

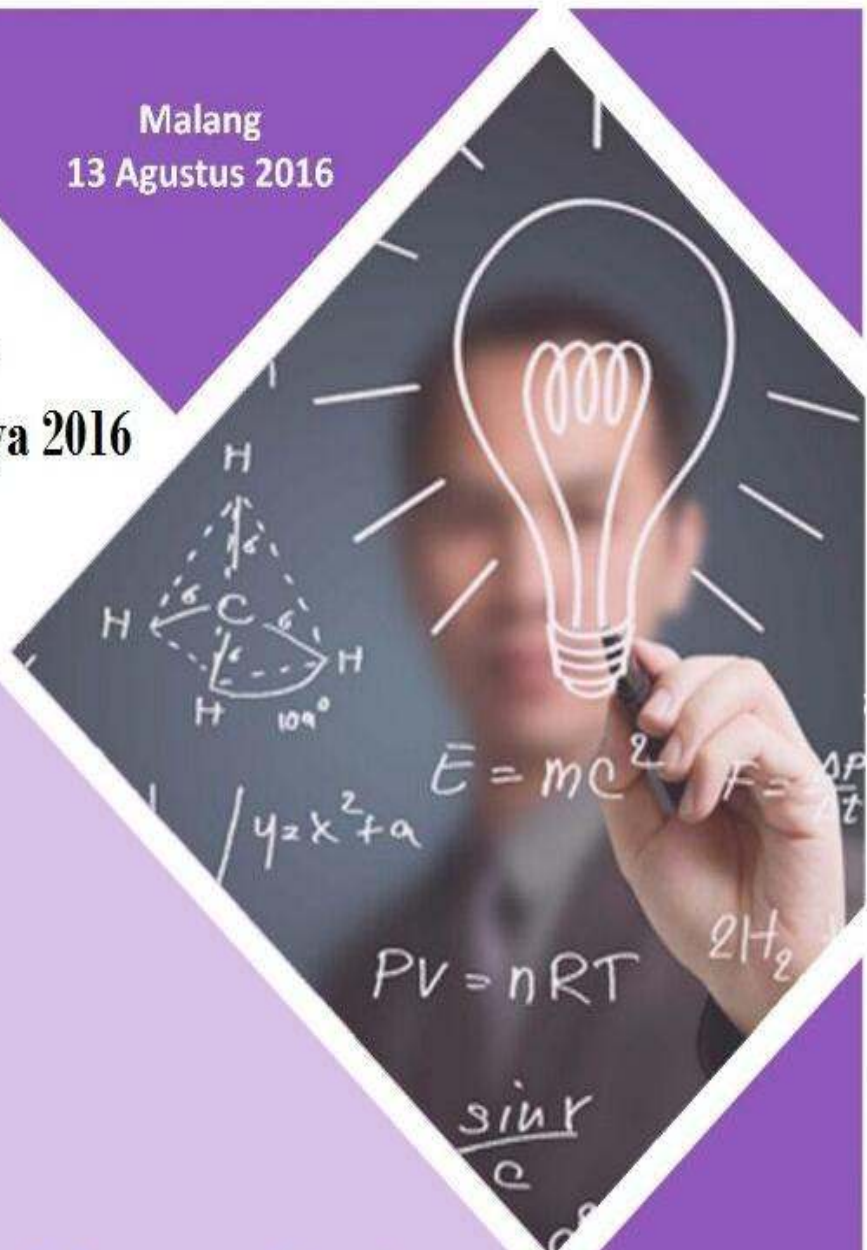
PROSIDING

Malang
13 Agustus 2016

SEMINAR NASIONAL

Matematika dan Pembelajarannya 2016

ISBN: 978-602-1150-24-5



TEMA:

Tren Penelitian Matematika dan
Pendidikan Matematika Abad 21



FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU
PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI MALANG

PROSIDING

Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya

Tema :

Tren Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika

Abad 21

Malang, 13 Agustus 2016

Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam
Universitas Negeri Malang

PROSIDING

Seminar Nasional Matematika dan Pembelajarannya

“Tren Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika Abad 21”

Team Editor:

Prof. Drs. Purwanto, Ph.D

Prof. Dr. Cholis Sa'dijah, M.Pd, M.A

Prof. Dr. Toto Nusantara, M.Si

Dr. Abdur Rahman As'ari, M.Pd, M.A

Dr. Abd. Qohar, M.T

Dr. Rustanto Rahardi, M.Si

Drs. Sukoriyanto, M.Si

Indriati Nurul Hidayah, S.Pd, M.Si

Syaiful Hamzah Nasution, S.Si., M.Pd

ISBN: 978-602-1150-24-5

Perpustakaan Nasional: Katalog dalam Terbitan(KDT)

Hak cipta dilindungi undang-undang. Dilarang memperbanyak atau memindahkan sebagian atau seluruh isi buku ke dalam bentuk apapun, secara elektronis maupun mekanis, termasuk fotokopi atau merekam dengan teknik apapun, tanpa izin tertulis dari penerbit.

Diterbitkan oleh Penerbit CV. Bintang Sejahtera

Anggota IKAPI (No: 136/JTI/2011)

Jl. Sunan Kalijogo no. 7AA, Dinoyo, Malang

Tim Penilai Makalah (Reviewer):

Prof. Drs. Gatot Muhsetyo, M.Sc
Prof. Dr. Ipung Yuwono, M.S, M.Sc
Prof. Drs. Purwanto, Ph.D
Prof. Dr. Cholis Sa'dijah, M.Pd, M.A
Prof. Dr. Toto Nusantara, M.Si
Dr. Abdur Rahman As'ari, M.Pd, M.A
Dr. Abadyo, M.Si
Dr. Abd. Qohar, M.T
Drs. Dwiyana, M.Pd., Ph.D
Dr. Edy Bambang Irawan, M.Pd
Dr. Erry Hidayanto, M.Si
Dr. Hery Susanto, M.Si
Dr. rer nat. I Made Sulandra, M.Si
Dr. I Nengah Parta, S.Pd, M.Si
Dr. Makbul Muksar, M.Si
Dr. Subanji, M.Si
Dra. Santi Irawati, M.Si, Ph.D
Dr. Sudirman, M.Si
Dr. Sri Mulyati, M.Pd
Dr. Susiswo, M.Si
Dr. Swasono Rahardjo, M.Si
Drs. Tjang Daniel Chandra, M.Si, Ph.D
Dr. Rustanto Rahardi, M.Si.
Drs. Sukoriyanto, M.Si
Indriati Nurul Hidayah, S.Pd, M.Si
Darmawan Satyananda, S.T, M.T

KATA PENGANTAR

Segala puji dan syukur hanyalah milik Allah SWT, atas limpahan rahmat dan hidayah-Nya Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam khususnya Jurusan Matematika dapat menyusun Prosiding hasil Seminar Nasional dengan tema “Tren Penelitian Matematika dan Pendidikan Matematika Abad 21”. Seminar ini telah dilaksanakan di Aula FMIPA Universitas Negeri Malang (UM) pada Sabtu, 13 Agustus 2016 dengan pesertanya adalah Mahasiswa, Guru/Dosen, dan pemerhati pendidikan dari berbagai daerah di Indonesia.

Makalah-makalah yang dimuat dalam prosiding ini telah melalui seleksi yang berlapis-lapis, dari kesesuaian dengan templatnya hingga seleksi oleh para reviewer. Oleh karena itu, kami ucapkan terimakasih pada semua panitia dalam kegiatan Semnas ini dan juga para reviewer yang tidak dapat disebutkan semuanya di sini. Ucapan terimakasih juga kami sampaikan pada:

1. Dr. Saiful Rahman, M.M, M.Pd, Kepala Dinas Pendidikan Propinsi Jawa Timur sebagai pembicara utama.
2. Prof. Dr. Cholis Sa’dijah, M.Pd, M.A, Guru Besar Jurusan Matematika FMIPA UM sebagai pembicara utama.
3. Dr. Hadi Susanto, Associate Proffesorin Applied Mathematics, University of Essex, UK sebagai pembicra utama.
4. Dr. Markus Diantoro, M.Si, Dekan FMIPA UM.
5. Dr. Sudirman, M.Si, Ketua Jurusan Matematika UM.
6. Pihak-pihak lain yang tidak dapat disebutkan satu per satu.

Prosiding ini memuat artikel-artikel terpilih dan terseleksi sehingga dapat dijadikan sebagai rujukan pengetahuan yang berkualitas. Semoga prosiding ini dapat menjadikan petunjuk dan manfaat bagi peserta seminar dan pembaca secara umum.

Malang, 18 Oktober 2016
Ketua Pelaksana,
ttd
Dr. Rustanto Rahardi, M.Si

DAFTAR ISI

Tim Penilai Makalah (Reviewer)	i
Kata Pengantar	ii
Daftar Isi	iii
Pendidikan Matematika	
Pengukuran Sikap Matematis Berdasarkan Sudut Pandang Teori Respons Butir <i>Abadyo</i>	1
Keefektifan Lembar Kerja Siswa Berbasis Penemuan Terbimbing untuk Siswa SMK <i>Abdul Kholiq, Ipung Yuwono, dan I Made Sulandra</i>	16
Kesulitan Numerik Siswa SMK: Perspektif Analisis Kesalahan Newman <i>Abdul Manaf Firdaus, I Made Sulandra, dan Subanji</i>	23
Pengembangan Dimensi Keterampilan Standar Kompetensi Lulusan Kurikulum 2013 Edisi Revisi Ditinjau dari Rumusan Kompetensi Dasar Matematika Jenjang Sekolah Menengah Pertama <i>Abdur Rahman As'ari</i>	36
Pengembangan Media Pembelajaran Flipped Picture pada Tema 8 Subtema 1 Pembelajaran 1 Siswa Kelas 3 SD Negeri Banyuajuh 2 Kamal <i>Agria Golda Vegetari, Laila Khamsatul Muharrami, dan Mohammad Edy Nurtamam</i>	46
Minat Baca Mahasiswa Kelas Trigonometri dengan Model Diskusi dan Kunjungan Perpustakaan <i>Agung Deddiliawan Ismail</i>	55
Pemanfaatan Geogebra dalam Pembelajaran Matematika pada Materi Irisan Kerucut untuk SMA <i>Ahmad Fauzi, Cholis Sa'dijah, dan Sisworo</i>	62
Visualisasi Volume Benda Putar Menggunakan Animasi Geogebra untuk Meningkatkan Kemampuan Representasi Matematis Siswa <i>Ahmad Heru Wahyu Wibowo, Sisworo, dan Edy Bambang Irawan</i>	70
Profil Penugasan Matematika yang Dikembangkan Guru <i>Ajeng Gelora Mastuti, Abdur Rahman As'ari, Purwanto, dan Abadyo</i>	78
Penerapan <i>Problem Based-Learning</i> untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep Persamaan dan Fungsi Kuadrat Siswa Kelas X BB-2 SMK Negeri 5 Malang <i>Alfiah Febriansyah Putri dan Lathiful Anwar</i>	88

Tinjauan Hasil Penelitian Pengaruh Model Pembelajaran Kooperatif Tipe STAD Terhadap Keaktifan Belajar Matematika Siswa <i>Amos Patiung, Sri Mulyati, dan Akbar Sutawidjaja</i>	96
Analisis Kesulitan Siswa dalam Mengerjakan Soal Operasi Bilangan Bulat Kelas VII SMP <i>Andi Susanto, Purwanto, dan Abd Qohar</i>	107
Penerapan Model Pembelajaran Think Talk Write (TTW) melalui Pendekatan Saintifik untuk Meningkatkan Kemampuan Komunikasi Matematis Tertulis Siswa Kelas VII B SMPN 8 Malang pada Pokok Bahasan Segi Empat dan Segitiga <i>Anita Dwi Septian dan Latifah Mustofa Lestyanto</i>	112
Analisis Miskonsepsi dalam Menentukan Luas Daerah Segitiga dan Segiempat Siswa SMP Kelas VII <i>Apdwi Syaeruldinata, Abdur Rahman As'ari, dan Abadyo</i>	121
Kajian Tentang Kualitas LKS yang Bercirikan Pendekatan Saintifik <i>Arini Hidayati, Hery Susanto, dan Abdur Rahman As'ari</i>	131
Level Berpikir Probabilistik Siswa MA Kh Moh. Said Kepanjen <i>Arini Mayan Fa'ani, Purwanto, dan Sudirman</i>	139
Diagnosis Kesalahan Siswa Kelas XI SMA Negeri Candipuro Pada Materi Penerapan Turunan Fungsi <i>Bagus Nur Iman, Toto Nusantara, dan Dwiyana</i>	146
Profil Number Sense Siswa SMKN 4 Probolinggo <i>Bayu Yudha Saputra, Tjang Daniel Chandra, dan Sri Mulyati</i>	154
Kemampuan Penalaran Matematika Siswa SMP Berdasarkan Proses Asimilasi dan Akomodasi <i>Budi Mardikawati, Erry Hidayanto, dan Santi Irawati</i>	161
Pembelajaran Matematika Menggunakan Model Problem Based Learning (PBL) Berbantuan Media Timbangan pada Materi Persamaan dan Pertidaksamaan Linear Satu Variabel untuk Meningkatkan Hasil Belajar Siswa Kelas VII-8 SMP Negeri 21 Malang <i>Cici Dwi Saputri dan Rini Nurhakiki</i>	172
Metakognisi Siswa Dalam Memecahkan Masalah Matematika pada Materi Barisan Aritmetika: Studi Kasus pada Siswa Kelas X SMA Advent Dwi Abdi Malang <i>Danang Setyadi, Subanji, dan Makbul Muksar</i>	181
Analisis Kesalahan pada Hasil Tes Siswa SMP Kelas VII untuk Materi Bilangan Bulat <i>Darmawati dan Tjang Daniel Chandra</i>	191

Profil Pemahaman Matematika Siswa Sekolah Menengah Pertama (SMP) Tentang Konsep Fungsi <i>David Nurfiqih, Sudirman, dan Akbar Sutawidjaja</i>	196
Analisis Kesalahan Siswa dalam Menyelesaikan Soal Cerita Penjumlahan Pecahan <i>Dena Juliana, Subanji, dan Susiswo</i>	201
Analisis Jawaban Soal Pemahaman Konsep Teorema Pythagoras pada Siswa Kelas VIII <i>Dewi Arfiyanti, Edy Bambang Irawan, dan Purwanto</i>	207
Analisis Kesulitan Siswa dalam Menyelesaikan Soal Materi Aljabar Berdasarkan Tahapan Newman pada Siswa SMP Negeri 9 Malang Kelas VIII <i>Dewi Sih Wilujeng dan Subanji</i>	212
Pengembangan Media Belajar Mandiri “Samudra Edukasi Aritmatika.apk (S.E.A)” Berbasis Android untuk Siswa Tingkat SMP Kelas 8 pada Materi Lingkaran. <i>Dian Setyo Nugroho, Susy Kuspambudi A, dan Askury</i>	222
Kesulitan Siswa SMA dalam Menyelesaikan Soal Open-Ended pada Materi Barisan dan Deret <i>Dian Shinta Harijani, Gatot Muhsetyo, dan Hery Susanto</i>	228
Peningkatan Hasil Belajar Materi Barisan Bilangan dan Deret Melalui Metode Penemuan Terbimbing dengan Pendekatan Saintifik pada Siswa Kelas 9A Mata Pelajaran Matematika di SMP Negeri 2 Widang Kabupaten Tuban <i>Didit Nantara</i>	237
Profil Pemecahan Masalah Trigonometri Siswa Bergaya Kognitif Field-Independent dan Field-Dependent <i>Dimas Femy Sasongko, Subanji, dan I Made Sulandra</i>	247
Penerapan Strategi Think-Talk-Write untuk Meningkatkan Keterampilan Komunikasi Matematis Tulis Siswa SMP BSS <i>Dwi Handayani Setyarini dan Rustanto Rahardi</i>	256
<i>Lesson Study</i> untuk Meningkatkan Kualitas Guru dalam Pembelajaran Teorema Pythagoras di Kelas VIII SMP <i>Dwiyana</i>	266
Representasi Hasil Berpikir Kreatif Siswa SMA pada Materi Bangun Ruang <i>Edi Purwanto, Erry Hidayanto, dan Santi Irawati</i>	272
Identifikasi Kesalahan Siswa dalam Menyelesaikan Soal Cerita Pecahan <i>Edy Mulyono, Santi irawati, dan Sudirman</i>	281

Diagnosis Kesulitan Siswa Kelas VII pada Pemahaman Konsep Bilangan Bulat dan Operasinya <i>Eka Mery Fatmawati Sukarno, Edy Bambang Irawan, dan Abadyo</i>	287
Koneksi Matematis Siswa Kelas X SMK pada Topik Aljabar <i>Eko Prasetyo, Sri Mulyati, dan Tjang Daniel Candra</i>	293
Pengembangan Multimedia Interaktif E-Module dengan Pendekatan Saintifik Materi Perbandingan Trigonometri Bagi Peserta Didik Kelas X SMA Terbuka Kepanjen TKB Tumpang <i>Elyta Dia Cahyanti, Sudirman, dan Lucky Tri Oktoviana</i>	298
Pengaruh Penggunaan Multimedia pada Model Pembelajaran Kooperatif Tipe <i>Student Team Achievement Division</i> (STAD) terhadap Pemahaman Matematis Siswa <i>Erik Santoso</i>	306
Pemanfaatan Software Geogebra dalam Pembelajaran Program Linear <i>Erna Tri Wahyuni, Swasono Rahardjo, dan Susiswo</i>	317
Penerapan Model Pembelajaran Kooperatif Tipe TGT (<i>Teams Games Tournaments</i>) Menggunakan Kartu Soal dan Kartu Jawaban pada Siswa Kelas II Sekolah Dasar <i>Erry Hidayanto dan Mariani</i>	326
Identifikasi Kesalahan Siswa Kelas VII dalam Menyelesaikan Soal Geometri <i>Fahrur Rozi Hadiyanto, Hery Susanto, dan Abd Qohar</i>	332
Koneksi Matematis dalam Pembelajaran Geometri Bagi Siswa SMK <i>Fani Dwi Astuti, Edy Bambang Irawan, dan Abd Qohar</i>	340
Implementasi Penyampaian <i>Short Open-Ended Problems</i> untuk Mencari Volume Bangun Ruang Berbasis Balok bagi Mahasiswa Bidang Ilmu <i>Gatot Muhsetyo</i>	349
Penerapan Pembelajaran Kooperatif <i>Teams Games Tournament</i> Berbantuan Kuis Interaktif dalam Materi Lingkaran untuk Meningkatkan Motivasi dan Hasil Belajar Siswa Kelas VIII-2 SMPN 21 Malang <i>Handri Kurniawan dan Sukoriyanto</i>	358
Analisis Kemampuan Berpikir Analitis Siswa dalam Menyelesaikan Masalah <i>Open-Ended</i> <i>Hario Wisnu D.B.P, I Nengah Parta, dan Santi Irawati</i>	366

Etnomatematika Arfak (Papua Barat-Indonesia): Numerasi pada Gerakan Jari Tangan Masyarakat Arfak <i>Haryanto, Toto Nusantara, Subanji, dan Swasono Raharjo</i>	374
Keefektifan Pembelajaran Bebas Inkuiri pada Bidang Studi Sains dan Matematika: Penelitian Meta Analisis <i>Helmi, Cholis Sa'dijah, dan Akbar Sutawidjaja</i>	379
Identifikasi Distribusi Hasil Pembobotan Skor Asesmen Sejawat pada Model Pembelajaran Interaksi Sejawat <i>Hendro Permadi, Ipung Yuwono, dan I Nengah Parta</i>	388
Pembelajaran Berbantuan Multimedia Berdasarkan Teori Beban Kognitif pada Materi Matriks <i>Heru Sudjatmiko, Subanji, dan Erry Hidayanto</i>	395
Mengembangkan Modul Pembelajaran Bilangan dengan Pendekatan <i>Contextual Teaching and Learning</i> (CTL) <i>I Ketut Suastika dan Dyah Tri Wahyuningtyas</i>	404
Pengembangan Aplikasi <i>M-Learning</i> pada Pokok Bahasan Persamaan dan Pertidaksamaan Linier Satu Variabel Berbasis Android <i>Ibnu Nurdiansyah, Lathiful Anwar, dan Mohamad Yasin</i>	414
Penerapan Pembelajaran Kooperatif Strategi <i>Think Talk Write</i> (TTW) pada Materi Persamaan Kuadrat yang dapat Meningkatkan Pemahaman Matematis Siswa Kelas VIII-I SMPN 8 Malang <i>Ilham Saiful Fauzi dan Ety Tejo Dwi Cahyowati</i>	423
Integrasi Kompetensi Profesional dan Kompetensi Pedagogi Guru Matematika <i>Ipung Yuwono</i>	430
Deskripsi Pemahaman Konsep Gradien Persamaan Garis Siswa SMP Negeri 4 Batu Berdasarkan Taksonomi Solo <i>Irwan Yudha Pradana, Ipung Yuwono, dan Sisworo</i>	436
Pengembangan Media Pembelajaran Berbantuan Komputer pada Materi Perbandingan Trigonometri Kelas X SMA <i>Iska Agustina, Toto Nusantara, dan Mahmuddin Yunus</i>	446
Profil Kemampuan Fundamental Matematis Siswa dalam Menyelesaikan Soal PISA dengan Tema Mendaki Gunung Fuji <i>Isti Retno Pramudya Wardhani, I Nengah Parta, dan Akbar Sutawidjaja</i>	452
Identifikasi Kesalahan Siswa dalam Menyelesaikan Soal-Soal Segiempat dan Alternatif Penyelesaiannya <i>Kamaliyah Kadir, Sri Mulyati, dan Tjang Daniel Chandra</i>	461

Penggunaan Software Geogebra dalam Membantu Siswa Memahami Konsep Persamaan Garis Lurus <i>Kholifaturo Rosidah, Cholisa Sa'dijah, dan Makbul Muksar</i>	469
Kesalahan Siswa dalam Membuat Generalisasi Pola Melalui Representasi <i>Alphanumeric</i> <i>Khomsatun Ni'mah, Purwanto, Edy Bambang Irawan, dan Erry Hidayanto</i>	479
Profil Kesalahan Siswa SMP dalam Menyelesaikan Operasi Hitung Bilangan Bulat <i>Lailatul Badriyah, Abdur Rahman As'ari, dan Hery Susanto</i>	485
Membuat Gambar Model Sebagai Salah Satu Strategi Alternatif untuk Menyelesaikan Soal Cerita Perbandingan Senilai <i>Lely Setyaningsih, Purwanto, dan Edy Bambang Irawan</i>	492
Deskripsi Komunikasi Matematis Siswa dalam Penyelesaian Soal <i>Open-Ended</i> pada Materi Statistik <i>Lilik Fauziah, Sudirman, dan Abadyo</i>	500
Pemahaman Konsep Siswa pada Unsur – Unsur Bangun Ruang Sisi Lengkung <i>Lilis Suryanti, Gatot Muhsetyo, dan Hery Susanto</i>	506
Efektivitas Pembelajaran Matematika Berbasis <i>Multiple Intelligences</i> Berbantuan Media Bonsangkar Terhadap Hasil Belajar Siswa pada Materi Operasi Hitung Pecahan <i>Lutvi Anggraini, Mohammad Edy Nurtamam, dan Mujtahidin</i>	513
Kesalahan Siswa SMP pada Penyelesaian Masalah Persamaan Garis Lurus <i>M. Fikri Zaki, Toto Nusantara, dan Sri Mulyati</i>	521
Kemampuan Komunikasi Matematis Siswa Kelas VIII SMPN 1 Sepulu pada Materi Relasi Fungsi <i>M. Sholihin, Edy Bambang Irawan, dan Dwiyanana</i>	531
Pengembangan Blended Learning Berbasis Edmodo Pada Matakuliah Pembelajaran Matematika Berbantuan Komputer <i>Mahmuddin Yunus</i>	538
Pertumbuhan Pemahaman Siswa dalam Menyelesaikan Soal Cerita Berdasarkan Teori Pirie-Kieren <i>Mamluatus Sa'adah, Susiswo, dan I Nengah Parta</i>	545
Pemahaman Siswa MTS Tentang Penjumlahan dan Pengurangan Bilangan Bulat <i>Maria Ulpah, Gatot Muhsetyo, dan I Made Sulandra</i>	555

Jenis Kesalahan Siswa dalam Menyelesaikan Soal Cerita Berdasarkan Prosedur Newman <i>Marta Mila Sughesti, Gatot Muhsetyo, dan Hery Susanto</i>	563
Analisis Kesalahan Siswa SMK dalam Menyelesaikan Soal PISA Berdasarkan Newman Error Analysis <i>MH Hidayatullah M dan Erry Hidayanto</i>	573
Motivasi Siswa dalam Belajar Matematika <i>Miftachul Rosadah, Sri Mulyati, dan Sisworo</i>	578
Pembelajaran Teorema Pythagoras dengan Metode Penemuan Terbimbing: Implementasi James Abram Garfield <i>Miftahul Fitri Afifa, Sri Mulyati, dan Akbar Sutawidjaja</i>	584
Pengembangan Media Pembelajaran Berbasis Android untuk Meningkatkan Hasil Belajar Matematika pada Siswa SMP Kelas VIII Materi Bangun Ruang Sisi Datar <i>Mohamad Januar Bagus Indranata, Susy Kuspambudi A, dan Mohamad Yasin</i>	592
Matematisasi Horizontal yang Dilakukan Siswa SMP <i>Mohammad Aliwafa, Ipung Yuwono, dan Santi Irawati</i>	598
Kesalahan Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Himpunan dan Alternatif Penyelesaian <i>Muhammad Amin, Toto Nusantara, dan Abdur Rahman As'ari</i>	607
Kemampuan Komunikasi Matematis Siswa dalam Pembelajaran Sistem Persamaan Linear Dua Variabel Menggunakan Masalah <i>Open Ended</i> <i>Mukhammad Nastahwid, Edy Bambang Irawan, dan Hery Susanto</i>	614
Pembelajaran Kooperatif Tipe STAD untuk Meningkatkan Pemahaman Konsep Siswa Kelas VIII SMPN 12 Malang pada Materi Sistem Persamaan Linear Dua Variabel <i>Nelse Yonita Kurniawati dan Sukoriyanto</i>	623
Tingkat Kognitif dan Fungsi Pertanyaan Siswa Kelas XI Pada Pembelajaran Matematika <i>Nining Darwati, Cholisa Sa'dijah, dan I Made Sulandra</i>	630
Komunikasi Matematis Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Program Linier <i>Nining Dwi Rohmawati, Subanji, dan I Made Sulandra</i>	637
Pemahaman Konsep Pecahan Siswa Kelas VII SMP <i>Nunung Srimulyani, Subanji, dan Erry Hidayanto</i>	647
Kesalahan Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Matematika: Perspektif Pemrosesan Informasi <i>Nuril Anwar, I Nengah Parta, dan Santi Irawati</i>	654

Profil Kemampuan Siswa SMK dalam Memecahkan Masalah Jarak pada Geometri Ruang Ditinjau dari Perbedaan Kemampuan Spasial <i>Nurul Jazilah dan Cholis Sa'dijah</i>	662
Profil Penalaran Matematis Siswa dalam Menyelesaikan Soal Program Linear <i>Parida, Toto Nusantara, dan Abadyo</i>	670
Evaluasi Skripsi Mahasiswa Jenis Design Research pada Program Studi Pendidikan Matematika Fakultas Matematika Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Jakarta <i>Pinta Deniyanti Sampoerno</i>	680
Peningkatan Pemahaman Geometri Materi Segi Empat dan Segitiga Melalui Pembelajaran Berdasarkan Teori Van Hiele Berseting Kooperatif STAD <i>Pratita Nindya Dyana dan Rustanto Rahardi</i>	690
Pengembangan Media Permainan Monopoli Pembelajaran Matematika Siswa Kelas 3 SD Negeri Sukorejo 2 Lamongan <i>Putri Yeni Lestari, Mohammad Edy Nurtamam, dan Wanda Ramansyah</i>	698
Kajian Tentang Kualitas LKS yang Dirancang untuk Memahami Matematika <i>Ratna Sari Dewi, Abdur Rahman As'ari, dan Makbul Muksar</i>	705
Proses Berpikir Siswa dalam Pemecahan Masalah Geometri Ruang Kelas X SMA Negeri 1 Talun <i>Reny Eka Nur Afrianti, Erry Hidayanto, dan Aning Wida Yanti</i>	712
Studi Perbandingan Prestasi Belajar Mahasiswa Antara yang Diajar dengan Tahapan Belajar Van Hiele dan Model Pembelajaran Langsung pada Materi Lingkaran <i>Restu Ria Wantika</i>	719
Analisis Kesalahan Siswa dalam Menyelesaikan Soal Cerita Matematika Materi Aritmatika Sosial Berdasarkan Analisis Newman <i>Rina, Purwanto dan I Nengah Parta</i>	725
Persepsi Guru Tentang Pemecahan Masalah Matematika Siswa di Sekolah Menengah Pertama <i>Rina Marleni, Abadyo dan Makbul Muksar</i>	732
Implementasi <i>Problem-Based Learning</i> (PBL) dalam Pembelajaran Matematika untuk Mengoptimalkan Kemampuan Interaksi Interpersonal Siswa <i>Rini Setianingsih, Ipung Yuwono, Abdur Rahman As'ari, dan Makbul Muksar</i>	741
Pengembangan Perangkat Pembelajaran Berbasis Masalah Materi Persamaan Linear Dua Variabel Kelas VIII <i>Risa Anggraini dan I Made Sulandra</i>	751

Implementasi Pembelajaran Berbasis Proyek (<i>Project Based Learning</i>) pada Mata Kuliah Penerapan Teori Graph <i>Sapti Wahyuningsih dan Darmawan Satyananda</i>	761
Penerapan Model Pembelajaran <i>Problem Based Learning</i> (PBL) untuk Meningkatkan Hasil Belajar Materi Bangun Ruang Sisi Datar <i>Saudah</i>	772
Analisis Level Penalaran Matematis Mahasiswa Berdasarkan Taksonomi Solo <i>Senja Putri Merona</i>	784
Kemampuan Siswa SMP dalam Menyelesaikan Soal Cerita Persamaan Linear Satu Variabel Berdasarkan Tahapan Newman <i>Shofia Hidayah, Dwiyana, dan Santi Irawati</i>	790
Penerapan Pembelajaran <i>Think Pair Share</i> (TPS) untuk Meningkatkan Keterampilan Pemecahan Masalah Persamaan Linear Dua Variabel Siswa Kelas VIII-1 SMP Negeri 5 Malang <i>Sirta Auliya Parameswari dan Latifah Mustofa Lestyanto</i>	798
Studi Deskriptif Tentang Proses Berpikir Siswa SMP dalam Menyelesaikan Soal PISA <i>Siti Fatimah, Gatot Muhsetyo, dan Swasono Rahardjo</i>	805
Penerapan Tahapan Polya untuk Meningkatkan Kemampuan Pemecahan Masalah Materi Statistika pada Siswa Kelas X SMKN 4 Malang <i>Siti Sa'adah Iryani, Aning Wida Yanti, dan Latifah Mustofa L</i>	814
Pembelajaran Matematika Sekolah yang Mengembangkan Kemampuan Berpikir Kritis <i>Slamet</i>	825
Pemahaman Konsep Aljabar Memberi Kontribusi Pemahaman Konsep Persamaan Trigonometri bagi Mahasiswa Program Studi Pendidikan Matematika <i>Sri Purnami</i>	830
Miskonsepsi Siswa dalam Pembelajaran Matematika pada Materi Bilangan Bulat <i>Sri Yupitawati, Sri Mulyati, dan Makbul Muksar</i>	840
Kajian Pengetahuan Prasyarat untuk Mempelajari Perbandingan pada Siswa Kelas VIII SMP Negeri 5 Kota Malang <i>Sriwati, Purwanto, dan Swasono Rahardjo</i>	848
Skema Konsep-Konsep Matematis dari Mahasiswa Calon Guru: Suatu Studi Kasus <i>Sudirman</i>	858

Deskripsi Koneksi Matematis Siswa SMK Dalam Menyelesaikan Masalah Aturan Pencacahan <i>Susanti, Sudirman, dan Tjang Daniel Chandra</i>	870
<i>Pseudo Folding Back</i> Mahasiswa Ketika Menyelesaikan Masalah Limit <i>Susiswo</i>	881
Membelajarkan Dimensi Tiga Menggunakan Software Cabri 3D <i>Syaiful Hamzah Nasution</i>	890
Identifikasi Kesulitan Siswa dalam Menyelesaikan Soal Perbandingan pada Pembelajaran Matematika <i>Syarianto, Akbar Sutawidjaja, dan Gatot Muhsetyo</i>	897
Kegagalan Mahasiswa Mengonstruksi Bukti Matematis Berdasarkan Kerangka Kerja Abstraksi Reflektif <i>Syukma Netti, Akbar Sutawidjaja, Subanji, Sri Mulyati, dan Sudirman</i>	904
Kajian Pengetahuan Prasyarat Tentang Bangun Ruang Sisi Datar pada Siswa SMP Kelas VIII-7 SMP Negeri 21 Malang <i>Teguh Edy Purwanta, Gatot Muhsetyo, dan Hery Susanto</i>	912
Klasifikasi Soal-Soal Geometri PISA Berdasarkan Karakteristik Berpikir Tingkat Tinggi <i>Titin Wahyuningsih, Abadyo, dan I Nengah Parta</i>	921
Komunikasi Matematis Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Program Linier <i>Tofan Adityawan, Susiswo, dan Abd. Qohar</i>	932
Kemampuan Representasi Matematis Siswa pada Materi Perbandingan <i>Tomy Syafrudin dan Makbul Muksar</i>	938
Pemahaman Konsep Matematika Siswa pada Materi Relasi Fungsi <i>Toni Hidayat, Sri Mulyati, dan Abd Qohar</i>	947
Pengembangan Media Pembelajaran Permainan Kartu Uno pada Pembelajaran Matematika Materi Satuan Panjang <i>Tri Azizah Ulfah, Eva Ari Wahyuni, dan Mohammad Edy Nurtamam</i>	955
Analisis Kreativitas Siswa dalam Menyelesaikan Soal Matematika <i>Ummu Sholihah</i>	962
Kemampuan Berpikir Kreatif Siswa SMP dalam Menyelesaikan Soal Bilangan Bulat <i>Wasinto, Abdur Rahman As'ari, dan Dwiyana</i>	969

Penerapan Model Pembelajaran Kooperatif Tipe <i>Teams Games Tournament</i> (TGT) Berbantuan Permainan Monopoli untuk Meningkatkan Hasil Belajar Siswa Kelas VII G di SMP Negeri 3 Batu pada Materi Aritmetika Sosial <i>Widya Arista Candra, Aning Wida Yanti, dan Lathiful Anwar</i>	976
Teori Beban Kognitif <i>Wilda Syam Tonra</i>	982
Identifikasi Pemahaman Logaritma Mahasiswa Universitas Widya Mandira Kupang Berdasarkan Teori Apos <i>Wilfridus Beda Nuba Dosinaeng, I Made Sulandra dan Dwiyana</i>	992
Analisis Efektivitas “Metode Tontalkog Berbasis Multimedia” Sebagai Pengembangan Metode Jarimatika Modern Melalui Implementasi <i>Analysis Of Covariance Method</i> <i>Wisda Miftakhul ‘Ulum dan Maylita Hasyim</i>	1001
Analisis Kesalahan Siswa dalam Memecahkan Masalah Soal Cerita Materi Perbandingan Berdasarkan Analisis Kesalahan Newman <i>Wiwik, Cholis Sa’dijah, dan Tjang Daniel Chandra</i>	1009
Lemahnya Kemampuan Siswa dalam Menyelesaikan Masalah Matematika <i>Yayon Adi Galung Sastria, Erry Hidayanto, dan Santi Irawati</i>	1017
Kesalahan Konsep Siswa pada Materi Persamaan Garis Lurus <i>Yelli Marlina, Edy Bambang Irawan, dan Abd Qohar</i>	1025
Profil Siswa SMK Dalam Memecahkan Masalah Matematika <i>Yuli Sastriyaningsih, Dwiyana, dan Subanji</i>	1032
Lembar Kerja Siswa Materi Trigonometri dengan Model Penemuan Terbimbing untuk Siswa SMA Kelas X <i>Yulia Eka Etika Kholifahtin, Ipung Yuwono, dan Santi Irawati</i>	1041
Penalaran Induktif Siswa dalam Bukti Matematis pada Penyelesaian Masalah Kaidah Pencacahan <i>Yusma Ria Zulaicha, Makbul Muksar, dan Abdur Rahman As’ari</i>	1057
Kemampuan Pemahaman Konsep Kubus dan Balok Siswa SMP <i>Zulbaili, Swasono Rahardjo, dan Abdur Rahman As’ari</i>	1064

Matematika

Regresi Komponen Utama pada Model Gographically Weighted Regression (Gwr) dengan Pembobot Adaptive Gaussian Kernel (Studi Kasus Persentase Tingkat Kemiskinan di Provinsi Jawa Timur Tahun 2012) <i>Afika Qonita Amalia dan Nur Atikah</i>	1075
Analisis Metoda AHP dan Promethee pada Pemilihan Pelaksana Proyek (Studi Kasus : PT. PJB UP Cirata) <i>Alvida Mustika Rukm, dan Relita Ega Aulia</i>	1085
Himpunan Invarian dari Sistem Fungsi Teriterasi pada Himpunan Cantor Seperlima <i>Aris Maulana, Imam Supeno, dan Dahliatul Hasanah</i>	1095
Karakteristik Operator Proyeksi pada Ruang Hilbert <i>Arta Ekayanti dan Ch. Rini Indrati</i>	1100
Implementasi Algoritma Improved Greedy Search pada <i>Capacitated Vehicle Routing Problem</i> (CVRP) <i>Auridha Nisa Fatwantika, Sapti Wahyuningsih, dan Darmawan Satyananda</i>	1106
Pengaruh Aliran Hidrodinamika Magnet dari Fluida Nano yang Melewati Medium Berpori Berbentuk Silinder <i>Basuki Widodo, Deviana Aryany, dan Didik Khusnul Arif</i>	1114
Aliran Fluida Magnetohidrodinamik Viskoelatis Tersuspensi yang Melewati Pelat Datar <i>Basuki Widodo, Rina Sahaya, dan Chairul Imron</i>	1123
Sifat Kelengkapan Ruang Metrik Bernilai Kompleks <i>Dahliatul Hasanah</i>	1131
Penyelesaian Masalah Penjadwalan Flowshop dengan Menggunakan Algoritma Genetika <i>Daryono Budi Utomo, Muhammad Isa Irawan, dan Angga Firmansyah</i>	1138
Analisis Cluster dan Analisis Diskriminan Terhadap Kualitas Pendidikan Sekolah Menengah Pertama di Kota Wisata Batu <i>Dhita Nur Oktaviani dan Trianingsih Eni Lestari</i>	1146
Teori Ideal Pada Semiring \mathbb{Z}_0^+ Dan Penggunaanya pada Karakterisasi Ideal 2-Absorbing pada Semiring <i>Dian Winda Setyawati dan Muhamad Suef</i>	1157
Perbandingan Metode Analitik dan Metode Heuristik pada Optimisasi Masalah Transportasi Distribusi Semen <i>Dinita Rahmalia</i>	1164

Peramalan Jumlah Wisatawan Mancanegara Menggunakan Metode Arimax <i>Fitria Rahmawati dan Trianingsih Eni Lestari</i>	1173
Gelanggang Baer-Kaplansky Dan Ekivalensi Gelanggang <i>Hery Susanto</i>	1180
Analisis Selesaian Masalah 3-Warna via Basis Groebner <i>I Made Sulandra</i>	1185
Implementasi Steganografi Menggunakan Modifikasi Metode <i>Least Significant Bit (LSB)</i> pada Citra Digital Pada Teks yang Dienkripsi dengan Vigenere Cipher <i>Ica Selvia Ariyanti, Mimiep Setyowati Madja, dan Mohamad Yasin</i>	1195
Pengujian Keacakan Algoritme Piccolo dengan Uji <i>Linear Span</i> <i>Is Esti Firmanesa dan Wildan</i>	1203
Uji <i>Linear Span</i> pada Algoritme SPECK <i>Is Esti Firmanesa dan Wildan</i>	1212
Pemodelan <i>Geographically Weighted Regression (GWR)</i> dengan Fungsi Pembobot <i>Adaptive Bisquare Kernel</i> untuk Data Angka Kematian Ibu (Studi Kasus Angka Kematian Ibu di Jawa Tengah Tahun 2014) <i>Laily Kurniawati dan Nur Atikah</i>	1220
<i>Binary Cuckoo Search</i> untuk Masalah Optimasi Diskrit <i>Lilik Muzdalifah</i>	1229
Penerapan Regresi Logistik Biner untuk Melihat Kualitas Pelayanan Terhadap Kepuasan Pasien di Rumah Sakit Jiwa Dr. Radjiman Wediodiningrat Lawang <i>Merryana dan Trianingsih Eni Lestari</i>	1234
Pendekatan Citra Digital untuk Mencari Luas Daerah tak Teratur <i>Mohamad Yasin, Susy Kuspambudi A, dan Mimiep Setyowati Madja</i>	1241
Karakteristik Co-Ideal dan Hasil Baginya <i>Najibatul Awalliyah dan Santi Irawati</i>	1249
Analisa Penyebaran Penyakit Difteri Type Sei dengan Pendekatan Dua Grup <i>Nur Asiyah dan M. Setijo Winarko</i>	1258
Analisa Model Return Saham PT Indofood Sukses Makmur Tbk <i>Nuri Wahyuningsih, Wahyu Fistia Doctorina, dan Cendy Rahmawati</i>	1267
Pemodelan GWLR dengan Fungsi Pembobot <i>Adaptive Gaussian Kernel</i> (Studi Kasus Laju Pertumbuhan Penduduk Jawa Timur Tahun 2013) <i>Purnomo dan Nur Atikah</i>	1273

Peramalan Kurs Jual dan Kurs Beli <i>US Dollar</i> dalam Rupiah Menggunakan Metode Varima (<i>Vector Autoregressive Integrated Moving Average</i>) <i>Robiatul Adawiyah dan Swasono Rahardjo</i>	1283
Simulasi Numerik Perpindahan Panas Konduksi 1-Dimensi dengan Syarat Batas Dirichlet Menggunakan Skema Beda Hingga Kompak <i>Rofila El Maghfiroh dan Muhammad Badaruz Zaman</i>	1290
Metode Numerik Stepest Descent dengan Arah Pencarian Rerata Aritmatika <i>Rukmono Budi Utomo</i>	1298
Co-Ideal Prima Lemah pada Suatu Semi Ring <i>Santi Irawati</i>	1307
Pengenalan Soal Geometri Sangaku <i>Tjang Daniel Chandra</i>	1312
Analisa Karakteristik Model Distribusi Kontak dalam rangka Menentukan M-Matriks Non Singular pada Bilangan Reproduksi Dasar <i>Utami Dyah Purwati dan Hariyanto</i>	1317
<i>Ant Colony Optimization (ACO)</i> pada <i>Job Shop Scheduling Problem (JSSP)</i> <i>Wahidatul Fatin Amanullah, Sapti Wahyuningsih, dan Lucky Tri Oktoviana</i>	1322
Evaluasi Algoritma Clefia Menggunakan Uji <i>Xor Table Distribution</i> , <i>Strict Avalanche Criterion (SAC)</i> , dan <i>Bit Independence Criterion (BIC)</i> <i>Wahyu Indah Rahmawati</i>	1329
Pengujian Keacakan Kriptografi pada Algoritma SPECK dengan Menggunakan Uji Coverage <i>Wahyu Indah Rahmawati dan Wildan</i>	1336

KARAKTERISTIK OPERATOR PROYEKSI PADA RUANG HILBERT

Arta Ekayanti¹⁾, Ch. Rini Indrati²⁾

¹⁾Universitas Muhammadiyah Ponorogo

²⁾Universitas Gajah Mada

arta_ekayanti@ymail.com

Abstrak

Pada artikel ini, akan dibahas mengenai definisi operator proyeksi. Dengan memanfaatkan sifat ortogonalitas himpunan dan definisi operator proyeksi, diselidiki sifat dan karakteristik operator proyeksi. Hasil dari penelitian ini diantaranya penjumlahan dari operator proyeksi merupakan operator proyeksi, dengan syarat daerah hasil dari operator proyeksi tersebut saling ortogonal. Lebih lanjut, perkalian dua operator proyeksi merupakan operator proyeksi, dengan syarat perkalian tersebut bersifat komutatif.

Kata kunci: operator proyeksi, operator adjoint, ruang Hilbert, ruang nol, ortogonal

PENDAHULUAN

Didalam matematika analisis, khususnya analisis fungsional telah dikenalkan konsep operator pada ruang Hilbert. Untuk suatu ruang Hilbert H , koleksi operator linear terbatas biasa dinotasikan dengan $B(H)$. Operator pada ruang Hilbert diantaranya operator isometri, operator *unitary*, operator *self-adjoint*, operator proyeksi, operator normal. Masing-masing operator memiliki arah pengembangan yang berbeda-beda. Untuk operator proyeksi, salah satu pengembangannya yaitu pada bahasan ukuran bernilai proyeksi, yang selanjutnya digunakan pada pembahasan konsep spektral. Hal ini sejalan dengan penelitian yang telah dilakukan oleh Jordan Bell pada tahun 2014 yang berjudul *Projection-Valued Measure and Spectral Integral*. Pada penelitian ini, hanya disebutkan saja mengenai karakteristik dari operator proyeksi, tanpa ada penjelasan mengenai karakteristik tersebut terkait pembuktiannya. Oleh karena itu, dalam penelitian ini penulis bermaksud memberikan pembahasan mengenai karakteristik operator proyeksi terutama bukti dari masing-masing karakteristik.

Sebelum membahas lebih lanjut mengenai operator proyeksi, berikut diberikan terlebih dahulu mengenai operator adjoint. Mengacu pada Berberian (1961), berikut diberikan definisi operator adjoint.

Teorema 1.1 Diketahui H dan K ruang Hilbert. Untuk setiap $T: H \rightarrow K$ operator linear kontinu, maka terdapat dengan tunggal operator linear kontinu $T^*: K \rightarrow H$ sehingga untuk setiap $x \in H$ dan $y \in K$, berakibat $\langle T(x), y \rangle = \langle x, T^*(y) \rangle$.

Diperhatikan bahwa, pada suatu ruang Hilbert, operator linear kontinu ekuivalen dengan operator linear terbatas (Kreyszig, 1978: 97). Eksistensi dari operator adjoint dijamin oleh teorema di atas. Untuk selanjutnya, operator T^* pada teorema di atas disebut operator adjoint dari T .

Diberikan ruang Hilbert H . Diperhatikan bahwa ruang Hilbert merupakan ruang pre-Hilbert yang lengkap. Mengacu pada Berberian (1961), berikut diberikan pembahasan mengenai komplemen orthogonal pada ruang Hilbert.

Definisi 1.2 Diketahui H ruang pre-Hilbert dan $M \subseteq H$. Annihilator dari M , dinotasikan M^\perp , didefinisikan sebagai berikut:

$$M^\perp = \{x \in H : x \perp y \text{ untuk setiap } y \in M\}.$$

Himpunan $M \subseteq H$ dikatakan tertutup, jika $\overline{M} = M$ dengan \overline{M} merupakan klosur M .

Teorema 1.3 Diketahui H ruang pre-Hilbert dan $M \subseteq H$. Himpunan M^\perp merupakan subruang tertutup H .

Teorema 1.4 Diketahui H ruang pre-Hilbert, M dan N adalah subruang dari H . Jika $M \perp N$ maka untuk setiap $x \in M + N$ terdapat dengan tunggal $y \in M$ dan $z \in N$ dengan $x = y + z$.

Pada pembahasan selanjutnya, digunakan notasi $M \oplus N$ untuk menyatakan $M + N$ pada Teorema 1.4.

Teorema 1.5 Diketahui H ruang pre-Hilbert. Jika N subruang lengkap dari H , maka berlaku $H = N \oplus N^\perp$ dan $N = N^{\perp\perp}$.

Akibat 1.6 Diketahui H ruang pre-Hilbert. Jika N subruang tertutup dari H , maka berlaku $H = N \oplus N^\perp$ dan $N = N^{\perp\perp}$.

Diperhatikan untuk suatu ruang Hilbert H dengan $T \in B(H)$, himpunan semua $x \in H$ dengan $T(x) = \theta \in H$ disebut ruang nol T , ditulis $\mathcal{N}(T) = \{x \in H : T(x) = \theta\}$. Salah satu sifat ruang nol dapat dilihat pada teorema berikut:

Teorema 1.7 Diketahui ruang Hilbert H dan $T \in B(H)$. Ruang nol dari operator T yaitu $\mathcal{N}(T)$ merupakan subruang tertutup.

Di dalam penelitian ini akan dibahas mengenai definisi, sifat serta karakteristik operator proyeksi pada suatu ruang Hilbert disertai dengan pembuktiannya. Dalam proses pembuktiannya, penulis mengacu pada Halmos (1951) dan Rudin (1976). Penelitian ini diharapkan dapat memberikan kontribusi terhadap perkembangan ilmu pengetahuan khususnya mengenai operator proyeksi pada ruang Hilbert, serta memberikan motivasi kepada para pembaca untuk melakukan penelitian mengenai operator pada ruang Hilbert, misalnya sifat serta karakteristik operator *self-adjoint*.

PEMBAHASAN

Definisi 2.1. Diketahui H ruang Hilbert dan $t \in B(H)$. Operator T disebut operator proyeksi jika dan hanya jika $T^* = T = T^2$.

Untuk $T \in B(H)$ operator proyeksi, namakan $T(H) = N$. Diambil sebarang $y \in N$, maka untuk I operator identitas berlaku

$$(I - T)(y) = (I - T)(T(x)) = T(x) - T^2(x) = T(x) - T(x) = \theta,$$

dengan $x \in H$. Jadi, $y \in \mathcal{N}(I - T)$ dengan $\mathcal{N}(I - T)$ ruang nol $(I - T)$. Selanjutnya, diambil sebarang $x \in \mathcal{N}(I - T)$, maka berlaku $(I - T)(x) = \theta$. Jadi, berlaku $T(x) = x$, yaitu $x \in N$. Dengan demikian, disimpulkan bahwa $N = \mathcal{N}(I - T)$. Berdasarkan Teorema 1.7, N tertutup. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 1.6, ruang Hilbert H dapat dinyatakan $H = N \oplus N^\perp$.

Operator proyeksi $T \in B(H)$ dengan $T(H) = N$ disebut operator proyeksi pada N , selanjutnya dinotasikan dengan P_N . Dengan demikian $P_N: H \rightarrow H$ memenuhi $P_N(x) = x$ untuk setiap $x \in N$ dan $P_N(x) = \theta$ untuk setiap $x \in N^\perp$. Lebih lanjut, setiap $T \in B(H)$ proyeksi menentukan dengan tunggal $M \subseteq H$ subruang tertutup H sehingga $T = P_M$. Hal ini dapat dilihat pada teorema berikut ini.

Teorema 2.2. Diketahui H ruang Hilbert dan $T \in B(H)$. Jika T operator proyeksi maka terdapat dengan tunggal $M \subseteq H$ subruang tertutup sehingga $T = P_M$. Lebih lanjut, $M = T(H)$ dan $M^\perp =$

$$\{x \in H: T(x) = \theta\}.$$

Bukti: Didefinisikan $M = \{y \in H: T(y) = y\}$. Dengan demikian, M merupakan ruang nol dari operator $T - I$ dengan I operator identitas. Menurut Teorema 1.7, $M \subseteq H$ subruang tertutup. Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $M = T(H)$ dan $M^\perp = \{x \in H: T(x) = \theta\}$. Diambil sebarang $y \in M$, maka diperoleh $y = T(y) \in T(H)$. Sebaliknya, diambil sebarang $y \in T(H)$, maka terdapat $x \in H$ sehingga $T(x) = y$. Karena T proyeksi maka

$$T(y) = T(T(x)) = T^2(x) = T(x) = y,$$

artinya $y \in M$. Jadi, $M = T(H)$. Diambil sebarang $x \in \{x \in H: T(x) = \theta\}$, maka $T(x) = \theta$. Diambil sebarang $y \in T^*(x)$ berarti terdapat $z \in H$ sehingga $T^*(z) = y$. Selanjutnya,

$$\langle x, y \rangle = \langle x, T^*(z) \rangle = \langle T(x), z \rangle = \langle \theta, z \rangle = 0,$$

untuk setiap $y \in T^*(H)$. Dengan demikian $x \in (T^*(H))^\perp$, maka $\{x \in H: T(x) = \theta\} \subseteq (T^*(H))^\perp$. Diambil sebarang $x \in (T^*(H))^\perp$ maka untuk setiap $z \in H$ diperoleh $\langle z, T^*(x) \rangle = 0$. Karena berlaku untuk sebarang $z \in H$, maka untuk $z = T(x)$ berlaku $\langle T(x), T(x) \rangle = 0$. Akibatnya, $T(x) = \theta$. Dengan demikian, $(T^*(H))^\perp \subseteq \{x \in H: T(x) = \theta\}$. Jadi, $(T^*(H))^\perp = \{x \in H: T(x) = \theta\}$. Karena $T^* = T$ maka

$$\{x \in H: T(x) = \theta\} = (T^*(H))^\perp = (T(H))^\perp = M^\perp.$$

Selanjutnya, akan ditunjukkan bahwa $T = P_M$. Diambil sebarang $x \in H$, karena $H = M \oplus M^\perp$ maka $x = y + z$ dengan $x \in M$ dan $z \in M^\perp$, sehingga berlaku

$$P_M(x) = y = y + \theta = T(y) + T(z) = T(y + z) = T(x).$$

Jadi, $P_M = T$. Selanjutnya, akan ditunjukkan ketunggalan dari M . Andai ada N subruang tertutup H dengan $P_N = T$. Akibatnya, $P_N = P_M$. Diambil sebarang $x \in H$. Jika $x \in M$ maka $P_N(x) = P_M(x) = x$ dan jika $x \in N$ maka $P_M(x) = P_N(x) = x$. Jadi, disimpulkan bahwa $N = M$. ■

Selanjutnya, pada teorema berikut diberikan beberapa sifat operator proyeksi.

Teorema 2.3. Jika $P \in B(H)$ operator proyeksi maka berlaku

1. $\langle P(x), x \rangle = \|P(x)\|^2$ untuk setiap $x \in H$.
2. $P \geq 0$.
3. $\|P\| \leq 1$. Lebih lanjut, untuk $P(H) \neq \{0\}$ berlaku $\|P\| = 1$.

Bukti:

1. Diambil sebarang $x \in H$, berlaku $\langle P(x), x \rangle = \langle P^2(x), x \rangle = \langle P(x), P(x) \rangle = \|P(x)\|^2$.
2. Diambil sebarang $x \in H$, berlaku $\langle P(x), x \rangle = \langle P^2(x), x \rangle = \langle P(x), P(x) \rangle = \|P(x)\|^2 \geq 0$.
3. Diambil sebarang $x \in H$, berdasarkan ketaksamaan Cauchy-Schwarz diperoleh

$$\|P(x)\|^2 = \langle P(x), P(x) \rangle = \langle P^2(x), x \rangle = \langle P(x), x \rangle \leq \|P(x)\| \|x\|.$$

Dengan demikian berlaku $\frac{\|P(x)\|}{\|x\|} \leq 1$ untuk setiap $x \in H$ dengan $x \neq 0$. Jadi, $\|P\| \leq 1$.

Untuk setiap $x \in P(H)$ dengan $x \neq 0$ berlaku $\frac{\|P(x)\|}{\|x\|} = \frac{\|x\|}{\|x\|} = 1$. ■

Teorema 2.4. Jika H ruang Hilbert dan $P_1, P_2 \in B(H)$, maka berlaku dua pernyataan berikut:

1. Operator $P = P_1 P_2 \in B(H)$ proyeksi jika dan hanya jika $P_1 P_2 = P_2 P_1$. Lebih lanjut, P proyeksi pada $N = N_1 \cap N_2$ dengan $N_i = P_i(H)$, $i = 1, 2$.
2. Diketahui $P \in B(H)$ proyeksi. Dua subruang tertutup $U, V \subseteq H$ ortogonal jikan dan hanya jika $P_U P_V = 0$.

Bukti:

1. (\Rightarrow) Diketahui P proyeksi, maka berlaku $P_1 P_2 = P = P^* = (P_1 P_2)^* = P_2^* P_1^* = P_2 P_1$.
 (\Leftarrow) Diketahui $P_1 P_2 = P_2 P_1$, maka berlaku $P = P_1 P_2 = P_2 P_1 = P_2^* P_1^* = (P_1 P_2)^* = P^*$. Selanjutnya, $P^2 = (P_1 P_2)^2 = P_1^2 P_2^2 = P_1 P_2 = P$. Dengan demikian berlaku $P^* = P = P^2$, dengan kata lain $P = P_1 P_2$ proyeksi. Lebih lanjut, diperhatikan bahwa P_1 merupakan proyeksi pada N_1 , sehingga $P_1(P_2(x)) \in N_1$. Demikian juga untuk P_2 , karena P_2

merupakan proyeksi pada N_2 maka berlaku $P_2(P_1(x)) \in N_2$. Dengan demikian, berlaku $P(x) \in N_1 \cap N_2$. Karena berlaku untuk sebarang $x \in H$, maka P merupakan proyeksi pada $N = N_1 \cap N_2$.

2. (\Rightarrow) Diketahui $U \perp V$ maka $U \cap V = 0$ dan $P_U P_V(x) = P(x) = 0$ untuk setiap $x \in H$. Dengan demikian $P_U P_V = 0$.

(\Leftarrow) diketahui $P_U P_V = 0$. Diambil sebarang $u \in U$ dan $v \in V$, maka berlaku

$$\langle u, v \rangle = \langle P_U(u), P_V(v) \rangle = \langle u, P_U P_V(v) \rangle = \langle u, 0 \rangle = 0.$$

Dengan demikian $U \perp V$. ■

Diberikan operator proyeksi $P_n \in B(H)$, $n \in \mathbb{N}$. Operator proyeksi $P_m \perp P_n$ untuk $m \neq n$ artinya $N_m = P_m(H)$ dan $N_n = P_n(H)$ orthogonal. Selanjutnya pada teorema berikut ini ditunjukkan mengenai sifat penjumlahan dari proyeksi.

Teorema 2.5 Diketahui H ruang Hilbert dan $P_1, P_2 \in B(H)$ operator proyeksi. Penjumlahan $P = P_1 + P_2 \in B(H)$ proyeksi jika dan hanya jika $N_1 = P_1(H)$ dan $N_2 = P_2(H)$ orthogonal. Lebih lanjut, jika $P = P_1 + P_2$ operator proyeksi, maka P proyeksi pada $N = N_1 \oplus N_2$.

Bukti:

(\Rightarrow) Diketahui $P = P_1 + P_2$ proyeksi. Diperhatikan bahwa

$$\begin{aligned} P_1 + P_2 &= (P_1 + P_2)^2 \\ &= P_1^2 + P_1 P_2 + P_2 P_1 + P_2^2 \\ &= P_1 + P_1 P_2 + P_2 P_1 + P_2 \end{aligned}$$

Akibatnya, diperoleh $P_1 P_2 + P_2 P_1 = 0$. Selanjutnya, dengan mengkomposisikan P_2 dari kiri maka diperoleh $P_2 P_1 P_2 + P_2^2 P_1 = P_2 P_1 P_2 + P_2 P_1 = 0$. Kemudian, dengan mengkomposisikan persamaan di atas dengan P_2 dari kanan, maka diperoleh

$$P_2 P_1 P_2^2 + P_2 P_1 P_2 = P_2 P_1 P_2 + P_2 P_1 P_2 = 2P_2 P_1 P_2 = 0.$$

Karena $P_2 P_1 P_2 + P_2 P_1 = 0$, maka diperoleh $P_2 P_1 = 0$. Berdasarkan Teorema 2.4 poin 2, disimpulkan bahwa $N_1 \perp N_2$.

(\Leftarrow) Diperhatikan bahwa $N_1 \perp N_2$, maka dengan Teorema 2.4 berlaku $P_1 P_2 = P_2 P_1 = 0$. Diperhatikan bahwa

$$P^2 = (P_1 + P_2)^2 = P_1^2 + P_1 P_2 + P_2 P_1 + P_2^2 = P_1 + P_1 P_2 + P_2 P_1 + P_2 = P_1 + P_2 = P.$$

Selanjutnya, diperhatikan bahwa $P^* = (P_1 + P_2)^* = P_1^* + P_2^* = P_1 + P_2 = P$. Dengan demikian, diperoleh $P^2 = P = P^*$. Dengan kata lain, P operator proyeksi.

Selanjutnya, diambil sebarang N subruang tertutup dari H , dengan N range dari P . Karena $P = P_1 + P_2$, maka untuk setiap $x \in H$ berlaku $y = P(x) = P_1(x) + P_2(x) \in N$. Diperhatikan bahwa $P_1(x) \in N_1$ dan $P_2(x) \in N_2$, maka $y \in N_1 \oplus N_2$. Dengan demikian $N \subseteq N_1 \oplus N_2$. Diambil sebarang $v \in N_1 \oplus N_2$ maka $v = y_1 + y_2$ dengan $y_1 \in N_1$ dan $y_2 \in N_2$. Diperhatikan bahwa

$$P(v) = P_1(v) + P_2(v) = P_1(y_1 + y_2) + P_2(y_1 + y_2) = P_1(y_1) + P_1(y_2) + P_2(y_1) + P_2(y_2)$$

Dari bentuk di atas diperoleh $P(v) = P_1(y_1) + P_2(y_2) = y_1 + y_2 = v$. Jadi, $v \in N$, maka diperoleh $N_1 \oplus N_2 \subseteq N$. Dengan demikian disimpulkan bahwa $N = N_1 \oplus N_2$. ■

Selanjutnya pada teorema berikut diberikan sifat-sifat lain yang berlaku untuk operator proyeksi.

Teorema 2.6 Diketahui H ruang Hilbert dan $P_1, P_2 \in B(H)$ operator proyeksi sehingga $N_1 = P_1(H)$ dan $N_2 = P_2(H)$. Misalkan $\mathcal{N}(P_1)$ ruang nol P_1 dan $\mathcal{N}(P_2)$ ruang nol P_2 . Kelima pernyataan berikut ekuivalen.

1. $P_1 P_2 = P_2 P_1 = P_1$.
2. $\|P_1(x)\| \leq \|P_2(x)\|$ untuk setiap $x \in H$.
3. $P_1 \leq P_2$.
4. $\mathcal{N}(P_1) \supseteq \mathcal{N}(P_2)$.
5. $N_1 \subseteq N_2$.

Bukti:

(1 \Rightarrow 2) Berdasarkan Teorema 2.3 poin ke-3, $\|P_1\| \leq 1$. Dengan demikian, untuk setiap $x \in H$ berlaku

$$\|P_1(x)\| = \|P_1P_2(x)\| \leq \|P_1\| \|P_2(x)\| \leq \|P_2(x)\|.$$

(2 \Rightarrow 3) Berdasarkan Teorema 2.3 poin pertama, $\langle P(x), x \rangle = \|P(x)\|^2$ untuk setiap $x \in H$. Dengan demikian untuk sebarang $x \in H$ berlaku

$$\langle P_1(x), x \rangle = \|P_1(x)\|^2 \leq \|P_2(x)\|^2 = \langle P_2(x), x \rangle.$$

Jadi, disimpulkan bahwa $P_1 \leq P_2$.

(3 \Rightarrow 4) Diambil sebarang $x \in \mathcal{N}(P_2)$, maka $P_2(x) = 0$. Berdasarkan Teorema 2.3 poin pertama berlaku

$$\|P_1(x)\|^2 = \langle P_1(x), x \rangle \leq \langle P_2(x), x \rangle = 0.$$

Dengan demikian, diperoleh $P_1(x) = 0$ artinya $x \in \mathcal{N}(P_1)$. Jadi, $\mathcal{N}(P_2) \subseteq \mathcal{N}(P_1)$.

(4 \Rightarrow 5) Diperhatikan bahwa $\mathcal{N}(P_j)$ merupakan komplemen orthogonal N_j di H . Jadi, $\mathcal{N}(P_1) = N_1^\perp$ dan $\mathcal{N}(P_2) = N_2^\perp$. Diketahui $\mathcal{N}(P_1) \supseteq \mathcal{N}(P_2)$ artinya $N_1^\perp \supseteq N_2^\perp$. Dengan demikian jelas bahwa $N_1 \subseteq N_2$.

(5 \Rightarrow 1) Diambil sebarang $x \in H$ sehingga $P_1(x) \in N_1$. Karena $N_1 \subseteq N_2$ maka $P_1(x) \in N_2$. Dengan demikian $P_2(P_1(x)) = P_1(x)$. Artinya $P_2P_1 = P_1$. Karena P_1 proyeksi maka berlaku

$$P_1 = P_1^* = (P_2P_1)^* = P_1^*P_2^* = P_1P_2.$$

Jadi, disimpulkan bahwa $P_1 = P_1P_2 = P_2P_1$. ■

KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan pembahasan diatas, dapat ditarik kesimpulan bahwa perkalian dua operator merupakan operator proyeksi jika dan hanya jika perkalian operator tersebut bersifat komutatif. Penjumlahan dua operator proyeksi merupakan operator proyeksi jika dan hanya jika daerah hasil operator proyeksi tersebut orthogonal. Sedangkan sifat yang lain, jika P operator proyeksi berlaku

1. $\langle P(x), x \rangle = \|P(x)\|^2$ untuk setiap $x \in H$.
2. $P \geq 0$.
3. $\|P\| \leq 1$. Lebih lanjut, untuk $P(H) \neq \{0\}$ berlaku $\|P\| = 1$.

Untuk P_1 dan P_2 proyeksi, pernyataan berikut ekuivalen

1. $P_1P_2 = P_2P_1 = P_1$.
2. $\|P_1(x)\| \leq \|P_2(x)\|$ untuk setiap $x \in H$.
3. $P_1 \leq P_2$.
4. $\mathcal{N}(P_1) \supseteq \mathcal{N}(P_2)$ dengan $\mathcal{N}(P_1)$ ruang nol P_1 dan $\mathcal{N}(P_2)$ ruang nol P_2 .
5. $N_1 \subseteq N_2$ dengan $N_1 = P_1(H)$ dan $N_2 = P_2(H)$.

DAFTAR RUJUKAN

- Bell, J. 2014. *Projection-Valued Measure and Spectral Integral*. <http://individual.utoronto.ca/jordanbell/notes/pvm.pdf>, diakses tanggal 8 November 2014.
- Berberian, S.K. 1961. *Introduction to Hilbert Spaces*. Oxford University Press, New York.
- Halmos, P., R. 1951. *Introduction to Hilbert Spaces and the Theory of Spectral*

- Multiplicity*. Chelsea Publishing Company, New York.
- Kreyszig, E. 1978. *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York.
- Rudin, W. 1976. *Principles of Mathematics Analysis*. McGraw-Hill, Inc, United States of America.