$  i  $\Sigma$  defineixen un mapa  $P_A$  d'un entorn  $U \subset \Sigma$  de  $x^*$  a un entorn  $V \subset \Sigma$  de  $x^*$ .  $P_A$  és un *Mapa de Poincaré* del sistema autònom.

Cal notar tres coses:

1.  $P_A$  està definit localment, és a dir, en un entorn de  $x^*$ , a diferència del cas no autònom, no està garantit que per a qualsevol punt de  $\Sigma$  la trajectòria que en surt torni a interseccionar amb  $\Sigma$ .
2. Per a un espai euclidià, el punt  $P_A(x)$  no és el primer punt de  $\phi_t(x)$  que intersecciona amb  $\Sigma$ , tal com s'observa a la figura I.3  $\phi_t(x)$ , ha de travessar al menys un cop  $\Sigma$  abans d'arribar a  $V$ , cosa que no passava a l'espai cilíndric.
3.  $P_A$  és invertible i diferenciable.

La definició que hem donat del mapa de Poincaré és la que trobem a qualsevol llibre de teoria de dinàmica de sistemes, però rarament s'utilitza en situacions experimentals, atès que demana un coneixement del cicle límit que en moltes situacions no es té.



A la pràctica, el que es fa és escollir un hiperplà  $\Sigma$  de dimensió  $n-1$ , que divideix l'espai  $\mathbb{R}^n$  en dues regions

$$\Sigma_+ = \{x : (h, x - x_\Sigma) > 0\} \quad (I.16)$$

i

$$\Sigma_- = \{x : (h, x - x_\Sigma) < 0\} \quad (I.17)$$

on  $h \in \mathbb{R}^n$  és un vector normal a  $\Sigma$ ,  $x_\Sigma \in \mathbb{R}^n$  és un punt qualsevol del hiperplà, i  $(u, v) = u^T v$  és el producte escalar. Si escollim correctament  $\Sigma$ , aleshores la trajectòria creuarà repetidament  $\Sigma$ , passant alternativament per  $\Sigma$  i  $\Sigma_+$ .

Donat l'hiperplà  $\Sigma$ , podem definir tres tipus diferents de mapes de Poincaré:

- $P_+ : \Sigma \rightarrow \Sigma$ .  $P_+$  és el punt de  $\phi(x)$  que primer intersecta en direcció positiva.
- $P_- : \Sigma \rightarrow \Sigma$ .  $P_-$  és el punt de  $\phi(x)$  que primer intersecta en direcció negativa.
- $P_\pm : \Sigma \rightarrow \Sigma$ .  $P_\pm$  és el punt de  $\phi(x)$  que primer intersecta en qualsevol direcció.

No es pot assegurar que els mapes estiguin ben definits, ja que és possible que no hi hagi cap intersecció. Malgrat això, en un espai euclidià, amb una solució acotada que no sigui un punt fix, sempre podrem escollir un pla  $\Sigma$  pel qual els tres mapes anteriors estan ben definits.

A partir del mapa de Poincaré podem construir l'aplicació de primer retorn  $f$ , definida per  $x_{k+1} = f(x_k)$ . Aquesta aplicació serà objecte d'estudi en els propers capítols.

### I.5.2 Conjunts límits dels mapes de Poincaré.

En aquest apartat establirem la relació entre els conjunts límits dels mapes de Poincaré i els corresponents al flux continu.

Per als punts d'equilibri no existeix aquesta relació. Tot i que ens trobem davant un hiperplà que contingui aquest punt, aquest no és estructuralment estable, ja que si fem una pertorbació de  $\Sigma$ , el punt d'equilibri ja no existirà per al nou pla pertorbat.

Abans de continuar cal definir dos conceptes nous per als mapes de Poincaré:  $x^*$  és un punt fix del mapa  $P$  si  $x^* = P(x^*)$ .

El conjunt  $\{x_1^*, \dots, x_K^*\}$  és una òrbita tancada de període  $K$  del mapa  $P$  si  $x_{k+1}^* = P(x_k^*)$  per a  $k=1, \dots, K-1$  i  $x_1^* = P(x_K^*)$ .

Una solució de període 1 d'un sistema no autònom continu correspon a un punt fix del mapa de Poincaré  $P_N$ , i el subharmònic d'ordre  $K$  d'un sistema no autònom correspon a una òrbita tancada de període  $K$  del mapa de Poincaré  $P_N$ .

En el cas d'un sistema autònom, per al mapa  $P_A$  un cicle límit  $\phi_i$  correspon a un punt fix  $x^*$ . Una òrbita tancada de període  $K$  de  $P_A$  correspon a una solució subharmònica.

En el cas dels mapes  $P_+$ ,  $P_-$ ,  $P_\pm$ , la classificació dels cicles límits és ambigua i depèn de la selecció del pla de tall  $\Sigma$ .

Suposem ara que la solució del sistema continu no autònom és una 2-periòdica definida per la base de freqüències  $\{\mu_1, \mu_2\}$  on  $\mu_1 = 1/T_f$  és el període extern. Podem

suposar sense cap pèrdua de generalitat que el flux descriu un torus, de manera que  $\phi_t(x)$  es pot escriure utilitzant les coordenades del torus  $(\theta_1, \theta_2)$  com

$$x(t) = F(\theta_1(t), \theta_2(t)) \quad (\text{I.18})$$

on  $F: S^1 \times S^1 \rightarrow \mathbb{R}^n$  i

$$\begin{bmatrix} \theta_1(t) \\ \theta_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\pi \mu_1 t \bmod 2\pi \\ 2\pi \mu_2 t \bmod 2\pi \end{bmatrix} \quad (\text{I.19})$$

L'acció de  $P_N$  és prendre un punt del flux continu cada  $T_f$  segons, llavors

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \theta_1(k/\mu_f) \\ \theta_2(k/\mu_f) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 2\pi \mu_1 / \mu_f \bmod 2\pi \\ 2\pi k \bmod 2\pi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 2\pi k \mu_1 / \mu_f \bmod 2\pi \\ 0 \end{bmatrix}, \quad k=0, 1, \dots \end{aligned} \quad (\text{I.20})$$

Atès que  $\mu_1, \mu_2$  són incomensurables,  $\{\theta_1(k/\mu_f)\}_{k=0}^\infty$  no és periòdic, és a dir, en el sistema de coordenades  $(\theta_1, \theta_2)$ , el conjunt límit corresponent al mapa de Poincaré és la circumferència definida per  $\theta_2=0$ .

En general, el conjunt límit del mapa de Poincaré corresponent a una solució quasiperiòdica  $K$ -periòdica és un torus  $(K-1)$ .

Per al cas de solucions caòtiques els mapes corresponents són molt diferents del que hem vist fins ara. Una característica molt important dels mapes és que mostren l'estructura inherent a les respostes caòtiques, cosa que els converteix en una potent eina per caracteritzar els diferents tipus de caos.

Dues característiques dels conjunts límits dels mapes de Poincaré corresponents a fluxos caòtics són:

- No són simples objectes geomètrics com en els casos anteriors.
- L'atractor té una estructura fina.

Sobre aquest tema tornarem a parlar en els capítols següents amb exemples d'atractors caòtics.

## I.6 Estabilitat dels conjunts límits.

Els conjunts límits estables són d'especial importància tant numèricament com experimentalment atès que són els únics que es poden observar de forma senzilla deixant el sistema evolucionar. En aquest apartat estudiarem les condicions necessàries que ha de complir un conjunt límit per a ser estable.

Distingirem quatre tipus diferents d'estabilitat:

- 1.- Un conjunt límit  $L$  és estable si, per a qualsevol entorn obert  $U$  de  $L$ , existeix com a mínim un altre entorn obert  $V$  de  $L$ , de manera que per a qualsevol  $x \in V$  i  $t > 0$ ,  $\phi_t(x) \in U$ . És a dir,  $\phi_t(V) \subset U$  per a qualsevol  $t > 0$ .

- 2.- Un conjunt límit és *assimptòticament estable* si existeix un entorn obert  $V$  de  $L$  de manera que, per a tot punt de  $V$ , el conjunt  $\omega$ -límit és  $L$ .
- 3.- Un conjunt límit és *inestable* si existeix un entorn obert  $V$  de  $L$  de manera que, per a tot punt de  $V$  el conjunt  $\alpha$ -límit és  $L$ .
- 4.- Un conjunt límit és *no estable* si, per a qualsevol entorn  $V$  de  $L$ , conté com a mínim un punt del qual el seu conjunt  $\omega$ -límit és  $L$  i un altre punt el conjunt  $\alpha$ -límit del qual també és  $L$ .

És a dir,  $L$  és estable si totes aquelles trajectòries suficientment properes a  $L$ , romanen properes.  $L$  és asimptòticament estable si totes les trajectòries properes són atretes vers  $L$ .  $L$  és inestable si totes les trajectòries properes són repel·lides (exceptuant, és clar les trajectòries dins de  $L$ ).  $L$  és no estable si existeixen com a mínim una trajectòria que és atreta i una altra que és repel·lida.

Un conjunt límit asimptòticament estable també és estable.

- Si invertim el temps, un conjunt límit inestable esdevé estable; ara bé, un conjunt límit no estable segueix essent no estable.

### I.6.1 Punts d'equilibri, valors propis.

Suposem un punt d'equilibri  $x_{eq}$  d'un sistema autònom descrit pel camp vectorial  $f$ . Podem descriure comportament local del flux al voltant de  $x_{eq}$  linealitzant el camp vectorial al punt  $x_{eq}$ . Concretament el camp vectorial lineal

$$\delta x = Df(x_{eq}) \delta x, \quad \delta x(0) = \delta x_0 \quad (I.21)$$

governa l'evolució d'una pertorbació  $\delta x_0$  al voltant del punt d'equilibri  $x_{eq}$ . Notem  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  els valors propis de  $Df(x_{eq})$  i  $\eta_i \in \mathbb{C}^n$  els corresponents vectors propis. Llavors en una aproximació de primer ordre, la trajectòria amb punt inicial  $x_{eq} + \delta x_0$  és

$$\begin{aligned} \phi_t(x_{eq} + \delta x_0) &= x_{eq} + \delta x(t) \\ &= x_{eq} + e^{Df(x_{eq})t} \delta x_0 \\ &= x_{eq} + c_1 e^{\lambda_1 t} \eta_1 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \eta_n \end{aligned} \quad (I.22)$$

on  $c_i \in \mathbb{C}$  són constants escollides per tal d'assolir les condicions inicials.

Si  $\lambda_i$  és real i  $\eta_i$  i  $c_i$  són reals, podem deduir fàcilment que el valor propi és el ritme de contracció (si  $\lambda_i < 0$ ) o d'expansió (si  $\lambda_i > 0$ ) en la direcció  $\eta_i$  al voltant del punt  $x_{eq}$ .

Suposem ara el cas de valors propis complexos. Aquests apareixen per parelles de complexos conjugats  $\lambda_i, \lambda_{i+1} = \bar{\lambda}_i$ , idènticament amb els valors propis  $\eta_i, \eta_{i+1} = \bar{\eta}_i$ ,  $c_i, c_{i+1} = \bar{c}_i$ , llavors:

$$\begin{aligned} c_i e^{\lambda_i t} \eta_i + c_{i+1} e^{\lambda_{i+1} t} \eta_{i+1} &= c_i e^{\lambda_i t} \eta_i + \overline{c_i} e^{\overline{\lambda_i} t} \overline{\eta_i} \\ &= 2 \operatorname{Re}[c_i e^{\lambda_i t} \eta_i] \end{aligned} \quad (\text{I.23})$$

i tenint en compte que

$$e^{\alpha + j\beta} = e^{\alpha} (\cos(\beta) + j \sin(\beta)) \quad (\text{I.24})$$

podem reescriure l'equació (I.23) com

$$2 |c_i| e^{\operatorname{Re}[\lambda_i] t} \{ \cos(\operatorname{Im}[\lambda_i] t + \theta_i) \operatorname{Re}[\eta_i] - \sin(\operatorname{Im}[\lambda_i] t + \theta_i) \operatorname{Im}[\eta_i] \} \quad (\text{I.25})$$

on  $\theta_i = \arg(c_i)$ .

L'equació I.25 és l'equació paramètrica d'una espiral al pla definit per  $\operatorname{Re}[\eta_i]$ ,  $\operatorname{Im}[\eta_i]$ . La part real del valor propi  $\lambda_i$  és el ritme de contracció (si  $\operatorname{Re}[\lambda_i] < 0$ ) o d'expansió (si  $\operatorname{Re}[\lambda_i] > 0$ ) de l'espiral. La part imaginària és la freqüència de rotació.

Combinant per a valors propis reals i complexos els resultats anteriors, arribem a la següent conclusió:  $x_{eq}$  és asimptòticament estable si  $\operatorname{Re}[\lambda_i] < 0$  per a tots els  $\lambda_i$ , inestable si  $\operatorname{Re}[\lambda_i] > 0$  per a tots els  $\lambda_i$ , i és no estable si existeix un parell  $i, j$  tals que  $\operatorname{Re}[\lambda_i] < 0$  i  $\operatorname{Re}[\lambda_j] > 0$ . Un punt d'equilibri no estable s'anomena *punt sella*. Un punt estable o inestable amb tots els seus valors propis reals s'anomena *node*. Un punt amb, com a mínim, un parell de valors propis complexos conjugats s'anomena *focus*.

Si un punt d'equilibri té les parts reals de tots els seus valors propis diferents de zero s'anomena *hiperbòlic*. En canvi quan existeix com a mínim un multiplicador de Floquet nul el punt s'anomena *no hiperbòlic*. L'equilibri d'un punt no hiperbòlic no es pot determinar a partir dels seus valors propis exceptuant el cas en que a més existeixi un parell de valors propis amb parts reals de diferent signe, cas en que el punt d'equilibri és no estable.

Els punts d'equilibri hiperbòlics són estructuralment estables, és a dir, romanen estables sota petites pertorbacions del camp vectorial, i a més, amb el mateix tipus d'estabilitat. En canvi, els punts d'equilibri no hiperbòlics no són estructuralment estables, i no es poden observar ni experimentalment ni en simulacions numèriques.

## I.6.2 Solucions periòdiques, multiplicadors de Floquet.

L'estabilitat d'una solució periòdica ve determinada pels *multiplicadors de Floquet*. Aquests són la generalització dels valors propis dels punts d'equilibri. A l'apèndix B definim la matriu variacional i expliquem com a partir d'aquesta matriu podem calcular els multiplicadors de Floquet.

Una solució periòdica correspon a un punt fix  $x^*$  d'un mapa de Poincaré. De manera no sorprenent podem dir que l'estabilitat de la solució periòdica és la mateixa que la del punt fix.

Considerem el punt fix  $x^*$  d'un mapa  $P$ . El comportament local del mapa al voltant de  $x^*$  es determina linealitzant el mapa a  $x^*$ . Concretament, el mapa lineal

$$\delta x_{k+1} = DP(x^*) \delta x_k \quad (\text{I.26})$$

governa l'evolució d'una pertorbació  $\delta x_0$  al voltant del punt fix  $x^*$ .

Suposem que  $p$  és la dimensió del mapa ( $p=n$  per als sistemes no autònoms i  $p=n-1$  per als sistemes autònoms). Notem per  $m_i \in \mathbb{C}$  els valors propis de la matriu  $DP(x^*)$  i  $\eta_i \in \mathbb{C}^p$ , per a  $i=1, \dots, p$ . Suposant que els valors propis són diferents, l'òrbita de  $P$  amb condicions inicials  $x^* + \delta x_0$  és, en aproximació de primer ordre:

$$\begin{aligned} x_k &= x^* + \delta x_k \\ &= x^* + DP(x^*)^k \delta x_0 \\ &= x^* + c_1 m_1^k \eta_1 + \dots + c_p m_p^k \eta_p \end{aligned} \quad (\text{I.27})$$

on  $c_i \in \mathbb{C}$  són constants escollides per assolir les condicions inicials.

Els valors propis  $\{m_i\}$  s'anomenen multiplicadors de Floquet. La posició relativa dels multiplicadors de Floquet al pla complex determina l'estabilitat de la solució periòdica. Si  $\{m_i\}$  és real també ho són  $c_i, \eta_i$ , a més, el multiplicador dóna el ritme de contracció (si  $m_i < 1$ ) o expansió (si  $m_i > 1$ ) al voltant del punt  $x^*$  en la direcció de  $\eta_i$  per a una iteració del mapa.

Suposem ara el cas de valors propis complexos. Atès que  $DP(x^*)$  és una matriu real, els valors propis complexos apareixen per parells de complexos conjugats  $m_i, m_{i+1} = \bar{m}_i$ , i idènticament amb els vectors propis  $\eta_i$  i constants  $c_i$ . Així doncs, podem escriure:

$$\begin{aligned} c_i m_i^k \eta_i + c_{i+1} m_{i+1}^k \eta_{i+1} &= c_i^k + \overline{c_i m_i^k \eta_i} \\ &= 2 \operatorname{Re}[c_i m_i^k \eta_i] \end{aligned} \quad (\text{I.28})$$

podem rescriure l'equació (I.28) com

$$2 |c_i| |m_i|^k \{ \cos(k\phi_i + \theta_i) \operatorname{Re}[\eta_i] - \sin(k\phi_i + \theta_i) \operatorname{Im}[\eta_i] \} \quad (\text{I.29})$$

on  $\phi_i = \arg(m_i)$ ,  $\theta_i = \arg(c_i)$ .

L'equació (I.29) és l'equació paramètrica d'una espiral al pla  $Re[\eta_i], Im[\eta_i]$ . El valor de  $m_i$  dona el ritme d'expansió ( $|m_i| > 1$ ) o de contracció ( $|m_i| < 1$ ) de l'espiral per a una iteració del mapa.

Combinant els anteriors resultats arribem a les següents conclusions per als multiplicadors de Floquet. Si  $|m_i| < 1$  per a tots els  $m_i$  llavors  $x^*$  és asimptòticament estable. Si  $|m_i| > 1$  per a tots els  $m_i$  llavors  $x^*$  és inestable. Si existeix un parell  $i, j$  tals que  $|m_i| > 1 \wedge |m_j| < 1$ , llavors  $x^*$  es no estable, a aquesta darrera solució també se l'anomena *òrbita sella*.

Un punt fix amb els multiplicadors  $m_i \neq 1$  per a tot  $i$  s'anomena *hiperbòlic*. L'estabilitat d'un punt fix no hiperbòlic no es pot determinar a partir dels seus multiplicadors de Floquet exceptuant el cas que hi hagi a més un parell tals que; un tingui el mòdul més gran que 1 i l'altre tingui el mòdul més petit que 1, cas en què el punt és no estable. Els punts fixos hiperbòlics són estructuralment estables, mentre que els no hiperbòlics no ho són.

### I.6.3 Exponents de Lyapunov.

Els exponents de Lyapunov són una generalització dels valors propis d'un punt fix i dels multiplicadors de Floquet d'una òrbita periòdica, que serveixen per a calcular a més l'estabilitat de solucions quasiperiòdiques i caòtiques.

Abans de definir els coeficients de Lyapunov introduiré l'equació variacional, si suposem el sistema:

$$\dot{x} = f(x, t), \quad x(t_0) = x_0 \quad (I.30)$$

amb solució  $\phi(x_0, t_0)$ , llavors:

$$\dot{\phi}_t(x_0, t_0) = f(\phi_t(x_0, t_0), t), \quad \phi_{t_0}(x_0, t_0) = x_0 \quad (I.31)$$

Si diferenciem (I.31) respecte  $x_0$  obtenim l'equació variacional:

$$\dot{\Phi}_t = D_x f(\phi_t(x_0, t_0), t) \Phi_t(x_0, t_0) \quad \Phi_{t_0}(x_0, t_0) = I \quad (I.32)$$

On  $\Phi_t(x_0, y_0)$  és la matriu variacional definida com:

$$\Phi_t(x_0, y_0) = D_{x_0} \phi(x_0, t_0) \quad (I.33)$$

Per a un sistema continu, suposem un punt inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Suposem que  $m_1(t), \dots, m_n(t)$  són els valors propis de la matriu variacional  $\Phi_t(x_0)$ , per definició els exponents de Lyapunov de  $x_0$  són:

$$\lambda_i \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |m_i(t)|, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{I.34})$$

sempre i quan existeixi el límit.

Per a un sistema discret  $P$  de dimensió  $p$ , donat el punt inicial  $x_0$  i suposant que la corresponent òrbita és  $\{x_k\}_{k=0}^{\infty}$ , els números de Lyapunov de  $x_0$  són:

$$m_i \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} |m_i(k)|^{1/k}, \quad i = 1, \dots, p \quad (\text{I.35})$$

sempre i quan existeixi el límit i on  $m_1(k), \dots, m_p(k)$  són els valors propis de  $DP^k(x_0)$ .

Ara calcularem els exponents de Lyapunov per a un punt fix  $x_{eq}$ . Notem per  $\lambda_i$  als exponents de Lyapunov i per  $\bar{\lambda}_i$  als valors propis de  $Df(x_{eq})$ , està demostrat que  $m_i(t) = \exp(\bar{\lambda}_i t)$ , llavors els exponents de Lyapunov venen donats per:

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln |e^{\bar{\lambda}_i t}| = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \operatorname{Re}[\bar{\lambda}_i] t = \operatorname{Re}[\bar{\lambda}_i] \quad (\text{I.36})$$

És a dir, en un punt d'equilibri els coeficients de Lyapunov coincideixen amb les parts reals dels valors propis. D'acord amb la definició dels exponents de Lyapunov, aquests depenen de les condicions inicials. Ara bé, com que els exponents estan definits en el límit  $t \rightarrow \infty$ , tots els punts que es trobin a la mateixa conca d'atracció tindran els mateixos exponents de Lyapunov. Així doncs, podem parlar dels exponents de Lyapunov corresponents a un atractor.

Suposem ara que tenim un punt fix  $x^*$  d'un mapa  $P$ . Suposem que  $\bar{m}_i$  són els multiplicadors de Floquet, llavors els números de Lyapunov són:

$$m_i = \lim_{k \rightarrow \infty} |\bar{m}_i^k|^{1/k} = |\bar{m}_i| \quad (\text{I.37})$$

És a dir, els números de Lyapunov coincideixen amb els multiplicadors de Floquet. També és interessant calcular els exponents del cicle límit  $\Gamma$  corresponents al punt fix  $x^*$  del mapa  $P$ . Suposem que  $T$  és el període de  $\Gamma$ , i  $m_i$  els valors propis de  $\Phi_T(x^*)$ . Donada la periodicitat tenim que  $\Phi_{kT}(x^*) = \Phi_T(x^*)^k$ . Llavors els exponents de Lyapunov són:

$$\lambda_i = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{kT} \ln |m_i^k| = \frac{1}{T} \ln |m_i|$$

I finalment obtenim

$$|m_i| = e^{\lambda_i T}$$

En el cas autònom, un valor propi de  $\Phi_T(x^*)$  és sempre 1, llavors un exponent de Lyapunov és sempre 0.

En general, els exponents de Lyapunov per a un atractor no caòtic són:

- En un punt d'equilibri asimptòticament estable  $\lambda_i < 0$  per a tot  $i$ .
- En un cicle límit asimptòticament estable  $\lambda_1 = 0$ , i  $\lambda_i < 0$  per a tot  $i=2, \dots, n$ .
- En una òrbita  $K$ -periòdica asimptòticament estable  $\lambda_1, \dots, \lambda_K = 0$ , i  $\lambda_i < 0$  per a tot  $i=K, \dots, n$ .

Això comporta tres conseqüències molt importants:

1. Per a un atractor no caòtic no hi ha cap exponent de Lyapunov positiu.
2. El nombre de exponents de Lyapunov nuls d'un conjunt límit atractiu no caòtic indica la dimensió topològica del atractor.
3. Un conjunt límit no caòtic és hiperbòlic si la seva dimensió és igual al número d'exponents de Lyapunov nuls.

Una de les característiques dels atractors caòtics és la dependència crítica de les condicions inicials, i això succeeix quan tenim una component expansiva. Com que els coeficients de Lyapunov donen el ritme d'expansió, això implica que per a un atractor caòtic ha d'existir com a mínim un coeficient de Lyapunov positiu. A més, tenint en compte que tot conjunt límit que no sigui un punt fix ha de tenir com a mínim un coeficient de Lyapunov nul i que la suma de tots els exponents ha de ser negativa, es dedueix que un atractor caòtic ha de tenir com a mínim tres coeficients de Lyapunov. És a dir, no hi ha solucions caòtiques per a sistemes de dimensió inferior a tres.

En el cas tridimensional, la única possibilitat és  $(+, -, 0)$ .

## I.7 Oscil·ladors.

Al principi del capítol hem classificat els sistemes en dos tipus: no autònoms i autònoms. Els primers, a diferència dels segons, tenen una dependència explícita del temps en les equacions que descriuen la seva dinàmica. Dins el grup de sistemes autònoms podem establir una segona classificació: *oscil·ladors passius i actius*.

El pèndol i els oscil·ladors polinomials, anomenats oscil·ladors de Duffing, són els exemples més coneguts d'oscil·ladors passius. L'amplitud i el període d'aquests sistemes poden dependre de les condicions inicials.

Els sistemes actius es caracteritzen, a part de presentar absorcions d'energia dependents de l'estat del sistema, per tenir fonts d'energia contínues i independents del temps. Aquestes fonts contínues d'energia permeten l'aparició de bifurcacions de Hopf que donen lloc a l'existència d'autooscil·lacions periòdiques amb una conca d'atracció concreta. L'oscil·lador de Van der Pol és un dels sistemes actius més senzills i estudiats.

Quan apliquem una pertorbació externa dependent del temps sobre un sistema autònom aquest es converteix en un sistema no autònom. Aquesta pertorbació externa



afageix un nou grau de llibertat al sistema. A aquest tipus de sistemes no autònoms s'els coneix com *oscil·ladors forçats*. De la mateixa manera que parlem de sistemes autònoms passius i actius, podem distingir dins dels sistemes no autònoms entre *oscil·ladors passius forçats* i *oscil·ladors actius forçats*. Els primers tenen efectes d'histèresi, generació d'harmònics i subharmònics i respostes caòtiques. Els segons es caracteritzen per fenòmens d'acoblament no lineal de freqüències (dels quals parlarem al quart capítol) així com per poder tenir comportaments caòtics.

Començarem la discussió dels oscil·ladors, pel sistema més senzill d'oscil·lador, l'oscil·lador lliure.

### 1.7.1 L'oscil·lador lliure.

Els fenòmens periòdics són molt importants, aquests fenòmens són pràcticament presents a tots els sistemes. La teoria de la transformada de Fourier demostra que qualsevol evolució es pot descomposar en elements periòdics. Això fa que el moviment periòdic es pugui considerar el fonament de tota dinàmica. Això és especialment interessant per als sistemes modulats periòdics, ja que en el sistema d'equacions apareix explícitament un terme periòdic. Aquesta és la raó per començar per l'oscil·lador lliure, que té una única solució periòdica. A partir d'aquí, introduïrem sistemes més complexos que ens permetin d'entendre les diferents solucions i bifurcacions.

Un dels models més senzills per descriure un oscil·lador lliure és el pèndol simple. Si suposem una massa  $m$  suspesa per un fil de longitud  $l$ , la seva dinàmica ve descrita per l'equació:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{l} \sin\theta = 0 \quad (\text{I.40})$$

L'espai de les fases està format per dues variables  $\theta, \dot{\theta}$ . Si definim  $x = \theta$  i  $y = \dot{\theta}$ , aleshores ens apareix el sistema equivalent:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\frac{g}{l} \sin(x) \end{aligned} \quad (\text{I.41})$$

El punt  $(0,0)$  és un punt fix estable. Al voltant d'aquest punt trobem solucions rigorosament periòdiques i sinusoïdals, a mesura que ens allunyem d'aquest punt trobem solucions que tot i ser periòdiques no són sinuïdals. Finalment, tenim un punt inestable a  $(\pi,0)$ .

Cal assenyalar que cap solució és estructuralment estable, atès que al voltant de qualsevol solució sempre en podem trobar una altra de diferent tant propera a la primera com volguem. Les conques d'atracció coincideixen amb les solucions.

Aquest comportament es característic dels sistemes no disipatius o també coneguts com hamiltonians, sistemes on l'energia es conserva.

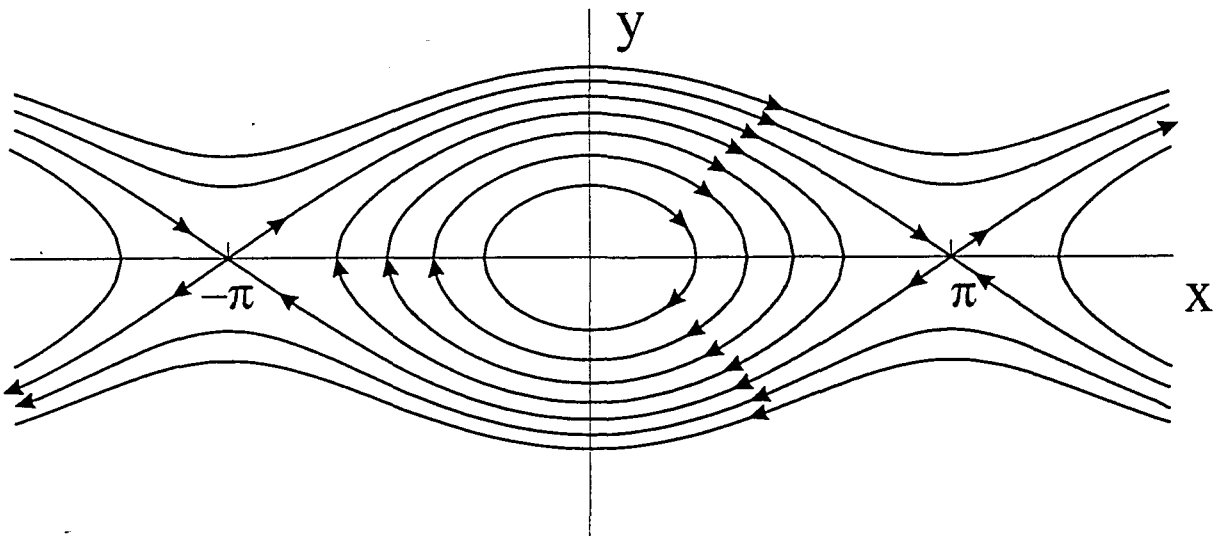


Fig I.4 Diagrama de fases del pèndol lliure.

La il·lustració I.4 representa diferents solucions del oscil·lador lliure a l'espai de les fases. Les corbes traçades al pla  $x, y$  són corbes d'energia constant. La gràfica és periòdica, de període  $2\pi$  en l'eix  $x$ . Per a valors petits de l'energia, amplituds petites, podem aproximar el sinus pel valor de l'argument a l'equació I.40. Llavors estem davant d'un règim lineal, les corbes resultants són circumferències que corresponen a oscil·lacions periòdiques i sinusoidals, on el període és independent de l'amplitud. Per a amplituds més grans les circumferències es deformen convertint-se en el·lipses, i el període depèn de l'amplitud. Quan l'energia excedeix el valor  $2g/l$ , les oscil·lacions són canviades per rotacions contínues al voltant del punt  $(0,0)$ . Les dues corbes que formen la frontera entre aquests dos dominis s'anomenen separatrius. Les separatrius són dues òrbites que connecten els dos punts fixos selles, una òrbita d'aquest tipus s'anomena *òrbita heteroclínica*.

Per a altres sistemes s'han estudiat casos en què una òrbita surt d'un punt estable sella per una direcció concreta i retorna al mateix punt sella per una altre direcció. Aquestes òrbites també constitueixen separatrius i s'anomenen *òrbites homoclíniques*, als capítol II i VI parlaré més ampliament d'aquest cas.

### I.7.2 Pèndol esmorteït. Equació de Duffing's.

En el sistema anterior hem suposat que no existia fregament. En el món real un pèndol que inicialment està en moviment acaba sempre per aturar-se. Això es degut a l'existència del fregament, responsable de la dissipació d'energia. Si hi afegim un terme dissipatiu tenim el pèndol esmorteït:

$$\begin{aligned}
 \dot{x} &= y \\
 \dot{y} &= -\gamma y - \omega^2 x
 \end{aligned}
 \tag{I.42}$$

Si imposem que  $\gamma < 0$  podem comprovar que el sistema és dissipatiu, és a dir, que l'energia disminueix a mesura que augmenta el temps. Aquest és un sistema autònom de segon ordre amb dos punts d'equilibri donats per  $(0,0), (\pi,0)$ . El punt  $(0,0)$  és un node atractiu asimptòticament estable i el punt  $(\pi,0)$  és un punt sella. En aquest cas no existeixen solucions periòdiques, el terme dissipatiu fa que l'únic estat estable sigui el d'energia nul·la. Aquest terme dissipatiu també és el responsable de la contracció de les trajectòries.

Existeix un sistema més general que engloba com a casos particulars els dos anteriors, és l'anomenada equació de Duffing's que correspon a un sistema autònom periòdic passiu.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \epsilon y\end{aligned}\tag{I.43}$$

Les característiques més importants d'aquest sistema, són les típiques dels sistemes passius: la dependència de l'amplitud en la freqüència i l'existència d'òrbites homoclíniques i heteroclíniques.

### 1.7.3 Oscil·ladors passius modulats.

En aquest apartat consideraré l'equació de Duffing's (I.43) afegint-hi una pertorbació externa periòdica en el temps:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= x - x^3 - \epsilon y - \gamma \cos(\omega_E t)\end{aligned}\tag{I.44}$$

Una característica interessant d'aquests sistemes és l'anomenada *catàstrofe del pic* (Cusp Catastrophe) resultant d'una ressonància no lineal. Tal i com hem vist anteriorment en el sistema autònom l'amplitud depèn de la freqüència, si introduïm una modulació externa suau en el sistema observem, representant l'amplitud en funció de la freqüència, que es produeix un pic de ressonància per a freqüències externes properes a la pròpia del sistema, amb un màxim quan les dues coincideixen. Si augmentem la modulació s'observa com la forma d'aquest pic que inicialment forma una corba pràcticament simètrica, es plega lateralment fins arribar a ser trivaluada, és a dir, fins que existeixen tres solucions de diferent amplitud per a la mateixa freqüència. Aquest és un cas de biestabilitat en la dinàmica i està acompanyada de fenòmens d'histèresi.

Un altre fenomen observable en aquest tipus de sistemes són les anomenades excitacions harmòniques. A diferència de les ressonàncies lineals, es poden produir ressonàncies no lineals per a valors de les freqüències pròpia i externa molt diferents, només cal que el seu quocient sigui un valor proper a un número racional.

D'acord amb la relació entre la freqüència pròpia ( $\omega_0$ ) i la externa ( $\omega_E$ ) és poden classificar les ressonàncies:

- *Ultraharmòniques* quan  $\omega_0 = n \omega_E$ .
- *Subharmòniques* quan  $\omega_0 = \omega_E/n$ .
- *Ultrasubharmòniques* quan  $\omega_0 = m\omega_E/n$ .

on  $m, n$  són enters.

#### I.7.4 Equació de Van der Pol.

Un sistema més realista és aquell en què suposem que  $\gamma$  depèn de l'amplitud, si suposem que  $\gamma$  es pot expressar com:

$$\gamma(x) = -\gamma_0 \left[ 1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right] \quad (\text{I.45})$$

i ho imposem a l'equació I.40 obtenim l'anomenada equació de Van der Pol:

$$\ddot{x} - \gamma_0 \left[ 1 - \frac{x^2}{x_0^2} \right] \dot{x} + \omega^2 x = 0 \quad (\text{I.46})$$

que es pot rescriure amb les adients normalitzacions en el sistema d'equacions:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (\epsilon - x^2)y - x \end{aligned} \quad (\text{I.47})$$

Aquest sistema correspon a un sistema no autònom de segon ordre. La equació de Van der Pol descriu el comportament d'un oscil·lador pertorbat. Aquest sistema tot i la seva senzillesa és de gran interès per a la dinàmica de sistemes i ara veurem perquè.

Aquest sistema és un oscil·lador actiu, és a dir, existeix una font d'energia externa. Si  $\epsilon > 0$  el terme dissipatiu és negatiu, i l'energia és injectada en comptes de ser absorbida. Existeix un punt fix a l'origen de coordenades, si  $\epsilon < 0$  aquest punt és un punt fix estable i si  $\epsilon > 0$  aquest punt fix és un focus inestable, i ens apareix una solució periòdica que correspon a un cicle límit al voltant de l'origen de coordenades. La inestabilitat d'aquest punt es deu a la injecció d'energia. Ara bé, si anem injectant indefinidament energia la solució divergeix. El terme en  $x^2$  té l'efecte oposat, per tant, si  $x$  pren valors superiors a  $\epsilon^{1/2}$  el terme dissipatiu esdevé negatiu i el sistema dissipa energia, cosa que ens assegura que la solució estarà limitada. La competició entre aquests dos fenòmens contraposats és la responsable de l'aparició d'un cicle límit. El fenomen de l'aparició d'un cicle límit és conegut amb el nom de *bifurcació de Hopf*, sobre aquest tema faré una discussió més extensa a l'apartat I.8.

### I.7.5 Equació de Van der Pol amb modulació externa.

Si afegim una modulació externa i periòdica a l'equació de Van der Pol (I.47), obtenim un sistema no autònom periòdic de segon ordre

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \dot{y} &= (1-x^2)y - x + A\cos(2\pi t/T)\end{aligned}\tag{I.48}$$

La principal diferència que existeix amb l'oscil·lador de Duffing forçat és que el sistema pot oscil·lar encara que no existeixi la modulació externa. Un fenomen molt interessant és el que es dona quan el sistema deixa d'oscil·lar amb la seva freqüència pròpia per passar a oscil·lar a la freqüència externa, aquest fenomen s'anomena *afermament de freqüències* ("frequency locking"). El sistema a més de poder oscil·lar a la freqüència externa ( $\omega_E$ ) també ho pot fer per a freqüències iguals a  $n\omega_E/m$ , on  $m, n$  són enters.

Les zones d'acoblament donen lloc a l'aparició de *finestres periòdiques*, aquestes finestres periòdiques es poden superposar de manera que diverses solucions periòdiques poden coexistir per a un mateix valor de la freqüència externa. La transició entre diferents finestres pot comportar l'aparició d'atractors estranys. L'aparició d'aquests atractors es produeix per a seqüències de doblaments de període. Sobre aquests afermaments de freqüències parlarem més extensament al capítol cinqué per al cas del dispositiu bicapa modulad.

El dispositiu bicapa modulad presenta la dinàmica característica dels sistemes actius modulats, ja que com veurem en el capítol II aquest sistema pot donar oscil·lacions periòdiques estables en absència de la modulació externa. Un altre sistema actiu forçat molt interessant és l'anomenat *Brusselator Forçat* [30-34]. Aquest sistema descriu una reacció química, on la injecció dels reactius no és constant sinó que està modulada. El brusselator forçat ha estat àmpliament estudiat numèricament ja que és un dels sistemes actius forçats més interessants atesa la seva dinàmica rica i variada. El dispositiu bicapa modulad presenta sota unes certes condicions una dinàmica molt semblant a la del Brusselator forçat, però amb l'avantatge que el seu estudi experimental és molt més simple. Això fa que el dispositiu bicapa forçat sigui un bon candidat per estudiar inestabilitats en sistemes actius forçats. Sobre aquestes semblances entre el Brusselator forçat i el dispositiu bicapa modulad farem una anàlisi completa al capítol cinqué.

### I.8 Bifurcacions.

La descripció de l'equació de Van der Pol (I.47) ens permet d'introduir un nou concepte, el de *Bifurcació*. Com hem vist a l'apartat I.7.4, si anem variant el valor de  $\varepsilon$  observem que la solució ens canvia. Més concretament, en passar d' $\varepsilon$  negatius a positius la solució passa d'un punt fix estable a una òrbita periòdica, això és una bifurcació. Si definim a  $\varepsilon$  com el *paràmetre de control*, la bifurcació es dona quan al voltant de un valor crític del paràmetre de control (en aquest cas  $\varepsilon = 0$ ) es produeix

un canvi qualitatiu en l'espai de les fases. Aquest punt crític s'anomena *punt de bifurcació*, aquestes bifurcacions poden estar associades a canvis en l'estabilitat dels atractors o bé a canvis globals en l'estructura topològica de l'espai de les fases.

Podem establir dos tipus de bifurcacions en funció del tipus d'inestabilitat implicat :

- Bifurcacions Locals.
- Bifurcacions Globals.

### I.8.1 Bifurcacions Locals

Les bifurcacions locals fan referència a les bifurcacions que es donen en punts fixos de l'espai de les fases o mapes. Es consideren locals, perquè el seu estudi es redueix a l'estudi de les propietats locals del punt fix. Cal tenir en compte que un punt fix en un mapa de Poincaré pot correspondre tant a un punt fix com a una òrbita periòdica a l'espai de les fases. Aquestes bifurcacions estan associades a un canvi local en l'estabilitat del punt fix.

En aquest apartat ens introduïrem en algunes bifurcacions locals especialment interessants per al nostre treball.

- *Bifurcacions sella node* : en aquest cas, en anar variant el paràmetre de control, un node (punt fix estable) i una sella (punt fix no estable) es van apropant fins que coincideixen, lloc en el que els dos punts desapareixen a l'espai de les fases.
- *Bifurcació de Hopf* : la bifurcació que hem analitzat en el apartat I.7.4 correspon a una bifurcació de Hopf. En aquesta bifurcació un punt fix, que inicialment és un focus estable, canvia la seva estabilitat convertint-se en un focus inestable. Aquesta bifurcació també implica l'aparició, en el punt de la bifurcació, d'una òrbita periòdica. Hi han dos tipus de bifurcació de Hopf, supercrítiques o normals i subcrítiques. Aquesta distinció depèn de l'estabilitat del cicle límit que apareix arran de la bifurcació. En el primer cas el cicle límit és estable i en el segon cas és no estable (òrbita sella).
- *Bifurcacions transcritisques* : Es produeixen en fusionar-se un punt sella amb un node, intercanviant-se l'estabilitat; en aquest cas, a diferència de la bifurcació sella node, els dos punts no desapareixen, sinó que el punt sella esdevé un node i viceversa.
- *Bifurcació en forquilla* : un punt fix node estable, en variar el paràmetre de control, perd la seva estabilitat, i es converteix en un punt fix sella. En el punt de bifurcació apareixen dos nous punts fixos. Aquesta bifurcació també pot ser supercrítica o subcrítica en dependència de l'estabilitat dels dos nous punts fixos; si són dos nodes estables la bifurcació és supercrítica i si són dos punts selles llavors la bifurcació és subcrítica.
- *Bifurcacions sella-node d'òrbites periòdiques* : en aquest cas dues òrbites periòdiques, una d'estable i una de no estable, es fusionen en variar el paràmetre de control i desapareixen.
- *Doblament de període* : En aquesta bifurcació una òrbita periòdica estable es transforma en una òrbita periòdica sella. A més a més, en el punt de bifurcació apareix una nova òrbita periòdica de període doble al de l'anterior. Aquesta

bifurcació és supercrítica quan aquesta nova òrbita de període doble és estable, en canvi, si la nova òrbita periòdica és sella la bifurcació és subcrítica.

- *Bifurcació de Hopf de segon ordre* : En aquest cas una òrbita periòdica estable, esdevé inestable en variar el paràmetre de control. En el punt de bifurcació apareix una nova òrbita quasiperiòdica. L'estabilitat d'aquesta nova solució quasiperiòdica determina si la bifurcació ha estat supercrítica (solució quasiperiòdica estable) o subcrítica (solució quasiperiòdica no estable o sella).

Tal i com veure a capítol II en el dispositiu bicapa no modulats s'observen bifurcacions sella node i Hopf

En el dispositiu bicapa modulats s'han observat doblaments de període (capítol III), bifurcacions sella node de cicles límits (capítol IV) i bifurcacions de Hopf de segon ordre (capítol V).

### I.8.2 Bifurcacions Globals

Es pot produir un canvi topològic de l'espai de les fases en variar el paràmetre de control sense que hi hagi hagut cap canvi en l'estabilitat dels punts fixos. En aquest cas, no podem fer un estudi local de la bifurcació en cap punt fix, ja que cap no ha patit un canvi significatiu de la seva estabilitat. Per estudiar aquestes bifurcacions cal fer una anàlisi global de l'estabilitat en l'espai de les fases. Per això, les *bifurcacions globals*, són més difícils de detectar. En general, podem dir que les bifurcacions globals són aquelles on es produeix un canvi qualitatiu en l'estructura de les òrbites en una extensa regió de l'espai de les fases. Exemples típics de bifurcacions globals són les homoclíniques i les heteroclíniques que impliquen la destrucció dels atractors implicats. En aquests casos, en el punt de la bifurcació, ens apareix una òrbita homoclínica o heteroclínica en funció del tipus de bifurcació. En general les bifurcacions globals solen anar acompanyades de fenòmens asimptòtics que faciliten la seva caracterització, per exemple una òrbita homoclínica és biasimptòtica en l'arribada i sortida del punt fix sella.

Les bifurcacions globals són especialment interessants perquè poden venir acompanyades d'una rica dinàmica i donar respostes caòtiques. Per exemple en sistemes de dimensió superior o igual a tres les bifurcacions homoclíniques estan associades amb el caos de Shil'nikov [15]. S'ha comprovat que aquests fenòmens globals són fonamentals a l'hora d'entendre comportaments dinàmics complicats.

Una de les característiques més interessants del dispositiu BOITAL és la facilitat amb la que poden donar bifurcacions homoclíniques. Concretament en el cas de sistemes bicapes s'ha observat tan experimentalment com numèricament diverses bifurcacions homoclíniques sense una estructura d'òrbites complexa [14]. En sistemes de dimensió superior, la homoclinicitat pot aparèixer acompanyada d'una rica dinàmica i, en particular, s'han obtingut evidències tant numèriques com experimentals de caos de tipus Shil'nikov [15,16,17].

Com veurem als capítols II i VI, el dispositiu BOITAL no autònom presenta fenòmens homoclínics. En el capítol sisè, també estudiaré bifurcacions globals homoclíniques que venen acompanyades de respostes caòtiques per al dispositiu bicapa modulats.

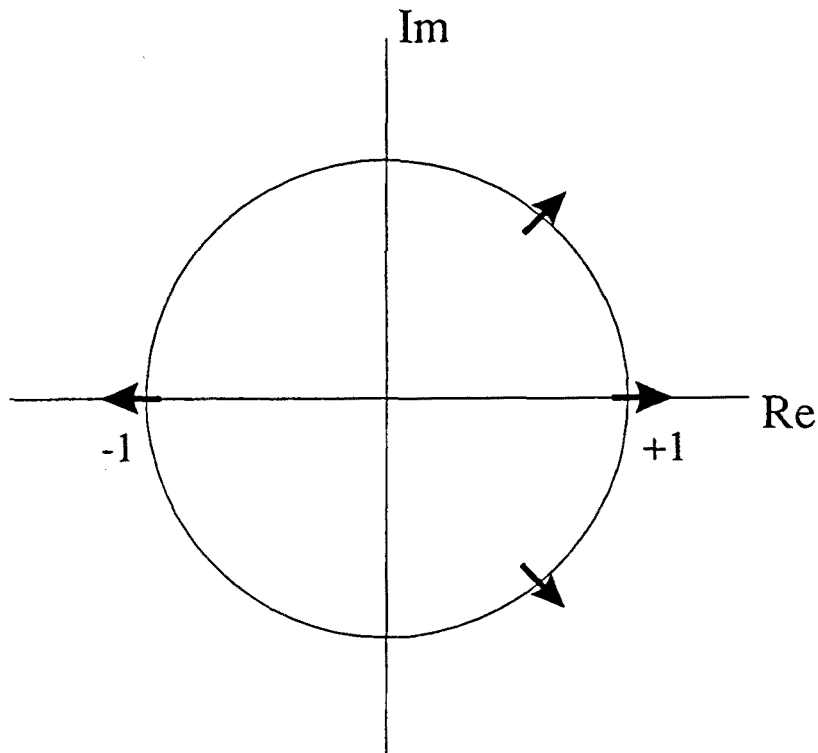


Fig. 1.5 Els tres tipus de creuement del cercle unitat del espai complex per als multiplicadors de Floquet.

També veurem bifuracions globals del dispositiu bicapa modulada al capítol III. En aquest cas es tracta d'un tipus diferent de bifuracions globals que no implica la destrucció dels atractors, són les anomenades crisis internes.

## I.9 Rutes al Caos.

En aquest apartat analitzarem les bifuracions locals d'òrbites periòdiques i quasiperiòdiques que donen lloc a l'aparició de caos. Cal tenir en compte dos factors: primer, l'estudi lineal d'estabilitat de les òrbites periòdiques, i segon, els efectes no lineals.

L'estabilitat d'una òrbita periòdica ve donada pels multiplicadors de Floquet, i aquests depenen del paràmetre de control que notarem per  $\epsilon$ . En variar  $\epsilon$  de forma contínua, l'estabilitat de la òrbita periòdica va canviant. La pèrdua d'estabilitat de la solució periòdica, que dóna lloc a una bifuració, succeeix quan el mòdul d'un multiplicador de Floquet és superior a 1. Existeixen tres tipus genèrics de bifuracions en òrbites periòdiques, indicats a la figura 1.5 per a un sistema contínu de dimensió superior o igual a tres. Dues es donen quan un multiplicador de Floquet essent real es fa superior a +1 o inferior a -1. En el tercer cas es produeix la bifuració quan dos multiplicadors de Floquet complexos conjugats passen a tenir un mòdul superior a 1.



Quan el creuament es fa per  $+1$  tenim una *bifurcació sella node*. En aquest cas la pèrdua d'estabilitat consisteix en la desaparició de la solució periòdica, en aquesta situació apareixen intermitències de tipus I que poden estar associades a règims quasiperiòdics o caòtics (veure capítol IV).

Si el creuament es fa per  $-1$ , cal distingir el caràcter supercrític o subcrític de la bifurcació. En el primer cas apareix una nova solució periòdica de període doble, i l'òrbita inicial esdevé no estable. Aquest fenomen s'anomena *doblament de període*. Això pot desencadenar en una seqüència de doblaments de període que condueix a un règim caòtic (veure capítol III). En el cas de que la bifurcació sigui subcrítica això condueix a intermitències de tipus III associades a un règim caòtic.

Finalment, si la bifurcació es dona en travessar per dos valors complexos conjugats s'anomena *bifurcació de Hopf de segon ordre*. Cal també fer una distinció en funció del caràcter de la bifurcació. En el cas de que sigui supercrítica la bifurcació dona lloc a l'aparició d'una òrbita quasiperiòdica estable, i l'òrbita inicial tot i existir és inestable, una bifurcació de Hopf posterior pot conduir a un règim caòtic. Si la bifurcació es subcrítica apareixen les intermitències de tipus II associades a un règim caòtic.

## II.- DESCRIPCIÓ DEL DISPOSITIU OPTO-TÈRMIC BIESTABLE.

### II.1 Introducció.

En aquest capítol descriurem el sistema objecte d'estudi, tant des del punt de vista físic com matemàtic. El dispositiu està basat en la Biestabilitat Òptica Induïda Tèrmicament amb Absorció Localitzada (BOITAL). La seva estructura està il·lustrada esquemàticament a la figura I.1. Bàsicament el sistema consisteix en una cavitat interferomètrica, en la qual el mirall d'entrada és parcialment absorbent i l'espaciador entre miralls està constituït per dues capes de materials transparents que presenten un gruix i/o un índex de refracció depenents de la temperatura. La cavitat és il·luminada per un feix de llum monocromàtica d'una potència determinada. La resposta del dispositiu es posa de manifest en la potència de les llums transmesa i reflectida, encara que nosaltres normalment només considerarem el feix de llum reflectida perquè la potència transmesa resulta ser molt reduïda a causa de l'elevada reflectància del mirall posterior.

La dinàmica en el dispositiu BOITAL està associada a la propagació de la calor absorbida al mirall d'entrada a través de l'espaciador, als efectes de la variació de temperatura sobre la fase interferomètrica de la cavitat, a través dels canvis del camí òptic, i als efectes interferencials sobre la intensitat lluminosa on es produeix l'absorció. Aquests efectes fan que la fase interferomètrica depengui de la distribució de temperatures al llarg de l'espaciador de la cavitat, que la distribució de

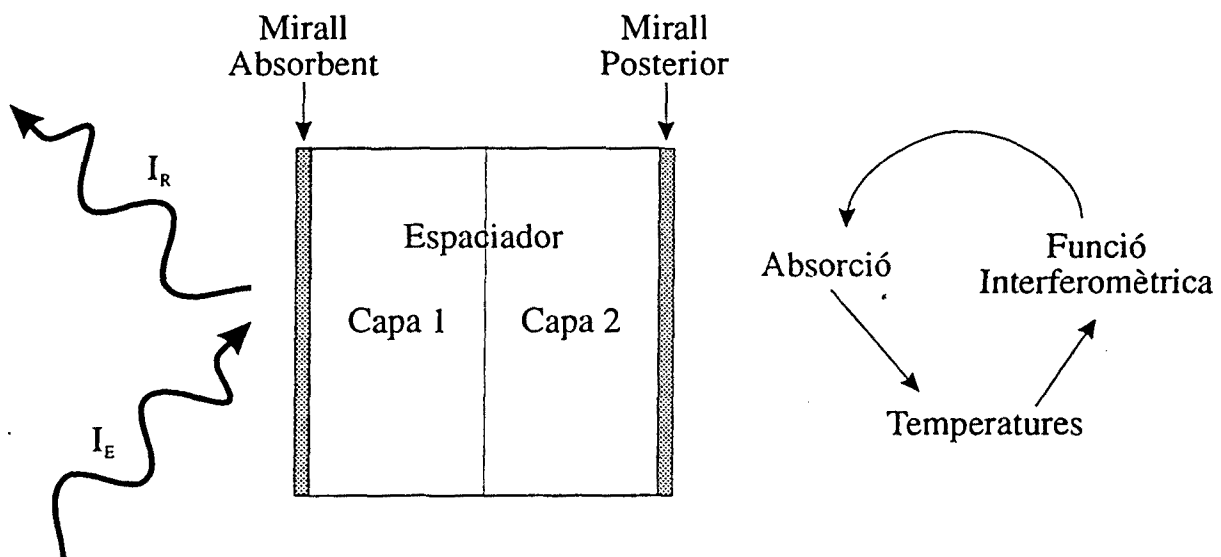


Fig II.1 Esquema del dispositiu bicapa modulada.

temperatures depengui lògicament de la potència absorbida al mirall d'entrada i, finalment, que l'absorció de llum depengui de la funció interferomètrica. Aquestes interdependències constitueixen un anell de realimentació no lineal. La no linealitat d'aquesta realimentació està associada a la funció interferomètrica que expressa la potència absorbida al mirall d'entrada en funció de la fase interferomètrica. És aquesta no linealitat la que permet l'aparició de multiestabilitat en la resposta estacionària del sistema.

La bicapa que constitueix l'espaciador de la cavitat està formada per materials amb coeficients termo-òptics oposats de manera que els efectes sobre el camí òptic siguin contraris per una variació de temperatura en el mateix sentit. Per altra banda, la diferència en la posició relativa de cada una de les capes en relació al focus de calor localitzat on hi ha absorció fa que les variacions de temperatura es produeixin amb un cert retard en una capa respecte a l'altra. El caràcter competitiu i el retard mutu entre els efectes d'ambdues capes fan possible l'existència d'auto-oscil·lacions en la resposta òptica del dispositiu bicapa, fins i tot quan la potència del feix incident sigui constant.

Com ja venim dient des del principi, en aquest treball hem estudiat la resposta del dispositiu bicapa quan el feix de llum incident és de potència modulada; és a dir, quan el feix inclou una component modulada sobre una potència de base constant. I més en concret, hem estudiat situacions en què la potència de base aplicada és tal que el dispositiu autònom presenta auto-oscil·lacions. En aquestes situacions i en presència de la component modulada, es produeix l'acoblament entre la modulació externa i l'oscil·lació no lineal, de la qual cosa en resulta tota una rica dinàmica que és típica dels oscil·ladors actius forçats.

En aquest capítol començarem per descriure el sistema d'equacions general del dispositiu BOITAL en el cas d'un espaciador amb un nombre arbitrari de capes. Inicialment, s'introduirà un sistema d'equacions en derivades parcials que posteriorment serà reduït a un sistema d'equacions en derivades ordinàries. Seguidament, estudiarem la resposta del model teòric per al dispositiu bicapa no modulad. Finalment, presentarem el muntatge experimental i il·lustrarem resultats experimentals del dispositiu bicapa no modulad.

## II.2 Descripció del sistema.

La il·lustració (II.2) mostra un esquema del dispositiu BOITAL amb un espaciador multicapa format per una estructura de N-capes de diferents materials amb coeficients termo-òptics alternativament oposats. L'espaciador es troba entre dues pel·lícules reflectores, que actuen com a miralls d'una cavitat Fabry-Perot. El mirall anterior és il·luminat amb un feix de llum de longitud d'ona  $\Lambda$ , el qual podrà ser o no modulad en intensitat. La font de calor que governarà la no linealitat del dispositiu es troba localitzada al mirall d'entrada atès que aquest mirall és parcialment absorbent i que, de fet, serà l'única capa absorbent de tot el dispositiu. Darrera del mirall de sortida tenim un substrat, que també és transparent per la longitud d'ona de treball.

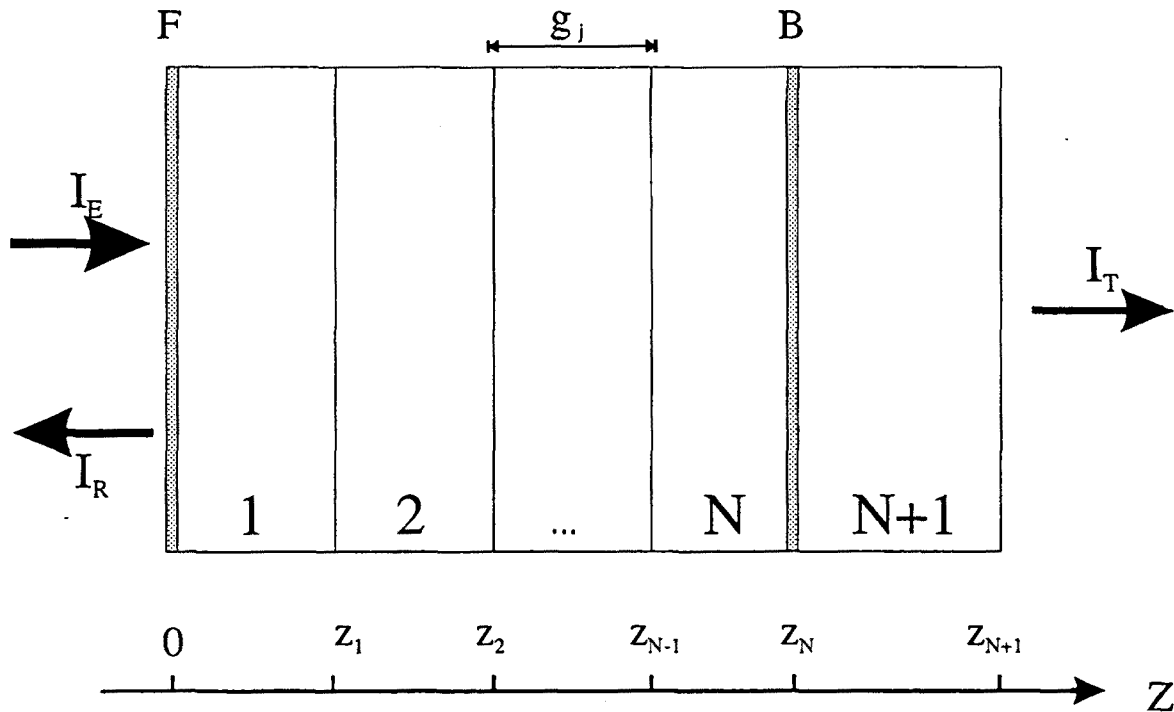


Fig II.2 Esquema del dispositiu, consisteix en una cavitat òptica amb el mirall d'entrada parcialment absorbent. L'espaciador està format per N capes.

Per tal de simplificar el problema farem tot un seguit de suposicions :

- Primer. Suposarem que la llum incident és una ona plana, d'intensitat uniforme  $I_E$ . Això ens permet reduir el problema a una sola dimensió espacial, ja que si tenim una ona plana uniforme ens desapareixen els efectes transversals, ja siguin d'origen òptic o bé tèrmic. Per fer aquesta suposició ens hem basat en les observacions experimentals, d'on hem pogut constatar que la contribució dels efectes transversals és molt petita.
- Segon. Suposarem que el gruix dels miralls és infinitament petit comparat amb el gruix de les diferents capes. Això ens permet introduir la font de calor com una condició de contorn, atès que aquesta està localitzada al mirall d'entrada.
- Tercer. Menysprearem les reflexions òptiques entre les diferents capes de l'espaciador. D'aquesta manera la funció interferomètrica  $A(\psi)$  només depèn de les característiques dels miralls d'entrada i de sortida. Com a conseqüència, podem modificar l'estructura i propietats de l'espaciador sense afectar la funció  $A(\psi)$ . La transmitància i reflectància del sistema en funció del desfasament  $\psi$  ve donada per les equacions A.1 i A.2 de l'apèndix A. L'absorció en el mirall d'entrada s'expressa a l'equació A.10. La fig. II.3 representa  $A(\psi)$  per als paràmetres donats a la taula II.1. En tots els resultats numèrics d'aquesta tesi s'han pres com a paràmetres de la cavitat els d'aquesta taula.

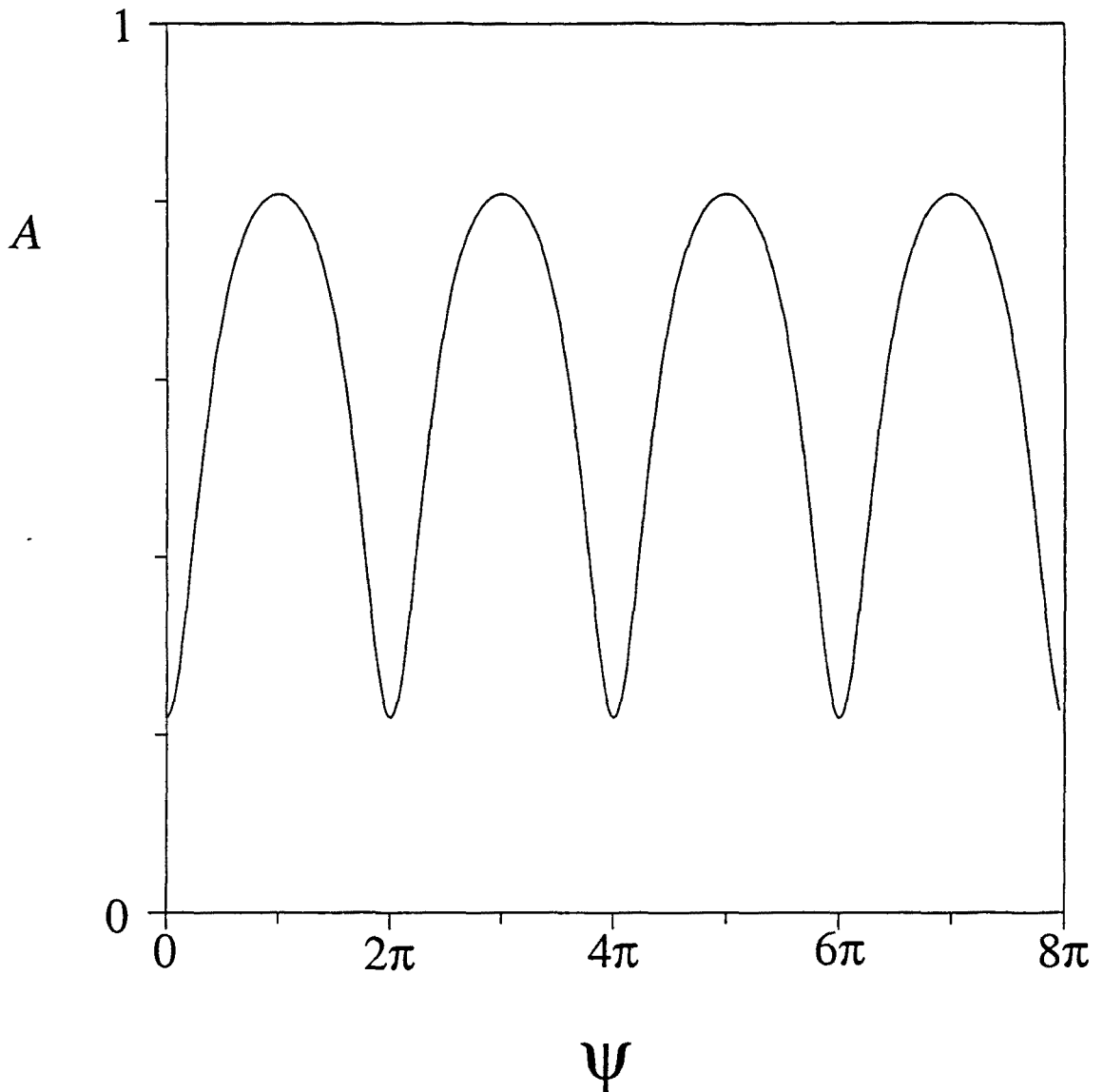


Fig II.3 Diagrama de branques calculat a partir dels paràmetres especificats a la taula II.1 i corresponent a la solució estacionària

- Quart. Suposarem que la propagació de la llum és instantània comparada amb la propagació del calor. Això fa que el desfasament  $\psi$  a un cert instant vingui determinat per la distribució de temperatures al mateix instant.

La segona i quarta aproximació ens permeten d'ignorar l'equació d'ones de la llum, de manera que la dinàmica del sistema és descrita pel següent conjunt d'equacions homogènies en derivades parcials :

$$\frac{\partial T_j}{\partial t} = D_j \frac{\partial^2 T_j}{\partial z^2} \quad j = 1, 2, 3, \dots, N+1 \quad (\text{II.1})$$

Aquestes equacions corresponen a la propagació de la calor, i representen l'evolució de les ones tèrmiques dins del dispositiu.  $T_j(z,t)$  descriu la distribució de temperatures a la capa  $j$  del dispositiu en funció de l'espai i del temps. El subíndex  $j$  es refereix a les capes, corresponent  $j=1$  a la capa que es troba en contacte amb el mirall d'entrada,  $j=N$  a la capa en contacte amb el mirall de sortida i  $j=N+1$  al substrat.

Aquestes equacions estan subjectes a les següents condicions de continuïtat i contorn:

$$[T_j]_{z_j} = [T_{j+1}]_{z_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (\text{II.2})$$

$$k_j \left[ \frac{\partial T_j}{\partial z} \right]_{z_j} = k_{j+1} \left[ \frac{\partial T_{j+1}}{\partial z} \right]_{z_j}, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (\text{II.3})$$

$$-k_1 \left[ \frac{\partial T_1}{\partial z} \right]_{z=0} = A(\psi) I_E(t) - h_F [T_1]_{z=0} \quad (\text{II.4})$$

$$-k_{N+1} \left[ \frac{\partial T_{N+1}}{\partial z} \right]_{z_{N+1}} = h_B [T_{N+1}]_{z_{N+1}} \quad (\text{II.5})$$

on  $z_j$  indica la posició  $z$  de la interfície entre la capa  $j$  i la capa  $j+1$  (veure figura II.2). Les variables  $k_j$  i  $D_j$  representen la conductivitat tèrmica i la difusivitat per a la capa  $j$  respectivament, i finalment,  $h_F$  i  $h_B$  representen els coeficients de convecció associats a les superfícies d'entrada i sortida del dispositiu respectivament.

Taula II.1 Paràmetres interferomètrics del dispositiu.

$T_B =$	0.5
$R_B =$	0.5
$T_F =$	0.25
$R_F =$	0.23
$R'_F =$	0.17
$\phi =$	0.0

L'equació (II.4) correspon a la condició de contorn associada al mirall d'entrada, i expressa l'entrada d'energia en funció dels efectes interferencials de la llum mitjançant la funció  $A(\psi)$ . Tal i com succeïa en el cas del oscil·lador de Van der Pol, en el sistema BOITAL també existeix una font d'entrada d'energia, en aquest cas a través de l'absorció del mirall d'entrada. Això permetrà l'aparició d'oscil·lacions.

La modulació externa ve definida pel feix de llum làser que il·lumina el dispositiu. Aquesta modulació és perfectament sinusoidal, és a dir, la intensitat d'entrada s'expressa en funció del temps segons:

$$I_E(t) = I_{EB} + I_{EM} \cos(\omega_E t + \theta_0) \quad (\text{II.6})$$

on  $I_{EB}$  és l'offset o intensitat de base de la modulació externa,  $I_{EM}$  és l'amplitud de la modulació externa,  $\omega_E$  és la freqüència angular de la modulació externa i  $\theta_0$  és el desfasament inicial de la modulació. Aquesta modulació externa és periòdica en el temps amb període  $T_E = 2\pi/\omega_E$ . Cal assenyalar que la única dependència explícita en el temps es troba en el terme  $I_E(t)$  de l'equació (II.4). En el capítol I hem vist que la diferència entre els sistemes autònoms i no autònoms era determinada per la dependència explícita en el temps del sistema d'equacions. En el nostre cas, la única dependència explícita en el temps es troba a l'equació II.4. Aquesta dependència és fruit d'aplicar la modulació externa. És a dir, l'existència de la modulació externa fa que el nostre sistema sigui no autònom.

D'altra banda, el desfasament  $\psi$ , definit a l'equació (A.5), varia en el temps en funció dels coeficients termo-òptics de la següent manera:

$$\psi(t) = \sum_1^N \psi_j(t) = \sum_1^N \psi_j^0 [1 + \eta_j \langle T_j \rangle_z(t)] \quad (\text{II.7})$$

on  $\psi_j$  és el desfasament associat a la capa  $j$ ,  $\eta_j$  és el coeficient termo-òptic de la capa  $j$  i  $\langle T_j \rangle_z(t)$  és el promig espacial de la temperatura a la corresponent capa  $j$ .

El desfasament inicial  $\psi_j^0$  ve donat per:

$$\psi_j^0 = \frac{4\pi}{\lambda} n_j^0 g_j \quad (\text{II.8})$$

on  $g_j$  és el gruix de la capa  $j$ . El coeficient termo-òptic es defineix com:

$$\eta_j = \frac{1}{n_j^0} \frac{dn_j}{dT} \quad (\text{II.9})$$

i la temperatura promitjada a la capa  $j$  ve donada per :

$$\langle T \rangle_z(t) = \frac{1}{g_j} \int_{z_{j-1}}^{z_j} T_j(z,t) dz \quad (\text{II.10})$$

Si analitzem les equacions (II.1)-(II.7) podem veure el bucle de realimentació no lineal. La potencia absorbida pel mirall d'entrada,  $A(\psi)I_E$ , modifica la distribució de temperatures  $T(z,t)$ . Al mateix temps, el desfasament  $\psi$  depèn de les temperatures promitjades a cada capa (eq. II.7), amb la qual cosa  $\psi$  depèn de la potencia absorbida i, a més a més,  $\psi$  afecta la potencia absorbida a través de la funció interferomètrica  $A(\psi)$ . És aquesta funció  $A(\psi)$ , representada a la figura II.3 per als paràmetres de la taula II.1, l'única no linealitat del sistema d'equacions. Com veurem més endavant, aquest bucle de realimentació no lineal és el responsable de la solució estacionària multivaluada per al sistema autònom. Tampoc no cal oblidar que la dependència de la realimentació de les temperatures promitjades a cada capa és la raó física que ens permetrà fer la reducció de la dimensió dinàmica del sistema.

Podem observar que la variable  $\psi$  determina l'estat del interferòmetre i, per tant, determina la resposta òptica del sistema. Per altra banda, com veurem més endavant, els graus de llibertat associats a la distribució de temperatures venen caracteritzats per les temperatures promig de les diferents capes de l'espaciador o, el que és equivalent, per les fases parcials  $\psi_j$ , la suma de les quals dóna  $\psi$ .

Malauradament ni la fase interferomètrica total ni les fases parcials són observables experimentalment. Dues variables que sí són observables són la intensitat reflectida  $I_R$  i la transmesa  $I_T$ . A partir de la fase interferomètrica podem determinar immediatament  $I_R$ :

$$I_R = R(\psi)I_E(t) \quad (\text{II.11})$$

i  $I_T$ :

$$I_T = T(\psi)I_E(t) \quad (\text{II.12})$$

on les expressions de  $R(\psi)$  i  $T(\psi)$  es poden trobar a l'apèndix A (A.1 i A.2 respectivament). No obstant això, experimentalment només mesurarem la intensitat reflectida ja que la intensitat transmesa és pràcticament nul·la.

Les equacions (II.1)-(II.12) es poden considerar adimensionals, si interpretem les seves variables, espai, temps i temperatura de la següent forma:

$$T_j = \eta'_1 T'_j \quad (\text{II.13})$$



$$z = \frac{1}{g_1'} z' \quad (\text{II.14})$$

$$t = \frac{1}{\tau_1'} t' \quad (\text{II.15})$$

on

$$\tau_1' = \frac{g_1'^2}{D_1'} \quad (\text{II.16})$$

representa el temps de relaxació tèrmica associat a la primera capa, les primes especifiquen els paràmetres dimensionals actuals. Per tal d'obtenir un sistema de variables adimensional ens cal introduir una nova variable adimensional, per exemple, la conductivitat adimensional:

$$k_j = \frac{k_j'}{k_1'} \quad (\text{II.17})$$

D'acord amb les anteriors definicions, la resta de paràmetres adimensionals són els següents:

$$\eta_j = \frac{\eta_j'}{\eta_1'} \quad (\text{II.18})$$

$$g_j = \frac{g_j'}{g_1'}, \quad \Lambda = \frac{\Lambda'}{g_1'} \quad (\text{II.19})$$

$$D_j = \frac{D_j'}{D_1'} \quad (\text{II.20})$$

$$h_{F|B} = \frac{g_1'}{k_1'} h_{F|B}' \quad (\text{II.21})$$

$$I_E = \frac{\eta_1' g_1'}{k_1'} I_E' \quad (\text{II.22})$$

$$b_{ij} = \frac{(g_1')^{N-1}}{D_1'} b_{ij}' \quad (\text{II.23})$$

$$\beta_j = \frac{k_1'}{\eta_1' g_1'} \beta_j' \quad (\text{II.24})$$

on els paràmetres  $b_{ij}$  i  $\beta_j$  han estat introduïts per donar una llista completa de la notació adimensional, encara que seran definits més endavant quan introduïrem el sistema d'ODE's. Malgrat això, cal remarcar que totes les fórmules es poden interpretar tant dimensionalment com adimensionalment.

Els dispositius BOITAL venen descrits per a un conjunt d'equacions homogènies de propagació del calor (II.1-II.5) subjectes a les corresponents condicions de contorn i continuïtat. El sistema d'equacions en derivades parcials és lineal i l'única no linealitat del sistema es troba en la condició de contorn que descriu l'absorció de calor en el mirall d'entrada. Aquesta condició de contorn és no local i no lineal.

La dimensió d'un sistema d'EDP's és infinita, és a dir, l'espai de les fases està format per una distribució de temperatures contínua. Ara bé, hem observat que la dinàmica del sistema és de baixa dimensió [16, 17, 35, 36, 37]. Concretament la dependència de la fase interferomètrica en la temperatura promitjada a l'espai és la causa que la dimensió efectiva del problema se'ns redueix al número de capes. Aquest comportament dinàmic de baixa dimensió ens permet reduir el sistema de equacions en derivades parcials a un sistema d'equacions en derivades ordinàries de dimensió igual al número de capes. Això fa el nostre dispositiu molt versàtil, podem escollir a voluntat la dimensió del sistema. També, és fàcilment optimitzable, atès que la funció interferomètrica responsable de la realimentació és independent de les característiques de l'espaciador.

### II.2.1 Reducció del sistema d'EDP's a un sistema d'equacions EDO.

En aquest apartat presentarem una reducció del sistema d'equacions en derivades parcials (EDP) (II.1)-(II.7) a un sistema d'equacions en derivades ordinàries (EDO).

La diferència més important entre un sistema d'EDP's i un sistema d'EDO's és la dimensió. En un sistema d'EDP l'espai de les fases està format per variables contínues, és a dir, la dimensió és infinita, en el nostre cas aquestes variables contínues són les distribucions de temperatures a les capes. En canvi en un sistema d'ODE's l'espai de les fases està format per variables discretes. La dimensió del sistema és igual al nombre de equacions diferencials de primer ordre independents del sistema.

Tot i la dimensió infinita del sistema D'EDP's, els resultats obtinguts a partir de l'anàlisi lineal d'estabilitat [36] i l'integració numèrica [37] indiquen que la dimensió efectiva del sistema és finita. Aquesta dimensió efectiva és de fet igual al número de capes de l'espaciador. Les temperatures promitjades a cada capa són un conjunt de variables que descriuen l'estat del sistema. Tot això fa pensar que és possible reduir el sistema inicial d'EDP's a un sistema més senzill d'EDO's.

La raó física d'aquest comportament de baixa dimensionalitat es troba en el fet que la variable que governa el bucle de realimentació no lineal del dispositiu, la fase interferomètrica  $\psi$ , no depèn directament en les temperatures, sinó que depèn del promig espacial de les temperatures a l'espaciador (II.7). Això vol dir que aquelles ones tèrmiques amb una longitud d'ona petita respecta al gruix de la capa tindran poca relevància en la dinàmica del sistema, el que és el mateix, les úniques ones tèrmiques que ens interessin són aquelles que varien lentament en l'espai. A partir d'aquí podem fer un desenvolupament en sèrie de Taylor de segon ordre de les funcions que descriuen les distribucions de temperatures a cada capa. El segon ordre és l'aproximació més senzilla atès que l'aproximació de primer ordre en la sèrie de Taylor implica segons (II.1) que les derivades temporals siguin nul·les, és a dir, ens porta a la solució estacionària. Aquesta circumstància no es dona en el cas del substrate, que notem per  $N+1$ , ja que l'equació (II.1) només s'aplica a les  $N$  capes del espaciador. Així doncs suposem que les temperatures es poden expressar com:

$$T_j(z, t) = T_j(t) \Big|_{z_j} + \frac{dT_j(z, t)}{dz} \Big|_{z_j} (z - z_j) + \frac{1}{2} \frac{d^2 T_j(z, t)}{dz^2} \Big|_{z_j} (z - z_j)^2, \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{II.25})$$

$$T_{N+1}(z, t) = T_j(t) \Big|_{z_{N+1}} + \frac{dT_{N+1}(z, t)}{dz} \Big|_{z_{N+1}} (z - z_{N+1})$$

on  $z_j$  és la posició on es troba la interfície de les capes  $j, j+1$ .  $T_j(z, t)$  és la funció que descriu la distribució de temperatures a la capa  $j$  a l'instant  $t$ . Així doncs el número total de variables és  $3N+2$ , corresponents a:

$$\begin{aligned}
 T_j(t)|_{z_j}, & \quad j=1, \dots, N+1 \\
 \left. \frac{dT_j(z,t)}{dz} \right|_{z_j}, & \quad j=1, \dots, N+1 \\
 \left. \frac{d^2T_j(z,t)}{dz^2} \right|_{z_j}, & \quad j=1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{II.26}$$

i el número total d'equacions és  $2N+2$  corresponents a les condicions de contorn (II.2)-(II.5), de manera que ens queden  $N$  variables independents. Cal tenir present que aquestes variables són funcions del temps. A l'hora d'escollir les variables del nou sistema d'EDO's, ens interessen més les temperatures promitjades, o el que és equivalent (II.7), les fases interferomètriques  $\psi_j$  de les  $N$  capes en comptes de les temperatures o les seves derivades a les interfícies. A partir de les equacions (II.1), (II.7) i (II.25) tenim les equacions del canvi de base:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\psi_j}{dt} &= \psi_j^0 \eta_j D_j \left. \frac{d^2T_j(z,t)}{dz^2} \right|_{z_j} \\
 \psi_j(t) &= \psi_j^0 \eta_j \left[ T(z,t)|_{z_j} - \left. \frac{dT_j(z,t)}{dz} \right|_{z_j} \frac{g_j}{2} + \left. \frac{d^2T_j(z,t)}{dz^2} \right|_{z_j} \frac{g_j^2}{6} \right], \quad j=1, \dots, N
 \end{aligned} \tag{II.27}$$

Finalment aplicant (II.1)-(II.5), (II.26) i (II.27) obtenim els nou sistema d'EDO's, és a dir, les  $N$  equacions diferencials de primer ordre:

$$\frac{d\psi_j}{dt} = \sum_{i=1}^N b_{ji} [\beta_i A(\psi) I_E(t) + \psi_i^0 - \psi_j] \tag{II.28}$$

on

$$b_{ji} = \frac{k_1}{k_j} \frac{\eta_j}{\eta_i} \frac{g_i^F + g_i^B}{g_i} D_j (-1)^{i+j} \frac{a^{ij}}{|a|} \tag{II.29}$$

$$a_{ij} = \begin{cases} i > j & g_i^B g_j^F \\ i < j & g_i^F g_j^B \\ i = j & g_i^F g_i^B - \frac{1}{6} \frac{k_1}{k_i} g_i (g_i^F + g_i^B) \end{cases}, \quad j, i = 1, \dots, N \tag{II.30}$$

$$\beta_j = \Psi_j^0 \frac{\eta_j}{h_F} \frac{g_j^B}{g_j^B + g_j^F}, \quad j=1, \dots, N \quad (\text{II.31})$$

$$g_i^F = \frac{k_1}{h_F} + \frac{1}{2} \frac{k_1}{k_i} g_i + \sum_{q=1}^{i-1} \frac{k_1}{k_q} g_q, \quad j=1, \dots, N \quad (\text{II.32})$$

$$g_i^B = \frac{k_1}{h_B} + \frac{1}{2} \frac{k_1}{k_i} g_i + \sum_{q=i+1}^{N+1} \frac{k_1}{k_q} g_q, \quad j=1, \dots, N \quad (\text{II.33})$$

i  $a^{ij}$  és el menor complementari de la matriu A.

On els coeficients del nou sistema d'equacions  $b_{ij}$  (II.29) i  $\beta_i$  (II.31) només depenen de l'estructura de l'espaciador, de les condicions de contorn tèrmiques i la longitud d'ona del feix làser.

La dimensió d'aquest nou sistema no autònom en derivades ordinàries és igual al nombre d'equacions. Concretament el número d'equacions és igual al número de capes de l'espaciador: en una  $N$ -Capa existeixen  $N$  equacions. Les noves variables, denotades per  $\psi_j$ , són les fases interferomètriques associades a les capes. Cadascuna d'elles és proporcional (eq. II.7) a les temperatures promitjades a la capa. Recordem que aplicant la transformació I.3, descrita al primer capítol, podem convertir el sistema d'equacions no autònom II.28 en un sistema autònom de dimensió igual a  $N+1$ .

La reducció del sistema de EDP's a EDO's comporta molts avantatges; el sistema d'EDO's és molt més senzill i això facilita tant l'obtenció de resultats analítics com numèrics. Hi ha diverses eines de la dinàmica de sistemes com són els exponents de Lyapunov, els multiplicadors de Floquet o el càlcul de *Manifolds* que són fàcilment calculables a partir d'un sistema d'EDO's, cosa que és pràcticament impossible a partir d'un sistema d'EDP's. Tampoc no cal oblidar que, hi ha una sèrie de tècniques numèriques que permeten la localització i seguiment d'òrbites periòdiques que només es poden implementar en un sistema d'EDO's.

També tenim un control de l'espai de les fases molt més precís ja que les variables del sistema d'EDO's són directament les fases parcials a cada capa, mentre que en un sistema d'EDP's les variables naturals són les temperatures, cosa que suposava un problema de sistema de dimensió infinita.

Tots els càlculs numèrics han estat realitzats amb el sistema d'EDO's, i és important destacar la gran coincidència existent amb els resultats obtinguts anteriorment amb el sistema de EDP's [16, 17, 35, 36, 37, 38], cosa que corrobora la validesa de l'aproximació per sèries de Taylor.

En el cas concret que ens ocupa en aquesta tesi, el sistema és una bicapa modulada, és a dir, la dimensió dels sistema autònom és dos. Això permet la existència d'atractors caòtics i quasiperiòdics.

Tal i com hem vist en els sistemes autònoms, no existeixen punts fixos estacionaris. Les representacions bàsicament les farem a l'espai de les fases  $\psi_1$  i  $\psi_2$ , i en les seccions de Poincaré estroboscòpiques en  $T_E$ . Recordem que en l'espai de les fases  $\psi_1$  i  $\psi_2$ , les trajectòries es poden creuar sempre i quan ho facin per temps diferents.

En la representació de Poincaré les òrbites periòdiques són punts fixos i l'estabilitat de les mateixes es pot calcular a partir dels multiplicadors de Floquet (apèndix B).

En aquest sistema tenim tres paràmetres de control fàcilment manipulables:  $I_{EM}$ ,  $I_{EB}$  i  $\omega_E$ . Tant numèricament com experimentalment ens permetran estudiar les diferents bifurcacions que es donen en el sistema bicapa modulada.

Variant un dels anteriors paràmetres de control i mitjançant tècniques de seguiment d'òrbites periòdiques, podem resseguir una solució periòdica i conèixer la seva estabilitat en cada moment. Això serà molt útil per a estudiar les bifurcacions locals de les òrbites periòdiques.

## II.3.- SISTEMA AUTÒNOM

Fins ara només hem considerat el sistema bicapa modulada. Tanmateix conèixer la resposta del sistema bicapa en absència de modulació ens pot ser molt útil per entendre el sistema bicapa modulada. Eliminar la modulació del sistema d'equacions II.28 és equivalent a suprimir la dependència temporal de  $I_E$  en el temps:

$$\frac{d\psi_j}{dt} = \sum_{i=1}^N b_{ji} \left[ \frac{\beta_i}{\beta} A(\psi) I_E + \psi_i^0 - \psi_i \right] \quad (\text{II.34})$$

Aquest canvi té unes implicacions molt importants. Una d'elles és el fet que ara no es poden produir creuaments de trajectòries en l'espai de les fases bidimensional  $\psi_1, \psi_2$ . Això implica que és impossible que ens apareixin solucions quasiperiòdiques o caòtiques.

Una altra conseqüència és que en aquest cas sí que poden aparèixer solucions estacionàries. En aquest apartat calcularem analíticament la solució estacionària, estudiarem la seva estabilitat i farem un estudi numèric de les solucions periòdiques.

### II.3.1- SOLUCIÓ ESTACIONÀRIA

La solució estacionària del sistema d'equacions (II.34) s'obté imposant la condició que totes les derivades temporals siguin nul·les:

$$\frac{d\psi_j}{dt} = 0 \quad , \quad j = 1, \dots, N \quad (\text{II.35})$$

això dóna com a solució:

$$\bar{\psi}_i = \psi_i^0 + \beta_i A(\bar{\psi}) I_E, \quad i=1, \dots, N \quad (\text{II.36})$$

on les barres indiquen que són magnituds corresponents a la solució estacionària.

Sumant les  $N$  equacions de (II.36) obtenim l'equació que ens dóna la fase interferomètrica estacionària:

$$\bar{\psi} = \sum_{j=1}^N \bar{\psi}_j = \psi^0 + \beta A(\bar{\psi}) I_E \quad (\text{II.37})$$

on

$$\psi^0 = \sum_{j=1}^N \psi_j^0 \quad (\text{II.38})$$

$$\beta = \sum_{j=1}^N \beta_j \quad (\text{II.39})$$

En el sistema d'EDP's també podem calcular la solució estacionària analíticament. La solució estacionària del sistema d'EDP's és exactament igual a la solució estacionària del sistema d'EDO's. A partir d'aquí no podem concloure que ambdós sistemes siguin equivalents, però sí que indica que anem pel bon camí. Més endavant donarem evidències més fiables de l'alt grau de coincidència dels dos sistemes.

És interessant introduir ara la següent normalització per a les intensitats:

$$\psi_X = \beta I_X \quad (\text{II.40})$$

on definim per  $X = E, R, T$  o  $A$  les intensitats d'entrada, reflectida, transmesa i absorbida, respectivament. Aquesta normalització també la introduïrem per al sistema bicapa modulada, de manera que la equació II.6 queda com:

$$\psi_E(t) = \psi_{EB} + \psi_{EM} \cos(\omega_E t + \theta_0) \quad (\text{II.41})$$

Amb aquesta normalització l'equació (II.37) que caracteritza la solució estacionària esdevé:

$$\bar{\psi} = \psi^0 + A(\bar{\psi}) \psi_E \quad (\text{II.42})$$

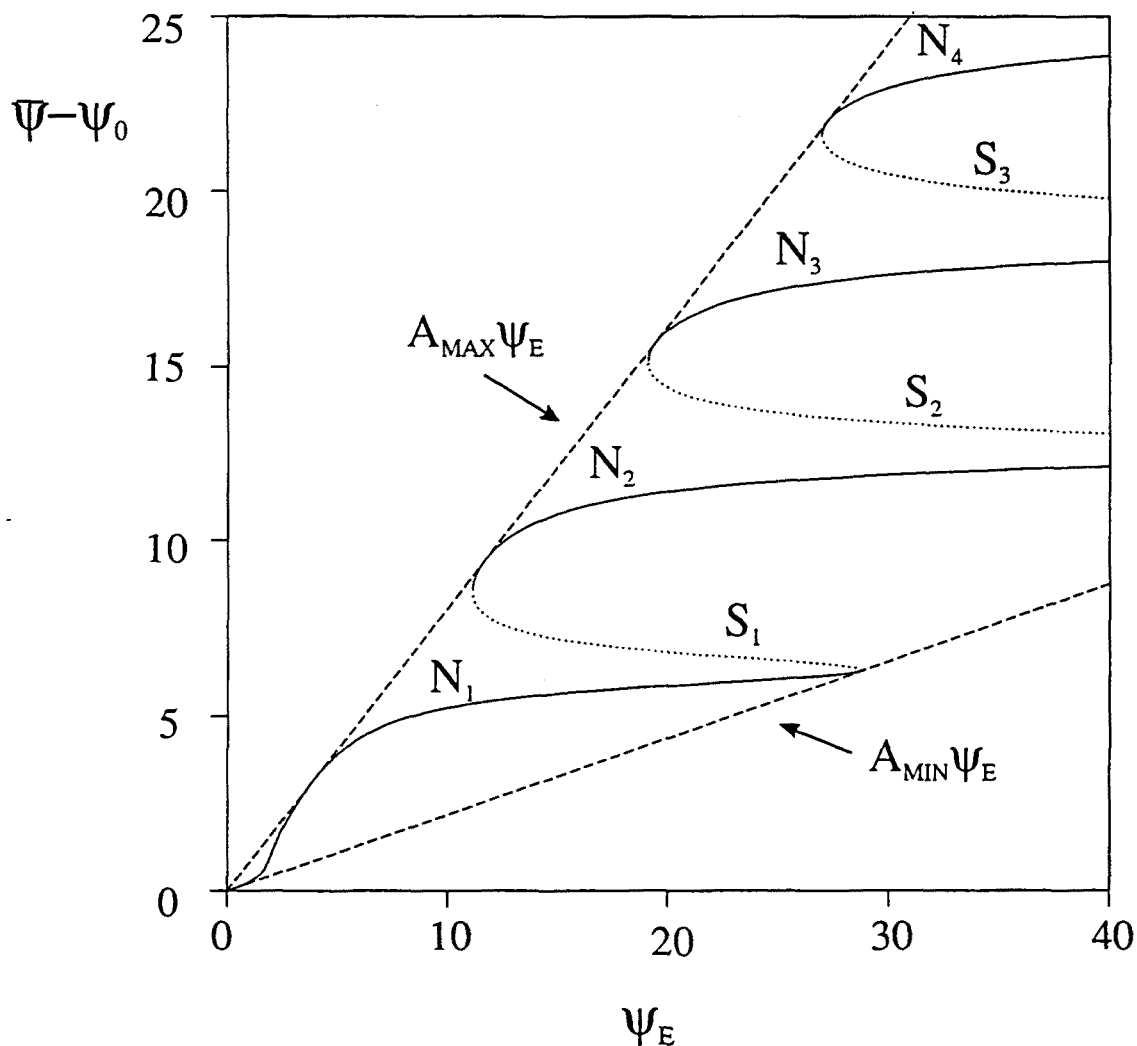


Fig II.4 Diagrama de branques corresponent a la solució estacionària calculat a partir dels paràmetres de la taula II.1.

A la fig. II.4 representem l'equació (II.42) per als paràmetres de la taula II.1, i  $\psi^0 = 2n\pi$  i per  $\beta$  positiva. El caràcter multivaluat de la solució estacionària està clarament associat amb l'estructura periòdica de  $A(\psi)$ . Tal i com és usual en els problemes de biestabilitat òptica, el diagrama de branques ha estat obtingut per la funció inversa donada per

$$\psi_E(\bar{\psi}) = \frac{\bar{\psi} - \psi^0}{A(\bar{\psi})} \quad (\text{II.43})$$

la qual és univaluada i pot ser calculada utilitzant  $\bar{\psi}$  com a variable.



Un cop coneixem les solucions estacionàries de  $\bar{\psi}$  per a una determinada  $\bar{\psi}_E$ , podem obtenir la resta de variables que descriuen l'estat estacionari de la següent manera:

$$\bar{\psi}_j = \psi_j^0 + \frac{\beta_j}{\beta} (\bar{\psi} - \psi^0) \quad (\text{II.44})$$

$$\bar{\psi}_T = T(\bar{\psi}) \psi_E \quad (\text{II.45})$$

$$\bar{\psi}_A = A(\bar{\psi}) \psi_E \quad (\text{II.46})$$

És important treballar amb les intensitats normalitzades definides a l'equació (II.40), ja que llavors la solució estacionària només depèn de la funció  $A(\psi)$ ; la qual, alhora, només depèn de les característiques dels miralls que configuren la cavitat. Aquesta dependència es pot observar en les corbes en forma d'essa que constitueixen el diagrama multivaluat, limitat per dues línies que passen per l'origen i amb pendents iguals als valors màxim i mínim de la funció  $A(\psi)$  respectivament. Un canvi en  $\psi^0$  provoca un desplaçament de les corbes a través de les dues línies.

L'estructura de l'espaciador i les propietats tèrmiques només afecten la solució estacionària amb el factor d'escala  $\beta$ . Aquest paràmetre  $\beta$  caracteritza la no linealitat termo-òptica de tot l'espaciador, i els factors  $\beta_j$  amb  $j=1,2,\dots,N$ , caracteritzen la contribució de les diferents capes de l'espaciador i tenen en compte la seva posició relativa. Aquestes dues particularitats del nostre dispositiu són una conseqüència de la separació de funcions, introduïda en localitzar l'absorció al mirall d'entrada i separar la funció interferomètrica de les propietats de l'espaciador.

Ara introduïrem un nou paràmetre que anomenarem  $p$ . Aquest paràmetre ens servirà per caracteritzar l'estabilitat local de les solucions estacionàries. Aquest paràmetre apareix de forma natural quan calculem el pendent de la solució en el diagrama de branques estacionàries:

$$\left( \left[ \frac{\partial \psi_E}{\partial \bar{\psi}} \right] \right)^{-1} = \frac{A(\bar{\psi})}{1 - p(\bar{\psi})} \quad (\text{II.47})$$

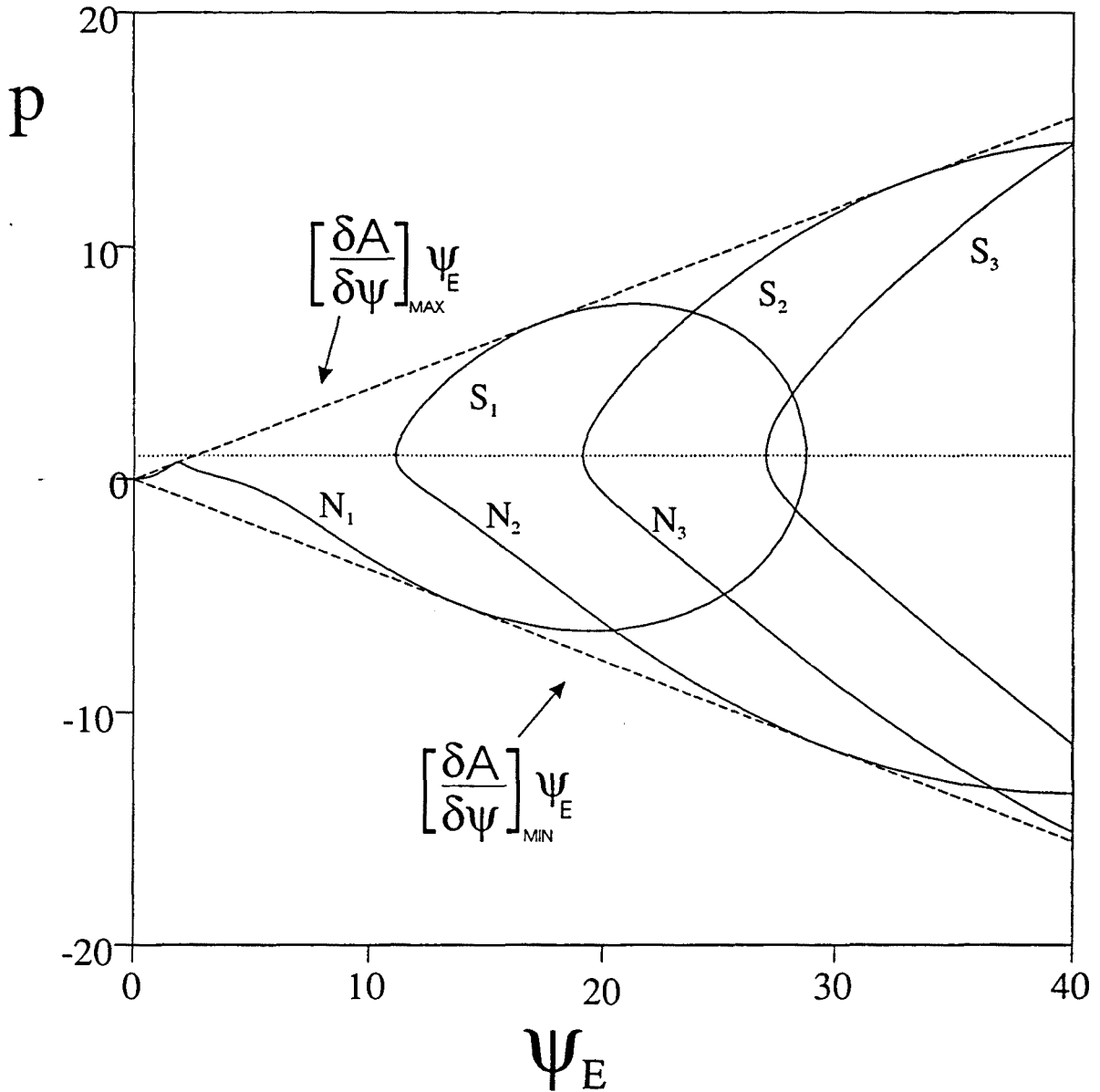


Fig II.5  $p$  en funció de  $\psi_E$  per a la solució estacionària.

d'on obtenim  $p(\bar{\psi})$ :

$$p(\bar{\psi}) = \psi_E(\bar{\psi}) \left[ \frac{\partial A}{\partial \psi} \right]_{\bar{\psi}} \quad (\text{II.48})$$

on  $\psi_E(\bar{\psi})$  ve donada per l'equació (II.43). Es pot comprovar fàcilment que les branques que tenen un pendent positiu corresponen a valors de  $p$  inferiors a 1. Per contra, les branques que tenen un pendent negatiu tenen un valor de  $p$  superior a 1, mentre que

els punts de canvi corresponen a  $p=1$ . A la figura (II.4) hem indicat les branques amb pendent positiu com  $N_m$  i les de pendent negatiu com  $S_m$ . També podem observar que els punts  $N_m$  tangents a les línies  $A_{max}$ ,  $A_{min}$  tenen  $p=0$ . La figura (II.5) representa la solució estacionària en  $p$ , podem observar com les branques  $N_m$  estan per sota la línia corresponent a  $p=1$ , i les branques  $S_m$  hi estan per sobre. La figura (II.5) també està limitada pels valors màxim i mínim de  $\delta A/\delta \psi$ . Les branques  $S_m$ , com veurem a l'apartat següent, corresponen a punts sella i les branques  $N_m$  a punts node. Podem comprovar que, per a una intensitat d'entrada donada, la solució estacionària inclou un nombre senar de solucions, punts node i sella alternativament. La seva aparició i desaparició es dona en bifurcacions locals del tipus sella-node, que es produeixen als punts de canvi on  $p=1$ .

El sentit físic de  $p$  es relaciona amb l'eficiència del bucle de realimentació per a punts propers a la solució estacionària. Si diferenciem l'equació (II.46)

$$\delta \psi_A = p \delta \psi \quad (\text{II.49})$$

veiem que  $p$  ens determina el canvi infinitesimal que es dona en  $\psi_A$  sota petites pertorbacions,  $\delta \psi$ , de l'estat estacionari. Com que l'estat estacionari  $\psi_A$  és igual a  $\bar{\psi} - \psi^0$ , podem considerar  $\delta \psi_A$  com la variació en la intensitat normalitzada absorbida. Per tant, valors de  $p$  més grans o més petits d'1 impliquen regeneracions positives o negatives respectivament.

### II.3.2 Anàlisi lineal de l'estabilitat.

Un cop coneixem la solució estacionària de l'equació II.42, estudiarem la seva estabilitat.

Per conèixer l'estabilitat d'un punt fix estudiarem com evoluciona el sistema quan apliquem una pertorbació infinitesimal sobre aquest punt fix. Si aquesta pertorbació creix el punt és inestable, en cas contrari el punt és estable. Si la pertorbació és infinitesimal, inicialment la seva evolució queda completament determinada pel camp vectorial linearitzat al voltant del punt fix. Així doncs, per calcular l'estabilitat del sistema d'equacions al voltant del punt fix desenvoluparem en sèrie de Taylor, eliminant els termes no lineals. Suposem que  $\bar{X}$  és la solució estacionària del camp vectorial  $f(X)$  llavors:

$$f(X) = f(\bar{X}) + \left[ \frac{df(X)}{dX} \right]_{\bar{X}} d\bar{X} + \dots \quad (\text{II.50})$$

Com que  $\bar{X}$  és la solució estacionària, el primer terme de la sèrie és nul. Així doncs, el segon terme de la sèrie determina com canvia el sistema en aplicar-hi una pertorbació infinitesimal. En altres paraules, els valors propis de la matriu  $Df(\bar{X})$  determinen l'estabilitat dels punts fixos (veure apartat I.6.1).

En el sistema d'equacions II.42 l'únic terme no lineal és degut a la funció  $A(\psi)$ , de manera que si diferenciem II.42 i apliquem II.49 tenim que els termes de la matriu  $Df(\bar{X})$  són:

$$Df_{ji} = \frac{df_j}{d\psi_i} = p \sum_{k=1}^N b_{jk} \frac{\beta_j}{\beta} - b_{ji} \quad (\text{II.51})$$

A partir de II.51 podem deduir immediatament que la matriu  $Df(\bar{X})$  i, per extensió, els valors propis que determinen l'estabilitat no depenen ni d'  $A(\psi)$  ni de  $\psi^0$ . En canvi, però,  $A(\psi)$  i  $\psi^0$  determinen totalment la solució estacionària i els valors màxim i mínim de  $p$ .

Tot seguit faré un breu estudi de la informació que ens proporciona l'anàlisi lineal per als casos unicapa ( $N=1$ ) i bicapa ( $N=2$ ).

### II.3.2.1 Cas unicapa

Per al cas  $N=1$ , existeix un únic valor propi per a cada  $p$ . La relació entre  $p$  i el seu valor propi  $\lambda$  és:

$$p = \frac{\lambda + b_{11}}{b_{11}} \quad (\text{II.52})$$

on  $\lambda$  només s'anul·la pel valor de  $p=1$ . Atès que el coeficient  $b_{11}$  és positiu  $\lambda > 0$  ( $< 0$ ) si  $p > 1$  ( $< 1$ ). És a dir, si  $p < 1$  /  $> 1$  existeix, un punt estable/inestable i per a  $p=1$  existeix una bifurcació tipus sella node. Si tornem al diagrama de branques de la figura II.4 les branques  $S_m$  que corresponen a valors de  $p > 1$  són branques inestables, i les branques  $N_m$  amb valors de  $p < 1$  són branques estables, i la bifurcació sella node es dona als punts on aquestes es troben.

### II.3.2.2 Cas bicapa

En el cas bicapa l'expressió de  $p$  en funció de  $\lambda$  és una mica més complicada:

$$p = \frac{\lambda^2 + q_1 \lambda + q_2}{q_3 \lambda + q_2} \quad (\text{II.53})$$

on

$$\begin{aligned} q_1 &= b_{11} + b_{22} \\ q_2 &= b_{11} b_{22} - b_{12} b_{21} \\ q_3 &= \frac{1}{\beta} (b_{11} \beta_1 + b_{12} \beta_2 + b_{21} \beta_1 + b_{22} \beta_2) \end{aligned} \quad (\text{II.54})$$

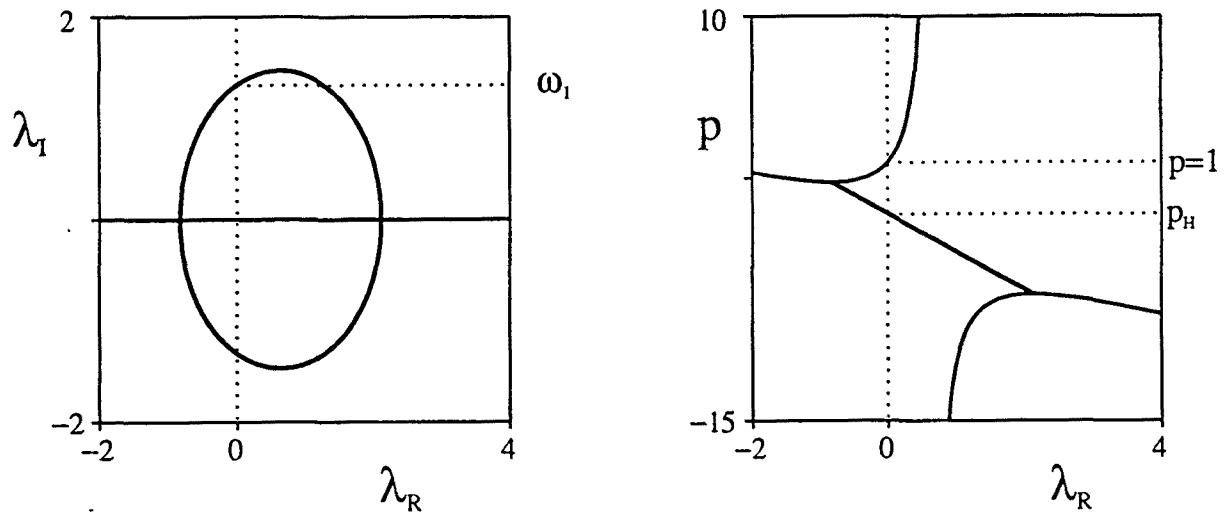


Fig II.6 Projeccions de l'equació de l'anàlisi lineal per als paràmetres de la taula II.2.

Igual que en el cas  $N=1$ , existeix una bifurcació sella-node per a  $p=1$ . Existeix, paral·lament, una bifurcació de Hopf associada a un parell de valors propis complexos conjugats que creuen simultàniament l'eix imaginari per  $p=p_H = -2.22356$ .

 Taula II.2 Valors numèrics dels paràmetres adimensional de la bicapa. Coeficients de convecció  $h_{B,F}=0.5$ .

j	$g_j$	$\eta_j$	$k_j$	$D_j$	$\beta_j$
1	1	1	1	1	20864.8
2	0.8	-4	0.1	0.1	-38947.7
3	0.3	-	1	1	-

La figura II.6 representa la funció II.45 per al sistema de la taula II.2 i la figura II.7 mostra un esquema de l'evolució dels valors propis. El valor de  $p_H$  és més petit que zero. Els valors propis complexos conjugats associats a  $p > p_H$  tenen la part real negativa i els valors de propis complexos conjugats associats a  $p < p_H$ , tenen la part real positiva. És a dir, la zona estable/inestable correspon a valors de  $p > p_H$  ( $p < p_H$ ). Si tenim en compte el diagrama de branques de la solució estacionària (fig II.4), la regió de la branca  $N_m$  on els valors de  $p$  són superiors a  $p_H$  és inestable i delimitada per dues bifurcacions de Hopf. Les altres dues regions de les branques  $N_m$  amb  $p < p_H$  són estables, i les branques  $S_m$  contenen punts selles. A la regió inestable de les branques  $N_m$ , poden existir cicles límits de freqüència  $\omega_1=1.326$ . Aquesta freqüència ve determinada per la part imaginària dels valors propis al punt de la bifurcació. A la taula II.3 he indicat els punts on es produeixen les sis primeres bifurcacions de Hopf.

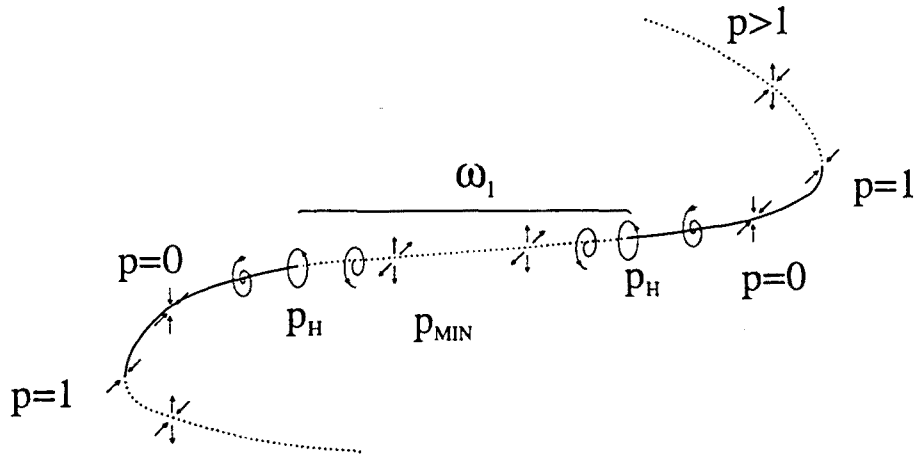


Fig II.7 Esquema de l'evolució dels valors pròpils. La línia contínua representa les solucions estables, la línia puntejada les selles i amb el traç discontinu les inestables.

En el cas general de una  $N$ -Capa, la funció  $p(\lambda)$  és igual al quocient d'un polinomi de grau  $N$  amb un polinomi de grau  $N-1$ . Els termes independents d'ambdós polinomis sempre són iguals, de manera que sempre existeix la solució per a  $p=1$ , és a dir, presenten una bifurcació tipus sella node. Existeixen, també,  $N-1$  valors de  $p$  per als quals apareixen bifurcacions de Hopf.

Caldria ressaltar la gran coincidència entre els resultats de l'anàlisi lineal aquí presentats i els de [38]. Ambdós han estat calculats per als mateixos paràmetres, però al Treball de Recerca l'anàlisi es va fer a partir del sistema d'equacions en EDP's. Això és una prova fiable que el sistema d'EDO's descriu correctament el dispositiu.

Taula II.3 Solució Estacionària per a les tres primeres branques on es produeix la bifurcació de Hopf. Corresponen al valor de  $p=-2.22356$  per a una bicapa amb les característiques de les taules II.1 i II.2. On:

$\bar{\psi}$  és el desfasament pel estacionària.

$\psi_E$  és la intensitat normalitzada.

$\bar{\psi}_i, i=1,2$ , són les fases parcials .

$\bar{\psi}$	$\psi_E$	$\bar{\psi}_1$	$\bar{\psi}_2$	Branca
4.97	8.166	-5.74	10.71	$N_1$
6.20	27.849	-7.15	13.36	$S_1$
10.70	14.792	-12.35	23.06	$N_2$
12.52	56.703	-14.45	26.98	$S_2$
16.68	21.883	-19.24	35.92	$N_3$
18.82	85.678	-21.72	40.54	$S_3$

Finalment vull remarcar que durant tot el treball estudiaré una única bicapa on els paràmetres de la cavitat i els de l'espaciador són els de les taules II.1 i II.2 respectivament.

### II.3.4 Dinàmica del dispositiu bicapa autònom.

En aquest apartat farem un breu estudi numèric del nostre dispositiu integrant el sistema d'EDO's. Un estudi més ampli i complet de la dinàmica del dispositiu bicapa realitzat pel nostre grup es pot trobar a les referències: [17, 37].

L'objectiu de la integració numèrica és resoldre el sistema d'equacions en derivades ordinàries descrit a la equació (II.34). La integració ha estat feta amb el mètode Runge-Kutta amb control de pas variable. La utilització d'un mètode de pas variable és necessari per tal d'assegurar la convergència de la solució.

A la figura (II.8) mostrem un diagrama de branques resultat de la integració del sistema determinat per les taules (II.1)-(II.2) en l'espai de les fases definit per  $\psi_i$ ,  $i=1,2$ , també hem representat la solució estacionària que és la mateixa que la de la figura (II.5). El càlcul s'ha realitzat amb tècniques de seguiment i localització d'òrbites periòdiques que permeten una resolució més fina. S'hi poden veure unes branques amb forma de forquilla que representen els valors màxim i mínim de l'amplitud d'oscil·lació dels cicles límits periòdics. En aquest espai l'evolució del sistema és essencialment la següent: el sistema comença estabilitzat en un punt fix node estable, en anar augmentant la fase d'entrada arribem a un punt on es produeix una bifurcació de Hopf. En aquest moment, tal i com hem vist a l'anàlisi lineal, el punt es desestabilitza i es convertint en un focus inestable, és aquí on apareix la primera branca  $LC_1$  corresponent a un cicle límit periòdic estable. Aquest cicle límit creix apropant-se als punts selles, i quan col·lideix amb un punt sella es produeix una bifurcació homoclínica. Aquesta bifurcació no apareix en l'estudi fet per a l'anàlisi lineal donat que aquest analitza l'estabilitat local dels punts, i les bifurcacions homoclíniques són bifurcacions globals. En el punt de la bifurcació existeix un cicle límit periòdic, que resulta de la tangència amb el punt sella. Aquest cicle límit és l'òrbita homoclínica, té un comportament biassimptòtic en les proximitats del punt sella i és estructuralment inestable [22]. En el capítol sisè trobarem una anàlisi més detallada d'aquesta bifurcació homoclínica.

Les bifurcacions homoclíniques no només impliquen la destrucció d'un cicle límit a través de la connexió amb el punt sella sinó que també poden tenir associada la creació de noves òrbites. Aquest és el cas de l'aparició dels cicles dobles  $LC_{2/3}$  i  $LC_{3/4}$  que apareixen a la figura II.8.

És interessant comprovar que els punts on apareix la bifurcació de Hopf coincideixen amb els obtinguts a l'anàlisi lineal, confirmant la validesa de la integració numèrica.

Podem distingir tres zones on la dinàmica del dispositiu modulad pot donar fenòmens diferents:

- Modulació al voltant d'un punt fix estable. En aquest cas la dinàmica és molt pobra, només es poden observar alguns acoblaments per a punts propers al Hopf [38].

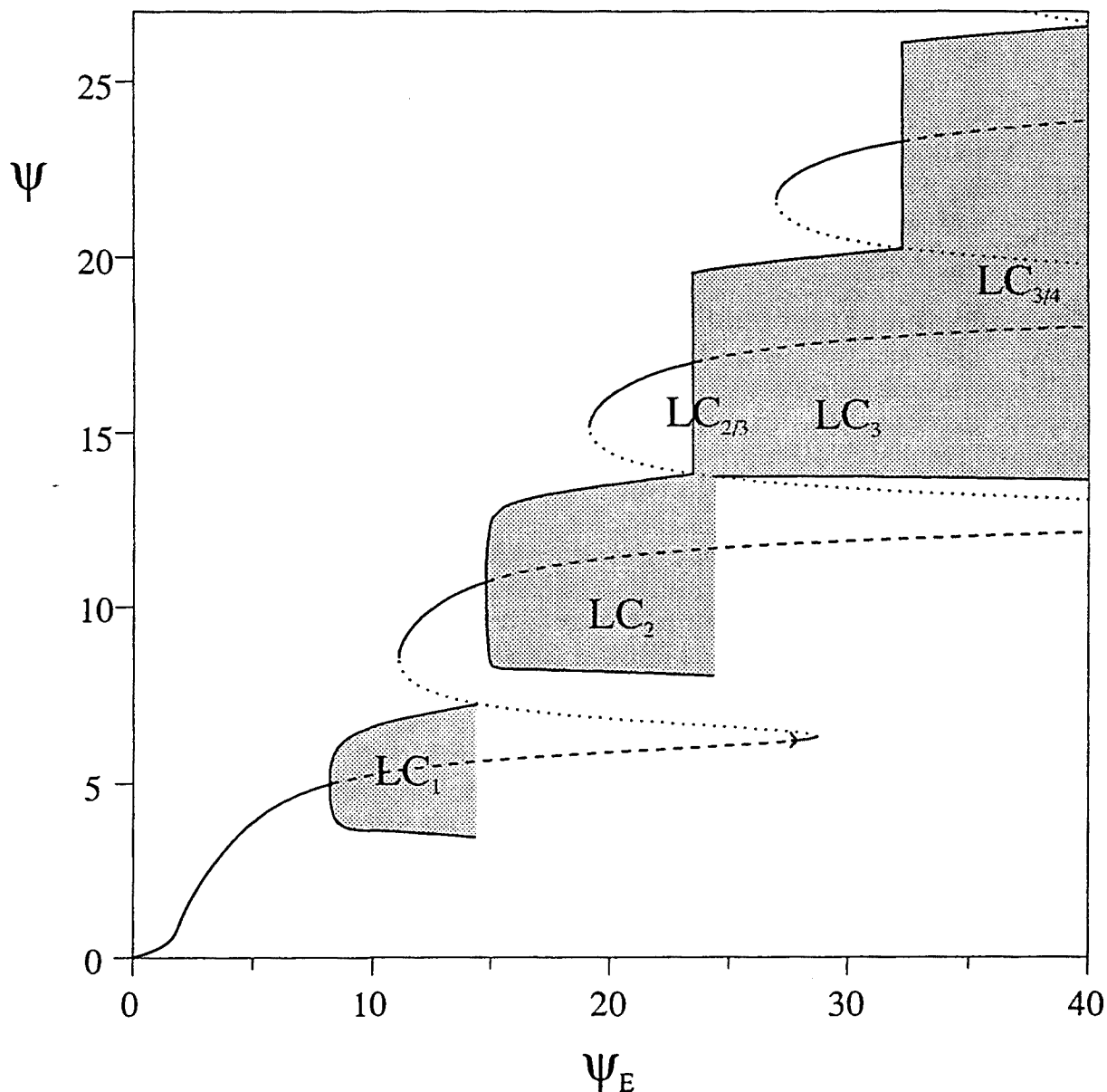


Fig II.8 Diagrama de branques per la bicapa definida a les Taules (II.1) i (II.2) obtingut per integració numèrica.  $LC_m$  indica les branques.

- Punts inestables propers a la bifurcació de Hopf. En aquest cas la solució del sistema correspon a un cicle límit pràcticament sinusoidal, la dinàmica resultant és molt rica i semblant a la del Brusselator forçat; en aquest cas el sistema exhibeix tots els fenòmens característics dels sistemes actius modulats.
- Punts inestables relativament propers a la bifurcació homoclínica. En aquest cas la dinàmica és molt complexa i sovintejada de bifurcacions globals amb l'òrbita sella resultant de modular la branca sella. Cal adonar-se que perquè es donin aquests fenòmens, on la branca inestable modulada influeix la solució



del sistema, no cal estar en punts molt propers a la bifurcació homoclínica del sistema autònom. A la pràctica només cal allunyar-se una mica del punt de Hopf per trobar aquestes bifurcacions globals.

La gran coincidència entre els resultats numèrics obtinguts a partir del sistema d'EDO's i els presentats al meu Treball de Recerca [38] obtinguts a partir del sistema de EDP's és un altre tret a subratllar. Això torna a corroborar la validesa de la reducció del sistema d'equacions.

## II.4 Sistema experimental

Els propers capítols estan dedicats als resultats experimentals i numèrics. En aquest apartat, descriuré el dispositiu i el muntatge experimentals utilitzat per obtenir aquests resultats. Val a dir que aquest muntatge serveix per realitzar experiments amb el dispositiu tant il·luminat amb un feix làser modulad com amb un d'intensitat fixa.

Al final d'aquest apartat presentaré uns resultats experimentals del dispositiu bicapa no modulad. Aquests resultats han estat realitzats per al mateix dispositiu que posteriorment he modulad. La presentació d'aquests resultats servirà per a il·lustrar les diferents situacions en què s'aplica la modulació.

### II.4.1 Dispositiu

El dispositiu que hem estudiat experimentalment apareix esquematitcament a la figura II.9. Aquest dispositiu es correspon amb el model teòric introduït en l'apartat II.1, un esquema del qual es troba a la figura II.2.

El dispositiu consisteix en un interferòmetre Fabry-Perot que conté, com a medi intracavitari, un sistema de dues capes de materials transparents a la llum emprada durant l'experiment i amb coeficients termo-òptics de signes oposats. Aquests materials actuen com a espaciadors de la cavitat pròpiament definida per dos miralls. El mirall posterior de la cavitat consisteix en un mirall dielèctric multicapa, dipositat sobre un substrat de vidre *crow*n d'1 mm. de gruix que, a banda d'actuar de suport de la cavitat, també treballarà com a dissipador tèrmic. El mirall anterior o d'entrada està format per una pel·lícula semitransparent metàl·lica (Ni-Cr: 80-20) de 6 nm obtinguda mitjançant evaporació tèrmica, sobre un cubre de microscopi de 140 µm de gruix. Aquesta làmina és parcialment absorbent i actua com a làmina divisora del feix de llum incident a l'entrada de l'interferòmetre.

La utilització d'aquesta tècnica per a la construcció d'aquest mirall ha estat possible gràcies al fet de disposar d'un equip de deposició de capes primes Leybold, model Univex 450.

Els paràmetres que caracteritzen la cavitat, mesurats per a ambdós miralls, són:  $R = 0.20$ ,  $R' = 0.07$  i  $T = 0.50$ , per a la làmina de cromel i  $R_M > 0.97$  i  $T_M \approx 0$  per al mirall dielèctric.

### Descripció del dispositiu opto-tèrmic biestable

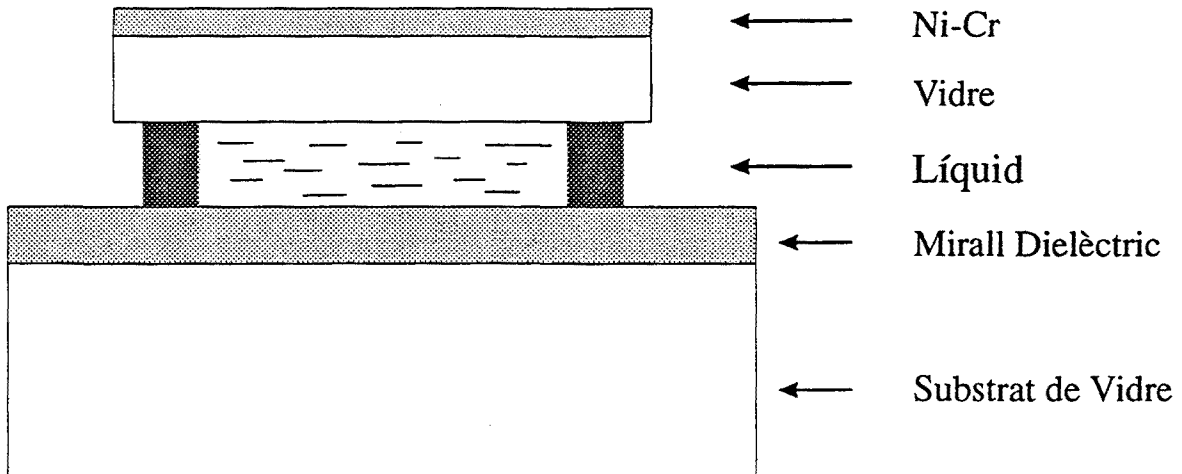


Fig II.9 Esquema del dispositiu utilitzat en el muntatge experimental.

Com hem dit abans, els miralls de l'interferòmetre estan espaciats per dues capes de materials transparents que tenen coeficients termo-òptics de signe contrari. Una de les capes és el cubre de vidre amb  $\eta \approx 9 \cdot 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$  que, de fet, correspon a una expansió tèrmica. L'altra capa està formada per  $60 \mu\text{m}$  d'oli vegetal que hem introduït per capil·laritat entre el cubre de vidre i el mirall posterior. El valor mesurat per a l'oli del coeficient termo-òptic és de  $\eta \approx -4 \cdot 10^{-4} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ .

#### II.4.2 Muntatge

El muntatge experimental apareix esquematitzat en la figura II.10. En general, el que farem és enregistrar uns senyals que són proporcionals a la llum d'entrada i reflectida pel dispositiu. Donat que el mirall posterior gairebé no transmet, recollirem la llum d'entrada i la llum reflectida independentment i mitjançant dos detectors idèntics  $D_1$  i  $D_2$ , consistents cadascun d'ells en un fotodiode tipus PIN de silici acoblat a un amplificador. El feix d'entrada prové d'un làser d' $\text{Ar}^+$  (marca Spectra-Physics, model 165) que emet en una de les seves línies (514.5 nm), i que és focalitzat sobre el dispositiu fins un diàmetre d'aproximadament 0.25 mm, mitjançant una lent de 100 mm de focal. La potència d'entrada es mesura a partir de la llum reflectida per la làmina semitransparent LS i s'envia sobre el detector  $D_2$  que ens mesurarà una potència proporcional a la incident. Per variar la potència d'entrada disposem d'un modulador-estabilitzador de llum (Electro-Optics Development, model Stabilaser), MS. Aquest aparell està constituït per un modulador electro-òptic CP, que és una cel·la Pockels, un cub polaritzador P i un detector. Aquest conjunt d'elements, amb l'oportuna electrònica de control, ens permeten estabilitzar i variar a voluntat (modular) la potència lluminosa que incidirà en el dispositiu, utilitzant un sistema realimentat que actua sobre el modulador electro-òptic. El controlador del modulador disposa d'una entrada de senyal analògic, que actua directament sobre la

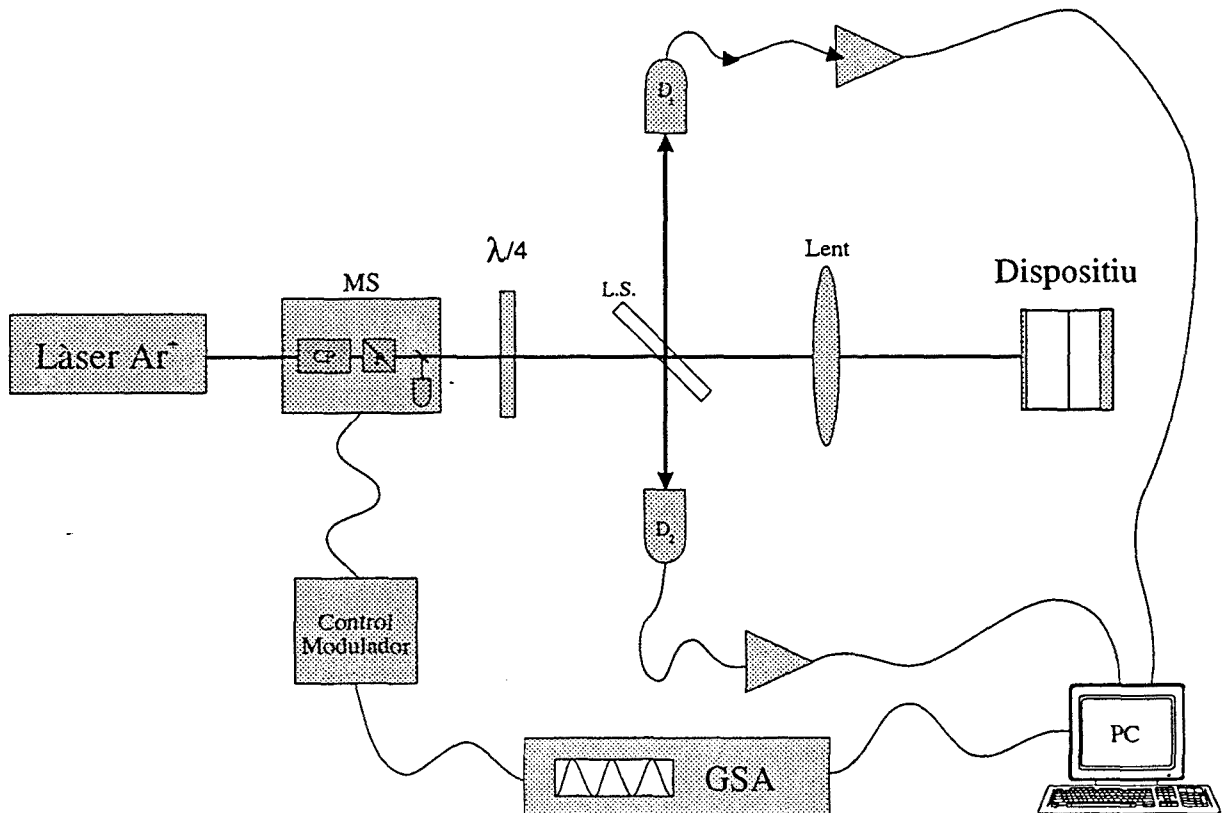


Fig. II.10 Esquema del muntatge experimental, on MS és el modulator estabilitzador de la llum làser d'entrada al dispositiu, LS és una làmina semitransparent,  $D_1$  i  $D_2$  són els detectors que ens permeten d'enregistrar la intensitat reflectida i incident respectivament i GSA és un generador de senyals analògics.

realimentació i fa que la intensitat lluminosa transmesa sigui directament proporcional al senyal aplicat.

Per altra banda, per poder recollir la llum de sortida del dispositiu sense que s'acobli amb el làser. Utilitzem una làmina  $\lambda/4$  oportunament disposada perquè amb el cub polaritzador del modulator formin un sistema desacoblador. La potència reflectida pel dispositiu es detecta mitjançant el detector  $D_1$  que recull part de la potència reflectida a la làmina LS. Una tarja convertidora analògica digital instal·lada en un ordinador personal AT 386, amb velocitat de rellotge 33 MHz, ens permet emmagatzemar els senyals que provenen dels detectors  $D_1$  i  $D_2$ .

La modulació es governa mitjançant el generador de senyal analògic (marca Standford Research Systems, model DS345) indicat a la figura com GSA que envia un senyal analògic sinusoidal al controlador modulator. Amb aquest generador podem controlar l'amplitud, l'offset i la freqüència del senyal sinusoidal. La resolució en l'amplitud i l'offset és de 0.01 Volts per a un rang de 0 a 5 Volts, la resolució en

freqüències és de  $1\mu\text{Hz}$  per a un rang de  $1\mu\text{Hz}$  a  $30.2\text{MHz}$ . Aquesta gran resolució en freqüències fa que per estudiar fenòmens que requereixin una alta resolució utilitzem com a paràmetre de control experimental la freqüència. A part d'això, aquest generador es pot programar per tal de fer escombrats en freqüència. Una altra característica és que aquest generador té una sortida amb un senyal quadrat de 0 a 5 Volts de sincronisme a la mateixa freqüència que el senyal sinusoidal, aquest senyal s'usa per a una captació de dades estroboscòpica, de manera que ens permet fer el mapa estroboscòpic en temps real i amb una gran resolució temporal.

Mitjançant l'ordinador, que està connectat al generador a través d'una RS-232, poden comandar el generador, bé sigui establint i variant l'amplitud, l'offset i la freqüència, bé programant-lo perquè faci un escombrat en freqüències.

La captació es fa de dues maneres. Una estroboscòpica, captant els punts amb la base de temps donada pel senyal de sincronisme del generador per obtenir d'aquesta manera el mapa estroboscòpic a temps real, cosa que ens permet fer diagrames de bifurcació. L'altra és captant punts amb la base de temps d'un rellotge intern del ordenador, de manera que ens permet captar evolucions a partir de les quals podem calcular atractors i transformades de Fourier.

Durant tot el treball presentaré tant les unitats que fan referència a la intensitat d'entrada com els que fan referència a la intensitat reflectida en Volts. Els valors d'intensitat d'entrada són el valor de la tensió aplicada al modulador estabilitzador i un volt és correspon a una intensitat del feix de làser de  $400\text{mWatts}$ . Els valors enregistrats per l'intensitat reflectida són els voltatges mesurats en els detectors, i l'equivalència és d'aproximadament  $300\text{ mWatts per Volt mesurat}$ .

### II.4.3 Comportament del sistema autònom.

En aquest apartat presentarem un breu estudi experimental de la dinàmica de la bicapa en absència de modulació externa. El dispositiu analitzat és el mateix que hem emprat per obtenir els resultats experimentals de la bicapa modulada en els propers capítols. Un estudi experimental més ampli, realitzat pel nostre grup, de la dinàmica del dispositiu bicapa il·luminat amb un feix de llum d'intensitat constant el podem trobar a les referències [17, 78].

A la figura II.11 tenim un registre experimental on il·lustrem el comportament del dispositiu autònom, és a dir, sense modulació externa. Aquest registre s'ha obtingut enregistrant 10 punts de l'oscil·lació per a cada potència d'entrada. Amb l'ordinador, i mitjançant una tarja conversora de senyal digital a analògica, enviem un senyal continu al controlador del modulador, de manera que el modulador estabilitzador estabilitza la intensitat de sortida del làser a una potència constant proporcional al senyal continu enviat per l'ordinador. L'escombrat en potència d'entrada es realitzem variant aquest senyal continu a intervals de temps iguals. Per a cada interval de temps, registrem 10 parells de punts corresponents a la potència d'entrada al dispositiu i reflectida pel dispositiu.

Els senyals analògics corresponents a la potència d'entrada i sortida són recollits per l'ordinador mitjançant dos conversors analògics digitals connectats a les sortides dels amplificadors. La resolució de les targetes conversores és de  $10^{-3}$  Volts.

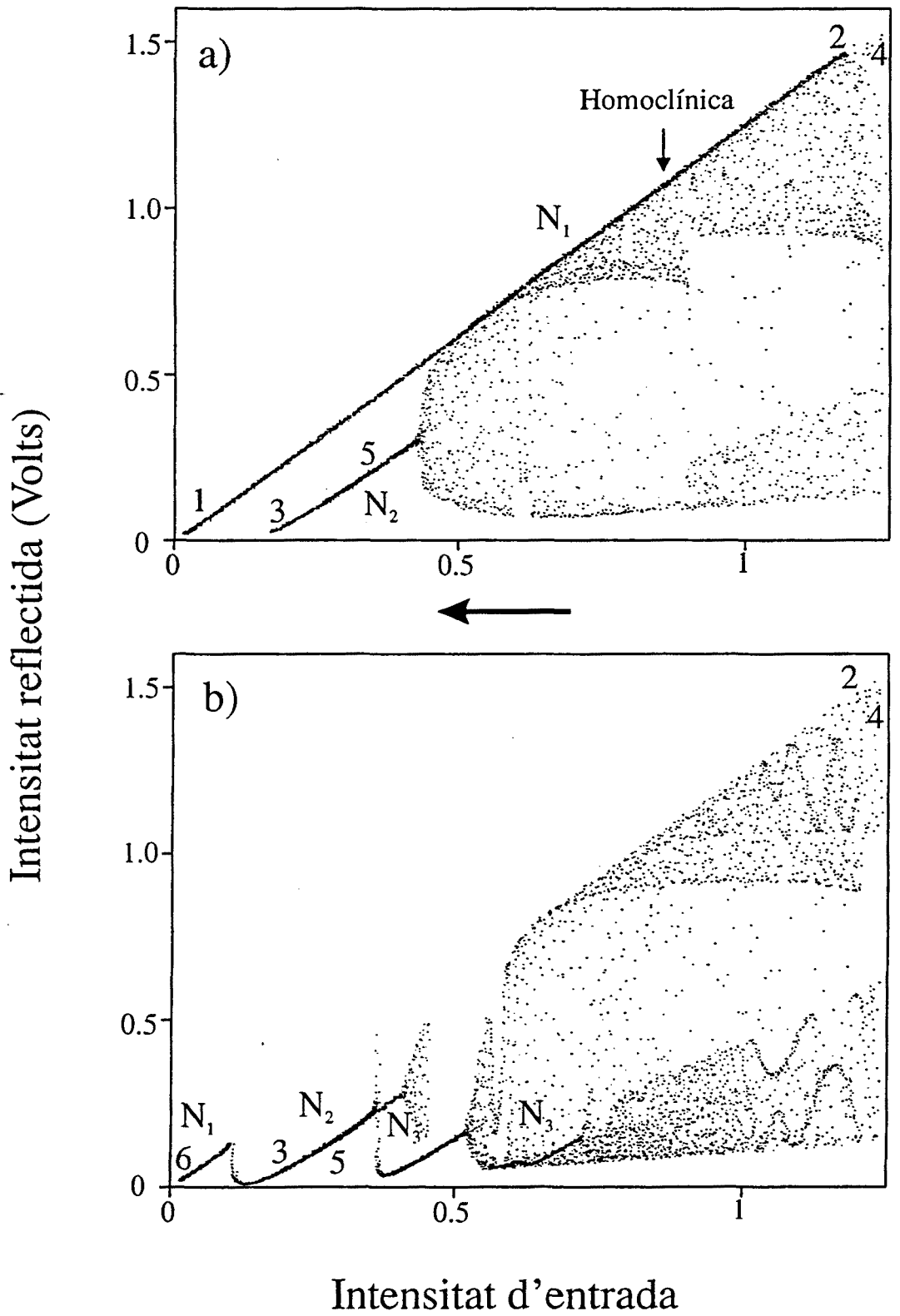


Fig II.11 Registres experimentals del sistema autònom. Les figures A i B obtingudes a partir de l'increment i decrement de la potència d'entrada.

El registre corresponent a la figura II.11.A correspon als punts enregistrats en incrementar la potència d'entrada al dispositiu. El registre II.11.B correspon als punts obtinguts en disminuir la potència d'entrada al dispositiu.

L'experiment fou realitzat de la següent manera: a partir al punt 1 corresponent a una potència d'entrada nul·la anem incrementant la potència del dispositiu, això es pot veure a la figura II.11.A. La línia contínua superior correspon a la primera branca  $N_1$ , al final d'aquesta línia el dispositiu arriba a una bifurcació sella node, en aquest punt el dispositiu salta la branca  $N_4$  on comença a oscil·lar. Incrementem la potència fins al punt 2, on comencem a disminuir-la. En aquest punt, on comencem a decrementar la potència, ens situem al registre de la figura II.11.B. Inicialment sortim de punt 2, on el dispositiu oscil·la a la branca  $N_4$ , disminuïm la potència fins arribar a la bifurcació de Hopf de la branca  $N_4$ , punt a partir de la qual el dispositiu deixa d'oscil·lar. A continuació es produeix una bifurcació sella node i saltem a la branca  $N_3$  on el dispositiu comença a oscil·lar. Posteriorment es produeix la bifurcació de Hopf de la branca  $N_3$ , seguit d'una nova bifurcació sella node saltant a la branca  $N_2$  on el dispositiu no oscil·la. Disminuïm la potència fins arribar al punt 3 on tornem a augmentar la potència, ens tornem, doncs, a situar a la figura II.11.A. Després d'un temps arribem a la bifurcació de Hopf de la branca  $N_2$  on el dispositiu comença a oscil·lar, posteriorment es produeix una bifurcació homoclínica que ens fa saltar a la branca  $N_3$  on el dispositiu oscil·la. Anem augmentant la potència fins arribar al punt 4, on tornem a disminuir la potència. Així doncs, tornem a anar a la figura II.11.B on el dispositiu està oscil·lant a la branca  $N_3$ . Després es produeix la bifurcació de Hopf per la branca  $N_3$  i la bifurcació sella node que ens fa saltar a la branca  $N_2$ , on decrementem la potència fins arribar al punt 6 on la potència es nul·la. Enmig, però, hi ha hagut una altra bifurcació sella node que ens ha fet saltar a la branca  $N_1$ .

En tots els resultats experimentals que exposaré en els propers capítols la modulació ha estat aplicada sempre a punts de la tercera branca  $N_2$ . La raó d'aquesta elecció és el fet que la posició del Hopf a la primera branca depèn de la Fase Inicial, cosa que no succeeix amb les altres branques. La fase inicial és a la pràctica difícil de controlar. Petites vibracions, corrents d'aire, etc. poden fer variar considerablement la fase inicial i, per tant, la posició relativa del Hopf a la primera branca i consegüentment el cicle límit; en canvi, les oscil·lacions a les branques superiors són molt més estables.



### III.- LA CASCADA SUBHARMÒNICA

A partir d'aquest, tots els capítols posteriors estaran dedicats a descriure numèricament i experimentalment fenòmens dinàmics del dispositiu bicapa modulada.

L'estructura d'aquests capítols serà la mateixa; començarem amb una breu introducció als conceptes més bàsics referents al fenomen objecte d'estudi i a continuació presentarem les evidències numèriques i experimentals obtingudes pel dispositiu bicapa modulada.

#### III.1 Introducció.

La cascada subharmònica és una de les rutes vers al caos més conegudes i estudiades. La primera referència històrica que tenim de l'estudi de sistemes caòtics correspon a un sistema que realitzava una cascada subharmònica. Al 1831 Faraday [39] va observar en una cubeta d'aigua que vibrava verticalment amb una freqüència  $\omega$  l'aparició d'ones que corresponien al subharmònic de freqüència  $\omega/2$ . Un sistema lineal tindria a la sortida la mateixa freqüència que a l'entrada. També podem comprovar fàcilment que en un sistema no lineal apareixen a la sortida els harmònics superiors  $2\omega$ ,  $3\omega$ , etc. En l'experiment, el que Faraday, va observar que per a un cert valor llindar apareixia el component subharmònic  $\omega/2$ , a banda dels harmònics superiors. A partir d'aquí, Faraday va constatar que aquest fenomen no tenia una explicació senzilla com la que té l'aparició d'harmònics superiors en sistemes no lineals. Ja en la nostra època, Keolian i col·laboradors [40] van repetir l'experiment de Faraday millorant-ne la resolució; en aquest cas no només van trobar el subharmònic  $1/2$  sinó que van trobar una seqüència de subharmònics  $1/2$ ,  $1/4$ ,  $1/12$ ,  $1/14$ ,  $1/16$  ..., cadascun amb els seu propi llindar. Aquesta seqüència finalitzava en un senyal amb un espectre continu corresponent a una solució caòtica.

La cascada subharmònica consisteix en l'aparició, a mesura que variem el paràmetre de control, d'una sèrie d'instabilitats subharmòniques que donen lloc a l'aparició de solucions de període  $2T$ ,  $4T$ ,  $8T$ , .... Cada etapa consisteix en una divisió per 2 de la freqüència, això s'anomena *seqüència de doblaments de període*.

S'han observat experimentalment cascades subharmòniques en una gran varietat de sistemes, per exemple, en dinàmica de fluids [41,42], reaccions químiques [43] i làsers [44].

#### III.2 Conceptes bàsics de la cascada subharmònica.

La teoria de Floquet permet de comprendre la inestabilitat que dóna lloc a l'aparició d'una solució de període doble. Considerem la següent funció contínua  $f$ :

$$f(x) = 4\mu x(1-x) \quad x \in [0;1] \quad (\text{III.1})$$



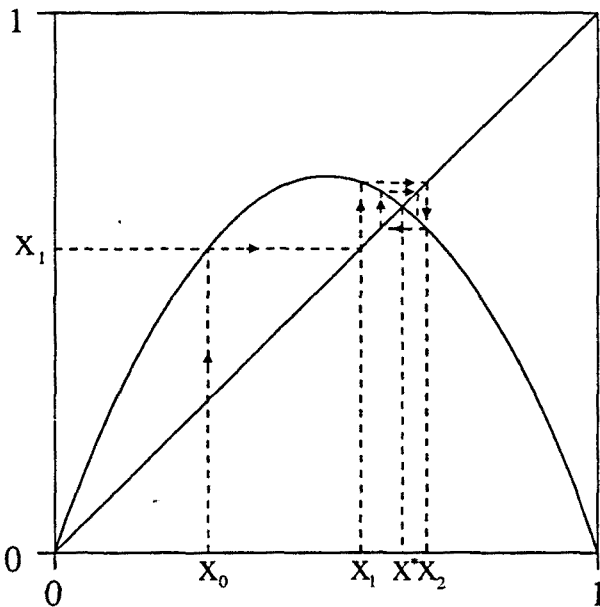


Fig III.1 Aplicació de primer retorn per  $\mu=0.7$  de la funció  $f(x)=4\mu x(1-x)$

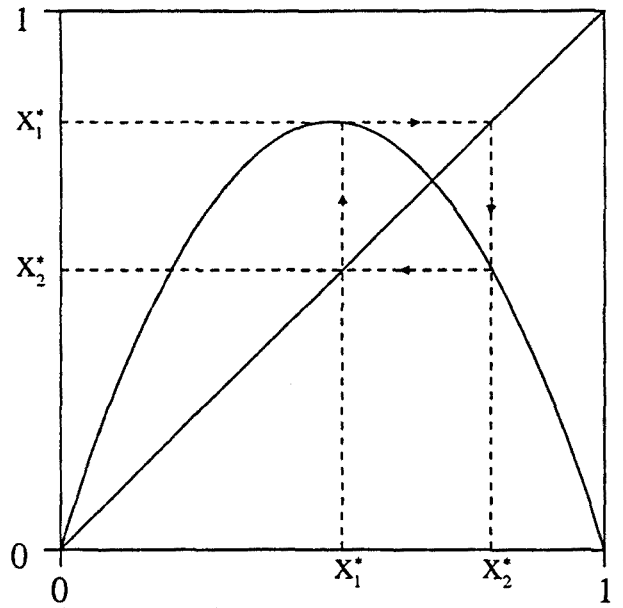


Fig. III.2 Aplicació de primer retorn per  $\mu=0.8$  de la funció  $f(x)=4\mu x(1-x)$ .

Per a  $\mu$  inferior o igual a 1, aquesta funció ens permet descriure l'aplicació de primer retorn definida per:

$$x_{k+1} = 4\mu x_k(1-x_k) = f(x_k) \tag{III.2}$$

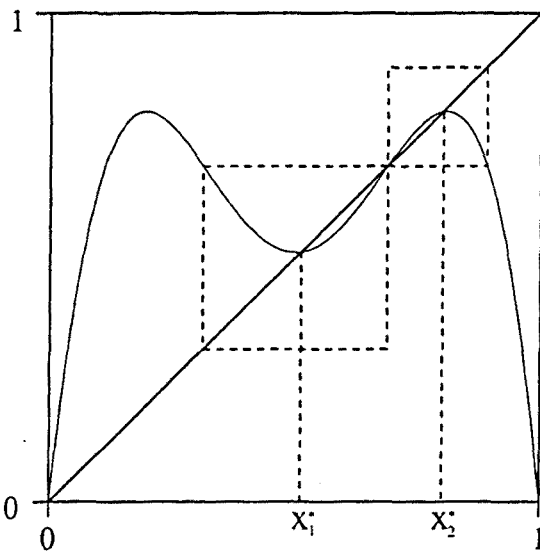


Fig III.3 Aplicació de segon retorn per  $\mu=0.8$  de la funció  $f(x)=4\mu x(1-x)$ .

la qual donat un punt qualsevol  $x_k$  del segment unitat li fa correspondre el punt  $x_{k+1}$ . La restricció que  $x$  pertanyi a l'interval  $[0;1]$  no suposa cap pèrdua de generalitat atès que es tracta d'un escalatge.

A la figura III.1 hem representat  $f$ . Aquesta funció es coneix com mapa logístic. Podem observar com, a partir d'un punt inicial qualsevol diferent de zero, les successives iteracions convergeixen cap al valor  $x^*$ . Aquest punt es troba a la intersecció de l'abcissa amb la corba.

Si sortim del punt  $x=0$ , que també es troba sobre l'abcissa, observem que les successives iteracions romanen a  $x=0$ , però que per a punts propers a  $x=0$  les successives iteracions divergeixen de  $x=0$ . En general, els punts d'intesecció de la

corba amb l'abcisa són els punts fixos del mapa, ja que en aquests punts és compleix que:  $f(x)=x$ . Recordem del capítol I, que els punts fixos del mapa corresponen a òrbites periòdiques del flux continu. L'estabilitat d'un punt fix en un mapa de primer retorn ve donada pel pendent de l'aplicació de primer retorn en aquest punt. Si el valor absolut d'aquest pendent és inferior a 1, el punt és estable; i si és superior a 1, el punt és inestable. El valor d'aquest pendent coincideix amb el valor d'un multiplicador de Floquet de l'òrbita periòdica associada al punt fix.

Si fixem  $\mu=0.8$ , observem que el punt  $x^*$  esdevé inestable. En aquest cas la construcció gràfica III.2 ens mostra que tenim dos punts nous  $x_1^*$  i  $x_2^*$ , tals que  $x_2^*=f(x_1^*)$ ,  $x_1^*=f(x_2^*)$ . És a dir la iteració fa passar alternativament d'un punt a l'altre. Aquest dos punts constitueixen una òrbita periòdica i el seu període és el doble de  $x^*$ . Tal i com es pot veure a la figura III.3, aquests dos nous punts són punts fixos de l'aplicació  $g(x)=f(f(x))$ . La funció  $g(x)$  és l'aplicació de segon retorn. Podem passar de la situació de la figura III.1 a la III.2 contínuament variant el paràmetre de control  $\mu$ . El valor llindar de la bifurcació correspon a  $\mu=0.75$  i, per a aquest valor de  $\mu$ , el pendent de l'aplicació de primer retorn al punt  $x^*$  és igual a -1. Per sota/sobre d'aquest valor és superior/inferior a -1.

Per valors superiors de  $\mu$  la corba corresponent al segon retorn es deforma progressivament de manera que els punts fixos  $x_1^*$  i  $x_2^*$  perden la seva estabilitat. Considerem el quadrat que envolta a la solució  $x_2^*$  a la figura III.3. Podem observar que la forma de l'aplicació del mapa és semblant a la de la figura III.1. D'aquesta manera en augmentar  $\mu$  ens trobem amb una situació semblant a la que teniem per al mapa de primer retorn, de manera que en desestabilitzar-se la solució de període doble apareix un nou punt fix per l'aplicació de quart retorn amb període 4.

En anar augmentant  $\mu$ , aquest fenomen es repeteix fins a l'infinit seguint una cascada de bifurcacions, cadascuna acompanyada d'un doblament de període associat a una inestabilitat subharmònica. Una propietat remarcable dels valors de  $\mu$  pels que es donen les bifurcacions és que formen una sèrie que convergeix a un punt d'acumulació  $\mu_\infty=0.892486418\dots$

S'ha observat que s'acompleix la següent llei pels valors de  $\mu$  en convergir vers  $\mu_\infty$  [45]:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\mu_i - \mu_{i-1}}{\mu_{i+1} - \mu_i} = \delta \quad \text{(III.3)}$$

S'ha demostrat [46,47] que aquest factor  $\delta$  és un nombre universal per als mapes unimodals, és a dir, que no depèn de la funció  $f$ , i dóna  $\delta=4.6692016091029909$ .

Paralel·lament existeix un segon nombre universal per als mapes unimodals  $\alpha=2.50290787509589284$  que dóna el ritme de convergència de les distàncies al voltant de l'eix de les ordenades de la figura III.4.

La figura III.4 representa el diagrama de bifurcació de la funció  $f$ . Aquest diagrama s'obté representant la resposta assintòtica de la funció  $f$  per a diferents valors del paràmetre de control  $\mu$ . En aquest gràfic podem visualitzar amb claredat

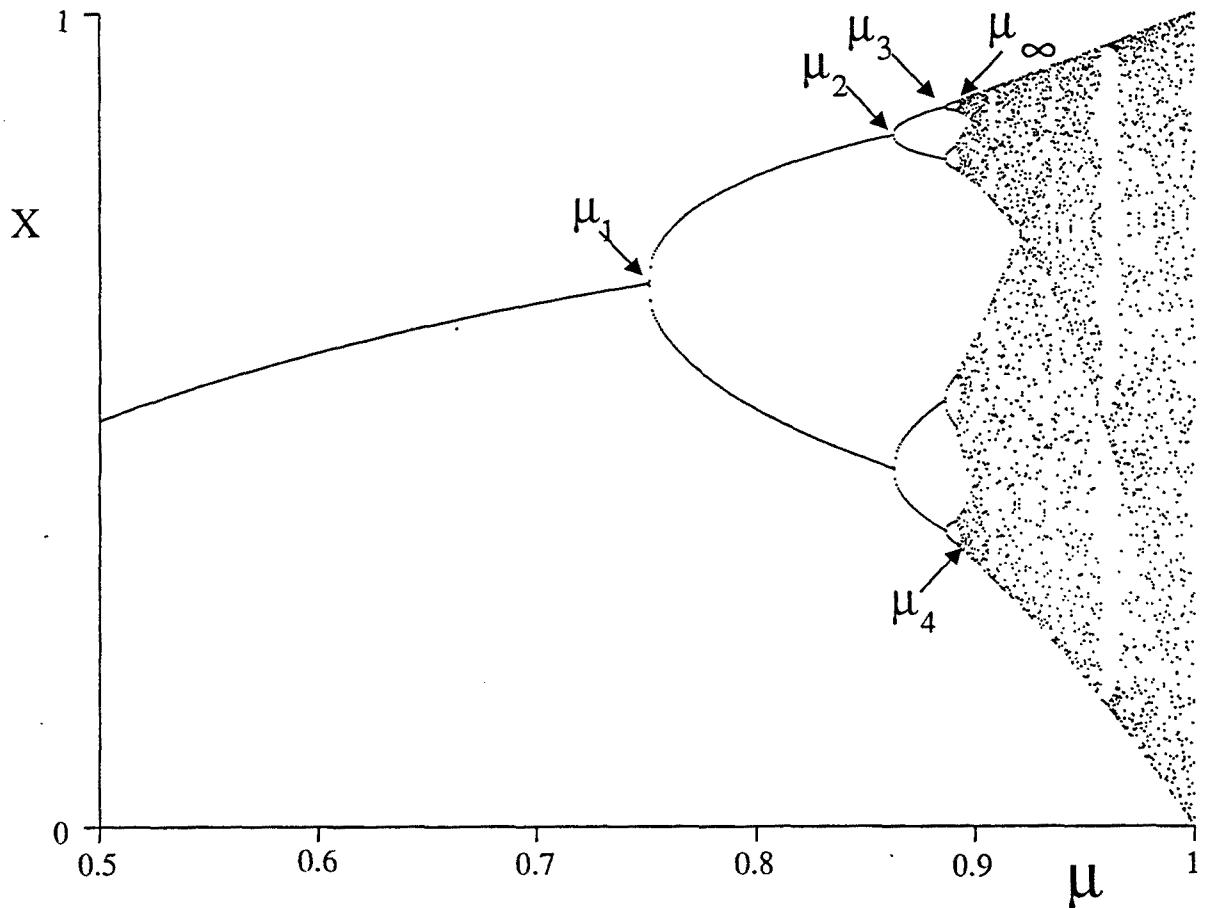


Fig III.4 Diagrama de Bifurcació del Mapa Logístic.

les primeres bifurcacions subharmòniques amb el corresponent doblament de període. Cada cop que anem a bifurcacions més properes a  $\mu_\infty$ , aquestes apareixen més juntes fins a arribar a ser indistingibles. També podem observar a l'altre costat de  $\mu_\infty$  zones fosques i clares, i en particular poden distingir com una d'aquestes zones més clares és una finestra periòdica de període tres.

### III.2.1 Resposta caòtica.

A mesura que ens apropem per l'esquerra a  $\mu_\infty$  trobem atractors amb període  $2^i$  amb  $i \rightarrow \infty$ . Els temps necessaris per a observar el caràcter periòdic d'aquests atractors augmenta amb  $i$  fins a esdevenir infinit al punt d'acumulació. Passat aquest punt, l'estudi numèric revela una dinàmica molt complexa, on es veuen zones més o menys atapeïdes de punts, on amb una anàlisi més fina s'observa l'existència tant de solucions caòtiques com de periòdiques.

Per observar dues de les característiques importants de la resposta caòtica, que són la dependència crítica en les condicions inicials i la no inversibilitat del mapa, només cal analitzar la funció  $f$  per a  $\mu$  proper a 1. Si tenim un punt a l'interval  $[0; 1/2]$

una iteració ens porta al interval final  $[0;1]$ . Podem dir que en una iteració el mapa dilata l'interval  $[0;1/2]$ , projectant-lo en la totalitat de l'interval  $[0;1]$ , idènticament passa en iterar un cop l'interval  $[1/2;1]$ . D'aquí es pot deduir que en una iteració hi ha dues operacions, una dilatant que duplica l'interval inicial, i una contractant imposada pel confinament a l'interval  $[0;1]$ . Aquesta dilatació com ja hem vist al capítol I, comporta la dependència crítica de les condicions inicials.

També podem deduir fàcilment que donat un punt, aquest té dues antiimatges, una en l'interval  $[0;1/2]$  i l'altra a l'interval  $[1/2;1]$ , és a dir, el mapa no és invertible.

Donada aquesta dependència crítica en les condicions inicials, per poder predir amb exactitud la solució del sistema després d'una llarga iteració, cal conèixer amb una exactitud infinita les condicions inicials, cosa que a la pràctica és impossible. Aquest fet explica perquè en solucions càdtiques l'evolució és totalment imprevisible tot i que el sistema és determinista.

### III.2.2 La cascada inversa.

Donada la naturalesa determinista del sistema la resposta del sistema per a  $\mu > \mu_\infty$ , tot i ser molt complexa, té un cert ordre. Aquest ordre es pot veure en dos detalls importants: l'existència de infinites regions periòdiques i l'existència de clapes de punts enmig de zones càdtiques. De fet, per a un valor donat  $\mu$ , podem observar segments amb punts i segments buits, és a dir, que la secció corresponent a l'atractor càdtic no omple tot l'interval  $[0;1]$ , sinó que omple un nombre finit de segments dins l'interval  $[0;1]$ . Més concretament, existeixen per a  $\mu > \mu_\infty$   $2^i$  intervals disjunts per a la secció del atractors càdtics, on  $i$  pot ser qualsevol número enter positiu. A mesura que ens acostem a  $\mu_\infty$  per la dreta, el nombre d'intervals tendeix a infinit, i els punts on es dupliquen els intervals també formen una sèrie convergent vers  $\mu_\infty$  i compleixen la relació III.3 amb el mateix valor de  $\delta$ . Així doncs, tot i que el comportament del sistema dins d'aquests segments és càdtic, ens torna a aparèixer una estructura ordenada. Aquest fenomen s'anomena *cascada inversa*.

En els punts on aquests intervals es dupliquen es dona una bifurcació global; allà on una de les òrbites inestables resultant de la cascada directa fa tangència amb l'atractor càdtic, aquest desapareix i apareix un nou atractor càdtic. Aquestes bifurcacions globals s'anomenen *crisis internes*. Una discussió més d'aquestes bifurcacions es dona a l'últim apartat d'aquest capítol on es presenta un exemple detallat d'aquesta bifurcació per al cas de la bicapa modulada.

### III.3 Seqüència de doblaments de període en la bicapa modulada

A la figura III.5 representem una cascada subharmònica que té lloc al dispositiu bicapa modulada. A la figura s'observa com les successives inestabilitats donen lloc a l'aparició d'òrbites de període doble. La gràfica s'ha calculat numèricament amb els següents paràmetres:  $\psi_{EB}=14.8$  i  $\psi_{EM}=8.0$ . La modulació s'aplica sobre una òrbita periòdica que apareix en una bifurcació de Hopf d'un punt estacionari de la tercera branca del dispositiu bicapa no autònom. Hem utilitzant com paràmetre de control  $\omega_E/\omega_0$ . L'interval de variació del paràmetre de control és  $[2.2-2.8]$ . A l'eix de les abscises representem el paràmetre de control  $\omega_E/\omega_0$  i a l'eix de les ordenades representem les

seccions estroboscòpiques corresponents a les diferents òrbites periòdiques. Per a  $\omega_E/\omega_0=2.2$  observem que apareixen dues branques. Cal però anar amb compte amb la interpretació del mapa; aquestes dues branques no indiquen que ja hagi aparegut el primer subharmònic de la seqüència de doblaments de període, sinó que són resultants de calcular el mapa estroboscòpic per a una òrbita que oscil·la amb un període que és igual al doble del període la modulació externa. Aquesta òrbita periòdica apareix arran de l'acoblament no lineal entre la modulació externa i el dispositiu bicapa. Una discussió àmplia d'aquest acoblament es dona al capítol V.

La figura III.5 s'ha calculat utilitzant tècniques de seguiment i localització d'òrbites periòdiques [29]. Aquestes tècniques ens permeten de representar tant les solucions periòdiques estables (línia contínua) com les no estables (línia discontinua). Els punts indicats per  $\mu_i$ ,  $i=1,\dots,4$  són els valors del paràmetre de control perquè es produeixen les bifurcacions subharmòniques. Per exemple,  $\mu_1$  correspon al valor de  $\omega_E/\omega_0$  per al que és produeix la primera bifurcació subharmònica. En aquest punt

### Diagrama de Bifurcació numèric

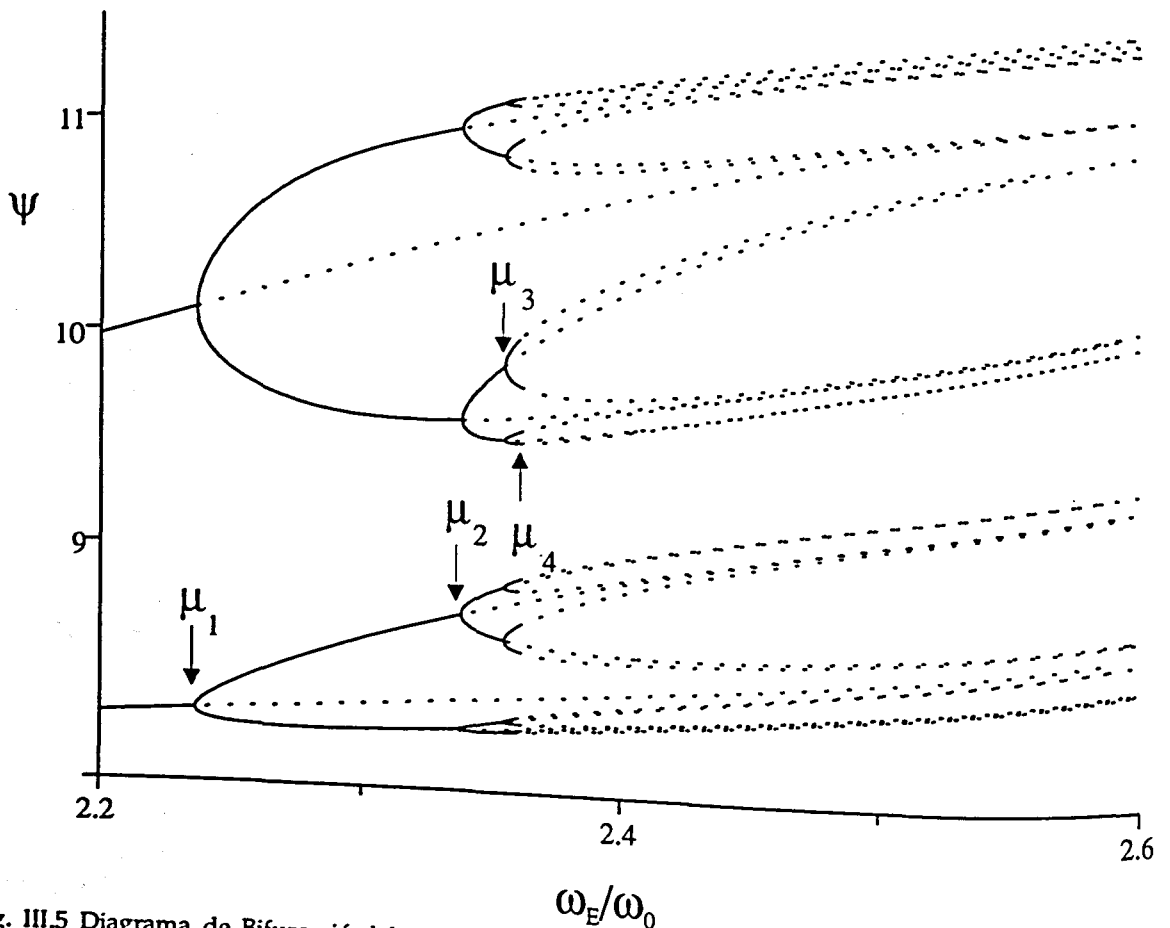


Fig. III.5 Diagrama de Bifurcació del dispositiu bicapa calculat amb tècniques de seguiment d'òrbites periòdiques. Línia contínua/discontinua òrbites estables/selles.

l'òrbita periòdica s'instabilitza i n'apareix una nova òrbita estable de període doble a l'anterior, és a dir, quatre cops el període de la modulació externa. D'aquí que apareixin quatre noves branques contínues al diagrama de bifurcació. Aquestes quatre branques són el primer subharmònic de la cascada directa. La instabilització subharmònica es produeix quan un dels multiplicadors de Floquet de l'òrbita estable passa a tenir un valor inferior a -1, de manera que, la òrbita estable es converteix en una òrbita sella. Per això les dues branques, en el punt de la bifurcació  $\mu_1$ , passen de tenir un traç contínu a tenir un traç discontinú. Només hem representat les quatre primeres bifurcacions, atès que no hi ha prou resolució gràfica per il·lustrar amb claredat més doblaments.

A la figura III.6 representem el mateix diagrama de bifurcació, però en aquest cas en lloc de fer un seguiment d'òrbites periòdiques representem, per a cada valor del la freqüència externa, vint punts corresponents a la secció estroboscòpica de l'evolució del sistema. Per tal d'eliminar transitoris deixem evolucionar el sistema un temps llarg, d'aquesta manera només representem solucions asimptòticament estables.

Diagrama de bifurcació numèric

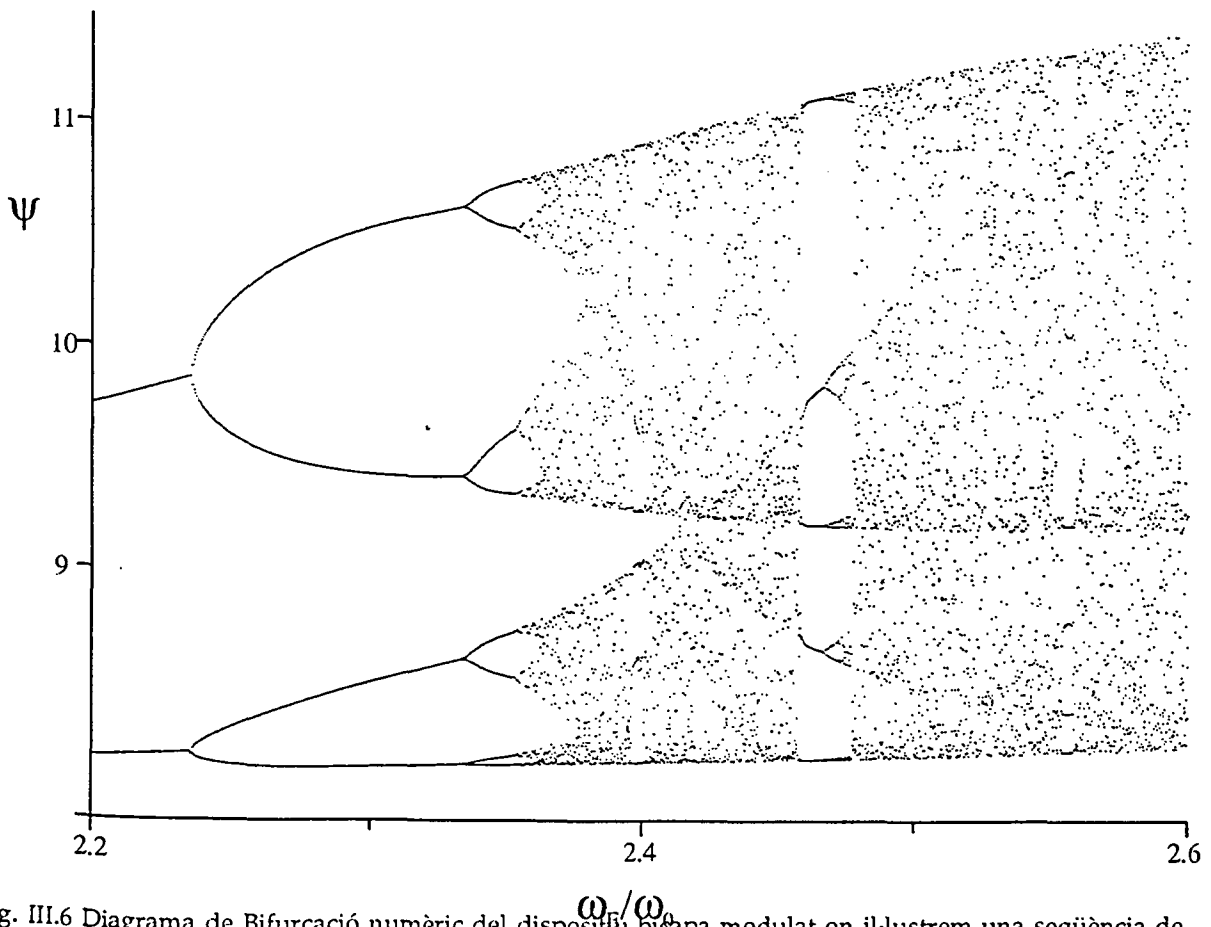


Fig. III.6 Diagrama de Bifurcació numèric del dispositiu bicapa modulad on il·lustrem una seqüència de doblaments de període.

En aquest diagrama podem observar, a part, de la seqüència de doblaments de període, una certa estructura a la dreta de  $\mu_{\infty}$ . Aquesta estructura és el resultat de l'existència d'una infinitat de solucions caòtiques i periòdiques.

Tal i com també succeïa en el mapa logístic, dins de la regió situada a la dreta de  $\mu_{\infty}$  no només existeixen atractors caòtics sinó que existeixen infinites òrbites periòdiques. Les òrbites periòdiques neixen a partir d'una bifurcació sella node amb un període  $p$ , i desapareixen després d'una seqüència de doblaments de període amb període  $2p^i$  ( $i=1, \dots, \infty$ ). Cadascuna d'aquestes finestres periòdiques existeix en un interval del paràmetre de control  $\mu$ . La longitud d'aquest interval determina l'amplada de la finestra. Aquestes amplades solen ser molt petites, de manera que la majoria de les finestres periòdiques són pràcticament indiscernibles. Per aquesta raó la regió situada a la dreta de  $\mu_{\infty}$  sembla que sigui gairebé totalment caòtica.

De tota manera, dins d'aquesta regió es pot observar molt bé l'existència d'una finestra de període tres al diagrama de bifurcació del mapa logístic (fig III.4) i una finestra de període cinc al diagrama de bifurcació de la figura III.6. Per a tots els mapes unimodals, i en concret pel mapa logístic, existeix una única seqüència que determina la periodicitat i l'ordre en què apareixen aquestes finestres. A aquesta seqüència d'aparició de les finestres periòdiques se l'anomena *Seqüència Universal* o *MSS* [31].

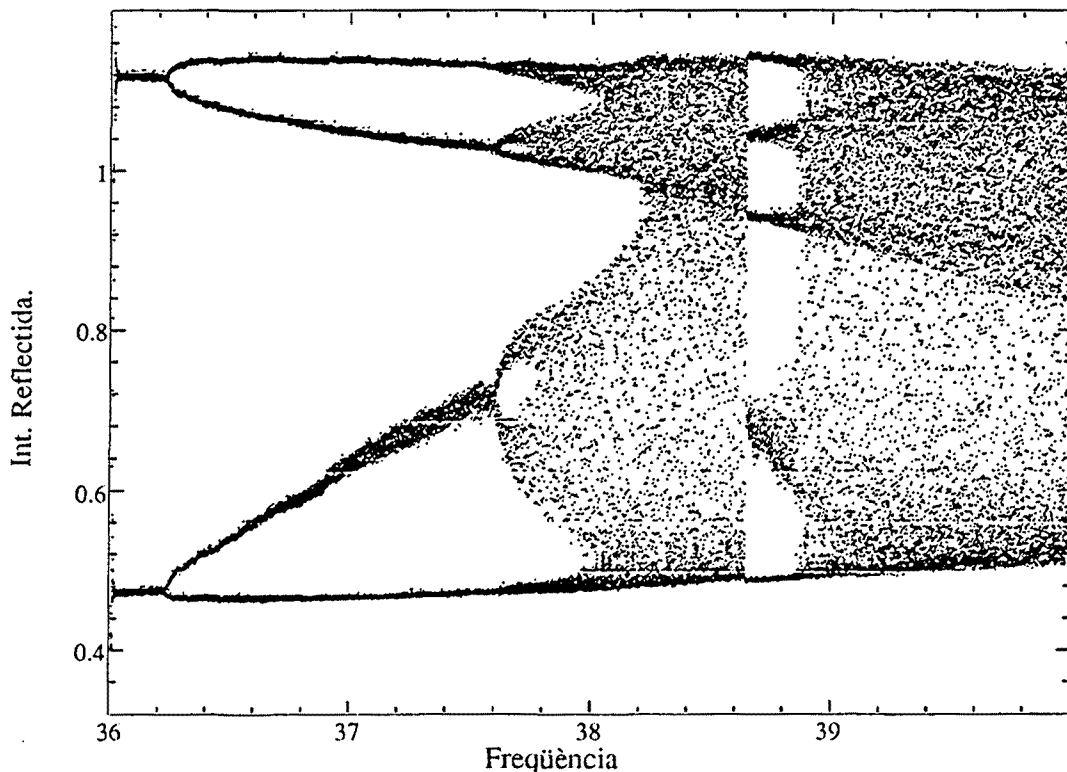


Fig III.7 Diagrama de Bifurcació experimental del dispositiu bicapa modulad on s'observa una seqüència de doblaments de període.

L'aparició d'aquesta finestra de període cinc en el dispositiu bicapa modulada, en comptes d'una finestra de període tres, sembla en principi, que està en contradicció amb la Seqüència Universal. Aquesta contradicció no existeix. Recordem que la figura III.6 s'ha obtingut a partir de representar la secció estroboscòpica, de manera que l'aparició de cinc punts indica que existeix una òrbita periòdica de període igual a cinc vegades el període de la modulació externa. Si analitzem l'evolució de la fase total en un període complet de la oscil·lació, observem que existeixen tres pics, és a dir, que la periodicitat de la evolució de  $\psi$  és 3. Aquesta confusió és resultat del fet que el mapa estroboscòpic mesura dins un període complet la periodicitat de l'evolució de  $\psi_E$  en lloc de fer-ho de l'evolució  $\psi$ , i la seqüència universal estableix la periodicitat en l'evolució de  $\psi$ . Tot i aquesta confusió, hem preferit representar el mapa estroboscòpic per poder tenir una comparació directa amb els resultats experimentals. De tota manera en el capítol V presentaré una discussió més àmplia de la problemàtica relacionada amb els mapes estroboscòpics.

A la regió situada entre  $\mu_\infty$  i la finestra de període 5 es pot observar el fenomen de la cascada inversa. Concretament es pot veure com es produeix de forma contínua la unió dels diferents intervals ocupats per les seccions estroboscòpiques corresponents a les evolucions càdtiques, quedant cada cop el diagrama de bifurcació més atapeït de punts. La cascada inversa s'acaba en el punt on els dos darrers intervals s'uneixen per formar un únic interval. També s'observen línies fosques que ressalten l'esquelet intrínsec del diagrama. A aquesta zona a la dreta de  $\mu_\infty$  de vegades se l'anomena zona càdtica. Ara bé, cal anar en compte amb aquesta nomenclatura, ja que vol dir que sigui una zona on només hi ha solucions càdtiques, sinó que vol dir que és una zona on podem trobar solucions càdtiques, per exemple, tal com ja hem vist en aquest cas, dins la zona càdtica existeixen infinites solucions periòdiques.

A la figura III.7 hem representat un diagrama de bifurcació experimental on il·lustrem una seqüència de doblaments de període. El registre s'ha obtingut modulant la bicapa experimental descrita al capítol II amb una intensitat de modulació de 0.725 Volts i una intensitat de base de 1.14 Volts. El paràmetre de control és la freqüència de la modulació externa, que hem variat de 36 fins a 40 Hz. A l'eix de les ordenades hem representat la secció estroboscòpica de la intensitat reflectida. Una primera comparació entre la simulació numèrica (fig. III.6) i el registre experimental (fig. III.7) evidencia una gran coincidència entre ambdós resultats.

A la figura III.7 podem observar l'aparició de branques corresponents als períodes  $4T_E$  i  $8T_E$ , la finestra de període  $5T_E$  enmig de la zona càdtica, les bifurcacions globals on les bandes càdtiques s'ajunten i fins i tot hi podem observar una certa estructura de línies fosques que evidencien l'esquelet intern de la bifurcació.

Per tal d'analitzar més detalladament la cascada directa, tot seguit estudiaré les evolucions temporals numèriques i experimentals de vuit casos inclosos en els diagrames de bifurcació III.6 i III.7, respectivament.

A la figura III.8 he representat les evolucions numèriques de la fase reflectida en funció del temps per vuit casos diferents. Els vuit casos s'han calculat variant la freqüència de la modulació externa. Concretament els valor de  $\omega_E/\omega_0$  són els següents: a) 2.2, b) 2.26, c) 2.35, d) 2.366, e) 2.39, f) 2.44, g) 2.6 i h) 2.61. Entre la gràfica III.8.a i



Evolucions Temporals numèriques

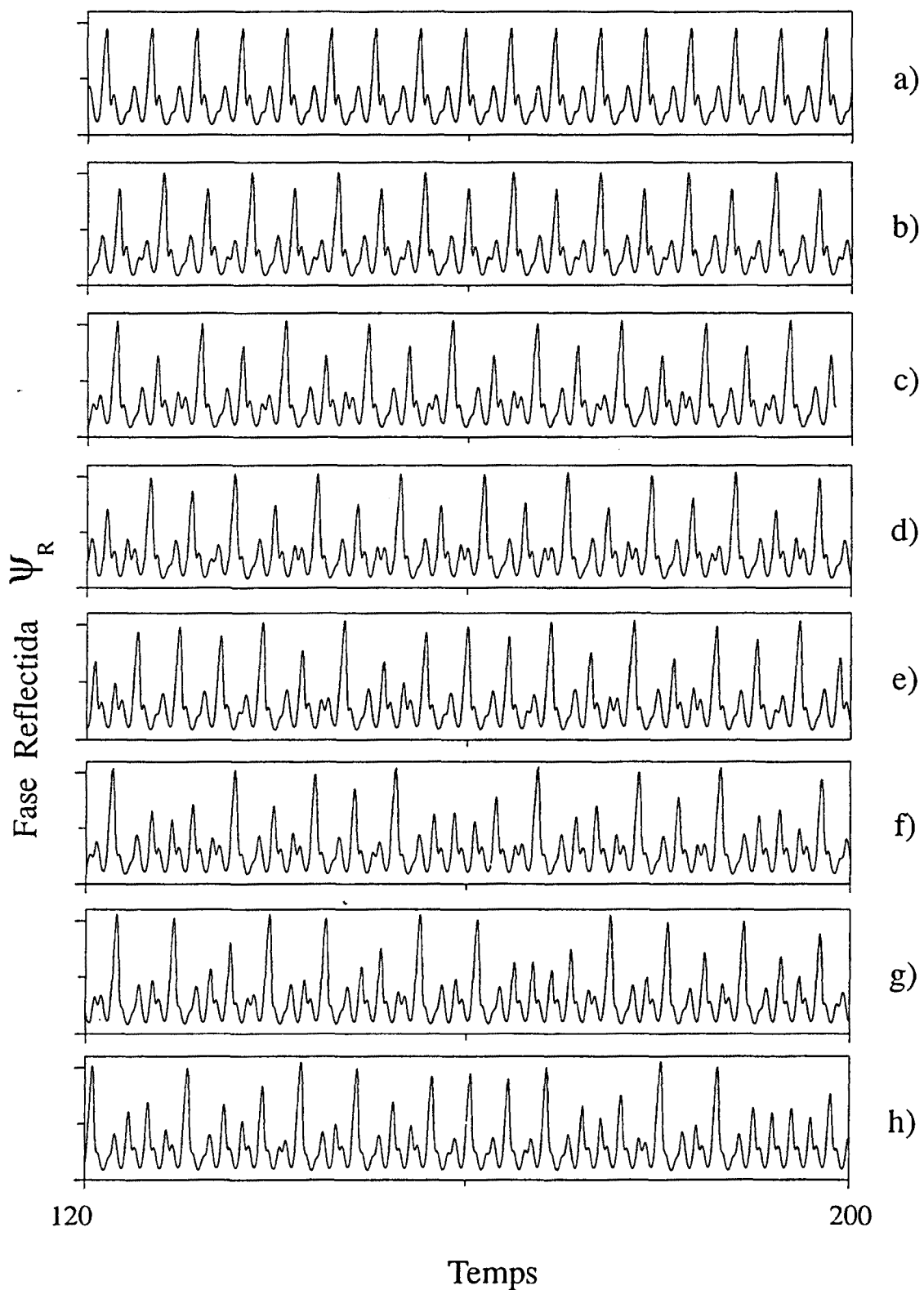


Fig III.8 Evolucions temporals numèriques corresponents a vuit valors diferents de la freqüència de la modulació de la figura III.6.

III.8.b hi ha hagut un doblament de període. Si analitzéssim de manera contínua la bifurcació, s'observaria com els pics d'un període canvien progressivament la seva alçada respecte els pics del següent període. Per tant el senyal ja no es repeteix a cada període sinó que es repeteixen a cada dos períodes, resultant així el doblament de període. Per exemple, a la figura III.8.a un període està format per dos pics, a la figura III.8.b un període està format per quatre pics. D'aquests quatre pics consecutius, els dos primers pics són molt semblants als dos següents, la diferència més rellevant és l'alçada dels màxims, diferència que es redueix progressivament en anar apropant-nos al punt de bifurcació. Entre les gràfiques III.8.b i III.8.c s'ha produït un nou doblament de període, és a dir, el senyal es repeteix cada 8 pics. En aquests cas el període és igual a  $8T_E$ .

L'evolució de la figura III.8.d, tot i no ser periòdica, és molt semblant a la de la figura III.8.c. Podem observar grups de pics que tenen una forma que recorda a un període complet de l'evolució de la figura III.8.c. Aquest senyal correspon a una banda caòtica  $8I$  de la cascada inversa. Les bandes caòtiques tenen una evolució semblant a un estat periòdic, és a dir, semblen oscil·lacions periòdiques sorolloses. Aquesta apariència periòdica és resultat del fenomen asimptòtic present en les crisis internes que es donen a la cascada inversa. Al darrer apartat d'aquest capítol s'explica aquest fenomen asimptòtic. El senyal de la figura III.8.e correspon a una banda caòtica  $2I$  i podem observar una forma en les oscil·lacions semblant a la de la figura III.8.b. Les figures III.8.f - III.8.h també són evolucions caòtiques. Aquestes tres últimes evolucions corresponen a bandes caòtiques contínues, és a dir, són posteriors a la cascada inversa. Els dos darrers casos (III.8.g i III.9.f) es troben aprop de la bifurcació sella node que dona lloc a l'aparició de la finestra de període tres ( $3T_E$ ). Aquesta bifurcació sella node serà analitzada en detall al proper capítol.

Cal parar atenció a les afirmacions anteriors. No hi ha prou resolució a partir de la forma de les evolucions temporals d'uns quants períodes per poder afirmar que aquests senyals són periòdics i encara molt menys caòtics. Per poder efectuar aquestes afirmacions ens hem basat en els resultats representats a les figures III.9 i III.10 on hem realitzat les transformades de Fourier de 32.768 punts i les seccions de primer retorn estroboscòpic de 500 períodes de la modulació externa.

A la figura III.9 hem representat les transformades de Fourier corresponents als vuit casos anteriors. Podem distingir clarament les tres primeres transformades corresponents a solucions periòdiques, de les cinc restants corresponents a evolucions caòtiques. La figura III.9.a correspon a una òrbita periòdica amb període  $2T_E$ , és a dir, correspon a una solució periòdica amb període doble al de la modulació externa. A la figura III.9.b apareixen els harmònics corresponents a  $\omega_E/4$ , és a dir, tenim una solució periòdica de període  $4T_E$ . A la figura III.9.c apareixen els harmònics corresponents a  $\omega_E/8$ . La figura III.9.d té una forma molt semblant a la de la figura III.9.c, però es pot apreciar que al voltant dels pics corresponents al harmònic  $\omega_E/8$  ens apareixen unes petites bandes contínues que mostren la naturalesa caòtica del senyal. Aquesta component caòtica és molt petita, és a dir, el senyal és molt poc estrany, és pràcticament periòdic. L'estructura de pics de III.9.d il·lustra que existeix en el senyal un component periòdic predominant de període  $8T_E$ . L'existència d'aquest component periòdic evidencia l'existència d'un cert ordre dins de l'evolució

Transformades de Fourier numèriques

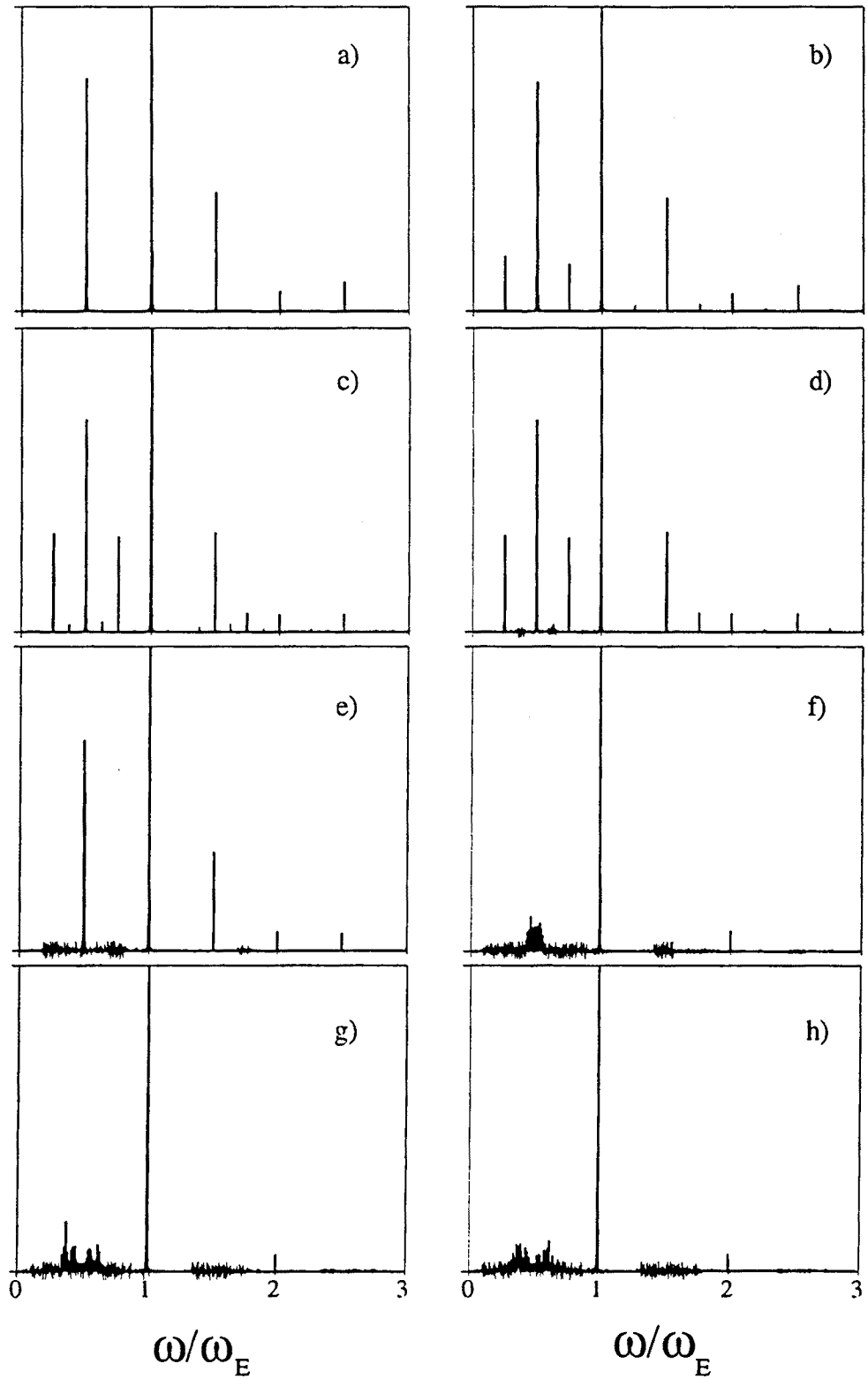


Fig. III.9 Transformades de Fourier corresponents als 8 casos numèrics de la figura III.8

Seccions numèriques

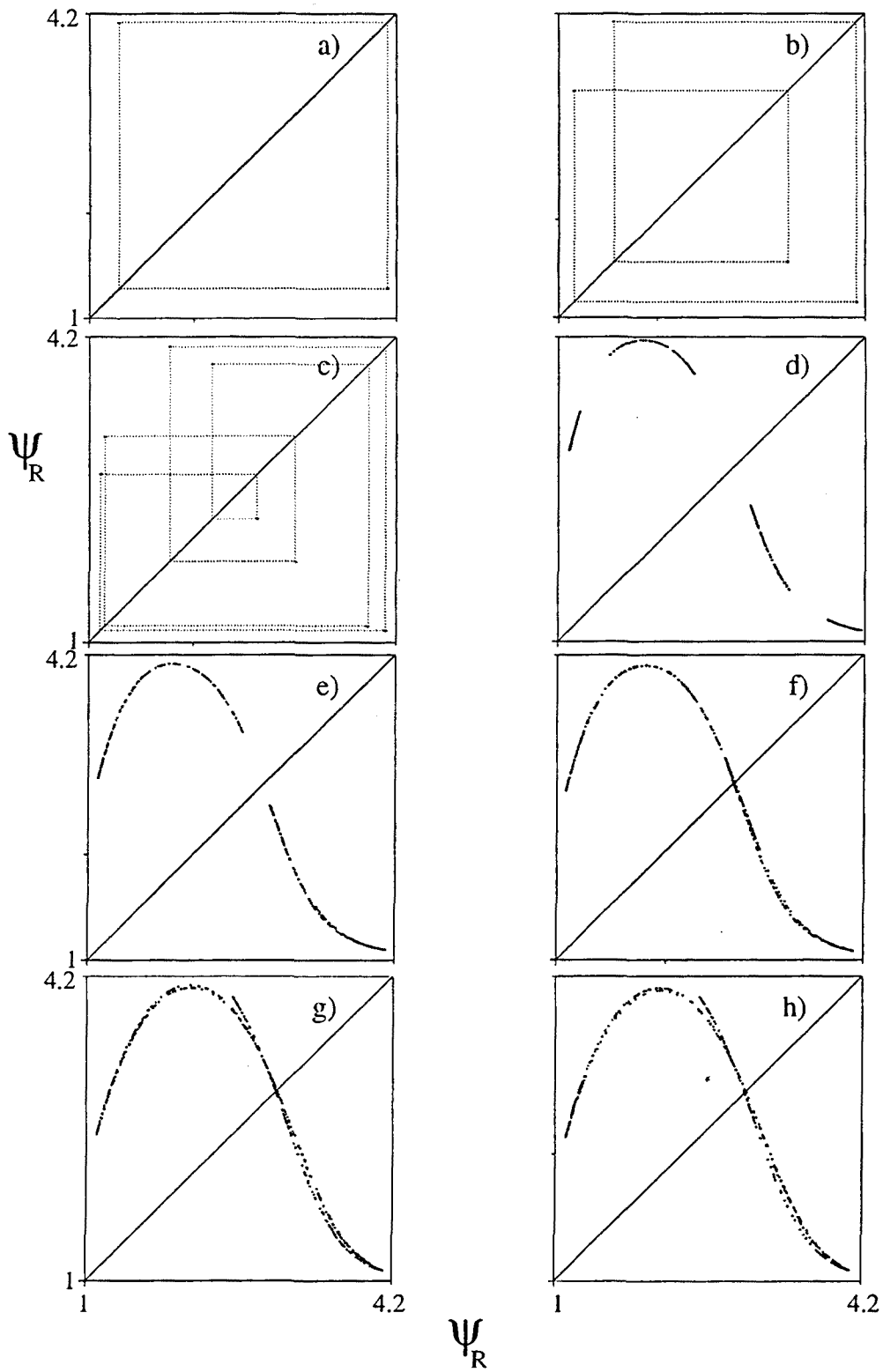


Fig. III.10 Primers retorns estroboscòpics corresponents als 8 casos numèrics de la figura III.8

caòtica, és a dir, ens mostra que la solució no és ni de bon troç totalment estocàstica. La situació es torna a repetir a la figura III.9.e. En aquest cas el component periòdic correspon a  $2T_E$ .

Aquestes bandes contínues en freqüència a mesura que augmentem la freqüència és van fent més importants, és a dir, el senyal temporal cada cop esdevé més estrany. Però és important assenyalar que mai desapareix l'estructura de pics característica dels senyals periòdics; sempre trobem un pic de freqüència igual a  $\omega_E$  que correspon a la modulació externa, a part dels altres pics. Per exemple a la figura III.9.f ens apareix un altre pic al voltant de  $\omega_E/2$  que il·lustra que estem aprop de la zona on es produeix l'acoblament entre la freqüència pròpia i la externa corresponent a  $\omega_E/\omega_0=2.0$ . En canvi, a les figures III.9.g i III.9.f a més de les bandes contínues ens apareixen clarament uns pics centrats a  $\omega/\omega_E=1/3$  i  $2/3$  corresponents a un senyal de període  $3T_E$ , que il·lustra que estem aprop de l'acoblament de freqüències corresponent a  $\omega_E/\omega_0=3$ . En el capítol cinquè parlarem més detalladament sobre elsacoblements.

La figura III.10 representa les seccions de primer retorn corresponents als vuit casos numèrics anteriors. Aquestes seccions han estat calculades a partir d'evaluar la secció estroboscòpica de la fase reflectida i la posterior realització el primer retorn. A partir de la secció podem deduir immediatament que els tres primers casos corresponen a solucions periòdiques de període 2, 4 i 8 vegades el de la modulació externa. Per exemple, per al cas a) apareixen dos punts, és a dir, com que la secció s'ha fet estroboscòpicament per a cada dos períodes de la modulació externa el valor de la fase reflectida es repeteix, i això correspon a una òrbita periòdica de període doble al de la modulació externa. Els cinc darrers casos corresponen a solucions caòtiques. És important però adonar-se que per al cas d) la secció no és contínua sinó que els punts es distribueixen en 8 intervals, en el cas e) ens apareixen dos intervals i en el cas f) la secció està formada per un únic l'interval. Aquesta reducció del número d'intervals és resultat de la cascada inversa. Aquesta estructura de intervals que apareixen en les seccions de Poincaré és la base per classificar les diferents solucions caòtiques amb la nomenclatura de bandes; per exemple, un atractor format per  $n$  intervals s'anomena *banda caòtica nI*.

En les seccions de Poincaré és on es veu amb més claredat el caràcter determinista dels atractors caòtics, ja que tot i l'aspecte aleatori del senyal temporal la forma del mapa és una corba ben definida.

El càlcul de la secció de primer retorn, apart d'il·lustrar amb molta claredat l'existència d'òrbites periòdiques, també permet una fàcil determinació del període de les mateixes. Això fa que sigui una anàlisi imprescindible per poder demostrar l'existència d'una cascada subharmònica. El fet que la secció sigui una corba amb un únic màxim ens assegura que el mapa és unimodal, i per tant, que la dinàmica descrita pel mapa és equivalent a la del mapa logístic. El caràcter unimodal del mapa és una de les evidències que permet demostrar l'existència de la cascada subharmònica. De tota manera, en els darrers quatre casos podem observar que el mapa no és una corba senzilla univaluada, sinó que té una certa estructura. Aquesta estructura posa de manifest que el mapa no és unidimensional. Aquesta estructura fina, però, no està en contradicció amb el fenomen dels doblaments de període, ara

Dispositiu no modulad, Resultats experimentals

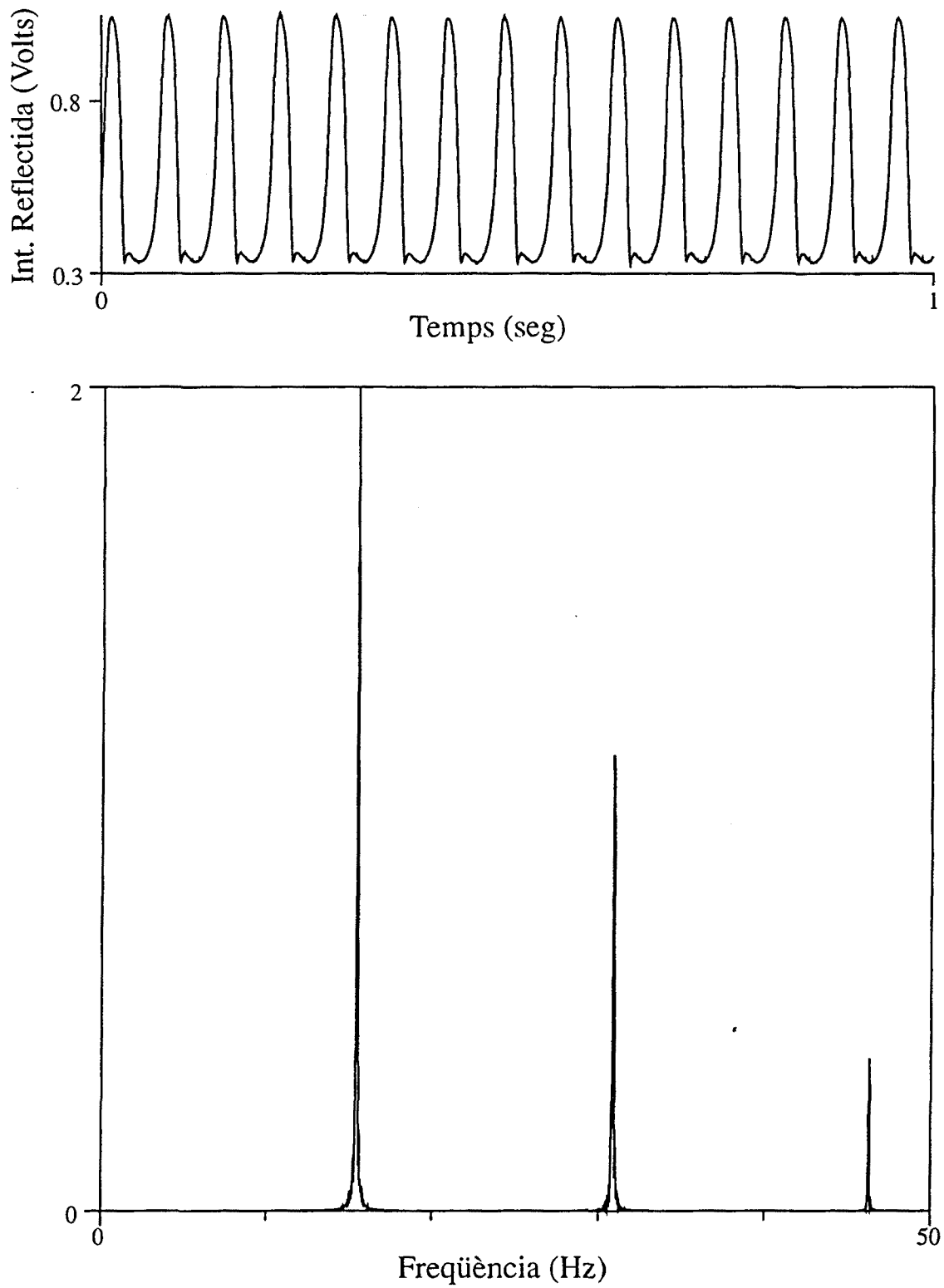


Fig. III.11 Resultats corresponents a l'evolució temporal experimental i la correponent transformada de Fourier del dispositiu bicapa sense modular.

### Evolucions Temporals Experimentals

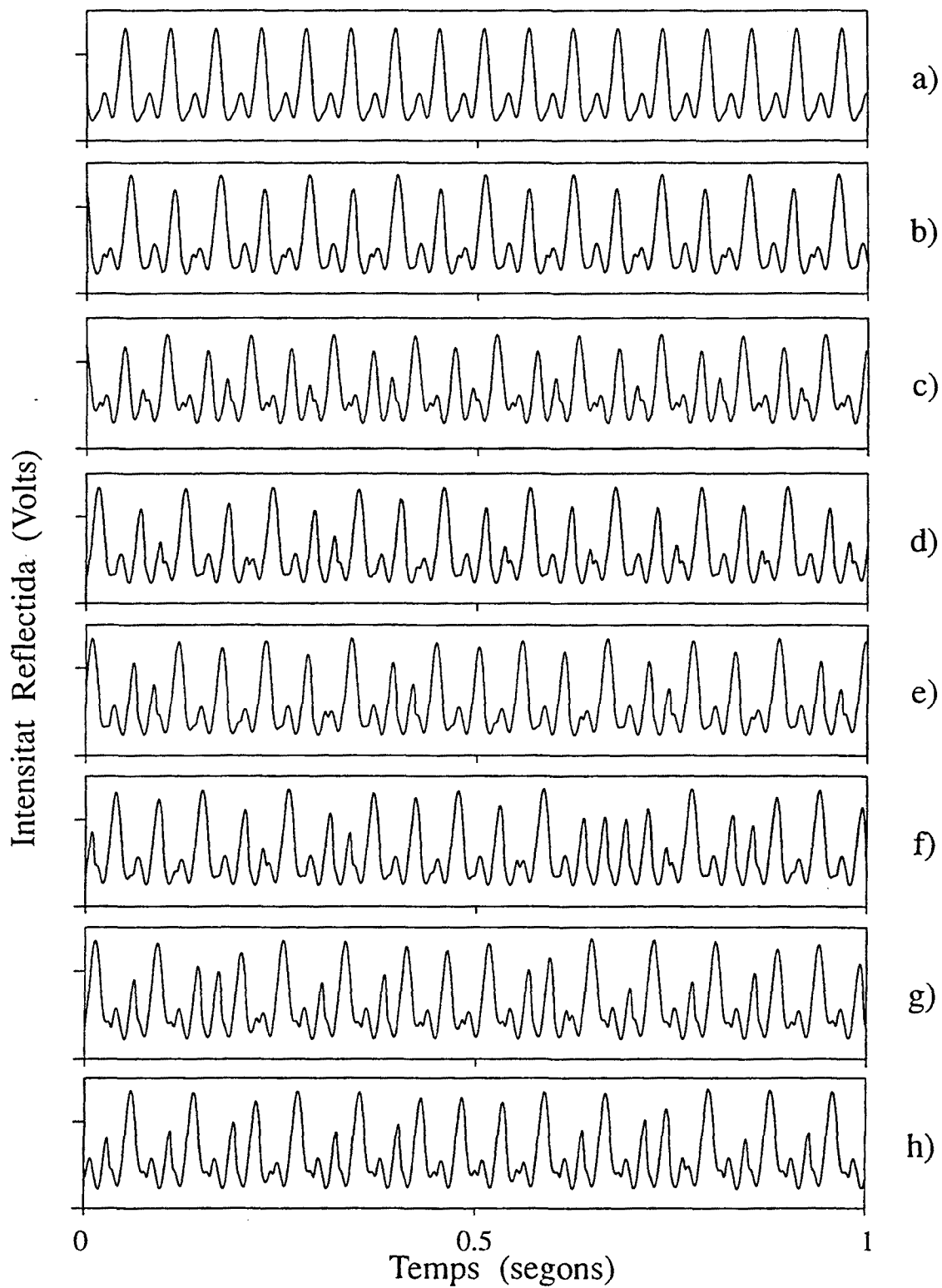


Fig. III.12 Evolucions temporals experimentals corresponents a 8 casos diferents del sistema bicapa modulad.

Transformades de Fourier experimentals

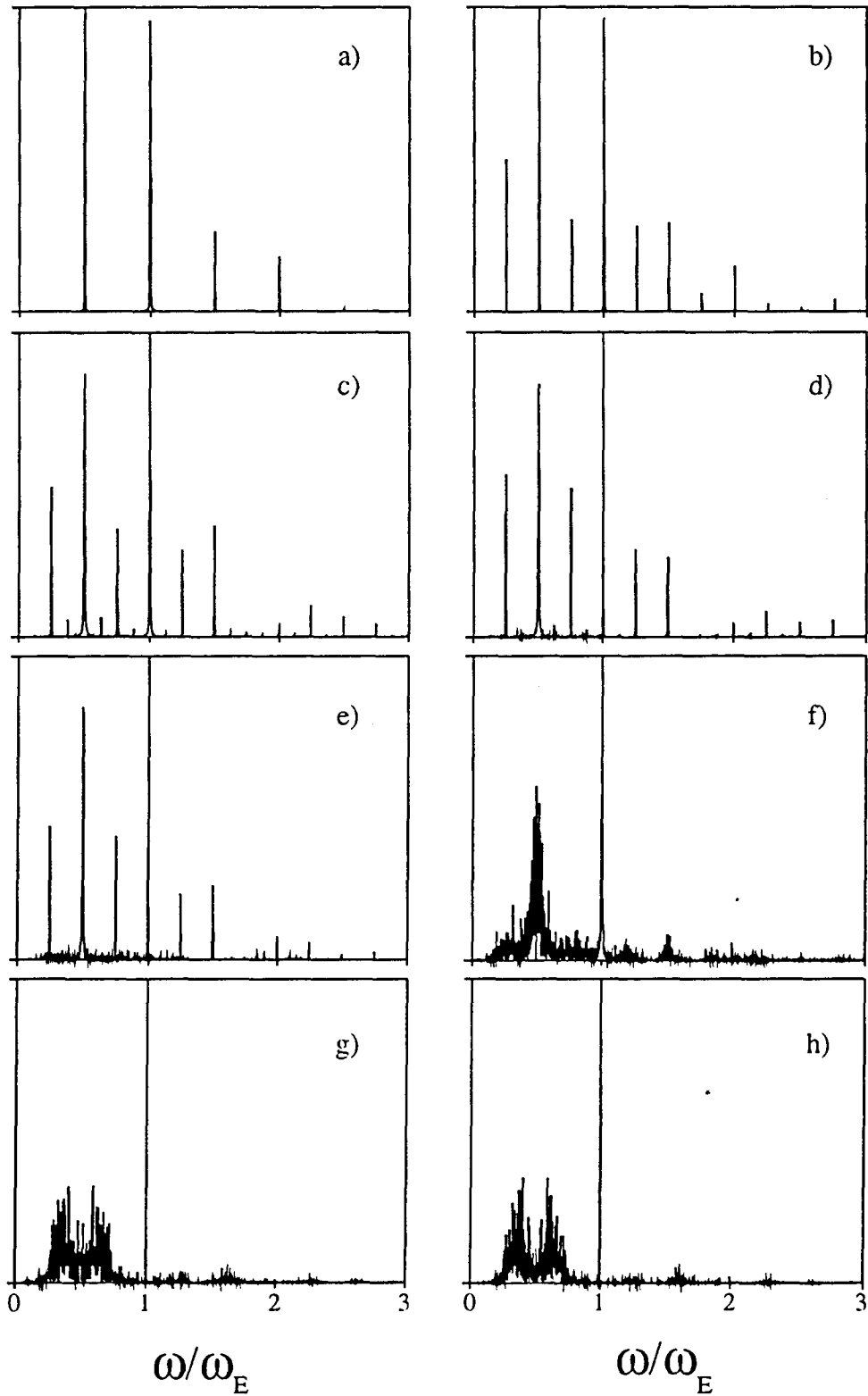


Fig. III.13 Transformades de Fourier de les 8 evolucions temporals experimentals de la figura III.12.



Seccions experimentals

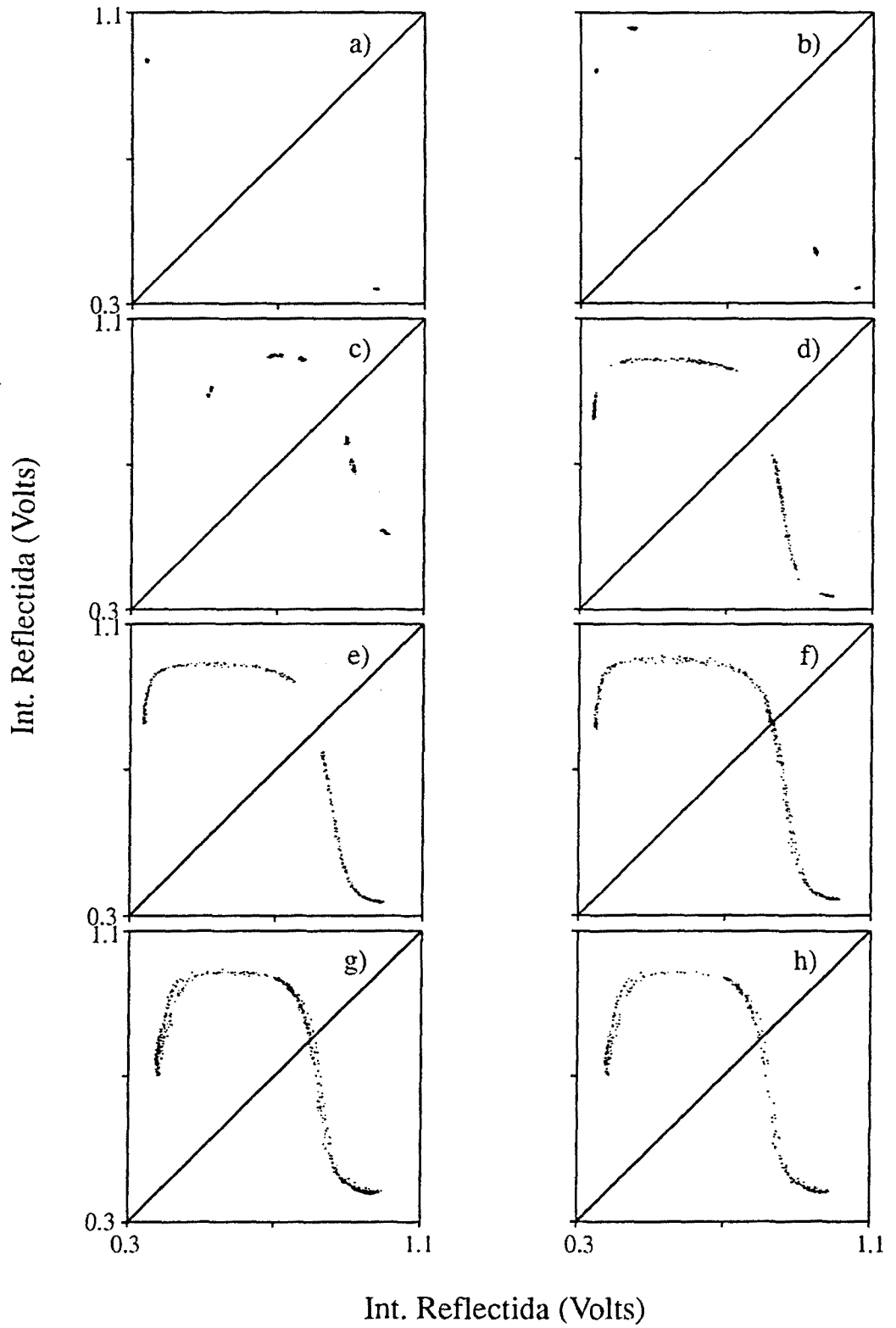


Fig. III.14 Primers retorns estroboscòpics corresponents al les 8 evolucions temporals experimentals de la figura III.12.

bé ens indica que en els darrers tres casos un mapa unidimensional no pot descriure tota la dinàmica del flux continu.

A partir d'ara il·lustrarem uns resultats experimentals, els quals, com comprovarem tot seguit descriuen molt bé tota la dinàmica abans exposada. A la figura III.11 hem representat la resposta del dispositiu experimental sense modular, és a dir, il·luminat amb una feix d'intensitat constant de 1.14 Volts. En aquesta figura hem representat l'evolució temporal de l'intensitat reflectida i la seva transformada de Fourier. La resposta del sistema sense modular correspon a una òrbita periòdica a la tercera branca de freqüència 15.42 Hz. Així doncs, hem obtingut el diagrama III.7 fent variar  $\omega_E/\omega_0$  entre 2.33 i 2.59, uns valors semblants al de la simulació numèrica.

Les figures III.12, III.13 i III.14 representen respectivament: l'evolució temporal de la intensitat reflectida, les transformades de Fourier i els primers retorns estroboscòpics per a vuit casos experimentals inclosos en el diagrama de bifurcació de la figura III.7. Aquests vuit casos estan numerats de l'*a*) a la *h*) i corresponen als següents valors de la freqüència de la modulació externa: *a*) 36, *b*) 36.46, *c*) 37.65, *d*) 37.96, *e*) 38.2, *f*) 38.25, *g*) 39.75, *h*) 39.85 Hz. La intensitat de base de la modulació per a aquests 8 casos és 1.14 Volts i l'amplitud de la modulació és igual a 0.725 Volts.

La forma de les evolucions temporals experimentals, així com la seqüència il·lustrada a la figura III.12, concorden molt bé amb els resultats numèrics de la figura III.8. S'observa que entre les gràfiques *a*), *b*) i *b*), *c*) hi han hagut dos doblaments de període successius. Es pot distingir amb claredat el caràcter periòdic dels tres primers casos i el caràcter caòtic de la resta. És important de ressaltar el fet que podem observar amb nitidesa un senyal periòdic amb període igual a  $8T_E$ .

També es pot observar la semblança entre les evolucions de les gràfiques *d*) amb *b*) i *e*) amb *a*). Aquesta semblança és fruit de les bandes caòtiques resultants de la cascada inversa. També es pot veure que els successius casos són cada cop més caòtics; les evolucions semblen més erràtiques.

Per contrastar amb més rigor les afirmacions anteriors, cal analitzar també les transformades de Fourier i les seccions de primer retorn per a evolucions llargues en el temps. Els càlculs realitzats a les figures III.13 i III.14 han estat realitzats a partir de sèries de 37.000 punts experimentals que equivalent aproximadament a uns 500 períodes de la modulació externa. És evident que les conclusions que es treuen d'aquests resultats són molt més fiables que les extreïtes de la figura III.12.

A la figura III.13 hem representat les transformades de Fourier corresponents als vuit casos anteriors. Aquestes transformades de Fourier ens permeten distingir clarament les solucions periòdiques de les caòtiques. Les figures III.13.a, III.13.b i III.13.c corresponen a òrbites periòdiques amb període  $T_E/2$ ,  $T_E/4$ , i  $T_E/8$ . També podem comprovar la bona estabilitat del dispositiu experimental, atès que fins hi tot l'espectre corresponent a la figura III.13.c apareix nítidament periòdic tot i que s'ha calculat a partir d'una evolució llarga en el temps. També es distingeix, en els casos III.13.d i III.13.e, el predomini del component periòdic característic de les bandes caòtiques. S'aprecia també que en els darrers casos l'espectre és fa més continu, és a dir, el senyal cada cop esdevé més estrany, però sense perdre mai l'estructura de pics característica dels senyals periòdics.

A la figura III.14 s'han representat les seccions de primer retorn corresponents les 8 evolucions temporals experimentals anteriors. Aquestes seccions han estat

calculades a partir de la secció estroboscòpica de la intensitat reflectida i la posterior realització del primer retorn. A partir de la secció podem deduir immediatament que els tres primers casos corresponen a solucions periòdiques de període igual a 2, 4 i 8 vegades el període de la modulació externa. Els cinc darrers casos són evolucions caòtiques. És important, però, ressaltar que per al cas *d)* els punts de la secció es troben repartits en 4 intervals, en el cas *e)* ens apareixen dos intervals de punts i en el cas *f)* la secció està formada per un únic interval. Aquesta desaparició d'intervals és resultat de la seqüència de fusions d'intervals dos a dos que té lloc en la cascada inversa. Paral·lelament, la forma de les corbes, amb un màxim, permet justificar l'existència d'aquesta cascada subharmònica. L'existència d'aquesta corba en les seccions de Poincaré demostra que els senyals són realment caòtics i que el seu aspecte erràtic no prové del soroll.

A diferència del cas numèric, no podem apreciar amb claredat l'estructura fina que evidenciava el caràcter bidimensional del mapa. De fet, aquesta estructura fina està pràcticament al límit de resolució en les seccions experimentals. Tot i això, si ens fixem amb detall en els darrers dos casos, es pot observar una estructura doble a la part esquerra i inferior dreta de les seccions. Normalment és pràcticament impossible observar experimentament estructures fines. Això demostra que tenim una gran resolució a l'experiment cosa que corrobora la fiabilitat dels resultats experimentals. A més durant tota l'anàlisi de dades experimentals hem pogut constatar una gran concordància entre la teoria i l'experiment.

### III.4 Crisis internes en el dispositiu bicapa modulad.

Les crisis en general són bifurcacions globals caracteritzades per la col·lisió entre un atractor caòtic i un objecte inestable. Aquest objecte inestable pot ser tant una òrbita periòdica tipus sella o punt fix tipus sella [48]. Quan l'objecte es troba al voltant de la conca d'atracció de l'atractor caòtic la crisi s'anomena *crisi de frontera*. Un exemple de crisi de frontera el tenim en les bifurcacions homoclíniques presentades al capítol VI per al dispositiu bicapa no modulad i modulad. La bifurcació homoclínica del dispositiu bicapa no modulad es produeix quan una òrbita periòdica fa tangència amb un punt fix sella. En canvi en el dispositiu bicapa modulad, la crisi de frontera es produeix arran de la col·lisió d'un atractor caòtic amb una òrbita sella. En el cas de les crisis de frontera, la conca d'atracció i l'atractor són simultaneament destruïts al punt de bifurcació. Per tant, la bifurcació presenta una discontinuïtat a l'espai de les fases fàcilment observable experimentalment. En canvi quan l'objecte inestable es troba dins la conca d'atracció de l'atractor caòtic tenim les *crisis internes*. Les crisis internes, a diferència de les crisis de frontera, no impliquen la destrucció de l'atractor estrany. En les crisis internes s'observa una expansió de l'atractor estrany, i l'objecte inestable queda immers dins l'atractor caòtic. Aquest tipus de bifurcacions globals són les que observem a la cascada inversa.

Aquesta expansió de l'atractor es pot comprovar en les seccions de Poincaré numèriques de la figura III.10, i experimentals de la figura III.14. Concretament entre la figures III.10.d, III.10.e, i III.10.f hi ha hagut tres crisis internes, i entre les figures III.14.d, III.14.e i III.14.f. s'han produït dues crisis internes. Es pot observar com la

secció que inicialment està formada per vuit intervals de punts en el cas III.10.d) i per quatre intervals pel cas III.10.c). A cada crisi interna s'omplen de punts els espais que hi ha entre els parells d'interval que formen la secció, de manera que es redueix a la meitat el nombre d'interval. És a dir, quan es produeix una crisi interna, els intervals de punts que formen la secció de Poincaré del atractor caòtic es fusionen dos a dos. En aquests espais buits que hi ha entre els intervals es troba la secció de Poincaré corresponent a l'òrbita periòdica inestable implicada a la crisi interna. Un cop s'ha produït la crisi interna, aquesta òrbita periòdica queda immersa dins els nous intervals resultants de la fusió dos a dos dels intervals que existien abans que es produís. En els casos III.10.e i III.14.e només apareixen a la secció dos intervals de punts; i finalment als casos III.10.f i III.14.f, la secció s'ha convertit en una única corva contínua.

Els diferents punts de la secció de Poincaré salten al voltant de l'òrbita periòdica formant els diferents intervals de la secció. Per exemple en el cas III.10.d estem en una situació on ja s'ha produït la crisi interna entre l'atractor caòtic  $16I$  i la òrbita sella de període  $8T_E$ . La representació en el pla de Poincaré estroboscòpic d'aquesta òrbita periòdica correspon a vuit punts, de manera que a la secció del atractor caòtic apareixen vuit intervals de punts dins dels quals estan immersos els vuit punts de la òrbita sella.

En el cas III.14.d està representada una banda caòtica  $4I$ . Aquesta banda caòtica es troba propera a l'aparició de la crisi interna amb la òrbita de període  $2T_E$ . Un dels dos punts que representen aquesta òrbita periòdica en el pla de Poincaré es troba entre els dos intervals de la secció situats per sobre de la bissectriu, l'altre punt es troba entre els dos intervals situats per sota la bissectriu. A mesura que ens acostem al punt de la bifurcació, els dos parells d'illes s'acosten mútuament, de manera que, també s'apropen als dos punts de la òrbita sella. Al cas III.14.f els intervals ja s'han fusionat dos a dos, per això, només apareixen dos intervals corresponents a la banda caòtica  $2I$ . L'òrbita inestable ha quedat immersa dins les dues noves bandes de punts.

Aquest acostament progressiu a l'òrbita sella és el responsable del caràcter asimptòtic de la crisi interna. Quan més properes són les trajectòries de l'atractor caòtic a la òrbita sella, més semblants són les oscil·lacions de l'atractor caòtic a les de la òrbita sella. Aquest fenomen explica l'aspecte periòdic de les bandes caòtiques.

A la figura III.15 hem representat, a l'esquerra els atractors caòtics, i a la dreta les òrbites selles de període dos i quatre per als casos *d*), *e*) i *f*) de la figura III.8. La representació s'ha fet a l'espai de les fases format per les fases parcials  $\psi_1$  i  $\psi_2$ . Els atractors han estat calculats a partir de 12000 punts, dels quals només hem representat els darrers 4000 punts per tal d'eliminar el règim transitori. Les òrbites inestables han estat calculades utilitzant algorismes de localització d'òrbites. L'òrbita de període dos ha estat representada en traç discontinu i la de període quatre amb traç continu.

Per al cas *d*) podem observar com ambdues òrbites es troben dins la conca d'atracció de l'atractor caòtic, i com aquest atractiu es recargola al voltant de l'òrbita de període quatre sella formant quatre bandes gruixudes al voltant d'aquesta òrbita sella.

Atractors numèrics

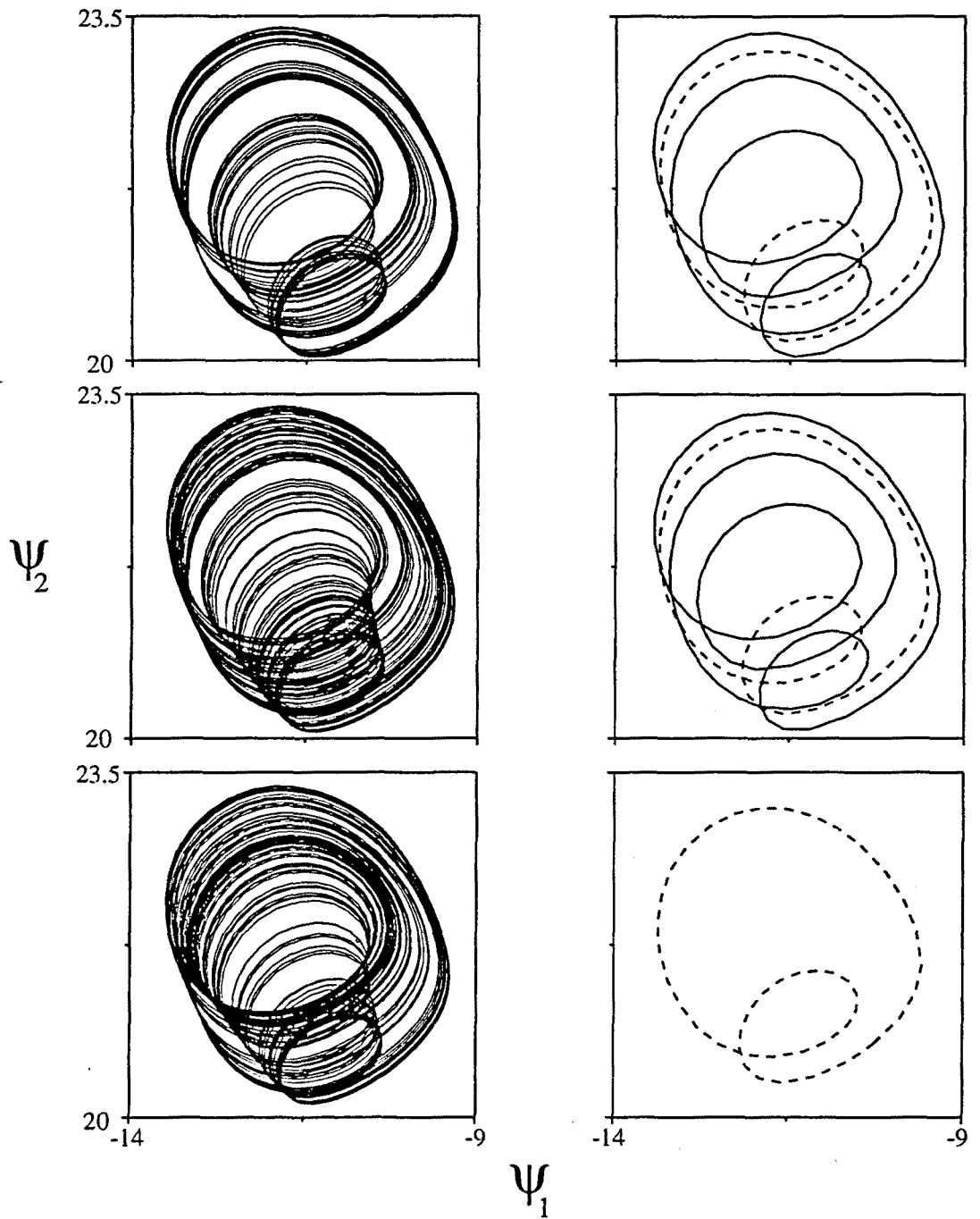


Fig III.15 A l'esquerra atractors numèrics i a la dreta òrbites sella de període 2 (traç discontinu) i quatre (traç continu) corresponents als casos d) e) i f) de la figura III.8.

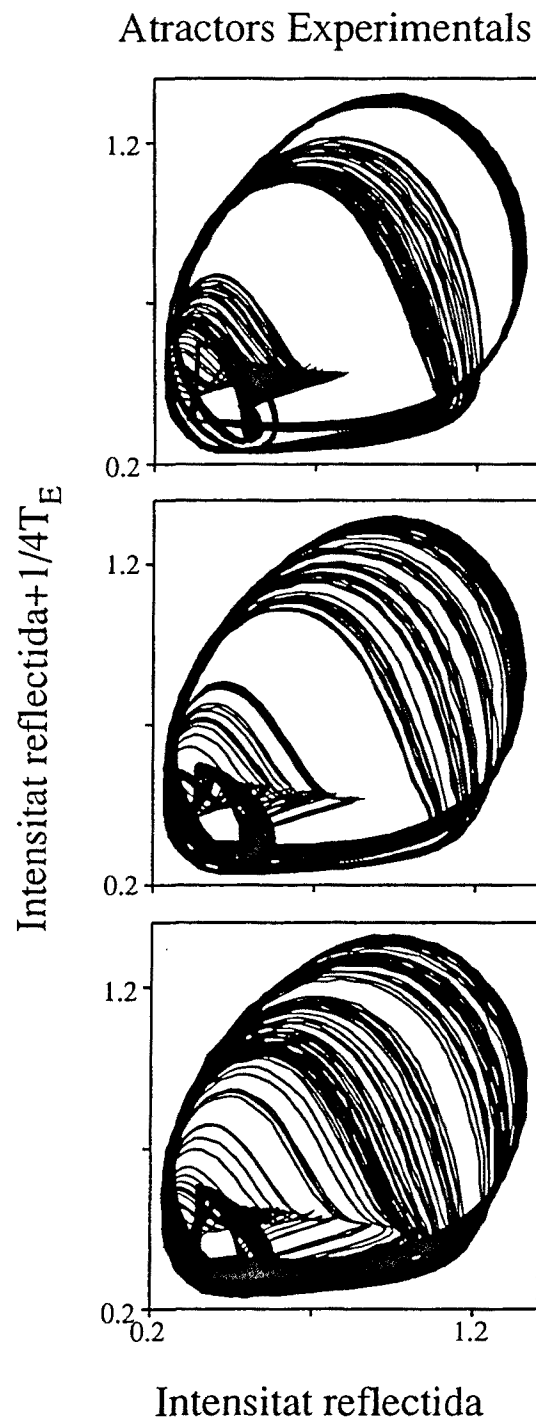


Fig III.16 Atractors corresponents als casos d) e) i f) de la figura III.12. Aquests atractors ha estat construïts a partir de les evolucions temporals experimentals amb la tècnica d'embedding desplaçat.

Per al cas *e*) la trajectòria inestable de període quatre ja queda dins de l'atractor caòtic. I aquest atractor ara està format per dues bandes al voltant de l'òrbita sella de període dos.

Finalment al cas *f*) l'atractor ja forma una única banda, i l'òrbita de període dos inestable queda dins de l'atractor caòtic.

A la figura III.16 he reconstruït tres atractors a partir de les evolucions temporals experimentals dels casos *d*), *e*) i *f*) de la figura III.12. La reconstrucció dels atractors ha estat feta emprant la tècnica d'embedding desplaçat [31]. A l'eix de les abcises hem representat la intensitat reflectida i a l'eix de coordenades, la intensitat reflectida desplaçada setze punts de l'enregistrament experimental. Aquests setze punts corresponen a un desplaçament d'aproximadament un quart del període de la modulació externa. El nombre total de punts per atractor és de 34.000.

El primer atractor de la figura III.16 correspon al cas *d*). En aquest atractor podem observar les quatre bandes separades que formen els quatre intervals que ens apareixen en representar la secció de primer retorn estroboscòpica. La formació d'aquestes quatre bandes és resultat de l'acumulació de les trajectòries de l'atractor caòtic al voltant d'una oscil·lació de període  $4T_E$ . Entre aquestes quatre bandes hi ha espais buits pels que no passa cap trajectòria de l'atractor. En aquesta zona buida es troba l'òrbita sella de període  $2T_E$ . En el següent atractor de la figura III.16 ja només apareixen dues bandes i un espai buit enmig. Entre aquests dos casos s'ha produït una crisi interna. Resultat d'aquesta crisi interna, l'atractor s'ha expandit omplint dos dels espais buits que hi havia entre les quatre bandes inicials, reduint-se el número de bandes a la meitat. Al darrer atractor de la figura III.16 ja no existeixen bandes separades. La darrera crisi interna de la cascada inversa ha omplert l'única zona buida que hi havia enmig de les dues bandes.

També es pot comprovar que les successives bifurcacions globals no han comportat la destrucció de l'atractor caòtic. Això també ens demostra que aquestes bifurcacions globals han estat crisis internes.

En les crisis internes, i en general en les bifurcacions globals, un estudi local de l'estabilitat no permet estudiar els canvis que s'han produït en la dinàmica del sistema. La raó rau en el fet que les bifurcacions globals, com el mateix nom indica, impliquen transformacions globals de l'estructura dels atractors a l'espai de les fases, cosa que impossibilita reduir l'estudi a una anàlisi local. Una eina molt útil per estudiar les crisis internes són els *manifolds* dels objectes selles implicats. Al capítol sisè explicarem amb detall què és un *manifold*, però de moment avançarem que un *manifold* estable en un pla de Poincaré és el conjunt de trajectòries que tendeixen asimptòticament a l'òrbita sella quan  $t \rightarrow +\infty$ , i el *manifold* inestable és el conjunt de trajectòries que tendeix a l'òrbita sella quan  $t \rightarrow -\infty$ .

En el cas d'un pla de Poincaré bidimensional, com és la situació que ens ocupa, els *manifolds* estable/inestable d'una òrbita sella són unes corbes formades per infinites trajectòries que s'acosten/allunyen asimptòticament de l'òrbita sella. Cadascuna d'aquestes trajectòries en interseccionar amb el pla de Poincaré forma un conjunt de punts que s'acosta/allunya asimptòticament al punt sella. La unió d'aquests infinits punts forma la corba que representa el *manifold* al pla de Poincaré.

En general perquè es produeixi una crisi interna no és necessari que l'atractor col·lisió amb l'òrbita sella, l'única condició necessària és que el *manifold* inestable

de l'òrbita sella interseccioni transversalment amb el *manifold* estable de la mateixa òrbita sella. Quan això succeeix, l'atractor caòtic implicat s'expandeix i l'òrbita inestable queda immersa dins l'atractor caòtic.

En els casos en què aquesta intersecció es produeix juntament amb la col·lisió de l'atractor caòtic amb l'òrbita sella, la crisi interna té un aspecte continu. S'observa com progresivament els intervals de punts que formen la secció de l'atractor caòtic s'acosten dos a dos, com omplen l'espai que hi ha entre ells, per acabar fusionant-se en un sol interval.

En canvi, si no es produeix la col·lisió amb l'òrbita sella, la crisi interna té un aspecte discontinu. S'observa en el punt de la bifurcació, una expansió sobtada dels intervals. Aquesta discontinuïtat es pot veure, per exemple, a la dreta de la finestra de període  $5T_E$  de les figures III.6 i II.7. En aquesta finestra l'òrbita periòdica s'inestabilitza a partir d'una seqüència de doblaments de període. Després d'aquesta seqüència de doblaments de període es produeix la cascada inversa que finalitza amb una banda caòtica  $5I$ . Aquesta banda caòtica  $5I$  pateix una expansió sobtada i es converteix en un únic interval de punts. Aquests dos tipus de crisis internes es poden distingir molt bé a la figura III.6. Podem observar com, en la cascada inversa que es produeix a la dreta de la finestra de període  $2T_E$ , les bandes caòtiques es van eixamplant de manera progressiva i arriben a ajuntar-se de forma contínua. En canvi, tal i com hem vist a la dreta de la finestra de període  $5T_E$ , el canvi és sobtat.

A la figura III.17 estan representats els *manifolds* estable i inestable de l'òrbita sella de període  $2T_E$  per als casos *e*) i *f*) de la figura III.8. La representació s'ha fet al pla de Poincaré estroboscòpic, això és, representant els valors de  $\psi_1$  i  $\psi_2$  captats estroboscòpicament. Per simplificar la figura només s'ha representat un dels dos punts que constitueixen la secció de Poincaré de l'òrbita sella ( $S$ ). La posició d'aquesta òrbita esta indicada amb una creu.  $W^u(S)$  és el *manifold* inestable i  $W^s(S)$  és el *manifold* estable.

Tal com hem vist, el primer cas correspon a una banda  $4I$ . El *manifold* inestable que surt de  $S$  convergeix asimptòticament cap a l'atractor caòtic. Aquest *manifold* oscil·la ràpidament entre els punts  $a, b$  i  $c, d$ . És entre aquests punts on es troba l'atractor estrany. En aquesta zona el *manifold* pateix una gran quantitat de plegaments al voltant de l'atractor estrany. Un estudi més precís del comportament del *manifold* inestable al voltant de l'atractor caòtic ens mostra que aquest no és una corba simple sinó que existeix una estructura fina amb infinits plegaments. Donat que el dispositiu bicapa és molt dissipatiu aquesta estructura està tan comprimida que només es pot observar fent ampliacions a gran escala. En aquest cas els *manifolds* estable i inestable no interseccionen tot i que el sistema ja ha entrat en un règim caòtic.

El segon cas correspon a una banda  $2I$ . Ja s'ha produït la crisi interna amb l'òrbita sella  $S$  i els *manifolds* estable i inestable ara interseccionen al punt  $O$ , donant lloc a l'aparició d'infinits punts homoclínic transversals. Al capítol VI s'explica què és un punt homoclínic transversal, però avençarem que un punt homoclínic transversal és un punt que pertany simultàniament als *manifolds* estable i inestable. Està demostrat (Cap VI) que si existeix un punt homoclínic transversal, llavors existeix un nombre infinit de punts homoclínic transversals. Aquest resultat confirma l'existència d'aquesta estructura fina d'infinits plegaments del *manifold* inestable.



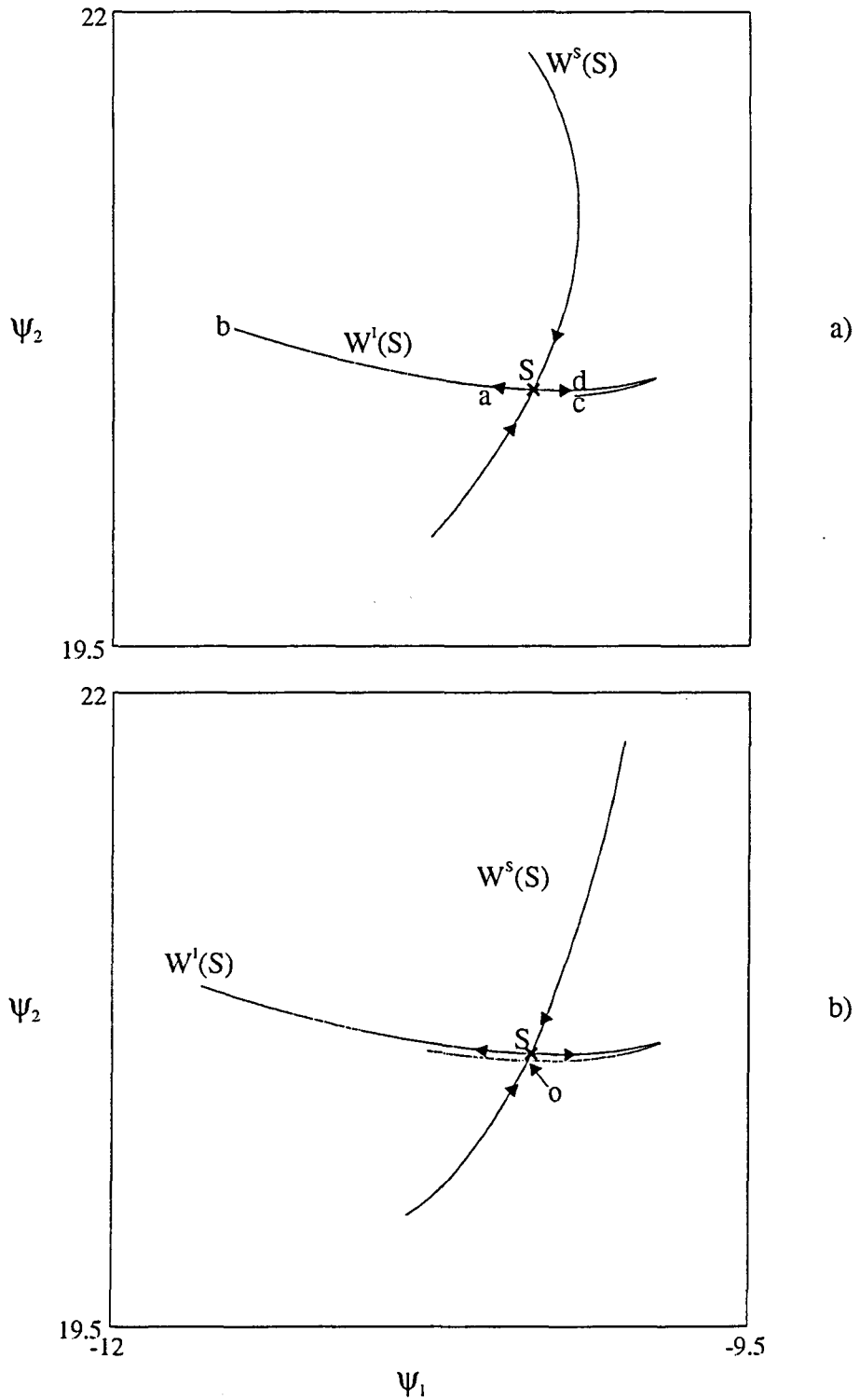


Fig. III.17 Manifolds estable ( $W^s$ ) i inestable ( $W^i$ ) de l'òrbita sella ( $S$ ) de període  $2T_E$  corresponents als e) i f) de la figura III.8. La figura superior correspon a una situació pervia a la crisi interna, on el manifolds no interseccen. En la figura inferior ja s'ha produït la crisi interna i els dos manifolds interseccen al punt  $O$ .

Com que l'expansió de l'atractor caòtic es fa de forma contínua, quan es produeix la bifurcació homoclínica, la secció de l'atractor caòtica fa tangència amb el punt  $S$ . Un cop hem passat la bifurcació, el punt  $S$  es troba immers dins de la secció de l'atractor caòtic. Si anéssim variant de forma contínua  $\omega_E$  passant del primer cas al segon, veuríem com els punts  $a$  i  $d$  es van acostant l'un a l'altre, apropant-se simultàniament al punt  $S$ . En el punt en què es produeix la crisi interna, els punts  $a$  i  $d$  coincideixen amb el punt  $S$  i simultàniament el punt  $c$  toca el *manifold* estable.

En la secció de l'atractor caòtic també es produeixen aquests plegaments presents en el *manifold* inestable. L'aparició d'aquest tipus de plegament evidencia l'existència d'un mapa tipus ferradura incrustat dins el mapa que descriu la dinàmica de sistema. Al capítol VI farem un estudi més detallat de la relació entre els plegaments i el mapa tipus ferradura.

Abans de finalitzar el capítol, cal fer una petita matització. Què significa que l'òrbita periòdica sella estigui dins de l'atractor caòtic?. Com es pot entendre que existeixi un atractor dins d'un altre?. L'explicació d'això està en tenir present la diferència que hi ha entre un conjunt límit i un atractor. Quan diem que l'òrbita periòdica està dins de l'atractor caòtic ens referim a què aquesta òrbita periòdica està en l'interior del conjunt límit corresponent a l'atractor caòtic, però evidentment no pertany a l'atractor caòtic. Això vol dir que, donat un punt de l'òrbita periòdica, no hi ha cap trajectòria de l'atractor caòtic que passi per aquest punt. Ara bé, per qualsevol entorn obert fet al voltant d'aquest punt de l'òrbita periòdica sempre trobarem un punt que pertany al atractor caòtic dins d'aquesta entorn.



## IV.- INTERMITÈNCIES

### IV.1 Introducció.

Una de les transicions típiques vers al caos són les intermitències. Les intermitències han estat demostrades en una gran varietat de sistemes [49-56] tant teòricament com experimentalment. Per exemple hi ha resultats experimentals en Dinàmica de Fluids [57-59], en sistemes químics [60-63], en circuits elèctrics [64,65] i en làsers [66-68]. Com demostrarem al llarg d'aquest capítol el nostre dispositiu bicapa modulada també exhibeix intermitències, cosa especialment interessant, atès que no tenim cap referència de cap altre dispositiu òptic bistable que, tant numèricament com experimentalment, presenti aquestes transicions al caos.

Al capítol I ja hem esmentat que el fenomen de les intermitències és una de les rutes típiques d'un estat periòdic al caos. En general es diu que un senyal temporal és intermitent quan està sotmès a variacions rares i de gran amplitud, és a dir, és un règim periòdic sobtat de tant en tant per oscil·lacions estranyes. Aquestes intermitències temporals es donen en transicions de règims periòdics a règims caòtics o quasi-periòdics. Existeixen tres tipus de transicions intermitents, però totes tres presenten una fenomenologia comuna. Per sota d'un paràmetre crític  $\mu_c$ , el sistema dinàmic té un comportament periòdic, és a dir, mostra unes oscil·lacions regulars i estables. A partir del moment que el paràmetre de control supera lleugerament aquest valor crític, el senyal temporal té unes oscil·lacions molt semblants a les descrites anteriorment, aparentment són regulars i estables, però de tant en tant apareixen fluctuacions amb oscil·lacions anormals. L'amplitud i la durada d'aquestes fluctuacions són més o menys les mateixes, i independents del paràmetre de control  $\mu$ . Tot i això, a mesura que ens allunyem del valor crític  $\mu_c$  aquestes fluctuacions són cada cop més freqüents, i per tant, la durada dels règims laminars més curta. Cal recalcar que a la transició no és ni l'amplitud ni la durada de les fluctuacions el que tendeix a zero, sinó que és la seva freqüència mitjana la que tendeix a zero.

Dos tipus d'anàlisis diferents són necessaris per entendre les intermitències. Primer, una anàlisi local de l'estabilitat del cicle límit mitjançant la teoria de Floquet; que ens permet entendre l'aparició d'oscil·lacions anormals. D'altra banda un estudi del fenomen global de la relaminarització o reinjecció, a partir del qual l'oscil·lació anormal desapareix per donar pas de nou al règim laminar. La classificació en intermitències de tipus I, II i III ve determinada pels tres tipus d'inestabilització lineal del cicle límit. Quan un multiplicador de Floquet travessa el cercle unitat per: +1, associat a una bifurcació sella node de cicles límits tenim tipus I; per -1, associat a una bifurcació de doblament de període, tipus III, o per dos valors propis complexos conjugats, associat a una bifurcació de Hopf de segon ordre, tipus II. En els tipus II i III és necessari que la bifurcació sigui subcrítica per tal que es donin intermitències, per les intermitències de tipus I aquesta condició no és necessària ja que totes les bifurcacions sella node tenen un caràcter subcrític. Aquest caràcter subcrític de la bifurcació permet un creixement de la inestabilitat del punt fix. El qual té com a resultat l'aparició dels règims intermitents.

En aquest capítol farem primer una introducció teòrica on definirem que és una intermitència i estudiarem com és la transició al caos. Després demostrarem tant teòrica com experimentalment que el nostre dispositiu bicapa modulada exhibeix intermitències de tipus I.

Al final del capítol farem un estudi estadístic dels règims laminars enregistrats experimentalment. Aquest estudi ens permetrà fer una anàlisi quantitativa de les intermitències i ens servirà per demostrar que les intermitències observades són de tipus I.

## IV.2 Anàlisi teòrica de les intermitències de Tipus I.

Tal i com ja hem avançat a l'introducció, les intermitències de tipus I es produeixen quan a la inestabilització d'una solució periòdica es dona en fer-se un dels multiplicadors de Floquet més gran que +1. És a dir, quan un dels valors propis de la matriu variacional (Multiplicador de Floquet) és real i surt del cercle unitat del pla complex per l'eix real positiu. Si notem per  $\mu$  el paràmetre de control suposarem, sense cap pèrdua de generalitat, que per a  $\mu < \mu_c$  existeix una òrbita periòdica estable i que al punt  $\mu = \mu_c$  es desestabilitza. Realitzarem dos estudis diferents. Primer farem una anàlisi local, mitjançant un desenvolupament en sèrie de Taylor al voltant de la trajectòria periòdica que s'inestabilitza, prenent els termes no lineals d'ordre més baix. Aquesta anàlisi tot i ser molt senzilla, ens permetrà d'obtenir certes prediccions quantitatives molt útils per caracteritzar aquesta transició. Aquestes prediccions quantitatives són especialment útils per caracteritzar els resultats experimentals. Posteriorment farem una anàlisi dels mecanismes de relaminarització que depenen de l'estructura global del flux a l'espai de les fases.

### IV.2.1 Anàlisi Local.

Si considerem només el vector propi de la matriu variacional que està associat al multiplicador de Floquet responsable de la inestabilització, i escollim la direcció d'aquest vector propi com a l'eix de les coordenades ( $x$ ) dins del pla de Poincaré; llavors la multiplicació del flux per la matriu variacional es redueix a la multiplicació de la variable  $x$  pel valor propi corresponent  $\lambda(\mu)$ . On  $\mu$  és el paràmetre de control. D'aquesta manera podem expressar l'evolució del mapa de primer retorn per aquesta nova variable  $x$  com:

$$x_{i+1} = f(x_i, \mu) = \lambda(\mu)x_i \quad (\text{IV.1})$$

D'aquesta manera  $x$  indica la evolució a partir del punt fix  $x=0$  del flux al pla de Poincaré. Recordem que aquest punt fix correspon a l'òrbita periòdica del flux continu.

El creuament del multiplicador de Floquet per +1 quan  $\mu = \mu_c$  significa que

$\lambda(\mu_c) = 1$  i  $\left. \frac{df}{d\mu} \right|_{\mu_c} \neq 0$ . Així doncs fent el desenvolupament en sèrie de Taylor de

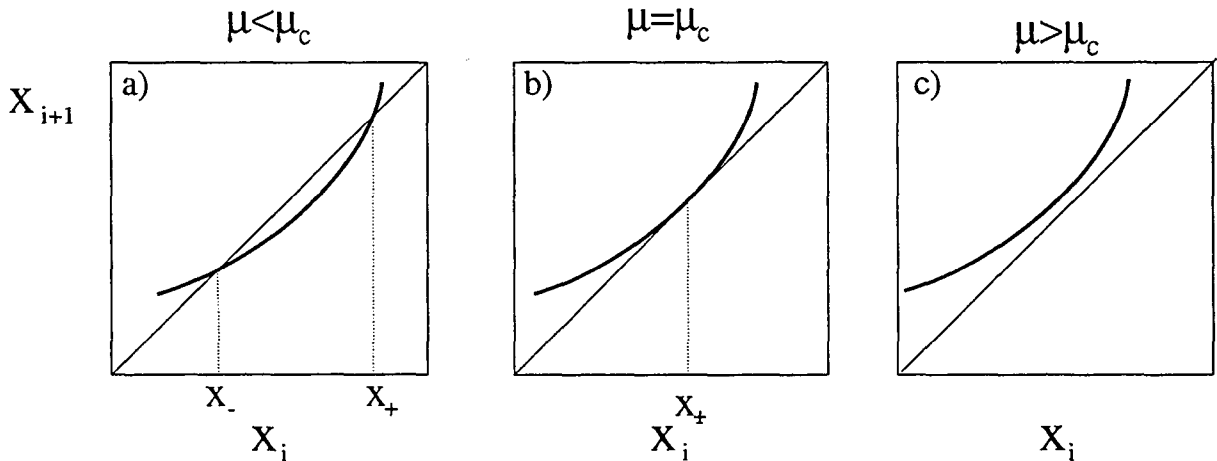


Fig. IV.1 Aplicació de primer retorn al voltant d'una intermitència de tipus I: a) abans, b) punt de la bifurcació i c) després de la bifurcació.

la funció  $x_{i+1}=f(x_i,\mu)$  al voltant del punt  $x=0$  i  $\mu=\mu_c$ . Obtenim la funció:

$$x_{i+1} = x_i + \epsilon + x_i^2 \quad (\text{IV.2})$$

Cal dir que hem fet una normalització en  $x$  per tal de convertir en 1 el coeficient del terme  $x^2$ . El paràmetre  $\epsilon$  és proporcional a  $\mu - \mu_c$ , i el valor del multiplicador de Floquet dels punts fixos és igual al pendent de la corba en aquests punts. A la figura IV.1 representem la corba descrita per l'equació IV.2 per tres valors diferents del paràmetre de control  $\mu$  per tal d'il·lustrar com es produeix la transició. La figura IV.1.a correspon a  $\mu < \mu_c$ , és a dir,  $\epsilon < 0$ . En aquest cas trobem que existeixen dos punts fixos  $x_{\pm} = \pm(-\epsilon)^{1/2}$ .

A mesura que ens acostem al punt de bifurcació donat per  $\epsilon = 0$ , el valor del pendent de la funció  $x_{i+1}=f(x_i,\mu)$  als punts d'equilibri s'apropa a 1. En el punt de bifurcació, figura IV.1.b, existeix un únic punt fix  $x=0$ . En aquest punt la corba és tangent a la bisectriu, és a dir, el pendent de la corba en aquest punt és 1. Per  $\epsilon > 0$ , figura IV.1.c, no existeix cap punt fix.

Com que el multiplicador de Floquet d'un punt fix és igual al pendent de la funció al punt fix, podem conèixer l'estabilitat dels punts fixos a partir del pendent. Així, per al cas  $\epsilon < 0$ , el punt  $x_-$  és estable i el punt  $x_+$  és inestable. Les iteracions, figura IV.2, que surtin per un valor inicial  $x_0 < x_+$  convergeixen totes vers al punt  $x_-$ , en canvi aquelles que surtin per un valor  $x_0 > x_+$  divergeixen ràpidament.

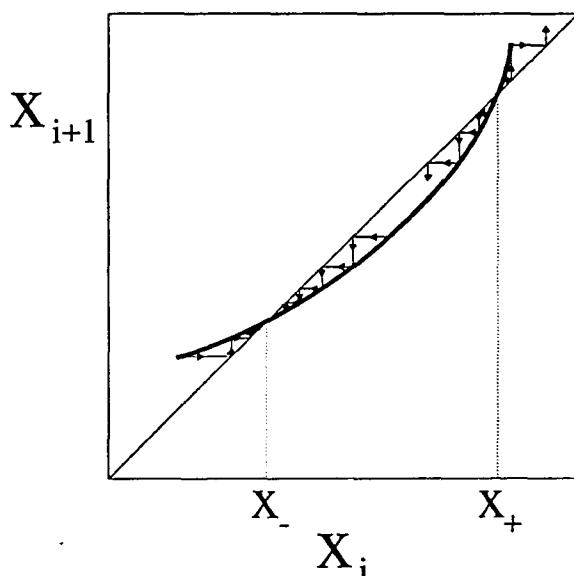


Fig IV.2 Mapa de primer retorn amb dos punts fixos.

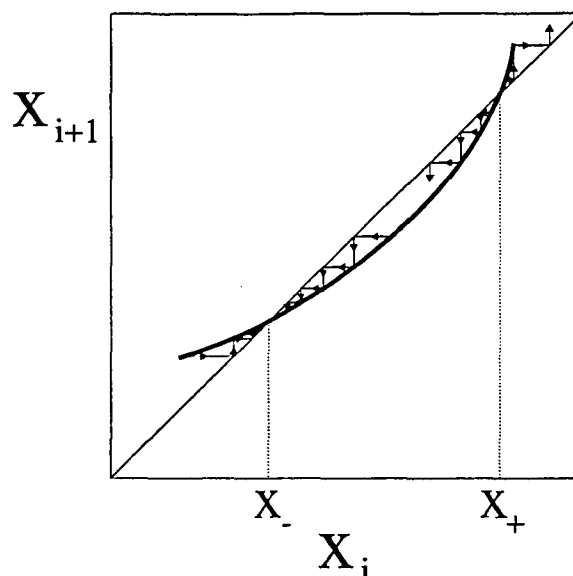


Fig. IV.3 Aplicació de primer retorn. No existeixen punts fixos.

Suposem ara el cas  $\varepsilon$  lleugerament positiu, figura IV.3, observem que hi ha un petit canal entre la corba i la bisectriu. Si partim d'un punt inicial  $x < 0$ , les iteracions deriven vers la zona positiva, però quan més petit és  $\varepsilon$ , més s'acumulen aquestes iteracions al voltant de la zona més estreta del canal. Aquestes iteracions en el flux continu corresponen al règim pseudoperiòdic característic de les intermitències. Aquest règim pseudoperiòdic s'anomena *règim laminar*. Es pot demostrar [49] que el número d'iteracions necessàries per atravesar el canal és de l'ordre de  $\varepsilon^{-1/2}$ .

#### IV.2.2 Relaminarització.

Fins ara no hem dit res del que passa amb les solució intermitents en sortir del canal. Aquesta qüestió està lligada al fenomen de la relaminarització, és a dir, al procés que ens permet tornar a entrar al canal després d'haver-ne sortit.

Hi ha dues possibilitats de relaminarització, (i) a través del flux al damunt d'un torus, (ii) a través del flux al damunt d'un atractor estrany. A la figura (IV.4) presentem dos mapes de Poincaré corresponents a les aplicacions de primer retorn per dos d'aquests casos. Per al cas de la figura IV.4.a la solució correspon a un solució 2-periòdica, i la figura IV.4.b a un atractor estrany.

En el primer cas l'aplicació de primer retorn és difeomòrfica amb una circumferència. En aquest cas és fàcil d'imaginar com és fa la relaminarització, les successives iteracions un cop passen pel canal fan una volta pel cercle per tornar a entrar al canal per l'altre costat.

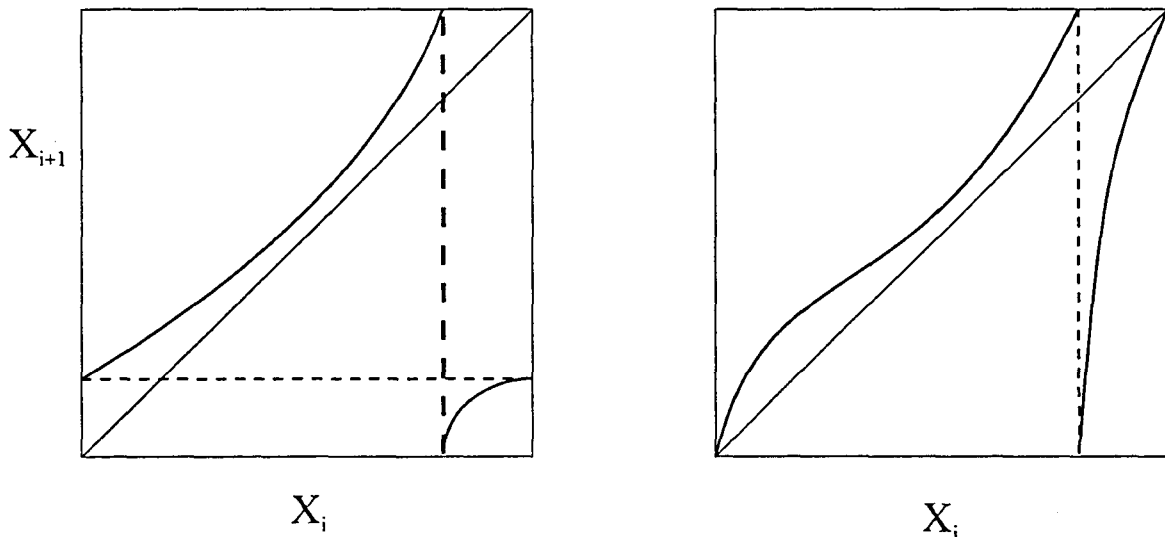


Fig. IV.4 Mapes de primer retorn on il·lustrem dos tipus de relaminarització: a) Torus, b) Atractor Estrany.

En el segon cas, el mapa de la figura IV.4.b representa una relaminarització caòtica. Un exemple de transformació amb relaminarització caòtica, el tenim a la funció *diàdica* [49]:

$$f(x) = \{2x\} \quad x \in [0;1] \quad (\text{IV.3})$$

Podem comprovar que aquesta aplicació presenta la típica sensibilitat a les condicions inicials dels sistemes caòtics. A cada iteració del mapa, un interval infinitesimal és multiplicat per dos, de manera que l'amplada d'aquest interval té un creixement geomètric en les successives iteracions. L'aplicació diàdica no pot ser una aplicació de primer retorn ja que no és invertible: per exemple  $f(1/4)=f(3/4)=1/2$ . No obstant, a partir d'aquesta transformació podem contruir nova aplicació invertible anomenada *la transformació del flequer*:

$$f(x,y) = \begin{cases} (\{2x\}, y/2) & \text{si } 0 \leq x \leq 1/2. \\ (\{2x\}, \frac{y+1}{2}) & \text{si } 1/2 < x \leq 1 \end{cases} \quad (\text{IV.4})$$

Aquesta aplicació conserva la sensibilitat a les condicions inicials però a més és invertible. Per exemple, les intermitències de tipus I del model de Lorentz presenten una relaminarització caòtica relacionada amb la transformació del flequer.

Un altre exemple de relaminarització caòtica és la de l'*atractor d'Smale* [49]. En aquest cas es tracta d'una aplicació de primer retorn invertible i contínua associada a una transformació tridimensional en el pla de Poincaré, és a dir, correspon a un flux contínu quatridimensional.



### IV.3 Resultats numèrics i experimentals de relaminarització quasiperiòdica.

En aquest apartat estudiarem tant numèricament com experimentalment la transició d'una òrbita periòdica a una quasiperiòdica a través d'intermitències de tipus I. Cal remarcar que les intermitències de tipus I són les úniques que permeten una transició d'òrbites periòdiques a quasiperiòdiques. En el cas d'intermitències de tipus II i III la transició sempre es fa d'una òrbita periòdica a una evolució caòtica.

A la part superior de la figura IV.5 podem observar un diagrama de bifurcació numèric on es produeix una transició, de dreta a esquerra, d'òrbita periòdica a quasiperiòdica. El diagrama de bifurcació s'ha calculat utilitzant com a paràmetre de control la freqüència, concretament fem variar la freqüència de la modulació externa ( $\omega_E$ ) entre 0.8 i 0.9 vegades la freqüència pròpia del dispositiu ( $\omega_0$ ).

En la simulació numèrica s'ha fixat l'amplitud de modulació externa  $\psi_{EM}$  a 1.0 i l'amplitud de base  $\psi_{EB}$  a 10.0.

El diagrama de bifurcació s'ha calculat emprant dues tècniques diferents. La part esquerra s'ha obtingut enregistrant 10 punts de la secció estroboscòpica de Poincaré després de deixar passar un transitori llarg, és a dir, representem la secció estroboscòpica assintòtica en el temps. D'aquesta manera, el que observem és la projecció de la secció de Poincaré de les solucions assintòticament estables. A partir d'aquesta projecció ens és impossible determinar si la solució es quasiperiòdica o caòtica. De tota manera, a la figura IV.8 il·lustrarem quatre seccions de Poincaré i podrem comprovar que es tracta de solucions quasiperiòdiques.

La part dreta de la gràfica s'ha calculat emprant tècniques de seguiment i localització d'òrbites periòdiques. Això ens permet registrar tant les solucions estables, com les inestables. També podem calcular els multiplicadors de Floquet que ens donen l'estabilitat de les òrbites periòdiques. En aquest diagrama hem representat la projecció de la secció estroboscòpica de fase interferomètrica  $\psi$  d'aquestes òrbites periòdiques.

Podem observar un canvi sobtat de la solució del sistema per  $\omega_E/\omega_0=0.852386$ . Aquest punt és on es produeix la bifurcació. Per a  $\omega_E/\omega_0>0.852386$  existeixen dues solucions periòdiques. Aquestes solucions periòdiques corresponen a l'harmònic principal de l'acoblament no lineal entre la freqüència pròpia i la de la modulació externa, és a dir, el sistema oscil·la sincronitzat amb la freqüència de la modulació externa. Aquestes solucions equivalen cadascuna a un punt fix diferent de la secció de Poincaré estroboscòpica i es tradueixen en dues branques contínues ( $LC_1$  i  $LC_2$ ) al diagrama de bifurcació. Al punt  $\omega_E/\omega_0=0.852386$  aquestes dues solucions es troben i desapareixen. La solució  $LC_1$  s'ha representat amb una línia contínua i la solució  $LC_2$  amb una línia puntejada.

Un estudi detallat de l'estabilitat d'aquestes dues solucions es troba a la figura inferior. Com que la dimensió del sistema és tres, cada òrbita periòdica té associats tres multiplicadors de Floquet, un dels quals en els sistemes no autònoms és sempre igual a 1. Cal esmentar que només he representat la part real dels multiplicadors de Floquet, ja que la part imaginària és nul·la en tota aquesta zona.

## Diagrama de bifurcació numèric

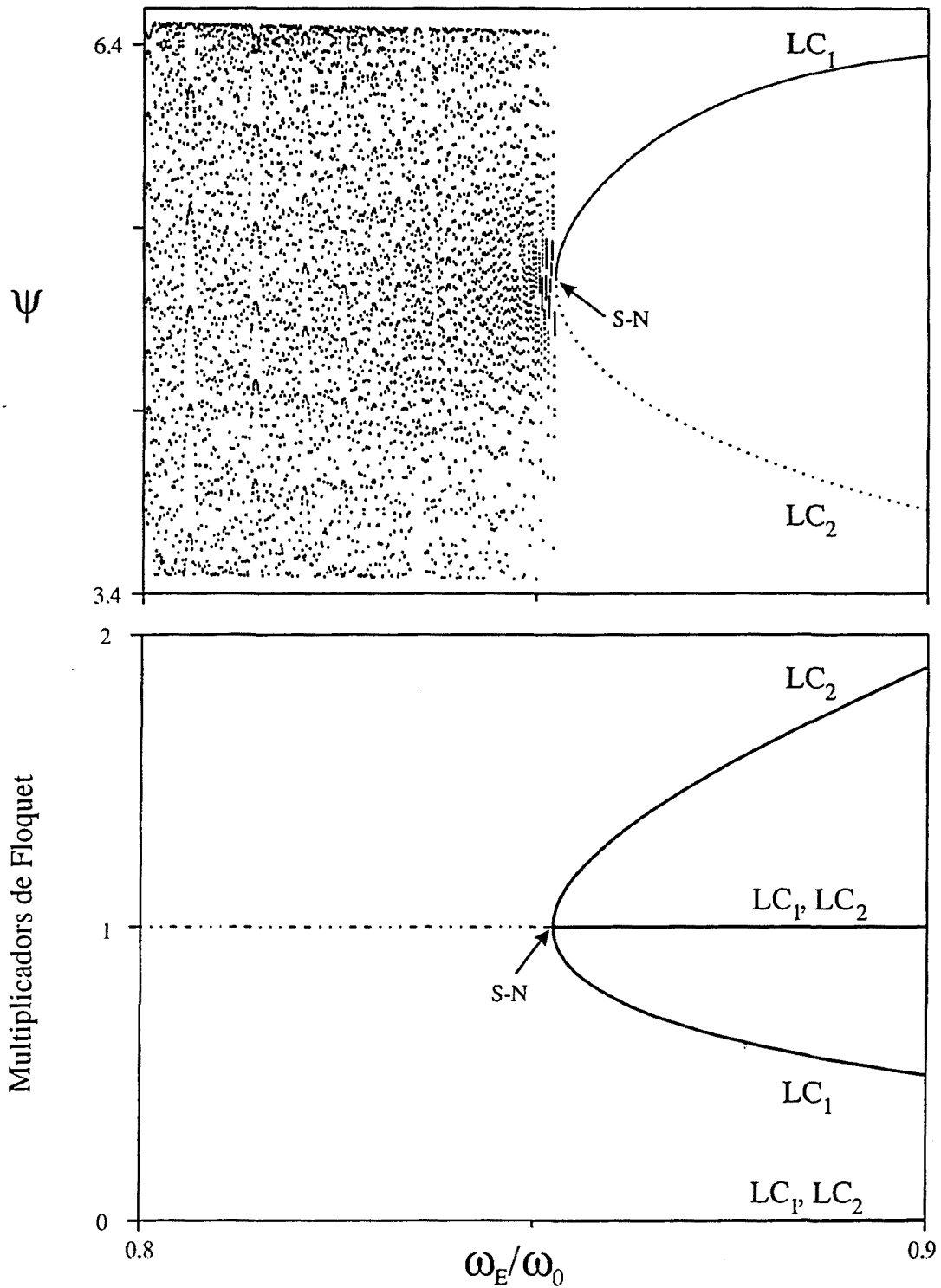
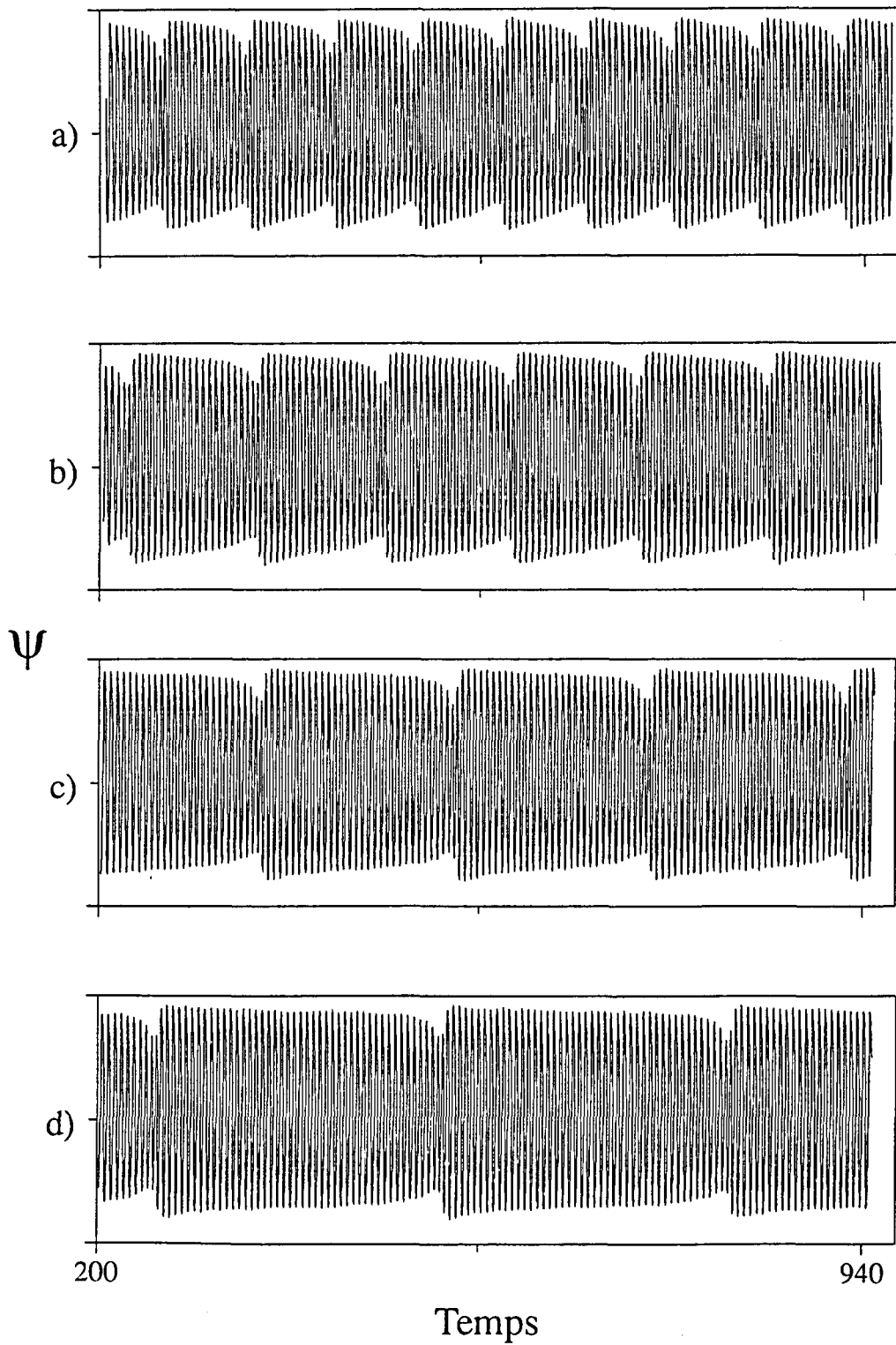


Fig. IV.5 Diagrama de bifurcació numèric i multiplicadors de Floquet corresponents a una bifurcació sella node de cicles límits. A l'esquerra tenim una solució quasiperiòdica, i a la dreta hem representat la solució periòdica estable (línea contínua) i l'òrbita periòdica sella (traç discontinu).

## Evolucions temporals numèriques

Fig IV.6 Evolucions temporals numèriques corresponents a les freqüències  $\omega_E/\omega_0=0.835, 0.844, 0.8485$  i  $0.8505$

## Transformades de Fourier numèriques

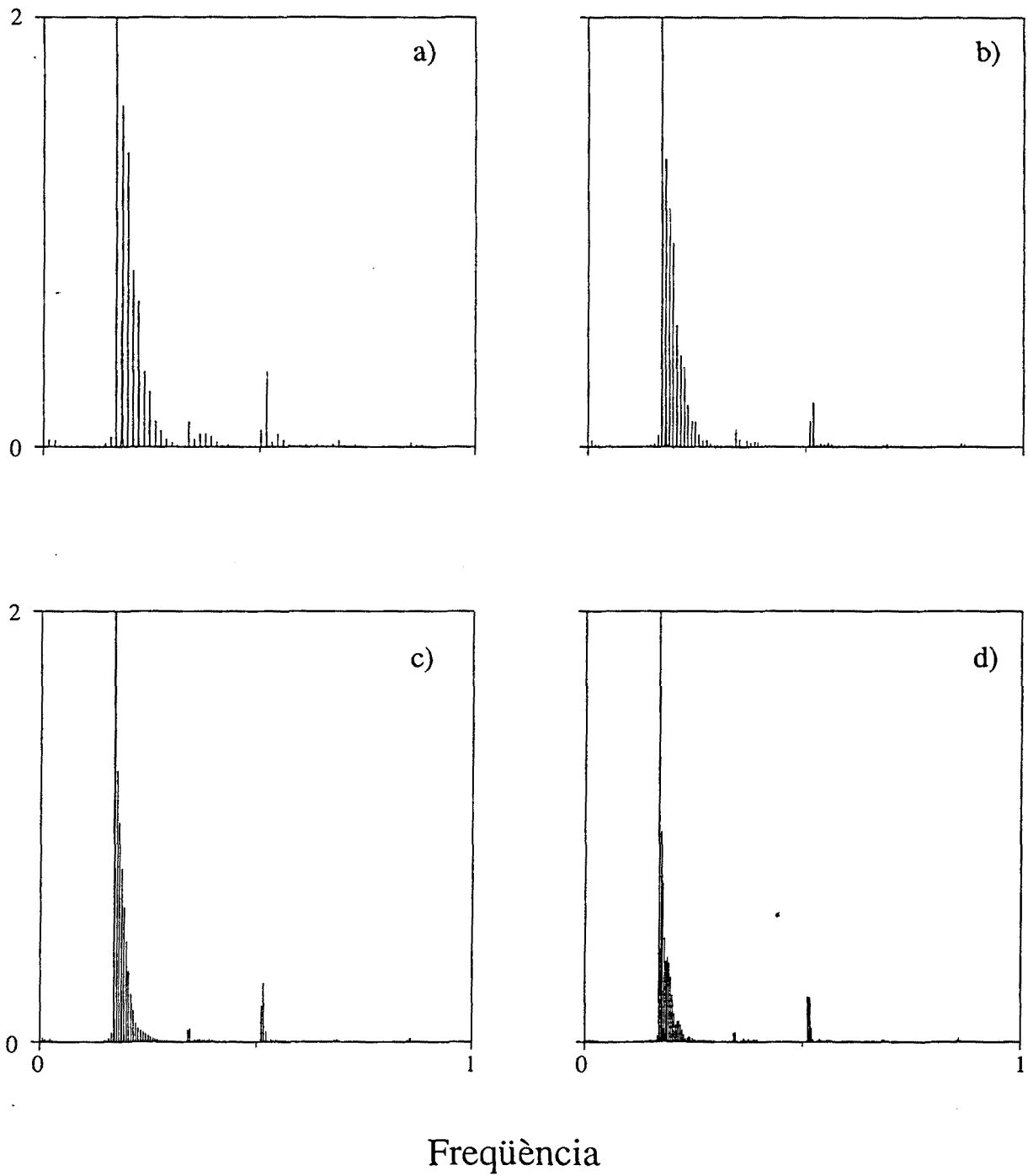


Fig IV.7 Transformades de Fourier per als quatre casos numèrics de la figura IV.6.

## Primers retorns numèrics

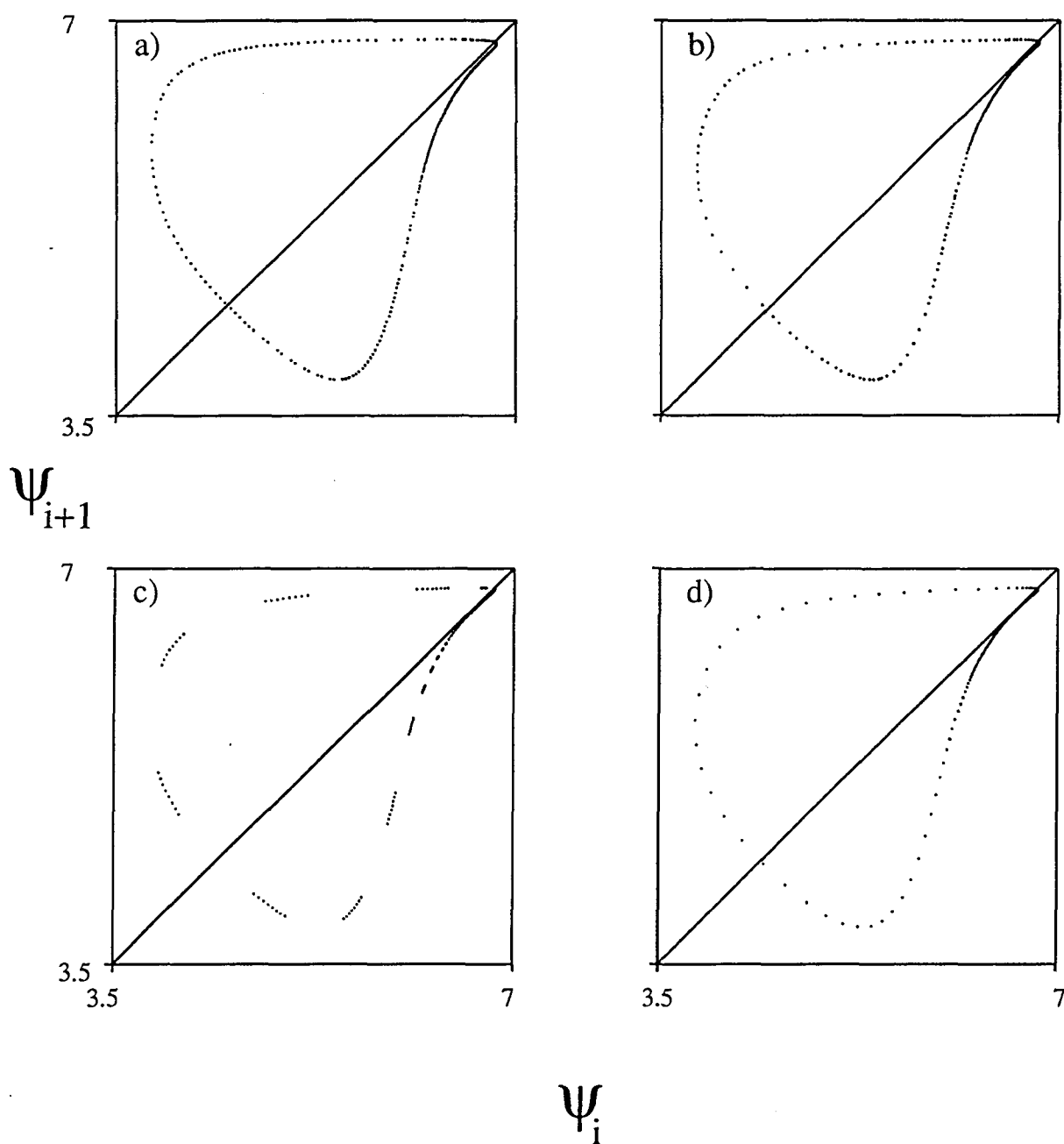


Fig IV.8 Primers retorns estroboscòpics per als quatre casos numèrics de la figura IV.6.

## Diagrama de bifurcació experimental

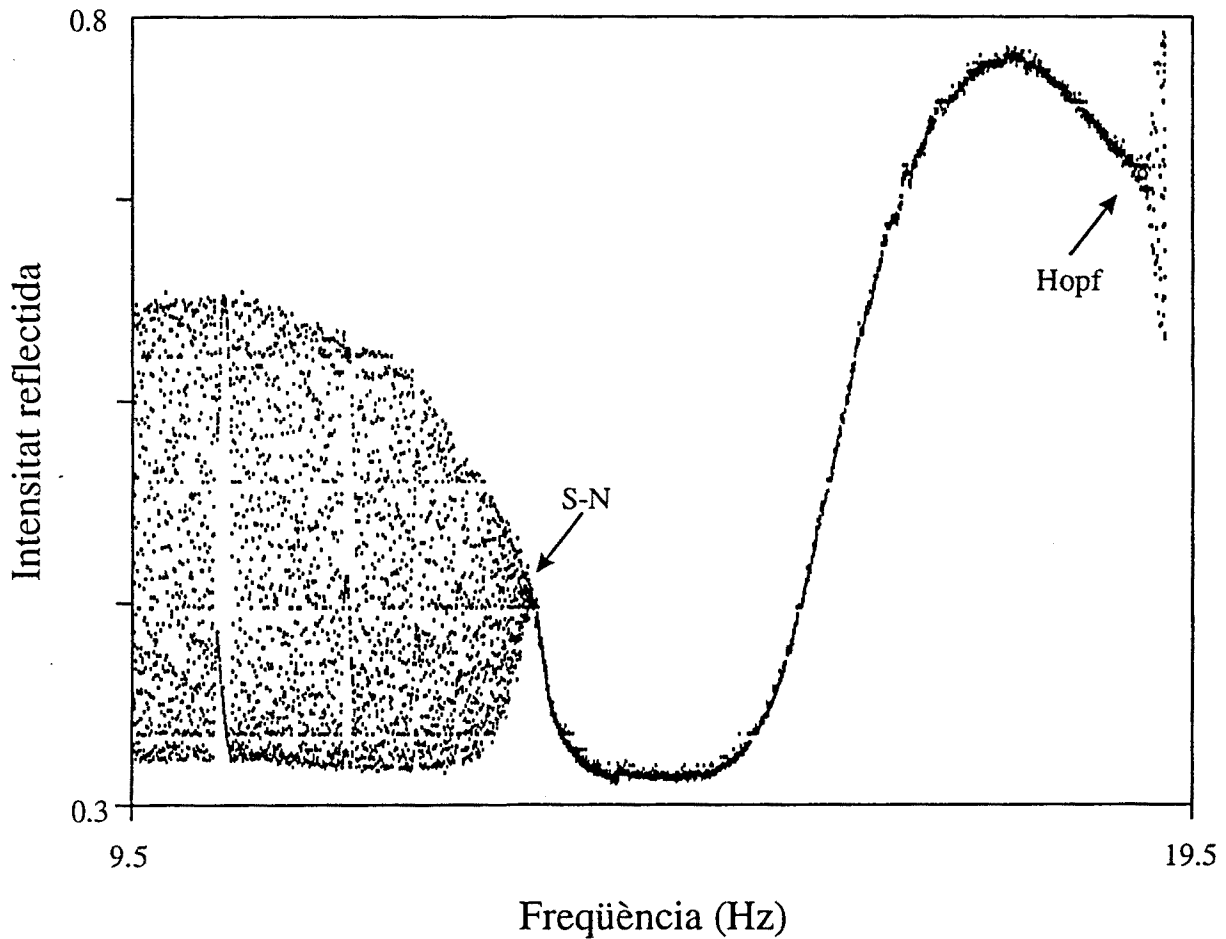


Fig. IV.9 Diagrama de bifurcació experimental. La captació de punts s'ha realitzat estroboscòpicament.

Per a la branca  $LC_1$ , els altres dos multiplicadors són sempre inferiors a 1 excepte per al punt de bifurcació  $\omega_E/\omega_0$  on un dels multiplicadors es iguala a 1. Això vol dir que  $LC_1$  és una òrbita periòdica estable, i en la representació de Poincaré això equival a un punt fix node estable. La branca  $LC_2$ , en canvi, té un multiplicador de Floquet sempre més petit que 1, i l'altre més gran que 1. Això correspon en la representació de Poincaré a un punt fix sella.

A mesura que ens acostem al punt de bifurcació, un multiplicador de Floquet de  $LC_1$  i el multiplicador de Floquet de  $LC_2$ , que és més gran que 1, tendeixen cap a +1. Al punt de bifurcació, les dues solucions s'ajunten i existeix una única solució estable que té dos multiplicadors de Floquet iguals a 1 i un d'inferior a 1. Aquesta òrbita periòdica en la representació de Poincaré correspon a un punt fix no hiperbòdic, és a dir, estructuralment inestable.

A partir d'aquesta anàlisi d'estabilitat podem concloure que la bifurcació que acabem de descriure correspon a una bifurcació tipus sella node de cicles límits, on un dels multiplicadors de Floquet travessa la circumferència unitat del espai complex

per  $+1$ . Així doncs cal esperar que per valors de  $\omega_E/\omega_0 < 0.852386$  trobem intermitències de tipus I.

A partir del diagrama de bifurcació no podem deduir gairebé res del fenomen intermitent. L'únic que es pot observar és una major concentració de punts aprop de la bifurcació sella node en la zona propera a la desaparició de les dues òrbites. Això es degut a l'existència de règims laminars llargs en el temps. En la figura IV.3 hem observat que l'aparició dels règims laminars està associada al canal que apareix entre la bisectriu i el mapa de Poincaré quan no existeixen els dos punts fixos. Aquest canal provoca una concentració de punts del mapa de Poincaré al voltant del canal, concentració que és més gran quan més estret és el canal, és a dir, quan més aprop estem del punt de la bifurcació.

A la figura IV.6 hem representat les evolucions temporals numèriques per a quatre casos de la figura IV.5 corresponents a les freqüències per la modulació externa ( $\omega_E/\omega_0$ ): *a*) 0.835, *b*) 0.844, *c*) 0.8585 i *d*) 0.8505. En aquestes gràfiques he representat la fase interferomètrica  $\psi$  en funció del temps. Les oscil·lacions corresponen a solucions quasiperiòdiques situades a l'esquerra del punt de bifurcació. Els quatre casos formen una seqüència que s'apropa al punt de bifurcació, on el cas *a*) és el més llunyà i el *d*) es el més proper al punt de la bifurcació.

Totes les evolucions presenten regions d'oscil·lacions pràcticament periòdiques que són interrompudes regularment per unes oscil·lacions de diferent amplitud. La forma regular d'aquestes interrupcions posa de relleu el caràcter quasiperiòdic de la solució. Aquestes oscil·lacions de diferent amplitud constitueixen la relaminarització. A més a més, a mesura que ens acostem al punt de la bifurcació, la durada dels règims laminars s'allarga. L'estrenyiment del canal en aproximar-nos al punt de la bifurcació, descrit a l'apartat anterior, implica una disminució de la freqüència mitjana de les interrupcions. Atès que les interrupcions són regulars, això comporta aquest estirament dels règims laminars.

L'aparició d'interrupcions i la disminució de la freqüència mitjana de les interrupcions és un fenomen característic de tots els tipus intermitències. Tot i això, podem concloure immediatament que aquestes intermitències són de tipus I donat el caràcter quasiperiòdic de l'oscil·lació, ja que les intermitències de tipus II i III impliquen necessàriament l'existència d'atractors caòtics [49].

A la figura IV.7 s'han representat les transformades de Fourier numèriques per als quatre casos de la figura IV.6. Si estudiem detingudament la figura IV.7.a, podem observar l'existència d'un pic principal i un altre pic de l'harmònic superior, al voltant dels quals hi ha tota una sèrie de pics molt propers. La primera cosa que podem deduir és que el senyal no és caòtic sinó quasiperiòdic. La solució quasiperiòdica es pot descomposar en dues freqüències bàsiques incommensurables, a partir de les quals mitjançant combinacions lineals podem reconstruir tots els pics de l'espectre. És fàcil, doncs, observar que una de les freqüències bàsiques és molt més petita que l'altra. En el nostre cas una de les freqüències bàsiques està associada als règims laminars, mentre que l'altra està associada a les interrupcions regulars. En anar apropant-nos al punt de bifurcació, la distància entre interrupcions augmenta, és a dir, el període associat a les interrupcions tendeix a infinit, mentre que el període de les oscil·lacions del règim laminar pràcticament no varia. Així doncs, les dues freqüències bàsiques són molt diferents, essent la corresponent a les interrupcions

molt més petita que l'associada als règims laminars. Aquest fenomen es reflecteix en l'espectre amb l'aparició d'un grup de pics molt propers al pic principal, la distància entre aquests pics ve donada per la freqüència d'aparició d'irregularitats. Aquesta freqüència tendeix a zero en acostar-nos al punt de la bifurcació, de manera que en els successius gràfics de la figura IV.7 els pics apareixen cada cop més junts. Quan arribem al punt de la bifurcació, aquests pics han desaparegut i només queda el pic principal i els seus harmònics superiors que constitueixen l'espectre de la solució periòdica.

La figura IV.8 he representa els primers retorns calculats a partir de les evolucions numèriques de la figura IV.6. En aquestes seccions s'ha representat el primer retorn de la fase interferomètrica  $\psi$  enregistrada estroboscòpicament. Per a cada secció es representen 500 punts. En aquestes seccions els punts formen corbes tancades. Aquestes corbes són difeomòrfiques a una circumferència i, tal i com hem vist al capítol I, això fa palès el caràcter quasiperiòdic de les solucions. Podem distingir en aquestes corbes una zona molt atapeïda de punts. Aquesta zona és pràcticament tangent a la bisectriu i correspon al canal descrit a la introducció teòrica. Quan més aprop estem del punt de la bifurcació, la distància entre aquesta zona de la corba i la bisectriu disminueix, és a dir, el canal es fa més i més estret. La resta de la corba és la responsable de la relaminarització. A mesura que ens acostem al punt de la bifurcació observem que hi ha menys punts, això vol dir que, per al mateix nombre d'oscil·lacions el nombre d'interrupcions dels règims laminars disminueix en apropar-nos al punt de la bifurcació.

A la figura IV.9 hem representat un diagrama de bifurcació experimental utilitzant com a paràmetre de control la freqüència de la modulació externa. Aquest diagrama de bifurcació l'hem construït fent variar la freqüència de la modulació externa contínuament i representant per una freqüència donada quinze valors de la intensitat reflectida captada estroboscòpicament en temps real al laboratori.

En aquest diagrama es pot observar la totalitat de la finestra periòdica corresponent a l'acoblament no lineal entre la freqüència de la modulació externa i la pròpia del dispositiu. En aquesta finestra periòdica el sistema oscil·la a la freqüència de la modulació externa. Aquesta finestra està limitada pels dos costats per dues zones quasiperiòdiques. La transició, situada a la dreta, de la finestra periòdica a la zona quasiperiòdica es fa mitjançant una bifurcació de Hopf de segon ordre. La transició al costat esquerre es fa mitjançant una transició tipus sella node d'òrbites periòdiques. En aquesta última zona estudiarem el fenomen de les intermitències de tipus I.

La figura IV.10 representa quatre evolucions temporals experimentals properes al punt de bifurcació. Aquestes evolucions han estat obtingudes per a quatre valors diferents de la modulació externa : a) 38.03, b) 38.04, c) 38.08 i d) 38.12 Hz. L'amplitud de la modulació i la intensitat de base són fixos i valen 0.35 Volts i 1 Volt respectivament.

Podem observar que existeix una gran coincidència entre els resultats numèrics i els experimentals. Les interrupcions apareixen a intervals regulars, és a dir, aquestes oscil·lacions corresponen a un moviment quasiperiòdic. La longitud dels règims regulars augmenta en apropar-nos al punt de bifurcació. En aquest punt ens podem



## Evolucions temporals experimentals

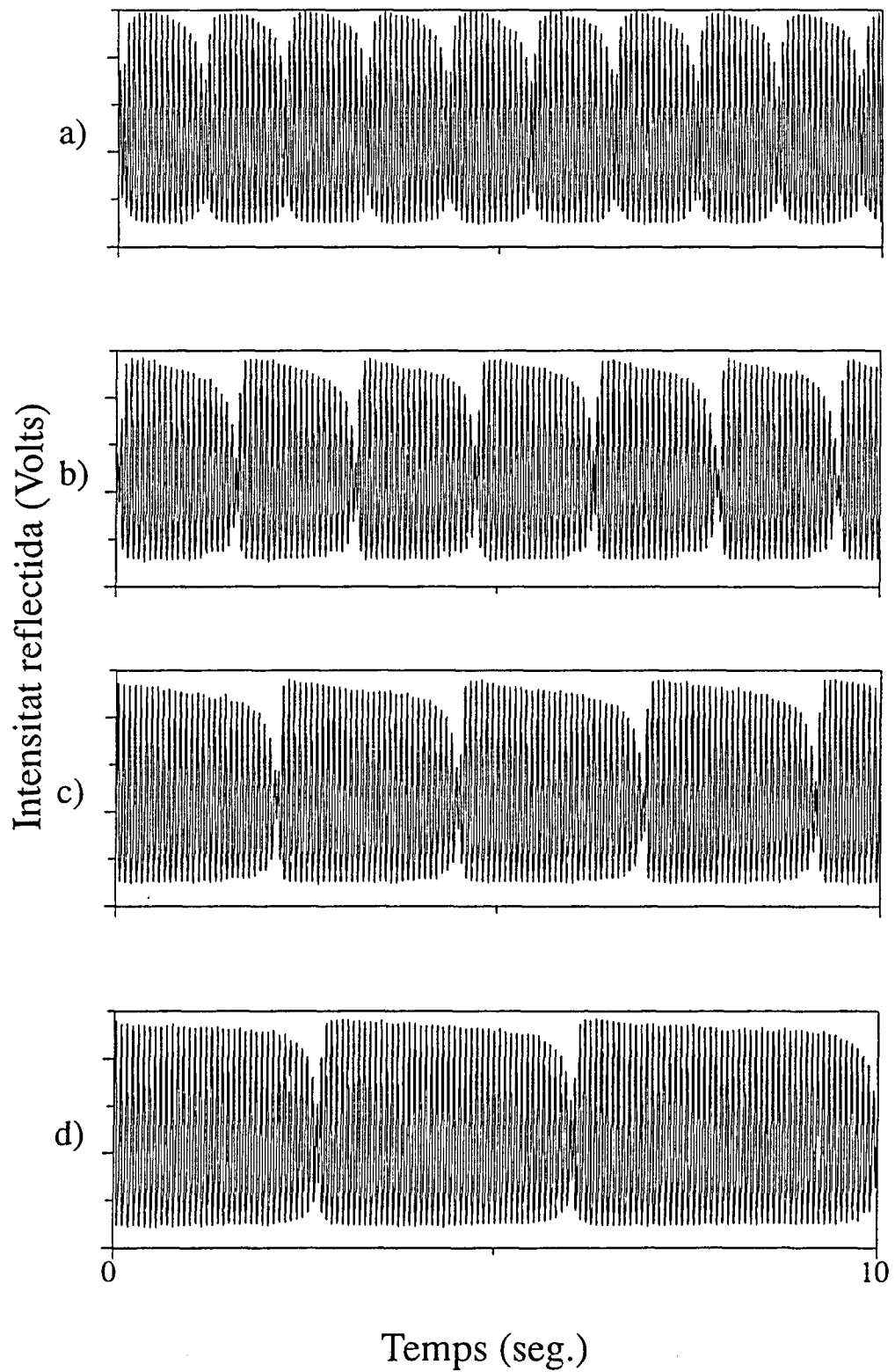


Fig. IV.10 Evolucions temporals experimentals per a quatre valors diferents de la modulació externa.

## Transformades de Fourier experimentals

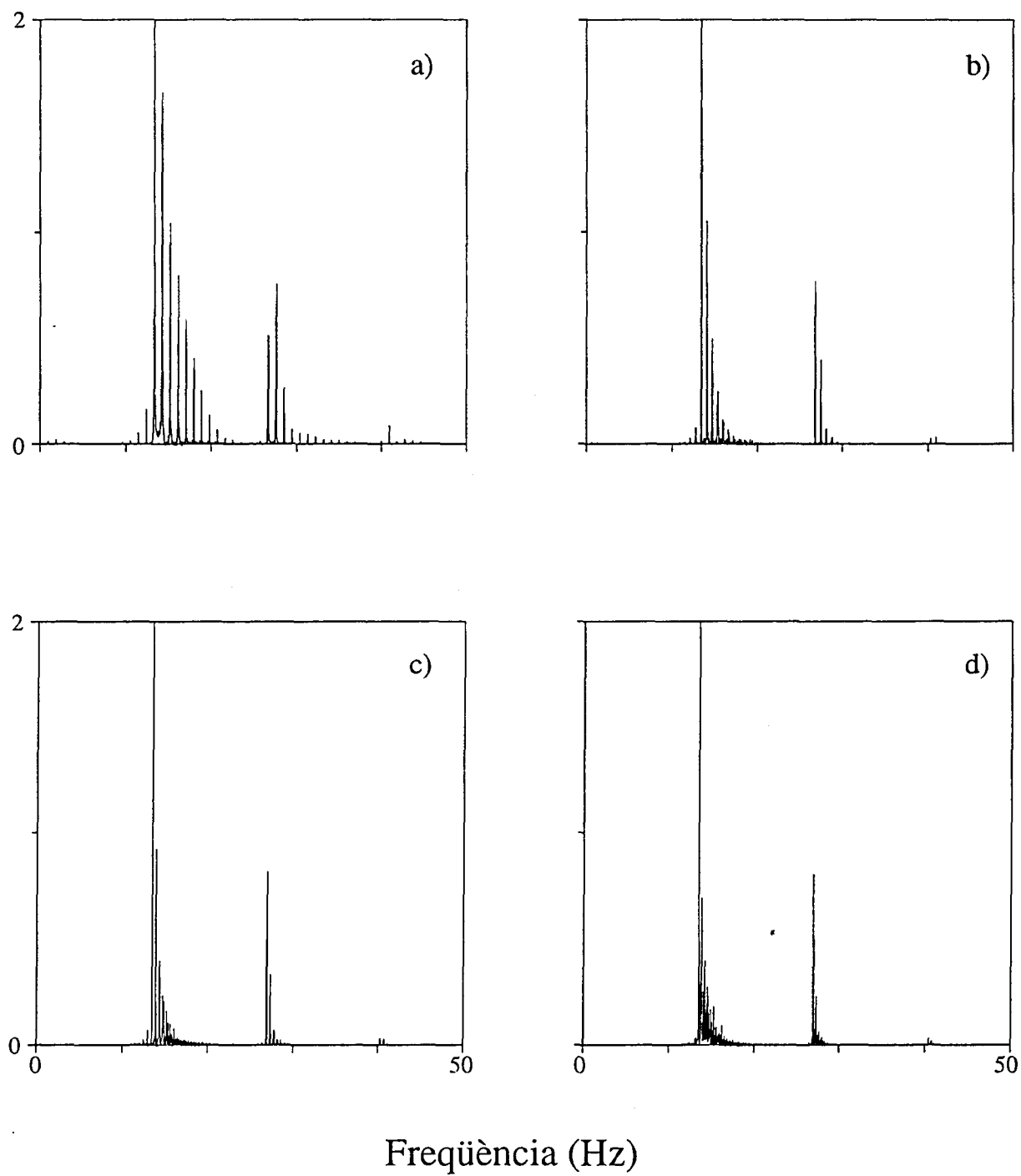


Fig. IV.11 Transformades de Fourier de les quatre evolucions temporals experimentals de la figura IV.10.

## Primers retorns experimentals

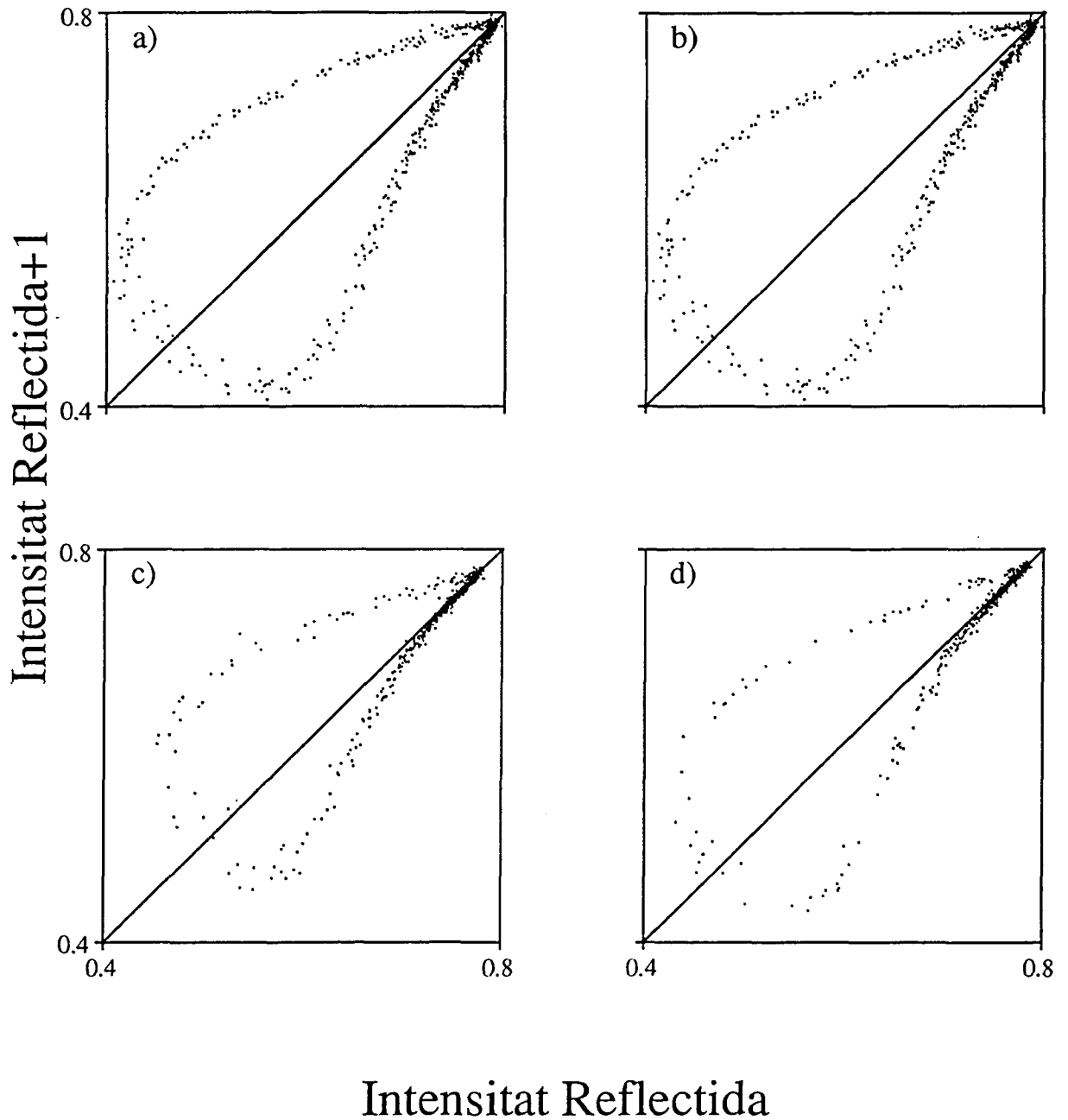


Fig. IV.12 Primers retorns estroboscòpics calculats a partir de les quatre evolucions temporals experimentals de la figura IV.10.

adonar de l'estabilitat del sistema per registres llargs en el temps. La longitud dels règims laminars depèn de forma crítica en els condicions experimentals a mesura que ens acostem al punt de bifurcació. Tot i això, els registres experimentals conserven el seu caràcter regular per intervals de temps llargs. A més, tal com hem esmentat abans, aquest caràcter regular de les interrupcions ens assegura que les intermitències són de tipus I.

A la figura IV.11 tenim les transformades de Fourier corresponents a les evolucions temporals experimentals dels quatre casos anteriors. Aquestes transformades de Fourier s'han calculat a partir de 33.000 punts. Els quatre espectres mostren clarament el caràcter quasiperiòdic de les evolucions. Cal destacar un altre cop que, tot i que una de les freqüències bàsiques sigui molt més petita que l'altra tenim prou resolució per distingir-les. Durant tot aquest capítol cal tenir presents aquests resultats, ja que això ens permetrà distingir el caràcter caòtic dels senyals que presentaré en els propers apartats respecte el caràcter quasiperiòdic dels senyals que estem analitzant.

A la figura IV.12 s'han representat les seccions de primer retorn estroboscòpics corresponents a les evolucions temporals experimentals dels quatre casos anteriors. Aquestes seccions contenen aproximadament uns 500 punts. En aquestes seccions observem l'existència del canal entre la bisectriu i la corba, característic de les intermitències, i la relaminarització en forma de corba tancada característica de les solucions quasiperiòdiques. La distància entre la corba i la bisectriu disminueix en apropar-nos al punt de bifurcació mentre que el nombre de punts de la relaminarització disminueix.

#### IV.4 Resultats numèrics i experimentals de relaminarització caòtica.

En aquest apartat aportarem evidències tant numèriques com experimentals d'intermitències de tipus I caòtiques en el dispositiu bicapa modulad.

Un estudi local de l'estabilitat d'una bifurcació sella node d'òrbites periòdiques no pot discernir el caràcter caòtic de les intermitències. A la Figura IV.13 s'ha representat un diagrama de bifurcació numèric i la seva corresponent anàlisi d'estabilitat a través dels multiplicadors de Floquet. Les conclusions que s'extreuen del estudi d'estabilitat d'aquest diagrama i del de la figura IV.5 són pràcticament equivalents. No hi ha cap diferència que deixi entreveure el caràcter caòtic de les intermitències. La naturalesa caòtica de les intermitències s'ha de determinar a partir de la relaminarització.

La figura IV.13 s'ha calculat emprant les mateixes tècniques de la gràfica IV.5. El diagrama de bifurcació s'ha realitzat utilitzant com a paràmetre de control la freqüència de la modulació externa, concretament fent variar la freqüència externa  $\omega_E$  entre 2.2 i 2.35 vegades la freqüència pròpia del dispositiu  $\omega_0$ . En la simulació s'ha fixat l'amplitud de modulació  $\psi_{EM}$  a 3 i la fase d'entrada de base  $\psi_{EB}$  a 10.

El punt de bifurcació es dona per a  $\omega/\omega_0=2.32121$ . Per valors inferiors el sistema té un comportament periòdic. Aquest comportament periòdic correspon a la finestra periòdica resultant de l'acoblament entre la freqüència de la modulació

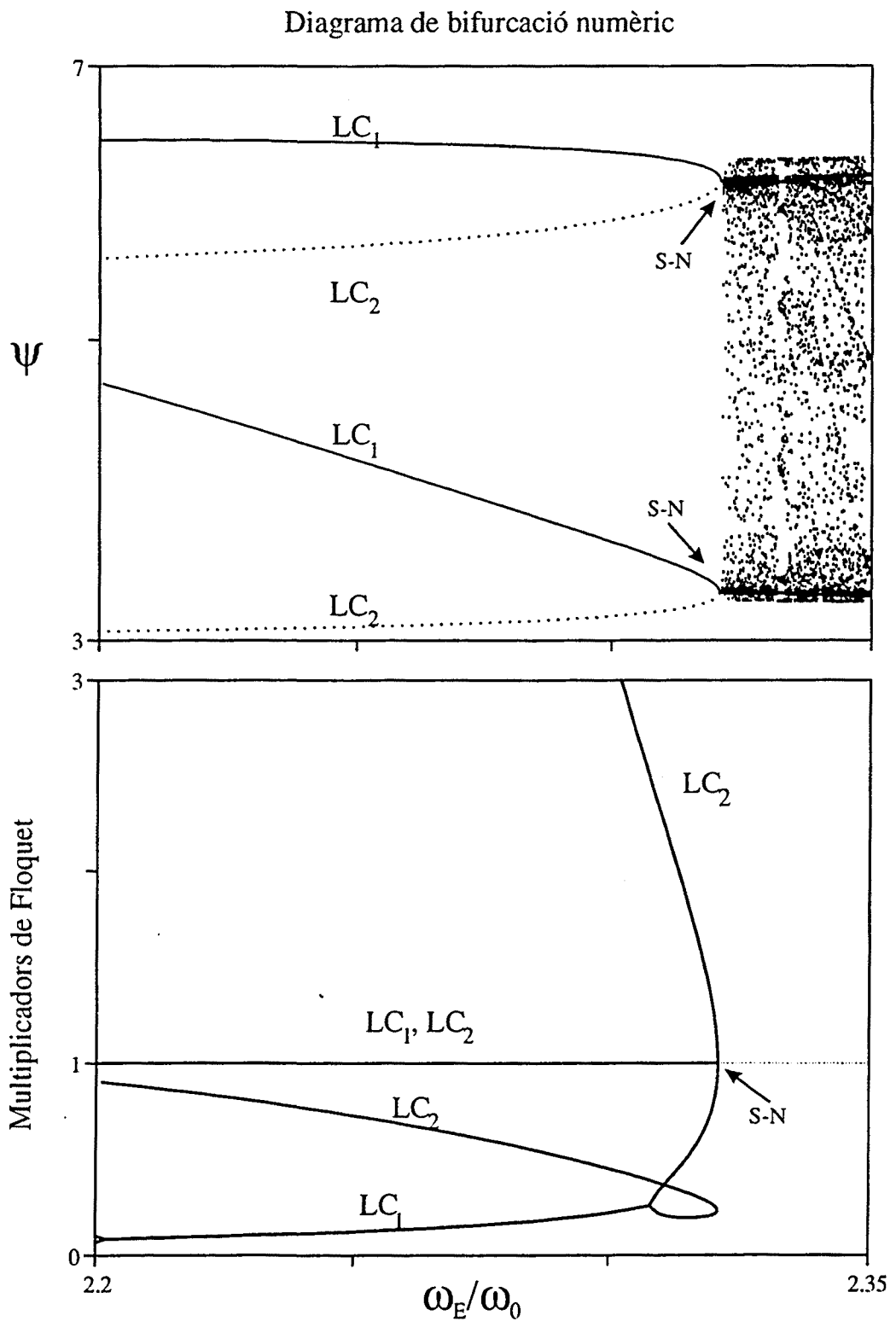


Fig. IV.13 Diagrama de bifurcació numèric i multiplicadors de Floquet corresponents a una bifurcació sella node d'òrbites de període dos. A l'esquerra hi ha dues solucions: una òrbita periòdica estable  $LC_1$  i una òrbita sella  $LC_2$ , i a la dreta les solucions són caòtiques.

externa i la pròpia del dispositiu. La freqüència d'oscil·lació resultant per al dispositiu modulad és igual a la meitat de la freqüència de la modulació externa. És a dir, el sistema oscil·la amb un període doble al de la modulació externa, de manera que, en fer la secció estroboscòpica, apareixen dos punts fixos corresponents a una única òrbita periòdica. Al diagrama de bifurcació això es tradueix en l'aparició de quatre branques que corresponen a dues òrbites periòdiques  $LC_1$  i  $LC_2$ .  $LC_1$  es representa en traç continu i  $LC_2$  en traç puntejat. El punt on les quatre branques s'ajunten dos a dos correspon a una única bifurcació sella node de les òrbites periòdiques. Cal tenir present que no es produeixen dues bifurcacions sella node simultàniament, ja que, cada parell de branques representa una única solució periòdica.

Les sis parts reals dels multiplicadors de Floquet corresponents a aquestes dues òrbites periòdiques estan representats a la gràfica inferior de la figura IV.13. Els tres multiplicadors de Floquet associats a  $LC_2$  són reals. Un d'ells és sempre igual a 1, un altre és sempre inferior a 1 i l'altre és sempre superior a 1, per tant  $LC_2$  és una òrbita periòdica tipus sella. Els multiplicadors de Floquet associats a  $LC_1$  no són sempre reals, ara bé, això no té cap importància ja que al voltant del punt de bifurcació tots tres multiplicadors de Floquet són reals. La zona on els dos multiplicadors de Floquet són complexos conjugats és la branca on les seves parts reals estan superposades. Però hi ha un punt, anterior al punt de bifurcació, on aquesta branca es desdobra en dues noves corresponents a dos multiplicadors de Floquet reals.

El mòdul d'aquests dos multiplicadors de Floquet és sempre inferior a 1, i l'altre multiplicador de Floquet és sempre igual a 1 de manera que  $LC_1$  és una òrbita estable. A mesura que ens acostem al punt de bifurcació, un multiplicador de Floquet de  $LC_2$  es fa petit tendint a +1, i un multiplicador de Floquet de  $LC_1$  creix tendint també a +1, tal i com succeïa a la figura IV.5.

La part dreta del diagrama de bifurcació correspon a una zona caòtica. Aquesta naturalesa caòtica no es pot distingir d'una solució quasiperiòdica a partir del diagrama de bifurcació, ja que es tracta d'una projecció de la secció de Poincaré. Més endavant, a partir de les seccions de Poincaré d'uns casos concrets, demostraré la naturalesa caòtica de les solucions situades a la dreta del punt de bifurcació. En aquest cas però, podem observar amb més claredat que a la gràfica IV.5, la concentració de punts que es dona aprop de la bifurcació sella node a la zona propera a la desaparició de les dues òrbites. Aquest fenomen és resultat de la concentració de punts al voltant del canal que hi ha entre el mapa de Poincaré i la bisectriu.

Les bifurcacions sella node tot i ser locals es poden confondre amb bifurcacions globals. Les bifurcacions sella node tenen la peculiaritat respecte a la resta de les bifurcacions locals que impliquen la destrucció i desaparició de la solució periòdica. Passat el punt de bifurcació no existeix la solució periòdica. En el cas del diagrama de bifurcació de la figura IV.13, la destrucció de l'òrbita periòdica ve acompanyada de l'aparició d'un nou atractor caòtic. Aquest fenomen també es pot interpretar al revés: si disminuïm la freqüència de la modulació externa, observem la destrucció de l'òrbita caòtica i l'aparició d'una òrbita periòdica. Una bifurcació homoclínica resultant de la tangència d'un atractor caòtic amb una òrbita sella també implica la destrucció de l'atractor caòtic. Podem observar al voltant d'aquestes dues bifurcacions una dinàmica semblant. Si partim d'un valor del paràmetre de control per al qual existeix un atractor caòtic i ens acostem al punt de la bifurcació, observarem en

ambdós casos la destrucció del atractor caòtic i l'aparició d'una solució periòdica estable. Com podem distingir si s'ha tractat d'una bifurcació tipus sella node o de una bifurcació homoclínica ?

No n'hi ha prou amb l'observació de l'aparició de règims laminars dins l'atractor caòtic per afirmar l'existència d'intermitències de tipus I. Com veurem al capítol VI, en les bifurcacions homoclíniques l'acostament de l'atractor caòtic a l'òrbita sella té associat un fenomen assimp tòtic. Aquest fenomen consisteix en l'acumulació de trajectòries de l'atractor caòtic al voltant de l'òrbita sella, això significa que també apareixen oscil·lacions pseudoperiòdiques a l'evolució caòtica que es poden confondre amb els regims laminars característics de les intermitències.

Hi ha dues característiques que ens permeten distingir les dues bifurcacions: la continuïtat a l'espai de les fase i l'histèresi.

En les bifurcacions sella node la transició de l'atractor caòtic o quasiperiòdic a l'òrbita periòdica es fa de forma contínua; a mesura que ens acostem al punt de la bifurcació, la freqüència mitja de les turbulències tendeix a zero i, per tant, la longitud mitjana dels règims laminars tendeix a infinit. La forma i el període de les oscil·lacions del règim laminar i de l'atractor periòdic són pràcticament els mateixos. En la secció de Poincaré el nou punt fix corresponent a l'atractor periòdic apareix al punt on el mapa fa tangència. En canvi, tal com veurem al capítol VI, en les bifurcacions homoclíniques la transició de l'atractor caòtic és fa de forma discontinua; quan l'atractor caòtic es destrueix, es produeix un salt cap a una òrbita periòdica que existeix amb independència de l'atractor caòtic. En les bifurcacions homoclíniques es destrueix la conca d'atracció de l'atractor caòtic i hi ha un canvi global dels fluxos a l'espai de les fases. No podem observar cap tipus de continuïtat ni en les seccions de Poincaré, ni en les transformades de Fourier, ni en la forma de les oscil·lacions. La continuïtat en les intermitències també es pot comprovar quantitativament mitjançant un càlcul estadístic que introduiré al proper apartat.

En la bifurcació global, l'existència de l'atractor periòdic és independent de la de l'atractor caòtic, és a dir, si un cop passada la bifurcació tornem enrera variant el paràmetre de control, el sistema romandrà a l'òrbita periòdica. De fet, les dues solucions coexisteixen en l'espai de les fases amb conques d'atracció diferents. Aquest fenomen d'histèresi és característic de les bifurcacions globals. En canvi, en les bifurcacions sella node no coexisteixen les dues solucions i no es dona el fenomen d'histèresi.

La figura IV.14 representa les evolucions numèriques temporals de la fase reflectida per als quatre casos de la figura IV.13 amb valors diferents en la freqüència de la modulació externa. Els quatre casos corresponen a punts propers al punt de bifurcació sella node. Les diferents evolucions s'han obtingut per als següents valors de  $\omega_E/\omega_0$  : a) 2.3213, b) 2.3216, c) 2.3226 i d) 2.3265.

En aquestes evolucions, a diferència del cas de la figura IV.6, les interrupcions no apareixen de forma regular, sinó que apareixen de forma irregular. Aquestes fluctuacions erràtiques tenen una durada mitjana ben definida, i acaben tornant al règim laminar que és alhora interromput per una altra fluctuació erràtica. Aquestes fluctuacions erràtiques són resultat de l'existència d'una relaminarització caòtica. De tota manera, ara no podem assegurar, com en el cas de l'apartat anterior, que es tracti

## Evolucions temporals numèriques

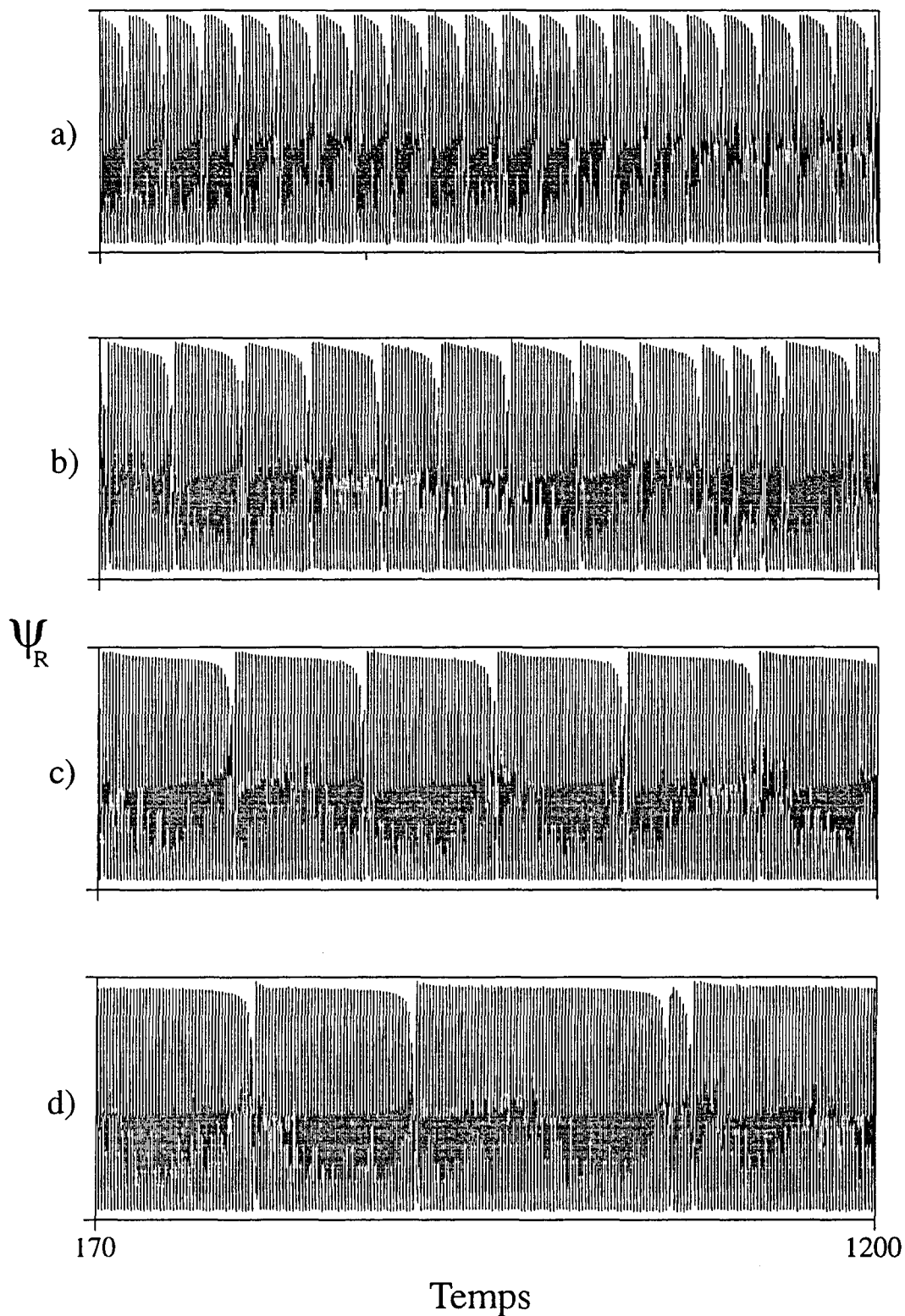


Fig IV.14 Evolucions temporals numèriques corresponents a les freqüències  $\omega/\omega_0=2.3213, 2.3216, 2.3226$  i  $2.3265$ .



## Transformades de Fourier numèriques

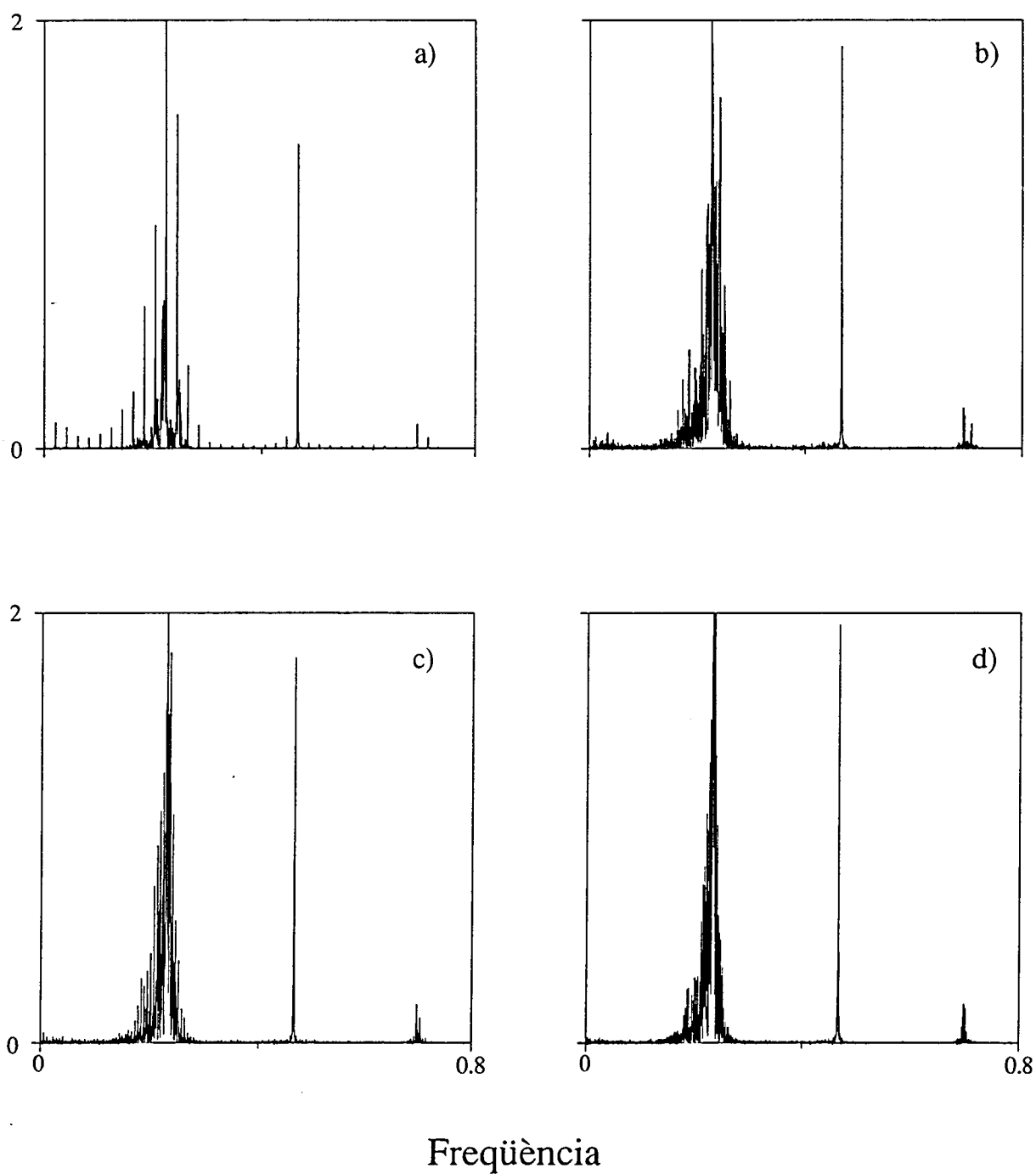


Fig IV.15 Transformades de Fourier dels quatre casos numèrics de la figura IV.14.

## Primers retorns numèrics

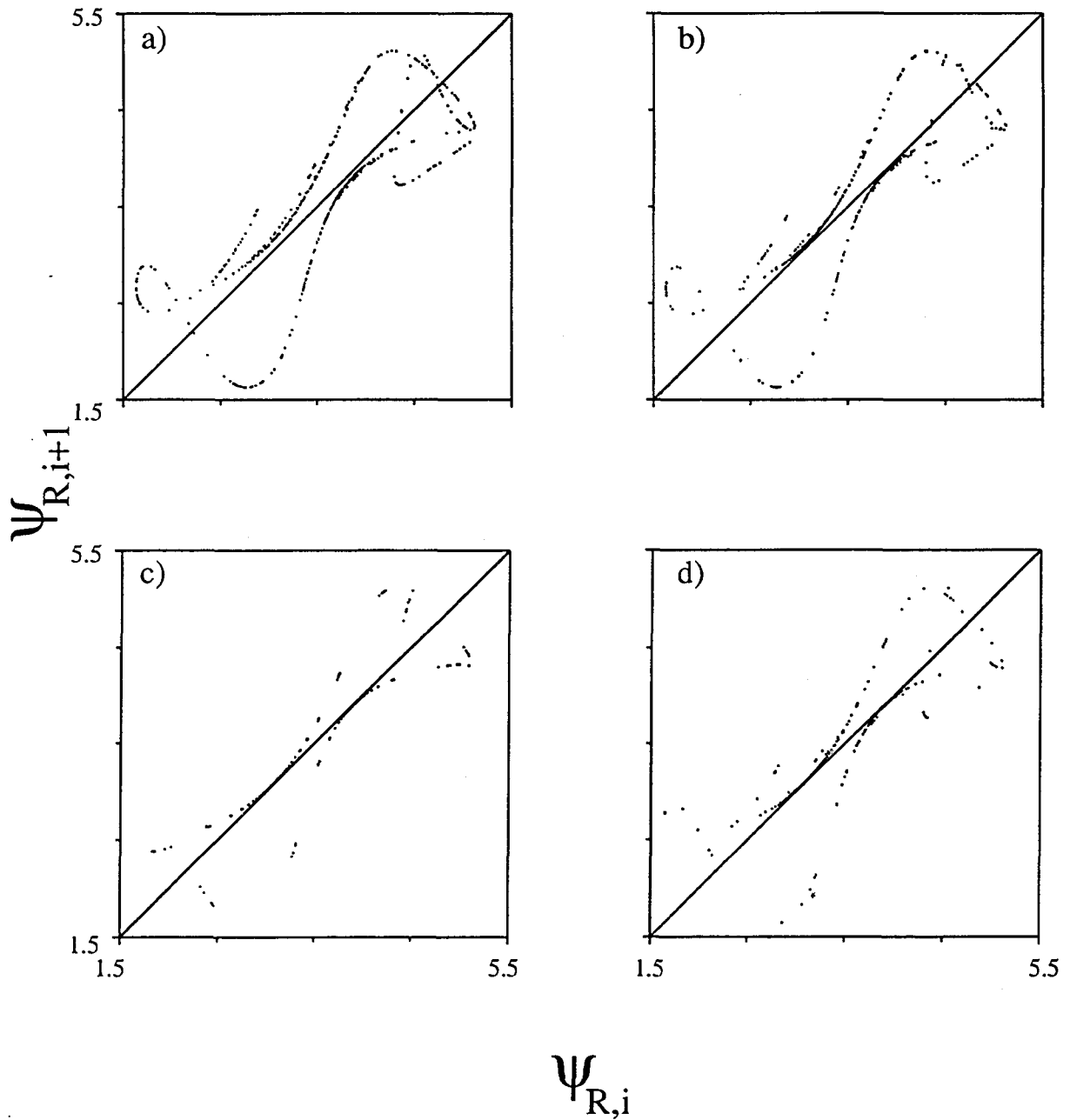


Fig IV.16 Primers retorns estroboscòpics dels quatre casos numèrics de la figura IV.14.

d'intermitències de tipus I. Podriem excloure les intermitències de tipus III a partir d'un examen de la forma de les oscil·lacions. En les oscil·lacions de les intermitències de tipus III apareix el creixement d'una oscil·lació subharmònica en el règim laminar que no s'observa a la figura IV.14. Tanmateix aquest raonament és pobre i gens fiable. En aquest cas, un cop vist l'estudi local d'estabilitat de la figura IV.13, podem estar segurs que es tracta de intermitències de tipus I ja que l'inestabilitat apareix quan un multiplicador de Floquet surt del cercle unitari l'espai complex per +1. Ara bé, quan tractem resultats experimentals no disposem d'aquesta anàlisi, i per tant, ens calen altres mètodes per caracteritzar les intermitències de tipus I. Hi han dos tipus d'anàlisis diferents que permeten discernir aquest conflicte; d'una banda, com veurem tot seguit, qualitativament a partir de l'aplicació de primer retorn, i d'altra banda, quantitativament tal i com presentarem en el següent apartat.

Abans hem vist que la durada dels règims laminars augmentava en apropar-nos al punt de bifurcació, aquesta circumstància no es dona quan les intermitències son caòtiques, per exemple, podem observar que a la gràfica IV.14.d que hi ha un règim laminar més curt que qualsevol dels de la figura IV.14.a, tot i que aquest darrer es troba més lluny del punt de bifurcació. Cal tenir present que quan ens apropem al punt de bifurcació la freqüència mitjana de les fluctuacions tendeix a zero. El que podem observar és que per al mateix interval de temps, hi ha moltes menys fluctuacions a l'evolució de la figura IV.14.d que a la figura IV.14.a.

A la figura IV.15 hem representat les transformades de Fourier corresponents als quatre casos numèrics de la figura IV.14. Aquestes transformades han estat calculades a partir de 32.768 punts. La primera gran diferència que podem observar amb les transformades de Fourier de la figura IV.7 és l'aparició de bandes contínues al voltant del harmònic principal i dels seus harmònics superiors. Aquest harmònic principal és igual a la meitat de la freqüència de la modulació externa i està associat als règims laminars. Les bandes de freqüència contínues denoten el caràcter caòtic de les evolucions i estan associades a les relaminaritzacions. També podem observar com l'amplada d'aquestes bandes es redueix sensiblement en apropar-nos a la bifurcació sella node.

La figura IV.16 representa els primers retorns estroboscòpics de la fase reflectida per als quatre casos numèrics de la figura IV.14. En aquestes seccions podem observar l'aparició de dues zones on s'acumulen els punts. Entre aquestes dues zones i la bisectriu ens apareix el canal responsable del règim laminar. El fet que apareixin dues zones en comptes d'una no té cap relevància especial. Recordem que l'òrbita periòdica que s'inestabilitza a partir de la bifurcació sella node, és una òrbita de període doble al de la modulació externa, i això en el mapa de Poincaré estroboscòpic correspon a dos punts. L'amplada dels dos canals es va reduint simultàniament en acostar-nos a la bifurcació. En canvi, el número de punts de la relaminarització és reduït, és a dir, el sistema tarda més temps en passar el canal. La relaminarització ara no té la forma d'una corba tancada sinó que presenta una estructura molt complexa, això evidencia la naturalesa caòtica de les evolucions.

A partir d'ara presentaré tot un seguit de resultats experimentals on podrem observar intermitències de Tipus I caòtiques i constatar l'alt grau de coincidència entre l'experiment i els resultats numèrics.

## Diagrama de bifurcació experimental

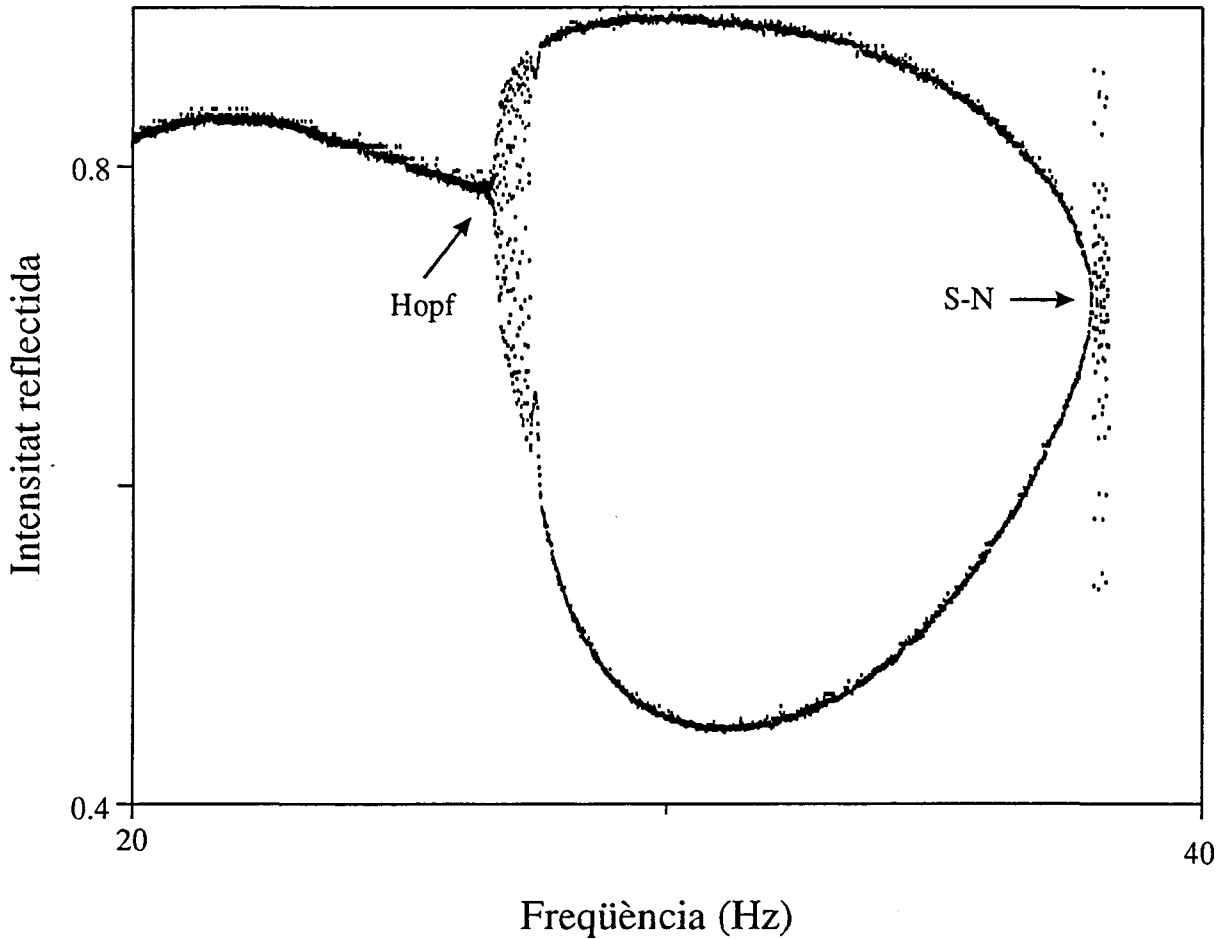


Fig. IV.17 Diagrama de bifurcació experimental. La captació de punts s'ha realitzat estroboscòpicament.

A la figura IV.17 he representat un diagrama de bifurcació estroboscòpic experimental de la intensitat reflectida. Aquest diagrama s'ha obtingut fixant l'amplitud de la modulació externa a 0.35 Volts i la intensitat de base a 1 Volt. La freqüència de la modulació externa s'ha fet variar entre 20 i 40 Hz. En aquest diagrama existeixen dues finestres periòdiques, una situada a l'esquerra, i que correspon a l'acoblament no lineal  $\omega_E/\omega_0=1$ , i l'altra situada a la dreta, i que correspon a  $\omega_E/\omega_0=2$ . La freqüència de les oscil·lacions per a la primera és igual a  $\omega_E$  (període u) mentre que per a la segona és  $\omega_E/2$  (període dos). Entre la finestra de període u i la de període dos existeix una zona d'oscil·lacions quasiperiòdiques. La transició de la finestra de període u a la zona quasiperiòdica es fa a través d'una bifurcació de Hopf de segon ordre. La transició entre la zona quasiperiòdica i la finestra de període dos és fa a través d'una bifurcació sella node. A la dreta de la figura IV.17, la finestra de període dos desapareix a través d'una bifurcació sella node.

Evolucions temporals experimentals

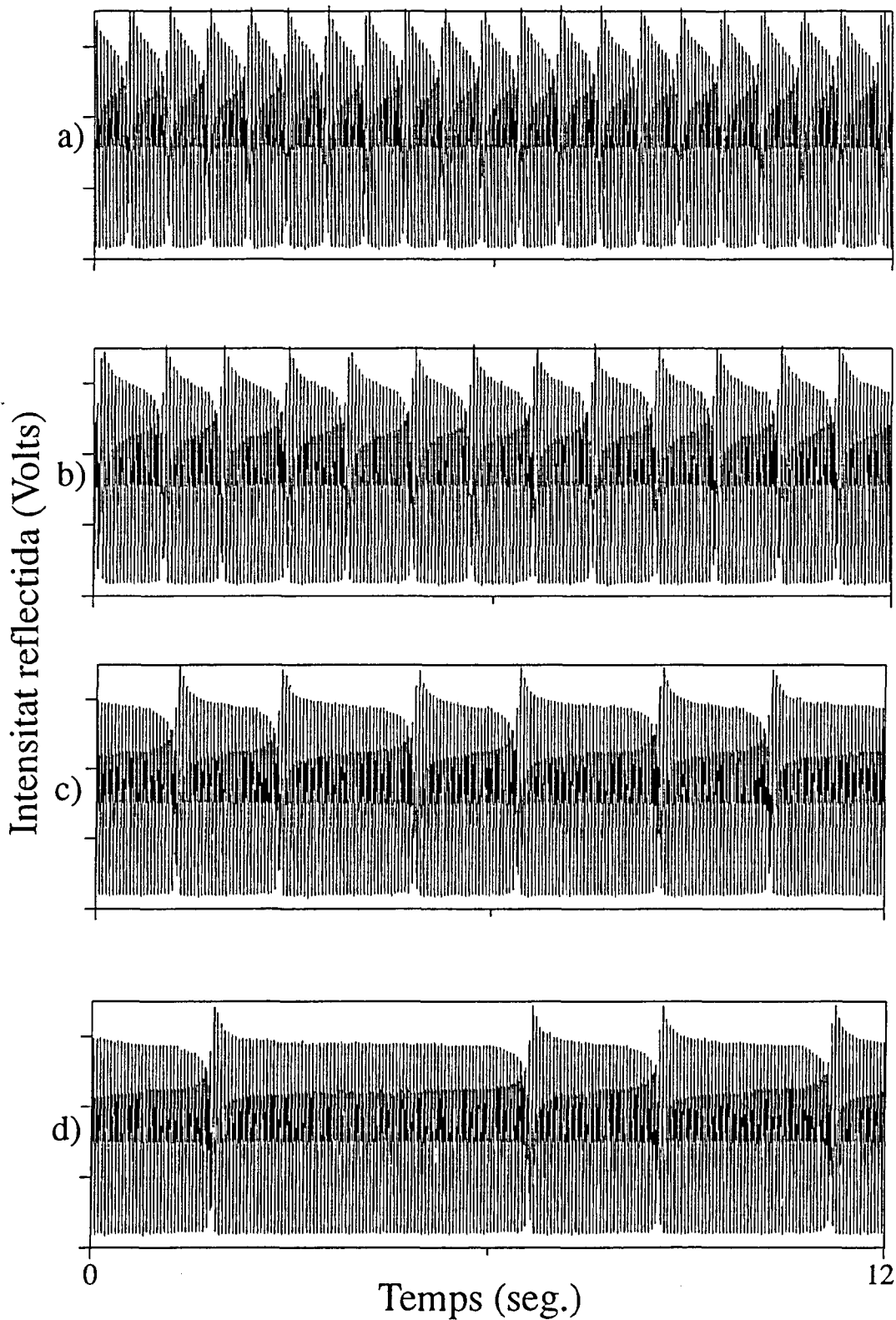


Fig. IV.18 Evolucions temporals experimentals per a quatre valors diferents de la modulació externa de la figura IV.17.

## Transformades de Fourier experimentals

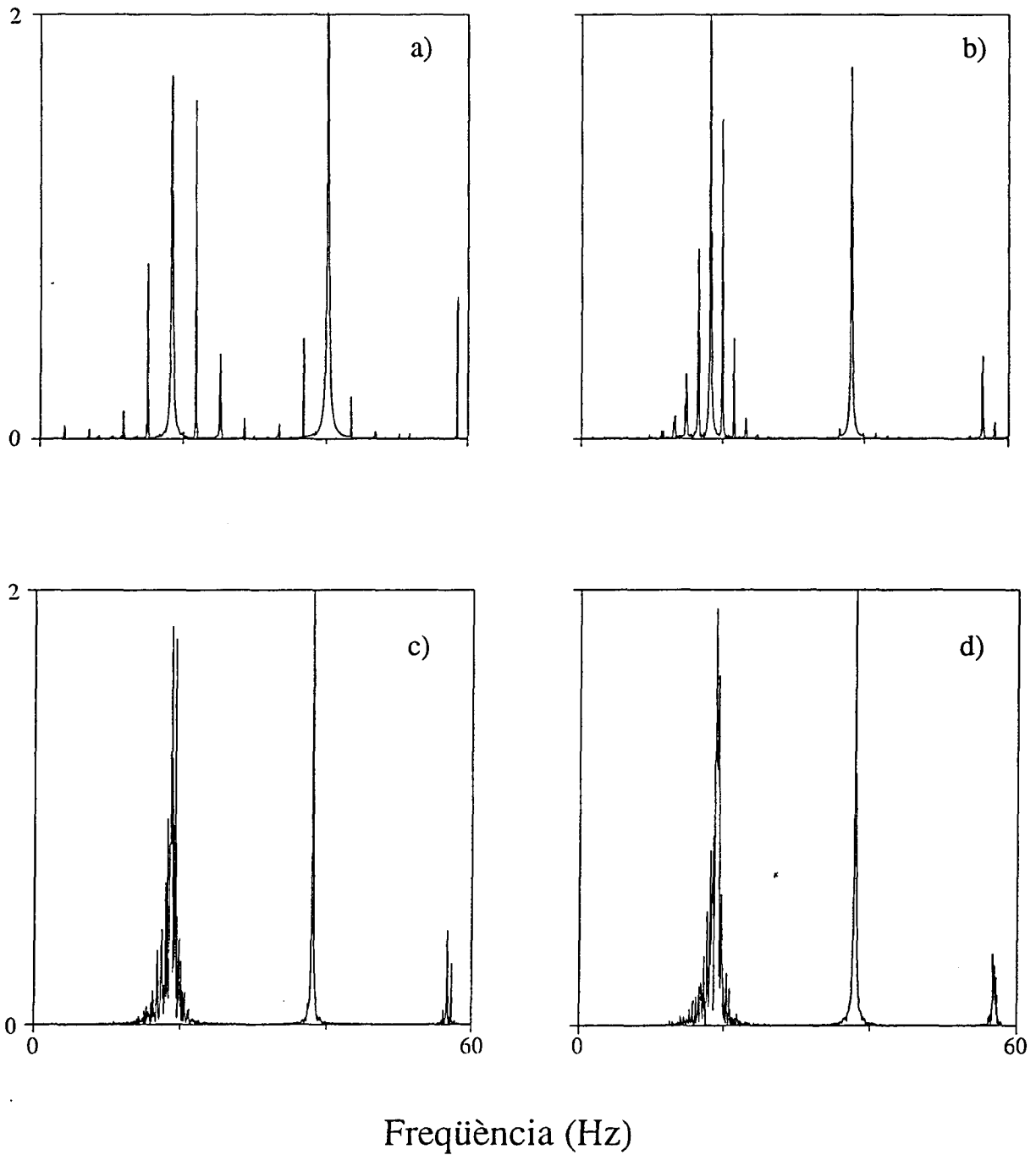


Fig. IV.19 Transformades de Fourier de les quatre evolucions temporals experimentals de la figura IV.18.

## Primers retorns experimentals

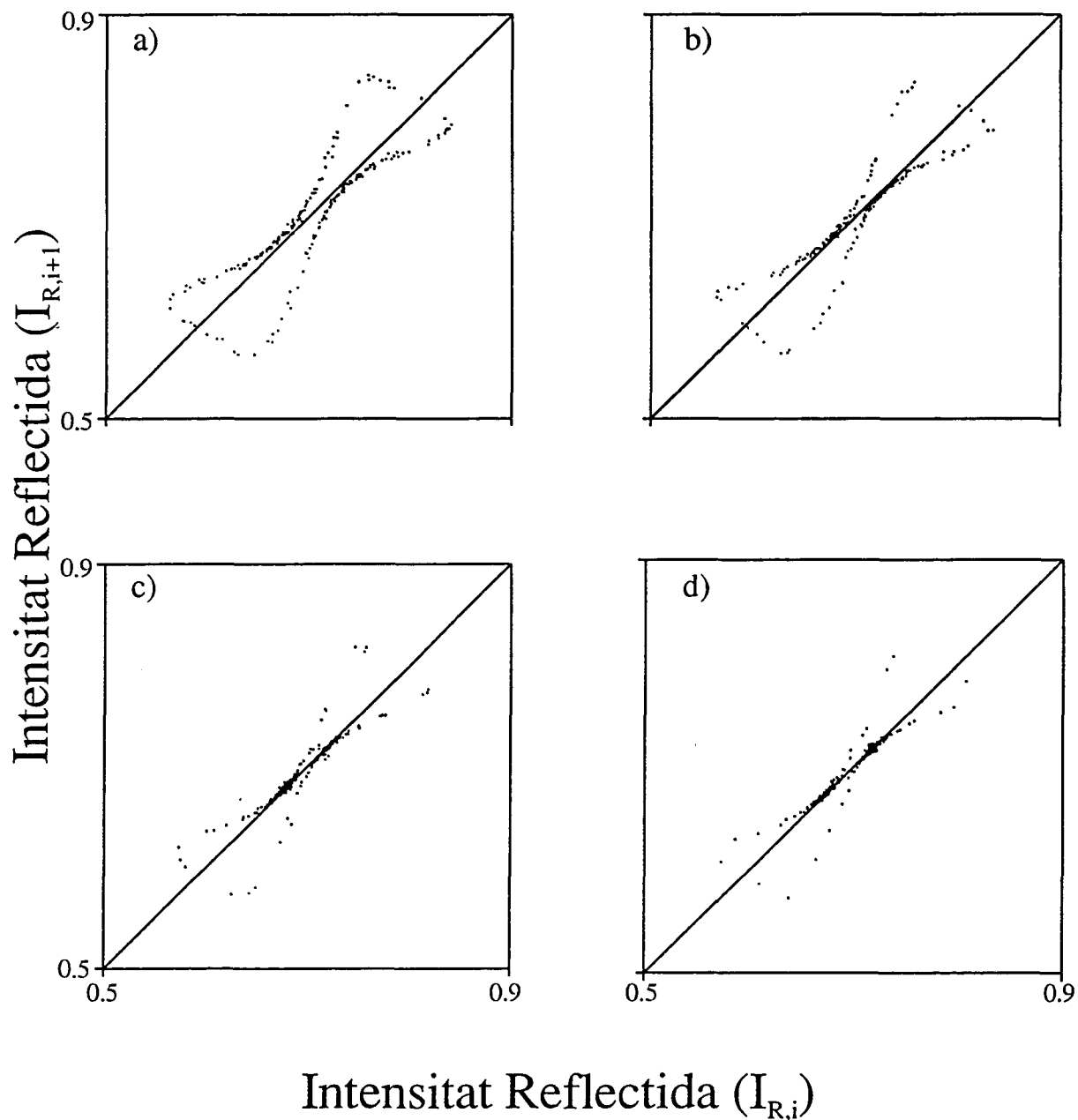


Fig. IV.20 Seccions de primer retorn estroboscòpiques de les quatre evolucions temporals experimentals de la figura IV.18.

Tal i com demostrarem més endavant la zona a la dreta de la finestra de període dos és caòtica. En la transició entre la finestra de període dos i la zona caòtica, apareixen intermitències de tipus I. Tot seguit il·lustrarem amb detall aquestes intermitències.

Per tal d'assegurar-nos de que aquesta bifurcació no era una bifurcació global varem intentar establir si hi havia histèresi. El procés dut a terme és el següent, decrementem lentament la freqüència fins assolir el règim periòdic, després tornem a incrementar la freqüència i comprovem si tornen a aparèixer intermitències. El resultat va ser que amb una resolució de 0.05 Hz no hi havia histèresi. Una histèresi d'aquest ordre es pot justificar perfectament per les derives tèrmiques intrínseques del dispositiu.

La figura IV.18 representa quatre evolucions temporals de la intensitat reflectida. Aquestes evolucions pertanyen a la zona situada a la dreta de la finestra de període dos del diagrama de bifurcació de la figura IV.17. Cada evolució conté 33.000 punts. Podem observar que les fluctuacions apareixen de forma irregular, especialment en els casos *c*) i *d*). Aquesta irregularitat evidencia la naturalesa caòtica de les evolucions. Aquesta irregularitat es veu més clarament si comparem aquestes evolucions amb les de la figura IV.10. També s'observa que, a mesura que ens acostem al punt de la bifurcació la freqüència mitjana de les fluctuacions és fa més petita. També podem observar que, a mesura que ens acostem a punt de la bifurcació, sella node la freqüència mitjana d'aparició de les fluctuacions tendeix a zero.

La figura IV.19 representa les transformades de Fourier dels quatre casos anteriors. En aquestes transformades de Fourier també es pot comprovar la naturalesa caòtica de les evolucions, especialment en els dos darrers casos.

Fins ara ha quedat clar que es tracta d'intermitències, però caldria justificar que es tracta d'intermitències de tipus I. Això es pot comprovar a la figura IV.20 on he representat els primers retorns estroboscòpics de la intensitat reflectida. En aquests primers retorns podem observar que existeixen dues zones molt properes a la bisectriu on la secció presenta una forma parabòlica. Entre la secció i la bisectriu ens torna a aparèixer el canal responsable de l'existència dels règims laminars. Aquesta forma parabòlica de la secció al voltant de la bisectriu ens garanteix que es tracta d'intermitències de tipus I.

Les intermitències i els doblaments de període sovint apareixen lligats. En l'estudi que hem realitzat al capítol II sobre la cascada subharmònica varem comentar l'existència de finestres periòdiques dins de la zona caòtica. Aquestes finestres apareixien a través de bifurcacions sella node i desapareixien a través de seqüències de doblaments de període. I tal i com hem vist, quan un atractor caòtic desapareix a través d'una bifurcació sella node, ens apareixen intermitències de tipus I. No només existeixen bifurcacions sella node en l'aparició de finestres periòdiques dins la zona caòtica, sinó que, la mateixa zona caòtica desapareix a través d'una bifurcació sella node. Per exemple en el cas presentat al capítol III, la zona caòtica apareixia mitjançant una seqüència de doblaments que es produïa a la finestra de període dos. Tot seguit comprovarem que aquesta zona caòtica desapareix a través d'una bifurcació sella node d'una òrbita de període tres. Aquesta òrbita de període tres és el resultat de l'acoblament no lineal entre la freqüència pròpia del dispositiu i la de la modulació externa. En general, les zones caòtiques apareixen en la transició entre



## Diagrama de bifurcació experimental

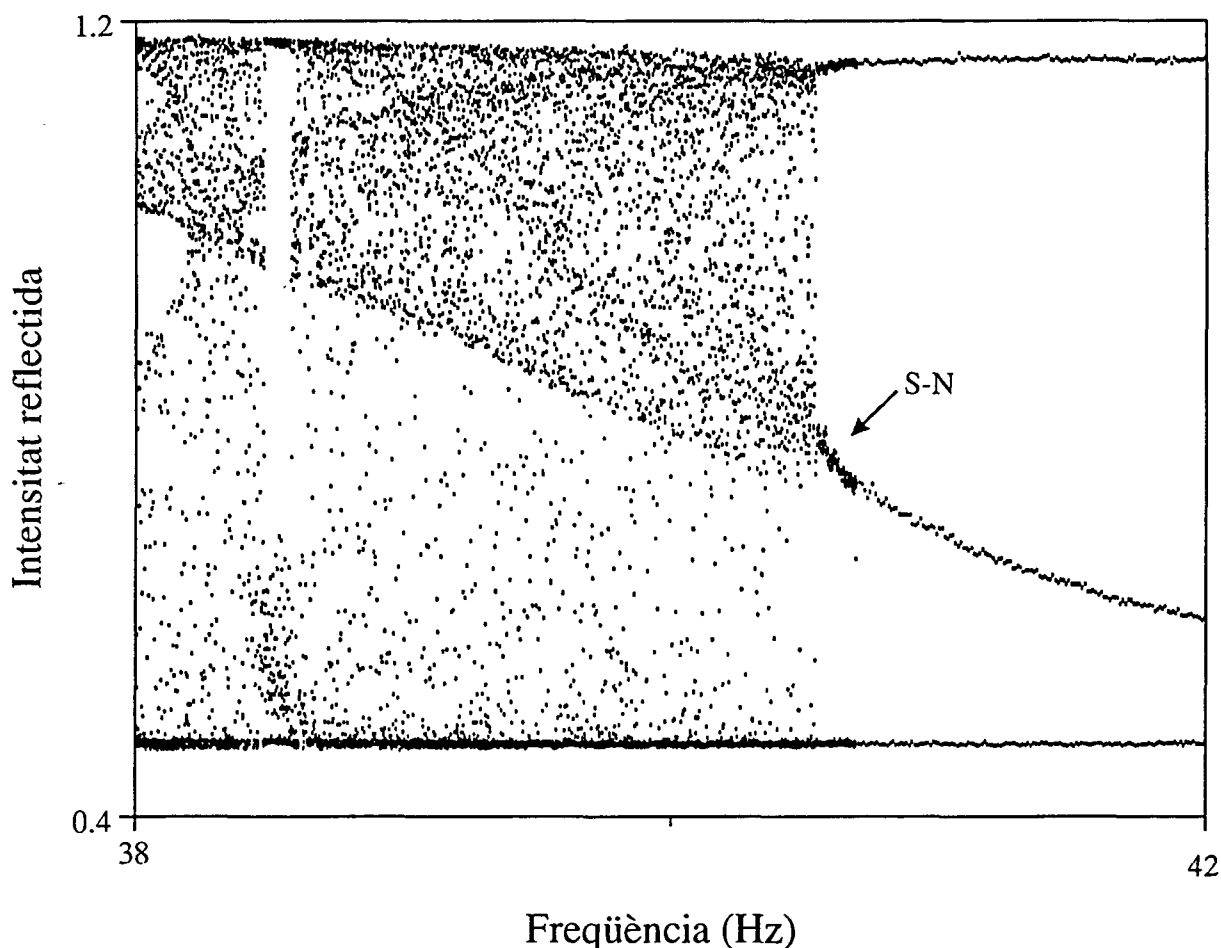


Fig. IV.21 Diagrama de bifurcació estroboscòpic experimental corresponent a una bifurcació sella node d'una òrbita de període 3.

finestres periòdiques, i sovint l'aparició i desaparició d'aquestes zones caòtiques es produeix a partir d'una seqüència de doblaments de període i intermitències.

Per il·lustrar aquesta bifurcació sella node d'una òrbita de període tres s'ha representat la continuació del diagrama de bifurcació estroboscòpic experimental de la figura III.7 a la figura IV.21. El registre s'ha obtingut a partir de modular el dispositiu bicapa amb una intensitat de modulació de 0.25 Volts i una intensitat de base de 1.14 Volts. La freqüència de la modulació externa s'ha fet variar entre 38 i 42 Hz. Atès que tal i com hem vist a la figura III.11.a, la freqüència d'oscil·lació del dispositiu sense modular és de 15.42 Hz, hem fet variar  $\omega_E/\omega_0$  entre 2.46 i 2.72, cosa que ratifica l'existència d'aquest acoblament no lineal de període tres ( $\omega_E/\omega_0 \approx 3$ ). Aquest diagrama de bifurcació ha estat realitzat per a un interval de freqüències petit. Això permet observar la major concentració de punts al voltant de la bifurcació sella node característica de les intermitències.

## Evolucions temporals experimentals

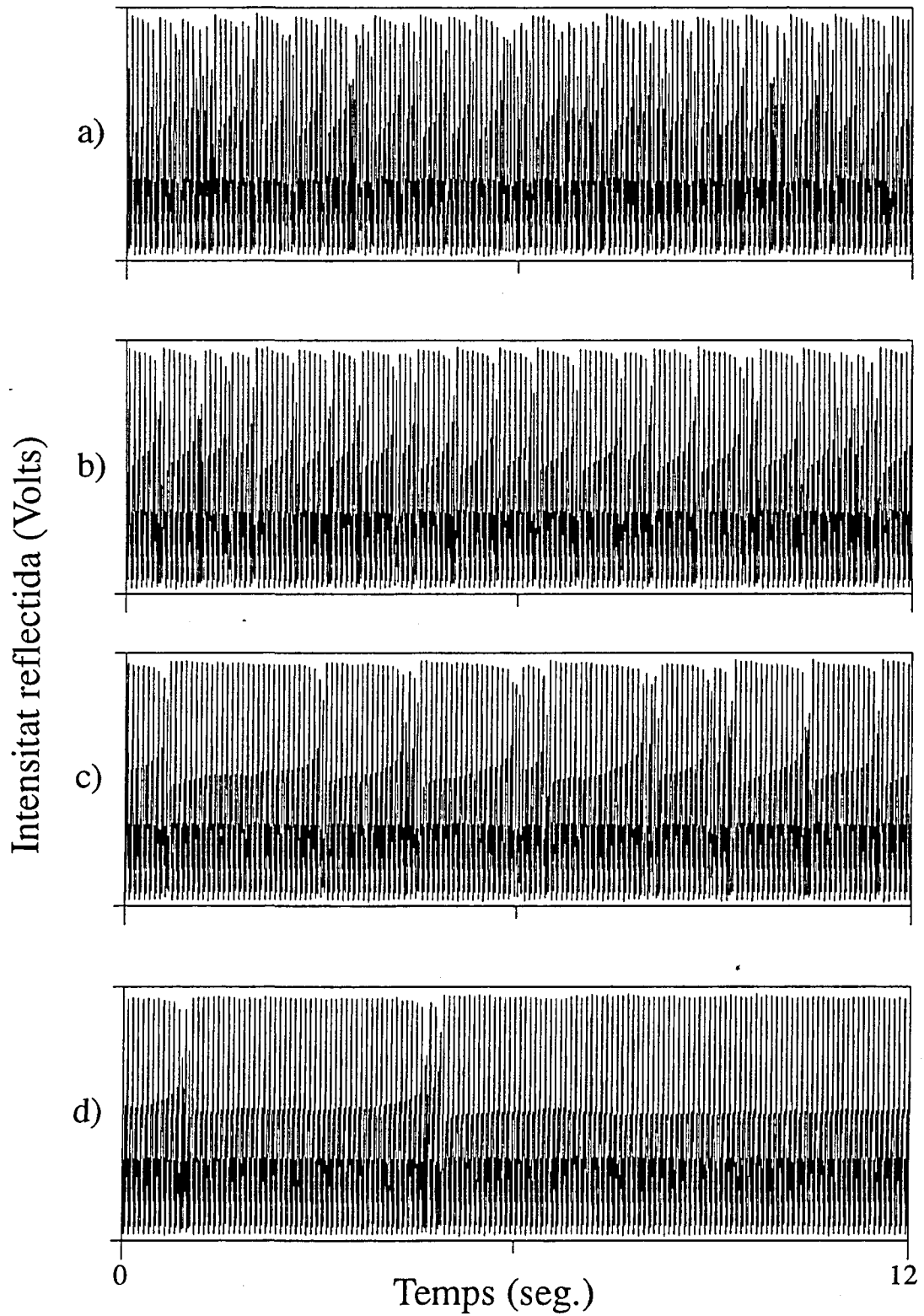


Fig. IV.22 Evolucions temporals experimentals a per quatre valors diferents de la modulació externa corresponents a la figura IV.21.

## Transformades de Fourier experimentals

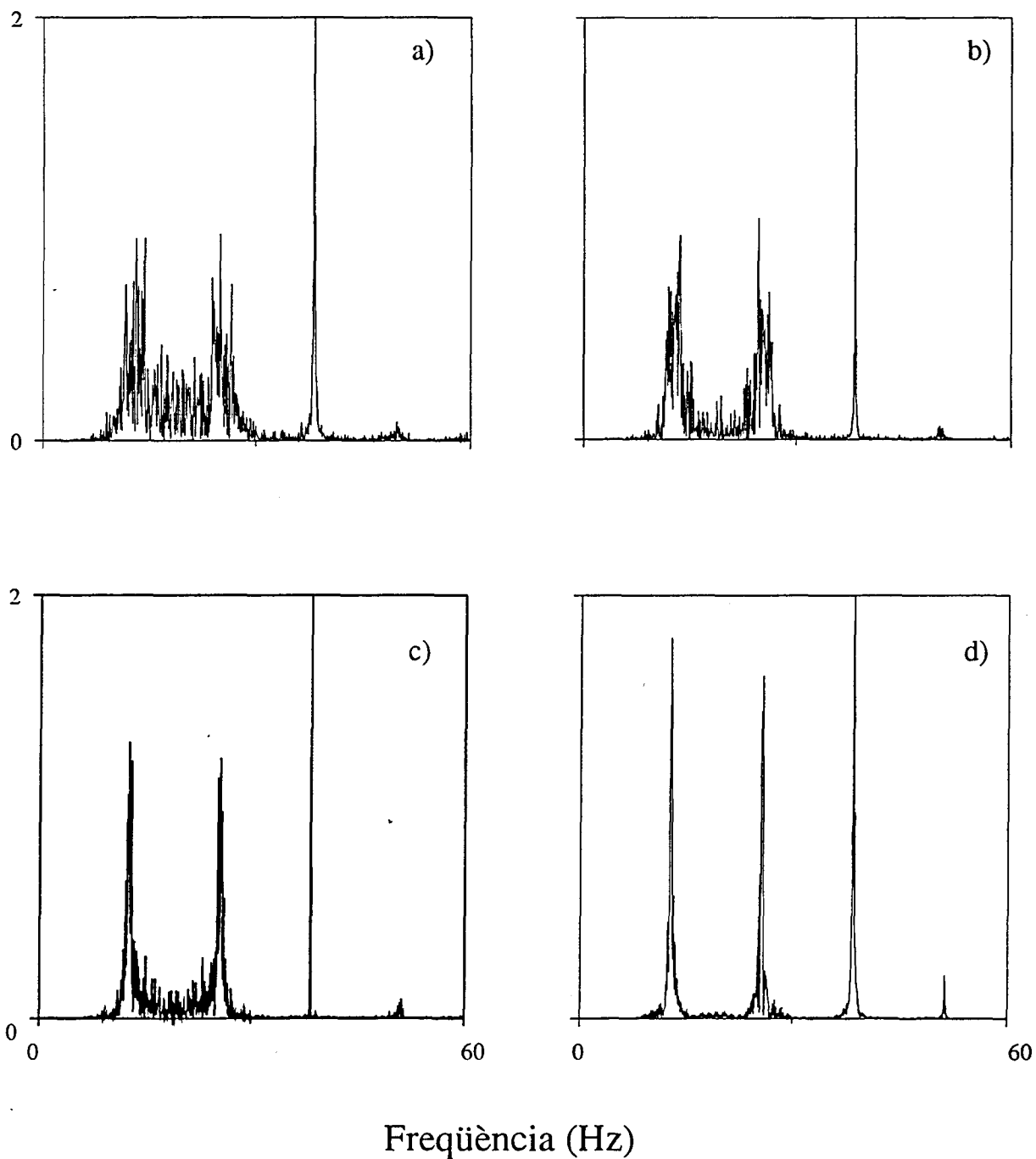


Fig. IV.23 Transformades de Fourier de les quatre evolucions temporals experimentals de la figura IV.22.

La figura IV.22 representa les evolucions temporals experimentals de la intensitat reflectida per a quatre valors concrets de la freqüència de la modulació externa que pertanyen a la figura IV.21. Els valors concrets de la freqüència de la modulació externa són : a) 39.89, b) 40.35 c) 40.45 i d) 40.51 Hz. Sense tornar a entrar en més detalls, podem comprovar que l'aparició dels règims laminars característics de les intermitències i l'aspecte turbulent de les fluctuacions demostren la naturalesa caòtica de les evolucions.

A la figura IV.23 hem representat les transformades de Fourier dels quatre casos anteriors. És interessant tornar a comprovar la naturalesa caòtica de les evolucions. En aquesta seqüència s'observa, amb molta claredat com l'amplada dels pics és redueix en apropar-nos al punt de la bifurcació. A més l'estructura de pics il·lustra la proximitat de l'aparició d'una finestra periòdica de període tres.

#### IV.5 Estudi estadístic de les intermitències de tipus I.

Fins ara només hem presentat evidències qualitatives de l'existència d'intermitències de tipus I, com són la forma dels mapes de primer retorn i la forma de les evolucions temporals. De tota manera, a partir del mapa de primer retorn general de les intermitències de tipus I presentat al apartat IV.2, també es poden extreure conclusions quantitatives. Aquestes conclusions quantitatives són molt útils per caracteritzar les intermitències de tipus I. En aquest apartat introduïrem les prediccions quantitatives que es poden extreure del model teòric. També comprovarem que aquestes prediccions quantitatives concorden amb els resultats, obtinguts a partir de registres experimentals de la bicapa modulada, presentats en aquest mateix apartat.

El mapa de primer retorn general (eq. IV.2) de les intermitències de tipus I, presentat a apartat VI.2, és adimensional. Això vol dir que no tenim una correlació directa entre els paràmetres físics reals del nostre sistema i els del mapa general de les intermitències tipus I. És per això que els resultats quantitius es donen en forma de lleis d'escalatge. Per exemple, il·lustrarem el comportament de la durada mitjana de les fases laminars al voltant del punt de la bifurcació sella node  $\epsilon=0$ .

Per calcular la durada mitjana dels règims laminars transformarem l'equació discreta IV.2 en una equació contínua. Si dos punts,  $x_{i+1}$  i  $x_i$ , del mapa pertanyen al règim laminar, llavors la seva distància és petita. Així doncs, podem canviar  $x_{i+1}-x_i$  per  $dx/di$ . D'aquesta manera, la variable  $i$  que indica la iteració del mapa, passa a ser una variable contínua, i ens queda l'equació diferencial:

$$\frac{dx}{di} = \epsilon + x^2 \quad (\text{IV.5})$$

Aquesta equació té per solució general:

$$x(i) = \epsilon^{1/2} \operatorname{tg}(\epsilon^{1/2}(i-i_0)) \quad (\text{IV.6})$$

on  $i_0$  correspon a l'etapa de l'iteració on el punt del mapa passa per la part més estreta del canal. Per simplificar l'escriptura suposarem  $i_0 = 0$ . La funció  $x(i)$  divergeix per  $i = \pm\pi/2\epsilon^{1/2}$ . Aquesta divergència no té cap rellevància especial. Aquesta divergència és deguda al canvi del sistema discret al sistema continu que no es pot fer per valors allunyats del règim laminar, és a dir, per  $x$  de l'ordre de  $\epsilon^{1/2}$ . Això no obstant, ja en podem treure una primera llei d'escalatge per a les intermitències de tipus I: la durada mitja dels règims laminars divergeix segons  $\epsilon^{1/2}$  a mesura que ens apropem al punt de la bifurcació, on  $\epsilon$  és la distància en funció del paràmetre de control del punt de bifurcació. És a dir, el promig del número d'iteracions necessàries per atravesar el canal,  $\langle N \rangle$ , compleix la següent relació [69]:

$$\langle N \rangle \propto \epsilon^{-0.5} \quad (\text{IV.7})$$

Aquesta relació es coneix com *la llei d'escalatge de les intermitències de tipus I*.

Per comprovar que els resultats experimentals de la bicapa modulada presentats al apartat anterior, compleixen el factor d'escalatge de les intermitències de tipus I, hem representat a la figura IV.24 el logaritme neperià del promig de número d'iteracions  $\langle N \rangle$  necessàries per passar el règim laminar en funció de logaritme neperià de la distància al punt de la bifurcació  $\epsilon = \omega_{E,C} - \omega_E$ . On  $\omega_{E,C}$  és el valor de la freqüència de la modulació externa per la qual és produeix la bifurcació sella node, i  $\omega_E$  és el paràmetre de control. En aquesta figura hem representat 10 punts cadascun dels quals ha estat calculat a partir d'una evolució temporal experimental. Aquestes 10 evolucions s'han obtingut fixant la intensitat de base a 1 Volt i l'amplitud de la modulació externa a 0.35 Volts. Quatre d'aquestes 10 evolucions han estat representades a la figura IV.18 i analitzades a l'apartat anterior. A partir de l'equació IV.6 podem deduir immediatament que la dependència de  $\ln \langle N \rangle$  en  $\ln \epsilon$  és lineal i el pendent de la recta és 0.5. A la figura IV.24, a banda de representar els 10 punts calculats a partir de les evolucions temporals, hem representat la recta resultant de la seva regressió lineal. El pendent calculat d'aquesta recta és igual a  $0.61 \pm 0.05$ . Aquest valor és proper al valor 0.5, que és l'esperat per a les intermitències de tipus I. És a dir, podem concloure que les intermitències que hem observat per als resultats experimentals de la figura VI.17 corresponen a intermitències de tipus I.

De tota manera la diferència entre el valor teòric i l'experimental no es troba inclòs dins l'error absolut obtingut a partir de la regressió. La raó d'aquesta diferència està en l'error que tenim a l'hora de determinar  $\omega_{E,C}$  i  $\langle N \rangle$ . Per calcular  $\epsilon$ , a partir de la freqüència de la modulació externa per cadascuna de les evolucions temporals ens cal conèixer amb precisió el valor de la freqüència corresponent al punt de bifurcació. Aquest valor l'hem obtingut a partir del valor de la freqüència de la modulació externa per a què varem observar el primer règim periòdic. Aquesta mesura és molt crítica ja que la distància en freqüències entre el punt de bifurcació i els primers casos és molt petita (de l'ordre de 0.01 Hz), i està molt propera al límit de resolució en freqüències del muntatge experimental. Una altra causa d'error està en l'avaluació de la longitud promig dels règims laminars  $\langle N \rangle$  per als casos més propers al punt de la bifurcació. En aquests casos les longituds dels règims laminars són molt llargues això implica que per poder tenir una estimació correcta de la longitud promig caler

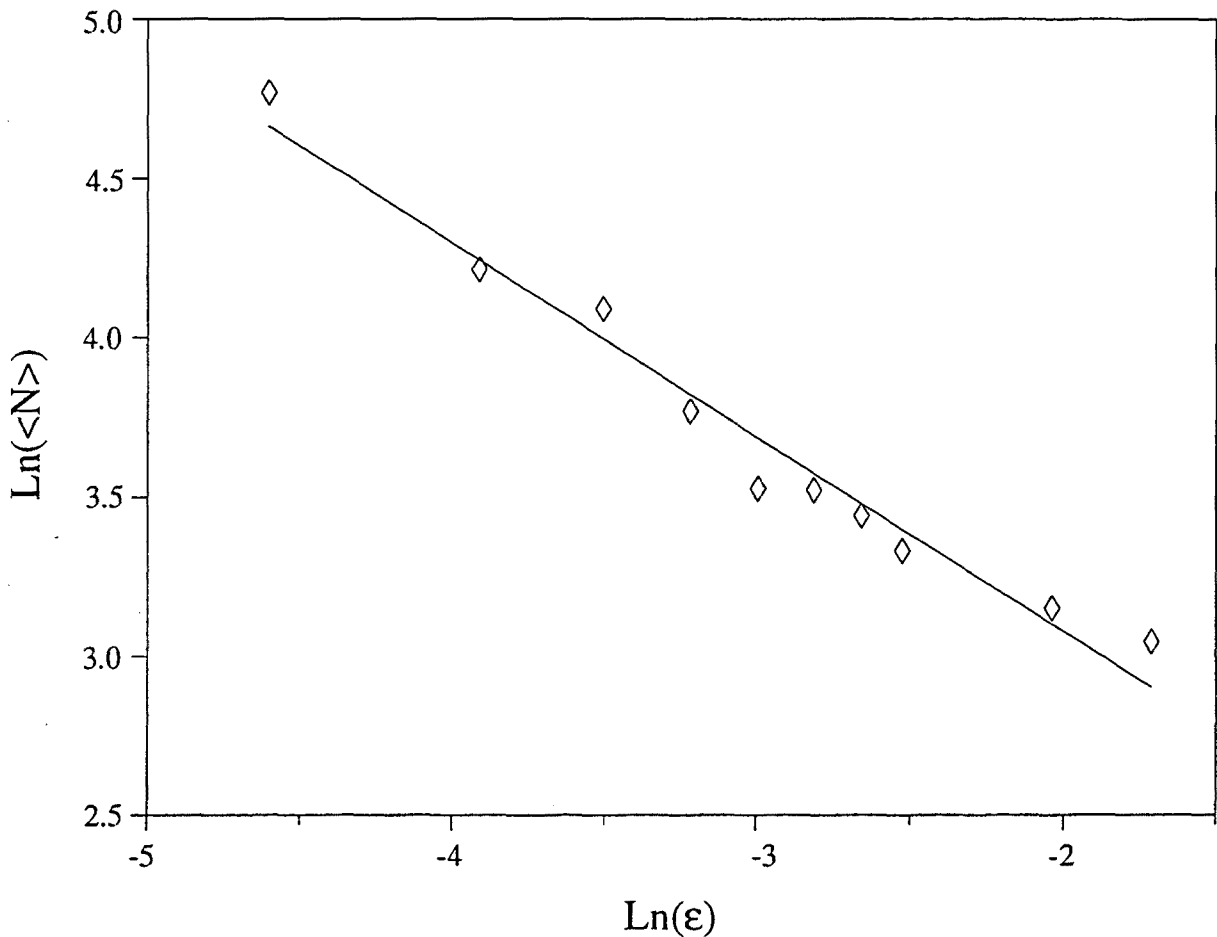


Fig. IV.24 Doble Representació logarítmica del promig de la longitud dels règims laminars  $\langle N \rangle$  en funció de la distància al punt de la bifurcació  $\epsilon = \omega_{E,C} - \omega_E$ . On  $\omega_{E,C}$  és el punt on es produeix la bifurcació sella node. Aquesta gràfica ha estat calculada a partir de 10 evolucions temporals experimentals de la bicapa modulada.

evolucions temporals molt llargues -- recordem que l'estabilitat temporal del dispositiu bicapa és limitada.

A més, per a casos propers a la bifurcació sella node, el promig de la longitud dels règims laminars depèn críticament del estat del sistema. L'estabilitat del sistema experimental limita dràsticament la resolució experimental en apropar-nos al punt de la bifurcació.

També podem establir una altra llei d'escalatge per al mapa general de les intermitències tipus I a partir de la distribució de probabilitats de la durada de les fases laminars  $P(N)$  per un valor de  $\epsilon$  determinat [49]. La forma precisa d'aquesta funció depèn dels detalls del procés de reinjecció. Malgrat això hi ha uns trets característics que la distingeixen amb claredat de la distribució de probabilitat de les

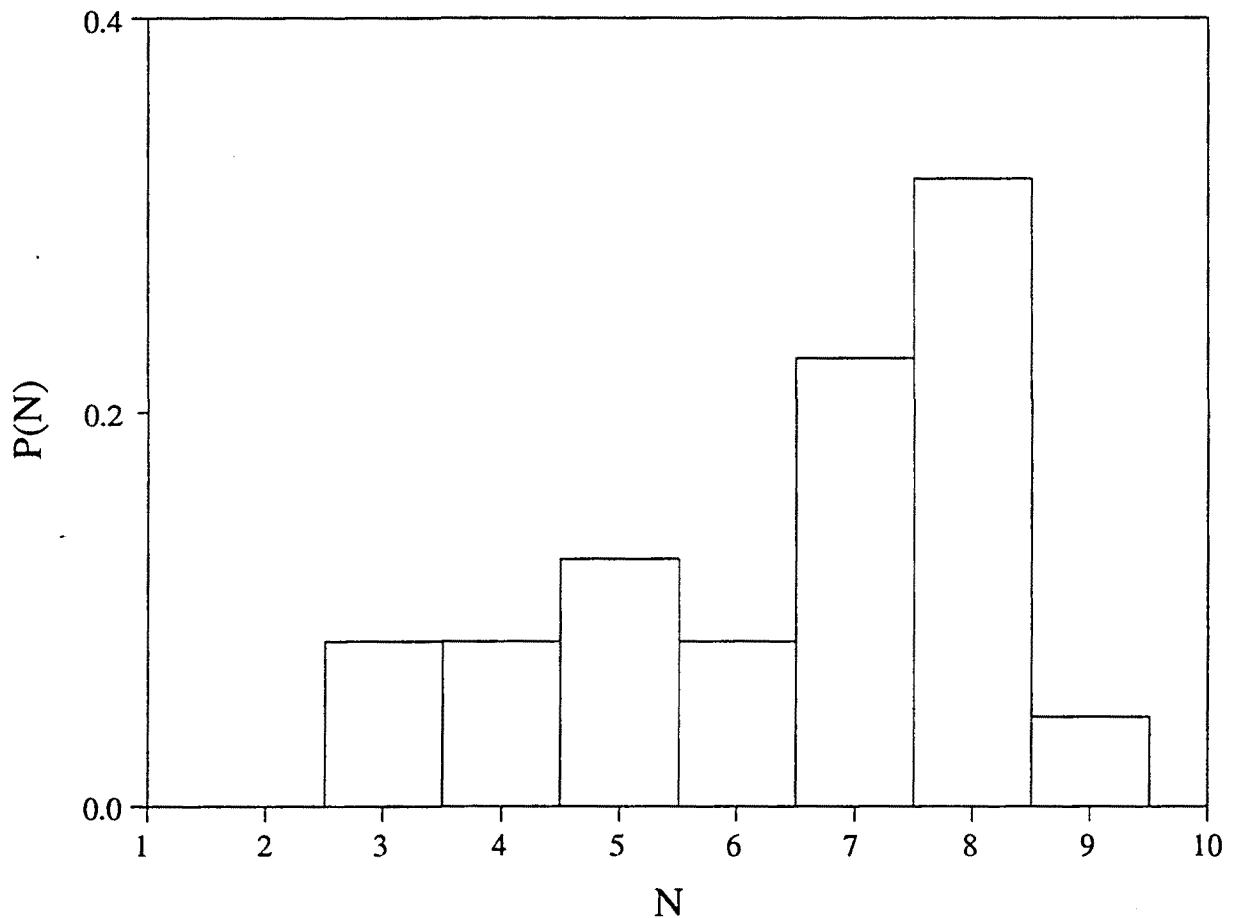


Fig. IV.25 Histograma de la distribució dels règims laminars en funció de la seva llargada. Aquest figura ha estat calculada a partir d'una evolució temporal experimental de la bicapa modulada.

intermitències de tipus II i III [49]. Per exemple, es dedueix a partir de VI.6, que aquesta distribució està acotada superiorment per  $\epsilon^{-1/2}$ . Aquesta distribució té un màxim per a règims laminars llargs. A partir del màxim, decreix exponencialment vers els règims laminars llargs i té un decreixement polinòmic cap als règims laminars curts.

A la figura IV.25 hem representat un histograma de la distribució de les longituds dels règims laminars. Aquest histograma s'ha obtingut a partir d'una evolució temporal experimental del dispositiu bicapa modulada. Aquesta evolució temporal experimental correspon a una freqüència de la modulació externa ( $\omega_E$ ) de 40.3 Hz inclosa al diagrama de bifurcació IV.27. En el registre experimental s'han fixat  $I_{EM}=0.25$  Volts i  $I_{EB}=1.14$  Volts. Aquesta situació també s'estudia a l'apartat anterior. En aquesta distribució de probabilitats podem observar l'existència d'un màxim per a  $N=8$ . El decreixement a la dreta de màxim (règims laminars més curts) és molt més suau que a l'esquerra (règims laminars més llargs). És a dir que, la distribució de probabilitats dels règims laminars presentada a la figura IV.25 té els trets característics de les intermitències de tipus I. La forma detallada de la distribució dels

règims laminars de les intermitències de tipus I depèn de les característiques particulars de la relaminarització. No obstant això, els trets fonamentals abans esmentats són propis de les intermitències de tipus I. Això permet, tot i no conèixer el procés de relaminarització, distingir amb claredat els diferents tipus d'intermitències. Per exemple, en la distribució dels règims laminars de les intermitències de tipus II i III no existeix aquest decreixement exponencial vers els règims laminars llargs. Per aquesta raó, l'estudi de la distribució dels règims laminars és necessari per poder caracteritzar el tipus d'intermitències observat en un registre experimental. En aquest cas a partir de l'anàlisi realitzada a la figura IV.25, podem afirmar que definitivament les intermitències observades són de tipus I.



