中学校・高等学校数学教育における整数分野の発展的指導についての考察

On Some Investigation of Number Theory in Mathematics Education in Junior and Senior High School

北山 秀隆
Hidetaka KITAYAMA
(和歌山大学教育学部)

西山 尚志
Hisashi NISHIYAMA
(和歌山大学教育学部)

田川 裕之
Hiroyuki TAGAWA
(和歌山大学教育学部)

2016 年 9 月 27 日受理

高等学校では自然数の 2 乗和や 3 乗和の公式を学習する．より一般の n 乗和の公式については, 高等学校では学習しないが, 発展的内容として扱うのにふさわしい題材である．本稿では, 中学校・高等学校での数学教育における整数分野の発展的指導の一例として, 自然数のべき乗和の公式について, 高校生でも理解できる考え方に基づいた考察を行う．

1 序

中学校・高等学校の数学教育では, 主として数と式（中学校, 数学 I）, いろいろな式（数学 II）, 場合の数と確率（数学 A）, 整数の性質（数学 A）, 数列（数学 B）において整数に関連した美しい理論や考え方を学習する．特に高等学校では自然数の和や 2 乗, 3 乗和の公式を学習する．より一般の n 乗和の公式がどのようなものかについては, 教科書では十分に記載されていないが, 多くの生徒が興味をもつと思われる．そのため, 教員もべき乗和の公式について生徒が理解できる形で整理しておくことが望ましいと考えられるが, よく利用される「べき級数展開」による方法では高校の学習内容を超える知識が必要となってしまう．そこで本稿では, 難しい理論を利用せずに, 高校生でも比較的容易に理解できる指導方針について考察する．

まず, 2 節では, 本稿での証明の鍵となる二項係数に成り立つ等式を「最短路」の概念を用いて視覚的に説明する．3 節以降では, 2 節で得られた等式を利用した自然数のべき乗和の公式の導き方, およびその発展的な内容として, ベルヌーイ数を用いたべき乗和の公式[1]の初等的な代数計算のみを利用した証明法について述べる．また, 5 節では, べき乗和の公式を並べて記述したときに容易に気づく美しい規則性の証明の概略について述べる．最後に付録として, 参考のために, 一般によく利用されているべき級数展開によるべき乗和の公式の証明をまとめる．

2 二項係数と最短路

まず, 次のように, 上から m 段目に m 個の数を左から並べて記載したものは, 高等学校の数学 A で学習するパスカルの三角形と呼ばれるものである．

1 段目に 1 を記載し, $2 \leqq m, 1 \leqq k \leqq m$ に対して, m 段目の左から k 番目に, “$m-1$ 段目の左から $k-1$ 番目と k 番目の数の和” を記載する．ただし, $m-1$ 段目の左から 0 番目と m 番目の数は 0 と考える．

例えば, パスカルの三角形を 7 段目まで記載すると次となる．

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

この三角形を眺めているといろいろと性質がみえてくる．例えば, 少し計算すると次のようなことが観察できる．

(1) m 段目に記載された数をすべて足すと 2^{m-1} になっている．

(2) 右端のどこかの 1 から左下斜めに順に並んでいる数の総和は, 最後に足した数の右下の数と一致している．

まずは, 二項係数の定義と意味についての解説から始めよう．整数 m, k (ただし, $1 \leqq m$, $0 \leqq k \leqq m$ とする）に対して

$$ {}_m\mathrm{C}_k = \text{異なる } m \text{ 個のものから } k \text{ 個選ぶ方法の数} $$

とおく．ただし, 0 個を選ぶ場合には, 「何も選ばない」という状態が存在すると考えて, ${}_m\mathrm{C}_0 = 1$ と定義する．例えば, x_1, x_2, x_3 から 1 個選ぶ方法は

$$ \{x_1\},\ \{x_2\},\ \{x_3\} $$

の 3 通りあるので ${}_3\mathrm{C}_1 = 3$, 2 個選ぶ方法は

$$ \{x_1, x_2\},\ \{x_1, x_3\},\ \{x_2, x_3\} $$

の 3 通りあるので ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$, 3 個選ぶ方法は

$$ \{x_1, x_2, x_3\} $$

[1] ファウルハーバーの公式, ベルヌーイの公式とも呼ばれている．

の 3 通りあるので ${}_3\mathrm{C}_3 = 1$ である．また

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)(1+x_3)\\&=1+(x_1+x_2+x_3)+(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3)\\&\quad+(x_1x_2x_3)\end{aligned}\tag{2.1}$$

であり, (2.1) において, x_1, x_2, x_3 を x と置きかえると

$$(1+x)^3 = {}_3\mathrm{C}_0 + {}_3\mathrm{C}_1 x + {}_3\mathrm{C}_2 x^2 + {}_3\mathrm{C}_3 x^3$$

となることが分かる．一般には「二項定理」と呼ばれる公式

$$(1+x)^m = {}_m\mathrm{C}_0 + {}_m\mathrm{C}_1 x + \cdots + {}_m\mathrm{C}_m x^m$$

が成り立っている．また, m 個から一つ選び, 残った $m-1$ 個から一つ選び, $\ldots$, $m-k+1$ 個から一つ選び, 選び出した順番による重複分で割るといった考え方から

$${}_m\mathrm{C}_k = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-k+1)}{k!} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

である[2]．以降, ${}_0\mathrm{C}_0 = 1$ とおくことにすると[3], 二項係数のすぐに分かる性質としては, $m \geqq 0$, $0 \leqq k \leqq m$ に対して

$${}_m\mathrm{C}_0 = {}_m\mathrm{C}_m = 1, \quad {}_m\mathrm{C}_k = {}_m\mathrm{C}_{m-k}$$

である．ここで, 冒頭で例示した 7 段目までのパスカルの三角形を二項係数を用いて表すと次となる．

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&{}_0\mathrm{C}_0&&&&&&\\
&&&&&{}_1\mathrm{C}_0&&{}_1\mathrm{C}_1&&&&&\\
&&&&{}_2\mathrm{C}_0&&{}_2\mathrm{C}_1&&{}_2\mathrm{C}_2&&&&\\
&&&{}_3\mathrm{C}_0&&{}_3\mathrm{C}_1&&{}_3\mathrm{C}_2&&{}_3\mathrm{C}_3&&&\\
&&{}_4\mathrm{C}_0&&{}_4\mathrm{C}_1&&{}_4\mathrm{C}_2&&{}_4\mathrm{C}_3&&{}_4\mathrm{C}_4&&\\
&{}_5\mathrm{C}_0&&{}_5\mathrm{C}_1&&{}_5\mathrm{C}_2&&{}_5\mathrm{C}_3&&{}_5\mathrm{C}_4&&{}_5\mathrm{C}_5&\\
{}_6\mathrm{C}_0&&{}_6\mathrm{C}_1&&{}_6\mathrm{C}_2&&{}_6\mathrm{C}_3&&{}_6\mathrm{C}_4&&{}_6\mathrm{C}_5&&{}_6\mathrm{C}_6
\end{array}$$

したがって, 冒頭で「観察」したことを数学的に記述すると次となる．

(1) 0 以上の整数 m に対して

$${}_m\mathrm{C}_0 + {}_m\mathrm{C}_1 + \cdots + {}_m\mathrm{C}_m = 2^m.$$

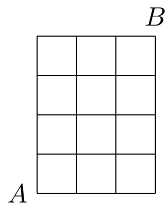
(2) 0 以上の整数 m, n に対して

$${}_m\mathrm{C}_m + {}_{m+1}\mathrm{C}_m + \cdots + {}_{m+n}\mathrm{C}_m = {}_{m+n+1}\mathrm{C}_{m+1}.$$

(1) については, 二項定理において $x = 1$ とすれば得られる等式である．二項定理を用いなくても, 異なる m 個のものから任意個数を取る取り方の方法を考えればすぐに分かる．

以下, (2) を視覚的に理解するために, 二項係数の意味を最短路を用いてとらえてみよう．

縦 4, 横 3 の格子



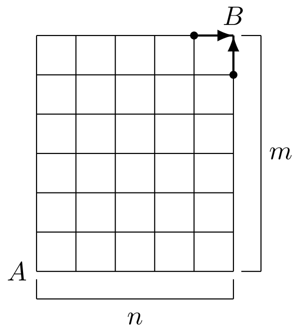
の A から B への最短路[4] の数は（合計 7 進むときのどこで↑に進むかといったことを考えると）

$${}_7\mathrm{C}_4 = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = 35.$$

一般に, 縦 m, 横 n の格子の左下の地点から右上の地点への最短路の数は, ${}_{m+n}\mathrm{C}_m$ である．このような最短路を使って二項係数に関連した等式を解釈してみよう．

1. 次の A から B への最短路の中で, 最後に→を利用するものは ${}_{m+n-1}\mathrm{C}_m$ 通りあり, 最後に↑を利用するものは ${}_{m+n-1}\mathrm{C}_{m-1}$ 通りあるので, 正の整数 m, n に対して

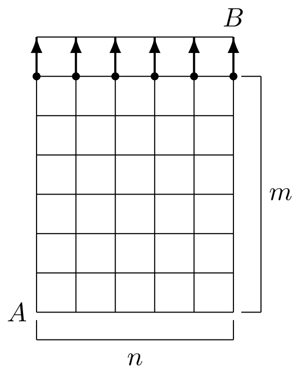
$${}_{m+n}\mathrm{C}_m = {}_{m+n-1}\mathrm{C}_m + {}_{m+n-1}\mathrm{C}_{m-1}.\tag{2.2}$$



2. 次の A から B への最短路は記述されている $n+1$ 本の↑の中のどれかを一度だけ必ず通り, 左から $k+1$ 番目の↑を利用する最短路は, ${}_{m+k}\mathrm{C}_m$ 通りあるので（$0 \leqq k \leqq n$）, 0 以上の整数 m, n に対して

$$\begin{aligned}&{}_{m+n+1}\mathrm{C}_{m+1}\\&= {}_m\mathrm{C}_m + {}_{m+1}\mathrm{C}_m + {}_{m+2}\mathrm{C}_m + \cdots + {}_{m+n}\mathrm{C}_m\end{aligned}\tag{2.3}$$

が成立する[5]．



3　数列の和の公式

本節では, 前節で得られた二項係数の関係式を用いて, 自然数のべき乗和の公式を導く方法, および公式に共通する

[2] $0! = 1$ と定義していることに注意．

[3] これまで, ${}_m\mathrm{C}_k$ の m は正の整数に対してのみ考えてきた．

[4] 後戻りせずに→もしくは↑のみを進んでいく路．

[5] もちろん (2.2) を繰り返し用いても得られる．

性質を発見するきっかけとなる実験的方法について述べる. 以降, 整数 m,n に対して, 実数 $f(k)$ が定義されているとき, $n \geqq m$ の場合には

$$f(m)+f(m+1)+\cdots+f(n), \quad f(m)f(m+1)\dots f(n)$$

をそれぞれ $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} f(k)$, $\displaystyle\prod_{k=m}^{n} f(k)$ で表し, $n<m$ の場合には

$$\sum_{k=m}^{n} f(k)=0, \quad \prod_{k=m}^{n} f(k)=1$$

とおく. まず, n を正の整数として, (2.3) において, n を $n-1$ と置きかえると

$$\sum_{k=m}^{m+n-1} {}_{k}\mathrm{C}_{m} = {}_{m+n}\mathrm{C}_{m+1} \tag{3.1}$$

であり

$${}_{k}\mathrm{C}_{m} = \frac{\prod_{r=1}^{m}(k-r+1)}{m!}$$

を利用して (3.1) を書き直した等式の両辺に $m!$ を掛けて整理すると

$$\sum_{k=m}^{m+n-1}\prod_{r=1}^{m}(k-r+1) = \frac{\prod_{r=1}^{m+1}(m+n-r+1)}{m+1}. \tag{3.2}$$

さらに (3.2) において, k を $k+m-1$ と置き換えると

$$\sum_{k=1}^{n}\prod_{r=1}^{m}(k+m-r) = \frac{\prod_{r=1}^{m+1}(m+n-r+1)}{m+1}. \tag{3.3}$$

特に, (3.3) において, $m=0,1,2,3,4$ とすると

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} 1 = n,\\
&\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\\
&\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3},\\
&\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4},\\
&\sum_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)(k+3)\\
&\quad = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}
\end{aligned}$$

である. ここで

$$\begin{aligned}
k^4 &= k(k+1)(k+2)(k+3) - 6k(k+1)(k+2)\\
&\quad + 7k(k+1) - k
\end{aligned}$$

と表せるので[6]

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^4 &= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}{5}\\
&\quad - \frac{6n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}\\
&\quad + \frac{7n(n+1)(n+2)}{3} - \frac{n(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}
\end{aligned}$$

となることが分かる. 同様の手段により, 任意の自然数 m に対して, $\sum_{k=1}^{n} k^m$ の公式を求めることができる. しかし, この作業はかなりの時間と忍耐を必要とするため, 大変な作業だと考えられる. 何かいい方法はないのか. 得られた公式に何か特徴はないのか. その疑問に答えるためにも, $m=1,2,3,4,5$ に対する公式を（実際に求めて）記述すると

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2},\\
&\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},\\
&\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4},\\
&\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30},\\
&\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12},\\
&\sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^4+6n^3-3n+1)}{42}.
\end{aligned}$$

見やすくするために, 分子を展開すると

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n+n^2}{2},\\
&\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n+3n^2+2n^3}{6},\\
&\sum_{k=1}^{n} k^3 = \frac{n^2+2n^3+n^4}{4},\\
&\sum_{k=1}^{n} k^4 = \frac{-n+10n^3+15n^4+6n^5}{30},\\
&\sum_{k=1}^{n} k^5 = \frac{-n^2+5n^4+6n^5+2n^6}{12},\\
&\sum_{k=1}^{n} k^6 = \frac{n-7n^3+21n^5+21n^6+6n^7}{42}.
\end{aligned}$$

[6] 一般に, $x^n = \sum_{k=1}^{n} s(n,k)x(x+1)(x+2)\dots(x+k-1)$ で $s(n,k)$ を定義すると, $(-1)^{n-k}s(n,k)$ は第 2 種スターリング数と呼ばれる数となっている.

これでも, まだまだ分かりにくいので, $1 \leqq m,\ 0 \leqq k \leqq m+1$ に対して

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \sum_{k=0}^{m+1} a(m,k)n^k$$

を満たすものとして $a(m,k)$ を定義し, $a(m,k)$ の表を作ると下記となる.

$m \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$				
3	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$			
4	0	-$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$		
5	0	0	-$\frac{1}{12}$	0	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	
6	0	$\frac{1}{42}$	0	-$\frac{1}{6}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{7}$

次に

$$b(m,k) = (m+1)a(m,k)$$

とおき, $b(m,k)$ の表を作成すると

$m \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	1	1					
2	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	1				
3	0	0	1	2	1			
4	0	-$\frac{1}{6}$	0	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{2}$	1		
5	0	0	-$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$	3	1	
6	0	$\frac{1}{6}$	0	-$\frac{7}{6}$	0	$\frac{7}{2}$	$\frac{7}{2}$	1

である. さらに

$$c(m,k) = \frac{b(m,k)}{{}_{m+1}\mathrm{C}_{m+1-k}} \quad \left(= \frac{(m+1)a(m,k)}{{}_{m+1}\mathrm{C}_{m+1-k}} \right)$$

とおき, $c(m,k)$ の表を作成すると次となる.

$m \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7
1	0	$\frac{1}{2}$	1					
2	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1				
3	0	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1			
4	0	-$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1		
5	0	0	-$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1	
6	0	$\frac{1}{42}$	0	-$\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	1

この表を眺めると, 左上から右下へ同じ数が並んでいることに気が付くだろう. 即ち

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,$$
$$B_4 = -\frac{1}{30},\ B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42}$$

とおくと, $1 \leqq m \leqq 6$ に対して

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}\big({}_{m+1}\mathrm{C}_0 B_0 n^{m+1} - {}_{m+1}\mathrm{C}_1 B_1 n^m + {}_{m+1}\mathrm{C}_2 B_2 n^{m-1} + \cdots + {}_{m+1}\mathrm{C}_m B_m n\big) \tag{3.4}$$

と記載できる. ${}_{m+1}\mathrm{C}_1 B_1 n^m$ の符号のみマイナスになっているので, 綺麗な等式とするためにも, (3.4) の両辺から, n^m を引くと, $B_1 = -\frac{1}{2}$ であることから

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} {}_{m+1}\mathrm{C}_k B_k n^{m+1-k} \tag{3.5}$$

と表せる. ここででてきた数 B_n が次節で詳しく解析するベルヌーイ数と呼ばれる数である.

4　ベルヌーイ数とべき乗和の一般公式

本節では, 前節の最後に出現したベルヌーイ数の定義を厳密に行い, ベルヌーイ数を用いたべき乗和の公式についての解説と初等的な代数計算のみを利用した証明[7] について述べることを目的とする.

定義 4.1 (ベルヌーイ数). 0 以上の整数 n に対して, 次で帰納的に定まる数 B_n をベルヌーイ数と呼ぶ.

$$B_0 = 1,\ B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1} {}_{n+1}\mathrm{C}_k B_k \quad (n = 1,2,3,\dots).$$

言い換えると, ベルヌーイ数 B_n は

$$\sum_{k=0}^{n} {}_{n+1}\mathrm{C}_k B_k = 0 \quad (n = 1,2,3,\dots) \tag{4.1}$$

を満たしている. 例えば, $B_1, B_2, \dots, B_{12}$ は次となる.

$$B_0 = 1,\ B_1 = -\frac{1}{2},\ B_2 = \frac{1}{6},\ B_3 = 0,\ B_4 = -\frac{1}{30},$$
$$B_5 = 0,\ B_6 = \frac{1}{42},\ B_7 = 0,\ B_8 = -\frac{1}{30},$$
$$B_9 = 0,\ B_{10} = \frac{5}{66},\ B_{11} = 0,\ B_{12} = -\frac{691}{2730}.$$

(3.4) の一般化として, 自然数のべき乗和の公式が次のようにベルヌーイ数を用いて表示できる.

定理 4.2. 自然数 m に対して

$$\sum_{k=1}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} {}_{m+1}\mathrm{C}_k B_k n^{m+1-k}. \tag{4.2}$$

まず, 次は, (4.1) から容易に得られる.

補題 4.3. $n = 0,\ n = 2,3,4,\dots$ に対して[8]

$$\sum_{k=0}^{n} {}_n\mathrm{C}_k B_k = B_n. \tag{4.3}$$

[7] べき乗和の公式の証明には, べき級数展開を利用することが多いと考えられる. なお, 証明方針の概要については, 付録で述べる.
[8] $n = 1$ では成立しないことに注意.

Proof. (4.1) の両辺に $B_{n+1}(= {}_{n+1}\mathrm{C}_{n+1}B_{n+1})$ を足すと

$$\sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}\mathrm{C}_k B_k = B_{n+1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

$n+1$ を n と置き換えると

$$\sum_{k=0}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_k B_k = B_n \quad (n = 2, 3, 4, \dots). \tag{4.4}$$

ここで, ${}_0\mathrm{C}_0 B_0 = 1 = B_0$ であることから, (4.4) は $n = 0$ でも成立している. □

次に, ベルヌーイ数を用いたベルヌーイ多項式と呼ばれる多項式を定義しよう.

定義 4.4 (ベルヌーイ多項式). 0 以上の整数 n に対して

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_k B_k x^{n-k} \tag{4.5}$$

とおき, $B_n(x)$ をベルヌーイ多項式と呼ぶ.

例えば

$$\begin{aligned} &B_0(x) = 1,\ B_1(x) = x - \frac{1}{2}, \\ &B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}, \\ &B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\ &B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30} \end{aligned}$$

である. (4.3) から次が直ちに成立する.

系 4.5. $n = 0, n = 2, 3, 4, \dots$ に対して

$$B_n(1) = B_n. \tag{4.6}$$

Proof. (4.5) に $x = 1$ を代入した式と (4.3) を比較することにより得られる. □

$B_n(x)$ に対して次が成立する.

補題 4.6. (i) $0 \leqq m \leqq n$ を満たす整数 m, n に対して

$$\sum_{k=m}^{n} {}_{k}\mathrm{C}_m \cdot {}_{n}\mathrm{C}_k B_{n-k} = {}_{n}\mathrm{C}_m B_{n-m}(1). \tag{4.7}$$

(ii) 自然数 n に対して

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}. \tag{4.8}$$

Proof. (i) まず, $0 \leqq k \leqq n-m$ となる整数 k に対して, 直接の計算により

$${}_{n-k}\mathrm{C}_m \cdot {}_{n}\mathrm{C}_k = {}_{n}\mathrm{C}_m \cdot {}_{n-m}\mathrm{C}_k$$

となるので, ベルヌーイ多項式の定義から

$$\sum_{k=0}^{n-m} {}_{n-k}\mathrm{C}_m \cdot {}_{n}\mathrm{C}_k B_k x^{n-m-k} = {}_{n}\mathrm{C}_m B_{n-m}(x). \tag{4.9}$$

(4.9) の x に 1 を代入すると

$$\sum_{k=0}^{n-m} {}_{n-k}\mathrm{C}_m \cdot {}_{n}\mathrm{C}_k B_k = {}_{n}\mathrm{C}_m B_{n-m}(1). \tag{4.10}$$

(4.10) の左辺の k を $n-k$ と置き換えると

$$\sum_{k=m}^{n} {}_{k}\mathrm{C}_m \cdot {}_{n}\mathrm{C}_k B_{n-k} = {}_{n}\mathrm{C}_m B_{n-m}(1)$$

となり, (4.7) が得られる. (ii) ベルヌーイ多項式の定義から

$$\begin{aligned} B_n(x+1) &= \sum_{k=0}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_k B_k \cdot (x+1)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_k B_{n-k} \cdot (x+1)^{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_k B_{n-k} \sum_{m=0}^{k} {}_{k}\mathrm{C}_m x^m \end{aligned}$$

和の取り方を変え, (4.7) を利用すると

$$\begin{aligned} &= \sum_{m=0}^{n} \left(\sum_{k=m}^{n} {}_{k}\mathrm{C}_m \cdot {}_{n}\mathrm{C}_k B_{n-k} \right) x^m \\ &= \sum_{m=0}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_m B_{n-m}(1) x^m \end{aligned}$$

$n-m$ を k と置き換えて, (4.6) を利用すると

$$= \sum_{k=0}^{n} {}_{n}\mathrm{C}_k B_k x^{n-k} + n(B_1(1) - B_1)x^{n-1}$$

$B_1(1) = B_0 + B_1 = 1 + B_1$ であることから

$$= B_n(x) + nx^{n-1}$$

となり成立する. □

以上の準備のもとで定理 4.2 の証明を行う.

定理 4.2 の証明. まず, (4.8) を利用すると

$$\begin{aligned} B_{m+1}(n) - B_{m+1}(1) &= \sum_{k=1}^{n-1} (B_{m+1}(k+1) - B_{m+1}(k)) \\ &= (m+1)\sum_{k=1}^{n-1} k^m. \end{aligned}$$

したがって, ベルヌーイ多項式の定義と (4.6) から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} k^m &= \frac{1}{m+1}(B_{m+1}(n) - B_{m+1}(1)) \\ &= \frac{1}{m+1}\left(\sum_{k=0}^{m+1} {}_{m+1}\mathrm{C}_k B_k n^{m+1-k} - B_{m+1} \right) \\ &= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} {}_{m+1}\mathrm{C}_k B_k n^{m+1-k} \end{aligned}$$

となり成立する. □

なお, 微分の基礎知識を利用すると, (4.8) の証明は, 次のようにも構成できる. まず, 次の成立が容易に示せる.

補題 4.7. $f(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ に対して

$$f(x+1)=\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(1)}{m!}x^m.$$

ただし, $f^{(m)}(x)$ は $f(x)$ の m 回微分とする.

Proof. 二項定理から

$$\begin{aligned}f(x+1)&=\sum_{k=0}^{n}a_k\sum_{m=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_mx^m=\sum_{0\leqq m\leqq k\leqq n}{}_k\mathrm{C}_ma_kx^m\\&=\sum_{m=0}^{n}\frac{1}{m!}\left(\sum_{k=m}^{n}\frac{k!}{(k-m)!}a_k\right)x^m\\&=\sum_{m=0}^{n}\frac{f^{(m)}(1)}{m!}x^m\end{aligned}$$

となり成立する. □

ここで, $B'_n(x)$ を, $n=1,2,3$ に対して計算すると

$$\begin{aligned}B'_1(x)&=B_0=B_0(x),\\B'_2(x)&=2(B_0x+B_1)=2B_1(x),\\B'_3(x)&=3(B_0x^2+2B_1x+B_2)=3B_2(x)\end{aligned}$$

であり, 一般に次が成立する.

補題 4.8 (=**補題 4.6 の** (4.8))**.** 自然数 n に対して

$$B_n(x+1)-B_n(x)=nx^{n-1}. \tag{4.11}$$

Proof. 直接の計算により

$$\begin{aligned}B'_n(x)&=\sum_{k=0}^{n}(n-k)_n\mathrm{C}_kB_kx^{n-k-1}\\&=n\sum_{k=0}^{n-1}{}_{n-1}\mathrm{C}_kB_kx^{n-k-1}\\&=nB_{n-1}(x).\end{aligned} \tag{4.12}$$

$1\leqq m\leqq n$ に対して, (4.12) を繰り返し適用すると

$$B_n^{(m)}(x)=\frac{n!}{(n-m)!}B_{n-m}(x). \tag{4.13}$$

補題 4.7, (4.13), (4.6) を順に適用すると

$$\begin{aligned}B_n(x+1)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{B_n^{(k)}(1)}{k!}x^k\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!k!}B_{n-k}(1)x^k\\&=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_kB_k(1)x^{n-k}\\&=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_kB_kx^{n-k}+n(B_1(1)-B_1)x^{n-1}\\&=B_n(x)+nx^{n-1}\end{aligned}$$

となり成立する. □

5　和の公式の規則性について

自然数のべき乗和の公式を眺めていると, 3 以上の奇数べき乗和の公式の中には $n^2(n+1)^2$ が現れ, 偶数べき乗和の公式の中には $n(n+1)(2n+1)$ が現れていることが観察できる．本節では, この現象の証明の概略についての紹介を目的とする.

以下, $n\geqq 0$, $m\geqq 0$ に対して, $S_m(n)=\sum_{k=1}^{n}k^m$ とおく. 例えば

$$S_0(n)=n,\ S_1(n)=\frac{n(n+1)}{2},\ S_2(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

であり, $S_1(n)$, $S_2(n)$ を用いると

$$\begin{aligned}S_3(n)&=S_1(n)^2,\\S_4(n)&=-\frac{S_2(n)}{5}(1-6S_1(n)),\\S_5(n)&=-\frac{S_1(n)^2}{3}(1-4S_1(n)),\\S_6(n)&=\frac{S_2(n)}{7}(1-6S_1(n)+12S_1(n)^2)\end{aligned}$$

とも表せる．本節の冒頭の「観察」を証明するためには, $S_m(n)$ の $S_1(n)$ と $S_2(n)$ を用いた表示がわかるとよい. 実際, 次の成立が示せる[9].

命題 5.1. $m\geqq 1$ に対して, 次を満たす x を変数とする有理数係数の多項式 $F(x)$, $G(x)$ が存在する.

$$S_{2m+1}(n)=S_1(n)^2F(S_1(n)), \tag{5.1}$$

$$S_{2m}(n)=S_2(n)G(S_1(n)). \tag{5.2}$$

命題 5.1 の証明の前に補題を一つ示そう.

補題 5.2. (i) $m\geqq 1$ に対して

$$S_1(n)^{2m-1}=\frac{\sum_{k=0}^{m-1}{}_{2m-1}\mathrm{C}_{2k}S_{2(k+m)-1}(n)}{2^{2m-2}}, \tag{5.3}$$

$$S_1(n)^{2m}=\frac{\sum_{k=0}^{m-1}{}_{2m}\mathrm{C}_{2k+1}S_{2(k+m)+1}(n)}{2^{2m-1}}. \tag{5.4}$$

(ii) $m\geqq 1$ に対して

$$S_1(n)^{2m-1}S_2(n)=\frac{\sum_{k=0}^{m}\left({}_{2m}\mathrm{C}_{2k-1}+{}_{2m+1}\mathrm{C}_{2k}\right)S_{2(k+m)}(n)}{3\cdot 2^{2m-1}}, \tag{5.5}$$

$$S_1(n)^{2m-2}S_2(n)=\frac{\sum_{k=0}^{m-1}\left({}_{2m-1}\mathrm{C}_{2k}+{}_{2m}\mathrm{C}_{2k+1}\right)S_{2(k+m)}(n)}{3\cdot 2^{2m-2}}. \tag{5.6}$$

Proof. (i) $m\geqq 1$ に対して, まず, 二項定理から

$$\begin{aligned}&S_1(n)^m-S_1(n-1)^m\\&=\frac{n^m(n+1)^m}{2^m}-\frac{n^m(n-1)^m}{2^m}\\&=\frac{n^m}{2^m}\sum_{k=0}^{m}(1-(-1)^{m-k})_m\mathrm{C}_kn^k\end{aligned} \tag{5.7}$$

[9] この公式もファウルハーバーの公式と呼ぶようであるが, 証明を最初に与えたのはヤコビのようである (cf. [1]).

となることが容易にわかる. (5.7) において, m が奇数と偶数の場合に分けて計算すると, $m \geqq 1$ に対して

$$S_1(n)^{2m-1} - S_1(n-1)^{2m-1} = \frac{1}{2^{2m-2}} \sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m-1}\mathrm{C}_{2k} n^{2(k+m)-1}, \tag{5.8}$$

$$S_1(n)^{2m} - S_1(n-1)^{2m} = \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m}\mathrm{C}_{2k+1} n^{2(k+m)+1}. \tag{5.9}$$

$S_1(0) = 0$ であることと, (5.8) と (5.9) から

$$\begin{aligned} S_1(n)^{2m-1} &= \sum_{i=1}^{n} \left(S_1(i)^{2m-1} - S_1(i-1)^{2m-1}\right) \\ &= \frac{1}{2^{2m-2}} \sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m-1}\mathrm{C}_{2k} S_{2(k+m)-1}(n), \\ S_1(n)^{2m} &= \sum_{i=1}^{n} \left(S_1(i)^{2m} - S_1(i-1)^{2m}\right) \\ &= \frac{1}{2^{2m-1}} \sum_{k=0}^{m-1} {}_{2m}\mathrm{C}_{2k+1} S_{2(k+m)+1}(n) \end{aligned}$$

となり成立する. (ii) $m \geqq 1$ に対して, 二項定理と (2.2) を利用すると

$$S_1(n)^{m-1} S_2(n) - S_1(n-1)^{m-1} S_2(n-1) = \frac{n^m \sum_{k=0}^{m+1} (1 + (-1)^{m-k}) \left({}_m\mathrm{C}_{k-1} + {}_{m+1}\mathrm{C}_k\right) n^k}{3 \cdot 2^m}$$

となり[10], 後は (i) と同様に証明できるので略とする. □

命題 5.1 の証明. まず, (5.1) を示そう. $m \geqq 1$, $0 \leqq k \leqq m-1$ に対して

$$a_k^{(m)} = \frac{{}_{2m-1}\mathrm{C}_{2k}}{2^{2m-2}}, \quad b_k^{(m)} = \frac{{}_{2m}\mathrm{C}_{2k+1}}{2^{2m-1}}$$

とおくと, $a_k^{(m)}, b_k^{(m)} \neq 0$ であり, (5.3), (5.4) から $m \geqq 1$ に対して

$$\begin{aligned} S_1(n)^{2m-1} &= \sum_{k=0}^{m-1} a_k^{(m)} S_{2(k+m)-1}(n), \\ S_1(n)^{2m} &= \sum_{k=0}^{m-1} b_k^{(m)} S_{2(k+m)+1}(n). \end{aligned}$$

例えば

$$\begin{aligned} S_1(n)^2 &= b_0^{(1)} S_3(n), \\ S_1(n)^3 &= a_0^{(2)} S_3(n) + a_1^{(2)} S_5(n), \\ S_1(n)^4 &= b_0^{(2)} S_5(n) + b_1^{(2)} S_7(n), \\ S_1(n)^5 &= a_0^{(3)} S_5(n) + a_1^{(3)} S_7(n) + a_2^{(3)} S_9(n), \\ S_1(n)^6 &= b_0^{(3)} S_7(n) + b_1^{(3)} S_9(n) + b_2^{(3)} S_{11}(n). \end{aligned}$$

[10] ただし, ${}_m\mathrm{C}_{-1} = 0$ とする.

したがって, 詳細は略とするが, m についての帰納法で (5.1) が得られる. 次に, (5.2) を示そう. $m \geqq 1$, $0 \leqq k \leqq m$ に対して

$$c_k^{(m)} = \frac{{}_{2m}\mathrm{C}_{2k-1} + {}_{2m+1}\mathrm{C}_{2k}}{3 \cdot 2^{2m-1}}$$

とおき, $m \geqq 1$, $0 \leqq k \leqq m-1$ に対して

$$d_k^{(m)} = \frac{{}_{2m-1}\mathrm{C}_{2k} + {}_{2m}\mathrm{C}_{2k+1}}{3 \cdot 2^{2m-2}}$$

とおくと, $c_k^{(m)}, d_k^{(m)} \neq 0$ であり, (5.5), (5.6) から $m \geqq 1$ に対して

$$\begin{aligned} S_1(n)^{2m-1} S_2(n) &= \sum_{k=0}^{m} c_k^{(m)} S_{2(k+m)}(n), \\ S_1(n)^{2m-2} S_2(n) &= \sum_{k=0}^{m-1} d_k^{(m)} S_{2(k+m)}(n). \end{aligned}$$

したがって, 後は, (5.1) と同様に m についての帰納法で, (5.2) を示すことができる. □

A 付録

本節で述べる証明法は, 第 4 節で述べた証明法と異なり, 高校の学習内容を超える知識を必要とするものであるが, よく利用されている証明法であり, 参考のためにここに記載しておく. なお, 以下のべき級数は, 形式的べき級数と考え, 収束性については言及しない.

まず, 次の成立を確認しよう.

命題 A.1. n を自然数, e を自然対数の底とすると

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(n)}{k!} x^k = e^x \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1}. \tag{A.1}$$

Proof. 等比級数の和の公式から

$$\sum_{l=1}^{n} e^{lx} = e^x \frac{e^{nx} - 1}{e^x - 1} \tag{A.2}$$

が成り立つ. 一方, e^x のマクローリン展開から

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \tag{A.3}$$

と表せるので

$$\sum_{l=1}^{n} e^{lx} = \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(lx)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{n} \frac{l^k}{k!} \right) x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{S_k(n)}{k!} x^k$$

と計算でき, 確かに成り立つことが分かる. □

証明は略とするが, 次も成立している.

命題 A.2.

$$\frac{xe^x}{e^x - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n \tag{A.4}$$

とおくと $b_1 = -B_1 = \frac{1}{2}$, $b_n = B_n$ $(n = 0, n = 2, 3, 4, \ldots)$ である. この b_n もベルヌーイ数と呼ばれる場合がある.

これらの等式 (A.2), (A.3), (A.4) から

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{S_k(n)}{k!}x^k &= \left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)\frac{e^{nx}-1}{x}\\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_k}{k!}x^k\right)\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^{k+1}}{(k+1)!}x^k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{m+l=k}\frac{1}{l!(m+1)!}b_l n^{m+1}\right)x^k\end{aligned}$$

が得られ, 上式において, 両辺の x^k の係数を比較することにより, 次の形でべき乗和の公式が得られる.

$$S_k(n) = \frac{1}{k+1}\sum_{l=0}^{k}{}_{k+1}\mathrm{C}_l b_l n^{k-l+1}.$$

次に (5.1) を示そう. まず, i を虚数単位とし, 等式 (A.1) において, x を ix と置き換え, $e^{ix} = \cos x + i\sin x$ を利用して整理すると

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k S_{2k}(n)}{(2k)!}x^{2k} + i\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k S_{2k+1}(n)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\\ &= e^{ix}\frac{(e^{inx}-1)(e^{-ix}-1)}{(e^{ix}-1)(e^{-ix}-1)} = \frac{e^{inx}-e^{i(n+1)x}+e^x-1}{2(1-\cos x)}.\end{aligned} \tag{A.5}$$

上式の両辺の虚部をとると

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k S_{2k+1}(n)}{(2k+1)!}x^{2k+1}\\ &= \frac{\sin nx - \sin(n+1)x + \sin x}{2(1-\cos x)}\end{aligned}$$

和積の公式と 2 倍角の公式を利用し, $\frac{x}{2} = t$ と置き換えると

$$\begin{aligned}&= -\frac{\cos(2n+1)t - \cos t}{2\sin t}\\ &= -\frac{1}{2\sin t}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2n+1)^{2k}-1}{(2k)!}t^{2k}\right)\end{aligned}$$

が得られる. ここで, $n(n+1) = v$ とおくと, 任意の自然数 k に対して整数係数の多項式 $g_k(x)$ が存在して

$$(2n+1)^{2k} - 1 = v^2 g_k(v) + 4kv \tag{A.6}$$

と表すことができる（k についての数学的帰納法で容易に証明できるため略とする）. (A.6) を利用すると

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(2n+1)^{2k}-1}{(2k)!}t^{2k}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{v^2 g_k(v)}{(2k)!}t^{2k} - 2vt\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}t^{2k-1}\right)\\ &= \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{v^2 g_k(v)}{(2k)!}t^{2k} - 2vt\sin t\end{aligned}$$

となるので, $S_1(n)x = vt$ に注意することにより

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^{2k+1}S_{2k+1}(n)}{(2k+1)!}t^{2k+1}\\ &= -\frac{v^2}{2\sin t}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{g_k(v)}{(2k)!}t^{2k}\right)\end{aligned} \tag{A.7}$$

が得られる. したがって

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{e^{2it}2it}{e^{2it}-1}\frac{e^{-it}}{t} = \frac{1}{t}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{n!}(2it)^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-it)^n}{n!}\right)$$

であることから, 有理数係数の多項式 $F(x)$ が存在して

$$S_{2m+1}(n) = S_1(n)^2 F(S_1(n))$$

と表せることが分かる. 同様にして, (5.2) を示すことも可能である. 実際 (A.5) の実部をとって

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k S_{2k}(n)}{(2k)!}x^{2k} = \frac{\cos nx - \cos(n+1)x + \cos x - 1}{2(1-\cos x)}$$

和積の公式と 2 倍角の公式を利用し, $\frac{x}{2} = t$ と置き換えると

$$= \frac{\sin(2n+1)t - \sin t}{2\sin t}$$

となる. ここで, $n(n+1) = v$, $n(n+1)(2n+1) = u$ とおくと, 任意の 0 以上の整数 k に対して整数係数の多項式 $f_k(x)$ が存在して

$$(2n+1)^{2k+1} - 1 = uf_k(v) + 2n$$

と書けることを利用すれば, (5.2) が示される.

おわりに

本稿では, 高校生でも興味を持つであろう一般のべき乗和の公式について, その初等的な証明法を考察した. これは, 付録で述べたような広く知られている高度な証明法とは異なり, 高校生でも比較的容易に理解できるものである点に意義がある. 今後も, さらにわかりやすく簡潔な整数分野の解説方法・指導法について考えていきたい.

参考文献

[1] 荒川恒男, 伊吹山知義, 金子昌信, ベルヌーイ数とゼータ関数, 牧野書店, 2001.

[2] 野崎昭弘, 離散数学「数え上げ理論」, 講談社, 2008.