関連する理科的あるいは算数・数学的な、現象の説明

Explanations of scientific phenomena or experiments from the mathematical view point

石　塚　　亙
Wataru ISHIZUKA
（教育学部物理学教室）

木　村　憲　喜
Noriyoshi KIMURA
（教育学部化学教室）

中　村　文　子
Fumiko NAKAMURA
（教育学部）

2014年９月30日受理

Abstract

Any experiments gather attentions of students in most cases. And some scientific explanations are shown which are supposed to make the students understand the phenomena. However, we suspect that their questions may often arise from mathematical view point. We investigate on a couple of concrete examples, and present the results of a questionnaire related to this theme.

はじめに

小学生や中学生は、理科の実験に強い興味を示す。意外性のあるもの、驚きを感じる題材については特にそうである。筆者らは「和歌山大学実験工作キャラバン隊」[1]を組織して、そのような実験を子どもたちに演示する活動に取り組んでいる。ここで行っているいくつかの実験の中には、理科実験であっても、算数・数学的な説明の方がより適切と思われるものがある。学校教育では、理科と数学の間で教科を跨いだ連携を採ることが必ずしも円滑に行われない。それぞれの教科で時間的な余裕が少ないことと、進度が望ましい形で揃わないことに因る。たとえば微分積分が高校物理で扱えないことが典型である。本論では、理科と算数・数学の関連について詳細な考察はしないが、この関連を意識する有効性についての考察を行う。

１．偏光による遮光

初めにこの実験の概要を述べる。よく知られているように光は横波であり、進行方向と直交する２つの独立な振動面に沿って振動する。実験で用いる偏光板は、その面内に埋め込まれている「一定の方向」を持つ。そして偏光板を通過する光に対して、この方向の光の振動を消去する。したがって偏光板を通過した光は、進行方向に対して直交する１つだけの面内でのみ振動する。このことを利用しているのが３Ｄ映像である。眼鏡の左右に異なる「方向」を持つ偏光板を装着して、入射する光の２つの振動の片方を消去することにより、左右の眼に異なる視覚情報が入るようにしている。

偏光板を通過した光の進路の先に２枚目の偏光板を置くと、この２枚目の偏光板の「方向」が光の振動面と重なった場合に、２枚目の偏光板を光が通過できない。その結果、その方向から眼に入る光は２枚の偏光板で遮られて、眼には黒く感じられる。筆者らが「実験工作キャラバン隊」で扱っている実験は、他でも多く行われているものであるが、この偏光板の性質を利用する。これを見る角度によって、内側に、実際には存在しない黒い壁があるように見える（写真１）。これは光の進路上に２枚の「方向」が異なる偏光板が重なっている場合に、その光が消えることに因る。

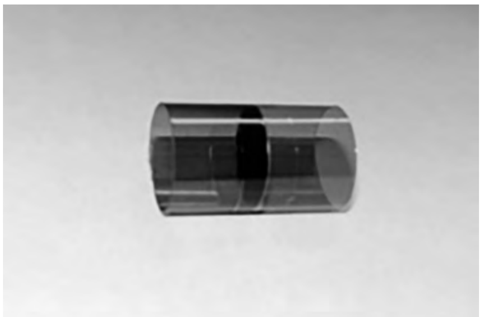

写真１　偏光板による「通り抜けられる壁」

壁があるように見えることの理由は、多くの場合、次のように述べられる。すなわち「偏光板の働きにより、光が通り抜けられないため」である。しかし、これは、壁のように見えることの十分な説明とは言えない。壁があった場合に、その壁が見る角度に応じて変形して見えるであろう形状に、偏光板によって光が遮られる領域が一致していなければならない。このことに思考が向いている者にとっては、初めの説明では納得できない。代わりに、以下のような数式と図形による説明が適切になる。

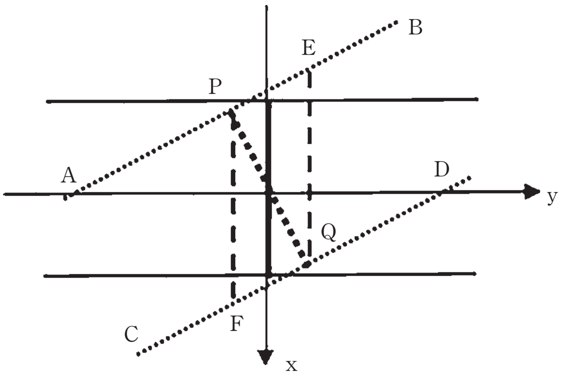

図１　円筒形偏光板に入射する光

図１は、写真１を真横から見たものである。ACからPQまでは「縦方向」の光を通さず、PQからBDまでは「横方向」の光を通さないように、２枚の偏光板をPQで接合している。視線方向にｘ軸を採り、遠方（x＝－∞）から入射する光は平行光線と見なす。EとFはそれぞれ、QとPを通るｘ軸との並行線と、ABとCDとの交点である（ｚ軸は紙面から飛び出す向き）。

EPの間から入射した光は、APの偏光板を通過した後は振動面は１つだけであり、更にQFを通過して眼に入る。QFの部分の偏光板の「方向」はAPのものとは逆である。そこで、この光は眼に届かず相対的に暗くなる。このEPまたはQFの範囲は、「壁」PQの見える大きさと一致する。このことは、図２を、円筒形の偏光板のｚ＝ｃ（ｃは任意）での断面と見なしたときにも当てはまる。したがって、円筒の中に壁が存在するように錯覚されることになる。

あるいは図２のように円筒を真横（x＝∞から）から見るとき、仮に壁があった場合に、それは次の式で表される。

$$x^2+z^2 \leqq 1,\quad y=0. \tag{1}$$

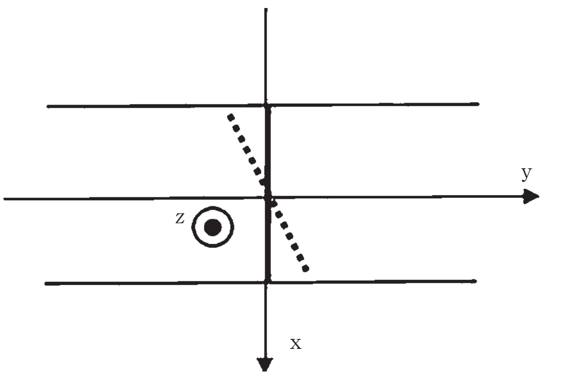

図２　円筒形偏光板のxyz座標表示

θだけ回転させた円筒の見える形は、xy面内での回転の座標変換、

$$x'=x\cos\theta-y\sin\theta,\quad y'=x\sin\theta+y\cos\theta,\quad z'=z \tag{2}$$

と式(1)により次のように表される。

$$y'^2/\sin^2\theta+z'^2 \leqq 1. \tag{3}$$

式(3)は、図２の２枚の偏光板の、PQを含む接合線とその内部をx軸方向に射影したものであり、互いに異なる「方向」を持つ２枚の偏光板の両方を通過した光の見える範囲（実際には見えない範囲）に他ならない。

２．光の回折パターンの分布

本章でも光の、波としての性質を利用するもう１つの実験を取り上げる。使用するのは、分光実験で用いられる回折格子フイルムである。回折格子は、その表面に多数の密な線状のスクラッチ（傷）を付けたものである。遠方から回折格子に入射する光は、回折格子を通過した後は、その上に配置された極めて多数の波源から改めて射出されたように振舞う。通常の回折格子は、間隔の小さな多数の平行線状の波源が生じるように作られており、干渉によって、特徴的なパターンを生じる。高校物理で扱われているように、回折格子フイルムから反射される光が特定のいくつかの角度に限定されることが、次の式（４）で表される。ここで、dは隣り合う２本の格子の間隔、λは入射する光の波長、θは回折格子フイルムから射出される光の角度である。

$$d\sin\theta=n\lambda,\quad n\text{は整数}. \tag{4}$$

光の回折と干渉による現象を興味深く児童生徒に見せる際に、多数の平行線を交差させた十字型の回折格子フイルムが利用される。この型の回折格子による光源の見え方を写真２に示す。正方格子形のパターンが繰り返されていることが分かる。

写真２　十字型回折格子による像

このような「形」が見えることに対する疑問が自然に沸くだろう。回折格子フイルムから特定の角度に光が射出されるということから説明できなければならない。誤り易いのは、斜め方向に現れる像についてである。たとえば写真２の中央の象から右上方向に延びる一連の象を作る光は、回折格子フイルムのどの部分か

ら射出されるのか。「隣り合う格子」からの干渉に因ると考えれば、その「格子間隔」は$\sqrt{2}d$となるが、式(4)から回折格子面との角度は$\sqrt{2}\theta$となる。しかし写真のような像をつくるためには、この角度は$\theta／\sqrt{2}$でなければならない。この矛盾は、光の波としての属性を十分に捉えていないことに原因がある。

そもそも回折格子フイルムをガラス板に換えれば干渉は起こらず、写真２の中央の像（０次の回折像）だけが残る。十字型でなく１方向の平行線だけであれば、中央の左右（または上下）に直線上に像が並び、これと交差する上下（左右）方向には像が現れない。交差する方向には像が現れない理由は、この方向に沿っては波源が連続的に分布しているため、それらから届く波の位相が打ち消し合うことである。多数の平行線状に一部の波源を逆に除くことによって、回折格子面と交差して入射する光の方向を含む面内で、０次（入射方向に対して角度０）以外の回折像ができる方向が現れる。

十字型の回折格子フイルムでは、もう１つの方向についても高次の像ができる方向が現れる。したがって独立な２つの方向の角度の合成になり、これを理解するためには、次のような空間幾何的な描像を利用するのが効果的である。図３では、２つ方向のそれぞれについて傾きの角度が異なるいくつかの面があり、２つの面の交差する直線の方向に像が結ばれる。このようにすると、正方格子状に像が現れることが理解し易い。

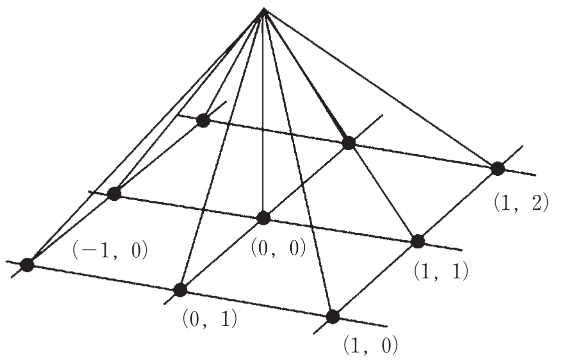

図３　十字型回折格子による像

３．算数・数学的な疑問

本論で考察している理科と算数・数学の関連に関して、小学校および中学校で理科の授業を担当している教員に、簡単なアンケート調査を行った。自身と児童生徒の両方について、意外性を持つ実験を例に、そこに理科的な疑問と算数・数学的な疑問のどちらをより強く感じるかを聞いた。結果は図４に示す。対象は小学校22人と中学校８人であるが、両者の間に大きな差異はなかった。

アンケートは次のとおりである。

「偏光板の実験と回折格子の実験の場合に、理科的な疑問：egなぜ虹のように見えるのか、と算数・数学的な疑問：egなぜそのような形が見えるのか」に関して、

①「生徒は、理科的な疑問(R)に比べて、算数･数学的な疑問(S)は持たない」、

②「自身では、理科的な疑問(R)に比べて、算数･数学的な疑問(S)は持たない」について、

「そう思う（⇒A）」「(S)も少しある（⇒B）」「(R)と(S)は同程度（⇒C）」「(S)の方が多い（⇒D）」の、それぞれ４段階で尋ねた。

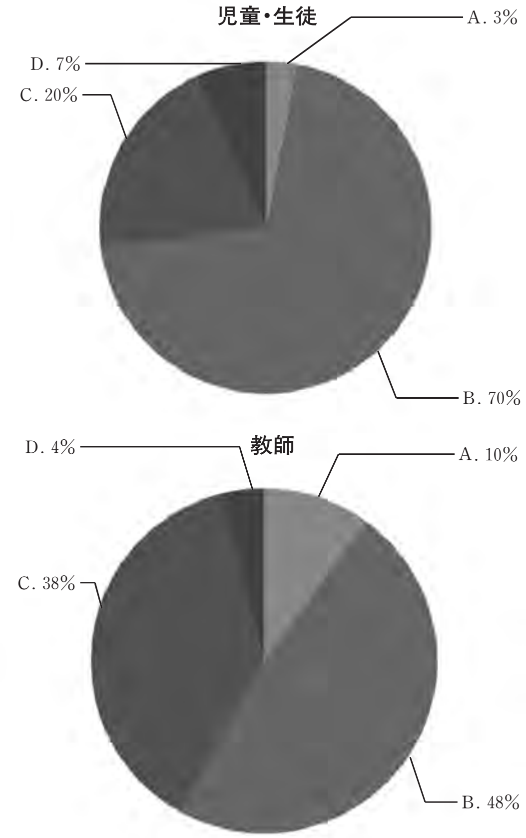

図４　理科的な疑問と算数・数学的な疑問の比率

この結果から、C(理科的な疑問に比べて、算数・数学的な疑問は同程度)とD(算数・数学的な疑問の方が大きい)を合わせると1/3になり、算数・数学的な疑問を持つ比率が小さくないことが分かる。算数・数学的な疑問を抱えている児童生徒に対しては、理科的な説明の「偏光面が直交する光は偏光板を通過しない」、或いは「波が干渉して強め合う」等は、求められている理由にならない。理科的な説明は、正しいと認める仮定を置いてそれの範囲内で行うが、仮定を一般化していく自然科学の方法論はこの場合に効果的ではない。前章までに述べたような算数・数学的な側面に着目する必要がある。

４．まとめ

本論で我々は、何故？という疑問の中に、算数・数学的な説明を期待している場合が少なくないことを示し、これについて考察した。学校教育でそれぞれの教科を教える際にもこのことに留意し、理科的な説明が

良いか、算数・数学的な説明が求められているか、疑問の方向性を見極めることが必要である。偏光による遮光と回折光のパターンの２つの理科の題材について、考えられる数学的な疑問に対する説明の具体例を示した。

自然科学と数学は相互の関わり合いの中で進化を遂げた。研究面では現在も関わりは一層深い。しかし、学校教育では必ずしも理科と算数・数学が、適切な連携を取りながら効果的な教育が行われているとは言えない。理科と算数・数学を跨ぐカリキュラム作りの試みを含めた新たな取組みが期待される。

《参考文献等》

⑴ http://www.edu.wakayama-u.ac.jp/caravan/index.html