中学校数学の図形領域における平面幾何の代数的構成

An Algebraic Model for the Plane Geometry in Junior High School

片山 聡一郎　　田川 裕之
Soichiro KATAYAMA　　Hiroyuki TAGAWA
（和歌山大学教育学部）　（和歌山大学教育学部）

2011 年 8 月 22 日受理

本稿では, 中学校の教科書では直観的に成立を認めたことを数学的に厳密に証明できるような平面幾何のモデルを構築する.

1　序

[1] では, 中学校数学の平面幾何を純粋な数学理論と見た場合, どのような命題を大前提 (公理) として, 諸結果が示されているのかを調べた. 本稿では, 実数 2 つの組に幾何学的意味を与え, 実際に [1] で与えた中学校数学の公理系を満たす幾何モデルを構成する. この幾何モデルは座標平面 (あるいはデカルト平面) としてよく知られたものであり, 数学的に新しいことは何もない. ここで目的とするのは, 高校数学を学び終えたものが中学校数学での平面幾何を振り返ったときに, そこで直観的に認めたことを可能な限り高校までの数学の範囲で厳密に確かめられるような幾何モデルを構成することである. 中学・高校において座標平面なるものは学ぶが, そこではユークリッド幾何の平面と座標平面が同一視できることを直観的に認めているため, 座標平面の構成に中学校で学ぶ直観的な幾何の知識が入り込んでいる. したがって, 思い込みを捨てて一から概念を洗い直すことがこの目的のためには必要となる. また公理が成立することの証明に, 中学校教科書で "証明" されている幾何の定理と同一の結果をこのモデル内で証明して用いないように留意した[1]. もし, そのような定理と同一の結果を用いて "公理" を示せば, 中学校数学で与えられている "公理" を用いたその定理の証明が循環論法になってしまうからである.

舞台となる $\mathbb{R}^2$ の基本的な性質を見ておこう. 実数全体の集合を $\mathbb{R}$ と書き, 実数 2 つの組の全体を $\mathbb{R}^2$ と書く. すなわち $\mathbb{R}^2 = \{\mathbf{a} = (a_1, a_2); a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$. $\mathbf{0} := (0, 0)$ と定める. $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\mathbf{a} + \mathbf{b} := (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ と定義する. $\lambda \in \mathbb{R}$ と $\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して $\lambda\mathbf{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2)$ と定義する.

$\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ のノルム (大きさ) を $\|\mathbf{a}\| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ で定義する[2]. 次の性質が容易に得られる: (1) $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ に対して $\|\mathbf{a}\| \geq 0$ (等号成立は $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ の場合のみ); (2) $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\|\lambda\mathbf{a}\| = |\lambda|\,\|\mathbf{a}\|$.

$\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して, 内積を $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} := a_1 b_1 + a_2 b_2$ と定めると次の性質が直ちに分かる: (1) $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ に対して $\|\mathbf{a}\|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$; (2) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ に対して $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$; (3) $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ に対して $(\lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \lambda(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + \mu(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$. (1), (2), (3) より, $\|\mathbf{a} \pm \mathbf{b}\|^2 = (\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} \pm \mathbf{b}) = \|\mathbf{a}\|^2 \pm 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \|\mathbf{b}\|^2$ $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2)$ である. よって $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{4}\left(\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 - \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2\right) \tag{1.1}$$

が成立する.

$\mathbf{a} = (a_1, a_2) \in \mathbb{R}^2$ に対して, $\mathbf{a}^\perp := (-a_2, a_1)$ と定義する. 以下の諸性質が確かめられる: (1) $\|\mathbf{a}^\perp\| = \|\mathbf{a}\|$; (2) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}^\perp = 0$; (3) $(\mathbf{a}^\perp)^\perp = -\mathbf{a}$; (4) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^\perp = -\mathbf{a}^\perp \cdot \mathbf{b}$, (5) $\mathbf{a}^\perp \cdot \mathbf{b}^\perp = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$.

補題 1.1. $\mathbf{e}(\neq \mathbf{0}) \in \mathbb{R}^2$ とする. このとき 任意の $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ は $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ を用いて

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e} + \alpha_2\mathbf{e}^\perp \tag{1.2}$$

の形で一意に表される. ここで $\alpha_1 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}/\|\mathbf{e}\|^2$, $\alpha_2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^\perp/\|\mathbf{e}\|^2$ である. また $\mathbf{b} = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\perp$ とすると $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})/\|\mathbf{e}\|^2$ となる.

証明: (1.2) が成立するとき, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = \alpha_1\mathbf{e} \cdot \mathbf{e} + \alpha_2\mathbf{e}^\perp \cdot \mathbf{e} = \alpha_1$. 同様にすると $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}^\perp = \alpha_2$ となるから一意性が分か

[1] ただし線分の長さの定義を通じて, 三平方の定理の特別な場合が入り込むことは避けられない.

[2] $|\mathbf{a}|$ という書き方もある.

る．逆に α_1, α_2 が上の値ならば (1.2) が成立することは代入すれば確認できる．$\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\alpha_1\beta_1\|\mathbf{e}\|^2+\alpha_2\beta_2\|\mathbf{e}^\perp\|^2$ から最後の等式が得られる．□

$\mathbf{a}$ が (1.2) の形のとき, $\mathbf{a}^\perp=-\alpha_2\mathbf{e}+\alpha_1\mathbf{e}^\perp$ が成立する[3]．また, $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ とするとき, $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$ かつ $\|\mathbf{b}\|=\|\mathbf{a}\|$ を満たす $\mathbf{b}$ は $\mathbf{b}=\pm\mathbf{a}^\perp$ のみである．実際, $\mathbf{b}=\beta_1\mathbf{a}+\beta_2\mathbf{a}^\perp$ とおくと, $\beta_1=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=0$. よって $\|\mathbf{b}\|=\|\mathbf{a}\|$ より $\beta_2=\pm1$ である．

補題 1.2 (シュワルツの不等式)**.** $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^2$ に対して $|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|\leq\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|$. 等号成立は $\mathbf{a}^\perp\cdot\mathbf{b}=0$ の場合のみである．

証明: $\mathbf{a}=(a_1,a_2)$, $\mathbf{b}=(b_1,b_2)$ とすると, 単純計算により $\|\mathbf{a}\|^2\|\mathbf{b}\|^2-|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|^2=(a_1b_2-a_2b_1)^2=(\mathbf{a}^\perp\cdot\mathbf{b})^2\geq0$ を得るので結果が従う．□

シュワルツの不等式から $(\|\mathbf{a}\|+\|\mathbf{b}\|)^2-\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|^2=2(\|\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{b}\|-\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})\geq0$ となり, 次の三角不等式が得られる: $\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^2$ に対して $\|\mathbf{a}+\mathbf{b}\|\leq\|\mathbf{a}\|+\|\mathbf{b}\|$.

$S^1:=\{\mathbf{a}\in\mathbb{R}^2;\ \|\mathbf{a}\|=1\}$ と定義する．

2　平面幾何の代数的構成

2.1　点, 直線, 線分

ここで $\mathbb{R}^2$ に幾何学的意味を与える: $\mathbb{R}^2$ を **平面**, $\mathbf{a}(\in\mathbb{R}^2)$ を**点**という．

定義 2.1 (直線)**.** $\mathbb{R}^2$ の部分集合 ℓ が**直線**であるとは, $\mathbf{p}\in\mathbb{R}^2$, $\mathbf{q}(\neq\mathbf{0})\in\mathbb{R}^2$ がとれて, $\ell=\{\mathbf{p}+t\mathbf{q};\ t\in\mathbb{R}\}$ となることをいう．

$\mathbf{a}\in\ell$ であるとき, “直線 ℓ は点 $\mathbf{a}$ を通る”, または “点 $\mathbf{a}$ は直線 ℓ の上にある” などという．また $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ が一直線上にあるとは $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\ell$ となるような直線 ℓ が存在することをいう．

以下では, 単に 2 点, 3 点などのように書くときは “相異なる 2 点”, “相異なる 3 点” などの意味にとる．また “公理 (A1)” などのように書くときは, [1] で与えた公理を意味する．

命題 2.2 (公理 (A1), (A2))**.** (i) 2 点 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ が与えられたとき, $\mathbf{a},\mathbf{b}$ を通る直線が一意に存在する．
(ii) 任意の直線上には少なくとも 2 点がある．平面上には一直線上にない点が少なくとも 3 点ある．

証明: (i) を示す．$\ell:=\{\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a});t\in\mathbb{R}\}$ とすれば, ℓ は $\mathbf{a},\mathbf{b}$ を通る直線である．一意性を示す．直線 $m=\{\mathbf{p}+t\mathbf{q};\ t\in\mathbb{R}\}$ があって $\mathbf{a},\mathbf{b}\in m$ とする (ただし $\mathbf{q}\neq\mathbf{0}$)．このとき, ある t_1,t_2 $(t_1\neq t_2)$ があって, $\mathbf{a}=\mathbf{p}+t_1\mathbf{q}$, $\mathbf{b}=\mathbf{p}+t_2\mathbf{q}$. よって, $\mathbf{a}+t(\mathbf{b}-\mathbf{a})=\mathbf{p}+\big(t_1+t(t_2-t_1)\big)\mathbf{q}\in m$ $(t\in\mathbb{R})$ より $\ell\subset m$ である．また, $\mathbf{p}+t\mathbf{q}=\mathbf{a}+\frac{t-t_1}{t_2-t_1}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ とも書けるので $m\subset\ell$ も分かる．よって $\ell=m$ である．

(ii) は容易である．実際に例を挙げればよい[4]．□

2 点 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ が与えられたとき, $\mathbf{a},\mathbf{b}$ を通る (一意に決まる) 直線のことを 直線 $\mathbf{ab}$ と書く[5]．$\mathbf{ab}=\mathbf{ba}$ であることは一意性より明らかである．

ヒルベルト ([4]) 流にいうところの “間” の概念を定義する．

定義 2.3 (間)**.** 3 点 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ があるとき, 点 $\mathbf{c}$ が 2 点 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の間にあるとは, $\mathbf{a}\neq\mathbf{b}$ であって, $0<t<1$ がとれて, $\mathbf{c}=(1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b}$ となることをいう．点 $\mathbf{c}$ が 2 点 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ の間にあることを $\mathbf{a}*\mathbf{c}*\mathbf{b}$ で表す[6]．

定義から, $\mathbf{a}*\mathbf{c}*\mathbf{b}$ ならば, $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ は相異なる 3 点である．

命題 2.4 (公理 (A3))**.** (i) $\mathbf{a}*\mathbf{c}*\mathbf{b}$ ならば, $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ は一直線上にある．また $\mathbf{b}*\mathbf{c}*\mathbf{a}$ である．
(ii) 2 点 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ に対して, $\mathbf{a}*\mathbf{b}*\mathbf{c}$ となるような $\mathbf{c}\in\mathbf{ab}$ が存在する．
(iii) 一直線上にある 3 点 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ に対して, $\mathbf{b}*\mathbf{a}*\mathbf{c}$, $\mathbf{a}*\mathbf{b}*\mathbf{c}$, $\mathbf{b}*\mathbf{c}*\mathbf{a}$ のうちの一つのみが必ず成立する．

証明: (i) は容易．(ii) は $\mathbf{c}=2\mathbf{b}-\mathbf{a}$ とすればよい．(iii) を示す．$\mathbf{c}\in\mathbf{ab}$ であるから, $s\in\mathbb{R}$ が取れて $\mathbf{c}=\mathbf{a}+s(\mathbf{b}-\mathbf{a})$. $\mathbf{c}\neq\mathbf{a},\mathbf{b}$ より $s\neq0,1$. よって $s<0$, または $0<s<1$, または $s>1$ である．それぞれの場合が $\mathbf{c}*\mathbf{a}*\mathbf{b}$, $\mathbf{b}*\mathbf{c}*\mathbf{a}$, $\mathbf{c}*\mathbf{b}*\mathbf{a}$ に対応することが確かめられる．□

点 $\mathbf{a},\mathbf{b}$ 及び, $\mathbf{a},\mathbf{b}$ の間の点からなる直線 $\mathbf{ab}$ の部分を**線分** $\overline{\mathbf{ab}}$ という．つまり $\overline{\mathbf{ab}}=\{(1-t)\mathbf{a}+t\mathbf{b};\ 0\leq t\leq1\}$ である．明らかに $\overline{\mathbf{ab}}=\overline{\mathbf{ba}}\subset\mathbf{ab}$ が成立する．線分 $\overline{\mathbf{ab}}$ の長さ $|\overline{\mathbf{ab}}|$ を

$$|\overline{\mathbf{ab}}|:=\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|$$

で定める．

[3] 実際, $\mathbf{e}=(e_1,e_2)$ とおけば $\mathbf{a}=(\alpha_1e_1-\alpha_2e_2,\alpha_1e_2+\alpha_2e_1)$ より分かる．

[4] 例えば $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ は一直線上にない．

[5] 積を表すわけではない．

[6] 記号は [5] より借りた．

命題 2.5 (公理 (B1), (B2)). (i) $\mathbf{a}*\mathbf{c}*\mathbf{b}$ ならば $|\overline{\mathbf{ab}}| = |\overline{\mathbf{ac}}| + |\overline{\mathbf{cb}}|$ が成立.
(ii) 線分 $\overline{\mathbf{de}}$, 直線 ℓ, $\mathbf{a} \in \ell$ が与えられたとき, $\mathbf{b}, \mathbf{c} \in \ell$ が入れ替えを除いて一意にとれて, $|\overline{\mathbf{ab}}| = |\overline{\mathbf{ac}}| = |\overline{\mathbf{de}}|$ かつ $\mathbf{b}*\mathbf{a}*\mathbf{c}$ とできる.

証明: (i) については, $\mathbf{c} = (1-t)\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ (ただし $0 < t < 1$) とすると $|\overline{\mathbf{ac}}| = t\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|$, $|\overline{\mathbf{cb}}| = (1-t)\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|$ より明らか. (ii) を示す. $\ell = \{\mathbf{a} + t\mathbf{q};\, t \in \mathbb{R}\}$ (ただし $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$) とする. $\|(\mathbf{a}+t\mathbf{q}) - \mathbf{a}\| = |\overline{\mathbf{de}}|$ となる t は $t = \pm\|\mathbf{q}\|^{-1}|\overline{\mathbf{de}}|$ のみなので, 結果が直ちに従う. □

2 直線 ℓ, m が交わるとは, 点 $\mathbf{a}$ が存在して, $\mathbf{a} \in \ell$ かつ $\mathbf{a} \in m$ となることをいう. 点 $\mathbf{a}$ を ℓ, m の交点という. 線分と直線, 線分と線分などの "交わる" という概念や交点なども同様に定める. 補題 2.2 の (i) より (相異なる)2 直線 ℓ, m の交点は存在するならば, 一点のみである.

命題 2.6 (公理 (A4); パッシュの公理). 3 点 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ が一直線上になく, 直線 ℓ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のいずれも通らないとする. このとき ℓ が $\overline{\mathbf{ab}}$ と交わるならば, ℓ は $\overline{\mathbf{bc}}$ と $\overline{\mathbf{ca}}$ の一方のみと必ず交わる.

証明: $\overline{\mathbf{ab}}$ と ℓ の交点を $\mathbf{d} = (1-s)\mathbf{a} + s\mathbf{b}$ (ただし $0 < s < 1$) とし, $\ell = \{\mathbf{d} + t\mathbf{e};\, t \in \mathbb{R}\}$ (ただし $\mathbf{e} \neq \mathbf{0}$) とする. $\mathbf{a} - \mathbf{d} = \alpha_1\mathbf{e} + \alpha_2\mathbf{e}^\perp$, $\mathbf{b} - \mathbf{d} = \beta_1\mathbf{e} + \beta_2\mathbf{e}^\perp$, とすると ($\ell$ は $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ を通らないから $\alpha_2, \beta_2 \neq 0$ であることに注意), $(1-s)(\mathbf{a}-\mathbf{d}) + s(\mathbf{b}-\mathbf{d}) = \mathbf{0}$ より $(1-s)\alpha_2 + s\beta_2 = 0$. よって α_2 と β_2 は異符号を持つ. $\mathbf{c}-\mathbf{d} = \gamma_1\mathbf{e} + \gamma_2\mathbf{e}^\perp$ とすると, $\gamma_2 \neq 0$ に注意すれば, γ_2 は α_2, β_2 の一方のみと異符号になる. β_2 と γ_2 が異符号とすると, ある $0 < t_1 < 1$ がとれて $(1-t_1)\beta_2 + t_1\gamma_2 = 0$. $(1-t_1)\mathbf{b} + t_1\mathbf{c} = \mathbf{d} + ((1-t_1)\beta_1 + t_1\gamma_1)\mathbf{e}$ より $\overline{\mathbf{bc}}$ と ℓ は交点を持つ. またこのとき, α_2 と γ_2 は同符号だから, $0 < t < 1$ に対して $(1-t)\alpha_2 + t\gamma_2 \neq 0$. よって ℓ と $\overline{\mathbf{ca}}$ は交点を持たない. α_2 と γ_2 が異符号の場合も同様. □

ここまでの公理があれば, 直線 ℓ は (ℓ を除いた) 平面を 2 つの部分 Ω_1, Ω_2 に分けるのであった ([4], [5], あるいは [2] 参照). 今の場合は, 次のように特徴付けられる.

補題 2.7. $\ell = \{\mathbf{p} + t\mathbf{q};\, t \in \mathbb{R}\}$ (ただし $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$) とする.

$$\Omega_1 := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2;\, (\mathbf{a}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{q}^\perp > 0\},$$
$$\Omega_2 := \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2;\, (\mathbf{a}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{q}^\perp < 0\}$$

とおくと, 次の性質が成り立つ: (1) $\Omega_1 \cup \Omega_2 = \mathbb{R}^2 \setminus \ell$, $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$; (2) $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Omega_1$ (あるいは $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Omega_2$) ならば, $\overline{\mathbf{ab}}$ と ℓ は交わらない; (3) $\mathbf{a} \in \Omega_1$, $\mathbf{b} \in \Omega_2$ ならば $\overline{\mathbf{ab}}$ は ℓ と交わる.

$\ell = \{\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2;\, (\mathbf{a}-\mathbf{p})\cdot\mathbf{q}^\perp = 0\}$ に注意すれば, いずれも容易に証明できる. $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Omega_1$ または $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \Omega_2$ のとき, 2 点 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ は直線 ℓ の**同じ側**にあるといい, そうでないとき**違う側**にあるという.

2.2 角

高校では (幾何) ベクトル $\overrightarrow{\mathbf{ab}}$ と $\overrightarrow{\mathbf{ac}}$ のなす角度を ϕ とすると

$$\cos\phi = \frac{(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{c}-\mathbf{a}\|}$$

となると説明されている. 右辺はシュワルツの不等式から -1 以上 1 以下なので, 上を満たすような $0 \leq \phi \leq \pi$ は一意に定まる. よって上式を用いて逆に $\overline{\mathbf{ab}}$ と $\overline{\mathbf{ac}}$ のなす角度と定義することが考えられる. しかし, 残念ながらこれは我々の目的にそぐわない. 高校での三角関数は (直観的) 幾何学による三角比で定義されているからである. この困難は三角関数をベキ級数を用いて解析的に定義することによって回避できる:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

の右辺は $\mathbb{R}$ 上で (広義一様に) 収束して, 無限回微分可能な関数を定めるので, 上式を三角関数の定義とすると, 三角関数の諸性質を全て解析的に示すことができる. これにより先ほどの論理の循環を回避できる. だが, 残念ながらこれも我々の目的にはそぐわない. 上の解析を実行するのは高校数学の程度を大きく超えるからである. そこで角度を数として定義するのは諦め, かわりに角の合同 (相等) を定めて, 間接的に "角度" を定めることにする.

2 点 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ に対して, **半直線** $\overrightharpoon{\mathbf{ab}}$ を

$$\overrightharpoon{\mathbf{ab}} := \{\mathbf{a} + t(\mathbf{b}-\mathbf{a});\, t \geq 0\}$$

と定め, 点 $\mathbf{a}$ を始点と呼ぶ[7]. $\overrightharpoon{\mathbf{ab}} \subset \mathbf{ab}$ であるが, $\overrightharpoon{\mathbf{ab}} \neq \overrightharpoon{\mathbf{ba}}$ である. $\mathbf{d}(\neq \mathbf{a}) \in \overrightharpoon{\mathbf{ab}}$ とすると $\overrightharpoon{\mathbf{ab}} = \overrightharpoon{\mathbf{ad}}$ であることが分かる. $\mathbf{d} - \mathbf{a} \in S^1$ となるような $\mathbf{d} \in \overrightharpoon{\mathbf{ab}}$ は一意に定まって $\mathbf{d} = \mathbf{a} + \|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^{-1}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ である.

一直線上にない 3 点 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ に対して半直線 $\overrightharpoon{\mathbf{ab}}, \overrightharpoon{\mathbf{ac}}$ (あるいは線分 $\overline{\mathbf{ab}}, \overline{\mathbf{ac}}$) のなす**角** $\angle\mathbf{bac}$ を

$$\angle\mathbf{bac} = \overrightharpoon{\mathbf{ab}} \cup \overrightharpoon{\mathbf{ac}}$$

と定める. $\angle\mathbf{bac} = \angle\mathbf{cab}$ である. また $\mathbf{b}'(\neq \mathbf{a}) \in \overrightharpoon{\mathbf{ab}}$, $\mathbf{c}'(\neq \mathbf{a}) \in \overrightharpoon{\mathbf{ac}}$ とすれば $\angle\mathbf{bac} = \angle\mathbf{b}'\mathbf{a}\mathbf{c}'$ である. この

[7] 半直線を表す記号は標準的ではない; また, $\rightarrow$ ではなく $\rightharpoonup$ であることに注意.

とき

$$\frac{(\mathbf{b}'-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}'-\mathbf{a})}{\|\mathbf{b}'-\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{c}'-\mathbf{a}\|}=\frac{(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{c}-\mathbf{a}\|}$$

となり[8], この量は角を表す点の選び方によらないことが分かる．そこで

$$\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{bac}:=\frac{(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})}{\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|\,\|\mathbf{c}-\mathbf{a}\|}$$

と定義する (通常の三角関数と区別するため Cos という記号を使った)．以下, $\angle\mathbf{bac}$ のように書いたときは, 3 点 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ が一直線上にないことを暗に仮定する．$\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ が一直線上にないからシュワルツの不等式より $-1<\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{bac}<1$ である．つまり 0° や 180° に対応する“角”はここでは角に入れていない．

$\mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^2$ に対して $\mathbf{b_a}:=\mathbf{b}-\mathbf{a}$ と定める[9]．

定義 2.8 (角の合同 (相等))**.** $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{bac}=\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{edf}$ であるとき $\angle\mathbf{bac}$ と $\angle\mathbf{edf}$ は合同 (あるいは相等) であるといい, $\angle\mathbf{bac}\cong\angle\mathbf{edf}$ と表す．

直ちに分かるように次の 3 性質が成り立つ: $\angle\mathbf{bac}\cong\angle\mathbf{bac}$ (反射律); $\angle\mathbf{bac}\cong\angle\mathbf{edf}$ ならば $\angle\mathbf{edf}\cong\angle\mathbf{bac}$ (対称律); $\angle\mathbf{bac}\cong\angle\mathbf{edf}$ かつ $\angle\mathbf{edf}\cong\angle\mathbf{hgi}$ ならば $\angle\mathbf{bac}\cong\angle\mathbf{hgi}$ (推移律)．

注意 2.9. 一般に, 反射律, 対称律, 推移律を満たす二項関係を同値関係という．角の合同は同値関係である．

命題 2.10 (公理 (B4))**.** $\angle\mathbf{bac}$ と半直線 $\overrightarrow{\mathbf{de}}$ が与えられたとき, $\mathbf{f_d},\mathbf{g_d}\in S^1$ であるような, 直線 $\mathbf{de}$ の違う側にある 2 点 $\mathbf{f},\mathbf{g}$ が入れ替えを除いて一意に取れて, $\angle\mathbf{edf}\cong\angle\mathbf{edg}\cong\angle\mathbf{bac}$ とできる．

証明: 一般性を失わず $\mathbf{e_d}\in S^1$ と仮定してよい．$m=\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{bac}$ とおく ($-1<m<1$ に注意)．このとき $\mathbf{h_d}=x_1\mathbf{e_d}+x_2\mathbf{e_d}^\perp$ とおくと, $\angle\mathbf{edh}\cong\angle\mathbf{bac}$ かつ $\mathbf{h_d}\in S^1$ となるのは, $m=\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{edh}=\mathbf{h_d}\cdot\mathbf{e_d}=x_1$ かつ $x_1^2+x_2^2=1$ となることと同値である．よって $\mathbf{h_d}=m\mathbf{e_d}\pm\sqrt{1-m^2}\mathbf{e_d}^\perp$ となり, 一方を $\mathbf{f_d}$, もう一方を $\mathbf{g_d}$ となるように $\mathbf{f},\mathbf{g}$ をとれば結果を得る． □

点 $\mathbf{d}$ が $\angle\mathbf{bac}$ の内部にあるとは, 点 $\mathbf{c},\mathbf{d}$ が直線 $\mathbf{ab}$ の同じ側にあり, 点 $\mathbf{b},\mathbf{d}$ が直線 $\mathbf{ac}$ の同じ側にあることをいう[10]．$\angle\mathbf{bac}$ と $\mathbf{d}(\neq\mathbf{a})$ が与えられたとき, “半直線 $\overrightarrow{\mathbf{ad}}$ 上の $\mathbf{a}$ を除く全ての点が $\angle\mathbf{bac}$ の内部にある” か, “半直線 $\overrightarrow{\mathbf{ad}}$ のどの点も $\angle\mathbf{bac}$ の内部にない” かのいずれか一方であることが容易に確かめられる．

[8] これは $\mathbf{b}'=\mathbf{a}+t_1(\mathbf{b}-\mathbf{a})$, $\mathbf{c}'=\mathbf{a}+t_2(\mathbf{c}-\mathbf{a})$ $(t_1,t_2>0)$ とおけば直ちに分かる．

[9] 高校では $\overrightarrow{\mathbf{ab}}$ と書くが, 半直線との混同を避けるため別の表記をした．

[10] $\mathbf{b}',\mathbf{b}''(\neq\mathbf{a})\in\overline{\mathbf{ab}}$ が $\mathbf{ac}$ の同じ側にあることは直ちに分かる．同様に $\mathbf{c}',\mathbf{c}''(\neq\mathbf{a})\in\overline{\mathbf{ac}}$ は $\mathbf{ab}$ の同じ側にある．よって “$\angle\mathbf{bac}$ の内部” は半直線 $\overrightarrow{\mathbf{ab}},\overrightarrow{\mathbf{ac}}$ の表し方によらずに決まる．

命題 2.11 (公理 (B5))**.** 点 $\mathbf{d}$ が $\angle\mathbf{bac}$ の内部にあるとき, 半直線 $\overrightarrow{\mathbf{ad}}$ と線分 $\overline{\mathbf{bc}}$ が交わる．

証明: 一般性を失わず $\mathbf{d_a}\in S^1$ としてよい．$\mathbf{b_a}=\beta_1\mathbf{d_a}+\beta_2\mathbf{d_a}^\perp$, $\mathbf{c_a}=\gamma_1\mathbf{d_a}+\gamma_2\mathbf{d_a}^\perp$ とすると, $\mathbf{d}$ が $\angle\mathbf{bac}$ の内部にあることから, $-\beta_2(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)>0$ かつ $\gamma_2(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)>0$. 特に $\beta_2\gamma_2<0$. よって, ある $0<s<1$ がとれて, $(1-s)\beta_2+s\gamma_2=0$. $\mathbf{e}:=\mathbf{a}+(1-s)\mathbf{b_a}+s\mathbf{c_a}(=(1-s)\mathbf{b}+s\mathbf{c})$ とおくと, $\mathbf{e}\in\overline{\mathbf{bc}}$ であって, $\mathbf{e}$ は $\angle\mathbf{bac}$ の内部にある[11]．また, $\mathbf{e}=\mathbf{a}+((1-s)\beta_1+s\gamma_1)\mathbf{d_a}$ であって $(1-s)\beta_1+s\gamma_1>0$ であるから[12], $\mathbf{e}\in\overrightarrow{\mathbf{ad}}$ である．よって $\mathbf{e}$ は $\overrightarrow{\mathbf{ad}}$ と $\overline{\mathbf{bc}}$ の交点である． □

半直線 $\overrightarrow{\mathbf{ad}}$ が $\angle\mathbf{bac}$ の**二等分線**であるとは, $\mathbf{d}$ が $\angle\mathbf{bac}$ の内部にあり $\angle\mathbf{bad}\cong\angle\mathbf{cad}$ となることをいう．

命題 2.12 (公理 (D1))**.** $\angle\mathbf{bac}$ の二等分線 $\overrightarrow{\mathbf{ad}}$ が存在する．

証明: 一般性を失わず, $\mathbf{b_a},\mathbf{c_a}\in S^1$ としてよい．$\mathbf{d}:=\mathbf{b}+\mathbf{c}-\mathbf{a}$ とおくと, $\mathbf{d_a}=\mathbf{b_a}+\mathbf{c_a}$ を得る．$\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{bad}=(1+\mathbf{b_a}\cdot\mathbf{c_a})/\|\mathbf{d_a}\|=\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{cad}$ より $\angle\mathbf{bad}\cong\angle\mathbf{cad}$ を得る．また $(\mathbf{c_a}\cdot\mathbf{b_a}^\perp)(\mathbf{d_a}\cdot\mathbf{b_a}^\perp)=(\mathbf{c_a}\cdot\mathbf{b_a}^\perp)^2>0$, $(\mathbf{b_a}\cdot\mathbf{c_a}^\perp)(\mathbf{d_a}\cdot\mathbf{c_a}^\perp)=(\mathbf{b_a}\cdot\mathbf{c_a}^\perp)^2>0$ より点 $\mathbf{d}$ は $\angle\mathbf{bac}$ の内部にあることが分かる． □

点 $\mathbf{d}$ が $\angle\mathbf{bac}$ の内部にあるとき, 角の和 $\angle\mathbf{bad}+\angle\mathbf{dac}$ を $\angle\mathbf{bad}+\angle\mathbf{dac}:=\angle\mathbf{bac}$ で定める．

補題 2.13. $\angle\mathbf{bac}$ の内部に点 $\mathbf{d}$ がある (したがって $\angle\mathbf{bad}+\angle\mathbf{dac}=\angle\mathbf{bac}$ である) とき, 次が成立する．
(i) $\angle\mathbf{b'a'c'}\cong\angle\mathbf{bac}$, $\angle\mathbf{b'a'd'}\cong\angle\mathbf{bad}$, かつ点 $\mathbf{c}',\mathbf{d}'$ が直線 $\mathbf{a'b'}$ の同じ側にあるならば, $\angle\mathbf{dac}\cong\angle\mathbf{d'a'c'}$ であって, $\mathbf{d}'$ は $\angle\mathbf{b'a'c'}$ の内部にある．
(ii) $\angle\mathbf{b'a'd'}\cong\angle\mathbf{bad}$, $\angle\mathbf{d'a'c'}\cong\angle\mathbf{dac}$, かつ点 $\mathbf{b}',\mathbf{c}'$ が直線 $\mathbf{a'd'}$ の違う側にあるならば, $\angle\mathbf{bac}\cong\angle\mathbf{b'a'c'}$ であって, $\mathbf{d}'$ は $\angle\mathbf{b'a'c'}$ の内部にある (したがって $\angle\mathbf{b'a'd'}+\angle\mathbf{d'a'c'}=\angle\mathbf{b'a'c'}$) となる．

証明: 一般性を失わず $\mathbf{b_a}$, $\mathbf{c_a}$, $\mathbf{d_a}$, $\mathbf{b}'_{\mathbf{a}'}$, $\mathbf{c}'_{\mathbf{a}'}$, $\mathbf{d}'_{\mathbf{a}'}\in S^1$ としてよい．

(i) を示す．$\mathbf{c_a}=\gamma_1\mathbf{b_a}+\gamma_2\mathbf{b_a}^\perp$, $\mathbf{d_a}=\delta_1\mathbf{b_a}+\delta_2\mathbf{b_a}^\perp$, $\mathbf{c}'_{\mathbf{a}'}=\gamma_1'\mathbf{b}'_{\mathbf{a}'}+\gamma_2\mathbf{b}'^{\perp}_{\mathbf{a}'}$, $\mathbf{d}'_{\mathbf{a}'}=\delta_1'\mathbf{b}'_{\mathbf{a}'}+\delta_2'\mathbf{b}'^{\perp}_{\mathbf{a}'}$ とおく．$\mathbf{c},\mathbf{d}$

[11] $\mathbf{e_a}\cdot\mathbf{b_a}^\perp=s\mathbf{c_a}\cdot\mathbf{b_a}^\perp$, $\mathbf{e_a}\cdot\mathbf{c_a}^\perp=(1-s)\mathbf{b_a}\cdot\mathbf{c_a}^\perp$ に注意すると容易に分かる．

[12] $0<-s\beta_2(\beta_1\gamma_2-\beta_2\gamma_1)=\beta_2^2\big((1-s)\beta_1+s\gamma_2\big)$ より分かる．

が $\mathbf{ab}$ の同じ側にあることから $\gamma_2\delta_2 > 0$ である．また $\mathbf{b}, \mathbf{d}$ が $\mathbf{ac}$ の同じ側にあることから $\gamma_2(\gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2) < 0$ である．

$\angle\mathbf{b'a'c'} \cong \angle\mathbf{bac}$ より $\gamma_1' = \gamma_1$ が得られ, $\angle\mathbf{b'a'd'} \cong \angle\mathbf{bad}$ より $\delta_1' = \delta_1$ が得られる．これより $|\gamma_2'| = |\gamma_2|$, $|\delta_2'| = |\delta_2|$ も分かる．$\mathbf{c'}, \mathbf{d'}$ が $\mathbf{a'b'}$ の同じ側にあるから $\gamma_2'\delta_2' > 0$. よって $\gamma_2'\delta_2' = |\gamma_2'\delta_2'| = |\gamma_2\delta_2| = \gamma_2\delta_2$ であり, $\mathrm{Cos}\angle\mathbf{d'a'c'} = \gamma_1'\delta_1' + \gamma_2'\delta_2' = \gamma_1\delta_1 + \gamma_2\delta_2 = \mathrm{Cos}\angle\mathbf{dac}$, すなわち $\angle\mathbf{d'a'c'} \cong \angle\mathbf{dac}$ である．また $\gamma_2'(\gamma_1'\delta_2' - \delta_1'\gamma_2') = \gamma_1'(\gamma_2'\delta_2') - \delta_1'|\gamma_2'|^2 = \gamma_2(\gamma_1\delta_2 - \delta_1\gamma_2) < 0$ より, $\mathbf{b'}, \mathbf{d'}$ が $\mathbf{a'c'}$ の同じ側にあることが分かり, $\mathbf{d'}$ が $\angle\mathbf{b'a'c'}$ の内部にあることが従う．

(ii) を示す．$\mathbf{b_a} = B_1\mathbf{d_a} + B_2\mathbf{d_a}^{\perp}$, $\mathbf{c_a} = C_1\mathbf{d_a} + C_2\mathbf{d_a}^{\perp}$, $\mathbf{b'_{a'}} = B_1'\mathbf{d'_{a'}} + B_2'\mathbf{d'_{a'}}^{\perp}$, $\mathbf{c'_{a'}} = C_1'\mathbf{d'_{a'}} + C_2'\mathbf{d'_{a'}}^{\perp}$ とおく．$\mathbf{d}$ が $\angle\mathbf{bac}$ の内部にあるから $-B_2(B_1C_2 - B_2C_1) > 0$ かつ $C_2(B_1C_2 - B_2C_1) > 0$ である．特に $B_2C_2 < 0$.

$\angle\mathbf{b'a'd'} \cong \angle\mathbf{bad}$ より $B_1' = B_1$. $\angle\mathbf{d'a'c'} \cong \angle\mathbf{dac}$ より $C_1' = C_1$. よって $|B_2'| = |B_2|$, $|C_2'| = |C_2|$ を得る．$\mathbf{b'}, \mathbf{c'}$ が $\mathbf{a'd'}$ の違う側にあるから $B_2'C_2' < 0$. よって $B_2'C_2' = B_2C_2$. 以上より $\mathrm{Cos}\angle\mathbf{b'a'c'} = B_1'C_1' + B_2'C_2' = B_1C_1 + B_2C_2 = \mathrm{Cos}\angle\mathbf{bac}$, すなわち $\angle\mathbf{b'a'c'} \cong \angle\mathbf{bac}$ である．また $-B_2'(B_1'C_2' - B_2'C_1') = -B_2(B_1C_2 - B_2C_1) > 0$, $C_2'(B_1'C_2' - B_2'C_1') = C_2(B_1C_2 - B_2C_1) > 0$ も分かるから, $\mathbf{d'}$ は $\angle\mathbf{b'a'c'}$ の内部にある．□

定義 2.14 (角の大小)**.** $\angle\mathbf{bac} < \angle\mathbf{edf}$ (もしくは $\angle\mathbf{edf} > \angle\mathbf{bac}$) とは, ある直線 $\mathbf{gh}$ の同じ側に $\mathbf{c'}, \mathbf{f'}$ を, $\angle\mathbf{hgc'} \cong \angle\mathbf{bac}$, $\angle\mathbf{hgf'} \cong \angle\mathbf{edf}$ となるようにとったとき, $\mathbf{c'}$ が $\angle\mathbf{hgf'}$ の内部にあることをいう．

角の大小の定義中の直線 $\mathbf{gh}$ やその "側" はどのようにとっても構わないことは補題 2.13 の (i) によって保証される．

命題 2.15. $\angle\mathbf{bac} < \angle\mathbf{edf}$ と $\mathrm{Cos}\angle\mathbf{bac} > \mathrm{Cos}\angle\mathbf{edf}$ であることは同値になる．

証明: $\mathbf{d} = \mathbf{a}$, $\mathbf{e} = \mathbf{b}$, かつ $\mathbf{c}, \mathbf{f}$ が $\mathbf{ab}$ の同じ側にある場合を考えれば十分である．また一般性を失わず, $\mathbf{b_a}, \mathbf{c_a}, \mathbf{f_a} \in S^1$ としてよい．$\mathbf{c_a} = \gamma_1\mathbf{b_a} + \gamma_2\mathbf{b_a}^{\perp}$, $\mathbf{f_a} = \phi_1\mathbf{b_a} + \phi_2\mathbf{b_a}^{\perp}$ とおく．$\mathbf{c}, \mathbf{f}$ が $\mathbf{ab}$ の同じ側にあるから $\gamma_2\phi_2 > 0$ である．このとき, $\angle\mathbf{bac} < \angle\mathbf{baf}$ となることは

$$\phi_2(\gamma_1\phi_2 - \gamma_2\phi_1) > 0 \tag{2.1}$$

と同値である．$\gamma_2 > 0$ とすると $\phi_2 > 0$. このとき (2.1) は $\gamma_1/\sqrt{1-\gamma_1^2} > \phi_1/\sqrt{1-\phi_1^2}$ と同値になるが, 関数 $f(x) := x/\sqrt{1-x^2}$ が $-1 < x < 1$ において狭い意味で単調増加であることに注意すると, 結局は $\gamma_1 (= \mathrm{Cos}\angle\mathbf{bac}) > \phi_1 (= \mathrm{Cos}\angle\mathbf{baf})$ と同値であることが分かる．$\gamma_2 < 0$ とすると $\phi_2 < 0$ であるから (2.1) は, やはり $\gamma_1/\sqrt{1-\gamma_1^2} > \phi_1/\sqrt{1-\phi_1^2}$ と同値になり, 結果を得る．

なお, f の単調性の確認に微分積分の知識は不要である: $0 < x < 1$ のとき $f(x) = 1/\sqrt{x^{-2}-1}$, $x = 0$ のとき $f(x) = 0$, $-1 < x < 0$ のとき $f(x) = -1/\sqrt{x^{-2}-1}$ であることに注意すれば十分である．□

命題 2.15 より, 任意の 2 角 $\angle\mathbf{bac}$ と $\angle\mathbf{edf}$ に対して, $\angle\mathbf{bac} < \angle\mathbf{edf}$, $\angle\mathbf{bac} \cong \angle\mathbf{edf}$, $\angle\mathbf{bac} > \angle\mathbf{edf}$ のいずれか一つのみが必ず成立する．また, $\angle\mathbf{bac} < \angle\mathbf{edf}$ かつ $\angle\mathbf{edf} < \angle\mathbf{hgi}$ ならば $\angle\mathbf{bac} < \angle\mathbf{hgi}$ (推移律) が成立する．

角度に代わるものとして, 次の概念を導入する．

$$[\angle\mathbf{bac}] := \{\angle\mathbf{b'a'c'};\ \angle\mathbf{b'a'c'} \cong \angle\mathbf{bac}\}$$

とおく (直観的には $[\angle\mathbf{bac}]$ は, $\angle\mathbf{bac}$ と "同じ角度" をもつ角の集まりである). $\angle\mathbf{bac}$ を $[\angle\mathbf{bac}]$ の代表元という．代表元の選び方は一通りではない．実際, $\angle\mathbf{bac} \cong \angle\mathbf{edf}$ と $[\angle\mathbf{bac}] = [\angle\mathbf{edf}]$ となることは同値であることが容易に分かる．

"角度の和" を代替するものとして次のように $[\angle\mathbf{bac}] + [\angle\mathbf{edf}]$ を定める: $\angle\mathbf{bac}$ と $\angle\mathbf{edf}$ に対して, ある直線 $\mathbf{a'c'}$ の違う側に 2 点 $\mathbf{b'}$ と $\mathbf{f'}$ を

$$\angle\mathbf{b'a'c'} \cong \angle\mathbf{bac},\ \angle\mathbf{c'a'f'} \cong \angle\mathbf{edf}$$

となるようにとったとき, $\mathbf{c'}$ が $\angle\mathbf{b'a'f'}$ の内部にあるとする (つまり $\angle\mathbf{b'a'c'} + \angle\mathbf{c'a'f'} = \angle\mathbf{b'a'f'}$ とする). このとき $[\angle\mathbf{bac}] + [\angle\mathbf{edf}] := [\angle\mathbf{b'a'f'}]$ と定義する．この和が "うまく定義されている (well-defined である)"(つまり $[\angle\mathbf{bac}]$ と $[\angle\mathbf{edf}]$ の代表元や $\mathbf{a'c'}$ を取り替えても和が同じ結果を与える) ことは補題 2.13 の (ii) により保証される．交換則や結合則の成立も確かめられる．以上で, 公理 (B3) に相当する結果が得られた[13].

なお, ここで定義した "角度の和" は, 和が 180° を超えないものに限定されていることに注意．よって "三角形の内角の和が 180° である" というような主張は別の解釈をしなければならない．$\mathbf{d} * \mathbf{a} * \mathbf{b}$ であって, $\mathbf{c}$ は直線 $\mathbf{ab}$ 上にないとき, $\angle\mathbf{dac}$ を $\angle\mathbf{bac}$ の**補角**という．任意の

[13] 公理 (B3) とは以下のようなものであった: 角には付随した大きさがある; 点 $\mathrm{A'}, \mathrm{B'}$ をそれぞれ半直線 OA, OB 上の点 O とは異なる点とすると, $[\angle\mathrm{AOB}] = [\angle\mathrm{A'OB'}]$ である; また, 点 C が $\angle\mathrm{AOB}$ の内部にあるとき, $[\angle\mathrm{AOB}] = [\angle\mathrm{AOC}] + [\angle\mathrm{BOC}]$ が成立する．

角 $\angle\mathbf{bac}$ が与えられたとき, 命題 2.4 の (ii) より $\mathbf{d}*\mathbf{a}*\mathbf{b}$ となるような点 $\mathbf{d}$ が存在するから, $\angle\mathbf{bac}$ の補角は必ず存在する. $\angle\mathbf{bac}$ を $\angle\mathbf{cab}$ と思って補角を考えることもできるので, 補角は一意ではない. また, $\angle\mathbf{dac}$ が $\angle\mathbf{bac}$ の補角であれば, 逆に $\angle\mathbf{bac}$ は $\angle\mathbf{dac}$ の補角である.

補題 2.16. $\angle\mathbf{bac}\cong\angle\mathbf{b'a'c'}$ とし, $\angle\mathbf{dac}, \angle\mathbf{d'a'c'}$ をそれぞれ $\angle\mathbf{bac}, \angle\mathbf{b'a'c'}$ の補角とする. このとき $\angle\mathbf{dac}\cong\angle\mathbf{d'a'c'}$ である. 特に同じ角の補角は互いに合同である.

証明: $\angle\mathbf{bac}$ とその補角 $\angle\mathbf{dac}$ に対して一般に

$$\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{dac} = -\,\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{bac}$$

が成立することに注意すれば直ちに結果が得られる. □

$[\angle\mathbf{bac}]$ と $[\angle\mathbf{edf}]$ の和が 2 直角であるとは, $\angle\mathbf{edf}$ が $\angle\mathbf{bac}$ の補角と合同になることをいう. これが “うまく定義される” ことは補題 2.16 が保証する. これで公理 (D3) に対応することを得た[14].

最後に直角について調べておこう. $\angle\mathbf{bac}$ が直角であるとは, $\angle\mathbf{dac}$ を $\angle\mathbf{bac}$ の補角 (のひとつ) とするとき, $\angle\mathbf{bac}\cong\angle\mathbf{dac}$ が成立することをいう. この定義が補角の選び方によらないことは補題 2.16 から分かる.

命題 2.17 (公理 (D2)). (i) $\angle\mathbf{bac}$ が直角であることと, $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{bac}=0$ となることと, $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$ であることは同値である.
(ii) 直角が存在する.

証明: (i) を示す. $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{bac}=0$ と $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$ が同値であることは定義から明らか.

$\angle\mathbf{bac}$ を直角, その補角を $\angle\mathbf{dac}$ とすると $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{dac}=\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{bac}$, かつ $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{dac}=-\,\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{bac}$ であるから, $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{bac}=0$ を得る. 逆も直ちに分かる.

(ii) を示す. $\mathbf{a}=(0,0)$, $\mathbf{b}=(0,1)$, $\mathbf{c}=(1,0)$ とすると, $(\mathbf{b}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{c}-\mathbf{a})=0$ より, $\angle\mathbf{bac}$ は直角である. □

3 平行線

2 直線 ℓ, m が**平行**であるとは, ℓ と m が交わらない (交点を持たない) ことをいう.

補題 3.1. 2 直線 $\mathbf{ab}$ と $\mathbf{cd}$ が平行であることと, ある $k(\neq 0)$ が存在して $\mathbf{d}-\mathbf{c}=k(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ となることは同値である.

証明: $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{b_a}+\alpha_2\mathbf{b_a}^{\perp}$, $\mathbf{c}=\gamma_1\mathbf{b_a}+\gamma_2\mathbf{b_a}^{\perp}$, $\mathbf{d_c}=\delta_1\mathbf{b_a}+\delta_2\mathbf{b_a}^{\perp}$ とおく. このとき $\mathbf{ab}=\{(\alpha_1+t)\mathbf{b_a}+\alpha_2\mathbf{b_a}^{\perp};\, t\in\mathbb{R}\}$, $\mathbf{cd}=\{(\gamma_1+s\delta_1)\mathbf{b_a}+(\gamma_2+s\delta_2)\mathbf{b_a}^{\perp};\, s\in\mathbb{R}\}$ を得る. $(\delta_1,\delta_2)\neq(0,0)$ に注意すると, “$k\neq 0$ が存在して $\mathbf{d}-\mathbf{c}=k(\mathbf{b}-\mathbf{a})$” となることは $\delta_2=0$ と同値である.

$\delta_2=0$ とする. このとき $\gamma_2=\alpha_2$ ならば, $\mathbf{ab}=\mathbf{cd}$ を得るから $\gamma_2\neq\alpha_2$ である. したがって

$$\begin{aligned}&\big((\alpha_1+t)\mathbf{b_a}+\alpha_2\mathbf{b_a}^{\perp}\big)-\big((\gamma_1+s\delta_1)\mathbf{b_a}+\gamma_2\mathbf{b_a}^{\perp}\big)\\ &\qquad=(\alpha_1-\gamma_1+t-s\delta_1)\mathbf{b_a}+(\alpha_2-\gamma_2)\mathbf{b_a}^{\perp}\neq\mathbf{0}\end{aligned}$$

が任意の $t,s\in\mathbb{R}$ に対して成立. よって $\mathbf{ab}\cap\mathbf{cd}=\emptyset$ である.

$\delta_2\neq 0$ とする. このとき $s_0=(\alpha_2-\gamma_2)/\delta_2$, $t_0=\gamma_1-\alpha_1+s_0\delta_1$ とおけば,

$$(\alpha_1+t_0)\mathbf{b_a}+\alpha_2\mathbf{b_a}^{\perp}=(\gamma_1+s_0\delta_1)\mathbf{b_a}+(\gamma_2+s_0\delta_2)\mathbf{b_a}^{\perp}$$

が $\mathbf{ab}$ と $\mathbf{cd}$ の交点であることが分かる. したがって $\mathbf{ab}$ と $\mathbf{cd}$ は平行ではない. □

2 直線 ℓ, m がある. $\mathbf{a}\in\ell$, $\mathbf{b}\in m$ とし, さらに 2 点 $\mathbf{c}\in\ell$ と $\mathbf{d}\in m$ は直線 $\mathbf{ab}$ の違う側にある. このとき, $\angle\mathbf{cab}$ と $\angle\mathbf{dba}$ を**錯角**という.

命題 3.2 (公理 (C1), (C2)). 2 直線 ℓ, m があり, $\mathbf{a},\mathbf{c}\in\ell$, $\mathbf{b},\mathbf{d}\in m$ であって, $\mathbf{c},\mathbf{d}$ は $\mathbf{ab}$ の違う側にある. このとき次が成立する.
(i) ℓ と m が平行ならば, $\angle\mathbf{cab}\cong\angle\mathbf{dba}$ である.
(ii) $\angle\mathbf{cab}\cong\angle\mathbf{dba}$ ならば, ℓ と m は平行である.

証明: 一般性を失わず $\mathbf{c_a},\mathbf{d_b}\in S^1$ としてよい. このとき $\ell=\{\mathbf{a}+t\mathbf{c_a};\, t\in\mathbb{R}\}$, $m=\{\mathbf{b}+t\mathbf{d_b}; t\in\mathbb{R}\}$ である. $\widetilde{\mathbf{b_a}}=\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^{-1}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ とし, $\mathbf{c_a}=\gamma_1\widetilde{\mathbf{b_a}}+\gamma_2\widetilde{\mathbf{b_a}}^{\perp}$, $\mathbf{d_b}=\delta_1\widetilde{\mathbf{b_a}}+\delta_2\widetilde{\mathbf{b_a}}^{\perp}$ とおく. $\mathbf{c},\mathbf{d}$ は $\mathbf{ab}$ の違う側にあるから $\gamma_2\delta_2<0$ である.

(i) を示す. ℓ と m が平行だから補題 3.1 より, ある $k\neq 0$ が取れて $\mathbf{d_b}=k\mathbf{c_a}$. $\mathbf{c_a},\mathbf{d_b}\in S^1$ より $|k|=1$. $\delta_2=k\gamma_2$ かつ $\delta_2\gamma_2<0$ より $k=-1$ を得る. したがって $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{cab}=\widetilde{\mathbf{b_a}}\cdot\mathbf{c_a}=(-\widetilde{\mathbf{b_a}})\cdot\mathbf{d_b}=\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{dba}$ となり結果を得る.

(ii) を示す. 仮定より $\gamma_1=\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{cab}=\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{dba}=-\delta_1$ である. よって $|\gamma_2|=\sqrt{1-\gamma_1^2}=\sqrt{1-\delta_1^2}=|\delta_2|$ を得る. $\gamma_2\delta_2<0$ より $\gamma_2=-\delta_2$. よって $\mathbf{d_b}=-\mathbf{c_a}$ となり, 補題 3.1 より ℓ と m は平行である. □

次は容易に分かる:

[14] 公理 (D3) とは以下のようなものであった: $\angle b$ が $\angle a$ の補角のとき, $[\angle a]+[\angle b]=180^\circ$ である (あるいは $[\angle b]=180^\circ-[\angle a]$).

命題 3.3 (命題 (D4))**.** $\ell = \{\mathbf{p} + t\mathbf{q}; t \in \mathbb{R}\}$ (ただし $\mathbf{q} \neq \mathbf{0}$) とし, $\mathbf{a} \notin \ell$ が与えられているとする. このとき, $\mathbf{a}$ を通り, ℓ に平行な直線が存在する.

実際, $m = \{\mathbf{a} + t\mathbf{q}; t \in \mathbb{R}\}$ がそのような平行線である.

4　三角形の合同

一直線上にない 3 点 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ があるとき, **三角形** $\triangle\mathbf{abc}$ を $\triangle\mathbf{abc} := \overline{\mathbf{ab}} \cup \overline{\mathbf{bc}} \cup \overline{\mathbf{ca}}$ と定める. $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ を $\triangle\mathbf{abc}$ の**頂点**, $\overline{\mathbf{ab}}$, $\overline{\mathbf{bc}}, \overline{\mathbf{ca}}$ を**辺**という. 以下では誤解のない限り, $\angle\mathbf{bac}$, $\angle\mathbf{cba}$, $\angle\mathbf{acb}$ をそれぞれ $\angle\mathbf{a}, \angle\mathbf{b}, \angle\mathbf{c}$ のように書く.

定義 4.1 (三角形の合同)**.** 三角形 T, T' において, T の 3 頂点を $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のように名づけ, T' の 3 頂点を $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ のように名づけると

$$|\overline{\mathbf{ab}}| = |\overline{\mathbf{a}'\mathbf{b}'}|,\ |\overline{\mathbf{bc}}| = |\overline{\mathbf{b}'\mathbf{c}'}|,\ |\overline{\mathbf{ca}}| = |\overline{\mathbf{c}'\mathbf{a}'}|,$$
$$\angle\mathbf{a} \cong \angle\mathbf{a}',\ \angle\mathbf{b} \cong \angle\mathbf{b}',\ \angle\mathbf{c} \cong \angle\mathbf{c}'$$

が成り立つようにできるとき, 三角形 T と T' は**合同**であるといい, $T \equiv T'$ と書く. このような頂点 $\mathbf{a}$ と $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$ と $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}$ と $\mathbf{c}'$ を**対応する頂点**という.

以下, $\triangle\mathbf{abc} \equiv \triangle\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ と書いたときには, $\mathbf{a}$ と $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$ と $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}$ と $\mathbf{c}'$ は対応する頂点とする.

補題 4.2. $\mathbf{a}$,$\mathbf{b}$,$\mathbf{c}$ を一直線上にない 3 点とする.
(i) $|\overline{\mathbf{ab}}| = p$, $|\overline{\mathbf{bc}}| = q$, $|\overline{\mathbf{ca}}| = r$ とすると, $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{a}$, $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{b}$, $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{c}$ は p, q, r から一通りに定まる.
(ii) $|\overline{\mathbf{ab}}| = p$, $|\overline{\mathbf{ca}}| = r$, $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{a} = A$ とすると, $|\overline{\mathbf{bc}}|$, $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{b}$, $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{c}$ は p, r, A から一通りに定まる.
(iii) $|\overline{\mathbf{ab}}| = p$, $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{a} = A$, $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{b} = B$ とすると, $|\overline{\mathbf{bc}}|$, $|\overline{\mathbf{ca}}|$, $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{c}$ は p, A, B から一通りに定まる.

証明: (i) を示す. $q^2 = \|\mathbf{b} - \mathbf{c}\|^2 = \|(\mathbf{b} - \mathbf{a}) - (\mathbf{c} - \mathbf{a})\|^2 = p^2 + r^2 - 2pr\,\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{a}$ を得る. よって $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{a} = (p^2 + r^2 - q^2)/(2pr)$ を得る. 同様にすると, $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{b} = (p^2 + q^2 - r^2)/(2pq)$, $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{c} = (q^2 + r^2 - p^2)/(2qr)$.

(ii) を示す. 上の証明と同様に $|\overline{\mathbf{bc}}|^2 = p^2 + r^2 - 2prA$ を得るから, $|\overline{\mathbf{bc}}| = \sqrt{p^2 + r^2 - 2prA}$ を得る. 3 辺の長さが, p, r, A を用いて確定したから, (i) を用いると, 残る 2 角の情報も得る.

(iii) を示す. $r := |\overline{\mathbf{ca}}|$ とおき, まず r を求める. $prA = \mathbf{b_a} \cdot \mathbf{c_a}$ を得る. $\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|^2 = \|\mathbf{c_a} - \mathbf{b_a}\|^2 = r^2 - 2prA + p^2$ となるから, $\|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|\,\|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|B = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} - \mathbf{b})$ より

$$p\sqrt{r^2 - 2prA + p^2}B = (-\mathbf{b_a}) \cdot (\mathbf{c_a} - \mathbf{b_a}) = p^2 - prA$$

を得る. $x = (p/r) - A$ とし, 上式の両辺を pr で割ると $B\sqrt{x^2 + (1 - A^2)} = x$ を得る. これは唯一の解 $x = B\sqrt{(1 - A^2)/(1 - B^2)}$ を持つ ($|A|, |B| < 1$ に注意). $r = p/(x + A)$ であるから, r が p, A, B で一通りに表せた. 2 辺とその間の角が分かったから, (ii) より求める結果を得る. □

補題 4.2 から直ちに次のことが分かる:

系 4.3 (公理 (E1), (E2), (E3))**.** 次のいずれかの条件が成立するとき, $\triangle\mathbf{abc} \equiv \triangle\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ である:
(i) $|\overline{\mathbf{ab}}| = |\overline{\mathbf{a}'\mathbf{b}'}|$, $|\overline{\mathbf{bc}}| = |\overline{\mathbf{b}'\mathbf{c}'}|$, $|\overline{\mathbf{ca}}| = |\overline{\mathbf{c}'\mathbf{a}'}|$.
(ii) $|\overline{\mathbf{ab}}| = |\overline{\mathbf{a}'\mathbf{b}'}|$, $|\overline{\mathbf{ca}}| = |\overline{\mathbf{c}'\mathbf{a}'}|$, $\angle\mathbf{a} \cong \angle\mathbf{a}'$.
(iii) $|\overline{\mathbf{ab}}| = |\overline{\mathbf{a}'\mathbf{b}'}|$, $\angle\mathbf{a} \cong \angle\mathbf{a}'$, $\angle\mathbf{b} \cong \angle\mathbf{b}'$.

5　三角形の相似

定義 5.1 (三角形の相似)**.** 三角形 T, T' において, T の 3 頂点を $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のように名づけ, T' の 3 頂点を $\mathbf{a}', \mathbf{b}', \mathbf{c}'$ のように名づけると

$$|\overline{\mathbf{ab}}| : |\overline{\mathbf{a}'\mathbf{b}'}| = |\overline{\mathbf{bc}}| : |\overline{\mathbf{b}'\mathbf{c}'}| = |\overline{\mathbf{ca}}| : |\overline{\mathbf{c}'\mathbf{a}'}|,$$
$$\angle\mathbf{a} \cong \angle\mathbf{a}',\ \angle\mathbf{b} \cong \angle\mathbf{b}',\ \angle\mathbf{c} \cong \angle\mathbf{c}'$$

が成り立つようにできるとき, 三角形 T と T' は**相似**であるといい, $T \backsim T'$ と書く.

上の $\mathbf{a}$ と $\mathbf{a}'$, $\mathbf{b}$ と $\mathbf{b}'$, $\mathbf{c}$ と $\mathbf{c}'$ などをやはり対応する頂点という. $\triangle\mathbf{abc} \backsim \triangle\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ と書くときには, この順で頂点が対応しているものとする.

命題 5.2 (公理 (E4), (E5), (E6))**.** 次のいずれかの条件が成立するとき, $\triangle\mathbf{abc} \backsim \triangle\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ である:
(i) $|\overline{\mathbf{ab}}| : |\overline{\mathbf{a}'\mathbf{b}'}| = |\overline{\mathbf{bc}}| : |\overline{\mathbf{b}'\mathbf{c}'}| = |\overline{\mathbf{ca}}| : |\overline{\mathbf{c}'\mathbf{a}'}|$.
(ii) $|\overline{\mathbf{ab}}| : |\overline{\mathbf{a}'\mathbf{b}'}| = |\overline{\mathbf{ca}}| : |\overline{\mathbf{c}'\mathbf{a}'}|$, $\angle\mathbf{a} \cong \angle\mathbf{a}'$.
(iii) $\angle\mathbf{a} \cong \angle\mathbf{a}'$, $\angle\mathbf{b} \cong \angle\mathbf{b}'$.

証明: $|\overline{\mathbf{ab}}| = p$, $|\overline{\mathbf{bc}}| = q$, $|\overline{\mathbf{ca}}| = r$, $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{a} = A$, $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{b} = B$, $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{c} = C$ とおく. 同様に $|\overline{\mathbf{a}'\mathbf{b}'}| = p'$, $|\overline{\mathbf{b}'\mathbf{c}'}| = q'$, $|\overline{\mathbf{c}'\mathbf{a}'}| = r'$, $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{a}' = A'$, $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{b}' = B'$, $\mathrm{Cos}\,\angle\mathbf{c}' = C'$ とおく.

(i) を示す. 仮定から, ある $k > 0$ が存在して, $p' = kp$, $q' = kq$, $r' = kr$ である. 補題 4.2 の (i) の証明より

$$A = \frac{p^2 + r^2 - q^2}{2pr} = \frac{(p')^2 + (r')^2 - (q')^2}{2p'r'} = A'$$

を得る. 同様に $B = B'$, $C = C'$ が分かるから結果を得る.

(ii) を示す. 仮定から, ある $k>0$ が存在して, $p'=kp$, $r'=kr$ である. また $A=A'$ も成立する. 補題 4.2 の (ii) の証明と同様に

$$\begin{aligned} q' =& \sqrt{(p')^2+(r')^2-2p'r'A'} \\ =& \sqrt{(kp)^2+(kr)^2-2(kp)(kr)A} = kq \end{aligned}$$

を得る. よって (i) の結果を用いると, $B=B'$, $C=C'$ も得る.

(iii) を示す. 仮定から $A=A'$, $B=B'$ である. $k:=p'/p$ とおく. 補題 4.2 の (iii) の証明と同様に

$$\frac{p'}{r'}-A'=B'\sqrt{\frac{1-(A')^2}{1-(B')^2}}=B\sqrt{\frac{1-A^2}{1-B^2}}=\frac{p}{r}-A$$

を得るから, $p'/r'=p/r$, すなわち $r'/r=p'/p=k$. (ii) の結果を用いると, $q'/q=k$, $C=C'$ も得る. □

6　等長移動

ここで移動を用いた合同の定義について考える.

定義 6.1. $\rho:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が等長移動であるとは

$$\|\rho(\mathbf{b})-\rho(\mathbf{a})\|=\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|,\quad \mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^2 \tag{6.1}$$

が成立することをいう.

定義から明らかに, ρ_1,ρ_2 が等長移動ならば $\rho_2\circ\rho_1(\mathbf{a}):=\rho_2(\rho_1(\mathbf{a}))$ で定まる合成写像 $\rho_2\circ\rho_1$ も等長移動である.

補題 6.2. $\widetilde{\rho}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ が

$$\widetilde{\rho}(\mathbf{a})\cdot\widetilde{\rho}(\mathbf{b})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b},\quad \mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^2 \tag{6.2}$$

を満たすとき, $\mathbf{e}\in S^1$ に対して $\widetilde{\rho}(\mathbf{e}^\perp)=\pm\left(\widetilde{\rho}(\mathbf{e})\right)^\perp$ である.

証明. $(\mathbf{a},\mathbf{b})=(\mathbf{e},\mathbf{e}),(\mathbf{e}^\perp,\mathbf{e}^\perp),(\mathbf{e},\mathbf{e}^\perp)$ に対して (6.2) を用いると $\widetilde{\rho}(\mathbf{e}),\widetilde{\rho}(\mathbf{e}^\perp)\in S^1$, $\widetilde{\rho}(\mathbf{e})\cdot\widetilde{\rho}(\mathbf{e}^\perp)=0$ を得る. よって $\widetilde{\rho}(\mathbf{e}^\perp)=\alpha_1\widetilde{\rho}(\mathbf{e})+\alpha_2\widetilde{\rho}(\mathbf{e})^\perp$ とおくと, $\alpha_1=0$ であって $\alpha_1^2+\alpha_2^2=1$. したがって $\alpha_2=\pm1$ である. □

補題 6.3. $\rho:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ とする. このとき $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^2$ に対して $\widetilde{\rho}(\mathbf{a}):=\rho(\mathbf{a})-\rho(\mathbf{0})$ とおくと, ρ が等長移動であることと, $\widetilde{\rho}$ が (6.2) を満たす線形写像であることが同値になる.

証明: $\widetilde{\rho}$ が (6.2) を満たす線形写像ならば, $\rho(\mathbf{b})-\rho(\mathbf{a})=\widetilde{\rho}(\mathbf{b}-\mathbf{a})$ に注意すると ρ が等長移動であることは容易に分かる.

逆に ρ を等長写像とする. (6.1) より

$$\|\widetilde{\rho}(\mathbf{b})-\widetilde{\rho}(\mathbf{a})\|=\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|,\quad \mathbf{a},\mathbf{b}\in\mathbb{R}^2 \tag{6.3}$$

が成立. $\mathbf{b}=\mathbf{0}$ とすると, $\widetilde{\rho}(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ に注意して, $\|\widetilde{\rho}(\mathbf{a})\|=\|\mathbf{a}\|$ を $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^2$ に対して得る. したがって $\|\widetilde{\rho}(-\mathbf{a})\|=\|\mathbf{a}\|$. 以上より $\|\widetilde{\rho}(\mathbf{a})+\widetilde{\rho}(-\mathbf{a})\|^2=2\left(\|\widetilde{\rho}(\mathbf{a})\|^2+\|\widetilde{\rho}(-\mathbf{a})\|^2\right)-\|\widetilde{\rho}(\mathbf{a})-\widetilde{\rho}(-\mathbf{a})\|^2=4\|\mathbf{a}\|^2-\|\mathbf{a}-(-\mathbf{a})\|^2=0$. よって $\widetilde{\rho}(-\mathbf{a})=-\widetilde{\rho}(\mathbf{a})$ を $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^2$ に対して得る. (1.1) より

$$\begin{aligned} 4\widetilde{\rho}(\mathbf{a})\cdot\widetilde{\rho}(\mathbf{b}) =& \|\widetilde{\rho}(\mathbf{b})-\widetilde{\rho}(-\mathbf{a})\|^2-\|\widetilde{\rho}(\mathbf{b})-\widetilde{\rho}(\mathbf{a})\|^2 \\ =& \|\mathbf{b}-(-\mathbf{a})\|^2-\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2=4\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} \end{aligned}$$

となるから, (6.2) を得る. $\widetilde{\rho}$ の線形性は (6.2) から従う: $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$, $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbb{R}^2$ に対して (6.2) より

$$\widetilde{\rho}(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})\cdot\widetilde{\rho}(\mathbf{c})=\lambda\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mu\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}=(\lambda\widetilde{\rho}(\mathbf{a})+\mu\widetilde{\rho}(\mathbf{b}))\cdot\widetilde{\rho}(\mathbf{c})$$

を得る.

$\mathbf{e}\in S^1$ を固定する. 上式で $\mathbf{c}=\mathbf{e},\mathbf{e}^\perp$ とすると, 補題 6.2 と補題 1.1 に注意すれば, $\widetilde{\rho}(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})=\lambda\widetilde{\rho}(\mathbf{a})+\mu\widetilde{\rho}(\mathbf{b})$ を得る. □

$D\subset\mathbb{R}^2$ に対して, $\rho(D):=\{\rho(\mathbf{a});\,\mathbf{a}\in D\}$ とする.

系 6.4. ρ を等長移動とするとき, $\rho(\overline{\mathbf{ab}})=\overline{\rho(\mathbf{a})\rho(\mathbf{b})}$, $\rho(\angle\mathbf{bac})=\angle\rho(\mathbf{b})\rho(\mathbf{a})\rho(\mathbf{c})$ である. さらに

$$|\rho(\overline{\mathbf{ab}})|=|\overline{\mathbf{ab}}|,\ \rho(\angle\mathbf{bac})\cong\angle\mathbf{bac}$$

である.

$\widetilde{\rho}$ を (6.2) を満たす線形写像とする. $\mathbf{e}\in S^1$ を固定する. 補題 6.2 より, $\widetilde{\rho}(\mathbf{e}^\perp)=(\widetilde{\rho}(\mathbf{e}))^\perp$ であるか, $\widetilde{\rho}(\mathbf{e}^\perp)=-\left(\widetilde{\rho}(\mathbf{e})\right)^\perp$ である. 前者を**回転移動**, 後者を**対称移動**と呼ぶ. なお, 回転移動であるか, 対称移動であるかは $\mathbf{e}$ の選び方によらずに決まる $\widetilde{\rho}$ 固有の性質である[15]. また, ある $\mathbf{c}$ があって, $\rho(\mathbf{a})=\mathbf{a}+\mathbf{c}$ ($\mathbf{a}\in\mathbb{R}^2$) となる ρ を**平行移動**という.

I で恒等写像を表す (つまり, $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^2$ に対して $I(\mathbf{a})=\mathbf{a}$). $\widetilde{\rho}$ が回転移動であるとき, $\mathbf{a}=\alpha_1\widetilde{\rho}(\mathbf{e})+\alpha_2\left(\widetilde{\rho}(\mathbf{e})\right)^\perp$ に対して, $\mu(\mathbf{a}):=\alpha_1\mathbf{e}+\alpha_2\mathbf{e}^\perp$ と定めれば $\mu\circ\widetilde{\rho}=\widetilde{\rho}\circ\mu=I$ であることが分かる. よって $\widetilde{\rho}$ は逆写像を持つ. $\widetilde{\rho}$ が対称移動であるときは, $\widetilde{\rho}(\mathbf{e})=\widetilde{\varepsilon}_1\mathbf{e}+\widetilde{\varepsilon}_2\mathbf{e}^\perp$ とすると, $\widetilde{\rho}(\mathbf{e}^\perp)=-(\widetilde{\rho}(\mathbf{e}))^\perp=\widetilde{\varepsilon}_2\mathbf{e}-\widetilde{\varepsilon}_1\mathbf{e}^\perp$ を得る. よって $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{e}+\alpha_2\mathbf{e}^\perp$ に対して

$$\widetilde{\rho}\circ\widetilde{\rho}(\mathbf{a})=\widetilde{\rho}\big((\alpha_1\widetilde{\varepsilon}_1+\alpha_2\widetilde{\varepsilon}_2)\mathbf{e}+(\alpha_1\widetilde{\varepsilon}_2-\alpha_2\widetilde{\varepsilon}_1)\mathbf{e}^\perp\big)=\mathbf{a}$$

[15] 実際, $\widetilde{\rho}(\mathbf{e}^\perp)=\pm\left(\widetilde{\rho}(\mathbf{e})\right)^\perp$ とする (以下, 複合同順). $\mathbf{f}=\phi_1\mathbf{e}+\phi_2\mathbf{e}^\perp\in S^1$ とすると $\widetilde{\rho}(\mathbf{f})=\phi_1\widetilde{\rho}(\mathbf{e})\pm\phi_2\left(\widetilde{\rho}(\mathbf{e})\right)^\perp$ であって $\widetilde{\rho}(\mathbf{f}^\perp)=-\phi_2\widetilde{\rho}(\mathbf{e})\pm\phi_1\left(\widetilde{\rho}(\mathbf{e})\right)^\perp=\pm\left(\widetilde{\rho}(\mathbf{f})\right)^\perp$.

を得る．すなわち $\widetilde{\rho}\circ\widetilde{\rho}=I$ であるから, $\widetilde{\rho}$ はやはり逆写像を持つ．平行移動が逆写像を持つことも直ちに分かる．よって補題 6.3 より次のことが従う．

命題 6.5. 回転移動, 対称移動, 平行移動は等長移動である．また等長移動は, 回転移動もしくは対称移動と平行移動の合成で表され, 逆写像を持つ[16]．特に等長移動は $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への全単射となる．

"回転移動", "対称移動" という名前の由来は以下のことから分かる．

命題 6.6. (i) $\widetilde{\rho}$ は回転移動であって, $\widetilde{\rho}\neq I,-I$ とする．このとき

$$\angle\mathbf{a}\mathbf{0}\widetilde{\rho}(\mathbf{a})\cong\angle\mathbf{b}\mathbf{0}\widetilde{\rho}(\mathbf{b}),\quad \mathbf{a},\mathbf{b}\neq\mathbf{0}.$$

また, $\mathbf{b},\mathbf{c}$ が $\mathbf{0a}$ の同じ側 (または違う側) にあるならば, $\widetilde{\rho}(\mathbf{b}),\widetilde{\rho}(\mathbf{c})$ も $\mathbf{0}\widetilde{\rho}(\mathbf{a})$ の同じ側 (または違う側) にある．
(ii) $\widetilde{\rho}$ を対称移動とする．ある $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^2$ があって, $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{b}+\alpha_2\mathbf{b}^\perp$ ならば $\widetilde{\rho}(\mathbf{a})=\alpha_1\mathbf{b}-\alpha_2\mathbf{b}^\perp$ である．

証明: $\mathbf{e}\in S^1$ をとり, $\widetilde{\mathbf{e}}:=\widetilde{\rho}(\mathbf{e})$ とおく．

(i) を示す． $\widetilde{\rho}$ は回転移動だから $\widetilde{\rho}(\mathbf{e}^\perp)=\widetilde{\mathbf{e}}^\perp$ である． $\mathbf{a}=\alpha_1\mathbf{e}+\alpha_2\mathbf{e}^\perp$ とおくと, $\mathbf{a}\cdot\widetilde{\rho}(\mathbf{a})=\alpha_1^2\mathbf{e}\cdot\widetilde{\mathbf{e}}+\alpha_1\alpha_2(\mathbf{e}\cdot\widetilde{\mathbf{e}}^\perp+\mathbf{e}^\perp\cdot\widetilde{\mathbf{e}})+\alpha_2^2\mathbf{e}^\perp\cdot\widetilde{\mathbf{e}}^\perp=(\alpha_1^2+\alpha_2^2)\mathbf{e}\cdot\widetilde{\mathbf{e}}$ より $\mathrm{Cos}\angle\mathbf{a}\mathbf{0}\widetilde{\rho}(\mathbf{a})=\mathbf{e}\cdot\widetilde{\mathbf{e}}$ となり前半の結果を得る[17]．また $\widetilde{\rho}(\mathbf{a}^\perp)=-\alpha_2\widetilde{\mathbf{e}}+\alpha_1\widetilde{\mathbf{e}}^\perp=\big(\widetilde{\rho}(\mathbf{a})\big)^\perp$ に注意すると

$$(\mathbf{a}^\perp\cdot\mathbf{b})(\mathbf{a}^\perp\cdot\mathbf{c})=\big(\big(\widetilde{\rho}(\mathbf{a})\big)^\perp\cdot\widetilde{\rho}(\mathbf{b})\big)\big(\big(\widetilde{\rho}(\mathbf{a})\big)^\perp\cdot\widetilde{\rho}(\mathbf{c})\big)$$

より後半の成立も分かる．

(ii) を示す． $\widetilde{\mathbf{e}}\neq-\mathbf{e}$ と仮定する． $\mathbf{b}:=2^{-1}(\mathbf{e}+\widetilde{\mathbf{e}})$ とする． $\widetilde{\rho}\circ\widetilde{\rho}=I$ より $\widetilde{\rho}(\widetilde{\mathbf{e}})=\mathbf{e}$． よって $\widetilde{\rho}(\mathbf{b}):=2^{-1}(\widetilde{\mathbf{e}}+\mathbf{e})=\mathbf{b}$． $\widetilde{\rho}$ は対称移動だから $\widetilde{\rho}(\mathbf{e}^\perp)=-\widetilde{\mathbf{e}}^\perp$, $\widetilde{\rho}(\widetilde{\mathbf{e}}^\perp)=-\widetilde{\rho}\circ\widetilde{\rho}(\mathbf{e}^\perp)=-\mathbf{e}^\perp$ を得る．よって $\widetilde{\rho}(\mathbf{b}^\perp)=-2^{-1}(\widetilde{\mathbf{e}}^\perp+\mathbf{e}^\perp)=-\mathbf{b}^\perp$．したがって $\widetilde{\rho}(\alpha_1\mathbf{b}+\alpha_2\mathbf{b}^\perp)=\alpha_1\mathbf{b}-\alpha_2\mathbf{b}^\perp$ を得る．

$\widetilde{\mathbf{e}}=-\mathbf{e}$ のときは, $\widetilde{\rho}(\mathbf{e}^\perp)=-\widetilde{\rho}(\mathbf{e})^\perp=\mathbf{e}^\perp$ より $\mathbf{b}=\mathbf{e}^\perp$ ととればよい． □

三角形の合同を等長移動を用いて特徴付けることができる．

命題 6.7. $\triangle\mathbf{abc}\equiv\triangle\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ であることと, ある等長移動 ρ が存在して $\rho(\triangle\mathbf{abc})=\triangle\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ となることは同値である．

証明: 等長移動 ρ が存在して $\rho(\triangle\mathbf{abc})=\triangle\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ ならば, 系 6.4 より $\triangle\mathbf{abc}\equiv\triangle\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ は直ちに分かる．

$\triangle\mathbf{abc}\equiv\triangle\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ と仮定する．一般性を失わず, 頂点 $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ は頂点 $\mathbf{a}',\mathbf{b}',\mathbf{c}'$ にこの順番で対応するとしてもよい． $|\overline{\mathbf{ab}}|=|\overline{\mathbf{a}'\mathbf{b}'}|=p$ とする． $\mathbf{e}:=p^{-1}(\mathbf{b}'-\mathbf{a}')$ とし, $\mathbf{b}-\mathbf{a}=\beta_1\mathbf{e}+\beta_2\mathbf{e}^\perp$ とする． $\mathbf{e}\in S^1$, $\beta_1^2+\beta_2^2=p^2$ に注意． $\widetilde{\beta}_j=p^{-1}\beta_j$ $(j=1,2)$ とおく． $\mathbf{d}=\delta_1\mathbf{e}+\delta_2\mathbf{e}^\perp$ に対して, $\widetilde{\rho}_1(\mathbf{d})$ を

$$\widetilde{\rho}_1(\mathbf{d}):=(\widetilde{\beta}_1\delta_1+\widetilde{\beta}_2\delta_2)\mathbf{e}+(-\widetilde{\beta}_2\delta_1+\widetilde{\beta}_1\delta_2)\mathbf{e}^\perp$$

と定め, $\rho_1(\mathbf{d})$ を $\rho_1(\mathbf{d}):=\widetilde{\rho}_1(\mathbf{d}-\mathbf{a})+\mathbf{a}'$ で定めると, ρ_1 は等長移動で, $\rho_1(\mathbf{a})=\mathbf{a}'$, $\rho_1(\mathbf{b})=\mathbf{b}'$ となる．

$P=\big(\widetilde{\rho}_1(\mathbf{c}-\mathbf{a})\cdot\mathbf{e}^\perp\big)\big((\mathbf{c}'-\mathbf{a}')\cdot\mathbf{e}^\perp\big)$ とおく． $P\neq0$ に注意． $P>0$ ならば $\rho:=\rho_1$ とおく． $P<0$ ならば $\rho:=\rho_2\circ\rho_1$ とおく．ただし $\mathbf{d}=\delta_1\mathbf{e}+\delta_2\mathbf{e}^\perp$ に対して $\widetilde{\rho}_2(\mathbf{d}):=\delta_1\mathbf{e}-\delta_2\mathbf{e}^\perp$ とし, $\rho_2(\mathbf{d}):=\widetilde{\rho}_2(\mathbf{d}-\mathbf{a}')+\mathbf{a}'$ と定めた． ρ は等長移動になり, $\rho(\mathbf{a})=\mathbf{a}'$, $\rho(\mathbf{b})=\mathbf{b}'$ である． $\mathbf{c}'':=\rho(\mathbf{c})$ とおき, $\mathbf{c}''_{\mathbf{a}'}=\gamma_1''\mathbf{e}+\gamma_2''\mathbf{e}^\perp$ とする． $\mathbf{c}'_{\mathbf{a}'}=\gamma_1'\mathbf{e}+\gamma_2'\mathbf{e}^\perp$ とおくと, $|\overline{\mathbf{a}'\mathbf{c}'}|=|\overline{\mathbf{ac}}|=|\overline{\mathbf{a}'\mathbf{c}''}|$, $\angle\mathbf{b}'\mathbf{a}'\mathbf{c}'=\angle\mathbf{bac}=\angle\mathbf{b}'\mathbf{a}'\mathbf{c}''$ であるから, $\gamma_1'=\mathbf{c}'_{\mathbf{a}'}\cdot\mathbf{e}=\mathbf{c}''_{\mathbf{a}'}\cdot\mathbf{e}=\gamma_1'$ と $(\gamma_1')^2+(\gamma_2')^2=(\gamma_1'')^2+(\gamma_2'')^2$ を得る．よって $|\gamma_2'|=|\gamma_2''|$． ρ の作り方から $\gamma_2'\gamma_2''>0$ であるから結局 $\gamma_2'=\gamma_2''$ となり $\mathbf{c}'=\mathbf{c}''$ である．よって $\rho(\triangle\mathbf{abc})=\triangle\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ を得る． □

このことから, 三角形の合同を等長移動で特徴付けることができた．等長移動を用いると三角形に限らず一般の "図形" $D,D'(\subset\mathbb{R}^2)$ に対しても合同という概念が定義できるので便利である: ある等長移動 ρ が存在して $\rho(D)=D'$ となるとき, D と D' は合同であるといい, $D\equiv D'$ と書く．これが中学校の教科書における合同の定義に対応するものである．なお, このように合同を定義すると, 線分や角の (この意味での) 合同を考えることができるが, $\overline{\mathbf{ab}}\equiv\overline{\mathbf{cd}}$ と $|\overline{\mathbf{ab}}|=|\overline{\mathbf{cd}}|$ が同値であること, $\angle\mathbf{bac}\equiv\angle\mathbf{edf}$ と $\angle\mathbf{bac}\cong\angle\mathbf{edf}$ が同値であることが容易に確かめられる．

定義 6.8 (拡大)**.** $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^2$, $k>0$ に対して, $\mathbf{c}$ を中心とした k 倍の**拡大**を

$$m_{k,\mathbf{c}}(\mathbf{a}):=k(\mathbf{a}-\mathbf{c})+\mathbf{c},\quad \mathbf{a}\in\mathbb{R}^2$$

で定める． $\mathbf{c}$ を拡大の中心という．なお $k>1$ の場合を拡大, $0<k<1$ の場合を縮小ということもある．

次は容易に分かる．

[16] 等長移動全体のなす集合を H とすると, H が (写像の合成を演算として) 群を成すことが先の結果と合わせると分かった．
[17] $\mathbf{e}\cdot\widetilde{\mathbf{e}}^\perp=-\mathbf{e}^\perp\cdot\widetilde{\mathbf{e}}$ 及び $\mathbf{e}^\perp\cdot\widetilde{\mathbf{e}}^\perp=\mathbf{e}\cdot\widetilde{\mathbf{e}}$ を用いた．

補題 6.9. $k>0$, $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^2$ とする．$\mathbf{a}'=m_{k,\mathbf{c}}(\mathbf{a})$, $\mathbf{b}'=m_{k,\mathbf{c}}(\mathbf{b})$, $\mathbf{c}'=m_{k,\mathbf{c}}(\mathbf{c})$ とするとき

$$m_{k,\mathbf{c}}(\overline{\mathbf{ab}})=\overline{\mathbf{a}'\mathbf{b}'},\ |\overline{\mathbf{a}'\mathbf{b}'}|=k|\overline{\mathbf{ab}}|,$$
$$m_{k,\mathbf{c}}(\angle\mathbf{bac})=\angle\mathbf{b}'\mathbf{a}'\mathbf{c}',\ \angle\mathbf{b}'\mathbf{a}'\mathbf{c}'\cong\angle\mathbf{bac}$$

が成り立つ．

中学校数学では相似とは“拡大または縮小すると合同になる図形”と定義しているが，これと我々の相似の定義[18]との関係を見ておこう．

命題 6.10. $\triangle\mathbf{abc}\backsim\triangle\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ であることと，ある $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^2$ と $k>0$ が存在して $m_{k,\mathbf{c}}(\triangle\mathbf{abc})\equiv\triangle\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ となることは同値である．

証明: $m_{k,\mathbf{c}}(\triangle\mathbf{abc})=\triangle\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ ならば $\triangle\mathbf{abc}\backsim\triangle\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ であることは補題 6.9 より直ちに分かる．

逆に $\triangle\mathbf{abc}\backsim\triangle\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ と仮定する．$\triangle\mathbf{abc}$ と $\triangle\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ の辺の比を $1:k$ とする．$\mathbf{a}'':=m_{k,\mathbf{0}}(\mathbf{a})$, $\mathbf{b}'':=m_{k,\mathbf{0}}(\mathbf{b})$, $\mathbf{c}'':=m_{k,\mathbf{0}}(\mathbf{c})$ とおくと補題 6.9 より，$m_{k,\mathbf{0}}(\triangle\mathbf{abc})=\triangle\mathbf{a}''\mathbf{b}''\mathbf{c}''$ であることと，$\triangle\mathbf{a}''\mathbf{b}''\mathbf{c}''\equiv\triangle\mathbf{a}'\mathbf{b}'\mathbf{c}'$ が直ちに分かる． □

7　三平方の定理

中学校数学における幾何では面積を，例えば三平方の定理の証明に用いている．図形 ($\mathbb{R}^2$ の部分集合) の面積は現代的には積分 (あるいは測度) を用いて定義する．このようにすれば多角形に限らず円などの面積も定義することができる．しかし高校で学ぶ積分の理論は厳密さからは程遠い．多角形に限定すれば，積分を用いずにむしろユークリッドの『原論』における面積の理論の精神に戻った定義をヒルベルトが与えている ([3], [4] 参照)．

面積は小学校・中学校教育を通じて重要な題材であるので，いずれ稿を改めて論じることとし，ここではこれ以上立ち入らない．代わりに面積を用いない，我々の幾何モデルにおける三平方の定理の証明を与えておこう: $\triangle\mathbf{abc}$ を $\angle\mathbf{c}$ が直角であるような直角三角形とする．このとき，命題 2.17 より $(\mathbf{b}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{c})=0$ である．よって

$$\begin{aligned}|\overline{\mathbf{ab}}|^2&=\|\mathbf{b}-\mathbf{a}\|^2=\|(\mathbf{b}-\mathbf{c})-(\mathbf{a}-\mathbf{c})\|^2\\&=\|\mathbf{b}-\mathbf{c}\|^2-2(\mathbf{b}-\mathbf{c})\cdot(\mathbf{a}-\mathbf{c})+\|\mathbf{a}-\mathbf{c}\|^2\\&=|\overline{\mathbf{bc}}|^2+|\overline{\mathbf{ca}}|^2.\end{aligned}$$

[18]我々の定義は，中学校数学では相似な図形の性質であった．

8　最後に

中学校数学では三辺相当 (SSS), 二辺挟角相当 (SAS), 一辺両端角相当 (ASA) の三角形の合同定理を全て直観的に認めて，その後の論証を行っている．そして二等辺三角形の 2 角が等しいことを示すために，(SAS と SSS を認めたうえでないと通用しない) 角の二等分線を用いた証明が教科書では与えられている[19]．実際には，『原論』流の重ね合わせ (より正確には等長移動の存在) を公理とすれば，三角形の合同定理は全て証明できる命題である．あるいは [4] のように SAS のみを公理とすれば残りは示せる．また二等辺三角形の 2 角が等しいことは SAS のみで示すことができる．中学校の論証指導がどうあるべきかを論じるのは本稿の目的とするところではないが，論理構造を理解しておくことは指導の際に重要であろう．本稿では $\mathbb{R}^2$ を“平面”のモデルとして，中学校で直感的に認められた基本命題が (面積の理論を除けば) 全て成立することをみた．また“きちんと重なる”という性質と“対応する辺と角が全て等しい”という性質の関係を等長移動を介して解説し，拡大・縮小のこのモデルでの解釈も与えた．これにより (少なくとも一つは) 中学校数学での論証指導に反しない幾何モデルが存在することが分かったことになる[20]．

献 辞

本稿を 2010 年 6 月に急逝された故佐藤英雄先生に捧げる．佐藤先生の最後のゼミ生の小嶋真洋君，佐野綾希さんの指導を片山・田川両名が引き継いだことが本稿を含む一連の仕事のひとつのきっかけとなった．

参考文献

[1] 片山聡一郎, 田川裕之, 中学校数学の図形領域における初等幾何の指導内容と前提条件.

[2] 片山聡一郎, 田川裕之, 平面幾何の歴史的な理論展開と中学校における取り扱いの比較.

[3] ユークリッド, ユークリッド原論, 中村幸四郎・寺坂英孝・伊藤俊太郎・池田美恵訳, 共立出版, 1971 年.

[4] D. ヒルベルト, 幾何学基礎論, 中村幸四郎訳, ちくま学芸文庫, 筑摩書房, 2005 年.

[5] R. ハーツホーン, 幾何学 I 現代数学から見たユークリッド原論, 難波誠訳, シュプリンガー・ジャパン, 2007 年.

[19]これはおそらく分かりやすさを重視して“紙に描いた二等辺三角形を真ん中で折って角が重なるのを確かめる”という“実験”と整合する証明を与えたのであろう．

[20]なお，二等辺三角形の 2 角が等しいことは，このモデルでは直接示すのがもっとも簡単で早い．