Portmanteau 検定の解析

Analysis of Portmanteau Tests

天　野　友　之
Amano,　Tomoyuki

ABSTRACT

Box and Pierce（1970）proposed the test statistic TBP, now known as the classic portmanteau test. Under the null hypothesis that the autoregressive-moving average model of order（p,q）is adequate, they suggested that the distribution of TBP is approximated by a chi-square distribution with（m-p-q）degrees of freedom, “if m is moderately large.”

However, Taniguchi and Amano（2009）showed that this approximation is inadequate and proposed an important portmanteau test TWLR of natural Whittle type which is always asymptotically chi-square distributed under the null hypothesis that ARMA model is adequate. Amano（2008）compared TWLR with other famous portmanteau tests（Ljung-Box’s TLB, Li-McLeod’s TLM and Monti’s TMN）and proved TWLR’s accuracy by simulation.

This paper reviews results of Taniguchi and Amano（2009）and Amano（2008）.

概　要

株価や金融データなど，時とともに変動する観測系列を時系列と言う。世の中には様々な性質を持つ時系列データがあふれているのでそれらのデータの性質を捉えるように多くのモデルが提案されてきた。ARMA モデルはこれらのモデルの中でも広く用いられる重要なモデルである。しかしこのモデルをデータへ当てはめたとしてこのモデルはデータのモデルとして正しいだろうか？そのためにこのモデルがデータのモデルとして正しいかどうか検定を行わなけれ

ばならないが計量経済においてはBox and Pierce（1970）によって提案されたPortmanteau検定が有名でありこの検定は長く用いられ研究されてきた。しかしTaniguchi and Amano（2009）において，このPortmanteau検定が検定として不適切である事を理論的に証明し，代わりとなる自然なWhittle型の尤度比検定を提案した。更にAmano（2008）において数値解析によって，この提案した検定が代表的なPortmanteau検定より良いことを示した。本論文ではPortmanteau検定を解説しながらTaniguchi and Amano（2009）, Amano（2008）の結果をレビューする。この論文において1節では時系列解析の序論，2節ではARMAモデルの定義，3節ではPortmanteau検定と自然なWhittle型の尤度比検定の定義，4節では数値解析による自然なWhittle型の尤度比検定と代表的なPortmanteau検定との比較, 論文中で用いられる図は論文の最後に置いた。

1　時系列解析序論

時と共に変動する観測系列$\{X_t; t \in \mathbf{Z}\}$の事を時系列と言う。例えば時系列データの例としては株価，地震波，川の水位などがあげられる。この時系列データは経済学，自然科学，医学などのあらゆる分野で見られるため近年，その解析の必要性は急速に高まりそして発展している。特に，経済学においては金融データなどの多くの時系列データがあるためにその必要性と発展は顕著である。

この時系列データの統計解析を時系列解析と言うが，時系列解析においてまず初めに行うのが時系列データがどのようなモデルに従っているかの推定である。しかしこの推定したモデルが正しいかどうかの疑問がある。そのために推定したモデルが正しいかの検定を行うがこの検定が時系列解析における重要なトピックの一つとなっている。本論文ではこの時系列解析の検定における著者の結果を報告する。そのためにまず統計学の序論より入っていく。

まず確率変数X_tの平均$E[\cdot]$と言うのは観測値X_tが無限コ得られたと仮定した時のその平均の理論値の事である。そして，次で与えられる値$V[X_t]$を

X_t の分散という。

$$V[X_t] = E[X_t - E[X_t]]^2 \tag{1}$$

この分散はX_tの平均からのばらつき具合をあらわす量でこれが大きいほどX_tは平均から大きくばらつく確率変数となる。次にX_tとX_sの共分散$Cov[X_t, X_s]$を定義する。

$$Cov[X_t, X_s] = E[(X_t - E[X_t])(X_s - E[X_s])] \tag{2}$$

この共分散はX_tとX_sの相関を表す量であるが$E[X_t]$の平均が大きくなれば共分散も大きくなるので次のように標準化したものがX_tとX_sの相関係数$Cor[X_t, X_s]$ である。

$$Cor[X_t, X_s] = \frac{Cov[X_t, X_s]}{\sqrt{V[X_t]}\sqrt{V[X_s]}} \tag{3}$$

この相関係数はX_tとX_sの相関を表しこの値の絶対値が大きいほどX_tとX_sは互いに影響力のある，すなわち相関の強い確率変数である。更にこの相関係数は次の性質を持つ。

（$Cor[X_t, X_s] > 0$ の時）

次のようになりやすい。

$$X_t > E[X_t] \longrightarrow X_s > E[X_s] \tag{4}$$

$$X_t < E[X_t] \longrightarrow X_s < E[X_s] \tag{5}$$

（$Cor[X_t, X_s] < 0$ の時）

次のようになりやすい。

$$X_t > E[X_t] \longrightarrow X_s < E[X_s] \tag{6}$$

$$X_t < E[X_t] \longrightarrow X_s > E[X_s] \tag{7}$$

多くの時系列データが満たす条件として，時系列解析においては次の制約条

件を一般的に課す。

$$E[X_t] = c : \text{定数}\quad (\text{任意の}\ t \in \mathbf{Z}) \tag{8}$$

$$Cov[X_t, X_s] = R(s-t) \tag{9}$$

この制約条件を満たす時系列 $\{X_t\}$ を定常過程と言う。この条件は自然に次の条件に書き直せる。

$$E[X_t] = c : \text{定数}\quad (\text{任意の}\ t \in \mathbf{Z}) \tag{10}$$

$$Cov[X_t, X_s] = R(|s-t|) \tag{11}$$

更にこの条件は自然に以下のように書き直すことができる。

$$E[X_t] = c : \text{定数}\quad (\text{任意の}\ t \in \mathbf{Z}) \tag{12}$$

$$Cor[X_t, X_s] = r_{|s-t|} \tag{13}$$

つまりこの条件は，X_t と X_s の相関が時刻の差 $|s-t|$ にのみ依存すると言う事である。特にこの $r_{|s-t|}$ を自己相関関数と言う。

この自己相関関数 $r_{|s-t|}$ は異なる時刻におけるデータの相関を測る，時系列においては非常に重要な量である。つまり全ての r_s の値を知ればデータの持つ確率構造が分かるのでデータの値の予測なども可能になる。しかし一般的に r_s は未知であるので推定しなければならない。その r_s の推定量が次に与えられる標本自己相関関数である。

$$\hat{r}_s = \frac{\sum_{t=1}^{n-s}(X_{t+s} - \bar{X}_n)(X_t - \bar{X}_n)}{\sum_{t=1}^{n}(X_t - \bar{X}_n)^2} \tag{14}$$

ここに $\bar{X}_n$ は標本平均で $\bar{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t$ である。次の節ではこの論文の主題である ARMA モデルを定義する。

2 ARMA モデル

この節では計量経済において広く用いられてきた ARMA モデルを定義する。そのためにまず最も単純な定常過程を紹介する。時系列 $\{u_t; t \in \mathbf{Z}\}$ が任意の時刻 t に対し次の条件を満たすときこの時系列を無相関過程と言う。

$$E(u_t) = 0 \tag{15}$$

$$E(u_t u_{t+s}) = \begin{cases} \sigma^2 & (s=0) \\ 0 & (s \neq 0) \end{cases} \tag{16}$$

つまりこの無相関過程は，異なる時刻における値どうしは相関が無いという最も単純なモデルである。

この無相関過程を用い，次のように MA(q) モデルを定義する。

$$X_t = \sum_{j=0}^{q} \beta_j u_{t-j} \tag{17}$$

ここで $\beta_0 = 1$， $\beta_q \neq 0$ とする。このモデルは無条件に定常過程となる。

もう一つ，この無相関過程を用いたモデルを紹介する。次で定義されるモデルを AR(p) モデルと言う。このモデルは一般的な正則条件のもと定常過程となる。

$$\sum_{j=0}^{p} \alpha_j X_{t-j} = u_t \tag{18}$$

ここで $\alpha_0 = 1$， $\alpha_p \neq 0$ とする。

これらのモデルはそれぞれに長所を持った用いやすいモデルであるが世の中の時系列データを記述するには表現力に乏しい。そのためにこれらを合わせた次のような ARMA(p,q) モデル（autoregressive moving average process）が提案された。このモデルも一般的な正則条件のもと定常過程となる。

$$\sum_{j=0}^{p} \alpha_j X_{t-j} = \sum_{j=0}^{q} \beta_j u_{t-j} \tag{19}$$

ここで $\alpha_0 = 1$， $\beta_0 = 1$， $\alpha_p \neq 0$， $\beta_q \neq 0$ とする。この ARMA モデルは非常に表現力に富んだモデルであらゆる時系列データにこのモデルが当てはめられ解析されてきた。本論文ではこの ARMA モデルについて議論する。

3 Portmanteau 検定

前節で紹介した ARMA モデルは経済，自然科学など，多くの分野で広く使われてきた重要なモデルである。しかし，データにこの ARMA モデルを当て

はめたとき，このモデルがそのデータのモデルとして正しいのかと言う疑問がある。そのためにこのモデルが正しいかどうかの検定を行わなければならないが, そのために Box and Pierce (1970) によって Portmanteau 検定が提案された。この Portmanteau 検定は計量経済において長年研究されそして多くの修正ヴァージョンが提案されてきた。この節ではまずその Portmanteau 検定を紹介する。

データに ARMA モデルを仮定し，その係数

$$\{\alpha_0, \cdots, \alpha_p\}, \quad \{\beta_0, \cdots, \beta_q\} \tag{20}$$

が次で推定されたとする。

$$\{\hat{\alpha}_0, \cdots, \hat{\alpha}_p\}, \quad \{\hat{\beta}_0, \cdots, \hat{\beta}_q\} \tag{21}$$

この $\{\hat{\alpha}_0, \cdots, \hat{\alpha}_p\}$，$\{\hat{\beta}_0, \cdots, \hat{\beta}_q\}$ を ARMA モデル

$$\sum_{j=0}^{p} \alpha_j X_{t-j} = \sum_{j=0}^{q} \beta_j u_{t-j} \tag{22}$$

の $\{\alpha_0, \cdots, \alpha_p\}$，$\{\beta_0, \cdots, \beta_q\}$ の代わりに代入すれば誤差列 $\{u_t\}$ の推定量 $\{\hat{u}_t\}$ が得られる。もし仮定した ARMA モデルが正しいなら，この系列 $\{\hat{u}_t\}$ の標本自己相関関数 $\hat{r}_k$ について次の近似ができると Box and Pierce（1970）は主張した。

$$n \sum_{k=1}^{m} \hat{r}_k^2 \sim \chi^2_{m-p-q} \tag{23}$$

ここに $\sim$ は近似の意味で χ^2_{m-p-q} は自由度 $m-p-q$ のカイ 2 乗分布である。

これより Box and Pierce（1970）は

$$n \sum_{k=1}^{m} \hat{r}_k^2 \tag{24}$$

が χ^2_{m-p-q} 分布に従えば仮定した ARMA モデルが正しいという検定を提案し，これが Portmanteau 検定と呼ばれる。

しかしながらモデルがARMAモデルに従っていても，このBox and Pierce（1970）のPortmanteau検定がχ^2分布で十分に良く近似されないと指摘されLjung and Box（1978）によって次のような新たなPortmanteau検定が提案された。

$$n(n+2)\sum_{K=1}^{m}\frac{\hat{r}_k^2}{n-k} \tag{25}$$

更に現在に至るまで多くのPortmanteau検定の修正ヴァージョンが提案され研究されている。しかし先行文献においてBox and Pierce（1970）とLjung and Box（1978）のPortmanteau検定がχ^2分布で近似できないことを理論的に示した文献は無いのでTaniguchi and Amano(2009)において次の事を示した。

定理 1

仮定したARMAモデルが正しくても次が成り立つ。

$$T_{BP} \not\Longrightarrow \chi^2_{m-p-q} \qquad in \quad distribution \tag{26}$$

$$T_{LB} \not\Longrightarrow \chi^2_{m-p-q} \qquad in \quad distribution \tag{27}$$

この定理より従来のPortmanteau検定はARMAモデルの検定として不適切なのでTaniguchi and Amano（2009）においては代わりとなる次のARMAモデルの検定 T_{WLR} を提案した。

定義 1

$$T_{WLR} \equiv 2n[D(f_{(\tilde{\theta}_1,\tilde{\theta}_2)}, I_n) - D(f_{(\hat{\theta}_1,0)}, I_n)] \tag{28}$$

ここにARMA係数を $\theta_1 = (\alpha_1, \cdots, \alpha_p, \beta_1, \cdots, \beta_q)'$ とし，$\theta_2 = (\theta_{2,1}, \cdots, \theta_{2,m})'$，$\theta = (\theta_1', \theta_2')'$，$f_{(\theta_1,\theta_2)}(\lambda)$ は次で与えられる。

$$f_{(\theta_1,\theta_2)}(\lambda) = \frac{|\sum_{j=0}^{q}\beta_j e^{ij\lambda}|^2}{|\sum_{j=0}^{p}\alpha_j e^{ij\lambda}|^2}\cdot\frac{\sigma^2}{2\pi}\left\{\sum_{j=-m}^{m}\theta_{2,j}e^{-ij\lambda}\right\} \tag{29}$$

更に $I_n(\lambda)$ は $\{X_t\}$ のピリオドグラムであり

$$D(f_\theta, I_n) = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\{\log f_\theta(\lambda) + \frac{I_n(\lambda)}{f_\theta(\lambda)}\}d\lambda \tag{30}$$

$$\hat{\theta}_1 \equiv \arg\max_{\theta_1} D(f_{(\theta_1,0)}, I_n) \tag{31}$$

$$(\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2) \equiv \arg\max_{(\theta_1,\theta_2)} D(f_{(\theta_1,\theta_2)}, I_n) \tag{32}$$

である。

更に Taniguchi and Amano（2009）で T_{WLR} について次を示した。

定理 2

仮定した ARMA モデルが正しい時，次が成り立つ。

$$T_{WLR} \Longrightarrow \chi_m^2 \qquad in \quad distribution \tag{33}$$

つまり T_{WLR} は仮定した ARMA モデルが正しいとき χ^2分布に収束するので ARMA モデルの検定として適切である。

次にもし仮定した ARMA モデルが誤っているときそれを T_{WLR} が十分に検出できるかと言う事を考える。そのために $\{u_t\}$ に相関を与えその時の T_{WLR} の検出力を見た。

定理 3

ARMA モデルの $\{u_t\}$ の m 次までの自己共分散関数を $\theta_2 = (\theta_{2,1}, \cdots, \theta_{2,m})'$ とした時，定数ベクトル h に対し $\theta_2 = \frac{1}{\sqrt{n}}h$ のもとで次が成り立つ。

$$T_{WLR} \xrightarrow{d} \chi_m^2(h'F_{22\cdot 1}h) \qquad as \quad n \to \infty, \tag{34}$$

ここに $\chi_m^2(h'F_{22\cdot 1}h)$ は自由度 m，非心パラメーター $h'F_{22\cdot 1}h$ の非心カイ 2 乗分布であり，　$F_{22\cdot 1} = F_{22} - F_{21}F_{11}^{-1}F_{12}$ は次より与えられる。

$$F \equiv \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\partial}{\partial\theta}\log f_\theta(\lambda)\frac{\partial}{\partial\theta'}\log f_\theta(\lambda)d\lambda = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} \tag{35}$$

つまりこの定理が示すことはもし誤ってモデルがARMAモデルに従っておらずその誤差列 $\{u_t\}$ に相関があり，その相関が標本数と共にOに近づいても T_{WLR} がその誤りを検出してくれる良い検定である事を示している。

4　数値解析

この節では前節において提案したARMAモデルの検定 T_{WLR} と次の代表的なPortmanteau検定を比較する。

$$T_{LB} = n(n+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{\hat{r}_k^2}{n-k}, \tag{36}$$

$$T_{LM} = \frac{m(m+1)}{2n} + n\sum_{k=1}^{m}\hat{r}_k^2, \tag{37}$$

$$T_{MN} = n(n+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{\hat{\pi}_k^2}{n-k} \tag{38}$$

ここに $\hat{\pi}_k$ は $\{\hat{u}_t\}$ の k 次の標本部分自己相関関数である。先行文献と今までの解説より，もし仮定したARMA(p,q)モデルが正しければ T_{LB}，T_{LM}，T_{MN} は χ^2_{m-p-q} 分布で近似できるとされた。そして T_{WLR} は χ^2_m 分布に収束することが示された。これらの事より T_{WLR} と他のPortmanteau検定の χ^2 分布への近似の良さを比較する。更に誤ったモデルを選択した時の検定 T_{WLR}，T_{LB}，T_{LM}，T_{MN} の検出力を見る。

Example4.1

まず $\{X_t\}$ を次で与えられるAR(1)モデルとする。

$$X_t + \alpha X_{t-1} = u_t \tag{39}$$

ここに u_t は独立同分布で $N(0,1)$ に従うとする。このモデルにおいて $T_{WLR}(m=1)$ と T_{LB}，T_{LM}，$T_{MN}(m=2)$ を比較する。このセッティングのもとでは T_{WLR} は χ^2_1 分布に収束し T_{LB}，T_{LM}，T_{MN} は χ^2_1 分布で近似でき

るとされたのでこれらの χ_1^2 分布への近さを見る。

ここで χ_1^2 分布の平均は 1，分散 2 なので T_{WLR}，T_{LB}，T_{LM}，T_{MN} の標本平均と標本分散がそれぞれどのくらい 1 と 2 に近いかを見る。標本平均については図 1，標本分散は図 2 に描いた。

更に図 3 には T_{WLR}，T_{LB}，T_{LM}，T_{MN} の５％の有意水準を描いた。
（数値解析はデータ $\{X_t\}$ の長さ$n = 200$, 数値解析の回数は 1000 回で行った。）
（また図の横軸はモデルの母数αを取り，αを $0.85 \leq \alpha \leq 0.99$ とした。）

図 1 より明らかに T_{WLR} の方が他の Portmanteau 検定より標本平均が 1 に近いことが分かる。つまり平均に関しては T_{WLR} の方が他の Portmanteau 検定より χ_1^2 分布へ近いことが分かる。

図 2 より明らかに T_{WLR} の方が他の Portmanteau 検定より標本分散が 2 に近いことが分かる。つまり分散に関しては T_{WLR} の方が他の Portmanteau 検定より χ_1^2 分布へ近いことが分かる。

図 3 より T_{WLR} の有意水準の方が明らかに他の Portmanteau 検定より大きく 0.05 に近いので T_{WLR} の方が χ_1^2 分布への近似が良い事が分かる。

Example4.2

まず $\{X_t\}$ を次で与えられるモデルとする。

$$X_t + \alpha X_{t-1} = u_t \tag{40}$$

ここに通常は $\{u_t\}$ は無相関過程でこの時このモデルは AR(1) モデルとなるがここでは $\{u_t\}$ は平均 0，分散 1 の MR(1) モデルとしその自己共分散関数を $\{\frac{H}{\sqrt{n}}\}$（$H = \frac{3}{\alpha}$）で与える。つまりこのような AR(1) モデルで無いモデルを AR(1) モデルと誤って仮定した時，その誤りの検出を T_{WLR} と他の Portmanteau 検定がどの程度するかを見るのである。ここで，もしモデルが AR(1) モデル

に従っていれば $T_{WLR}(m=1)$ は χ_1^2 分布に従うので，T_{WLR} が χ_1^2 分布の95％点より大きな値を取る事はほとんどない。つまり T_{WLR} が χ_1^2 分布の95％点を超えたらモデルはAR(1)モデルに従っていないと判断する。このように実際にAR(1)モデルに従っていないモデルを T_{WLR} がどのくらい検出するのか見るのである。（ここでこの検出する割合の事を検出力と言う。）更に T_{LB}，T_{LM}，T_{MN} はAR(1)モデルが正しいとき χ_{m-1}^2 分布で近似できるとされたので同様に χ_{m-1}^2 の95％点をこれらのPortmanteau検定がどの位超えるかを見ることにより実際にAR(1)モデルでないモデルをどの位，これらのPortmanteau検定が検出するかを見る。図4では $T_{WLR}(m=1)$，T_{LB}，T_{LM}，$T_{MN}(m=10)$ の検出力を, 図5では $T_{WLR}(m=1)$, T_{LB}, T_{LM}，$T_{MN}(m=20)$ の検出力を描いた。

（データ $\{X_t\}$ の長さ $n=200$，数値解析の回数は1000回とした。）

（また図の横軸はモデルの母数 α を取り，α を $0.45 \leq \alpha \leq 0.99$ とした。）

図4，図5より明らかに T_{WLR} の方が他のPortmanteau検定より検出力の大きい検定である事が分かる。

これらの数値解析より実際に仮定したARMAモデルが正しい時，T_{WLR} の方が他の代表的なPortmanteau検定より χ^2 分布への近似が良い事が分かった。また誤ったARMAモデルを仮定した時，T_{WLR} の方が他の代表的なPortmanteau検定よりその誤りを検出できる事が分かった。つまり T_{WLR} の方がARMAモデルの検定として他のPortmanteau検定より良い事が分かった。

参考文献

［1］Amano, T.（2008）Comparison of Whittle type portmanteau tests. Scientiae Mathematicae Japonicae, 68, No 2, 247–254.

［2］Box, G. E. P. and Pierce, D. A.（1970）Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models. J. Amer. Statist. Assoc.

65, 1509–1526.
[3] Li, W. K. and McLeod, A. I.（1981）Distribution of the residual autocorrelations in multivariate ARMA time series models. J. Roy. Statist. Soc. Ser. B. 43, 231–239.
[4] Ljung, G. M. and Box, G. E. P.（1978）On a measure of lack of fit in time series models. Biometrika 65, 297–303.
[5] Monti, A. C.（1994）A proposal for a residual autocorrelation test in linear models. Biometrika. 81, 776–780.
[6] Taniguchi, M. and Amano, T.（2009）Systematic approach for portmanteau tests in view of Whittle likelihood ratio. Journal of the Japan Statistical Society, 39, No 2, 177–192.

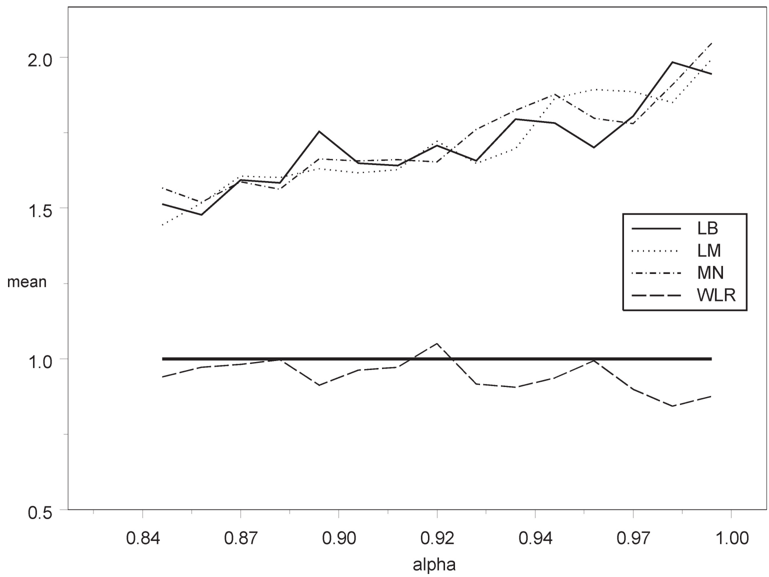

図 1: The means of T_{WLR}, T_{LB}, T_{LM} and T_{MN} in Example 4.1 ($0.85 \leq \alpha \leq 0.99$)

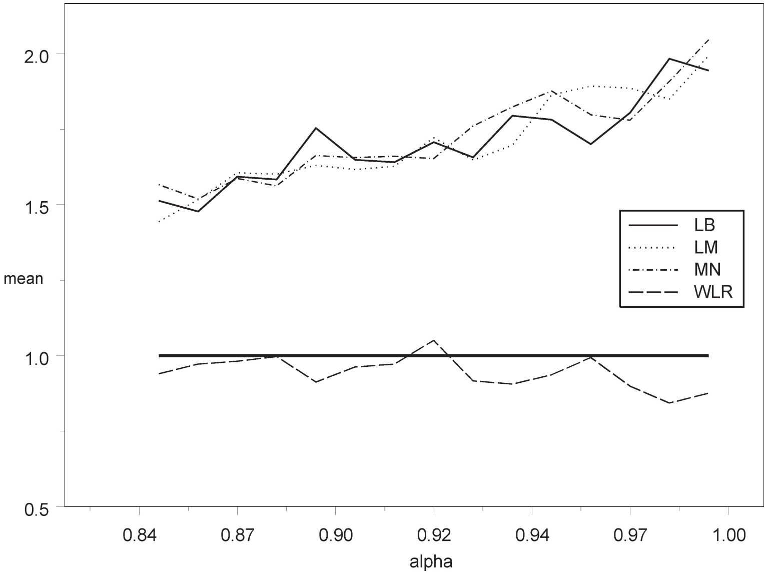

図 2: The variances of T_{WLR}, T_{LB}, T_{LM} and T_{MN} in Example 4.1 ($0.85 \leq \alpha \leq 0.99$)

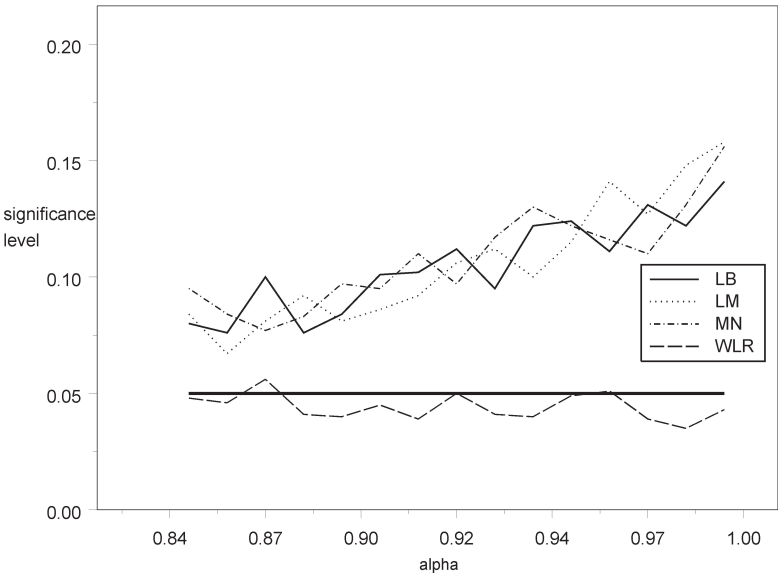

図 3: The significance levels with nominal size 5% of T_{WLR}, T_{LB} ($m = 2$), T_{LM} ($m = 2$) and T_{MN} ($m = 2$) in Example 4.1 ($0.85 \leq \alpha \leq 0.99$)

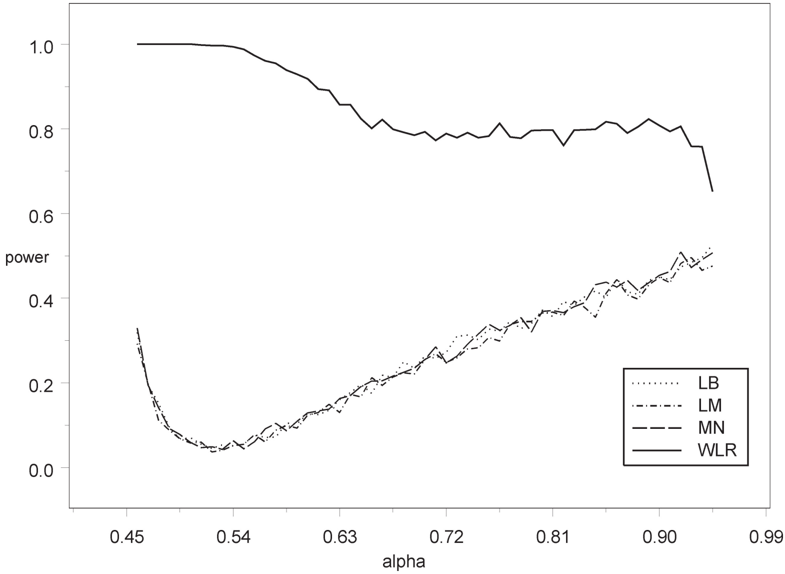

図 4: The empirical powers with level test 5% of T_{WLR}, T_{LB} $(m = 10)$, T_{LM} $(m = 10)$, T_{MN} $(m = 10)$ in Example 4.2 $(0.45 \leq \alpha \leq 0.99)$

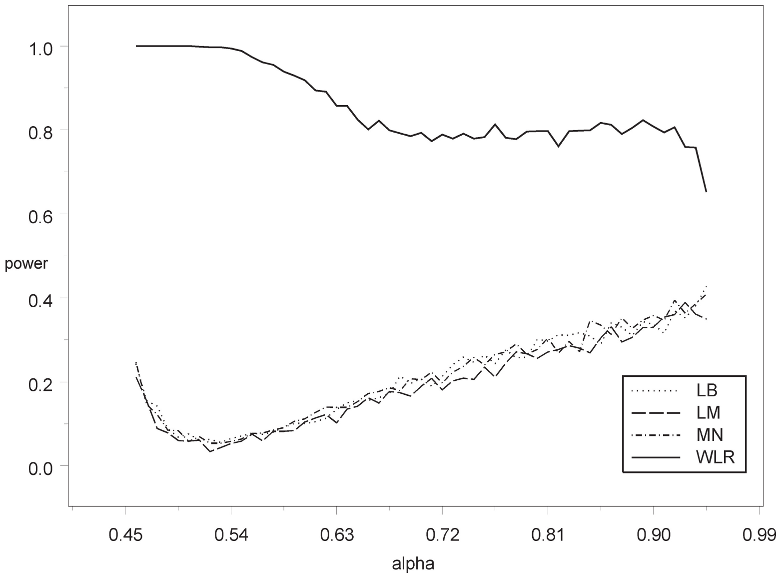

図 5: The empirical powers with level test 5% of T_{WLR}, T_{LB} $(m = 20)$, T_{LM} $(m = 20)$, T_{MN} $(m = 20)$ in Example 4.2 $(0.45 \leq \alpha \leq 0.99)$